1. GAIA: Espazio topologikoak

1.1. Definizioa eta zenbait adibide

τ X-ren gainean definitutako topologia dela esango dugu baldin eta ondoko hiru axiomak betetzen baditu:
(τ1) $\varnothing$, X $\in \tau$.
(τ2) τ -ren elementuren edozein familia finituren ebakidura τ -n dago.
(τ3) τ -ren elementuren edozein familiaren bildura τ -n dago.

Adibideak:
$\tau_u = \{U \subseteq R : \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ non } (x - \varepsilon , x + \varepsilon) \subseteq U\}$ ohiko topologia.
τ_{Disk} = P(X) topologia diskretua
$\tau_{Indisk} = \{\varnothing, X\}$ topologia indiskretua
$\tau_{Kof} = \{A \subseteq X : X - A \text{ finitua}\} \cup \{\varnothing\}$ topologia kofinitua
$\tau_{Kol} = \{\varnothing, R\} \cup \{(a, +\infty) : a \in R\}$ Kolmogorov-en topologia
$\tau_{Scat} = \{U \subseteq R : U = A \cup B, A \in \tau_u \text{ eta } B \subseteq I\}$ Scattered topologia

---

τ_1 τ_2 baino finagoa dela esango dugu $\tau 2 \subseteq \tau 1$ bada.
τ_1 eta τ_2 konparagarriak direla esango dugu baldin eta τ1 τ2 edo τ2 τ1 baino finagoa bada.

---

topologien arteko konparaketa

1.2. Multzo irekiak eta itxiak

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa. F $\subseteq$ X azpimultzo itxia dela esango dugu bere osagarria, X − F, irekia bada.
(X, τ) espazio topologikoaren itxien familia normalean C idatziko dugu, hau da
C = $\{F \subseteq X : X - F \in \tau\}$.
(C1) $\varnothing$ eta X itxiak dira.
(C2) Azpimultzo itxien ebakidura azpimultzo itxia da.
(C3) Azpimultzo itxien bildura finitua azpimultzo itxia da.

Adibidieak
u
C_{Disk} = P(X)
$C_{Indisk} = \{\varnothing, X\}$
$C_{Kof} = \{F \subseteq X : F \text{ finitua}\} \cup \{X\}$
$C_{Kol} = \{\varnothing, R\} \cup \{(-\infty, a] : a \in R \}$
$C_{Scat} = \{F \subseteq R : F = G \cap H, G \in C_u \text{ eta } Q \subseteq H\}$

1.3. Ireki-oinarriak eta azpioinarriak

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa eta $\beta \subseteq \tau$. β τ -ren irekioinarria dela esango dugu baldin eta τ -ren edozein ireki ez-huts β-ren elementuren bildura bada.
β-ren elementuak oinarriko irekiak izango dira

β τ -ren ireki-oinarria $\Leftarrow\Rightarrow$ $\forall U \in \tau, \forall x \in U, \exists Bx \in \beta$ non $x \in Bx \subseteq U$

Adibideak
$\beta_u = \{(a, b) \subseteq R : a < b, a, b \in R\}$
$\beta_{Disk} = \{\{x\} : x \in X\}$
$\beta_{indisk} = \{X\}$
kol
kof
scat

Izan bitez X multzoa eta $\beta \subseteq P(X)$. β X-ren gainean definitutako topologiaren baten ireki-oinarria izango da baldin eta hurrengo bi propietate
hauek betetzen baditu:

(β1) $\bigcup_{B\in\beta} B = X$,

(β2) $B1, B2 \in \beta$ eta $x \in B1 \cap B2$ badira, orduan $Bx \in \beta$ existitzen da non $x \in Bx$ eta $Bx \subseteq B1 \cap B2$ den.
($\forall B1, B2 \in \beta, \ \forall x \in B1 \cap B2, \ \exists Bx \in \beta$ non $x \in Bx \subseteq B1 \cap B2$).

β oinarriak sortutako topologia ondokoa izango da:

$\tau_\beta = U \subseteq X : \forall x \in U, \ \exists Bx \in \beta$ non $x \in Bx \subseteq U$

$\beta_{Sor} = \{[x, y) : x < y, x, y \in R\}$
β_{Sor} familia R-ren gainean definitutako topologia baten ireki-oinarria da. β_{Sor}-k sortutako topologiari Sorgenfreyren topologia deritzo eta τ_{Sor} idatziko dugu. $(R, \tau Sor)$ espazio topologikoa Sorgenfrey-ren zuzena izango da.

