

NOCIONES básicas

Mecanismo: conjunto de elementos mecánicos, uno de los cuales es fijo, en contacto unos con otros mediante uniones imperfectas de forma que puede haber movimiento relativo entre ellos, y con el objetivo de transmitir movimiento desde un elemento de entrada hasta otro de salida.

Actuadores o fuentes de potencia

- * Rotativos: motores eléctricos
- * Lineales: cilindros neumáticos e hidráulicos.
- * Manuales
- * Energía almacenada.

Tipos de mecanismos

- * Mecanismos de levas
 - * Mecanismos de engranajes
 - * Mecanismos de tornillos (rotación- traslación)
 - * Mecanismos con elementos flexibles.
 - * Mecanismos con elementos fluidos
 - * Mecanismos de barras
- { - Transmisión de potencia entre ejes.
- Reductores o multiplicador.
- correas
- resortes.

MECANISMOS DE BARRAS

1) conversión de movimientos:

- * Conversión de movimientos
- { - Rotación-rotación
- Rotación- traslación
- Traslación- traslación

- * Mecanismos de guía: alguno de sus puntos genera tramos rectos de forma exacta o aproximada.
- * Generación de elementos con movimientos de traslación
- * Pantógrafo: mecanismo para obtener curvas semejantes a una dada.
- * Movimientos intermitentes del elemento de salida con paro total del mismo.
- * Mecanismos de alimentación de máquinas automáticas
- * Mecanismos con carrera regulable.
- * Mecanismos para multiplicación de fuerzas. (ventaja mecánica)
- * Juntas cinemáticas.
- * Robots
- * Manipuladores paralelos

CLASIFICACIÓN DE LOS ELEMENTOS Y DE LOS PARES CINEMÁTICOS.

Elemento: cada una de las partes en que puede descomponerse un mecanismo de modo que posea movimiento relativo respecto al resto de los elementos y mantener respecto a ellos una discontinuidad de tipo físico.

Par cinemático: unión entre los distintos elementos de un mecanismo, que restringe algunos grados de libertad del movimiento relativo entre los elementos que une.

Elementos

* Clasificación según el número de pares

- Monario.
- Binario.
- Ternario (tres binarios).
- Pentario (siete binarios).

* Clasificación según su naturaleza

- Elementos rígidos.
- Elementos unirrigidos.
- Elementos flexibles.

* Clasificación según el tipo de movimiento.

- Manivelas: giran completamente alrededor de un eje fijo.
- Balancines: oscilan alrededor de un eje fijo.
- Bielas: giran alrededor de un eje instantáneo de rotación.

Pares cinemáticos

* Clasificación según el número de elementos

- Binario.
- Ternario.

* Clasificación según el tipo de cierre

- Cierre de forma.
- Cierre de fuerza.
- Cierre de cadena.

* Clasificación según la clase: I, II... V según los grados de libertad que permitan.

- CLASE I (5 gdl restringidos) \Rightarrow R, P
- CLASE II (4 gdl restringidos) \Rightarrow C, L
- CLASE III (3 gdl restringidos) \Rightarrow E, PL

CADENA CINEMÁTICA.

Cadena cinemática: conjunto de elementos unidos entre sí mediante pares cinemáticos de modo que es posible el movimiento relativo entre sus elementos.

* Abierta: alguno de sus elementos se une al conjunto mediante un único par cinemático. (Elemento monario).

* Cerrada: Todos los elementos de la cadena se unen al conjunto por más de un par cinemático (No hay elementos monarios).

Capacidad de movimiento (M): número de parámetros independientes.

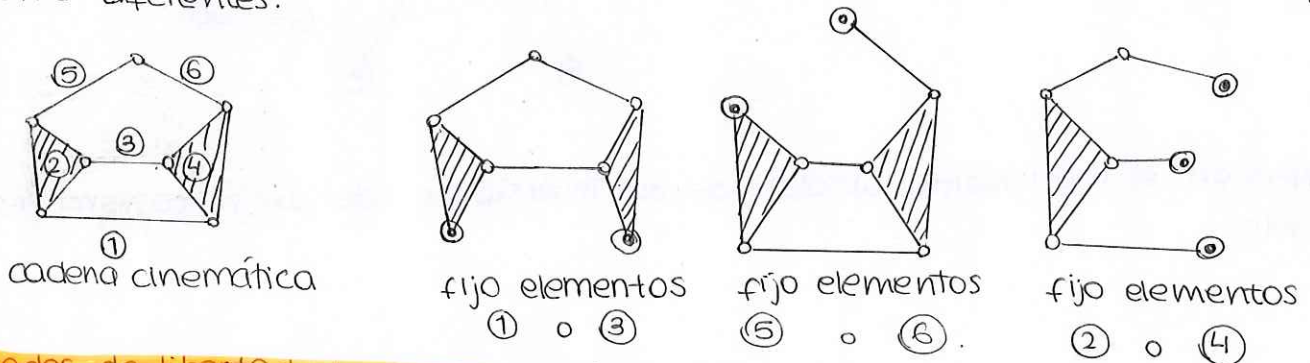
$$\begin{cases} M = G + 3 & (\text{plano}) \\ M = G + 6 & (\text{espacio}). \end{cases}$$

MECANISMOS E INVERSIONES.

Mecanismo: cadena cinemática en la que se ha fijado uno de los elementos. (soporte).

Inversión: distinto mecanismo que puede obtenerse de una cadena cambiando el elemento fijo. (N elementos \Rightarrow N inversiones, en principio).

Para que los mecanismos adquieran el carácter de inversión deben ser topológicamente diferentes.



Grados de libertad de un mecanismo (G): número de parámetros independientes que es necesario definir para determinar la posición de todos sus elementos.

CRITERIOS DE GRÜBLER Y MALISHEV

Supongamos un mecanismo formado por N elementos, P_I pares de clase I y P_{II} pares de clase II:

$$G = 3(N-1) - 2P_I - P_{II} \quad (\text{Plano})$$

$$G = 6(N-1) - 5P_I - 4P_{II} - 3P_{III} - 2P_{IV} - P_V \quad (\text{Espacio})$$

LIMITACIONES DE LOS CRITERIOS DE GRÜBLER Y MALISHEV

* Restricciones redundantes: La geometría de un mecanismo puede hacer que algunas de sus restricciones sean equivalentes. Para evitarlo podemos obtener el mecanismo equivalente libre de restricciones redundantes o añadir un término corrector (P_R) a las fórmulas de Grübler y Malishev.

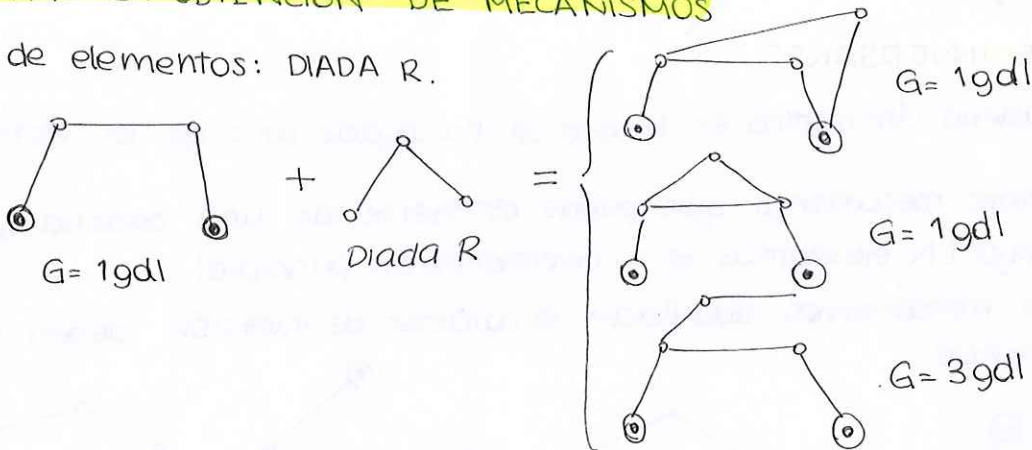
Pueden ser restricciones redundantes en el plano, en el espacio o subestructuras en el mecanismo.

* Grados de libertad inoperantes: un elemento del mecanismo puede moverse sin alterar la posición del resto de elementos. Para evitar que influya en el cálculo de los gdl's, introducimos un término corrector G_p , que descuenta el número de gdl inoperantes del mecanismo.

* Singularidades: configuraciones geométricas en las que se produce una alteración global o local, instantánea o permanente en el número de gdl del mecanismo. Pueden provocar una pérdida de control o bloqueo del mismo.

MÉTODOS PARA LA OBTENCIÓN DE MECANISMOS

1) Adición de elementos: DIADA R.



2) Inversión: el movimiento absoluto de dos inversiones de un mecanismo es distinto.

Geometría del mov. plano

ESTUDIO DEL MOVIMIENTO CONTINUO DE UNA FIGURA PLANA EN SU PLANO.

Movimiento plano: las trayectorias de todos los puntos del mecanismo son paralelas a un determinado plano fijo.

Para estudiar el movimiento de una figura plana en su plano, basta con estudiar el movimiento de un segmento cualquiera AB de la misma. Cualquier punto C de la figura vendría definido por la condición de que no varíe su posición respecto al segmento AB.

Sean dos instantes t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$, hay un punto concreto P_{12} del sólido rígido AB tal que sus posiciones son coincidentes y se denomina **Polo o centro de rotación de las posiciones 1 y 2.**

En un movimiento infinitesimal el polo de rotación se denomina **centro instantáneo de rotación (CIR)** y se obtiene mediante la intersección de las normales a las trayectorias (vectores velocidad) de dos puntos cualesquiera del sólido rígido.

Propiedades:

* La velocidad de este punto en el instante considerado es nula.

* El movimiento plano es una secuencia de rotaciones diferenciales alrededor de las sucesivas posiciones del CIR.

→ La distribución de velocidades de un instante concreto es la misma que la que tendría el sólido rígido en rotación permanente alrededor de dicho punto.

→ La velocidad angular $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_A d\varphi}{r_A dt} = \frac{v_A}{r_A}$

→ El vector velocidad es perpendicular al segmento que lo une con el CIR.

Cuando todos los puntos del sólido rígido tienen la misma velocidad \vec{v} , el CIR se encuentra en un punto infinito del plano y la velocidad angular es nula. Se trata de **traslación pura.**

Ruleta o curva polar móvil: lugar geométrico de los puntos del plano móvil que han sido CIR.

Base o curva polar fija: lugar geométrico de los puntos del plano fijo que han coincidido en algún instante con el CIR.

La base y la ruleta están permanentemente en contacto en la posición que ocupa el punto matemático.

Velocidad de sucesión: velocidad del punto matemático con la que el cir cambia de posición (\bar{u})

Conclusiones:

- 1) La base y la ruleta son curvas tangentes entre sí y a la velocidad de sucesión
- 2) La ruleta posee un movimiento de rodadura sobre la base.
- 3) El movimiento de un elemento plano en su plano queda totalmente definido por el movimiento de rodadura de sus polares.

TEOREMAS, PROPIEDADES Y FORMULACIÓN DEL CAMPO DE VELOCIDADES DE UN PLANO MÓVIL

Teorema de Burmester

"La figura formada por los extremos de las velocidades de puntos de un plano móvil es semejante a la figura original, siendo $\sqrt{1+w^2}$ la razón de semejanza de sus lados y encontrándose girada φ respecto de la original."

Teorema de las velocidades proyectadas

"Todos los puntos de una línea recta de un plano móvil tienen la misma componente de velocidad según dicha recta".

campo de velocidades

La velocidad de un punto B de un plano móvil en función de la de otro A:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AB}$$

(\bar{V}_{BA} : diferencia entre velocidades)

TEOREMA DE ARONHOLD-KENNEDY O DE LOS TRES CENTROS

Centro instantáneo de rotación del movimiento relativo: punto del plano móvil 3 que tiene la misma velocidad absoluta que el punto del plano móvil 2 que coincide con él.

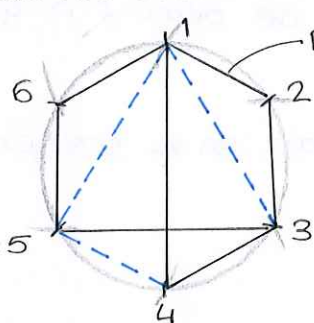
Los conceptos de base y ruleta son también extensibles al movimiento relativo, aunque en este caso ambas curvas (POLODIAS) son móviles.

"Los tres centros de rotación correspondientes al movimiento relativo entre tres planos móviles son colineales."

* Polos primarios.

- 1) Pares de rotación
- 2) Punto del infinito cuya dirección es perpendicular a la de un par prismático. (Movimiento relativo de traslación pura).
- 3) Punto de contacto en rodadura
- 4) En un par de leva, el polo relativo se encuentra en la normal a las superficies en el punto de contacto.

* Diagrama del círculo.



$$\left\{ \begin{array}{l} P_{13} = \overline{P_{12}P_{23}} \cap \overline{P_{14}P_{34}} \\ P_{15} = \overline{P_{13}P_{35}} \cap \overline{P_{16}P_{56}} \\ P_{45} = \overline{P_{34}P_{35}} \cap \overline{P_{14}P_{15}} \end{array} \right.$$

CAMPO DE ACELERACIONES. IMAGEN DE ACELERACIONES.

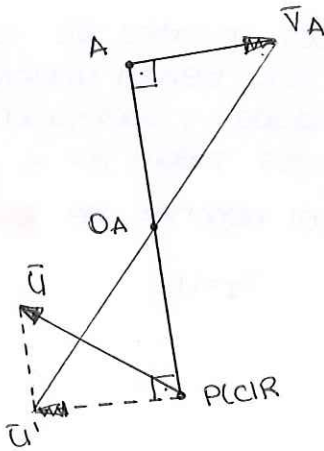
LA aceleración de un punto B de un plano móvil en función de la de otro punto A:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AB})}_{\bar{a}_{BA}^N} + \underbrace{\bar{\alpha} \times \bar{AB}}_{\bar{a}_{BA}^T}$$

* Aceleración del CIR: $\bar{a}_{CIR} = -\bar{\omega} \times \bar{u}$

TEOREMA DE HARTMANN

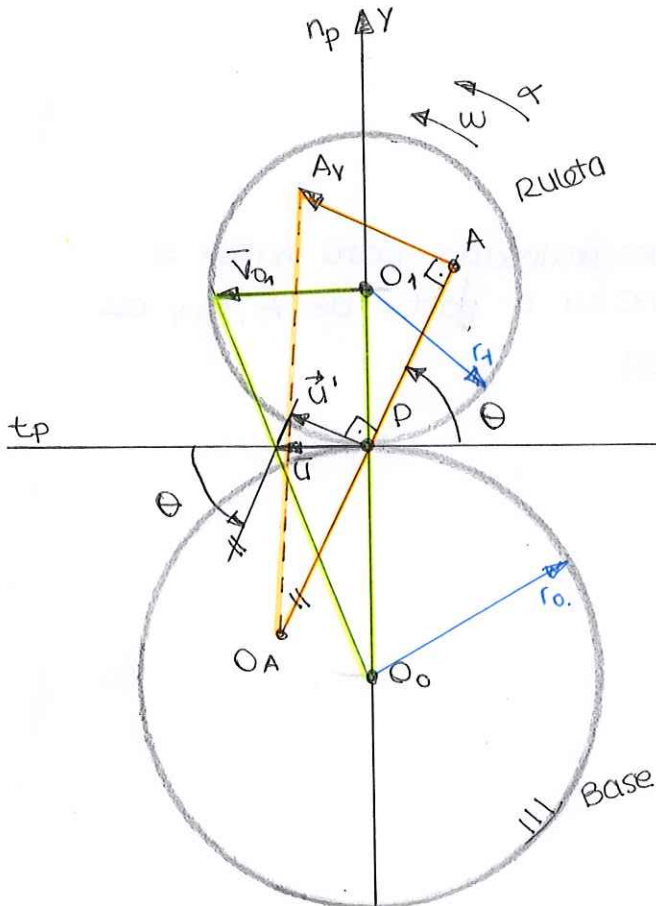
"El extremo del vector velocidad de un punto, el centro de curvatura de su trayectoria y el extremo de la componente paralela a la velocidad del punto del vector velocidad de cambio de polo están alineados."



