Analisi Matematikoa

Topologia

Espazio Metrikoa eta Normaduna

December 16, 2016

Aurkibidea

2. Gaia
Topologia

2.1 Espazio Metrikoa

2.1. Definizioa. *Izan bedi E multzo ez-hutsa. $d : E \times E \to \mathbb{R}$ aplikazioa distantzia edo metrika da propietate hauek betetzen baditu:*

- *M1*

  $\forall x, y \in E \; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Distantzia 0 bada, x eta y berdinak dira);*

- *M2*

  $\forall x, y \in E \; d(x,y) = d(y,x)$ *(Bi puntuen arteko distantzia berdina da x-tik y-ra edo y-tik x-era hartuta);*

- *M3*

  $\forall x, y, z \in E \; d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$ *(desberdintza triangeluarra).*

  (E, d) bikoteari espazio metriko deritzo.

  Definiziotik ondoriozta daiteke $\forall x, y \in E \; d(x,y) \geq 0$ beteko dela.

2.2. Adibidea. $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ multzoa da. Bertan, $x \in \mathbb{R}^m \Rightarrow x = (x_1, x_2 ... x_m)$ izango da, non $x_i \in \mathbb{R}$ den, $i = 1, 2, ..., m$ izanik. x_i horiek x-ren koordenatuak dira.

$\mathbb{R}^m$ multzoan distantzia euklidearra:
$x, y \in \mathbb{R}^m, x = (x_1, x_2, ... x_m)$ eta $y = (y_1, y_2, ... y_m)$.
$d(x,y) = d((x_1, x_2, ... x_m), (y_1, y_2, ... y_m)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_m - x_m)^2}$.

1. $\mathbb{R}^3 \quad d((1,-2,3),(0,2,-1)) = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{33}$.

2. $(i,j),(k,l) \in S \quad d((i,j),(k,l)) = |k-i| + |l-j|$ (Urrats kopurua da espazio kuadrikulatu batean, urratsak bakarrik bertikalki eta horizontalki eginda)

3. $E \neq \emptyset$, $d : E \times E \to \mathbb{R}$ aplikazioa

$$x, y \in E \Rightarrow d(x,y) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x = y \text{ denean,} \\ 1 & \Leftarrow x \neq y \text{ denean} \end{cases}$$

Froga.

- M1

  $x, y \in E \; d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

- M2

  $x, y \in E \; x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$ eta $y = x \Rightarrow d(y,x) = 0 \Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$

  $x, y \in E \; x \neq y \Rightarrow d(x,y) = 1$ eta $y \neq x \Rightarrow d(y,x) = 1 \Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$

- M3

  $\forall x, y, z \in E \; d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$ (Kasuka froga: ikus. Table 2.1)

Table 2.1:

	d(x,y)	d(x, z)	d(z, y)
$x = y/y = z/z = x$	0	0	0
$x \neq y/y \neq z/z = x$	1	0	1
$x \neq y/y = z/z \neq x$	1	1	0
$x = y/y \neq z/z \neq x$	0	1	1
$x \neq y/y \neq z/z \neq x$	1	1	1

Kasu guztietan betetzen denez, frogatuta geratzen da.

2.3. Definizioa. (E, d) *espazio metrikoa emanik,* $a \in E$ *puntua hartuz, multzo hauek definitzen dira:*

1. *Bola irekia:* $B(a,r) = \{x \in E/d(a,x) < r\}$
2. *Bola itxia:* $\overline{B}(a,r) = \{x \in E/d(a,x) \leq r\}$
3. *Esfera:* $S(a,r) = \{x \in E/d(a,x) = r\}$

2.4. Adibidea.

1. $\mathbb{R}^2, B((-1,2),3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/d((-1,2),(x,y)) < 3\} =$
   $= \{\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} < 3\} = \{(x+1)^2 + (y-2)^2 < 9\}$

   Emaitza: Bola irekia.

   Zentroa: $(1, -2)$.

   Erradioa: 3.

