Zenbakizko Metodoak II,

Maider Sada Allo

Gaien Aurkibidea

1

1 Gaia:

Zenbakizko Interpolarizazioa **3**
1.1 Sarrera 3
1.2 Interpolarizazio polinomial zuzena 3
1.3 Lagrangeren Interpolarizazioa 4
1.4 Newtonen Interpolarizazio Formula 6
1.5 Newton-Gregoryren diferentzia atzerakorraren formula 10
1.5.1 Koefizienteak 11
1.5.2 Oinarri funtzioak 11
1.6 Interpolazio arrazionala 13

2 Gaia:

Zenbakizko Integrazioa **17**
2.1 Sarrera 17
2.2 Trapezioaren Formula 17
2.2.1 Formulazioa 17
2.2.2 Errorea 18
2.2.3 Trapezioaren formula konposatua 19
2.3 Newton-Cotesen Integrazio Formulak 19
2.3.1 Formularen eraikuntza 20
2.3.2 Errorearen bornapena 21
2.4 Newton-Cotesen Formula Konposatuak 22
2.4.1 Formularen eraikuntza 22
2.4.2 Errorearen bornapena 23
2.5 Extrapolazio Formulak. Rombergen Kuadratura 24

3 Gaia:

Ekuazio Diferentzialen Ebazpena **27**
3.1 Sarrera 27

3.1.1 Ordenaren Beherapena . . . 27
3.1.2 Existentzia . . . 27
3.2 Zenbakizko Metodoak . . . 28
3.3 Eulerren Metodo Esplizitua . . . 28
3.3.1 Formulazioa . . . 28
3.3.2 Errorea eta konbergentzia . . . 29
3.3.3 Zero-egonkortasuna . . . 30
3.3.4 Egonkortasun absolutuko eremua . . . 31

4 Gaia:

Urrats Bateko Metodoak. Runge-Kutta Metodoak 33
4.1 Runge-Kutta Metodoak . . . 33
4.2 Metodoaren Konsistentzia eta Egonkortasuna . . . 34
4.3 Orden Handiko Runge-Kutta Metodoak . . . 38
4.3.1 p $\geq$ 1-rako baldintzak . . . 39
4.3.2 p $\geq$ 2-rako baldintzak . . . 39
4.3.3 Orokorrean . . . 41
4.4 Butcher-en Ordenaren Mugak . . . 42
4.5 Errorearen Analisia eta Urratsaren Egokipena . . . 42

5 Gaia:

Urrats Ugariko Metodo Linealak 45
5.1 Sarrera . . . 45
5.2 Metodoen Konbergentzia . . . 45
5.2.1 Tinkotasuna eta tinkotasun ordena . . . 46
5.2.2 Zero-egonkortasuna . . . 48
5.2.3 Baliokidetasun teorema . . . 50
5.3 Egonkortasun eremuak . . . 50
5.4 Egonkortasun absolutua . . . 50
5.4.1 Egonkortasun absolutuko eremuak aurkitzeko metodoak 51
5.5 Abiarazle zuzentzaile metodoak . . . 55
5.5.1 Abiarazle-Zuzentzaile metodoen analisia . . . 56

1 Gaia:

Zenbakizko Interpolarizazioa

1.1 Sarrera

Askotan gertaera bate definitzen duen funtzioa ezagutzea beharrezkoa da baina ez dago metodorik hau zein den jakiteko. Horregatik, funtzio hau hurbiltzeko metodoak bilatu behar ditugu. Hau izanen da gai honen helburua.

(x_i,y_i) motako puntuen multzoa izanen dugu hasierako datutzat eta hemendik pasatzen den funtzioa eraiki beharko dugu metodo desberdinak erabiliz. Funtzio hau hurbiltzeko erabilitako ebazpena lineala edo ez lineala izan daiteke:

- Polinomiala: $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$(lineala)
- Trigonometrikoa: $p(x) = a_0+a_1e^{-ix}+a_2e^{ix}+a_3e^{-2x}+...+a_{2n}e^{inx}$(lineala)
- Errazionala: $\dfrac{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + ... + b_mx^m}$(ez lineala)
- Exponentziala: $p(x) = a_0e^{\lambda_0 x} + a_1e^{\lambda_1 x} + a_2x^2 + ... + a_ne^{\lambda_n x}$(ez lineala)

Hasi gaitezen lehenengo metodoarekin.

1.2 Interpolarizazio polinomial zuzena

Metodo honetan $\{(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)\}$ puntuak izanda puntu hauetatik pasatzen den $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ polinomioa lortzen saiatuko gara. Horretarako funtzioa dauzkagun puntuetan ebaluatzean lorturiko sistema ebatzi beharko dugu(ezezagunak a_i izanik.):

$$\begin{cases} p(x_0) = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1}x_0 + ... + \mathbf{a_n}x_0^n \\ p(x_1) = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1}x_0 + ... + \mathbf{a_n}x_0^n \\ \vdots \\ p(x_n) = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1}x_n + ... + \mathbf{a_n}x_n^n \end{cases}$$

Edo, modu matrizialean idatzita:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a_0} \\ \mathbf{a_1} \\ \vdots \\ \mathbf{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Teorema 1 *Izan bitez $\{(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)\}$ n+1 puntu desberdinetako multzoa (i $\neq$ j bada $x_i \neq x_j$). Orduan existitzen da n mailako $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ polinomio interpolatzaile bakar bat non $\forall i = 1, ..., n$ $p(x_i) = y_i$.*

1.3 Lagrangeren Interpolarizazioa

Askotan aurreko metodoan planteatutako sistema ebaztea zailegia da horregatik beste metodo batzuk erabili behar ditugu. Lagrangeren metodoaren planteamendua hurrengoan datza:
Gure helburua polinomio errezak erabiliz gure polinomioa ateratzea da, polinomio zehatz batzuk definituko ditugu hurrengoa betetzen dutenak:

$$\forall i = 1, ..., n \qquad \varphi(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ } baldin \text{ } \mathbf{x} = x_i \\ 0 \text{ } baldin \text{ } \mathbf{x} = x_j \text{ } j \neq i \end{cases}$$

Polinomio hauek goian azaldutakoa bete dezaten, hurrengo eran definituko ditugu:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{j \neq i}(\mathbf{x} - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

Hortaz, p funtzioa hurrengo eran definituz gero,

$$p(\mathbf{x}) = y_0\varphi_0(\mathbf{x}) + y_1n\varphi_1(\mathbf{x}) + ... + y_n\varphi_n(\mathbf{x})$$

Orduan,

- $\forall i = 1, ..., np(x_i) = y_i$
- p n mailako polinomio askeen konbinazioa izateagatik n mailako polinomioa da

Beraz, aurkitu nahi genuen polinomioa lortu dugu.

Metodoaren Algoritmoa:

- $\{(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)\}$ n+1 puntuetzako interpolarizazioa eginen dugu.
- Definitu φ_i funtzioak hurrengo eran:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \prod_{i \neq j} \frac{(\mathbf{x} - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

- Definitutako funtzio laguntzaileak erabiliz, definitu $p(\mathbf{x})$ polinomio interpolatzailea:

$$p(\mathbf{x}) = y_0\varphi_0(\mathbf{x}) + ... + y_n\varphi_n(\mathbf{x})$$

Adibidea 1 *Demagun (1,5), (2,2) eta (3,4) puntuak ditugua. Eraiki puntu hauetatik pasatzen den polinomio interpolatzailea Lagrangeren formulaz.*

Oinarrizko polinomioen eraikuntza:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(-1)(-2)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{2} = \begin{cases} 1 \ baldin \ x = 1 \\ 0 \ baldin \ x = 2; 3 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(1)(-1)} = -x^2 + 4 - 3 = \begin{cases} 1 \ baldin \ x = 2 \\ 0 \ baldin \ x = 1; 3 \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(1)(2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2} = \begin{cases} 1 \ baldin \ x = 3 \\ 0 \ baldin \ x = 2 \end{cases}$$

Polinomio interpolatzailearen eraikuntza:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{3} y_i\varphi_i(x) = \frac{5}{2}(x^2 - 5x + 6) + 2(-x^2 + 4 - 3) + 2(x^2 - 3x + 2)$$

$$= x^2(\frac{2}{5} - 2 + 2) + x(\frac{-25}{2} + \frac{16}{2} - \frac{12}{2}) + (\frac{30}{2} - \frac{12}{2} + \frac{8}{2}) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 13$$

1.4 Newtonen Interpolarizazio Formula

Nahiz eta Lagrangeren formula kalkuluak egiteko erraza izan, badauka desabantaila bat.: Datu multzoari (x_{n+1}, y_{n+1}) puntu berri bat sartu nahi diogunean berriz prozesu guztia errepikatu behar da.

Newtonen interpolarizazio formularen helburua, aurreko kalkuluak aprobetxatzea da, horregatik bere $p_{n-1}(x)$, $\{(x_0, y_0), ..., (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ datu multzoaren polinomio interpolatzailea izanda, p_n, $\{(x_0, y_0), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)\}$ datu multzoaren polinomio interpolatzailea hurrengo eran kalkulatzen da:

$$p_n = p_{n-1} + q_n \; non \; q_n \in \mathcal{P}_n(X)$$

Kalkula ditzagun zeintzuk izanen diren oinarri funtzioak eta hauei elkartutako koefizienteak:

q_n definitzerako orduan hurrengoa izan behar dugu kontuan,

$$p_n(x_i) = p_{n-1}(x_i) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i = 0, ..., n-1 \quad q_n(x_i) = 0 \\ q_n(x_n) = y_n - p_{n-1}(x_n) \end{cases}$$

Hau gertatzeko, q_n hurrengo moduan definituko dugu:

$$q_n(\mathbf{x}) = (y_n - p_{n-1}(x_n)\ ) \prod_{j \neq n} \frac{(\mathbf{x} - x_j)}{x_n - x_j}$$

Ohartu nola horrela definituz gero nahi genuena betetzen den:

$$p_n(x_i) = p_{n-1}(x_i) + (y_n - p_{n-1}(x_n)\ ) \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(x_i - x_j)}{x_n - x_j} = y_i + 0 = y_i$$

$$p_n(x_n) = p_{n+1}(x_n) + (y_n - p_{n-1}(x_n)\ ) \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(x_n - x_j)}{x_n - x_j} = p_{n+1}(x_n) + (y_n - p_{n-1}(x_n)) = y_n$$

Bestalde,

$$q_n(\mathbf{x}) = (y_n - p_{n-1}(x_n)) \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(\mathbf{x} - x_j)}{x_n - x_j} = \frac{(y_n - p_{n-1}(x_n))}{\prod_{j \neq n}(x_n - x_j)} \prod_{j=0}^{n-1} (\mathbf{x} - x_j)$$

$$= c_n \prod_{j=0}^{n-1} (\mathbf{x} - x_j)$$

Hortaz, φ_i oinarri funtzioak hurrengoak izanen dira:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j), & i \neq 0 \end{cases}$$

Beraz, polinomioak hurrengo itxura izanen du:

$$p_n(x) = a_0 + a_1\varphi_1(x) + ... + a_n\varphi_n(x)$$

Koefizienteak zehazteko hurrengo sistema ebatzi beharko dugu:

$$\begin{cases} p_n(x_0) = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1}(x_0) + ... + \mathbf{a_n}\varphi_n(x_0) = y_0 \\ p_n(x_1) = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1}\varphi_1(x_1) + ... + \mathbf{a_n}\varphi_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ p_n(x_n) = \mathbf{a_0}\mathbf{a_1}\varphi_1(x_n) + ... + \mathbf{a_n}\varphi_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Edo modu matrizialean:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 - x_0 & (x_0 - x_0)(x_0 - x_1) & ... \\ 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)(x_1 - x_1) & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a_0} \\ \mathbf{a_1} \\ \vdots \\ \mathbf{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a_0} \\ \mathbf{a_1} \\ \vdots \\ \mathbf{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ohartu nola matrizearen diagonalaren goiko elementuak anulatzeak a_i koefizientea soilik $x_0, ..., x_i$-ren menpe egotea eragiten duen. Hori dela eta hurrengo notazioa erabiliko dugu:

$$a_i = f[x_0, ..., x_i]$$

Orain saila gaitezen $f[x_0, ..., x_i]$ lortzen. Defini ditzagun hurrengo polinomioak:
p_{i-1} $\{(x_0, y_0), ..., (x_{i-1}, y_{i-1})\}$ multzoaren polinomio interpolatzailea.
$\overline{p_{i-1}}$ $\{(x_1, y_1), ..., (x_i, y_i)\}$ multzoaren polinomio interpolatzailea.

Ikusi nola p_i hurrengo eran definitu dezakegun,

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)\overline{p_{i-1}(x)} - (x - x_i)p_{i-1}(x)}{(x_i - x_0)}$$

$p_i(x_i) = y_i$ izaten jarraitzen du, hortaz bilatzen dugun polinomioa da. Eta orain arte ikusi dugunaren arabera $f[x_0, ..., x_{i-1}]$ eta $f[x_1, ..., x_i]$ p_{i-1} eta $\overline{p_{i-1}}$ polinomioen koefizienteak izanen dira hurrenez hurren, beraz,

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)\sum_{j=1}^{i} f[x_1, ...x_j]\overline{\varphi_j}(x) - (x - x_i)\sum_{j=1}^{i} f[x_0, ..., x_{j-1}]\varphi_{j-1}(x)}{(x_i - x_0)}$$

$$= \sum_{j=1}^{i} \frac{(x - x_0)f[x_1, ...x_j]\overline{\varphi_j}(x) - (x - x_i)f[x_0, ..., x_{j-1}]\varphi_{j-1}(x)}{(x_i - x_0)}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} f[x_0, ..., x_j]\varphi_j(x)$$

Eta soilik i mailako koefizientea hartuz gero,

$$f[x_0, ..., x_i]\varphi_i(x) =$$

$$= \frac{f[x_1, ..., x_i](x - x_0)\overline{\varphi_i(x)}(x) - f[x_0, ..., x_{i-1}](x - x_i)\varphi_{i-1}(x)}{(x_i - x_0)}$$

$$= \frac{f[x_1, ..., x_i]\varphi_i(x) - f[x_0, ..., x_{i-1}]\varphi_i(x)}{(x_i - x_0)}$$

$$= \varphi_i(x)\frac{f[x_1, ..., x_i] - f[x_0, ..., x_{i-1}]}{(x_n - x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f[x_0, ..., x_i] = \frac{f[x_1, ..., x_i] - f[x_0, ..., x_{i-1}]}{(x_i - x_0)}$$

Beraz, koefizienteak goikoa formula aplikatuz lortzen joanen gara:

$$\begin{array}{ccccccc}
y_0 = f[x_0] & & & & & & \\
& \searrow & & & & & \\
y_1 = f[x_1] & \rightarrow & f[x_0, x_1] & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
y_2 = f[x_2] & \rightarrow & f[x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\
y_n = f[x_n] & \rightarrow & f[x_{n-1}, x_n] & \rightarrow & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & ... &
\end{array}$$

Beraz, $p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, ..., x_n]\prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)$ izanen da polinomio interpolatzailea.