⊗ Extensión del teorema de Burmester:

"No sólo se encuentran alineados los extremos de las velocidades de puntos colineales de un sólido rígido, sino también los extremos de sus componentes normales a la línea que une dichos puntos."

FÓRMULA DE EULER-SAVARY



$$v_{O_1} = \omega \cdot r_1$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{v_{O_1}}{u} = \frac{O_0 O_1}{PO_0}$$

$$\frac{\omega r_1}{u} = \frac{r_0 + r_1}{r_0} \Rightarrow \frac{\omega}{u} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} \quad (1)$$

Por el teorema de Hartmann

$$\frac{v_A}{u'} = \frac{OAP + PA}{OAP}$$

$$\frac{\omega \cdot PA}{u'} = \frac{OAP + PA}{OAP} \Rightarrow \frac{\omega}{u} = \frac{OAP + PA}{OAP \cdot PA} \cdot \text{sen } \theta$$

$$\frac{\omega}{u} = \left(\frac{1}{OAP^*} + \frac{1}{PA^*} \right) \cdot \text{sen } \theta \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene

$$\frac{1}{r_0^*} + \frac{1}{r_1^*} = \left(\frac{1}{OAP^*} + \frac{1}{PA^*} \right) \cdot \text{sen } \theta$$

* Corolario: El centro de curvatura de cualquier punto del plano móvil situado en la tangente polar se encuentra en el polo P.

CIRCUNFERENCIA DE LAS INFLEXIONES

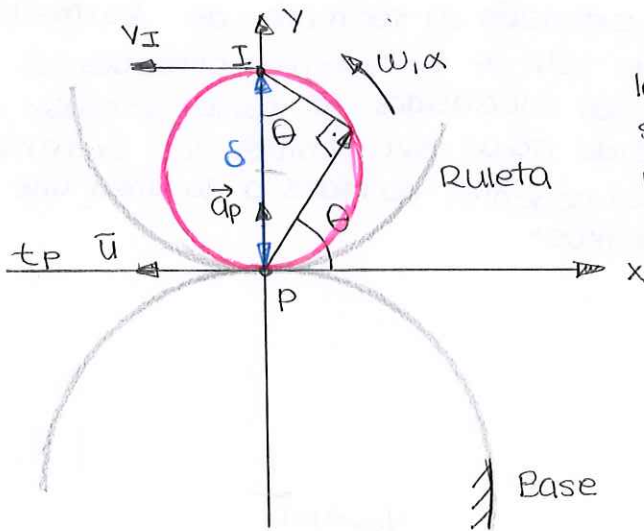
Es el lugar geométrico de los puntos del plano que no tienen aceleración normal, es decir, puntos cuyo radio de curvatura es infinito.

se obtiene haciendo $\overline{OA}P = \infty$ y $\overline{PA}^* = r$ en la fórmula de Euler-Savary.

$$\frac{1}{r} \cdot \text{sen}\theta = \frac{1}{r_0^*} + \frac{1}{r_1^*} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{\delta} \\ r = \delta \cdot \text{sen}\theta \end{cases}$$

Expresándola en coordenadas cartesianas ($x = r \cdot \text{cos}\theta$; $y = r \cdot \text{sen}\theta$)

$$x^2 + \left(y - \frac{\delta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

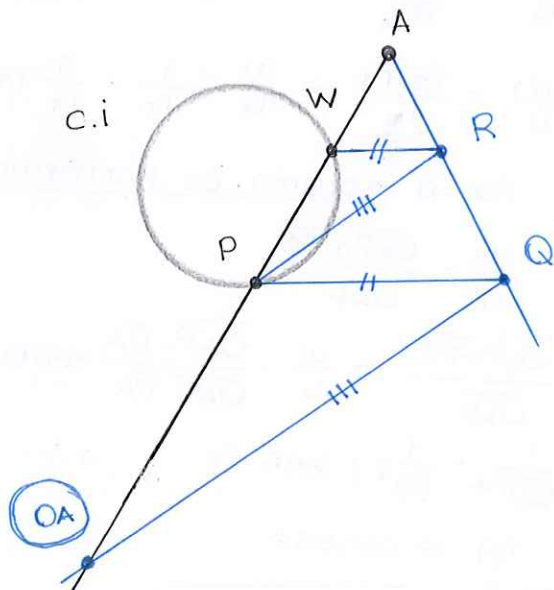


Los puntos de esta circunferencia sólo tienen aceleración tangencial, las velocidades y aceleraciones de todos sus puntos pasan por el punto I que recibe el nombre de **polo de inflexiones**

$$V_I = u.$$

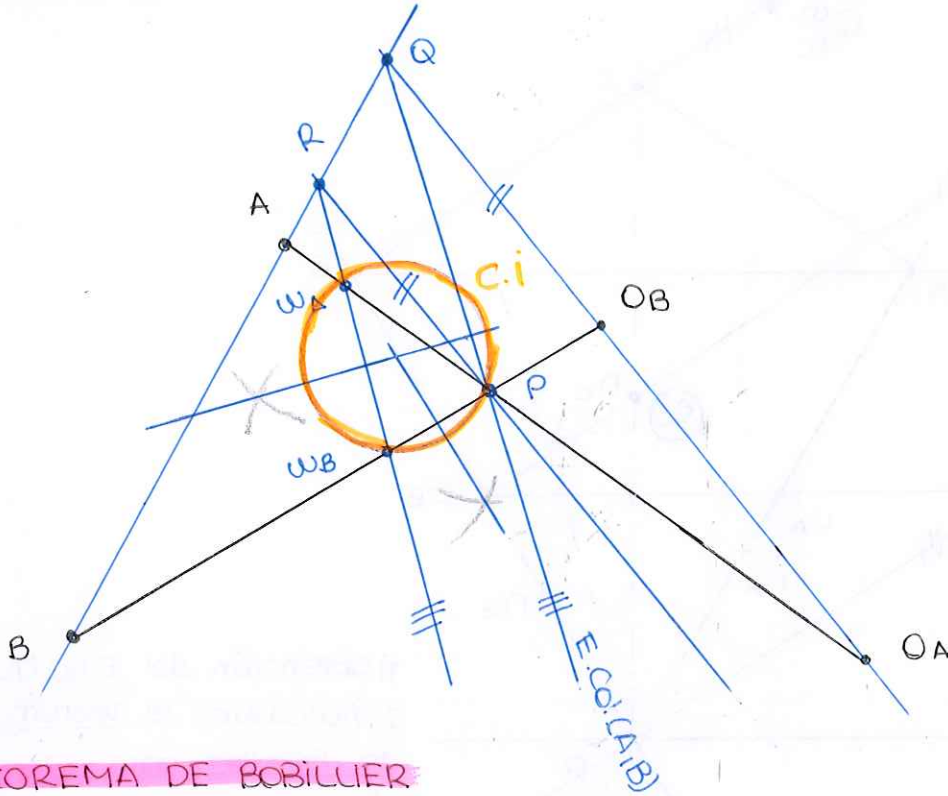
CONSTRUCCIONES GRÁFICAS.

1ª construcción: (Datos: A, W, P; incógnita: OA)



(Solemos utilizarla para hallar el punto W ∈ c.i a partir de A, P y OA conocidos)

2. construcción (Datos OA, OB, A y B ; Incógnita circunferencia de las Inflexiones)

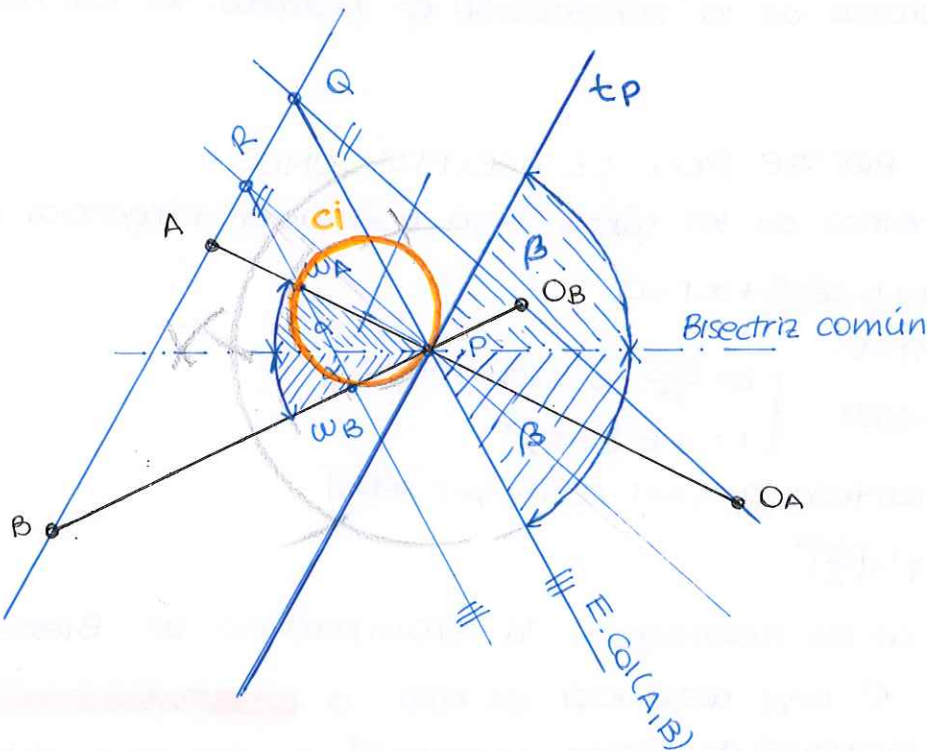


- 1) $\overline{AO_A} \cap \overline{BO_B} = (P)$.
 - 2) $\overline{AB} \cap \overline{O_AO_B} = (Q)$.
 - 3) $R \Rightarrow \overline{PR} \parallel \overline{O_AO_B}$
 $\overline{PR} \cap \overline{AB} = (R)$.
 - 4) $\overline{WA} \overline{WB} \parallel \overline{PQ}$ por R.
 $\overline{WA} \overline{WB} \cap \overline{AO_A} = (WA)$
 $\overline{WA} \overline{WB} \cap \overline{BO_B} = (WB)$.
- $WA, WB, P \in C.i$

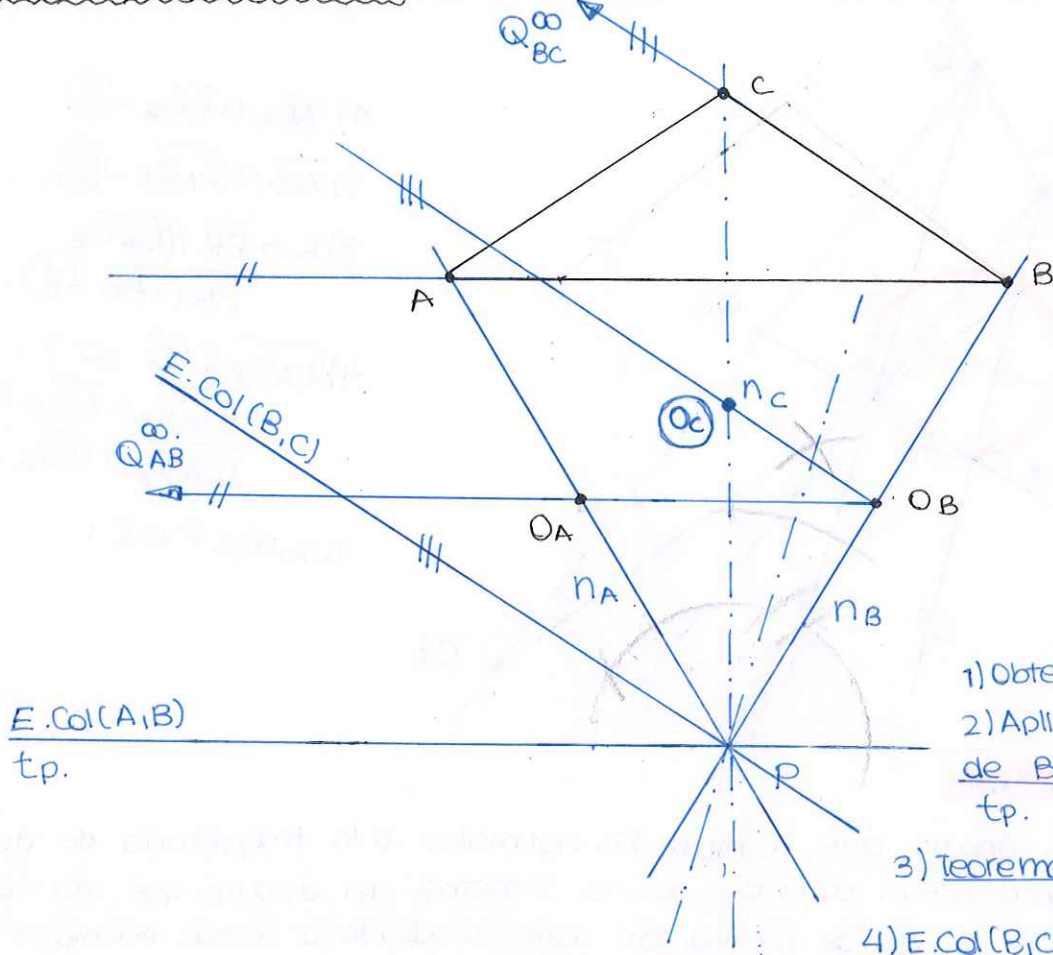
TEOREMA DE BOBILUER

"La bisectriz del ángulo que forman las normales a la trayectoria de dos puntos de un plano móvil coincide con la bisectriz del ángulo que forman la tangente polar y el eje de alineación correspondiente a dichas normales."

Partiendo de dos puntos conjugados $\begin{cases} (O_A, A) \\ (O_B, B) \end{cases}$



* Construcción de Aronhold (Datos: (A, O_A) ; (B, O_B) ; C . Incógnita: O_C)



- 1) Obtención del E.Col(A,B)
- 2) Aplicamos el Teorema de Bobillier para obtener tp.

3) Teorema de Bobillier: E.Col(B,C)

4) $E.Col(B,C) \cap \overline{BC} \Rightarrow Q_{BC}^O$

5) $O_C = \overline{CP} \cap \overline{O_B Q_{BC}}$

Una aplicación práctica de la construcción de Aronhold son los mecanismos con paradas.

CIRCUNFERENCIA DE BRESSE. POLO DE ACELERACIONES.

Es el lugar geométrico de los puntos cuya aceleración tangencial es nula:

$$\alpha^t = a_p \cdot \cos\theta + \alpha \cdot r = \omega \cdot u \cdot \cos\theta + \alpha \cdot r = 0.$$

$$\omega^2 \cdot \delta \cdot \cos\theta + \alpha r = 0.$$

$$r = -\frac{\omega^2}{\alpha} \cdot \delta \cdot \cos\theta \quad \begin{cases} b = \frac{\omega^2}{\alpha} \cdot \delta \text{ (sobre tp)} \\ r = -b \cdot \cos\theta \end{cases}$$

En coordenadas cartesianas ($x = r \cdot \cos\theta$; $y = r \cdot \text{sen}\theta$)

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

La circunferencia de las inflexiones y la circunferencia de Bresse se cortan en un punto O cuya aceleración es nula, el polo de aceleraciones.

Si $\alpha = 0$, la circunferencia de Bresse degenerará en una recta coincidente con la normal polar ya que $\cos\theta = 0$.

PERFILES CONJUGADOS, GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER-SAVARY.

Al perfil móvil y a su envolvente se les denomina **perfiles conjugados**.

La fórmula de Euler-Savary generalizada relaciona los centros de curvatura de dos perfiles conjugados y establece que: "el centro de curvatura de la trayectoria del centro de curvatura de un perfil solidario a un plano móvil, es el centro de curvatura de su envolvente."