2. $\mathbb{R}$-n bolak inguruneak dira $\Rightarrow \mathcal{E}(a,r)$

   $\mathcal{E}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}/d(a,x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}/|x-a| < r\} = \{x \in \mathbb{R}/-r < x - a < r\} = \{x \in \mathbb{R}/a - r < x < a + r\} = (a-r, a+r)$

   $\overline{\mathcal{E}}(a,r) = [a-r, a+r]$

   $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$

   $\mathcal{E}(-2,3) = ((-2-3),(-2+3)) = (-5,1)$

2.5. Definizioa. *Izan bitez (E,d) espazio metrikoa eta $A \subseteq E$ azpimultzoa:*

- *$x \in E$ A-ren barne-puntua da baldin $\exists r > 0 / B(x,r) \subset A$ (Bola bat gutxienez existitzen da x puntua zentrotzat duena eta A-ko elementuak bakarrik dituena)*
- *$x \in E$ A-ren kanpo-puntua da baldin $\exists r > 0 / B(x,r) \subset A^c$ (Bola bat gutxienez existitzen da x puntua zentrotzat duena eta A^c-ko elementuak bakarrik dituena, hau da, A-ko elementurik ez duena)*
- *$x \in E$ A-ren muga-puntua da baldin $\forall r > 0 / B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$ eta $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ bada.*

2.6. Definizioa. *Izan bitez (E,d) espazio metrikoa eta $A \subseteq E$ azpimultzoa:*

- *A-ren barne-puntu guztiek A-ren barnealdea osatzen dute. $\mathring{A}$ adierazten da.*
- *A-ren kanpo-puntu guztiek A-ren kanpoaldea osatzen dute. $\operatorname{ext}(A)$ adierazten da.*
- *A-ren muga puntuek A-ren muga osatzen dute. $\partial(A)$ adierazten da.*

Honetaz gain, kontuan hartu behar da: $\mathring{A} \subset A$ eta $\operatorname{ext}(A) \subset A^c$.

2.7. Adibidea. $(\mathbb{R}, d)$ $A = (a,b]$

- $x < a$ edo$x > b \Rightarrow x \in (-\infty, a)$ edo $x \in (b, \infty) \Rightarrow x \in A^c$; $r_0 = \frac{1}{2}d(x, (\text{a edo b}))$, hortaz, $\mathcal{E}(x, r_0) \subset A^c \Rightarrow x \in \operatorname{ext}(A)$, hots, x kanpo-puntua da.
- $a < x < b \Rightarrow x \in (a,b) \Rightarrow x \in A$; $r_0 = \frac{1}{2}\min\{d(x,a), d(x,b)\}$, hortaz, $\mathcal{E}(x,r_0) \subset A \Rightarrow x \in \mathring{A}$, hots, x barne-puntua da.
- $x = a \in A^c$ edo $x = b \in A$ bada, $\forall r > 0$ $\mathcal{E}(a,r) = (a-r, a+r)$ edo $\mathcal{E}(b,r) = (b-r, b+r)$ da eta $\forall x$ $/a - r < x < a$ $x \in A^c$ eta $\forall x$ $/a < x < a + r$ $x \in A$ edo $b - r < x < b$ $x \in A$ eta $\forall x$ $b < x < b + r$ $x \in A^c \Rightarrow \mathcal{E}(a,r) \cap A \neq \emptyset$ eta $\mathcal{E}(a,r) \cap A^c \neq \emptyset$ edo $\mathcal{E}(B,r) \cap A \neq \emptyset$ eta $\mathcal{E}(B,r) \cap A^c \neq \emptyset$, beraz, muga puntuak dira, $x = a$, $x = b \in \partial(A)$

2.8. Definizioa. (E,d)*espazio metrikoa emanik eta $A \subseteq E$ azpimultzoa:*

1. *A irekia da $A = \mathring{A}$ bada.*
2. *A itxia da baldin $A = \mathring{A} \cup \partial(A)$ bada.*

2.9. Adibidea.
$A = [a,b)$ ez da itxia edo irekia, izan ere, $a, b \in \partial(A)$ ematen da, baina $b \notin A$ eta $a \in A$.
$B = [a,b]$ itxia da, a eta b muga puntuak ere B-ren barruan daudelako.
$C = (a,b)$ irekia da, $a, b \in C$ baina $a, b \notin C$ izateagatik.