Metodoaren Algoritmoa:

- $\{(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)\}$ n+1 puntuetzako interpolarizazioa eginen dugu.
- Definitu φ_i funtzioak hurrengo eran:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_i) & i \neq 0 \end{cases}$$

- Lortu $f[x_0, ..., x_i]$ koefizienteak. Horretarako egin hurrengo eskailera eta hartu bakarrik diagonaleko elementuak:

$$\begin{array}{ccccccc}
y_0 = f[x_0] & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
y_1 = f[x_1] & \rightarrow & f[x_0, x_1] & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & \\
y_2 = f[x_2] & \rightarrow & f[x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\
y_n = f[x_n] & \rightarrow & f[x_{n-1}, x_n] & \rightarrow & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \ldots &
\end{array}$$

  Non, $f[x_0, ..., x_i] = \frac{f[x_1,...,x_i] - f[x_0,...,x_{i-1}]}{(x_i - x_0)}$

- Definitu polinomio interpolatzilea hurrengo eran:

$$p(x) = f[x_0]\varphi_0(x) + f[x_0, x_1]\varphi_1(x) + ... + f[x_0, ..., x_n]\varphi_n(x)$$

Adibidea 2 *Demagun (1,5), (2,2) eta (3,4) puntuak ditugula. Eraiki polinomio interpolatzailea Newtonen metodoaz.*

Hasteko kalkulatu ditzagun oinarri funtzioak:

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = x - 1$$

$$\varphi_2(x) = (x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$$

Orain, kalkulatu ditzagun koefizienteen balioak:

$$
\begin{array}{llllll}
f[x_0] = 1 & \longrightarrow & & & & \\
 & \searrow & & & & \\
f[x_1] = 2 & \longrightarrow & f[x_0, x_1] = \frac{2-5}{2-1} = -3 & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \\
f[x_2] = 4 & \longrightarrow & f[x_1, x_2] = \frac{4-2}{3-2} = 2 & \longrightarrow & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2-(-3)}{3-1} = \frac{5}{2} &
\end{array}
$$

Beraz, polinomioa hurrengoa da:

$$p(x) = 5 - 3(x-1) + \frac{5}{2}(x^2 - 3x + 2) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 13$$

1.5 Newton-Gregoryren diferentzia atzerakorraren formula

Metodo honen bidez Newtonen interpolarizazio formularako adierazpen azkarragoa lortuko dugu. Kasu honetan x_0-tik x_n-ra joan ordez x_n-tik x_0-ra joanen gara, hau da, koefizienteak $f[x_{n-i}, ..., x_n]$ itxura izanen dute eta oinarri funtzioak $(x - x_{n-i})...(x - x_n)$ itxura.

Adierazpena errazteko hurrengo notazioa erabiliko dugu:

- $h = x_{i+1} - x_i$ (konstantea $\forall i = 0, ..., n-1$)
- $\overline{x_j} = x_{n-j} = x_n - jh$
- x hurrengo moduan definituko dugu: $x = x_n - rh$ *non* $r \in [-n, 0]$
- Diferentzi atzerakorra hurrengo moduan definituko dugu:

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$

$$\nabla^2 f_n = \nabla(f_n - f_{n-1}) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$\nabla^i f_n = \nabla^{i-1}(\nabla f_n)$$

Jada notazioa definitu dugula definitu ditzagun koefizienteak eta jatorrizko funtzioak:

1.5.1 Koefizienteak

Newtonen interpolarizazioan koefizienteak hurrengo eran definitzen dira :

- $f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\nabla f_n}{h}$
- $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[xn-1-f_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{2h} = \frac{\nabla(f_n - f_{n-1})}{2h^2} = \frac{\nabla^2 f_n}{2h^2}$
- $f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]-f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1}]}{3h} = \frac{\frac{1}{2h^2}(\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1})}{3h} = \frac{\nabla^2(f_n - f_{n-1})}{3!h^3} = \frac{\nabla^3 f_n}{3!h^3}$
- Orokorrean indukzioz froga daiteke $f[x_{n-i}, ..., x_n] = \frac{\nabla^i f_n}{(i)!h^i}$

1.5.2 Oinarri funtzioak

$$q_i(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_{n-(i-1)}) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_{n-j}) \ = \prod_{j=0}^{i-1}(x - \overline{x_j}) \ = \prod_{j=0}^{i-1}(x_n + rh - x_n + jh)$$

$$= \prod_{j=0}^{i-1}(r+j)h \quad = h^i \prod_{j=0}^{i-1}(-1)(-j-r) \quad = h^i(-1)^i \prod_{j=0}^{i-1}(-r-j)$$

$$= h^i(-1)^i \frac{(-r)!}{(-r-i)!} \quad = h^i(-1)^i(i)! \binom{-r}{i}$$

Baldin eta $i > 0$ eta $q_0(x) = 1$

Beraz, polinomioa hurrengoa da:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_{n-i}, ..., x_n] q_i(x) = \sum i = 0^n \frac{\nabla^i f_n}{(i)!h^i} h^i (-1)^i (i)! \binom{-r}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{-r}{i} \nabla^i f_n$$

Metodoaren Algoritmoa:

- $\{(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)\}$ puntu multzoa erabiliz polinomioa interpolatuko dugu.
- Diferentzia atzerakorrak kalkulatu:

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$

$$\nabla^2 f_n = \nabla(f_n - f_{n-1}) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$\nabla^i f_n = \nabla^{i-1}(\nabla f_n)$$

- Polinomioa hurrengo eran kalkulatu:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{-r}{i} \nabla^i f_n$$

Adibidea 3 *Demagun (1,5), (2,2) eta (3,4) puntuak ditugula. Eraiki polinomio interpolatzailea Newtonen formula atzerakorraz.*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{-r}{i} \nabla^i f_n = 1 \cdot 1 \cdot f_3 + (-1) \cdot (-r)\nabla f_3 + \frac{(-r)(-r-1)}{2}\nabla^2 f_3$$

$$= f_3 + r(f_3 - f_2) + \frac{(r(r+1))}{2}(f_3 - 2f_2 + f_1) = 4 + r2 + \frac{(r(r+1))}{2}(5) =$$

$$4 + r(4-2) + \frac{(r(r+1))}{2}(4 - 2 + 5) = 4 + r2 + \frac{(r(r+1))}{2}(5) = \frac{5}{2}r^2 + \frac{9}{2}r + 4$$

$$x = x_n + rh \Leftrightarrow r = \frac{x - x_n}{h} = x - 3$$

Beraz,

$$p(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}(-6x) + \frac{5}{2}9 + \frac{9}{2}(x-3) + 4 = \frac{5}{2}x^2 + (-15 + \frac{9}{2})x + (\frac{45}{2} - \frac{27}{2} - 4)$$

$$= \frac{5}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 13$$

1.6 Interpolazio arrazionala

Kasu honetan polinomio baten bidez interpolatu ordez funtzio arrazional baten bidez interpolatuko dugu. Hau da,

$$p(x) = \frac{a_0 + a_1x + ... + a_ux^u}{b_0 + b_0x + ... + b_vx^v} = \mathcal{R}_v^u(X)$$

Aurreko funtzio irrazionala izanda badiduri $u+v+2$ ezezagun ditugula baina ez da horrela:

$$p(x) = \frac{a_0 + a_1x + ... + a_ux^u}{b_0 + b_1x + ...b_vx^v} = \frac{1 + \frac{a_1}{a_0}x + ... + \frac{a_u}{a_0}x^u}{\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_0}x + ... + \frac{b_v}{a_0}x^v} = \frac{1 + a_1'x + ... + a_u'x^u}{b_0' + b_1'x + ... + b_v'x^v}$$

Beraz, soilik $u + v + 1$puntuko interpolarizazioa plantea daiteke.

Ohikoena $\mathcal{R}_n^n(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ funtzio interpolarizatzailea erabiltzea da non $\frac{p_n(x_i)}{q_n(x_i)} = y_i \ \forall i = 1, ..., 2n$.

Funtzioa deduzitzen hasi baino lehen defini ditzagun alderanzizko diferentzialak hurrengo moduan:

$$\phi(x_i) = y_i$$

$$\phi(x_i, x_j) = \frac{x_i - x_j}{\phi(x_i) - \phi(x_j)}$$

$$\phi(x_i, x_j, x_k) = \frac{x_j - x_k}{\phi(x_i, x_j) - \phi(x_i, x_k)}$$

$$\phi(x_i, ..., x_j, x_k) = \frac{x_j - x_k}{\phi(x_i, ..., x_j) - \phi(x_i, ..., x_k)}$$

Hasi gaitezen funtzioa lortzen:

$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = f$ funtzio interpolatzailea denez, $\forall i = 1, ..., 2n \frac{p_n(x_i)}{q_n(x_i)} = y_i$.
Beraz,

$$\frac{p_n(x_0)}{q_n(x_0)} = y_0 \Rightarrow \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = y_0 + \frac{p_n(x)}{q_n(x)} - \frac{p_n(x_0)}{q_n(x_0)} = y_0 + \frac{p_n(x)q_n(x_0) - p_n(x_0)q_n(x)}{q_n(x)q_n(x_0)}$$

$$= y_0 + \frac{p_n(x)q_n(x_0) - p_n(x_0)q_n(x)(x - x_0)}{q_n(x)q_n(x_0)(x - x_0)} = y_0 + \frac{(x - x_0)p_{n-1}(x)}{q_n(x)}$$

$$non \ p_{n-1} = \frac{p_n(x)q_n(x_0) - p_n(x_0)q_n(x)}{q_n(x_0)(x - x_0)} \in \mathcal{P}_{n-1}$$

(Polinomio bat izanen da x_0 $\frac{p_n(x)q_n(x_0)-p_n(x_0)q_n(x)}{q_n(x_0)}$ polinomioaren erroa delako)

Gainera, beste i guztientzat $\frac{p_n(x_i)}{q_n(x_i)} = y_i$ denez,

$$\frac{p_n(x_i)}{q_n(x_i)} = y_0 + \frac{(x_i - x_0)(p_{n-1}(x_i))}{q_n(x_i)} = y_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{q_n(x_0)}{p_{n-1}(x_i)} = \frac{x_0 - x_i}{y_0 - y_i} = \phi(x_0, x_i)$$

$i = 1$ hartuz gero eta $\frac{q_n(x)}{p_{n-1}(x)}$-rekin prozesu bera jarraituz gero hurrengoa lortzen dugu:

$$\frac{q_n(x)}{p_{n-1}(x)} = \phi(x_0, x_1) + \frac{q_n(x)}{p_{n-1}(x)} - \frac{q_n(x_1)}{p_{n-1}(x_1)} = \phi(x_0, x_1) + \frac{x - x_1}{p_{n-1}(x)/q_{n-1}(x)}$$

$$non \;\; \frac{p_{n-1}(x_j)}{q_{n-1}(x_j)} = \phi(x_0, x_1, x_j)$$

Hau $\forall i = 0, ..., 2n$ eginen dugu eta $\frac{p_n}{q_n}$ lortuko dugu.

Metodoaren Algoritmoa:

- $(x_0, y_0), ..., (x_{2n}, y_{2n})$ puntuetatik pasatzen den interpolarizazio arrazionala eraikiko dugu.

- Lortu $\phi(x_0, ..., x_i)$ koefizienteak hurrengo moduan:

$$\phi(x_i) = y_i$$

$$\phi(x_i, x_j) = \frac{x_i - x_j}{\phi(x_i) - \phi(x_j)}$$

$$\phi(x_i, x_j, x_k) = \frac{x_j - x_k}{\phi(x_i, x_j) - \phi(x_i, x_k)}$$

$$\phi(x_i, ..., x_j, x_k) = \frac{x_j - x_k}{\phi(x_i, ..., x_j) - \phi(x_i, ..., x_k)}$$

  Oharra: Funtzioa eraikitzeko behar izango ditugunak $\phi(x_0, x_1, x_2, ..., x_i)$ motakoak izango dira baina hauek kalkulatzeko besteen beharra izanen dugu.

- Eraiki funtzioa hurrengo algoritmoa modu errekurtsiboan aplikatuz:

$$f_0 = \frac{q_0}{p_0} = \phi(x_0, ..., x_{2n})$$

$$f_1 = \frac{q_1}{p_0} = \phi(x_0, ..., x_{2n-1}) + \frac{x - x_{2n-1}}{f_0}$$

$$\vdots$$

$$f_{2i} = \frac{q_i}{p_i} = \phi(x_0, ..., x_{2n-2i}) + \frac{x - x_{2n-2i}}{f_{2i-1}}$$

$$f_{2i-1} = \frac{q_{i+1}}{p_i} = \phi(x_0, ..., x_{2n-2i-1}) + \frac{x - x_{2n-2i+1}}{f_{2i}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{p_n}{q_n} = y_0 + \frac{x - x_0}{f_{2n-1}}$$

Adibidea 4 *Demagun (1,5), (2,2) eta (3,4) puntuak ditugula. Eraiki poli-*

nomio interpolatzailea interpolarizazio arrazionalaz.