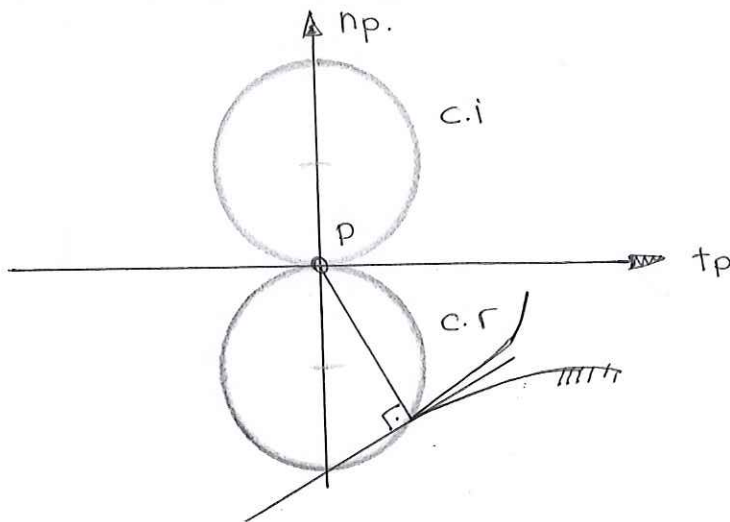
$$\left(\frac{1}{O_A P_{21}} + \frac{1}{P_{21} A_2} \right) \cdot \text{sen} \theta = \frac{\omega_{21}}{u_{21}} = \frac{1}{\delta_{21}}$$

↑
centros de curvatura de planos conjugados.

CIRCUNFERENCIA DE LOS RETROCESOS: TEOREMAS DE ARONHOLD.

Si el perfil móvil es una recta, su centro de curvatura estará en el infinito luego: $\overline{O_A P} = \delta \cdot \text{sen} \theta$. que representa la circunferencia simétrica a la c.i.

La **circunferencia de los retrocesos** es, por tanto, el lugar geométrico de los centros de curvatura de las envolventes a rectas solidarias con el plano móvil.



Teoremas de Aronhold

- ① La circunferencia de los retrocesos es el lugar geométrico de los centros de curvatura de las envolventes a rectas solidarias al plano móvil. Luego si una recta solidaria con el plano móvil pasa siempre por un punto fijo, dicho punto pertenece a la circunferencia de los retrocesos.
- ② La circunferencia de las inflexiones es el lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas solidarias al plano móvil cuyas envolventes son rectas.

Problem 1

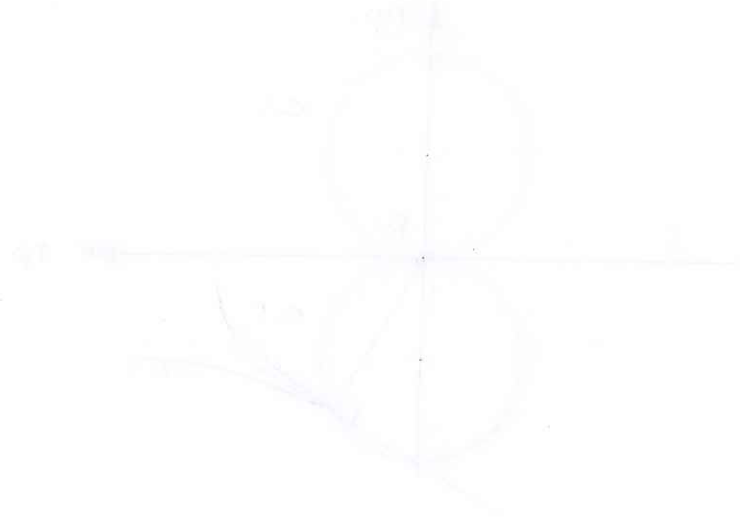
Consider the function $f(x) = \frac{1}{x}$. The graph of this function is shown below. The function is a hyperbola with two branches, one in the first quadrant and one in the third quadrant. The x-axis and y-axis are asymptotes. The graph is symmetric with respect to the origin.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

The graph of the function $f(x) = \frac{1}{x}$ is shown below.

Problem 2

Consider the function $f(x) = \frac{1}{x^2}$. The graph of this function is shown below. The function is a hyperbola with two branches, one in the first quadrant and one in the second quadrant. The x-axis and y-axis are asymptotes. The graph is symmetric with respect to the y-axis.



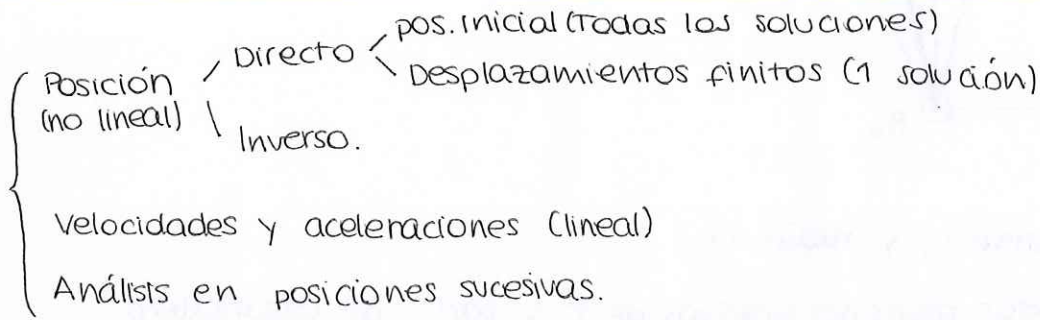
Problem 3

Consider the function $f(x) = \frac{1}{x^3}$. The graph of this function is shown below. The function is a hyperbola with two branches, one in the first quadrant and one in the third quadrant. The x-axis and y-axis are asymptotes. The graph is symmetric with respect to the origin.

The graph of the function $f(x) = \frac{1}{x^3}$ is shown below.

Análisis Cinemático

INTRODUCCIÓN: PROBLEMAS GENERALES DEL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS.



* Posición directo: consiste en obtener la posición de todos los elementos del mecanismo, del cual se conocen todas sus dimensiones, la posición del elemento fijo y las posiciones de los elementos de entrada. El problema tiene múltiples soluciones puesto que no es lineal.

* Posición Inverso: consiste en obtener la posición de todos los elementos del mecanismo, del cual se conocen todas sus dimensiones, la posición del elemento fijo y las posiciones de los elementos de salida.

* Velocidades y aceleraciones: conocida la posición de un mecanismo y para una velocidad y aceleración del elemento de entrada, consiste en calcular las velocidades y aceleraciones de los restantes elementos y puntos del mecanismo.

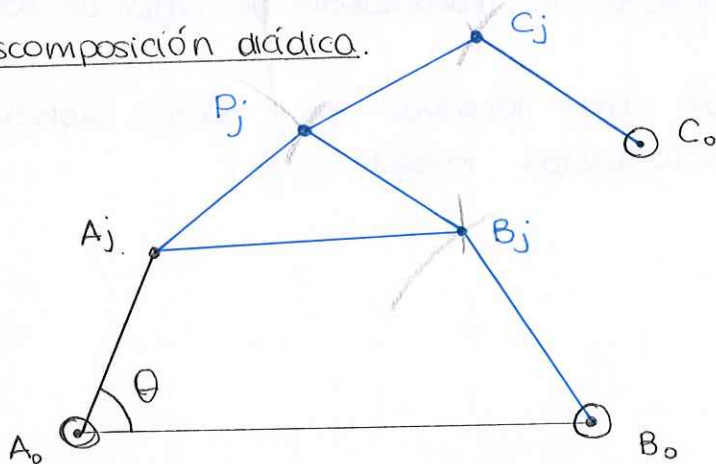
* Análisis en posiciones sucesivas: combinación del problema de desplazamientos finitos y del cálculo de velocidades y aceleraciones.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN PARA LOS PROBLEMAS DE POSICIÓN.

Metodos gráficos clásicos

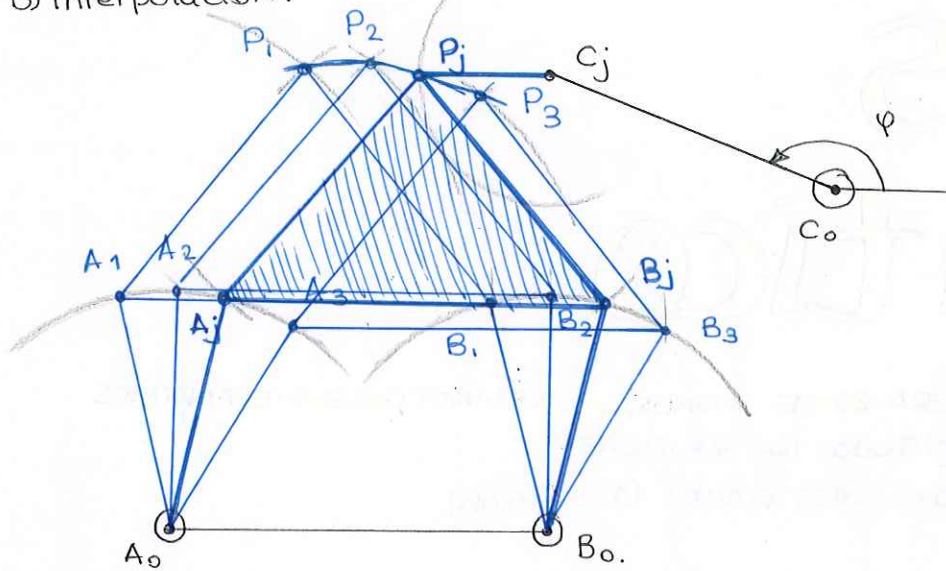
son poco precisos y laboriosos. Se parte del conocimiento de las posiciones del elemento fijo y de los elementos de entrada.

A) Descomposición diádica.



(A0A1 : barra de entrada).

B) Interpolación.



1. se traza un arco con centro C_j y radio C_p .

2. Se dibujan unas cuantas posiciones sucesivas de P a partir del cuadrilátero articulado $A_0AB_0B_0$, de manera que se prevea la intersección de este tramo de trayectoria con la circunferencia realizada previamente.

Desde un punto de vista analítico, las incógnitas cinemáticas pueden expresarse una en función de la otra, hasta llegar al gdl que define la posición de la barra de entrada.

Método geométrico-iterativo.

Los elementos, los pares cinemáticos y los actuadores que constituyen el mecanismo se transforman en una serie de nudos relacionados entre sí mediante restricciones geométricas. Un algoritmo establece el orden en que deben ser aplicadas estas restricciones, que modelizan el mecanismo. Esto es lo que se denomina una **secuencia de iteración**.

ROTABILIDAD DE MECANISMOS

Para conocer la rotabilidad de los elementos de un mecanismo hay que resolver previamente el problema de desplazamientos finitos. Sin embargo, hay mecanismos simples en que puede analizarse de manera sencilla.

Criterio de Grashof.

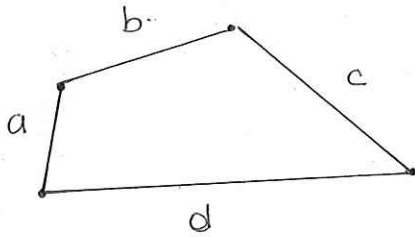
* La rotabilidad de un cuadrilátero articulado es independiente del orden de conexión de sus barras.

Sea un cuadrilátero articulado con unas longitudes de barras cualesquiera l_1, l_2, l_3 y l_4 ; para que l_1 de vueltas completas respecto a l_2 :

I. $l_1 + l_2 < l_3 + l_4$

II. $||l_1 - l_2| > |l_3 - l_4|$.

sean a, b, c y d las magnitudes de los lados de un cuadrilátero articulado ($a < b < c < d$):



1) Giro completo de a sobre b:

I: $a + b < c + d$ (se cumple siempre)

II: $b - a > d - c \Rightarrow a + d < b + c$.

2) Giro completo de a sobre c:

I: $a + c < b + d$ (se cumple siempre)

II: $c - a > d - b \Rightarrow a + d < b + c$.

4) Giro completo de b sobre c:

I: $b + c < a + d$

II: $c - b > d - a \Rightarrow c + a > b + d$ (imposible).

6) Giro completo de c sobre d:

I: $d + c < a + b$ (imposible).

3) Giro completo de a sobre d:

I: $a + d < c + b$.

II: $d - a > c - b \Rightarrow c + a < b + d$ (se cumple)

5) Giro completo de b sobre d:

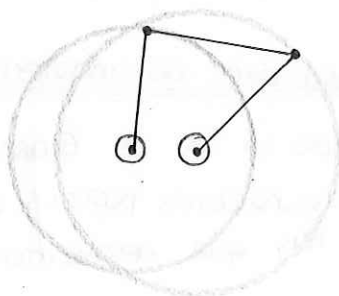
I: $b + d < a + c$ (imposible)

sólo la barra a puede dar vueltas completas sobre las demás siempre que se cumpla $a + d < b + c$.

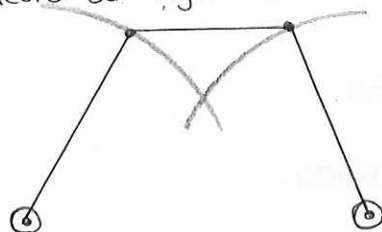
"sólo la barra más corta de un cuadrilátero articulado puede dar vueltas completas respecto de todas las demás (y viceversa), si se verifica que la suma de longitudes de la barra más corta y de la más larga, es menor que la suma de las otras dos."

CASO 1: El mecanismo cumple la Ley de Grashof:

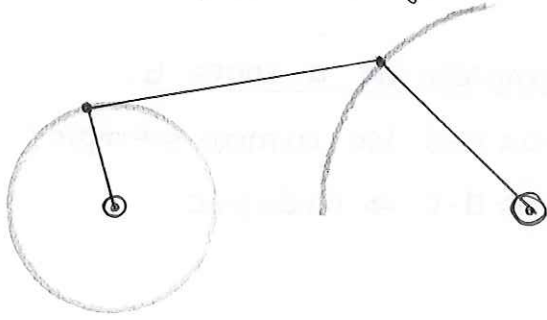
1) si a es el elemento fijo \rightarrow doble manivela.



2) si a es el opuesto al fijo \rightarrow doble balancín.



3) si a es el adyacente al fijo. \rightarrow manivela-balancín.



CASO 2: El mecanismo no cumple la ley de Grashof.

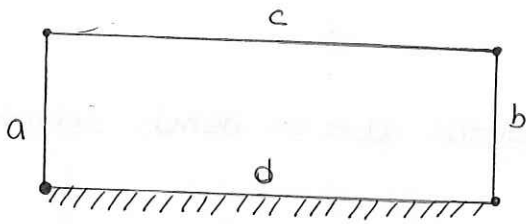
Las cuatro posibles inversiones son de doble balancín.

CASO 3: El mecanismo cumple la ley de Grashof al límite ($a+d=c+b$).

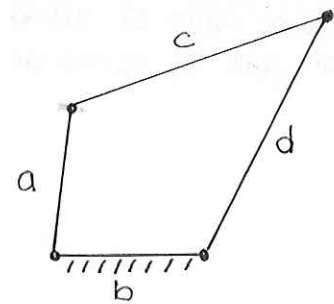
Es equivalente al caso 1, sólo que en determinadas posiciones estos mecanismos se encuentran con todas las barras alineadas. (Mecanismos de transición)

si además se cumple que $a=b$ y $c=d$:

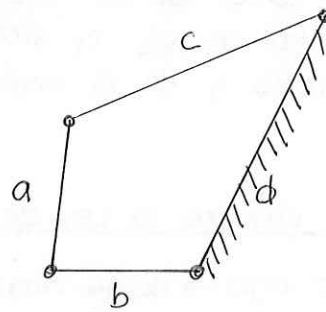
1. Paralelogramo articulado: doble manivela.



