Analisi Matematikoa

Zenbaki-multzoak

Zenbaki arrazionalak eta errealak

2016.eko azaroaren 10

Gaien Aurkibidea

1. Gaia
Zenbaki-multzoak

1.1. Zenbaki arrazionalak

1.1. Definizioa. *Zenbaki arrazionalen* $\mathbb{Q}$ *multzoa hau da:* $\mathbb{Q} = \{x \mid m = n \cdot x \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$. *Errepikapenik ez izateko z.k.h* $\{m,n\}$*=1 eskatuko dugu.*

Hortaz, $\mathbb{Q}$ *multzoa hau izango da:*

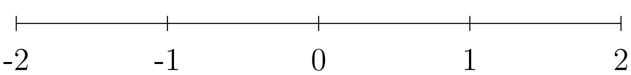
$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{m}{n}/\forall m, n \in \mathbb{Z}, n > 0 \text{ eta } \tfrac{m}{n} \text{ laburtezina baitira } \}.$$

Ondorioz, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ betetzen da.

1.2. Propietatea. $\mathbb{Q}$ *multzoa itxia da* $+$ *batuketa,* $-$ *kenketa,* $\times$ *biderketa eta* $\div$ *zatiketarako (zati 0 izan ezik), hau da, eragiketa horien emaitza beti arrazionala izango da.*

1.3. Definizioa. $\mathbb{Q}$ *multzoan* $\leq$ *ordena-erlazioa honela definitzen da:*
$\forall \frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ *izango da* $m \cdot q \leq n \cdot p$ *betetzen bada.*

Ordenak aukera ematen digu zenbaki arrazional guztiak zuzen batean ordenatzeko.



1.4. Propietatea. $\mathbb{Q}$ *multzoak propietate hauek ditu:*

1. $\mathbb{Q}$ *multzoa zenbakigarria da, hau da,* $\mathbb{Q}$ *multzoak* $\mathbb{N}$ *multzoak adina elementu ditu (infinitu zenbakigarria).*

2. $a, b \in \mathbb{Q}$ *badira,* $a \neq b$ *izanik,* $\exists c \in \mathbb{Q}/a < c < b$ *baita. Ondorioz, bi zenbaki arrazional desberdinen artean infinitu zenbaki arrazional daude.*

3. *Zenbaki arrazionalek hamartarren kopuru finitu edo infinitu periodikoa dute.*

$$\tfrac{1}{4} = 0.25 \qquad\qquad \tfrac{1}{7} = 0.142857142...$$

1.5. Definizioa. $A \subset \mathbb{Q}$ *multzoa emanik,*

a) *A goitik bornatua da* $\exists k \in \mathbb{Q} \mid \forall x \in A \; x \leq k$ *baita. k-ri Aren goi-borne deritzo.*

b) *A behetik bornatua da* $\exists k' \in \mathbb{Q} \mid \forall x \in A \; k' \leq x$ *baita. k'-ri Aren behe-borne deritzo.*

c) *A bornatua da goitik eta behetik bornatua bada, bestela A bornegabea da.*

1.6. Adibidea. *Multzo hauek bornatuak diren ala ez esan:*

a) $\mathbb{N}$ *eta* $\mathbb{Z}$ *bornegabeak dira, baina* $\mathbb{N}$ *behetik bornatua da (K= -1, -20.000... behe borneak dira.)*

b) $A = \{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, ...\} \Rightarrow$ *A bornatua da: 0 eta 1 Aren behe-borneak eta 3 eta 4 goi-borneak.*

1.7. Definizioa. $A \subset \mathbb{Q}$ *multzo bornatua emanik,*

a) *Aren goi-borne txikiena goi-muturra edo gorena da eta* $\sup(A)$ *idatziko dugu.*

b) *Aren behe-borne handiena behe-muturra edo beherena da eta* $\inf(A)$ *idatziko dugu.*

1.8. Adibidea. *Multzo hauen gorena eta beherena aztertu:*

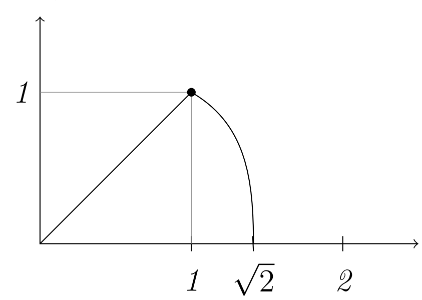
a) $\mathbb{N}$ *multzoak ez du gorenik ez duelako goi-bornerik.* $\inf(\mathbb{N}) = 0$ *da, behe-bornerik handiena.*

b) $A = \{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, ...\} \Rightarrow \sup(A)=2$ *da eta* $\inf(A) = 1$ *da.*