Hasi gaitezen ϕ balioak kalkulatzen:

$\phi(x_0) = y_0 = 5$
$\phi(x_1) = y_1 = 2 \quad \phi(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{\phi(x_0) - \phi(x_1)} = \frac{1-2}{5-2} = -\frac{1}{3}$
$\phi(x_2) = y_2 = 4 \quad \phi(x_0, x_2) = \frac{x_0 - x_2}{\phi(x_0) - \phi(x_2)} = \frac{1-3}{5-4} = -2 \quad \phi(x_0, x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{\phi(x_0, x_1) - \phi(x_0, x_2)} = \frac{2-3}{-1/3+2}$
$= -\frac{5}{2}$

Orain kalkulatu dezagun funtzioa:

$$f_0 = \phi(x_0, x_1, x_2) = -\frac{5}{2}$$

$$f_1 = \phi(x_0, x_1) + \frac{x - x_1}{f_0} = -\frac{1}{3} + \frac{x-2}{-5/2} = \frac{9-5x}{3}$$

$$f(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{f_1} = 5 + \frac{3x-3}{9-5x}$$

2 Gaia:

Zenbakizko Integrazioa

2.1 Sarrera

Integralen balioak jakitea oso erabilgarria da baina existitzen dira metodo analitikoen bidez integratu ezin diren funtzio integragarriak. Gai honetan funtzio hauen integralen hurbilpena kalkulatzeko metodoak ikusiko ditugu. Kalkulatu beharreko integtalak bi motakoak dira:

- $\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b w(x)f(x)$ non w pisu funtzioa hurrengoa betetzen duen:
  - $w(x) > 0$
  - $\int_a^b w(x)dx < \infty$
  - w jarraitua da.

Eta ikusiko ditugun metodoa hauek dira:

- Trapezioaren formula
- Newton-Cotesen integrazio formulak.
- Newton-Cotesen formula konposatuak.
- Extrapolazio formulak.

2.2 Trapezioaren Formula

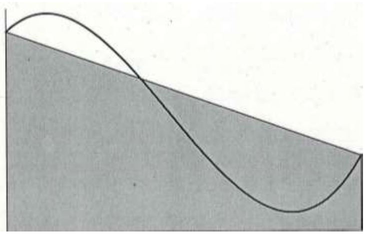
Trapezioaren formula era intuitiboena da. [a,b] tarteko mugak zuzen baten bidez lotuko dugu eta abzisarekin osatzen duen trapezioaren azalera kalkulatuko dugu.

Kalkulatu dezagun ematen duen balioa eta errorea:

2.2.1 Formulazioa

f funtzioa $P_1(x)$ 1. mailako polinomio batekin hurbilduko dugu, non $P_1(a) = f(a)$ eta $P_1(b) = f(b)$. Beraz P_1 hurrengoa izanen da:

$$f(X) \approx P_1(x) = k + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$



non $k = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-1} = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a}$

Beraz,

$$P_1(x) = \frac{f(b) - f(a) + f(a)b - f(b)a}{b-a} = \frac{f(b)(x-a) - f(a)(x-b)}{b-a}$$

Hortaz, integrala hurrengoa da:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x) = \int_a^b \frac{f(b)(x-a) - f(a)(x-b)}{b-a}$$

$$= \frac{1}{b-a}\left((f(b)-f(a))\int_a^b xdx\right) + (f(a)b - f(b)a) = \frac{(f(b)-f(a))(b^2-a^2)}{2(b-a)} + (f(a)b - f(b)a)$$

$$= \frac{(f(b)-f(a)(b+a)}{2} + (f(a)b - f(b)a) = \frac{f(b)b + f(b)a - f(a)b - f(a)a + 2bf(a) - 2af(b)}{2}$$

$$= \frac{(f(b)+f(a)(b-a)}{2}$$

Beraz,

$$I = \frac{(f(b)+f(a))(b-a)}{2}$$

2.2.2 Errorea

Errorea hurregoa izanen da:

$$e = \int_a^b (f(x) - P_1(x))dx \quad = \left(f(x) - \frac{f(b)(x-a) + f(a)(b-x)}{b-a}\right)dx$$

$$= \int_a^b \frac{f(x)(b-a) - f(b)(x-a) - f(a)(b-x) + f(x)x - f(x)x}{b-a}dx$$

$$= \int_a^b \frac{(x-a)(f(x)-f(b)) + (b-x)(f(x)-f(a))}{b-a}dx$$

$$= \int_a^b \frac{(x-a)(b-x)}{b-a}\left(\frac{f(x)-f(b)}{b-x}+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)dx$$

$$*_1 = \int_a^b \frac{(x-a)(b-x)}{b-a}(-f[x,b]+f[a,x])dx$$

$$= \int_a^b (x-a)(b-x)\left(\frac{f[a,x]-f[x,b]}{b-a}\right)dx$$

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f[a,x,b]dx$$

$$*_2 = -\frac{1}{6}(b-a)^3\frac{1}{2}f''(\eta)$$

$*_1$ Newtonen interpolazio formularen koefizienteak.
$*_2$ Bataz-besteko balioen teorema.

2.2.3 Trapezioaren formula konposatua

Askotan trapezioaren formula aplikatzean errorea oso handia da. Hau $h = b-a$ handia denean eta f funtzioak gorabehera handiak dituenean gerta daiteke. Metodoz aldatu gabe hau errazteko era bat $[a,b]$ tartea $h = \frac{b-a}{n-1}$ luzeerako n zatitan hartzea eta zati bakoitzean metodoa aplikatzea da. Horrela,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{b=x_n} f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h(f(x_i)+f(x_{i-1}))}{2} =$$

$$\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})+f(x_{n-1})+f(x_n)$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+...+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Eta errorea hurrengoa da:

$$E = E_1+E_2+...+E_n = \frac{h^3}{12}f''(\xi_1)+\frac{h^3}{12}f''(\xi_2)+...+\frac{h^3}{12}f''(\xi_i n)\frac{h^3}{12}f''(\xi) = \frac{b-a}{12}h^2(f''(\xi))$$

$$non \quad f''(\xi) = max(f''(\xi_i))$$

2.3 Newton-Cotesen Integrazio Formulak

Metodo honek $f(x)$ n mailako polinomio baten bidez hurbiltzean eta hau integratzean datza. Polinomioa lortzeko $n+1$ Lagrangeren metodaoa erabiltzen da $n+1$ puntu erabiliz. Horrela integrala hurrengoa da.

Metodoa	Formulazioa	Errorea
Trapezioa	$I = \frac{(f(b)+f(a))(b-a)}{2}$	$R(f) = f''(\xi)\frac{h^3}{12}$
Trapezio konposatua	$h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$	$\frac{b-a}{12}h^2(f''(\xi))$

2.3.1 Formularen eraikuntza

$$I = \int_a^b f(x) \approx \int_a^b p(x) = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) f(x_i)\right) dx = \sum_{i=0}^{n} \int_a^b \varphi_i(x) f(x_i) dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \varphi_i(x) dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) k_i$$
$$non \quad k_i = \int_a^b \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

k_i ez dagoenez x-ren menpe edozein funtzio erabilita balio berberak izanen ditu. kalkulatu ditzagun k_i hauen balioak $p_j = x^j$ (okurritzen zaizkigun funtzio errazenak) erabiliz:

$$\begin{array}{ccc}
Ekuazioa & Zenbakizkointegraziolineala & Benetakointegrala \\
p_0(x) = 1 & k_0 + k_1 + ... + k_n & \int_a^b 1dx = b - a \\
p_1(x) = x & k_0x_0 + k_1x_1 + ... + k_nx_n & \int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
p_n(x) = x^n & k_0x_0^n + k_1x_1^n + ... + k_nx_n^n & \int_a^b x^ndx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}
\end{array}$$

Sistema batean planteatuz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & ... & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & ... & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \frac{b^3-a^3}{3} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

Orokorrean, $k_j = k_{n-j}$ eta soilik n-ren menpe daude, beraz, sistema hurrengo modura defini daiteke ($a = 0, b = h, j = h/n$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & h & 2k & ... & nk \\ 0 & k^2 & 4k^2 & ... & n^2k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k^n & 2^nk^n & ... & n^nk^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ \frac{h^2}{2} \\ \frac{h^3}{3} \\ \vdots \\ \frac{h^n}{n+1} \end{pmatrix}$$

Hurrengoak dira Newon-Cotesen interpolazioaren adibide nagusiak.

- Trapezioaren erregela: $n = 1$ denean.

$$\frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

- Simpsonen 1/3 Erregela: $n = 2$ denean.

$$\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Simpsonen 8/3 Erregela: $n = 3$ denean.

$$\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

- Boolen Erregela: $n = 4$ denean.

$$\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

2.3.2 Errorearen bornapena

Orokorrean, $h = \frac{b-a}{n}$ eta $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ diskretizazioa eta $f \in \mathcal{C}^{n+2}[a, b]$. Orduan, $\int_a^b (f(x) - p(x))dx$ integral hurbilduaren $R_n(f)$errorea horrela bornatu daiteke:

$$n\ bakoitia\ bada: \quad |R_n(f)| < \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}h^{n+2}C_n, \quad M_{n+1} = max|f^{n+1}(x)| \ \ eta$$

$$C_n = \int_0^n t(t-1)...(t-n)dt$$

$$n\ bikoitia\ bada: \quad |R_n(f)| < \frac{M_{n+2}}{(n+2)!}h^{n+3}C_n, \quad M_{n+2} = max|f^{n+2}(x)| \ \ eta$$

$$C_n = \int_0^n t^2(t-1)...(t-n)dt$$

n	Formulazioa	Errorea
1	$\frac{h}{2}(f_0+f_1)$	$-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$
2	$\frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)$	$-\frac{h^5}{10}f^{4)}(\xi)$
3	$\frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)$	$-\frac{3h^5}{80}f^{4)}(\xi)$
4	$\frac{2h}{45}(7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4)$	$-\frac{8h^7}{145}f^{6)}(\xi)$

2.4 Newton-Cotesen Formula Konposatuak

Newton-Cotesen formuletan zenbat eta n altuagoa izan orduan baina errore txikiagoa dugu. Baina n altuegia bada, ordua koefiziente negatikoak agertzen dira eta horrek konbergenzia desagertzea eragiten du.
Hau ekiditeko eta errorea txikia izateko formula konposatuak erabiltzen dira:

2.4.1 Formularen eraikuntza

Formula hauen gakoa $[a, b]$ zuzenkia $[x_i, x_{i+1}]$ h luzeera berdineko zatitan banatzea eta tarte honi n mailako integrazio-formula bakuna aplikatzean datza. Ikusi dezagun formula sinpleen eraikuntza:

- Trapezioaren formula (n=1):

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^b f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + ... + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

$$= \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

- Simpsonen 1/3 formula (n=2):

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-2}}^b f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + ... + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 ... + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

- Simpsonen 3/8 formula (n=3):

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-3}}^b f(x)dx$$

$$\approx \frac{3h}{8}(f_0{+}3f_1{+}3f_2{+}f_3){+}\frac{h}{3}(f_3{+}3f_4{+}3f_5{+}f_6){+}...{+}\frac{h}{3}(f_{n-3}{+}f_{n-2}{+}3f_{n-1}{+}f_n)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 ... + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\right)$$

- Boolen erregela (n=4):

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_8} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-4}}^b f(x)dx$$

$$\approx \frac{2h}{45}(7f_0{+}32f_1{+}12f_2{+}32f_3{+}7f_4){+}...{+}\frac{h}{3}(7f_{n-4}{+}32f_{n-3}{+}12f_{n-2}{+}32f_{n-1}{+}7f_n)$$

$$= \frac{2h}{45}\left(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 14f_4 + ... + 14f_{n-4} + 32f_{n-3} + 12f_{n-2} + 32f_{n-1} + 7f_n\right)$$

2.4.2 Errorearen bornapena

- n bakoitia bada:

$$|R(f)| = |\sum_{i=0}^{k-1} R_i(f)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |R_i(f)| = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M_{n+1}^{(i)} h^{n+2}}{(n+1)!} C_n^{(i)}$$

$$M_{n+1}^{(i)} = max_{x \in [a_i, a_{i+1}]} |f^{n+1}(x)|$$

denez M_{n+1} hurrengo moduan hartuz gero,

$$M_{n+1} = max\ M_{n+1}^{(i)} = max_{x \in [a,b]} |f^{n+1}(x)|$$

Orduan,

$$|R(f)| \leq \frac{M_{n+1} h^{n+2}}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{k-1} C_n^{(i)}$$

$$\leq \frac{M_{n+1} h^{n+2}}{(n+1)!} n C_n \quad non\ C_n = max C_n^{(i)}$$

$$= \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \frac{b-a}{n} n C_n = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} (b-a) C_n$$

- n bikoitia bada: Modu berean,

$$|R(f)| \leq \frac{M_{n+2}}{(n+2)!} h^{n+2}(b-a)C_n$$

non

$$M_{n+2} = max_{x\in[a,b]}|f^{n+2}(x)| \quad C_n = max \int_{x_i}^{x_{i+1}} t^2(t-1)...(t-n)dt$$

Adibidea 5 *Asmatu zein den C_n konstantea $n = 2$ denean.*
Laguntza: Erabili $x \in [0,1]$ tartea eta $f(x) = x^{n+2} = x^4$ funtzioa (n bakoitia balitz $f(x) = x^{n+1}$ erabiliko genuke).