2. Cuadrilátero cometa:



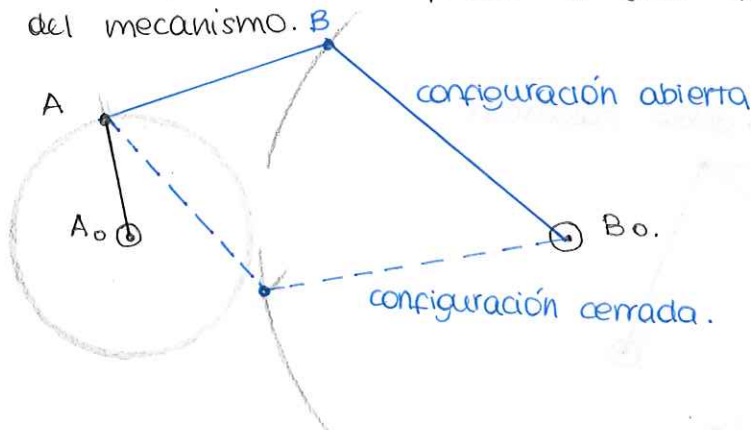
Doble-manivela.



Manivela-balancín

Configuraciones, ramas de una trayectoria y posiciones de indeterminación

* considérese un cuadrilátero articulado que cumpla la ley de Grashof. Para una posición concreta de la manivela, existen dos configuraciones posibles, la abierta y la cruzada. Para pasar de una posición a otra hay que desmontar alguna de las juntas del mecanismo.



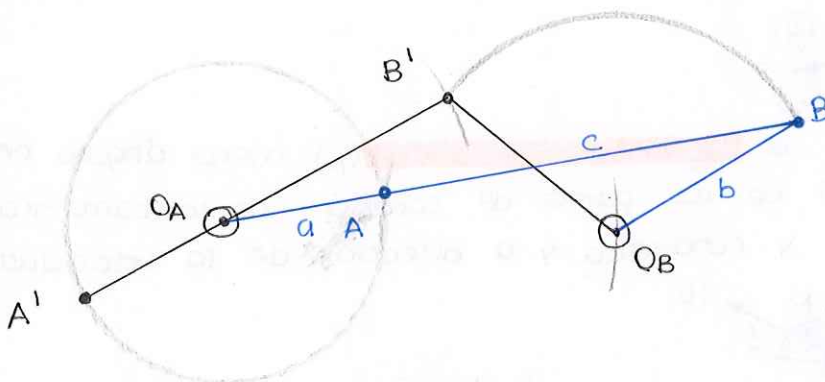
cualquier punto del acoplador de un cuadrilátero articulado que cumpla la ley de Grashof origina una trayectoria con dos ramas o circuitos.

* Cuando el cuadrilátero no cumple la ley de Grashof, se puede pasar de la posición abierta a la cruzada sin desmontar ninguna junta.

cualquier punto del acoplador de un cuadrilátero articulado que no cumpla la ley de Grashof origina una trayectoria con un único circuito.

* Cuando el cuadrilátero cumple la ley en el límite, el cuadrilátero puede alcanzar una posición, denominada **posición de indeterminación** en la que todas las barras se encuentran alineadas; en ella, el movimiento del cuadrilátero no está determinado: cualquier punto del acoplador puede seguir dos direcciones distintas, lo que implica la existencia de un punto doble o de bifurcación en su trayectoria.

Puntos muertos.



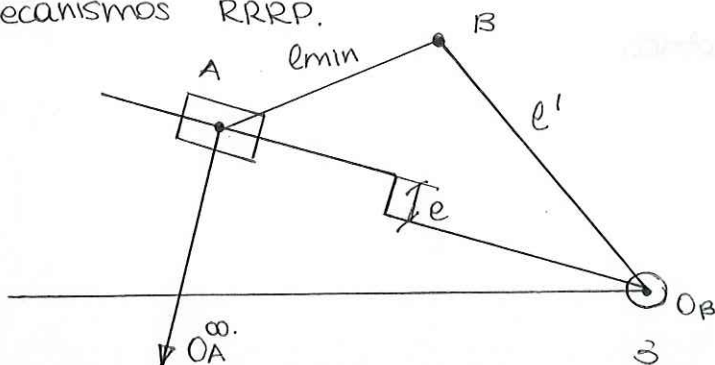
Sea la barra de longitud b el elemento de entrada, durante el movimiento se alcanza la posición $(O_A A B O_B)$ en la que las barras a y c se alinean. En este instante la barra b ya no puede seguir girando en el sentido en que lo estaba haciendo. Dicha posición es conocida como **posición de bloqueo**. El mecanismo ha llegado a una posición límite, para que el movimiento continúe hay que cambiar el elemento de entrada, a la barra de longitud a . Si la entrada viene dada por la barra a , la barra b alcanza su posición límite en esa posición de alineamiento, conocida como **posición de punto muerto** o **configuración estacionaria**.

De esta forma un mecanismo puede actuar como amplificador de velocidades, de desplazamientos o incluso, de esfuerzos en las cercanías de dichos puntos muertos.

Si el mecanismo fuera de doble balancán tendría 4 puntos muertos y si fuera de doble manivela ~~tendría 2~~ ^{no tendría ninguno.} Aunque el alineamiento de barras es habitual en dichas posiciones, no es una condición necesaria.

Extensión del criterio de Grashof a cuadriláteros con pares prismáticos.

1) Mecanismos RRRP.



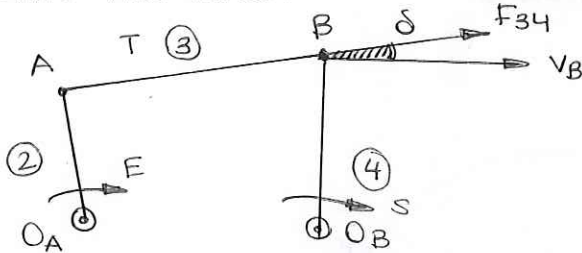
$e_{\min} < e'$: donde e_{\min} es la barra que puede dar vueltas completas.

2) Mecanismos RRPP: este mecanismo cumple siempre la ley de Grashof.

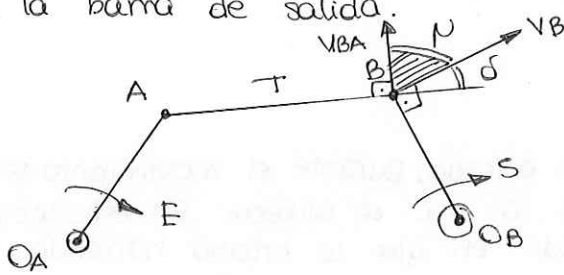
3) Mecanismos RPRP: ninguna barra puede dar vueltas respecto de las demás.

ÁNGULO DE TRANSMISIÓN.

La transmisión de movimiento en un mecanismo tiene que ver con la transmisión de fuerzas entre sus distintos elementos. Para conocer la transmisión de fuerza y movimiento a baja velocidad utilizamos el **ángulo de desviación** (δ): ángulo menor entre la dirección de la fuerza estática aplicada entre el elemento transmisor y el de salida, y la velocidad absoluta del elemento de salida en el punto de conexión con el elemento transmisor.



Otro indicador equivalente es el **ángulo de transmisión** (μ): menor ángulo entre el vector diferencia de velocidades de los puntos de conexión de la barra transmisora con la barra conductora y conducida, y la dirección de la velocidad absoluta de la barra de salida.



$$\delta + \mu = 90^\circ$$

El valor más favorable del ángulo de transmisión es 90° . Por el contrario, el más desfavorable es 0° , que es el que hace imposible el movimiento, y que corresponde a una posición de bloqueo.

VENTAJA MECÁNICA

Es el cociente entre los módulos de la fuerza de salida y de entrada:

$$VM = \frac{F_s}{F_e} = \frac{T_s}{T_e} \cdot \frac{r_e}{r_s} = \left(\frac{T_s}{T_e} \right) \left(\frac{r_e}{r_s} \right)$$

donde T_s y T_e son los pares de entrada y salida y r_e y r_s son los brazos de palanca de las fuerzas.

$$VM = \left(\frac{W_e}{W_s} \right) \left(\frac{r_e}{r_s} \right) = \frac{P_i s P_e s}{P_i e P_e s} \cdot \frac{r_e}{r_s}$$

Es una característica puramente geométrica.

COEFICIENTES DE INFLUENCIA.

Resulta de gran utilidad para los métodos analíticos de análisis cinemático. Considérese un mecanismo de 1 gdl. La posición de cualquier punto o elemento del mecanismo es función de la variable φ que define la posición del elemento de entrada.

$$\begin{cases} \varphi_j = f_j(\varphi) \\ s_k = \bar{f}_k(\varphi) \end{cases}$$

Donde φ_j es el ángulo de posición del elemento y s_k la longitud recorrida por el punto k a lo largo de su trayectoria.

Derivando respecto del tiempo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_j}{dt} &= \frac{df_j}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \omega_j = g_j \cdot \omega \\ \frac{ds_k}{dt} &= \frac{d\bar{f}_k}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \bar{v}_k = \bar{g}_k \cdot \omega \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{donde } g_j \text{ y } \bar{g}_k \text{ dependen exclusivamente} \\ \text{de la coordenada generalizada } \varphi. \end{array}$$

* g_j y \bar{g}_k son los **coeficientes de influencia de velocidad.**

Derivando de nuevo respecto del tiempo:

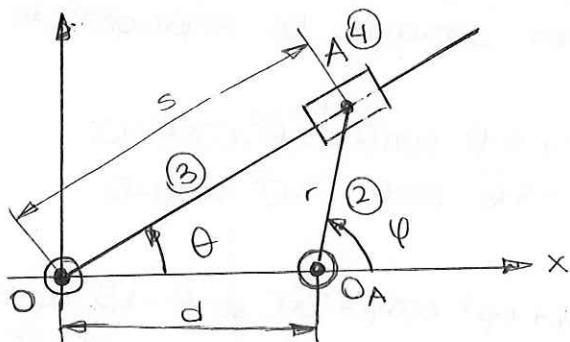
$$\left. \begin{aligned} \alpha_j &= \frac{dg_j}{d\varphi} \omega^2 + g_j \cdot \alpha = h_j \cdot \omega^2 + g_j \cdot \alpha \\ \alpha_k^t &= \frac{d\bar{g}_k}{d\varphi} \omega^2 + \bar{g}_k \cdot \alpha = \bar{h}_k \cdot \omega^2 + \bar{g}_k \cdot \alpha \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{donde } h_j \text{ y } \bar{h}_k \text{ dependen exclusivamente} \\ \text{de la coordenada generalizada } \varphi. \end{array}$$

* h_j y \bar{h}_k son los **coeficientes de influencia de aceleración.**

MÉTODOS ANALÍTICOS:

Mecanismos de 1 lazo.

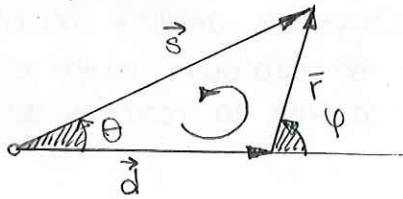
Sea el mecanismo de 1 gdl de la figura.



(O, x, y) : S.R. fijo.
 r, d : datos geométricos
 φ : coordenada generalizada
 s, θ : coordenadas secundarias.

Se elige el gdl de entrada del mecanismo: es la coordenada generalizada. El resto de las variables son coordenadas secundarias (variables pasivas y variables de salida).

1. **Problema de posición:** El mecanismo está constituido por un único lazo.



$$\vec{d} + \vec{r} - \vec{s} = 0.$$

$$d + r \cdot \cos \varphi - s \cdot \cos \theta = 0.$$

$$r \cdot \sin \varphi - s \cdot \sin \theta = 0.$$

Buscamos expresar las coordenadas secundarias en función de la coordenada generalizada:

$$\left. \begin{array}{l} s \cdot \cos \theta = d + r \cdot \cos \varphi \\ s \cdot \sin \theta = r \cdot \sin \varphi \end{array} \right\} s^2 = d^2 + 2dr \cdot \cos \varphi + r^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta = \frac{r}{s} \cdot \sin \varphi \\ \cos \theta = \frac{d + r \cos \varphi}{s} \end{array} \right.$$

2. **Cálculo de velocidades:** Las ecuaciones de cierre en velocidades se obtienen al derivar respecto del tiempo las ecuaciones de posición.

$$-r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - [\dot{s} \cdot \cos \theta - s \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta] = 0 \Rightarrow -r \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{s} \cos \theta + s \dot{\theta} \sin \theta = 0.$$

$$r \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi - [\dot{s} \cdot \sin \theta + s \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta] = 0 \Rightarrow r \dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{s} \sin \theta - s \dot{\theta} \cos \theta = 0.$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta & s \cdot \sin \theta & -r \cdot \sin \varphi \\ -\sin \theta & -s \cdot \cos \theta & r \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta & s \cdot \sin \theta \\ -\sin \theta & -s \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \dot{\varphi} \begin{Bmatrix} r \cdot \sin \varphi \\ -r \cdot \cos \varphi \end{Bmatrix}$$

Que es un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

3. **Cálculo de aceleraciones:** una vez resueltos los dos problemas anteriores, las ecuaciones de cierre de las aceleraciones se obtienen derivando las ecuaciones de cierre en velocidades:

$$-r \ddot{\varphi} \sin \varphi - r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \ddot{s} \cdot \cos \theta + 2 \dot{s} \dot{\theta} \sin \theta + s \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta + s \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta = 0.$$

$$r \ddot{\varphi} \cos \varphi - r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{s} \cdot \sin \theta - 2 \dot{s} \dot{\theta} \cos \theta - s \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta + s \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta = 0$$

Matricialmente.

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta & s \cdot \sin \theta \\ -\sin \theta & -s \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi + r \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi - 2 \dot{s} \dot{\theta} \sin \theta - s \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -r \dot{\varphi} \cos \varphi + r \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi + 2 \dot{s} \dot{\theta} \cdot \cos \theta - s \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{Bmatrix}$$

Que de nuevo es un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

4. Cálculo de la posición, velocidad y aceleración de determinados puntos de interés.

considérese un punto cualquiera de coordenadas respecto del SR fijo (x_p, y_p) y de coordenadas (x'_p, y'_p) respecto del SR móvil scudario al elemento (4)

$$\overline{OP}_4 = \overline{OA} + \overline{AP}_4$$

$$\begin{cases} x_p = s \cdot \cos\theta + x'_p \cdot \cos\theta - y'_p \cdot \sin\theta \\ y_p = s \cdot \sin\theta + x'_p \cdot \sin\theta + y'_p \cdot \cos\theta \end{cases}$$

La velocidad del punto P_4 es: $\overline{v}_{P_4} = v_{P_4}^x \overline{i} + v_{P_4}^y \overline{j}$ siendo

$$\begin{cases} v_{P_4}^x = \dot{s} \cdot \cos\theta - s \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta - x'_p \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta - y'_p \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta = \overline{g}_{P_4}^x(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \\ v_{P_4}^y = \dot{s} \cdot \sin\theta + s \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta + x'_p \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta - y'_p \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta = \overline{g}_{P_4}^y(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{g}_{P_4}^x = \overline{g}_s \cdot \cos\theta - s \cdot g_\theta \cdot \sin\theta - x'_p \cdot g_\theta \cdot \sin\theta - y'_p \cdot g_\theta \cdot \cos\theta \\ \overline{g}_{P_4}^y = \overline{g}_s \cdot \sin\theta + s \cdot g_\theta \cdot \cos\theta + x'_p \cdot g_\theta \cdot \cos\theta - y'_p \cdot g_\theta \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Para calcular su aceleración

$$\overline{a}_{P_4} = (\ddot{\varphi} \overline{g}_{P_4}^x + \dot{\varphi}^2 \cdot \overline{h}_{P_4}^x) \overline{i} + (\ddot{\varphi} \overline{g}_{P_4}^y + \dot{\varphi}^2 \cdot \overline{h}_{P_4}^y) \overline{j}$$

$$\begin{cases} \overline{h}_{P_4}^x = \ddot{s} \cdot \cos\theta - 2\overline{g}_s g_\theta \cdot \sin\theta - s \cdot h_\theta \cdot \sin\theta - s g_\theta^2 \cdot \cos\theta - x'_p h_\theta \cdot \sin\theta - x'_p g_\theta^2 \cos\theta - \\ - y'_p h_\theta \cdot \cos\theta + y'_p g_\theta^2 \cdot \sin\theta \\ \overline{h}_{P_4}^y = \ddot{s} \cdot \sin\theta + 2\overline{g}_s g_\theta \cdot \cos\theta + s h_\theta \cdot \cos\theta - s g_\theta^2 \cdot \sin\theta + x'_p h_\theta \cdot \cos\theta - x'_p g_\theta^2 \cdot \sin\theta - \\ - y'_p h_\theta \cdot \sin\theta - y'_p g_\theta^2 \cdot \cos\theta \end{cases}$$

5. **Matrices jacobianas**: Las ecuaciones escalares de aene pueden expresarse como:

$$\begin{cases} f_1(p, s, \theta) = 0 \\ f_2(p, s, \theta) = 0 \end{cases}$$

Donde φ es la variable de entrada y s y θ las coordenadas secundarias o incógnitas.