1.9. Adibidea. $\mathbb{Q}$ *multzoa ez da oraindik nahikoa problema guztiak ebazteko; adibide bat hiru ikuspuntutan:*

1. $x^2 = 2$ *ekuazioak ez du soluziorik* $\mathbb{Q}$ *multzoan* ($\sqrt{2}$ *ez dago* $\mathbb{Q}$*ren barne)*

2. *Grafikoan:*



(*$\mathbb{Q}$ multzoak ez du zuzena betetzen*)

3. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x^2 < 2\} \Rightarrow \sup(A) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.2. Zenbaki errealak

1.10. Definizioa. *Zenbaki errealen* $\mathbb{R}$ *multzoa hiru propietate hauek betetzen dituen multzoa da:*

1. $\mathbb{R}$ *multzoan + batuketa, · biderketa, - kenketa eta ÷ zatiketa (zati 0 izan ezik) definiturik daude (gorputzaren axioma).*

2. $\mathbb{R}$ *multzoan* $\leq$ *ordena-erlazioa definiturik dago (ordenaren axioma)*

3. $\mathbb{R}$*ren azpimultzo bornatu guztiek gorena eta beherena dauzkate(osotasun-axioma)*

Definizio honetatik ondorio hauek atera ditzakegu:

* $\mathbb{R}$ *multzoaren eta zuzenaren artean aplikazio bijektibo bat defini daiteke, hau da, zuzena osoa definituta dago.*

* *Zenbaki errealek zifra hamartarren kopuru finitua, infinitu periodiko edo ez-periodikoa dute.*

* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *betetzen da.*

Arrazionalak ez diren zenbaki errealei irrazionalak deritze eta horien multzoa $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ edo $\mathbb{I}$ adieraziko dugu.

1.11. Propietatea. $\mathbb{R}$ *multzoak propietate hauek ditu:*

1. $\mathbb{R}$ *multzoa zenbakiezina da (*$\mathbb{I}$ *multzoaren ondorioz).*
2. *Bi zenbaki erreal desberdinen artean infinitu zenbaki arrazional eta infinitu zenbaki irrazional daude.*

1.12. Definizioa. $A \subset \mathbb{R}$ *multzo bornatua emanik;*

a) *Aren gorena Aren elementua bada, maximo deritzo eta* $\max(A)$ *idatziko dugu.*

b) *Aren beherena Aren elementua bada, minimo deritzo eta* $\min(A)$ *idatziko dugu.*

1.13. Adibidea. *Aztertu multzo hauen maximoa eta minimoa:*

a) $\mathbb{N}$ *multzoan,* $\inf(\mathbb{N}) = 0$ *eta* $0 \in \mathbb{N}$ *denez,* $\min(\mathbb{N}) = 0$ *da.*

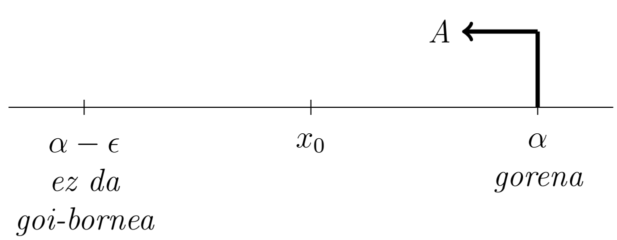
b) $A = \{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \Rightarrow \sup(A)=2$ *eta* $2 \in A$ *denez,* $\max(A) = 2$ *da.* $\inf(A) = 1$ *eta* $1 \notin A$ *denez,* $\min(A)$ *ez da existitzen.*

1.14. Teorema. *Gorena eta beherena definitzeko baldintzak:*

1. $A \subset \mathbb{R}$ *multzoa goitik bornatua emanik,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *Aren gorena da baldin, eta soilik baldin,*

   a) $\forall x \in A \qquad x \leq \alpha$ *(Goi-bornea)*

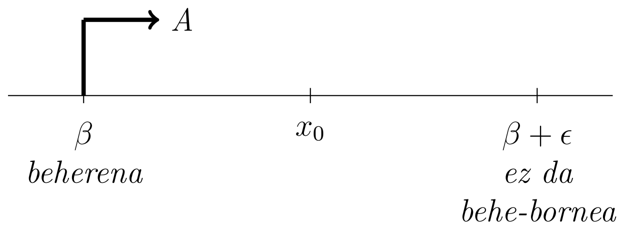
   b) $\forall \epsilon > 0 \qquad \exists x_0 \in A \qquad \alpha - \epsilon < x_0 \leq \alpha$ *(txikiena)*