Kasu horretarako kalkula ditzagun formulan agertzen diren elementu guztiak:

$$R_2(f) = \int_0^1 x^4 dx - \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{6}(0 + \frac{1}{4} + 1) = \frac{1}{5} - \frac{5}{24} = -\frac{1}{120}$$

$$= \frac{M_4}{4!} h^4 (b-a) C_2$$

non

$$M_4 = \max_{x\in[0,1]} |(x^4)''''| = \max_{x\in[0,1]} 24 = 24$$

Beraz,

$$\frac{24}{24}\frac{1}{16} C_2 = -\frac{1}{120} \Leftrightarrow C_2 = -\frac{4}{15}$$

2.5 Extrapolazio Formulak. Rombergen Kuadratura

Teorema 2 *Izan bedi f funtzioa I(f), bere integrala hurrengo eran idatzi dezakegu:*

$$I(f) = T_N + C_1 h^2 + C_2 h^4 + C_3 h^6 + ...C_k h^{2k} + O(h^{2k+2})$$

T_N trapezioaren formula (konposatua) izanik

Aurreko teorematik abiatuta eta trapezioaren erregela aplikatuz errorea $O(h^{2k+2})$ izatea lortzen sailatuko gara. Adierazpenetik hasita eta T_N trapezioaren erregela bada (N zati kopurua izanik):

$$I(f) = T_N + C_1h^2 + C_2h^4 + C_3h^6 + ...C_kh^{2k} + O(h^{2k+2})$$

$$\Leftrightarrow T_N = I(f) + D_1h^2 + D_2h^4 + D_3h^6 + ...D_kh^{2k} + O(h^{2k+2})$$

Gure helburua D guztiak desagertzea da. Ohartu zer gertatzen den T_N ordez T_{2N}-ren adierazpena kalkulatzerakoan (h orain $\frac{h}{2}$ izango da):

$$T_{2N} = I(f) + D_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + D_2\left(\frac{h}{2}\right)^4 + D_3\left(\frac{h}{2}\right)^6 + ...D_k\left(\frac{h}{2}\right)^{2k} + O(h^{2k+2})$$

Hortaz, hurrengoa eginez gero:

$$\begin{array}{l}
+4T_{2N} = 4I(f) + 4D_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 4D_2\left(\frac{h}{2}\right)^4 + 4D_3\left(\frac{h}{2}\right)^6 + ... + 4D_k\left(\frac{h}{2}\right)^{2k} + O(h^{2k+2}) \\
-T_N = -3I(f) \quad - D_1h^2 \quad - D_2h^4 \quad - D_3h^6 + \quad ... \quad - D_kh^{2k} \quad + O(h^{2k+2}) \\
\hline
\end{array}$$

$$4T_{2N} - 3T_N = 4I(f) + \left(\tfrac{1}{4} - 1\right)h^4 + ... - \left(\tfrac{1}{2^{2k-2}} - 1\right)h^{2k} + O(h^{2k+2})$$

$$= 3(I(f) + E_4h^4 + ... + E_{2k}h^{2k} + O(h^{2k+2}))$$

$$\Leftrightarrow \frac{4T_{2N} - 3T_N}{3} = I(f) + E_4h^4 + ... + E_{2k}h^{2k} + O(h^{2k+2})$$

Beraz h^2-rekin doan koefizientea ezabatzea lortu dugu. $2N$ eta $4N$-rekin prozesu bera errepikatuz gero hurrengoa lortzen dugu:

$$\frac{4T_{4N} - 3T_{2N}}{3} = I(f) + E_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + ... + E_{2k}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k} + O(\left(\frac{h}{2}\right)^{2k+2})$$

Eta bi balio hauek $T_N^{[1]}$ eta $T_{2N}^{[1]}$ deituz gero eta hauei hurrengo formula aplikatuz gero:

$$T_N^{[2]} = \frac{16T_{2N}^{[1]} - T_N^{[1]}}{15} = I(f) + F_6h^6 + ... + F_{2k}h^{2k} + O(h^{2k+2})$$

Prozesu hau koefiziente guztiak ezabatu arte errepika dezakegu, formula orokorra hurrengoa izanik:

$$T_{2N}^{[r]} = \frac{4^rT_{2N}^{[r-1]} - T_N^{[r-1]}}{4^r - 1}$$

Metodoaren Algoritmoa:

- $2m+1$ ordenako metodoa lortu nahi dugu.
- Hasteko $T_{\text{ffl}}^{[0]}$ lortuko dugu trapezioaren formula erabiliz, horrela:

$$T_0^{[0]} = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

$$T_1^{[0]} = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2)...$$

- Gero gainerako zutabeak lortzen dira hurrengo formula erabiliz:

$$T_{2N}^{[r]} = \frac{4^r T_{2N}^{[r-1]} - T_N^{[r-1]}}{4^r - 1}$$

- Integralaren hurbilpena $T_0^{[m]}$-k hemanen du.

3 Gaia:

Ekuazio Diferentzialen Ebazpena

3.1 Sarrera

Hurrengo gaietan ekuazio diferentzialekin lan egingo dugu. Ekuazio diferentzialen teoriaren inguruan oinarrizko definizioez gain (Ekuazio Diferentzialen irakasgaian begiratu beharrezkoa) orden beherapena eta existentziari buruzko teorema bat bergogoratu behar dugu.

3.1.1 Ordenaren Beherapena

Izan bedi n ordenako hurrengo ekuazioa eta berari elkartutako sistema,

$$y^{n)} = f(x, y, y', ..., y^{n-1)}) \ non \begin{cases} y(x_0) = \eta_0 \\ y'(x_0) = \eta_1 \\ \vdots \\ y^{n)}(x_0) = \eta_n \end{cases}$$

Orduan, 1. ordenako sistema diferentzial batean idatz dezakegu hurrengo moduan:

$$\begin{cases} y(x) = z_1(x) \\ y'(x) = z_2(x) \\ \vdots \\ y^{n)}(x) = z_n(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = z_1(x) \\ z_1' = z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x, z_1, ...z_n) \end{pmatrix}$$

3.1.2 Existentzia

Teorema 3 *Izan bedi $f : D \to \mathbb{R}^m$,$D = [a, b] \times \mathbb{R}^m$ funtzioa y-rekiko Lipschitziarra dena L konstanteaz ($\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \| f(y_1) - f(y_1) \| \leq \| y_1 - y_2 \|$). Orduan, $y(a) = \eta$ hasierako baldintza betetzen duen ekuazio diferentzialaren soluzioa bakarra existituko da.*
Gainera, beste soluzio baten balioa hasierako puntuan $z(a) = \delta$ bada, orduan, bien arteko aldea bornatu dezakegu:

$$\| y(x) - z(x) \| \leq Le^{L|x-a|} \| \eta - \delta \|$$

3.2 Zenbakizko Metodoak

Ekuazio diferentzialak zenbakizko metodoen bidez ebatziko ditugu. Horretarako meodo desberdinak erabiltzen dira, eta metodo hauen azterketa egiterako orduan bere egokitasuna aztertzeko metodo desberdina daude, hurrengo definizioetan oinarritzen direnak.

Definizioa 1 *Esaten da metodoa* ***konbergentea*** *dela baldin metodoaren urratsa txikitzean ($h \to 0$) edo era baliokidean n handitzean ($n \to \infty$) eraikitzen duen segida integralaren baliora konbergitzen badu.*

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y(x_n) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} y_i = y(x_i)$$

Definizioa 2 *Metodo bat* ***zero-egonkorra*** *da baldin $\exists h_0 \in \mathbb{R}$ non $\forall h \leq h_0$ urratsa hartuz gero, hasierako baldintzatan perturbazio txiki bat sufritzean ($y^* = \nu + \varepsilon$)lortutako zenbakizko soluzio berriaren eta zenbakizko soluzio errealaren arteko errorea bornatua badago:*

$$|y_j - y_j^*| < \infty \quad \forall j = 1, ..., n$$

Definizioa 3 *Metodo bat* ***absolutuki egonkorra*** *da baldin $\exists h_0 \in \mathbb{R}$ non $\forall h \leq h_0$ urratsa hartuz gero, hasierako baldintzatan ε balioko perturbazio bat sufritzean ($y^* = \nu + \varepsilon$) lortutako soluzio berriaren eta zenbakizko soluzio errealaren arteko errorea ε konstanteaz bornatuta badago:*

$$\begin{cases} y' = f(x, y \\ y(a) = \nu \end{cases} \quad \begin{cases} z' = f(x, z) \\ z(a) = \nu + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \exists h_0 \ \ non \ \ \forall h \leq h_0, \ \ |yi - z_i| < \varepsilon$$

Definizioaren interpretazio bat aurretik metatzen diren erroreak handitzen ez direla da.

3.3 Eulerren Metodo Esplizitua

Eulerren metodo esplizitua metodorik intuitiboena da, deribatua hurrengo eran hurbilduko dugu:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

3.3.1 Formulazioa

Deribatua aurreko eran definitzen badugu, $a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b$ diskretizazioa hartuz gero, non $h = x_{i+1} - x_i$, orduan metodoa hurrengo eran definitzen da:

$$f(x_i, y_i) = y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

$$\Leftrightarrow y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$\boxed{\textbf{Metodoaren Algoritmoa:} \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)}$$

3.3.2 Errorea eta konbergentzia

Errorea lortzego Taylorren garapena erabiliko dugu

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + ...$$

Zenbakizko metodoak ez du hartzen h^2 ordenako gaia ez hurrengoak hortaz errorea $O(h^2)$ izanen da. Hau jakinda hurrengo teorema ondoriozta dezakegu:

Teorema 4 *(**Konbergentziaren Teorema**) Izan bedi $f(x, y)$ funtzioa $D = [a, b] \times \mathbb{R}^m$ tartean jarraitua eta Lipschitziarra y aldagaiarekiko eta L konstantearekin. Orduan hurrengo moduan definitutako ekuazio diferentziala Eulerren metodo esplizituaz konbergentea da:*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

Frog: Gaiaren hasieran enuntziatutako teoremaren antzekoa den lema bat erabiliko dugu frogapen honetarako.

Lema: *Izan bedi $|u_{j+1}| \leq (1 + A)\ |u_j| + B$ betetzen duen segida, orduan hurrengo eran bornatua dago:*

$$|u_n| \leq e^{nA}|u_0| + \frac{B(e^{nA} - 1)}{A}$$

Hipotesiz benetako emaitza eta soluzio hurbildua hurrengoak dira,

$$\begin{cases} Benetakoa: & y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + O(h^2) \\ Hurbildua: & y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

Beraz $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{y(x_n) - y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definituz gero,

$$u_{n+1} = u_n + h(f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)) + O(h^2)$$
$$\Rightarrow |u_{n+1}| \leq |u_n| + hL(y(x_n) - y_n) + B$$
$$\Leftrightarrow |u_{n+1}| \leq (1 + hL)|u_n| + B$$
$$non \quad B = h^2K$$

Eta lemaren emaitza aplikatuz gero,

$$|u_n| \leq e^{nhL}|u_0| + \frac{hK(e^{nhL} - 1)}{L}$$

3.3.3 Zero-egonkortasuna

Teorema 5 ***(Euler-en metodoaren zero-egonkortasuna)*** *Izan bedi $f(x,y)$ funtzioa $D=[a,b]\times\mathbb{R}^m$ eremuan jarraitua eta y aldagaiarekiko Lipschitzia-rra (L konstanteaz), orduan Euler-en metodoa zero-egonkorra da.*

Froga: Demagun y_j eta z_j Eulerren bi metodo ditugula. Orduan,

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ z_{n+1}=z_n+h(f(x_n,z_n)+\delta) \end{cases} \Rightarrow r_{n+1}=y_{n+1}-z_{n+1}=(y_n-z_n)+h(f(x_n,y_n)-f(x_n,z_n)-\delta)$$

$$\Leftrightarrow \| r_{n+1} \| \leq \| y_n-z_n \| + hL \| y_n-z_n+h\delta \| =$$

$$(1+Lh)\| r_n \| + h\delta \leq e^{(b-a)L} \| r_0 \| + \frac{e^{(b-a)\|}-1}{L} max_n|\delta_n|$$

Oharra 1 *Gorgora dezagun zer den $f(x)$ funtzioa D eremuan eta L konstanteaz Lipschitziarra izatea:*

$$\|f(u)-f(v)\| \leq |u-v| \quad \forall u,v\in D$$

Eta $f(x,y)$ y aldagaiarekiko D eremuan eta L konstanteaz Lipschitziarra izatea:

$$\|f(x,u)-f(x,v)\| \leq |u-v| \quad \forall u,v\in D$$

Adibidea 6 *Ikusi ditzagun f funtzio Lipschitziarren adibideak:*

- $f(x,y)=2yx^{-4}$

  $$|f(x,y)-f(x,z)|=|2yx^{-4}-2zx^{-4}|=|2x^{-4}||y-z|=L|y-z|$$

  non $L=\max_{x\in[a,b]}\frac{2}{x^4}$ Beraz, $0\in[a,b]$ bada, $L=\infty$ izan beharko litzateke eta ez da Lipschitziarra izanen bestela $L=\frac{2}{\min_{x\in[a,b]}|x^4|}$ konstanteaz Lipschitziarra da.

- $f(x,y)=\exp^{-x^2}\arctan y$

  $$|f(x,y)-f(x,z)|=\exp^{-x^2}|\arctan y-\arctan z|=*\exp^{-x^2}\frac{1}{1+\theta^2}|x-y|\leq|y-z|$$

  Beraz, $L=1$ konstantearekin Lipschitziarra da.
  **Bataz-besteko balioaren teorema.*

3.3.4 Egonkortasun absolutuko eremua

Egonkortasun absolutua aztertzeko kasus kasuz joan behar gara, baina eman behar diren pausuak era orokor batean garatuko ditugu:

Demagun $x_0 \in [a,b]$ puntuan $y(x_0) = y_0$ hastapen baldintza betetzen duen $y' = f(x,y)$ ekuazioaren soluzioa dugula.
Perturbazio txiki bat eragiten badugu, $\tilde{y}(x_0) = y_0 + \varepsilon_0$ non $|\varepsilon_0| \ll 1$. Defini dezagun $\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon(x)$ bezala, non $\parallel \varepsilon(x) \parallel \ll 1$.