La matriz jacobiana del sistema es:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{ds} & \frac{df_1}{d\theta} & \frac{df_1}{d\varphi} \\ \frac{df_2}{ds} & \frac{df_2}{d\theta} & \frac{df_2}{d\varphi} \end{bmatrix}$$

Y la jacobiana del sistema respecto de las coordenadas secundarias es:

$$J_s = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{ds} & \frac{df_1}{d\theta} \\ \frac{df_2}{ds} & \frac{df_2}{d\theta} \end{bmatrix}$$

6. **Análisis de singularidades:** pueden provocar un bloqueo o pérdida de control en el maximismo del mecanismo.

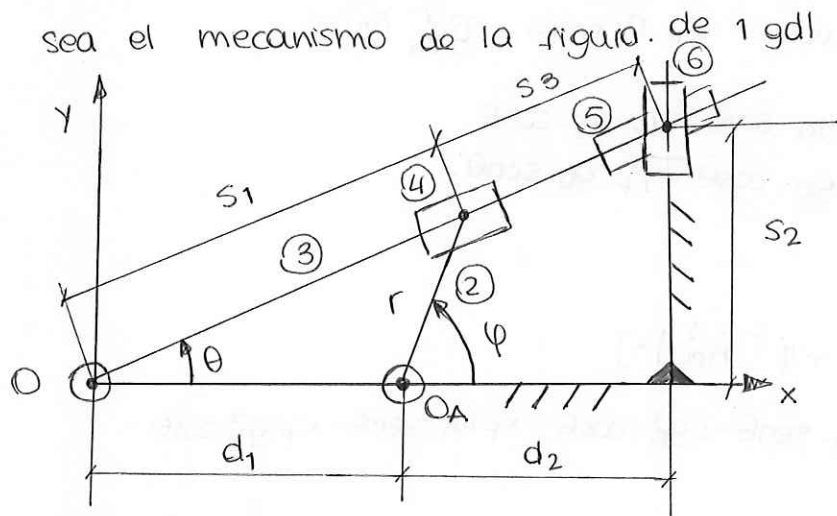
Siempre y cuando las dos ecuaciones del sistema sean independientes tendrá 1 gdl el sistema, esto se analiza a través del rango del Jacobiano, que indica cuántas ecuaciones independientes tiene el sistema.

Mecanismos con varios lazos.

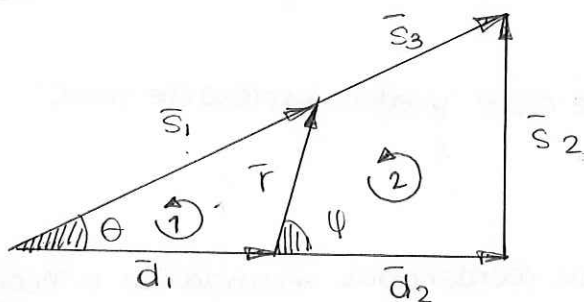
La estructura de un mecanismo puede asociarse a un grafo. Si la cadena a la que pertenece el mecanismo es cerrada, su correspondiente grafo estará constituido por lazos.

$j = N + L - 1$: donde L es el número de lazos simples del mecanismo, N el número de elementos y j es el número de conexiones.

Sea el mecanismo de la figura. de 1 gdl



1. **Problema de posición:** El problema posee dos lazos independientes:



$$7 = 6 + L - 1 \Rightarrow \underline{L=2}$$

Ec. de cierre de los lazos:

$$\begin{cases} \bar{d}_1 + \bar{r} - \bar{s}_1 = 0 \\ \bar{d}_2 + \bar{s}_2 - \bar{s}_3 - \bar{r} = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación vectorial coincide con la del mecanismo anterior:

$$\begin{cases} s_1^2 = d_1^2 + r^2 + 2d_1 \cdot r \cdot \cos\varphi \\ \text{sen}\theta = \frac{r}{s_1} \cdot \text{sen}\varphi \\ \cos\theta = \frac{d_1 + r \cdot \cos\varphi}{s_1} \end{cases}$$

Las ecuaciones de cierre escalares correspondientes al segundo lazo son:

$$\begin{cases} d_2 - s_3 \cdot \cos\theta - r \cdot \cos\varphi = 0. \\ s_2 - s_3 \cdot \text{sen}\theta - r \cdot \text{sen}\varphi = 0. \end{cases}$$

$$s_3 = s_1 \cdot \frac{d_2 - r \cos\varphi}{d_1 + r \cos\varphi} ; s_2 = \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 + r \cos\varphi} \right) \cdot r \text{sen}\varphi$$

Podemos reescribir el sistema como:

$$\begin{cases} f_1 = d_1 + r \cdot \cos \varphi - s_1 \cdot \cos \theta = 0 \\ f_2 = r \cdot \sin \varphi - s_1 \cdot \sin \theta = 0 \\ f_3 = d_2 - s_3 \cdot \cos \theta - r \cdot \cos \varphi = 0 \\ f_4 = s_2 - s_3 \cdot \sin \theta - r \cdot \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

donde, por tautó :

$$J_S = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{ds_1} & \frac{df_1}{ds_2} & \frac{df_1}{ds_3} & \frac{df_1}{ds_4} \\ \frac{df_2}{ds_1} & \frac{df_2}{ds_2} & \frac{df_2}{ds_3} & \frac{df_2}{ds_4} \\ \frac{df_3}{ds_1} & \frac{df_3}{ds_2} & \frac{df_3}{ds_3} & \frac{df_3}{ds_4} \\ \frac{df_4}{ds_1} & \frac{df_4}{ds_2} & \frac{df_4}{ds_3} & \frac{df_4}{ds_4} \end{bmatrix}$$

2. **Cálculo de velocidades:** se obtienen derivando respecto del tiempo las expresiones explícitas de posición.

En notación compacta:

$$J_S \cdot \dot{s} + J_E \cdot \dot{\varphi} = 0 \quad \text{donde}$$

$$J_E = \left\{ \frac{df}{d\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{d\varphi} & \frac{df_2}{d\varphi} & \frac{df_3}{d\varphi} & \frac{df_4}{d\varphi} \end{bmatrix}^t \right.$$

3. **Cálculo de aceleraciones:** basta con derivarlas nuevamente respecto al tiempo.

Procedimiento general para mecanismos con 1gdl

sea φ la coordenada generalizada y $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ el vector de coordenadas secundarias:

1. **Problema de posición:** las ecuaciones de cierre correspondientes a un conjunto de lazos independientes dan lugar a:

$$\begin{cases} f_1(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi) = 0 \\ f_2(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi) = 0 \\ (\dots) \\ f_n(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi) = 0 \end{cases}$$

si hubiese alguna restricción adicional en el mecanismo habría que incluir su correspondiente expresión analítica en el sistema.

Resolvemos el sistema a través de Newton-Raphson.

Disponemos de la expresión analítica de los términos de la matriz jacobiana y de los valores numéricos del vector de incógnitas s .

2. **Cálculo de velocidades:** hay que derivar las ecuaciones de posición respecto al tiempo, obteniendo:

$$J_s \dot{s} = -J_E \dot{\varphi} \Rightarrow J_s g_s(\varphi) = -J_E \quad \text{donde } g_s(\varphi) \text{ es el vector de coeficientes de influencia de velocidad.}$$

3. **Cálculo de aceleraciones:**

$$\dot{s} = g_s \cdot \dot{\varphi}$$

$$\ddot{s} = g_s \cdot \ddot{\varphi} + \frac{dg_s}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}^2 = g_s \cdot \ddot{\varphi} + h_s \cdot \dot{\varphi}^2$$

si g_s se ha obtenido numéricamente:

$$\frac{dJ_s}{dt} \dot{s} + J_s \ddot{s} = -J_E \ddot{\varphi} - \frac{dJ_E}{dt} \dot{\varphi}$$

$$J_s \ddot{s} = - \left(\frac{dJ_s}{d\varphi} \cdot g_s + \frac{dJ_E}{d\varphi} \right) \dot{\varphi}^2 - J_E \ddot{\varphi} \Rightarrow J_s \cdot h_s = - \left(\frac{dJ_s}{d\varphi} \cdot g_s + \frac{dJ_E}{d\varphi} \right)$$

Procedimiento general para mecanismos multi-lazo con varios gdl

Sea $\bar{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_F]$ el vector de coordenadas generalizadas y $\bar{s} = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]$ el vector de coordenadas secundarias. Si el mecanismo no es redundante, el número de variables de entrada será igual al número de variables de salida. Por lo que el sistema tendrá F variables de entrada, F variables de salida y $(n-F)$ variables pasivas.

1. **Problema de posición:** a partir de un conjunto completo de lazos independientes se obtiene:

$$\begin{cases} f_1(s_1, s_2, \dots, s_n; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_F) = 0 \\ f_2(s_1, s_2, \dots, s_n; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_F) = 0 \\ \vdots \\ f_n(s_1, s_2, \dots, s_n; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_F) = 0 \end{cases}$$

una vez especificados los valores de las vbles. de entrada, el sistema se convierte en un sistema no lineal con n ecuaciones y n incógnitas.

2. **Cálculo de velocidades:** una vez resuelto el problema de posición:

$$\begin{bmatrix} \frac{df_1}{ds_1} & \dots & \frac{df_1}{ds_n} & \frac{df_1}{d\varphi_1} & \dots & \frac{df_1}{d\varphi_F} \\ \frac{df_2}{ds_1} & & \frac{df_2}{ds_n} & \frac{df_2}{d\varphi_1} & & \frac{df_2}{d\varphi_F} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{df_n}{ds_1} & & \frac{df_n}{ds_n} & \frac{df_n}{d\varphi_1} & & \frac{df_n}{d\varphi_F} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \\ \dot{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_n \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Que se puede expresar como:

$$J_S \cdot \dot{s} = -J_E \cdot \dot{\varphi}$$

$$J_S = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{ds_1} & \dots & \frac{df_1}{ds_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{df_n}{ds_1} & & \frac{df_n}{ds_n} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad J_E = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{d\varphi_1} & \dots & \frac{df_1}{d\varphi_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{df_n}{d\varphi_1} & & \frac{df_n}{d\varphi_k} \end{bmatrix}$$

3. **cálculo de aceleraciones**: una vez calculadas las velocidades, las ecuaciones de aceleración se obtienen derivando las ecuaciones de velocidad.

$$J_S \cdot \ddot{s} = - \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial J_E}{\partial s_j} \cdot \dot{s}_j + \sum_{i=1}^F \frac{\partial J_E}{\partial \varphi_i} \dot{\varphi}_i \right] \vec{\varphi} - \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial J_S}{\partial s_j} \cdot \dot{s}_j + \sum_{i=1}^F \frac{\partial J_S}{\partial \varphi_i} \dot{\varphi}_i \right] \vec{s} - J_E \cdot \ddot{\varphi}$$

4. **Análisis de singularidades**:

a) Incremento de la movilidad

$$G = n + F - \text{rango}(J)$$

Si las n ecuaciones son independientes $G = F$. Es posible que a lo largo del movimiento el rango de J disminuya y por tanto, se incrementen instantáneamente los gdl del mecanismo. Se dice que es una **singularidad de incremento de movilidad**.

b) singularidad en el problema directo: afecta localmente a su movilidad.

siendo $J_S \cdot \dot{s} = -J_E \cdot \dot{\varphi}$, el problema alcanza una singularidad de este tipo cuando $|J_S| = 0$. (En los mecanismos de fgdI significaba una posición de bloqueo).

c) singularidad en el problema inverso: ocurre cuando $|J_E| = 0$, en esta posición el mecanismo puede tener una salida \dot{s} nula, que sin embargo permite una entrada $\dot{\varphi}$ no nula.

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Characteristic Equation - The characteristic equation of the system is given by $\det(A - \lambda I) = 0$, where A is the coefficient matrix and I is the identity matrix.

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Eigenvalues and Eigenvectors

The eigenvalues λ are the roots of the characteristic equation.

For each eigenvalue λ , the corresponding eigenvector \mathbf{v} is found by solving $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

The general solution of the system is given by $\mathbf{y}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \mathbf{v}_2$, where c_1 and c_2 are constants determined by initial conditions.

Stability Analysis - The stability of the equilibrium point $(0,0)$ depends on the real parts of the eigenvalues. If both eigenvalues have negative real parts, the origin is a stable node. If one eigenvalue has a positive real part and the other has a negative real part, the origin is a saddle point. If both eigenvalues have positive real parts, the origin is an unstable node.

Síntesis dimensional

Una vez determinado el mecanismo concreto a utilizar, se inicia la etapa de síntesis dimensional, cuyo objeto es la determinación de las dimensiones significativas del mecanismo para que realice una tarea previamente especificada. Son **dimensiones significativas** las que definen el comportamiento cinemático del mecanismo.

Tipos de síntesis dimensional

1) Generación de función: Tiene por objeto la obtención de mecanismos que satisfagan una relación funcional prescrita que coordine las características cinemáticas del movimiento entre las barras de entrada y de salida.

La diferencia entre la función generada y la prescrita recibe el nombre de error estructural ($E = \gamma_g - \gamma$).

Frecuentemente las variables de entrada y salida son angulares. Las posiciones angulares correspondientes a los puntos de precisión son:

$$\begin{cases} \varphi_j = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} (x_j - x_0) + \varphi_0 \\ \psi_j = \frac{\Delta\psi}{\Delta y} (y_j - y_0) + \psi_0 \end{cases}$$

2) Generación de trayectorias: Consiste en que un punto de un elemento flotante del mecanismo trace una trayectoria previamente especificada. Si la trayectoria está definida mediante puntos de precisión a los que se les hace corresponder con una serie de posiciones del elemento de entrada, se le denominará **generación de trayectorias con restricción del elemento de entrada**.

3) Guiado del sólido rígido: su objetivo es que un elemento flotante de un mecanismo se sitúe según una secuencia de posiciones preestablecida. En este caso también existe la posibilidad de **guiado de sólido rígido con restricción del elemento de entrada**.

SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE FUNCIONES.

La relación funcional puede expresarse de la siguiente manera:

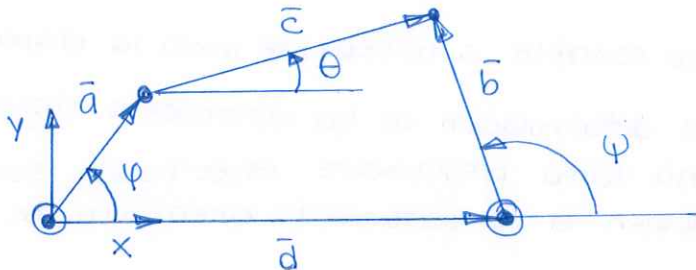
$$f(a_1, a_2, \dots, a_n, \varphi, \psi) = 0.$$

Donde (φ, ψ) son las variables de entrada y salida respectivamente y (a_1, a_2, \dots, a_n) son los parámetros dimensionales.

En principio, el mecanismo puede coordinar hasta n puntos de precisión (ψ_i, φ_i) para sus variables de entrada y salida. Se obtienen n ecuaciones con n incógnitas, las variables a_1, a_2, \dots, a_n que definen las dimensiones del mecanismo.

Relación funcional entrada-salida para un cuadrilátero articulado: Ecuación de Freudenstein.

Esta ecuación relaciona los elementos de entrada y salida de un cuadrilátero articulado.