β1 eta β2 baliokideak direla $\tau_{\beta 1} = \tau_{\beta 2}$ badira
$\beta_1 = \{(x, y) : x < y, x, y \in R\}$ eta $\beta_2 = \{(x, y) : x < y, x, y \in Q\}$ ireki-oinarriak baliokideak dira eta biek τ_u ohiko topologia sortzen dute

---

1.4. Inguruneak eta ingurune-oinarriak

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa, $x \in X$ eta $N \subseteq X$. N x-ren ingurunea dela esango dugu baldin eta $U \in \tau$ existitzen bada non $x \in U \subseteq N$ den.
$\mathbf{N}_x = \{N \subseteq X : N$ x-ren ingurunea$\}$ idatziko dugu eta $\{\mathbf{N}_x\}_{x\in X}$ ingurune sistema izango da

---

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $A \subseteq X$. Orduan $A \subseteq X$ irekia da baldin eta soilik baldin bere puntu guztien ingurunea bada

---

(X, τ) espazio topologikoaren $\{\mathbf{N}_x\}_{x\in X}$ ingurune-sistemak hurrengo propietateak betetzen ditu:
($\mathbf{N}_1$) $X \in \mathbf{N}_x$ eta $N \in \mathbf{N}_x$ bada, orduan $x \in N$;
($\mathbf{N}_2$) $N, M \in \mathbf{N}_x$ bada, orduan $N \cap M \in \mathbf{N}_x$;
($\mathbf{N}_3$) $N \in \mathbf{N}_x$ eta $M \supseteq N$ bada, orduan $M \in \mathbf{N}_x$;
($\mathbf{N}_4$) $N \in \mathbf{N}_x$ bada, orduan $M \in \mathbf{N}_x$ $(M \subseteq N)$ existitzen da non $N \in \mathbf{N}_y$,
$y \in M$ guztietarako.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ ingurune oinarria dela esango dugu baldin eta $x \in X$ guztietarako $\mathcal{B}_x \subseteq \mathbf{N}_x$ bada eta
$N \in \mathbf{N}_x$ guztietarako $B \in \mathcal{B}_x$ existitzen bada non $B \subseteq N$ den. $\mathcal{B}_x$ ezagutzen dugunean x-ren inguruneak hurrengoak izango dira:
$\mathbf{N}_x = \{N \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B}_x \text{ non } B \subseteq N\}$
(X, τ)-ren ingurune-oinarri bat emanda, bere elementuak oinarriko inguruneak izango dira.

Adibideak
$\mathcal{B}_x^{u} = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \ > 0\}$
$\mathcal{B}_x^{Disk} = \{\{x\}\}$
$\mathcal{B}_x^{Indisk} = \{X\}$
$\mathcal{B}_x^{kof} = Nx$
$\mathcal{B}_x^{kol} = \{(x - \varepsilon, +\infty) : \varepsilon > 0\}$
$x \in Q$ bada $\mathcal{B}_x^{scat} = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \ > 0\}$ eta $x \in I$ bada $\mathcal{B}_x^{scat} = \{\{x\}\}$
$\mathcal{B}_x^{sor} = \{[x, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $A \subseteq X$. Orduan $A \subseteq X$ irekia da baldin eta soilik baldin bere puntu guztien oinarriko ingurune bat partetzat badu.

Izan bitez X multzoa eta $x \in X$ bakoitzerako $\mathcal{B}_x \subseteq P(X)$ familiak. Aurreko $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ bilduma topologiaren baten ingurune-oinarria da baldin eta soilik baldin hurrengo propietateak betetzen badira:
$(\mathcal{B}_1)$ $B \in \mathcal{B}_x$ bada, orduan $x \in B$.
$(\mathcal{B}_2)$ $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ bada, orduan $B_3 \in \mathcal{B}_x$ existitzen da non $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ den.
$(\mathcal{B}_3)$ $B_1 \in \mathcal{B}_x$ bada, orduan $B_2 \in \mathcal{B}_x$ $(B_2 \subseteq B_1)$ existitzen da non $y \in B_2$ guztietarako, $B_y \in \mathcal{B}_y$ existitzen den $B_y \subseteq B_1$ izanik.
Kasu horretan, $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ ingurune-oinarriak sortutako topologia ondokoa da:
$\tau = \{U \subseteq X : \forall x \in U \ \exists B \in \mathcal{B}_x \text{ non } B \subseteq U\}$