2.10. Definizioa. (E,d) *espazio metrikoa emanik, $A \subseteq E$ multzo bornatua da $\exists K > 0$ $\forall x, y \in A$ $d(x,y) \leq K$ baita.*

2.11. Teorema. $\mathbb{R}$ *multzoan maximoa eta minimoa existitzeko baldintza nahikoa:*
$A \subset \mathbb{R}$ bornatua eta itxia bada, A multzoan maximoa eta minimoa daude.

2.2 Espazio Normaduna

2.12. Definizioa. *Izan bedi* $(E, +, \cdot)$ *bektore-espazioa* $\mathbb{R}$ *gainean.* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ *norma da hau betezten badu:*

- *N1*

  $\forall x \in E \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta_E$ *(Elementu neutroa);*

- *N2*

  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$*;*

- *N3*

  $\forall x, y \in E \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|)$.

  Orduan, $(E, \|\cdot\|)$ *bikoteari espazio normadun deritzo.*

  Definiziotik ondorioztatzen da: $\forall x \in E \ \|x\| \geq 0$.

2.13. Adibidea. $\mathbb{R}^m$ espazioan, $x = (x_1, x_2, ...x_m)$ bada:
$\|x\| = \|(x_1, x_2, ...x_m)\| = \max\{|x_1|, |x_2|, ...|x_m|\}$ (Gorenaren norma)
$\|x\| = \|(x_1, x_2, ...x_m)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2{}^2 + ... + x_m{}^2}$ (Norma euklidearra)
$\|x\| = \|(x_1, x_2, ...x_m)\| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_m|$ (Baturaren norma)

2.14. Propietatea. $(E, \|\cdot\|)$ *espazio normaduna emanik,* $d : E \times E \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \|y - x\|$ *aplikazioa distantzia da.*
Ondorioz, espazio normadunak espazio metrikoak dira ere.

2.15. Adibidea. $\mathbb{R}$ multzoan, $|\cdot|$ balio absolutua norma da.
$|-3| = 3$
$d(x, y) = |y - x|$, $d(-3, 2) = |2 - (-3)| = 5$

2.16. Definizioa. $(E, \|\cdot\|)$ *espazio metrikoan* $A \subset E$ *multzoa bornatua da* $\exists k \geq 0$ $\forall x \in A \ \|x\| \leq k$ *baita.*

2.3 Ariketak

- 2 ariketa

  Determina itzazu bola irekia, itxia eta esfera metrika diskretua erabiliz, $a \in E$ izanik eta $r = 1$.

$$x, y \in E \Rightarrow d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \text{ denean,} \\ 1 & x \neq y \text{ denean} \end{cases}$$

$B(a, 1) = \{x \in E / d(a, x) < 1\} = \{x \in E / d(x, a) = 0\} = \{a\}$

$\overline{B}(a, 1) = \{x \in E / d(a, x) \leq 1\} \Rightarrow \forall x, a \in E \ d(x, a) \leq 1 \Rightarrow \overline{B}(a, 1) = E$

$S(a, 1) = \{x \in E / d(a, x) = 1\} = \{x \in E / x \neq a\} = E - \{a\}$

- 4 ariketa (b atala)

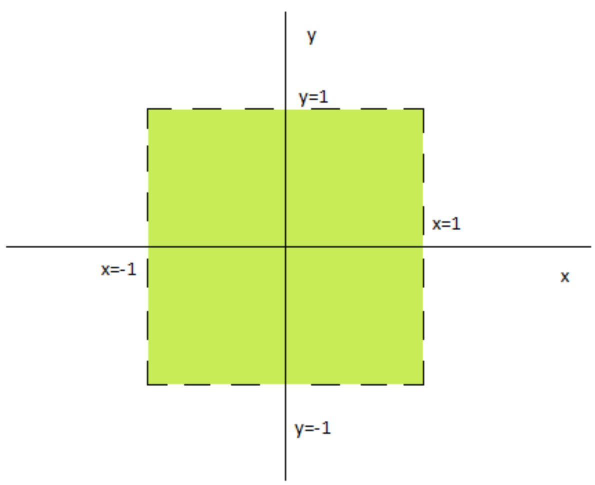
  Irudika ezazu $B((0,0),1)$ hurrengo kasuan: $\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$ (gorenaren norma)