Orduan f-ri Taylorren garapena aplikatuz gero,

$$\tilde{y}'(x_0) = f(x_0, \tilde{y}(x_0))$$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) + \varepsilon'(x_0) = f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^2)$$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) + \varepsilon'(x_0) = f(x_0, y_0) + \varepsilon'(x_0) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^2)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon'(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon'(x_0) \approx \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\varepsilon_0$$

Beraz, ε-ren adierazpena $\varepsilon' = \lambda\varepsilon$ motako ekuazioaren menpe dago, non $\lambda = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ den.

Aldi berean zenbakizko metodo hurbilduak eragin berdina dauka x_n puntuan metatutako errorearekin

$$\varepsilon_n = y_n - y(x_n)$$

Beraz, Taylorren garapena aplikatuz,

$$y_{n+1}+\varepsilon_{n+1} = y_n+\varepsilon_n+hf(x_n, y_n+\varepsilon_n)) = y_n+\varepsilon_n+hf(x_n, y_n)+h\varepsilon_n\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y}+O(\varepsilon_n^2)$$

Eta $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ denez,

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{\partial f(x_n, y_n}{\partial y}\varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2) \approx \varepsilon_n + \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y}\varepsilon_n$$

Beraz, $\overline{h} = h\lambda$ parametroak $|\varepsilon_{n+1}| \leq 1$ bornapenari eusten badio, orduan metodoa absolutuko konbergentea izanen da eta bornapen horri eusten duten h balioei egonkortasun absolutuko eremua osatuko dute.

Adibidea 7 *Deduzitu zein den Eulerren metodo esplizitua absolutuki konbergentea izateko baldintza.*

$$\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |\varepsilon_{n+1} \leq |\varepsilon_n|$$

$$\Leftrightarrow |\varepsilon_n + h\lambda\varepsilon_n| \leq |\varepsilon_n|$$

$$\Leftrightarrow |1 + \overline{h}| \leq 1$$

4 Gaia:

Urrats Bateko Metodoak. Runge-Kutta Metodoak

4.1 Runge-Kutta Metodoak

Runge-Kutta metodoak ekazio diferentzialak ebazteko urrats bakarreko metodoak dira (y_{n+1} bakarrik y_n-ren menpe dago). Era orokorrean m ordenako Runge-Kutta metodoa hurrengo moduan definitzen dira:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=0}^{m} b_i K_i \\ K_i = f(x_n + hc_i, y_n + h\sum_{j=0}^{m} a_{ij} K_j) \end{cases}$$

Metodoaren adierazpena a_{ij}, b_j, c_i koefizienteen menpe daudenez bere Butcherren matrizearen bidez adieraz dezakegu, hurrego itxura duena:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{array}$$

Metodoa esplizitua izateko Butcherren matrizean diagonaletik beherako elementuak dira eznuluak diren bakarrak:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{array}$$

Metodo esplizituak inplizituak baina mantxoago konbergitzen dute baina iterazioak egitea errezagoa da metodo inplizituetan ekuazio ez lineal bat ebatzi behar delako.

4.2 Metodoaren Konsistentzia eta Egonkortasuna

Garatu ditzagun metodo hauen analisiak egiteko beharrezkoak diren definizioak.

Definizioa 4 *Izan bedi Runge-Kutta metodo bat bere* $n+1$*-garren pausoan****Mozketa errore lokala*** *soilik* $n+1$ *urratsean egindako errorea da eta matematikoki hurrengo moduan definitzen da:*

$$d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\phi(x_n, y_n; h)$$

Definizioa 5 *Izan bedi Runge-Kutta metodo bat bere* n*-garren pausoan egindako* ***Mozketa-errore osoa*** n*-garren urratsera heldu arte garatu den errore osoa da. Matematikoki hurrengo eran definitzen da:*

$$e_n = y(x_n) - y_n$$

Definizioa 6 *Izan bedi Runge-Kutta metodo bat eta metodo hau aplikatzen diogun* $[a, b]$ *tartea. Defini dezahun* $h = \frac{b-a}{N}$ *luzeerako distantziara dauden hurrengo partiketa:*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$$

Argia denez $N \to \infty$ *eta* $h \to 0$ *baliokideak dira. Orduan, Runge-Kutta metodoa* ***konsistentea*** *edo* ***tinkoa*** *izanen da hurrengoa betetzen badu:*

$$\lim_{h \to 0} \left(\max_{n=0,\dots,N-1} \frac{|d_{n+1}|}{h} \right) = 0$$

Gainera,$\max_{n=0,\dots,N-1} \frac{|d_{n+1}|}{h}$ $O(h^p)$ *betetzen badu,* ***konsistentzia*** *edo* ***tinkotasun ordena*** p *izanen da.*

Oharra 2 *Konsistente izatea metodoak puntu guztietan (aurreko balioa ongi dagoela kontuan hartuta) errore txikiak sortzea da. Zenbat eta konsistentzia orden altuagoa izan orduan eta errorea txikiagoa izanen da.*

Teorema 6 ***(Konsistentziarako baldintza)*** *Izan bedi Runge-Kutta metodo bat konsistentea izanen da baldin era soili baldin* $\phi(x_n, y_n; 0) = f(x, y)$

Teorema 7 ***(Konsistentzia ordena)*** *Izan bitez p-1 aldiz deribagarria den f funtzioak definitutako ekuazio diferentziala eta* $\phi(x_n, y_n; h)$ *funtzioak definitutako Runge-Kutta metodoa.* ϕ *funtzioa h-rekiko p-1 aldiz deribagarria bada. Orduan metodoa p ordenako konsistentzia du baldin eta soilik baldin*

$$\frac{\partial^k}{\partial h^k}\phi(x, y; h)|_{h=0} = \left(\frac{1}{k+1}\right)\frac{d^k}{dx^k}f(x, y(x)), \quad k = 0, 1, ..., p-1$$

Froga: Taylorren h-rekiko garapenak erabiliko ditugu. Horretarako $y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h)$ *aldean h-rekiko efinen dugu eta* $y(x_{n+1})$ *aldean x-rekiko:*

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{d^n y(x)}{dx^n}|_{x=x_n}$$

$$= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}\frac{df}{dx}(x_n, y(x_n)) + \frac{h^3}{3!}\frac{df}{dx}(x_n, y(x_n) + ...$$

Era berean metodoari Taylor h-rekiko aplikatuz gero,

$$y_{n+1} = y_n + h(\phi(x_n, y_n; 0) + h\frac{\partial\phi}{\partial h}(x_n, y_n; 0) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial h^2}(x_n, y_n; 0) + ...$$

Beraz, errore totala $n+1$ *pausoan:*

$$e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!}\frac{df}{dx}(x_n, y(x_n)) + \frac{h^3}{3!}\frac{df}{dx}(x_n, y(x_n) + ...$$

$$-(y_n + h(\phi(x_n, y_n; 0) + h\frac{\partial\phi}{\partial h}(x_n, y_n; 0) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial h^2}(x_n, y_n; 0) + ...))$$

$$= h^0(y(x_n) - y_n) + h(f(x_n, y_n) - \phi(x_n, y_n; 0)) + h^2\left(\frac{1}{2!}\frac{df}{dx}(x_n, y_n) - \frac{\partial\phi}{\partial h}(x_n, y_,; 0)\right)$$

$$+h^3\left(\frac{1}{3!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_n, y_n) - \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial h^2}(x_n, y_,; 0)\right) + ...$$

Hau anulatu dadin h^i *guztien koefizienteak anulatu behar dira* $i = p-1$ *arte::*

$$\begin{cases} \frac{1}{2!}\frac{df}{dx} = \frac{\partial\phi}{\partial h} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{df}{dx} = \frac{\partial\phi}{\partial h} \\ \frac{1}{3!}\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial h^2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial h^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{(p)!}\frac{d^{p-1}f}{dx^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)!}\frac{\partial^{p-1}\phi}{\partial h^{p-1}} \Leftrightarrow \frac{1}{p}\frac{d^{p-1}f}{dx^{p-1}} = \frac{\partial^{p-1}\phi}{\partial h^{p-1}} \end{cases}$$

Definizioa 7 *Izan bitez hurrengo Runge-Kutta metodoek lortutako* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eta* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segidak:*

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R} \\ y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h) \end{cases}, \qquad \begin{cases} z_0 \in \mathbb{R} \\ z_{n+1} = y_n + h(\phi(x_n, z_n; h) + \varepsilon_n) \end{cases}$$

Orduan, ϕ*-ri dagokion Runge-Kutta metodoa* ***zero-egonkorra*** *dela diogu baldin* $\exists M_1, M_2 < \infty$ *non*

$$\max_{n=0,\dots,N} |y_n - z_n| \le M_1|y_0 - z_0| + M_2 \max_{n=0,\dots,N} |\varepsilon_n|$$

Oharra 3 *Zero egonkorra izatea n+1 puntua kalkulatzean n puntuaren erroreak n+1-koa asko ez handitzea da.*

Teorema 8 ***(Zero-egonkortasunerako baldintza)*** *Izan bedi* $y' = f(x, y)$ *ekuazio diferentziala, non f jarraitua eta y aldagaiarekiko Lipschitziarra den* $[a, b] \times \mathbb{R}^m$ *eremuan. Orduan phi ere Lipschitziarra izanen da eta metodoa zero-egonkorra izanen da.*

Teorema 9 *Izan bedi* ϕ $[a, b]\times\mathbb{R}\times[0, \overline{h}]$ *eremu itxian jarraitua eta L konstantearekiko Lipschitziarra den funtzioak definitzen duen Runge-Kutta metodoa, orduan baliokideak dira tinkoa eta konbergentea izatea.*

Froga:
Hasteko, defini ditzagun erabiliko ditugun elementuak:

- *Ekuazio zehatza:* $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) =_{*_1} \phi(x, y(x); 0) \\ y(x_0) = \eta \end{cases}$
  $*_1$ *metodoa tinkoa da*
- *Ekuazio hurbildua:* $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h) \\ y_0 = \eta \end{cases}$
- *Errore osoa:* $e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$

Bataz-besteko balioaren teorema aplikatuz gero,

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = y'(x) \Leftrightarrow y(x_{n+1}) = hy'(x) - y(x_n) = h\phi(x, y(x); 0) - y(x_n)$$

$x \in [x_n, x_{n+1}]$ *dagoenez, hurrengo notazioa erabiliko dugu* $x = x_n + \theta h$ *non* $\theta \in [0, 1]$. *Beraz,*

$$y(x_{n+1}) = h\phi(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h); 0) - y(x_n)$$

Ondorioz, errorea hurrengo moduan adierazi dezakegu:

$$e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = h\phi(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h); 0) - y(x_n) - (y_n + h\phi(x_n, y_n; h))$$

$$= y(x_n) - y_n + h\phi(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h); h) - h\phi(x_n, y_n; h) \pm h\phi(x_n, y(x_n); 0) \pm h\phi(x_n, y(x_n); h)$$

$$\begin{gathered} = e_n + h(\phi(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h); 0) - \phi(x_n, y(x_n); 0)) \\ +h(\phi(x_n, y(x_n); h) - \phi(x_n, y_n; h)) \\ +h(\phi(x_n, y(x_n); 0) - \phi(x_n, y(x_n); h)) \end{gathered}$$

Ondorioz, desberdintza triangeluarra aplikatuz gero,

$$\begin{gathered} |e_{n+1}| \leq |e_n| + h|\phi(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h); 0) - \phi(x_n, y(x_n); 0)| \\ +h|\phi(x_n, y(x_n); h) - \phi(x_n, y_n; h)| \\ +h|\phi(x_n, y(x_n); 0) - \phi(x_n, y(x_n); h)| \end{gathered}$$

Alde batetik, f y *aldagaiarekiko eta* L *konstanteaz Lipschitziarra denez,* ϕ *ere izanen da eta*

$$|\phi(x_n, y(x_n); h) - \phi(x_n, y_n; h)| \leq h|y(x_n) - y_n| = h|e_n|$$

Bestetik ϕ *uniformeki jarraitua denez gero aldagai guztiekiko,*

$$|\phi(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h); 0) - \phi(x_n, y(x_n); 0)| \leq |x_n - x_n + \theta h| K_1 = \alpha_n(h) = O(h)$$

$$|\phi(x_n, y(x_n); 0) - \phi(x_n, y(x_n); h)| \leq hK_2 = \beta_n(h)$$

$\gamma_n(h) = \alpha_n(h) + \beta_n(h) = O(h)$ *Hartuta eta* $\max_{n\in 1,\dots,N} \gamma_n = \gamma = O(h)$ *definitzen badugu, orduan erroreak hurrengo bornapena beteko du:*

$$|e_{n+1}| \leq |e_n|(1 + hL) + h\gamma$$

Ondorioz, lema baten arabera,

$$\max_{1\leq n\leq N} |e_n| \leq |e_0|e^{NLh} + \frac{|h\gamma||e^{NLh} - 1|}{hL} = 0 + \frac{|\gamma||e^{NLh} - 1|}{L} \to_{h\to 0} 0$$

Oharra 4 *Teorema interpretatu eginen dugu:*

Lipschitziarra denez, zero egonkorra izanen da horregatik, ez aurrekoaren erroreak ez du asko aldatuko n+1 puntuaren berezko errorea. Horregatik baliokideak dira n+1 puntuko errorea (n-ko errorea txikia izanda) txikia dela esatea eta n+1 puntuko errorea (n-ko errorea nulua izanda) txikia dela esatea.

4.3 Orden Handiko Runge-Kutta Metodoak

p tinkotasun ordena zenbat eta handiagoa izan orduan eta zehatzagoa da emaitza eta azkarrago konbergituko du, errorea $O(p+1)$ izango bait da. Etapa ugariko metodoak eraikitzean a_{ij}, b_j, c_i konstanteen balio zehatzak ezarriz gero tinkotasuna zehaztu dezakegu.

Ikus dezagun 3 etapako metodo esplizituetan zein izanen diren baldintzak.