Moore-ren planoa
Izan bitez $\Gamma = \{(x, y) \in R\ 2 : y \geq 0\}$ eta

$$\mathcal{B}_{(x,y)} = \begin{cases} \{B_u((x,y),\epsilon) : \epsilon > 0\}, & y > 0 \text{ bada}, \\ \{\{(x,0)\} \cup B_u((x,\epsilon),\epsilon) : \epsilon > 0\}, & y = 0 \text{ bada}. \end{cases}$$

1.5. Distantziak. Espazio Metrikoak

Metrizagarria ⇒ T2 ⇒ T1

T1 eta T2

T1) Frechet:
$\forall\ x, y \in X,\ \exists\ U, V \in \tau : x \in U,\ y \notin U,\ x \notin V,\ y \in V$

T2) Hausdorff:
$\forall\ x, y \in X,\ \exists\ U, V \in \tau$: $U \cap V = \emptyset$

---

2. GAIA: Azpimultzoak espazio topologikoetan

2.1 Multzo baten barrualdea

$x \in \mathring{A} \iff A \in N_x \iff \exists U \in \tau$ non $x \in U \subseteq A$

Propietateak

i) $A1 \subseteq A2 \implies \mathring{A}1 \subseteq \mathring{A}\,2$

ii) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{A}\,2.$

2.2 Multzo baten itxitura

$x \in \bar{A} \iff \forall B \in \mathcal{B}_x\ B \cap A \neq \emptyset$

Propietateak

i) $X - \mathring{A} = \overline{X - A}$

ii) $X - \bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{X - A}}.$

iii) $\bar{A}1 \subseteq \bar{A}2 \implies \bar{A}1 \subseteq \bar{A}2$

iv) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $A \subseteq X$. Esaten da A azpimultzoa **dentsoa** dela bere itxitura X osoa bada, hau da, $\bar{A} = X$.

2.3 Metatze-puntuak eta puntu isolatuak

$x \in A' \iff \forall B \in \mathcal{B}_x\ (B - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \iff \forall B \in \mathcal{B}_x\ B \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

Propietateak

i) $A \subseteq B$ bada, orduan $A' \subseteq B'$

ii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

iii) $\bar{A} = A \cup A'$

iv) A itxia da baldin eta soilik baldin $A' \subseteq A$ bada

2.4 Multzo baten muga

$x \in fr(A) \Longleftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_x\ B \cap A \neq \emptyset$ eta $B \cap (X - A) \neq \emptyset$

---

3. GAIA: Jarraitutasuna

3.1 Aplikazio jarraituak

f jarraitua $\Longleftrightarrow \forall U \in \tau_Y, f^{-1}(U) \in \tau_X; \Longleftrightarrow \forall B \in \beta_Y, f^{-1}(B) \in \tau X;$)

Izan bitez $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ eta $g : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ aplikazio jarraituak. Orduan

$g \circ f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ aplikazioa jarraitua da.

Izan bitez $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ aplikazio jarraitua eta $\tau_X \subseteq \tau'_X$ eta $\tau'_Y \subseteq \tau_Y$. Orduan
$f : (X, \tau'_X) \longrightarrow (Y, \tau'_Y)$ aplikazioa jarraitua da

---

3.2 Homeomorfismoak

Izan bedi $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ aplikazioa. f homeomorfismoa dela esango dugu baldin eta **bijektiboa eta jarraitua** bada eta **f^{-1} ere jarraitua** bada. (X, τ_X) eta (Y, τ_Y) homeomorfoak direla esango dugu

---

(X, τ_X) eta (Y, τ_Y) eta (Y, τ_Y) eta (Z, τ_Z) homeomorfoak badira, (X, τ_X) eta (Z, τ_Z) ere homeomorfoak dira

---

Baliokideak dira:
i)f homeomorfismoa da;
ii) $\forall U \subseteq Y$, $U \in \tau Y \Longleftrightarrow f^{-1}(U) \in \tau_X$

Propietate bat **topologikoa** dela esango dugu baldin eta **homeomorfismoen bitartez mantentzen bada**
T1 eta **T2** propietateak eta **metrizagarritasuna** propietate topologikoak dira

4. GAIA: Espazio topologikoen eraikuntza

4.1 Azpiespazioak

Topologia erlatiboa: Izan bitez (X, τ_X) espazio topologikoa eta A ⊆ X:
U ∈ τ_A ⇐⇒ ∃ V ∈ τ_X : U = V ∩ A
(A, τ_A) espazio topologikoa, (X, τ_X) espazioaren azpiespazioa dela esango dugu