2. *$A \subset \mathbb{R}$ behetik bornatua emanik, $\beta \in \mathbb{R}$ Aren beherena da baldin, eta soilik baldin,*

   a) $\forall x \in A \qquad x \geq \beta$ *(Behe-bornea)*

   b) $\forall \epsilon > 0 \qquad \exists x_0 \in A \qquad \beta \leq x_0 < \beta + \epsilon$ *(handiena)*



1.15. Definizioa. *$I \subset \mathbb{R}$ multzoa tartea da $\quad \forall x, y \in I \quad x < z < y$ bada, $z \in I$ betetzen bada.*

Tarte bornatua:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ Tarte irekia}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ Tarte itxia}$$

Tarte bornegabeak: $\pm\infty$ aldera hurbiltzen direnak.

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \text{ Tarte irekia}$$
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \text{ Tarte irekia}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \text{ Tarte irekia}$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \text{ Tarte irekia}$$

ARIKETAK

3. Froga ezazu bi zenbaki arrazional desberdinen artean infinitu zenbaki arrazional daudela.

   a eta b zenbakien artean, adibidez, erdiko puntua $\frac{a+b}{2}$ da; a eta $\frac{a+b}{2}$ artean, erdiko puntua $\frac{3a+b}{4}$ da; eta horrela infinituraino joan gaitezke beti bi zenbaki arrazionalen arteko batuketak eta zatiketak zenbaki arrazional bat emango dutelako (gorputzaren axioma).

$$c = \frac{a+b}{2}\ ; d = \frac{a+c}{2} = \frac{3a+b}{4}; e = \frac{a+d}{2} = \frac{7a+b}{8}\ ; \ldots$$

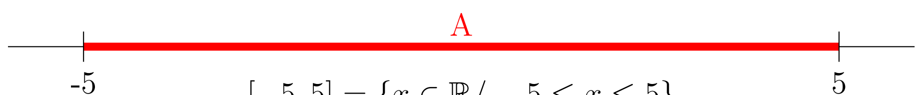
   Formula orokorra ondoriozta dezakegu:

$$\frac{(2^n-1)a+b}{2^n} \quad , \ non\ n \in \mathbb{N}$$

   Horrela frogatuta geratzen da a eta b zenbaki arrazionalen artean beti beste c zebaki arrazionala existituko dela.

7.1 Irudika ezazu multzo hau zuzenaren gainean eta idatzi ezazu tarteen bidez:

   $A = \{x \in \mathbb{R} / \quad | x | \leq 5\}$ $\qquad$ $| x | \leq 5 \ \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$ betetzen da.



$$[-5, 5] = \{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x \leq 5\}$$

8.1 Esan ezazu, arrazoituz, baieztapen hauek egiazkoak ala faltsuak diren:

   $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ eta $\forall b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, frogatu $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ den ala ez.

   $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ ez da egia. Kontra adibidea: $a \in \mathbb{Q}^*$ izanda, a=2 denean ($2 \in \mathbb{Q}$), $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

9.7 Determinatu ezazu multzo honen inf(A), sup(A), min(A) eta max(A):

   $A = (-\infty, 1] \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

   inf(A) ez dago multzoa ez dagoelako behetik bornatua.

   sup(A)=1 izateko hau bete behar da:

   a) $\forall x \in A \qquad x \leq 1$

      Bai, Aren elementu guztiak $(-\infty, 1)$ tartean daude eta tarteko puntu guztiak eskuineko muturra baino txikiagoak dira beti.

   b) $\forall \epsilon > 0 \qquad \exists x_0 \in A \ / \ 1 - \epsilon < x_0 \leq 1$

      Bai, $\ 1 - \epsilon$ eta 1 zenbaki errealen artean infinitu zenbaki irrazional daudelako:

$$1 - \epsilon < x_0 \leq 1 \ / \ x_0 \in A \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

   min(A) ez dago, horretarako beherena egon behar delako. max(A) $\neq$ 1, $1 \notin A$ delako. Hortaz, max(A) ez da existitzen.