Metodoa hurrengo erakoa da:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(b_1K_1 + b_2K_2 + b_3K_3) \\ K_1 = f(x, y) \\ K_2 = f(x + hc_2, y + ha_{21}K - 1 \\ K_3 = f(x + hc_3, y + h(a_{31}K_1 + a_{32}K_2)) \end{cases}$$

Edo Butcherren matrizearen bidez:

$$\begin{array}{cccc} 0| & 0 & 0 & 0 \\ c_2| & a_{21} & 0 & 0 \\ c_3| & a_{31} & a_{32} & 0 \\ & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

4.3.1 p $\geq$ 1-rako baldintzak

$y(x_{n+1}) = y_{n+1} + O(h^2)$ ikustea nahi dugu:

$$y(x+h) = y + h(b_1K_1 + b_2K_2 + b_3K_3) + O(h^2)$$

Alde batetik,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + O(h^2)$$

$$y(x) + hf + O(h^2)$$

Bestalde,

$$\mathbf{K_1} = f(x,y)$$

$$\mathbf{K_2} = f(x+c_2h,\ y+a_{21}K_1h) = f(x,\ y+a21K_1h)+c_2hf_x(x,\ y+a_{21}K_1h)+...$$
$$= f(x,y) + hf_y(x,y) + ... + O(h) = f + O(h)$$

$$\mathbf{K_3} = f(x+c_3h,\ y+h(a_{31}K_1+a_{32}K_2)) = f(x,\ y+h(a_{31}K_1+a_{32}K_2))$$
$$+c_3hf_x(x,\ y+h(a_{31}K_1+a_{32}K_2)) + ...$$
$$= f(x,y) + h(a_{31}K_1+a_{32}K_2)f_y(x,y) + O(h) = f + O(h)$$

Beraz,

$$y(x_n)-y_n = hf-h(b_1f+b_2f+b_3f+O(h))+O(h^2) = hf(1-(b_1+b_2+b_3))+O(h^2) = O(h^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum b_i = 1$$

Beraz, hau izanen da baldintza.

4.3.2 p $\geq$ 2-rako baldintzak

Alde batetik $y(x_{n+1})$ garatuko dugu,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y'' + O(h^3)$$

$$y(x) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + O(h^2)$$

Bestalde y_{n+1} horretarako $K_i$ak garatu behar ditugu:

$$\mathbf{K_1} = f(x,y) = f$$

$$\mathbf{K_2} = f(x + hc_2,\ y + ha_{21}K_1)$$

$$= f(x, y + ha_{21}K_1) + f_x(x,\ y + ha_{21}K_1)hc_2 + O(h^2)$$
$$= f(x,y) + f_y(x,y)ha_{21}K_1 + O(h^2) + f_x(x,y)hc_2 + f_{xy}(x,y)h^2c_2a_{21}K_1 + O(h^2)$$
$$= f + f_yha_{21}f + f_xhc_2 + O(h^2)$$
$$= f + ff_yha_{21} + f_xhc_2 + O(h^2)$$

$$\mathbf{K_3} = f(x + hc_3,\ y + h(a_{31}K_1 + a_{32}K_2))$$
$$= f(x,\ y + h(a_{31}K_1 + a_{32}K_2)) + f_x(x,\ y + h(a_{31}K_1 + a_{32}K_2))hc_3 + O(h^2)$$
$$= f(x,y) + f_y(x,y)h(a_{31}K_1 + a_{32}K_2) + f_x(x,y)hc_3 + f_{xy}(x,y)h^2c_3(a_{31}K_1 + a_{32}K_2) + O(h^2)$$
$$= f + f_yh(a_{31}(f) + a_{32}(f + ff_yha_{21} + f_xhc_2 + O(h^2))) + f_xhc_3 + O(h^2)$$
$$= f + f_yh(a_{31}f + a_{32}f) + f_xhc_3 + O(h^2)$$
$$= f + ff_yh(a_{31} + a32) + f_xhc_3 + O(h^2)$$

Beraz, $y(x_{n+1}) = y_{n+1}$ hartuz gero,

$$y(x_{n+1} - y_{n+1} = y(x) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + O(h^3) - y_{n+1} - h(b_1K_1 + b_2K_2 + b - 3K - 3)$$

$$= +hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) - h(b_1f + b_2(f + ff_yha_{21} + f_xhc_2 + O(h^2))$$
$$+b - 3(f + ff_yh(a_{31} + a32)) + f_xhc_3 + O(h^2))) + O(h^3)$$
$$= fh(1 - (b1 + b2 + b3)) + h^2f_x(\frac{1}{2} - (c_2b_2 + c_3b_3)) + hff_y(\frac{1}{2} - (b_2a_{21} + b_3(a_{31} + a32)))$$

Koefizienteak hartuz hurrengoa dugu:

$$\begin{cases} 0 = 1 - (b1 + b2 + b3) \\ 0 = \frac{1}{2} - (c_2b_2 + c_3b_3) \\ 0 = \frac{1}{2} - (b_2a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32})) \end{cases}$$

Beraz, hauek izanen dira baldintzak. Ohartu nola hurrengo baldintzak baliokideak diren:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2} - (c_2b_2 + c_3b_3) \\ 0 = \frac{1}{2} - (b_2a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32})) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{2} - (c_2b_2 + c_3b_3) \\ c_i = \sum_j a_{ij} \end{cases}$$

4.3.3 Orokorrean

Era orokor batean hurrengoak izanen dira tinkotasun ordenetarako baldintzak:

$p \geq 1$	$\sum b_i = 1$	
$p \geq 2$	$\sum b_i c_i = \frac{1}{2}$	$c_i = \sum_j a_{ij}$
$p \geq 3$	$\sum b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$	$\sum_j \sum_j b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$

Adibidea 8 *Kalkulatu hurrengo metodoaren tinkotasun ordena:*

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2K_1} \\ K_3 = f(x_n + h, y_n + h(-K_1 + K_2)) \end{cases}$$

Metodo honi elkartutako Butcherren matrizea hurrengoa da:

$$\begin{array}{r|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Argia denez errenkaden baldintza betetzen da:

$$c_1 = 0 = 0 + 0 + 0$$

$$c_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 0 + 0$$

$$c_3 = 1 = -1 + 2 + 0$$

Aztertu ditzagun baldintzak banaka:

- $p \geq 1$

$$\sum b_i = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = 1 \quad \surd$$

- $p \geq 2$

$$\sum b_i c_i = \frac{1}{6} * 0 + \frac{4}{6} * \frac{1}{2} + \frac{1}{6} * 1 = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2} \quad \surd$$

$$c_i = \sum a_{ij} \quad \surd$$

$$c_1 = 0 = 0 + 0 + 0$$
$$c_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 0 + 0$$
$$c_3 = 1 = -1 + 2 + 0$$

- $p \geq 3$

$$\sum b_i c_i^2 = \frac{1}{6}0 + \frac{4}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}1^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\surd$$
$$sum_i \sum_j b_i a_{ij} c - j = \frac{1}{6}(2)\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\surd$$

Beraz definitutako metodoa gutxienez 3 ordeneko tinkotasun maila dauka

4.4 Butcher-en Ordenaren Mugak

Tinkotasun orden altuak bilatu behar ditugunez interesgarria da s etapadun metodo batekin tinkotasun mailarik altuena zein den aztertzea. Hori eginen dugu atal honetan.

Teorema 10 ***(Ordena Maximoko Baldintza)*** *Izan bedi s etapako Runge-Kutta metodo bat, orduan bera tinkotasun maila gehienez s izanen da. (Frogapena Carlos Gorria-ren apunteetan)*

Adibidea 9 *Beraz aurreko adibidean 3 urretsako etapa denez tinkotasun maila 3 izanen da.*

4.5 Errorearen Analisia eta Urratsaren Egokipena

Atal honetan h pausoaren luzeera pausoari egokituko diogu. Hau egiteko errore lokala erabiliko dugu.

$y(x_{n+1})$-ren balioa bi modutan hurbilduko dugu:

- y_{n+1} hurbiltzeko metodoa h_0 urratsaz x_n-ri aplikatuko diogu, metodo hau p tinkotasun maila duenez hurrengoa izanen da y_{n+1} eta d_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + h_0\phi(x_n, y_n; h_0)$$
$$d_{n+1} = \varphi(x_n, y(x_n))h_0^{p+1} + O(h_0^{p+2})$$

- y^*_{n+1} lortzeko metodoa $2h_0$ urratsaz x_{n-1}-ri aplikatuko dugu:

$$y^*_{n+1} = y_n + 2h_0\phi(x_{n-1}, y_{n-1}; 2h_0)$$

$$d^*_{n+1} = \varphi(x_{n-1}, y(x_{n-1}))(2h_0)^{p+1} + O(h_0^{p+2})$$

Gainera φ-ri Taylor aplikatuz gero,

$$\varphi(x_{n-1}, y(x_{n-1})) = \varphi(x_n, y(x_{n-1})) + O(h) = \varphi(x_n, y(x_n)) + O(h)$$

$\Leftrightarrow d^*_{n+1} = \varphi(x_n, y(x_n))(2h_0)^{p+1} + O(h)(2h_0)^{p+1} + O(h^{p+2}) = \varphi(x_n, y(x_n))(2h_0)^{p+1} + O(h^{p+2})$

Era berean ϕ-ri Taylor aplikatuz,

$$\phi(x_{n-1}, y_{n-1}; 2h_0) = \phi(x_n, y_n; h_0) + O(h)$$

Beraz,

$$y_{n+1} - y^*_{n+1} = (y(x_{n+1}) - y^*_{n+1} - \phi(x_{n-1}, y_{n-1}; 2h_0)) - ((y(x_{n+1}) - y_{n+1} - \phi(x_n, y_n; h_0))$$

$$= d^*_{n+1} - d_{n+1} = (2^{p+1} - 1)\varphi(x_n, y(x-n))h^{p+1} + O(h^{p+2})$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x_n, y(x-n))h^{p+1} = \frac{y_{n+1} - y^*_{n+1}}{2^{p+1} - 1}$$

Ondorioz,

$$d_{n+1} = \varphi(x_n, y(x-n))h^{p+1} + O(h) \approx \varphi(x_n, y(x-n))h^{p+1} = \frac{y_{n+1} - y^*_{n+1}}{2^{p+1} - 1}$$

Eta $d_{n+1} < \varepsilon$ nahi badugu orduan,

$$\frac{y_{n+1} - y^*_{n+1}}{2^{p+1} - 1} \frac{h^{p+1}}{h_0^{p+1}} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow h < h_0 \sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon(2^{p+1} - 1)}{y_{n+1} - y^*_{n+1}}}$$

Metodoaren Algoritmoa:

- Algoritmo hau $x_n$tik hasiko dugu.
- Kalkulatu y_{n+2} h_0-rekin eta Runge-Kutta metodoa bi aldiz aplikatuz.
- Kalkulatu y_{n+2^*} $2h_0$-rekin eta Runge-Kutta metodoa aldi bakar batez aplikatuz.
- Kalkulatu h_{new} hurrengo formula erabiliz,

$$h_{new} = h_0 \sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon(2^{p+1}-1)}{y_{n+1} - y^*_{n+1}}}$$

- Iterazioa berriro errepikatu b-ra heldu arte.

5 Gaia:

Urrats Ugariko Metodo Linealak

5.1 Sarrera

Urrats anitzetako sistemetan y_{n+k} elementua aurreko k elementuen menpe dago. Orokorrean hurrengo itxura daukate:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$$

Orokorrean $\alpha = 1$ hartu dezakegu, eta horrela ez bada besteak normalizatu daitezke, horrela,

$$y_{n+k} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}$$

$\beta_k = 0$ bada metodoa esplizitua izanen da eta ebazterako ekuazio linel bat ebatzi beharko da. Inplizitua bada puntu finkoaren antzeko metodoak erabili behar dira ebazteko. Horrela metodoa hurrengoa da:

$$\begin{aligned} y_{n+k} &= h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} \\ &= h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + M \end{aligned}$$

Formula hau behar izan beste aldiz errepikatuz gero emaitza lortuko genuke.

α eta β balioak aldatuz errorea txikiagotu edo handitu dezakegu. Garatu dezagun teoria errorea ahal den beazain txikia egin ahal izateko.

5.2 Metodoen Konbergentzia

Teoria garatzeko defini ditzagun hurrengo kontzeptuak:

Definizioa 8 *Urrats anitzeko metodo bat* ***konbergentea*** *dela diogu baldin*

$$\lim_{h \to 0} (y_n) = y(x_n)$$

Definizioa 9 *Izan bedi urrats anitzeko metodo bat* ***p ordenako konbergentea*** *da hurrengoa betetzen badu:*

$$\lim_{h\to 0}\left(\max_{0\leq n\leq k-1} \| y(x_n) - y_n \|^{-p+1}\right) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lim_{h\to 0}\left(\max_{k\leq n\leq N} \| y(x_n) - y_n \|^{-p+1}\right) = 0$$

Edo baliokidea dena,

$$\max_{0\leq n\leq k-1} \| y(x_n) - y_n \| = O(h^p) \quad \Rightarrow \quad \max_{k\leq n\leq N} \| y(x_n) - y_n \| = O(h^p)$$

Konbergentzia zuzenean definitzea zaila da horregatik tinkotasun eta zero-egonkortasun kontzeptuak definituko ditugu.

5.2.1 Tinkotasuna eta tinkotasun ordena

Definizioa 10 *Izan bedi urrats anitzetako metodo bat, bere* ***n pausuko hondarra*** *eran definituko da:*

$$R_n[y(x);h] = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(x_{n+j}) - h\beta_j f(x_{n+j}, y(x_{x+j})]$$

$$= \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(x + jh) - h\beta_j y'(x + jh)]$$

Hondarra n+k puntuko balioa kalkulatzerakoan (aurreko k balioak zuzenak izanda) egiten den errorea izanen da.