---

Propietateak
i)F ∈ C_A baldin eta soilik baldin G ∈ C_X badago non F = G ∩ A den (Inguruneko elementuekin gauza bera)
ii)β τ_X-ren ireki-oinarria bada, orduan β_A = {B ∩ A : B ∈ β} τ_A-ren ireki oinarria da. (Inguruneko oinarriekin berdin)

Begiratu 4.5-etik aurrerako teoria. Azpiespazioei lotutako aplikazioak

---

4.2 Biderkadura topologikoa

Izan bitez $\{(X_i , \tau_i)\}^{n}_{i=1}$ espazio topologikoen familia finitua eta X = $\prod_{i=1}^{n} X_i$ multzoen biderkadura kartesiarra. X-ren gainean definitutako

$$\boldsymbol{\beta_{T\,ych}} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} Ui : Ui \in \tau i \right\}$$

familiak topologiaren baten ireki-oinarria izateko baldintzak betetzen ditu. $\beta_{T\,ych}$ familiak sortutako topologiari biderkadura topologia edo Tychonoff-en topologia deritzo eta $\tau_{T\,ych}$ idatziko dugu
Bestalde,

$$\boldsymbol{\beta_{T\,ych} = \beta' =} \left\{ \prod_{i=1}^{n} Ui : Ui \in \beta i \right\}$$

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \prod_{i=1}^{n} Bi : Bi \in \mathcal{B}xi,\ \forall i \in \{1,\dots,n\} \right\}$$

Begiratu definizioa 4.14-etik aurrera

4.3 Zatidura espazioak

Izan bitez (X, τ_X) espazio topologikoa, ~ X-ren gainean definitutako baliokidetasun-erlazioa eta p: X −→ X/ ~ proiekzio naturala. X/ ~ multzoaren gainean definitutako
τ_{Zat} = $\{U \subseteq X/\sim :\ p\,(-\ 1)\ (U) \in \tau X\}$
topologiari zatidura topologia deritzo. Lortutako espazio topologikoa, (X/ ~, τ_{Zat}),
~ baliokidetasun-erlazioaren bitarteko X-ren zatidura espazio topologikoa dela esango dugu.

Ikusi propsizioa 4.21-etik aurrera

5. GAIA: Trinkotasuna

5.1 Espazio eta azpimultzo trinkoak

Izan bitez (X, τ_X) espazio topologikoa, A ⊆ X eta $\{U_i\}_i \in I$ X-ren azpimultzoen familia.

- $\{U_i\}_i \in I$ A multzoaren **estalkia** dela esango dugu baldin eta A ⊆ ∪ i∈I U_i bada.
- Estalkia **finitua** dela esango dugu baldin eta $\{U_i\}_i \in I$ familia finitua bada.
- Estalkia **irekia** dela esango dugu baldin eta $U_i \in \tau_X$ bada i ∈ I guztietarako.
- J ⊆ I bada eta $\{U_i\}_i \in J$ oraindik ere A-ren estalkia bada, $\{U_i\}_i \in I$ estalkiaren **azpiestalkia** dela esango dugu.

Izan bitez (X, τ_X) espazio topologikoa eta A ⊆ X. A **trinkoa** dela esango dugu baldin eta **A-ren edozein estalki irekik azpiestalki finitu bat badu**.
(X, τ_X) espazioa trinkoa dela esango dugu baldin eta X trinkoa bada

---

Espazio topologiko trinko baten azpimultzo itxiak trinkoak dira.

Izan bitez f : (X, τ_X) −→ (Y, τ_Y) aplikazio jarraitua eta K ⊆ X trinkoa. Orduan f(K) ere trinkoa da.

Trinkotasuna propietate topologikoa da

5.2 Espazio trinkoen biderkadura

Izan bitez (X, τ_X) eta(Y, τ_Y) espazio topologiko trinkoak. Orduan (X × Y, $\tau_{T\ ych}$) ere trinkoa da

---

.**(Tychonoff-en Teorema biderkadura finituetarako).**

Izan bitez $\{(X_i , \tau_i)\}^n_{i=1}$ espazio topologikoak. Orduan ($\prod_{i=1}^{n}$ X_i , $\tau_{T\ ych}$) trinkoa da baldin eta soilik baldin (X_i , τ_i) trinkoa bada i = 1, . . . , n guztietarako.

Trinkotasuna **propietate biderkagarria** da

(Heine-Borel orokortua).
($\mathbb{R}^n$, τ_u) espazioan azpimultzo bat trinkoa da baldin eta soilik baldin itxia eta bornatua bada.