  $B((0,0),1) = \{(x,y) \leq \mathbb{R}^2 / \max\{|x|,|y|\} < 1\}$

  Orain, puntuak irudikatuko dira. Puntu hauek bete behar duten baldintza bakarra, gorenaren norma jarraituz, bi koordenatuen balio absolutuen arteko maximoa 1 baino txikiagoa izatea da, beraz, $\forall x, y \in B \; -1 < x < 1$ eta $-1 < y < 1$. Barneko puntuak modu egokian argitzeko, mugako puntuak ($-1 \leq x \leq 1$ eta $-1 \leq y \leq 1$) irudikatu behar dira kasu honetan (Ikus. Table 2.2).

Table 2.2: 4 ariketa ($\max\{|x|,|y|\} = 1$)

x	y
1	$-1 \leq y \leq 1$
-1	$-1 \leq y \leq 1$
$-1 \leq x \leq 1$	1
$-1 \leq x \leq 1$	-1



- 5 ariketa (d atala)

  Determina itzazu $A = \mathbb{Q}$ multzoaren $\mathring{A}, \mathrm{ext}(A)$ eta $\partial(A)$:

  Definizioz, $\forall x, y \in \mathbb{Q} \; \exists z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} / x < z < y$ edo $y < z < x$. Hau da, bi zenbaki arrazionalen artean beti gutxienez irrazional bat egongo da beti, izan ere, bi arrazional artean infinitu zenbaki bai irrazional bai arrazional daudelako. Ondorioz:

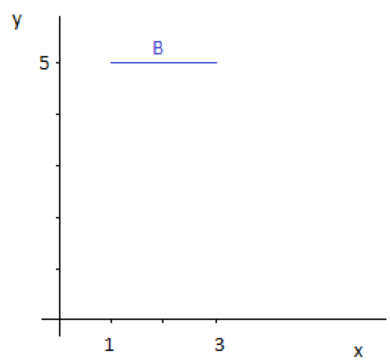
  $\forall x \in A, \forall r > 0 \Rightarrow \mathcal{E}(x,r) \cap A \neq \emptyset$ eta $\mathcal{E}(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow x$ muga puntua da beti, ez dagoelako ingurunerik bakarrik Ako elementuak edo bakarrik A^cko elementuak dituena. Hau da:

$A = \mathbb{Q} \Rightarrow \partial(A) = \mathbb{R}$ Hemen $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ irrazionalak sartzen dira ere, inguruan bai A multzoko puntuak bai A^cko puntuak dituztelako beti. $\mathring{A}, \mathrm{ext}(A) = \emptyset$

- 8 ariketa (b atala)

  Irudika ezazu $\mathbb{R}^2$ espazioaren azpimultzo hau, eta esan ezazu irekia, itxia edo bornatua den; kalkula ezazu multzoaren diametroa.

  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3 \text{ eta } y = 5\}$



Multzoa lerro bat izanik, garbi ikusten da ez dagoela $B((x,5), r)$ bolarik non elementuak B multzoan dauden, $y \neq 5$ izanik puntu hori B multzoan ez dago eta. Hau da, ez dago $B((x,5), r)$ bolarik non elementuak B multzoan dauden, multzoko elementu guztiak $y = 5$ zuzenean egonik, bere inguruko puntu batzuetan $y \neq 5$ delako, eta beraz, multzoan ez daude, nahiz eta ingurunea txikitu, bakarrik y=5 denean ematen delako. Beraz:

$B = \partial(B)$. Multzo itxiaren definizioz, A multzo itxia da baldin $A = \mathring{A} \cup \partial(A)$. Kasu honetan, $B = \emptyset \cup \partial(B)$. Beraz, B multzo itxia da.

Gainera, B bornatua da:

$\forall x \in B \ \exists a \leq x$ eta $\exists b \geq x / a \leq 1$eta $b \geq 3$

$\forall y \in B \ \exists a \leq y$ eta $\exists b \geq y / a \leq 5 \leq b$

Multzoaren diametroa multzoko punturen artean atera daiteken distantzia maximoa da.

$d((1,5),(3,5)) = 2$