Definizioa 11 *Izan bedi urrats anitzeko metodo bat eta bere hondarra, orduan metodoa* ***tinkoa*** *edo* ***konsistentea*** *dela esanen dugu hurrengoa betetzen bada:*

$$\lim_{h\to 0}\left(\max_{0\leq n\leq N} \frac{\| R_n \|}{h}\right) = 0$$

Are gehiago p ordeneko tinkoa izanen da baldin,

$$\lim_{h\to 0}\left(\max_{0\leq n\leq N} \frac{\| R_n \|}{h^p}\right) = 0$$

Oharra 5 *Hondarraren Taylorren garapena kalkulatuz gero hurrengo eran adieraz dezakegu*

$$R_n[y(x);h] = D_0 y(x_n) + D_1 h y'(x_n) + ... + D_q h^q y^{q)}(x_n) + O(h^{q+1})$$

non

$$\begin{cases} D_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_k \\ D_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + ...k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + ... + \beta_k) \\ \vdots \\ D_q = \frac{1}{q!}\sum_{j=1}^{k} \alpha_j - \frac{1}{(q-1)!}\sum_{j=1}^{k} j^{q-1}\beta_j \end{cases}$$

Beraz metodoa p tinkoa izan dadin bere errorea $O(h^{p+1})$ izan behar denez, p tinkoa izanen da baldin

$$D_0 = D_1 = D_p = 0 \neq D_{p+1}$$

Definizioa 12 *Urrats anitzetako metodo linealaren lehenengo eta bigarren polinomioak hurrengoak dira hurrenez hurren:*

$$\rho(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j$$

$$\sigma(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \xi^j$$

Oharra 6 *Metodo bat konsistentea izan dadin $D_0 = D_1 = 0$. Beraz,*

$$\rho(1) = 0$$

$$\rho'(1) - \sigma'(1) = 0$$

Adibidea 10 *Izan bedi $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{h}{4}(f_{n+2} + 8f_{n+1} + 5f_n)$, determinatu bere tinkotasun ordena.*

Hasteko defini ditzagun α eta β-k eta metodoaren lehenengo eta bigarren polinomioak:

$$\alpha - 2 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_0 = -2 \Rightarrow \rho(r) = r^2 + r - 2$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4}, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow \sigma(r) = \frac{1}{4}r^2 + 2r + \frac{3}{4}$$

Orain kalkulatu ditzagun hondarraren Taylorren garapenean lortutako koefizienteak eta ikusi dezagun anulatzen diren:

$$D_0 = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$D_1 = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j j - \sum_{j=0}^{2} \beta_j = 2 * 1 + 1 * 1 - \left(\frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$D_2 = \frac{1}{2!}\left(\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^2 - 2\sum_{j=0}^{2} \beta_j j)\right) = \frac{1}{2}\left(1 * 2^2 + 1 * 1^2 - 2\left(\frac{1}{4} * 2 + 2\right)\right) = 0$$

$$D_3 = \frac{1}{3!}\left(\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^3 - 3\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^2)\right) = \frac{1}{6}\left(1 * 2^3 + 1 * 2 - 3\left(\frac{1}{4} * 2^2 + 2 * 1^2\right)\right) = 0$$

$$D_4 = \frac{1}{4!}\left(\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^4 - 4\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^3)\right) = \frac{1}{24}\left(2^4 + 1 - 4(2+2)\right) = \frac{1}{24} \neq 0$$

Beraz tinkotasun maila 3 izanen da.

Teorema 11 ***(Orden handieneko metodoak)*** *Izan bedi k urratseko metodo lineala orduan bere tinkotasun orden maximoa hurrengoa da:*

$$\begin{cases} k+1 & k \text{ bakoitia} \\ k+2 & k \text{ bikoitia} \end{cases}$$

5.2.2 Zero-egonkortasuna

Definizioa 13 *Izan bedi urrats anitzeko metodo lineala, orduan esaten da* ***zero-egonkorra*** *dela existitzen badira $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ hurrengo bi segidak,*

$$\{u_n\}: \quad \sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{n+j} - h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x_{n+j}, u_{n+j}) h\delta_n$$

$$\{v_n\}: \quad \sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{n+j} - h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x_{n+j}, v_{n+j}) h\gamma_n$$

non $\| u_0 - v_0 \|$ *nahiko txikia bada, orduan*

$$\max_{k \le n \le N} \| u_n - v_n \| = O\left(\max_{0 \le n \le k-1} \| u_n - v_n \| \max_{0 \le n \le k-1} \| \delta_n - \gamma_n \| \right)$$

Hau da, metodo bat zero-egonkorra izanen da hasierako balioak errore txiki bat izan arren ondo funtzionatzen badu.

Teorema 12 *Izan bedi urrats anitzeko metodo bat lineala, zero-egonkorra izanen da baldin eta soilik baldin erroaren baldintza betetzen badu, baldintza hau hurregoa izanik: r lehenengo polinomioaren erroa bada orduan bietako bat betetzen du:*

- $|r| < 1$
- $|r| = 1$ *eta ez da anizkoitza*

Adibidea 11 *Aurreko adibideko metodo berdina hartuko dugu:*

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{h}{4}(f_{n+2} + 8f_{n+1} + 5f_n)$$

$$\rho(r) = r^2 + r - 2$$

Kalkulatu ditzagun erroak:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2; 1$$

$|r_1| = |-2| = 2 > 1$ *denez, ez du errorearen baldintza betetzen eta ez da zero-egonkorra izanen.*

Adibidea 12 *Izan bedi hurrengo urrats anitzetako metodo lineala, ikusi zero egonkorra den:*

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf_{n+2}$$

Kalkulatu dezagun lehenengo polinomioa eta honen erroak:

$$\rho(r) = r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3}$$

$$rho(r) = 0 \Leftrightarrow 3r^2 - 4r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{2 \pm 1}{3} = \frac{1}{6}; 1$$

$|r_1| = \frac{1}{6}$ *eta* $|r_2| = 1$ *hau erro sinplea izanik, beraz, zero egonkorra da.*

5.2.3 Baliokidetasun teorema

Teorema 13 *Izan bedi urrats anitzeko metodo lineala orduan, hurrengoak baliokideak dira:*

- *Metodoa p konbergentea da*

Oharra 7 *Teoremaren frogapena Carlosen apunteetan dago, ez dut frogatuko baina kontzeptuali azalduko dut:*

p ordeneko tinkoa izatea hondarraren errorea txikia izatea da, hau da metodoak berez daukan errorea (aurreko k balioak ongi egonda) txikia izatea. Zero egonkorra izatea, berriz hasierako erroreen (aurreko k balioen erroreen) menpekotasuna txikia izatea da.

Metodo bat konbergentea izanen da, hau da ez du errorerik emanen baldin eta soilik baldin metodoak errore txikiak ematen baditu puntu bakoitzeko eta gainera, aurreko puntuen erroreak ez badute errore hau handitzen.

Gainera metodoaren berezko errorea zenbat eta txikiagoa egin (tinkotasun ordena handitu), metodoaren errore totala orduan eta txikiagoa izanen da (Konbergentzia ordena handitu).

5.3 Egonkortasun eremuak

Atal honen helburua $y' = \lambda y$ edozein ekuazioa ($\lambda = \frac{\partial f}{\partial y}$) izanda, h, λ eta errorearen arteko erlazioa aurkitzean datza , azken hau kontrolpean mantentzeko helburuarekin. Hasteko egonkortasunaren inguruko definizioak ikusiko ditugu eta gero egonkortasun eremuak aurkitzeko metodoak.

5.4 Egonkortasun absolutua

Aipatutako erlazioa aurkitzeko har ditzagun $\{y_n\}$ soluzio erreala eta $\{\tilde{y_n}\}$ zenbakizko hurbilpena eta defini ditzagun R_n metodoaren hondarra eta T_n mozketa errorea:

$$R_n = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(x_{n+j}) - h\beta_j f(x_{n+j}, y(x_{x+j})]$$

$$T_n = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j \tilde{y_{n+j}} - h\beta_j f(x_{n+j}, \tilde{y_{n+j}}]$$

Orduan, $\tilde{e_n} = y(x_n) - \tilde{y_n}$ eta $phi_n = R_n - \tilde{R_n}$ bezala definitzen baditugu. Kalkulu batzu eginez gero eta ϕ konstantzetaz hartuz gero, orduan hurrengo emaitzara heltzen gara:

$$\tilde{e_n} = \sum_{j=0}^{k} d_j r_j^n - \frac{\phi}{h\lambda \sum_0^k B_j}$$

r_j hurrengo polinomioaren erroak izanda:

$$\pi(r, \overline{h}) = \rho(r) - \overline{h}\sigma(r)$$

Beraz errorearen h eta λ-ren arteko erlazioa definitu dugu. Goiko polinomio hau oso erabilgarria da eta egonkortasun absolutuko polinomioa deritzo.

Definizioa 14 *Izan bitez $y' = \lambda y$ ekuazio diferentziala eta hau hurbiltzeko erabiliko dugu urrats anitzeko metodo lineala. Orduan* ***egonkortasun absolutuko polinomioa*** *hurrengoa da:*

$$\pi(r, \overline{h}) = \rho(r) - \overline{h}\sigma(r)$$

Definizioa 15 *Izan bitez $y' = \lambda y$ ekuazio diferentziala eta hau hurbiltzeko erabiliko dugu urrats anitzeko metodo lineala eta hauek definitutako egonkortasun absolutuko polinomioa. Orduan, $\parallel r_i \parallel < 1$ betetzen bada erro guztietarako, metodoa $\overline{h}$-rekin* ***absolutuki egonkorra*** *izanen dela diogu.*

Definizioa 16 *Izan bitez $y' = \lambda y$ ekuazio diferentziala eta hau hurbiltzeko erabiliko dugu urrats anitzeko metodo lineala. Orduan* ***egonkortasun absolutuko eremua*** *hurrengo eran definitzen da:*

$$D = \left\{\overline{h} \in \mathbb{C} \ non \ \forall i \ \ \parallel r_i \parallel < 1\right\}$$

Bestalde, D-ren elementu errealek osatzen duten multzoa ***egonkortasun absolutuko tartea*** *deritzo.*

5.4.1 Egonkortasun absolutuko eremuak aurkitzeko metodoak

- **5.4.1.1 Schur-en Metodoa**

Definizioa 17 *Izan bitez $p(r) = a_0 + a_1 r + ... + a_n r^n$ polinomioa eta honen r_i erroak. Orduan* ***Schur-en polinomioa*** *dela diogu baldin eta i guztientzat $\parallel r_i \parallel < 1$*

Metodo honetan π polinomioa Schur-en polinomioa bihurtzen duten $\overline{h}$-ren balioak bilatuko ditugu. Hau posible izateko polinomio hauen teoria gehiago garatu behar dugu:

Definizioa 18 *Izan bedi p Schurren polinomioa orduan, honen* ***polinomio laguntzaileak*** *hurrengoak dira:*

$$\widehat{p}(r) = \overline{a_k} + \overline{a_{k-1}} r + ... + \overline{a_0} r^k$$

$$p_1(r) = \frac{1}{r}\left(\widehat{p}(0)p(r) - p(0)\widehat{p}(r)\right)$$

Oharra 8 *Ohartu nola,*

$$p_1(r) = \frac{1}{r}\left(\widehat{p}(0)p(r) - p(0)\widehat{p}(r)\right) =$$

$$\frac{1}{r}\left(\widehat{p}(0)(a_0 + a - 1r + ... + a_k r^k) - p(0)(\overline{a_k} + \overline{a_{k-1}} r + ... + \overline{a_0} r^k)\right)$$
$$= \frac{1}{r}\left(\overline{a_k}(a_0 + a - 1r + ... + a_k r^k) - a_0(\overline{a_k} + \overline{a_{k-1}} r + ... + \overline{a_0} r^k)\right)$$
$$= \frac{1}{r}\left(\overline{a_k}(a - 1r + ... + a_k r^k) - a_0(\overline{a_{k-1}} r + ... + \overline{a_0} r^k)\right)$$
$$= \overline{a_k}(a - 1 + ... + a_k r^{k-1}) - a_0(\overline{a_{k-1}} + ... + \overline{a_0} r^{k-1})$$

Hortaz p_1 k-1 mailako polinomioa izanen da.

Teorema 14 ***Schur-en irizpidea*** *Izan bedi p(r) polinomioa, orduan Schur-en polinomioa da baldin eta soilik baldin $p_1(r)$ ere bada eta $\parallel \widehat{p}(0) \parallel > \parallel p(0) \parallel$*

Oharra 9 *Teorema honi buruzko zenbait ohar*

– $\widehat{p}(0) = \overline{c_k}$ *eta* $p(0) = c_0$ *direnez,* $\| c_k \| = \| \overline{c_k} \| > \| c_0 \|$ *izatearekin aski da.*

– *Schurren irizpidea era errekurtsiboan aplika daiteke.*

– *Gure kasuan* $\pi(r, h)$ *polinomioari aplikatuko diogu.*

Adibidea 13 *Azter dezagun* $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{1}{2}h(3f_{n+1} - f_n)$ *urrats anitzeko metodo lineal explizituaren egonkortasun absolutuko tartea, hau da,* $\overline{h} \in \mathbb{R}$ *dela kontuan hartuta.*

Kalkula ditzagun egonkortasun absolutuko polinomioa eta bere laguntzaileak:

$$\rho(r) = r^2 - r$$

$$\sigma(r) = \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}$$

$$\pi(r, \overline{h}) = \rho(r) - \overline{h}\sigma(r) = r^2 - \left(1 + \frac{3\overline{h}}{2}\right) r + \frac{\overline{h}}{2}$$

$$\widehat{\pi}(r) = \frac{\overline{h}}{2}r^2 - \left(1 + \frac{3\overline{h}}{2}\right) r + 1$$

$$\begin{aligned}\pi_1(r) &= \frac{1}{r}\left(1 * \left[r^2 - \left(1 + \frac{3\overline{h}}{2}\right) r\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\overline{h}}{2}r^2 - \left(1 + \frac{3\overline{h}}{2}\right) r\right]\right) \\ &= \left(1 + \frac{3\overline{h}}{2})\right) \left[\left(1 + \frac{\overline{h}}{2}\right) r - \left(1 - \frac{3\overline{h}}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

Hau izanda bilatu ditzagun baldintza betetzen dituzten $\overline{h}$*-ren balioak: Erro bakarra hurrengoa da:*

$$|r| = \frac{|1 + \frac{3\overline{h}}{2}|}{|1 + \frac{\overline{h}}{2}|} < 1$$

Eta beste baldintza betetzeko,

$$\frac{|\overline{h}|}{2} < 1$$

Beraz, $h \in (0, 1)$

- **5.4.1.2 Routh-Hurwitz-en metodoa**

Metodo honetan $|r| < 1$ baldintza $Re(r) < 0$ baldintzaz aldatuko dugu.Horretarako hurrengo aplikazioa erabiliko dugu:

$$\Phi(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

Aplikazio bijektibo honen bidez $D = \{z \ non\ \|z\| < 1\}$ multzoaren irudia $V = \{z \ non\ Re(z) < 0\}$ da.Gainera,

$$\Phi^{-1}(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

Edozein $r \in \mathbb{C}$ izanda, $\|r\| < 1$ beteko dute baldin eta soilik baldin $\Phi(r)$-ren parte erreala negatiboa bada.