La ecuación vectorial de cierre es

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \quad \begin{cases} a \cdot \cos \varphi + c \cdot \cos \theta = +b \cdot \cos \varphi + d \\ a \cdot \sin \varphi + c \cdot \sin \theta = b \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Eliminando θ de ambas ecuaciones

$$c^2 = d^2 + b^2 + a^2 - 2ab \cos(\varphi - \varphi) - 2ad \cos \varphi + 2db \cdot \cos \varphi$$

Dividiendo entre $2ab$ queda

$$\frac{d}{a} \cdot \cos \varphi - \frac{d}{b} \cos \varphi + (d^2 + b^2 + a^2 - c^2) \cdot \frac{1}{2ab} = \cos(\varphi - \varphi)$$

Esta es la ecuación de Freudenstein, que se puede expresar como:

$$K_1 \cdot \cos \varphi - K_2 \cdot \cos \varphi + K_3 = \cos(\varphi - \varphi)$$

$$\text{con } \begin{cases} K_1 = \frac{d}{a} \\ K_2 = \frac{d}{b} \\ K_3 = \frac{d^2 + b^2 + a^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Síntesis de generación de funciones con tres puntos de precisión

se trata de obtener la longitud de los lados a, b, c y d para tres posiciones dadas: $P_1(\psi_1, \varphi_1), P_2(\psi_2, \varphi_2), P_3(\psi_3, \varphi_3)$. Sustituyendo en la ecuación de Freudenstein:

$$\begin{cases} K_1 \cdot \cos \psi_1 - K_2 \cdot \cos \varphi_1 + K_3 = \cos(\psi_1 - \varphi_1) \\ K_1 \cdot \cos \psi_2 - K_2 \cdot \cos \varphi_2 + K_3 = \cos(\psi_2 - \varphi_2) \\ K_1 \cdot \cos \psi_3 - K_2 \cdot \cos \varphi_3 + K_3 = \cos(\psi_3 - \varphi_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & -\cos \varphi_1 & 1 \\ \cos \psi_2 & -\cos \varphi_2 & 1 \\ \cos \psi_3 & -\cos \varphi_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\psi_1 - \varphi_1) \\ \cos(\psi_2 - \varphi_2) \\ \cos(\psi_3 - \varphi_3) \end{Bmatrix}$$

El sistema puede ser resuelto obteniéndose los valores de K_i . A partir de estos valores, obtenemos un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas (a, b, c, d). Eligiendo un valor para una de ellas, las otras 3 quedan determinadas.

El procedimiento garantiza que el mecanismo pueda ser ensamblado en las posiciones de diseño. Sin embargo, puede ocurrir que dichas posiciones

pertenezcan a distintas configuraciones. Si el cuadrilátero cumple el criterio de Grashof, no se puede pasar de una posición a otra sin desmontar el mecanismo.

Generalización para m puntos de posición

En este caso, la relación funcional entrada-salida puede expresarse en función de m parámetros de diseño k_i , según la siguiente ecuación:

$$k_1 f_1(\varphi, \psi) + k_2 f_2(\varphi, \psi) + \dots + k_m f_m(\varphi, \psi) = g(\varphi, \psi)$$

ó

$$\sum_{i=1}^m k_i f_i(\varphi, \psi) = g(\varphi, \psi)$$

Dado que hay m parámetros de diseño, puede realizarse una síntesis de generación de función de m parejas de puntos $P_i(\varphi_i, \psi_i)$.

Selección de los puntos de precisión

En principio la función deseada y la generada sólo coinciden en los puntos de precisión. Se trata de seleccionar los n puntos de precisión x_i dentro del rango Δx , de manera que el error estructural sea minimizado. Se consigue con "el espaciado óptimo de Chebyshev":

$$x_i = \frac{1}{2}(x_0 + x_{n+1}) - \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_0) \cdot \cos \frac{\pi(2i-1)}{n}; \quad i=1, 2, \dots, n.$$

siendo (x_0, x_{n+1}) los extremos del rango $\Delta x = x_{n+1} - x_0$ donde se encuentran los n puntos de precisión. x_i .

Aumento del número de los puntos de precisión

El número de puntos de precisión puede aumentarse introduciendo en la ecuación de Freudenstein nuevos parámetros de diseño que hagan el papel de incógnitas. Al aumentar el número de parámetros en la ecuación, esta deja de ser lineal.

SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

Generación de tramos casi-rectilíneos.

1) **Cúbica de curvatura estacionaria (c.c.e)**: El conocimiento del radio de curvatura permite obtener la circunferencia osculadora de la trayectoria del punto considerado. Se estudió cómo una curva y su circunferencia osculadora tenían un contacto de segundo orden, lo cual supone tres puntos de contacto infinitamente próximos. La búsqueda de un contacto de orden superior entre la trayectoria de un punto y su circunferencia osculadora conduce hacia aquellos puntos de la trayectoria en los que su radio de curvatura es estacionario para una posición dada. El lugar geométrico de los puntos del plano móvil que cumplen esta propiedad es la c.c.e.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{A \cos \theta} + \frac{1}{B \sin \theta}$$

donde A y B son dos parámetros que dependen de la geometría del movimiento.

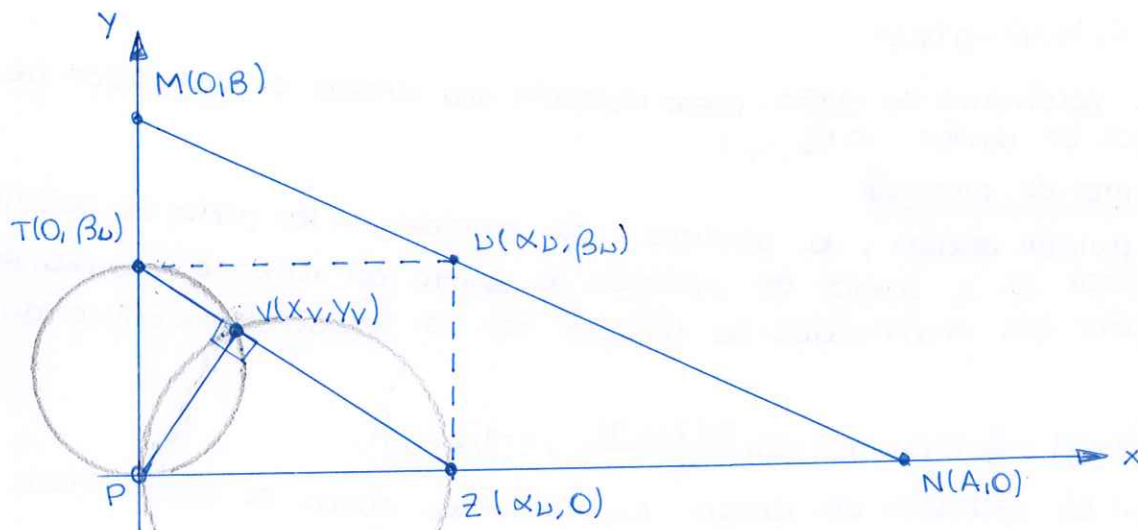
En coordenadas cartesianas:

$$(x^2 + y^2) \left(\frac{1}{Ax} + \frac{1}{By} \right) = 1$$

utilizando las coordenadas paramétricas α y β :

$$\alpha = \frac{x^2 + y^2}{x} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{x^2 + y^2}{y} \Rightarrow \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} = 1$$

A partir de la cúbica en coordenadas paramétricas, se va a describir un **procedimiento gráfico para obtener puntos de la cúbica**.



1. Se toma un punto $U(\alpha_u, \beta_u)$ cualquiera de la recta MN.

2. Se traza la recta \overline{PT}

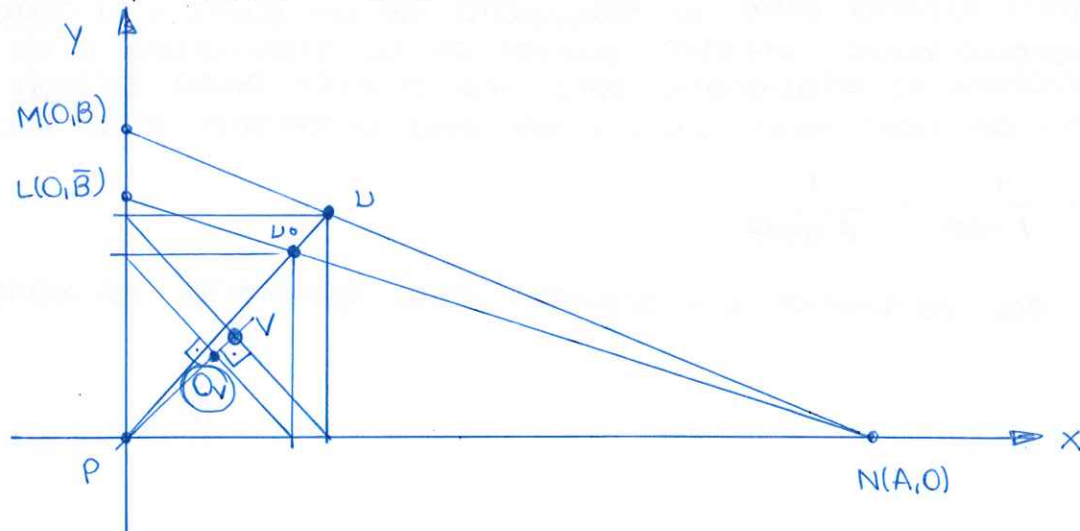
3. En la intersección con la recta \perp a la misma que pasa por el pto P se encontrará el punto $V(x_v, y_v)$ de la cúbica.

2) **Cúbica de centros de curvatura estacionarios (c.c.c.e)**: Los centros de curvatura de aquellos puntos que poseen curvatura estacionaria constituyen un lugar geométrico estacionario.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{A \cos \theta} + \frac{1}{B \sin \theta} = \frac{1}{\delta^* \sin \theta}$$

siendo $\bar{G} = \theta + \pi$ y $\frac{1}{B} = \frac{1}{B} - \frac{1}{\delta^*}$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{A \cos \theta} + \frac{1}{B \sin \theta}$$



3) Propiedades de las cúbicas: Ambas cúbicas poseen las mismas propiedades.

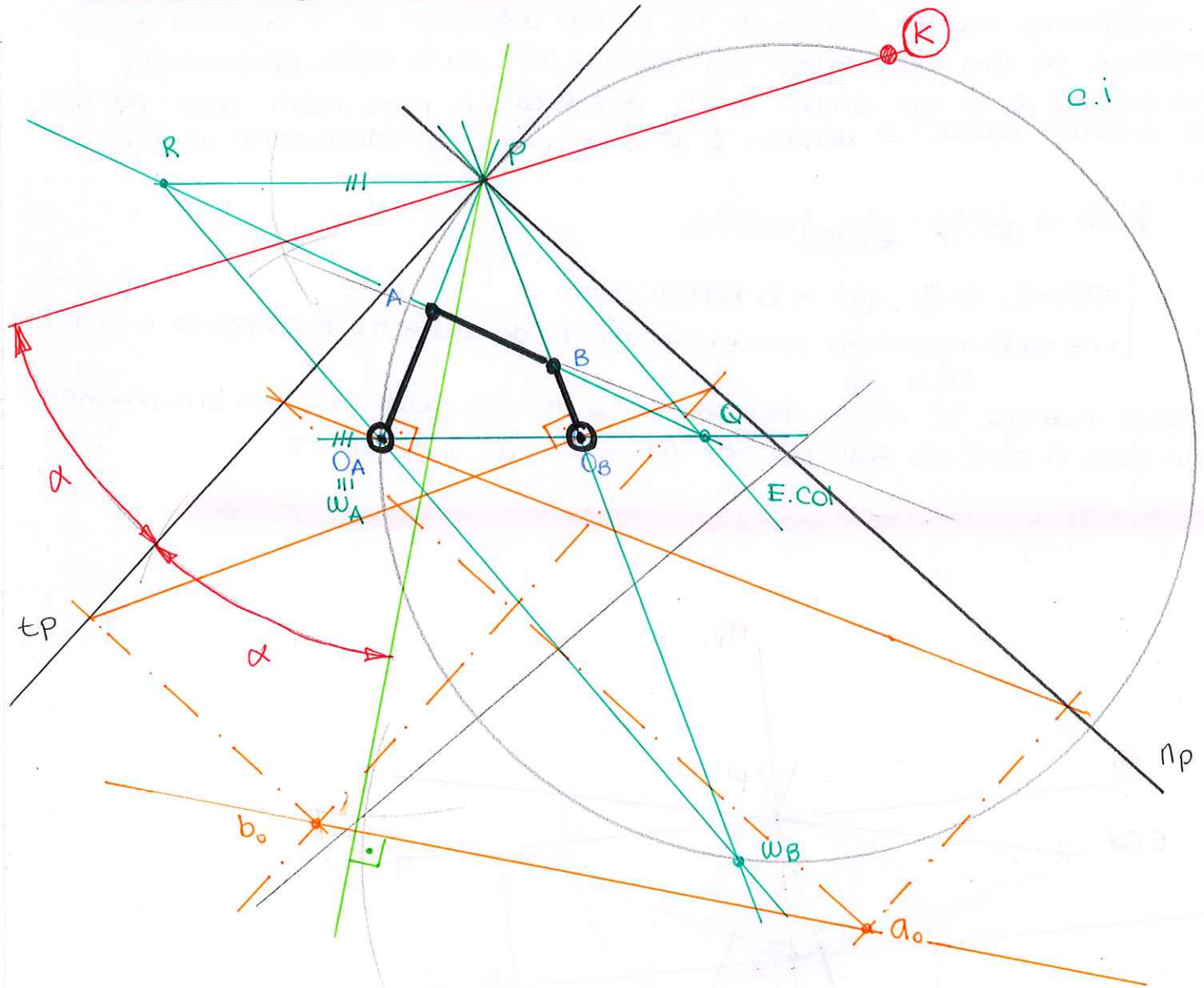
1. Poseen un punto doble en el polo P cuyas tangentes son precisamente los ejes coordenados.

2. Cada cúbica posee una asíntota.

$$\text{si } r \rightarrow \infty \Rightarrow 0 = \frac{1}{A \cdot \cos \theta} + \frac{1}{B \cdot \sin \theta} \Rightarrow \text{tg} \theta = -\frac{A}{B}$$

4) **El punto de Ball**: es el punto cuya curvatura no sólo es estacionaria sino que también es nula. Está situado en la intersección de la c.c.e con la circunferencia de las inflexiones.

Procedimiento gráfico para la obtención del punto de Ball.



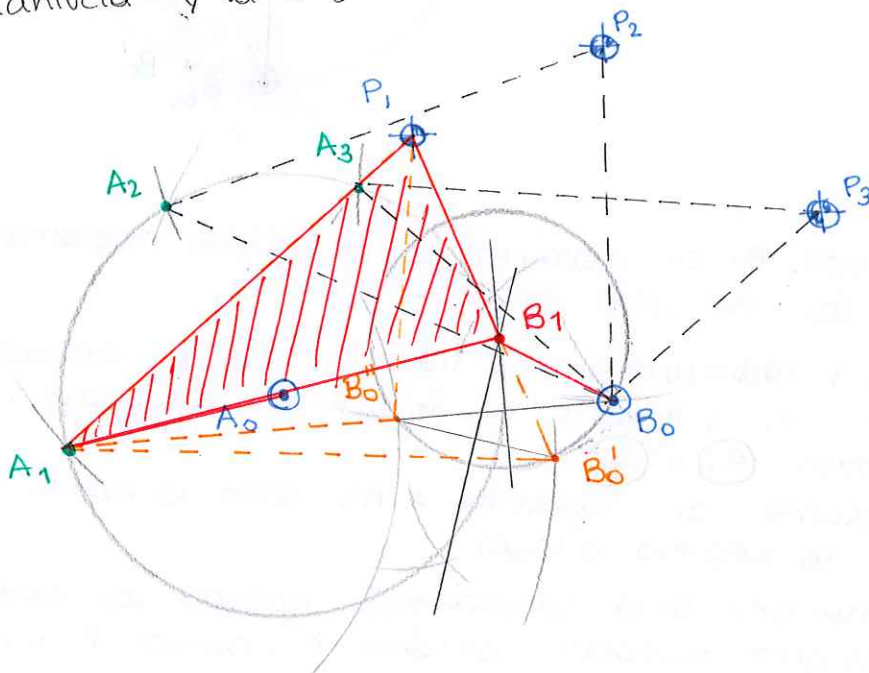
1. Las articulaciones móviles A y E son puntos de la c.c.e y sus correspondientes centros de curvatura O_A, O_B son puntos de la c.c.e
2. A partir de esa pareja de puntos conjugados se obtiene la **c.i.**
3. A partir de O_A y O_B se obtienen dos puntos a_0 y b_0 de la recta en coordenadas paramétricas cuya pendiente es $-\frac{B}{A}$.