5.3 Trinkotasuna Hausdorff espazioetan.

Espazio topologiko Hausdorff baten azpimultzo trinkoak itxiak dira.

Espazio topologiko Hausdorff baten azpimultzo trinkoen ebakidurak trinkoak dira.

Izan bitez (X, τ_X) Hausdorff den espazio topologikoa eta K, L ⊆ X trinko disjuntuak. Orduan, U eta V ireki disjuntuak existitzen dira non K ⊆ U eta L ⊆ V diren.

Izan bedi f : $(X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ aplikazio jarraitua. Orduan:
(i) (X, τ_X) trinkoa eta (Y, τ_Y) Hausdorff badira, orduan f itxia da.
(ii) (X, τ_X) trinkoa, (Y, τ_Y) Hausdorff eta f suprajektiboa badira, orduan f identifikazioa da.
(iii) (X, τ_X) trinkoa, (Y, τ_Y) Hausdorff eta f bijektiboa badira, orduan f homeomorfismoa da.

---

6. GAIA: Konexutasuna

6.1 Espazio eta azpimultzo konexuak.

(X,τ_X) ez-konexua,
$\exists$ U, V $\in \tau_X$ non X= U $\cup$ V den, U $\cap$ V = $\varnothing$ eta U $\neq \varnothing \neq$ V izanik.
A $\subseteq$ X ez-konexua
$\exists$ U, V $\in \tau_X$ non A $\subseteq$ U $\cup$ V den, A $\cap$ U $\cap$ V = $\varnothing$ eta A $\cap$ U $\neq \varnothing \neq$ A $\cap$ V

Konexutasuna ere **propietate absolutua** da. Hau da, (X, τ_X) espazio topologikoa eta B $\subseteq$ A $\subseteq$ X badira, B konexua da (X, τ_X) espazioan baldin eta soilik baldin B konexua bada (A, τ_A) azpiespazioan.

Izan bedi (X, τ_X) espazio topologikoa. Ondoko baieztapenak baliokideak dira:
(i) X ez-konexua da.
(ii) X multzoaren azpimultzo propio ez-hutsa existitzen da irekia eta itxia batera dena.
(iii) Existitzen da f : $(X, \tau_X) \longrightarrow (\{0, 1\}, \tau_{Disk})$ erako aplikazio jarraitu eta suprajektiboa.

Izan bitez (R, τ_u) eta A $\subseteq$ R. A konexua da baldin eta soilik baldin tartea bada.

Izan bedi $\{A_i\}_{i\in I}$ azpimultzo konexuen familia, orduan:

(i) $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$ bada, $\bigcup_{i\in I} A_i$ konexua da.

(ii) $i0 \in I$ existitzen bada non $i \in I$ guztietarako $A_{i0} \cap A_i \neq \varnothing$ den, orduan $\bigcup_{i\in I} A_i$ konexua da.

Izan bitez f : $(X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ aplikazio jarraitua eta A $\subseteq$ X multzo konexua. Orduan f(A) ere konexua da.

Konexutasuna **propietate topologikoa** da

Izan bitez (X, τ_X) espazio topologikoa eta A $\subseteq$ X konexua. Orduan A $\subseteq$ B $\subseteq$ $\overline{A}$ bada, B ere konexua da.
Frogatu:

Izan bitez (X, τ_X) eta (Y, τ_Y) espazio topologiko konexuak. Orduan $(X \times Y, \tau_{T\,ych})$ ere konexua da.

Izan bitez $\{(X_i , \tau_i)\}^{n}_{i=1}$ espazio topologikoak. Orduan ($\prod_{i=1}^{n}$ X , τ_{Tych}) konexua da baldin eta soilik baldin (X_i , τ_i) konexua bada i = {1, . . . , n} guztietarako

Konexutasuna **propietate biderkagarria** da

6.2 Osagai konexuak

Definizioa

Izan bitez (X, τ_X) espazio topologikoa eta x ∈ X. Kontsidera dezagun x barne duten X-ren azpimultzo konexuen familia:

$\mathbf{F}_x$ = {A ⊆ X : x ∈ A eta A konexua}

Fx ≠ ∅ izango da {x} ∈ $\mathbf{F}_x$ delako. Bestalde $\bigcap_{A \in Fx}$ A ≠ ∅ izango da, (x ∈ $\bigcap_{A \in Fx}$ A delako), beraz

∅ ≠ $\bigcup_{A \in Fx} A$ = C(x) konexua da.

Multzo konexu honi x-ren osagai konexua deritzo.

Jongon argazkijje