Bestalde, r p polinomioaren erroa bada,

$$p(r) = 0 \Rightarrow p(\Phi^{-1}(\Phi(r)) = 0$$

$p(\Phi^{-1}(z)) = 0$ garatuz ($z = \Phi(r)$),

$$p(\Phi^{-1}(z)) = p\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = a_0 + a_1\frac{z+1}{z-1} + ... + a_k\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^k = 0$$

$$\Rightarrow p(\Phi^{-1}(z))(z-1)^k = a_0(z-1)^k + a_1(z+1)(z-1)^{k-1} + ... + a_k(z+1)^k = 0$$
$$\Rightarrow z\ p(\Phi^{-1}(z))(z-1)^k - ren\ erroa\ da.$$

Oharra 10 *Ohartu nola polinomio berriaren maila jeitsi daitekeen. Horregatik gerta daiteke honek besteak baino erro gutxiago izatea. ikusitako inplikazioak aldebikoak izan daitezen polinomio berri honen maila p-rena izan behar da.*

Beraz lortu ditugun bi baliokidetasunak batera hartuz gero:

Teorema 15 *Izan bedi p polinomioa, orduan Schurren polinomioa da baldin eta soilik baldin $p(\Phi^{-1})$ polinomioaren erro guztien parte erreala negatiboak badira eta p-ren mailakoa bada.*

Bestalde, edozein q polinomio izanik bere erroen parte erreala negatiboa dela ikusteko Hurwitz-en metodoa ikusiko dugu.

Definizioa 19 *Izan bedi $q(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1}... + a_k$ polinomio bat, ber Hurwitz-en matrizea hurrengoa da.*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & ... & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & ... & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & ... & a_{2k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_k \end{pmatrix}$$

non $a_j = 0$ $j > k$ bada.

Teorema 16 *Izbedi $q(z) = a_0z^k + a_1z^{k-1}... + a_k$ koefiziente errealetako polinomioa non $a_k > 0$ den. Orduan, $p(z)$-ren erroen parte errealak negatiboak dira baldin eta soilik baldin $p(z)$-ren Hurwitzen matrizearen minore nagusiak positiboak badira.*

- **5.4.1.3 Parametrizazio**
  Eremuaren kalkulurako beste metodo bat parametrizazioa da. Horretarako $|r| = 1$ erangingo dugu erroren batean eremuaren muga kalkulatu ahal izateko. Mugak bi eremu disjuntu eraikiko ditu eta eremu hauen artean zein den erabakitzeko hurrengo teoremak erabiliko ditugu:

  Teorema 17 *Izan bedi urrats anitzeko metodo konbergente bat. Bere egonkortasun abolutuko eskualdeak ez dauka ardatz erreal positiboa jatorriaren ingurune batean.*

5.5 Abiarazle zuzentzaile metodoak

Urrats anitzeko metodo lineal inplizituak esplizituak baino zehatzagoak dira. Baina askotan matodoa aplikatu ahal izateko ebatzi behar den ekuazioa konplexuegia da, horregatik hau puntu finkoaren metodoaren bidez hurbilduko dugu.

Puntu finkoaren metodoaren arabera, hasierako puntua benetazko emaitzetik nahiko hurbil badago orduan $y = G(y)$ lortzeko aski zaigu $y_{n+1} = G(y_n)$ iterazioa erabiltzea.

Gure kasuan $G(y)$ funtzioa metodo inplizituak (zuzentzailea) emanen du eta hasierako balioa metodo esplizituak (abiarazlea). Puntu finkoa aplikatzeko iterazio kopurua m izanen da.

Har ditzagun hurrengo metodoak eta egin ditzagun $n+k$ puntuko balioa lortzeko behar diren iterazioak:

$$(A) \quad y_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j} + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+1}$$

$$(Z) \quad y_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+1}$$

Orduan, definituko dugun iterazioa hurrengoa da:

$$(A) \quad y_{n+k}^{[0]} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[m]} + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+1}^{[m]}$$

$$(Z) \quad \begin{cases} a) \; f_{n+k}^{[m]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s-1]}) \\ b) \; y_{n+k} = h\beta_k f_{n+k}^{[s-1]} - \sum_{j=0}^{-1} \alpha_j y_{n+j}^{[m]} + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+1}^{[m]} \end{cases}$$

Metodoaren algoritmoa

- $[a,b]$ tartea h luzeerako N zatitan banatuko dugu
- hasierako k balioak izanen ditugunez 1-tik $N-k$-ra arte($n \in [1, ..., N-k]$) y_{n+k} lortu beharko dugu:
  - Hasierako hurbilpena lortuko dugu A metodoa erabiliz, hau $y_{n+k}^{[0]}$ izanen da.
  - $y_{n+k}^{[s]}$-ra heldu arte hurrengoa aplikatuko dugu:
    - $f_{n+k}^{[m]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s-1]})$
    - $y_{n+k} = h\beta_k f_{n+k}^{[s-1]} - \sum_{j=0}^{-1} \alpha_j y_{n+j}^{[m]} + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+1}^{[m]}$

5.5.1 Abiarazle-Zuzentzaile metodoen analisia

Normalena analisia egiterako orduan adierazpena garatzea eta inplizituki definitzen duen Runge-Kutta metodoa edo urrats anitzeko metodoaren anilisia egitea da. Ikusi dezagun hurrengo adibidea:

Adibidea 14 *Izan bedi Eulerren metodoa eta trapezioaren metodoak definitzen duen abiarazle-zuzentzaile metodoa, orduan egin metodoaren analisia m=2 denean.*

Hurrengoak izanen dira metodo hauek definitzen duten metodoa:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{[0]} = y_n^{[2]} + hf(x_n, y_n^{[2]}) \\ f_{n+1}^{[i]} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[i-1]}) \\ y_{n+1}^{[i]} = y_n^{[2]} + \frac{h}{2}\left(f_n^{[2]} + f_{n+1}^{[i-1]}\right) \end{cases}$$

Beraz,

$$y_{n+1}^{[0]} = y_n^{[2]} + hf(x_n, y_n^{[2]})$$

$$\begin{cases} f_{n+1}^{[0]} = f(y_n^{[2]} + hf(x_n, y_n^{[2]})) \\ y_{n+1}^{[1]} = y_n^{[2]} + \frac{h}{2}\left(f_n^{[2]} + f_{n+1}^{[0]}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{n+1}^{[1]} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[2]}) \\ y_{n+1}^{[2]} = y_n^{[2]} + \frac{h}{2}\left(f_n^{[2]} + f_{n+1}^{[1]}\right) \end{cases}$$

Hortaz $K1$,$K2$ eta $K3$ hurrengo eran definituz gero,

$$K1 = f(x_n, y_n)$$

$$K2 = f_{n+1}^{[0]} = f(y_n^{[2]} + hf(x_{n+1}, y_n^{[2]})) = f(x_n, y_n + hK1)$$

$$K3 = f_{n+1}^{[1]} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{[1]}) = f(x_{n+1}, y_n + \frac{h}{2}\left(f_n^{[2]} + f_{n+1}^{[0]}\right)\right) = f(x_{n+1}, y_n + \frac{h}{2}(K1 + K2))$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K1 + K3)$$

Beraz, Runge-Kutta metodo bat dugu eta honi elkartutako Butcherren matrizea hurrengoa da:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Kalkulatu dezagun tinkotasun ordena:

- $p \geq 1$

$$\sum_{i=0}^{2} b_i = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1 \quad \checkmark$$

- $p \geq 2$

$$c_i = \sum_{j=0}^{2} a_{ij} \quad \surd$$

$$0 = 0 + 0 + 0; \quad 1 = 1 + 0 + `0; \quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0$$

$$\sum_{i=0}^{2} c_i b_i = 0 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \surd$$

- $p \geq 3$

$$\sum_{b_i c_i^2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} sharp$$

Beraz, $p = 3$ da.

Ikusi dezagun orain egonkortasun-absolutuko eremua $y' = \lambda y$ testarekin:

$$y' = f(x, y(x)) = \lambda y \Leftrightarrow \begin{cases} K1 = \lambda y_n \\ K2 = \lambda(y_n + hK1) = \lambda(y_n + h\lambda y_n) = \lambda(y_n + \overline{h} y_n) \\ K3 = \lambda \left(y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_n + \lambda y_n(1 + \overline{h}))\right) = \lambda \left(y_n + \frac{\overline{h}}{2}(y_n + y_n(1 + \overline{h}))\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(\lambda y_n + \lambda y_n \left(1 + \overline{h} + \frac{\overline{h}}{3}\right)\right) = y_n \left(1 + \frac{\overline{h}}{2}\left(1 + 1 + \overline{h} + \frac{\overline{h}^2}{3}\right)\right) =$$

$$y_n \left(1 + \overline{h} + \frac{\overline{h}^2}{2} + \frac{\overline{h}^3}{4}\right)$$

Egonkortasun-absolutuko eskualdea osatzen duten $\overline{h}$-ren balioek $\|\frac{y_{n+1}}{y_n}\| \leq 1$ bete behar dutenez, hurrengoa izanen da eskualdea:

$$D = \left\{ \|1 + \overline{h} + \frac{\overline{h}^2}{2} + \frac{\overline{h}^3}{4}\| \right) \leq 1$$

Ezin da beti abiarazle-zuzentzaile metodoari elkartutako metodoa deduzitu, horregatik hau ezinezkoa denean edo analisia egiteko beste metodo bat bezala hurrengo teoremak erabilgarriak dira:

Teorema 18 *Izan bitez A eta Z metodoek definitzen duten abiarazle-zuzentzaile metodoa eta p_A eta p_Z hauen tinkotasun ordena. Orduan metodo abiarazle-zuzentzailearen tinkotasun ordena hurrengoa da:*

$$p = \min\{p_A + m, p_Z\}$$

Teorema 19 *Izan bitez A eta Z metodoek definitzen duten abiarazle-zuzentzaile metodoa eta ρ_A, ρ_B, σ_A eta σ_B metodo hauen lehenengo eta bigarren polinomioak, orduan egonkortasun absolutuko polinomioa hurrengoa da:*

$$\pi(r, \overline{h}) = \rho(r)_Z - \overline{h}\sigma_Z(r) + M_m(\overline{h})\left(\rho_A(r) - \overline{h}\sigma_A(r)\right)$$

non

$$M_m(\overline{h}) = \frac{\left(\beta_{Z0}\overline{h}\right)^m}{1 + \beta_{Z0}\overline{h} + \ldots + (\beta_{Z0}\overline{h})^{m-1}}$$

Adibidea 15 *Aurreko adibidean eulerren metodoan tinkotasun ordena 1 da (Abiarazlea) eta trapezioarena 2 (Zuzentzailea). m=2 dene, tinkotasun ordena hurrengoa izanen da:*

$$p = max\{2, 1+2\} = 2$$

Bestalde, lehenengo eta bigarren polinomioak hurrengoak dira:

$$\begin{cases} \rho_Z(r) = r - 1; & \sigma_Z(r) = \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \\ \rho_A(r) = r - 1; & \sigma_A(r) = 1 \end{cases}$$

Beraz, egonkortasun absolutuko polinomioa hurrengoa da:

$$\pi(r) = (r-1) - \overline{h}\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) + \frac{\overline{h}^2}{4 + 2\overline{h}}(r - 1 - \overline{h}) =$$

$$r\left(1 - \frac{\overline{h}}{2} + \frac{\overline{h}^2}{4 + 2\overline{h}}\right) - \left(1 + \frac{\overline{h}}{2} + \frac{\overline{h}^2}{4 + 2\overline{h}} + \frac{\overline{h}^3}{4 + 2\overline{h}}\right)$$

Hortaz bere erro bakarra hurrengoa da:

$$r = \frac{1 + \frac{\overline{h}}{2} + \frac{\overline{h}^2}{4+2\overline{h}} + \frac{\overline{h}^3}{4+2\overline{h}}}{1 - \frac{\overline{h}}{2} + \frac{\overline{h}^2}{4+2\overline{h}}} = \frac{4 + 2\overline{h} + 2\overline{h} + \overline{h}^2 + \overline{h}^2 + \overline{h}^3}{4 + 2\overline{h} - 2\overline{h} + \overline{h}^2 - \overline{h}^2} = \frac{\overline{h}^3 + 2\overline{h}^2 + 4\overline{h} + 4}{4} = \frac{\overline{h}^3}{4} + \frac{\overline{h}^2}{2} + \overline{h} + 1$$

Ondorioz,

$$D = \left\{ \| \frac{\overline{h}^3}{4} + \frac{\overline{h}^2}{2} + \overline{h} + 1 \| < 1 \right\}$$