1. Se construye un cuadrilátero $O_R R S O_S$ cualquiera, de forma que su acoplador \overline{RS} sea paralelo al elemento fijo $\overline{O_R O_S}$
2. A partir de R, S, O_R y O_S se obtiene el polo (P) .
3. Por P se traza una paralela a \overline{RS} obteniéndose el E.Col.
4. Aplicando el teorema de Bobillier se obtienen la (t_p) y (n_p) .
5. Las circunferencias PRS y $PO_R O_S$ son tangentes en el polo a la tangente polar.
6. Las intersecciones de la normal polar con las dos circunferencias serán, respectivamente (Z) y (O_Z)
7. Con R, S, t_p y n_p se hace la construcción correspondiente al cálculo de los parámetros A y B de la cúbica. Se observa que las normales \overline{PR} y \overline{PS} pasan por Z . Luego \overline{RS} será paralelo a t_p , lo que implica que $A = \infty$, es decir, se encuentra en posición cicloidal. Además $\overline{PZ} = B$.
8. Con O_R, O_S, t_p y n_p se hace la misma construcción obteniendo $A = \infty$ y $\overline{PO_Z} = B$.

Métodos gráficos para la generación de trayectorias con puntos de precisión.

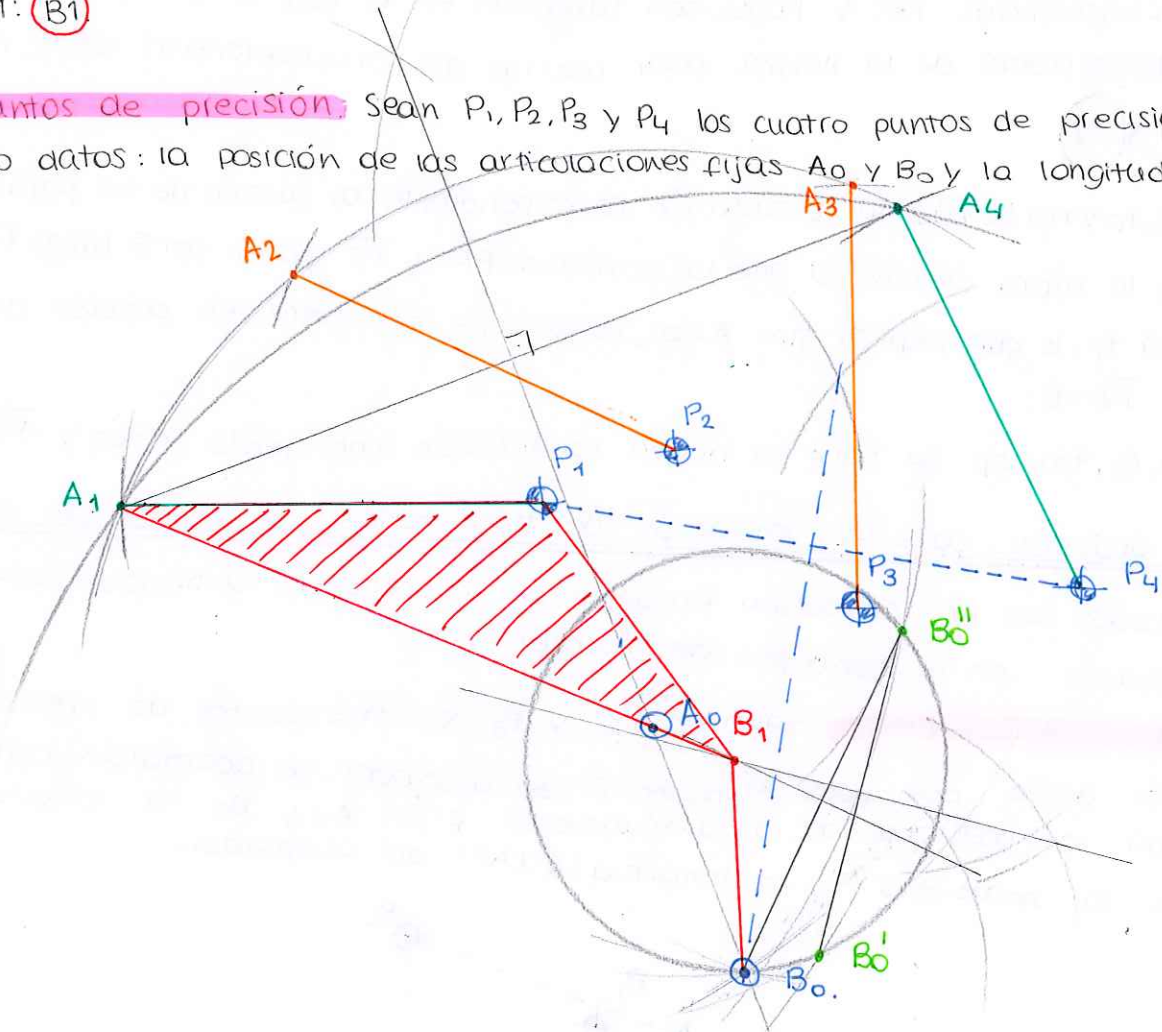
Los métodos son de aplicación exclusiva al cuadrilátero articulado. Todos ellos están basados en el concepto de inversión.

- 1) **Tres puntos de precisión:** sean P_1, P_2 y P_3 los tres puntos de precisión por los que se desea que pase el punto P del acoplador. Se adoptarán como datos de partida las posiciones de las articulaciones fijas A_0 y B_0 , la longitud a ($A_0 A$) de la manivela y la longitud e (AP) del acoplador.



1. Con centro en A_0 se traza una circunferencia de radio a .
2. Con centro en P_1, P_2 y P_3 se trazan tres arcos de circunferencia que se cortan con la anterior circunferencia en los puntos A_1, A_2 y A_3 .
3. Se construyen los triángulos $A_1P_1B_0'$ y $A_1P_1B_0''$ iguales a los triángulos $A_2P_2B_0$ y $A_3P_3B_0$, obteniendo los puntos B_0' y B_0'' .
4. El centro de la circunferencia $B_0B_0'B_0''$ es la articulación móvil B en la posición 1: B_1 .

2) **Cuatro puntos de precisión:** Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 los cuatro puntos de precisión. Se eligen como datos: la posición de las articulaciones fijas A_0 y B_0 y la longitud e del acoplador.



1. Se posiciona el punto B_0 en cualquiera de las posibles mediatrices a los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 . (En este caso P_1 y P_4)
2. Con centro en B_0 y radio arbitrario se traza un arco de circunferencia
3. Con centro en P_1 y P_4 y radio e , se trazan dos arcos que cortan al anterior en los puntos A_1 y A_4 .
4. Se traza la mediatriz al segmento A_1A_4 . Sobre la misma se coloca A_0 , quedando definida la longitud a (A_0A_1).
5. Mediante la intersección de la circunferencia trazada con centro en A_0 y radio a (A_0A_1) y los arcos trazados con radio e y centros P_2 y P_3 , se determinan las posiciones A_2 y A_3 .

6. Se construyen los triángulos $A_1P_1B_0'$ y $A_1P_1B_0''$ iguales a $A_2P_2B_0$ y $A_3P_3B_0$ obteniendo así los puntos B_0' y B_0'' .

7. El centro de la circunferencia que pasa por B_0, B_0' y B_0'' es el punto B_1 correspondiente a la posición de la articulación móvil B en la posición 1.

3) Cinco puntos de precisión: En este caso sería necesario reducir dos posiciones.

Errores de orden y de rama.

Los errores de orden y rama aparecen en todos los tipos de síntesis.

El error de orden se comete cuando la solución alcanzada incumple la secuencia ordenada de puntos de precisión impuesta por la síntesis.

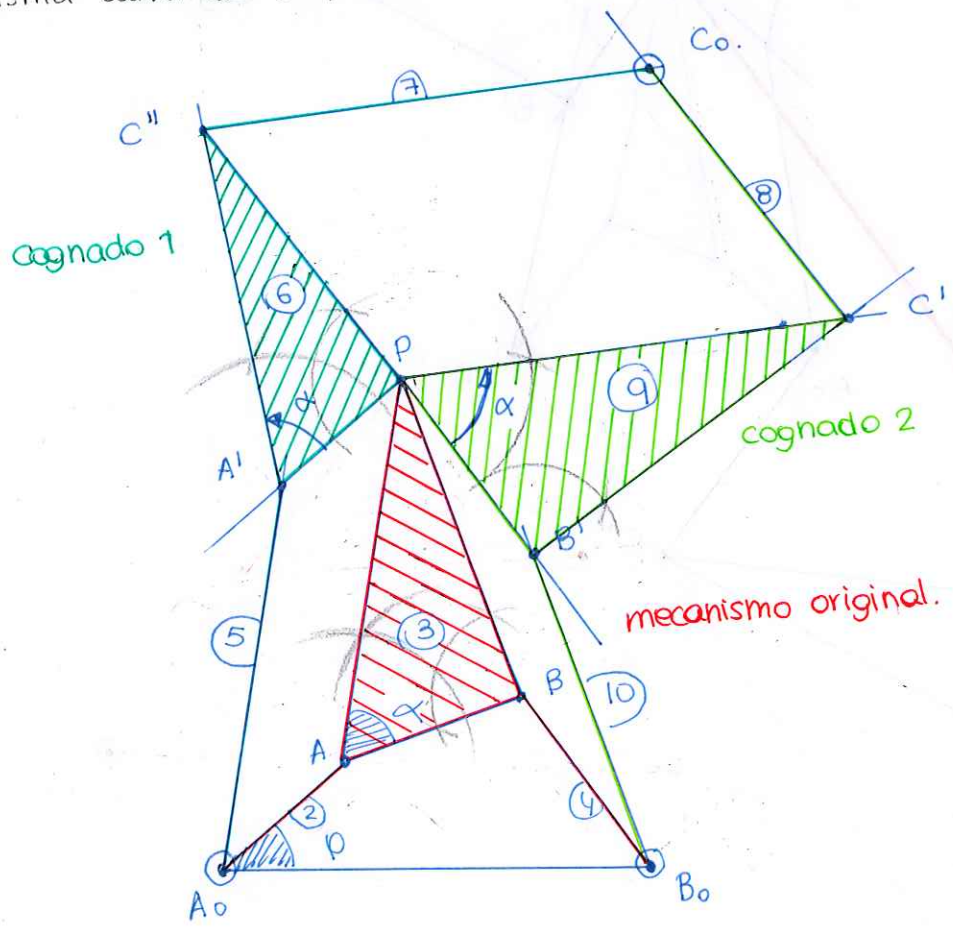
El error de rama se comete cuando la trayectoria de la solución alcanzada está compuesta por más de un circuito, y los puntos de precisión se encuentran repartidos entre dichos circuitos.

Mecanismos cognados, teorema de Roberts-Chebyshev.

Se conocen como **mecanismos cognados o emparentados** a aquellos que realizan la misma función.

Los mecanismos cognados constituyen interesantes alternativas de diseño capaces de sustituir al mecanismo original.

Teorema de Roberts-Chebyshev: "existen tres cuadriláteros articulados diferentes que trazan la misma curva de acoplador".



1. Las barras A_1P y A_0A' son iguales y paralelas a las barras A_0A y AP , respectivamente.
2. Las barras B_1P y B_0B' son iguales y paralelas a B_0B y BP , respectivamente.
3. El triángulo $PA'C''$ es semejante al BAP .
4. El triángulo $PB'C''$ es semejante al BAP .
5. Las barras C_1C_0 y C_0C'' son iguales y paralelas a Pc'' y $C''P$, respectivamente.

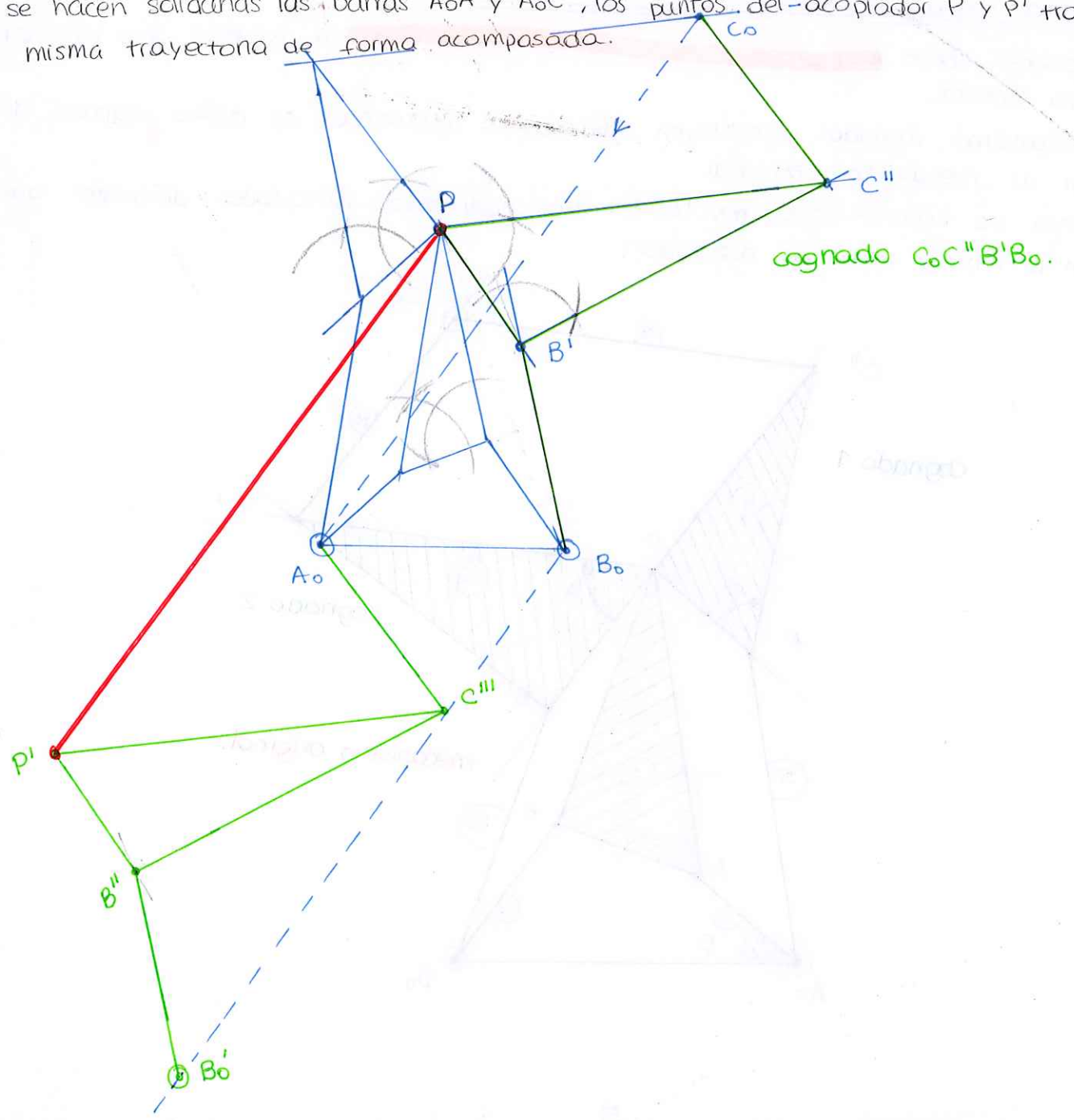
La articulación añadida C_0 es una restricción redundante.

SÍNTESIS DE GUIADO DE SÓLIDO RÍGIDO.

El objetivo es el posicionamiento del plano acoplador.

Generación de un elemento con movimiento de traslación.

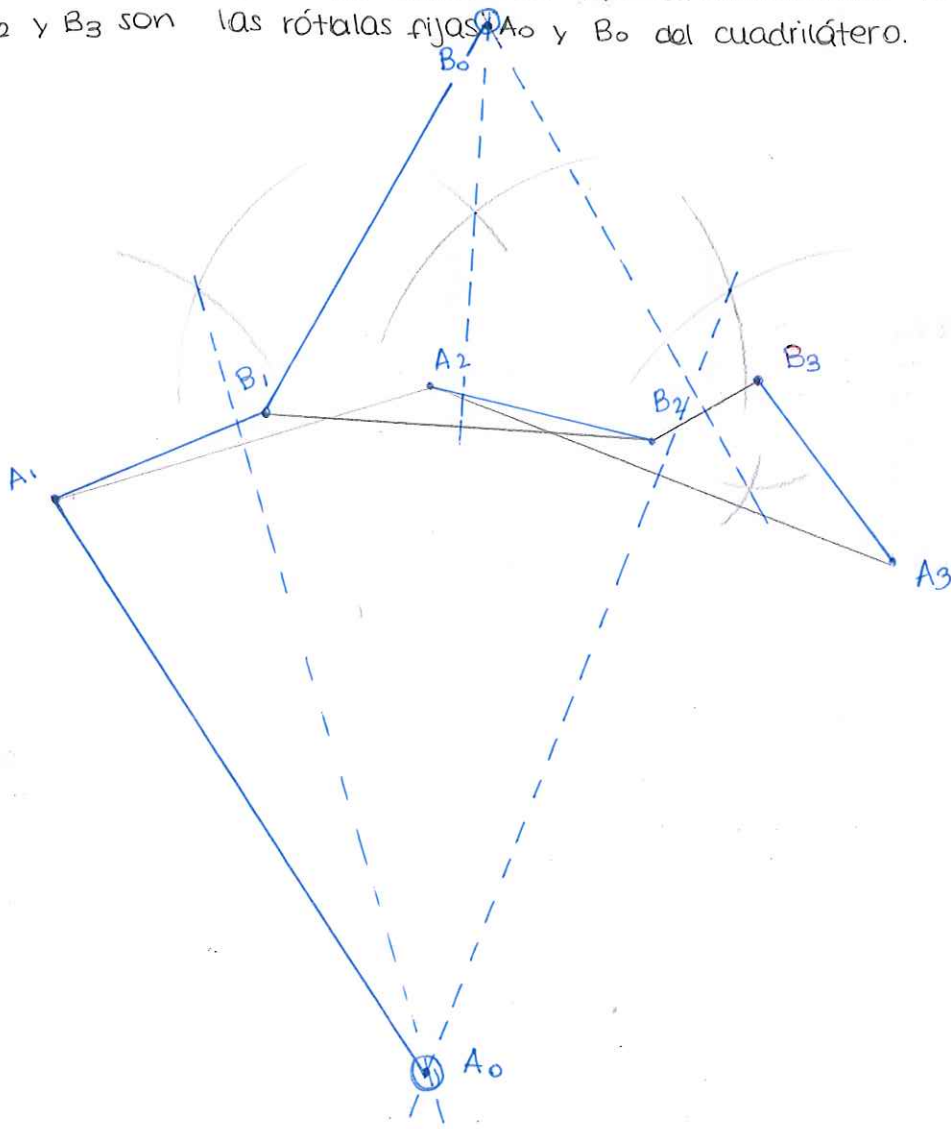
A partir de la construcción de mecanismos cognados puede conseguirse un mecanismo que tenga una barra con movimiento de traslación. Para ello se traslada el cognado $C_0C''B'B_0$ hasta hacer coincidir C_0 con A_0 , resultando el cuadrilátero $A_0C'''B''B'_0$. Si se hacen solidarias las barras A_0A y A_0C''' , los puntos del acoplador P y P' trazarán la misma trayectoria de forma acompasada.



Métodos gráficos

1. Construcción.

Se trata de obtener un cuadrilátero articulado A_0ABB_0 , que sitúe las articulaciones móviles de su acoplador en las siguientes posiciones A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 . La solución a este problema es directa ya que por 3 puntos puede trazarse siempre una determinada circunferencia. Por tanto los centros de las circunferencias que pasan por A_1 , A_2 y A_3 y B_1 , B_2 y B_3 son las rótulas fijas A_0 y B_0 del cuadrilátero.



si las articulaciones móviles no están previamente especificadas, sino unos segmentos cualesquiera del plano acoplador, existen infinitos mecanismos que permiten situar el acoplador en dichas posiciones.

Handwritten title or section header.

Handwritten text in the upper section of the page, possibly describing the diagram.



Handwritten text in the lower section of the page, possibly providing a conclusion or further details.

Cinemática de mecanismos espaciales

Un sólido libre en el espacio tiene 6 gdl; 3 de traslación y 3 de rotación.

Un sólido con movimiento esférico posee, en cambio 3 gdl de rotación, el mecanismo esférico más conocido es la junta universal.

Un **robot** está constituido por un conjunto de elementos conectados en serie mediante pares cinemáticos; pares de clase I, de rotación y prismáticos.

Los **mecanismos paralelos** son mecanismos de cadena cerrada con varios gdl y se conectan en paralelo con un elemento flotante.

POSICIONES, ORIENTACIONES Y OBJETOS.

1) Definición de una posición. Un punto en el espacio posee 3 gdl; la posición de un punto quedará definida mediante un vector de tres componentes que son sus coordenadas referidas al sistema de coordenadas.

2) Definición de una orientación. Una orientación en el espacio viene definida por 3 gdl. Para describir la orientación de un cuerpo respecto de un determinado SR, se sitúa solidariamente al cuerpo un sistema de coordenadas y se define la orientación espacial de este último respecto al primero.

La forma más clara para describir la orientación de un sistema de coordenadas es expresar sus vectores unitarios en función de la base canónica del sistema de coordenadas. Esto da lugar a tres ternas de componentes que dispuestas en columnas como términos de una matriz, constituyen la **matriz de rotación**.

3) Definición de un objeto: el conjunto formado por la posición del origen más la orientación del sistema de coordenadas es lo que define el concepto sistema de referencia. Un sistema de referencia contiene los elementos necesarios para describir la posición y la orientación de un objeto respecto de un sistema de coordenadas.

REPRESENTACIÓN DE LA ORIENTACIÓN.

1) Matriz de rotación

Considérense los sistemas de referencia 1 y 2: $(OXYZ)_1$ y $(OUVW)_2$, coincidentes en la situación de partida. Considérense, también, un objeto solidario al sistema de referencia 2. El sistema 2 sufre un cambio en su orientación como consecuencia de una rotación. En esta situación considérese un punto cualquiera P del sólido cuya posición viene definida por un vector \vec{r} :

$$\vec{r} = r_x \bar{i}_x + r_y \bar{j}_y + r_z \bar{k}_z = {}^1\vec{r}$$

$$\vec{r} = r_u \bar{u} + r_v \bar{v} + r_w \bar{w} = {}^2\vec{r}$$

Donde ${}^1\vec{r}$ y ${}^2\vec{r}$ representan el mismo punto P.

Se trata de conocer la expresión de este punto P referida al sistema 1, cuando se conoce la orientación del sistema 2 ($\bar{T}_u, \bar{J}_v, \bar{K}_w$) respecto del sistema 1 ($\bar{i}_x, \bar{j}_y, \bar{k}_z$).

Las componentes de \bar{r} según el sistema de referencia 1 son las proyecciones

$$r_x = \bar{i}_x \cdot \bar{r}; r_y = \bar{j}_y \cdot \bar{r}; r_z = \bar{k}_z \cdot \bar{r}.$$

$$\begin{cases} r_x = \bar{T}_x \cdot \bar{T}_u \cdot r_u + \bar{T}_x \cdot \bar{J}_v \cdot r_v + \bar{T}_x \cdot \bar{K}_w \cdot r_w \\ r_y = \bar{J}_y \cdot \bar{T}_u \cdot r_u + \bar{J}_y \cdot \bar{J}_v \cdot r_v + \bar{J}_y \cdot \bar{K}_w \cdot r_w \\ r_z = \bar{K}_z \cdot \bar{T}_u \cdot r_u + \bar{K}_z \cdot \bar{J}_v \cdot r_v + \bar{K}_z \cdot \bar{K}_w \cdot r_w \end{cases}$$

de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_x \cdot \bar{T}_u & \bar{T}_x \cdot \bar{J}_v & \bar{T}_x \cdot \bar{K}_w \\ \bar{J}_y \cdot \bar{T}_u & \bar{J}_y \cdot \bar{J}_v & \bar{J}_y \cdot \bar{K}_w \\ \bar{K}_z \cdot \bar{T}_u & \bar{K}_z \cdot \bar{J}_v & \bar{K}_z \cdot \bar{K}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{bmatrix}$$

En función de los cosenos directores:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(U,x) & c(V,x) & c(W,x) \\ c(U,y) & c(V,y) & c(W,y) \\ c(U,z) & c(V,z) & c(W,z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{bmatrix}$$

$${}^1_2R = \begin{bmatrix} c(U,x) & c(V,x) & c(W,x) \\ c(U,y) & c(V,y) & c(W,y) \\ c(U,z) & c(V,z) & c(W,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}$$

Donde 1_2R es la forma compacta de expresar la matriz de rotación.

Hay tres posibles aplicaciones de la matriz:

1. Representar la orientación de un sistema de coordenadas respecto de otro.
2. Definir la transformación o cambio de coordenadas entre dos sistemas.
3. Girar un vector de posición ${}^1\vec{r}$ mediante la transformación ${}^1\vec{r}' = [R] \cdot {}^1\vec{r}$.

Para la obtención de la relación inversa el planteamiento es análogo y resulta que siendo ${}^1\vec{r} = {}^1_2R \cdot {}^2\vec{r}$; ${}^2\vec{r} = {}^1_2R^T \cdot {}^1\vec{r}$ luego ${}^1_2R^{-1} = {}^1_2R^T$, es decir, la matriz de rotación es una matriz ortonormal.

La matriz de rotación de un ángulo α alrededor del eje OX, $R_{\alpha,x}$:

$$R_{\alpha,x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

De la misma forma obtenemos

$$R_{\varphi,y} = \begin{bmatrix} c\varphi & 0 & s\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\varphi & 0 & c\varphi \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad R_{\theta,z} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A dichas matrices se les denomina **matrices básicas de rotación.**

2) Composición de rotaciones básicas

$${}^1_2R = R(\alpha, \varphi, \theta, (x, y, z)) = R_{\theta,z} \cdot R_{\varphi,y} \cdot R_{\alpha,x}.$$

Dicha matriz se obtiene al girar un ángulo α alrededor del eje Ox , seguido de una rotación angular ψ alrededor del eje Oy y, finalmente, de un giro θ alrededor del eje Oz .

sea ${}^2\vec{r}$ el vector que define la posición de un punto P del cuerpo solidario al sistema 2. Después de la primera transformación, las coordenadas respecto del sistema 1 son: $R_{\alpha, x} \cdot {}^2\vec{r}$. considérese ahora un sistema de referencia auxiliar $(OUVW)_{2A}$ con igual orientación que el sistema 1, de forma que

$${}^{2A}\vec{r} = R_{\alpha, x} \cdot {}^2\vec{r}.$$

A continuación se le aplica la segunda transformación al sistema $2A$ de forma que las nuevas coordenadas de P respecto del sistema 1 serán $R_{\psi, y} {}^{2A}\vec{r}$ y considerando un sistema de referencia auxiliar $(OUVW)_{2B}$ orientado igual que 1

$${}^{2B}\vec{r} = R_{\psi, y} \cdot {}^{2A}\vec{r}$$

Realizando la tercera transformación nos queda

$${}^1\vec{r} = R_{\theta, z} \cdot {}^{2B}\vec{r}$$

luego

$${}^1\vec{r} = R_{\theta, z} \cdot R_{\psi, y} \cdot R_{\alpha, x} \cdot {}^2\vec{r} = R_{(\alpha, \psi, \theta)(x, y, z)} \cdot {}^2\vec{r} = {}^1_2R \cdot {}^2\vec{r}$$

Cuando las rotaciones se refieren al sistema de referencia móvil, hay que proceder de forma recurrente desde la situación final a la inicial.

$$\left. \begin{array}{l} {}^1B\vec{r} = R_{\theta, w} \cdot {}^2\vec{r} \\ {}^1A\vec{r} = R_{\psi, v} \cdot {}^1B\vec{r} \\ {}^1\vec{r} = R_{\alpha, u} \cdot {}^1A\vec{r} \end{array} \right\} {}^1\vec{r} = R_{\alpha, u} \cdot R_{\psi, v} \cdot R_{\theta, w} \cdot {}^2\vec{r}.$$

REPRESENTACIÓN DE UN OBJETO: MATRICES DE TRANSFORMACIÓN

1) Transformaciones entre sistemas de referencia con la misma orientación

considérese la posición de un punto genérico P de un objeto, definida por un vector ${}^2\vec{r}$ respecto de un sistema $(OUVW)_2$ solidario a dicho objeto. Se pretende expresar la posición del punto P respecto de un sistema $(OXYZ)_1$ con la misma orientación que el sistema 2. El sistema 2 difiere del sistema 1 exclusivamente en una traslación que se puede expresar por el vector ${}^1_2\vec{d}$:

$${}^1\vec{r} = {}^1_2\vec{d} + {}^2\vec{r}.$$

2) Transformaciones entre sistemas de referencia cualesquiera.

considérese el caso general de un sistema de referencia móvil $(OUVW)_2$ solidario al objeto, cuya posición y orientación es distinta que la del sistema de referencia fijo $(OXYZ)_1$. Sea ${}^1_2\vec{d}$ el vector que define la posición del origen del sistema 2 respecto del sistema 1 y 1_2R la matriz que define la orientación del sistema 2 respecto del 1. sean ${}^1\vec{r}$ y ${}^2\vec{r}$ los vectores que definen la posición P del objeto respecto de los sistemas 1 y 2 respectivamente.

El vector 1r puede expresarse en función de 2r

1. Inicialmente ambos sistemas de coordenadas son coincidentes.

2. A continuación se realiza un cambio de orientación del sistema 2, a un sistema de referencia auxiliar $(ouvw)_A$ con la misma orientación que 2, pero cuyo origen de coordenadas coincide con O_1 . Las coordenadas del punto P del objeto, respecto del sistema fijo 1 son, ahora: ${}^1_2R^2r$.

3. Se traslada el sistema de referencia auxiliar una cantidad vectorial 1_2d hasta hacer coincidir su origen con O_2 . ${}^1r = {}^1_2R^2r + {}^1_2d$

Luego la ecuación matricial resultante será

$${}^1r = {}^1_2R^2r + {}^1_2d$$

Para una representación conjunta

$${}^1r = {}^1_2T + {}^2r \quad \text{siendo} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} {}^1_2R & {}^1_2d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{que es la matriz de transformación homogénea}$$

Dicha matriz puede interpretarse como:

1. La representación de la localización de un sistema de referencia $(ouvw)_2$ respecto de otro $(OXYZ)_1$:

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} {}^1_2R & {}^1_2d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Un cambio de coordenadas entre los sistemas de referencia $(ouvw)_2$ y $(OXYZ)_1$.

3. La rotación y traslación de un vector \vec{a} que se transforma en otro \vec{a}' estando ambos referenciados respecto del mismo sistema $(OXYZ)$.

3) Transformaciones básicas y composición de las mismas

1. Traslación: considérese que el sistema 2 se encuentra únicamente trasladado una cantidad ${}^1_2d = (dx, dy, dz, 1)$ respecto del sistema 1.

$$T_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{Matriz homogénea básica de traslación}$$

2. Rotación: considérese ahora que el sistema móvil $(ouvw)_2$ tiene el mismo origen de coordenadas, pero distinta orientación que el sistema de referencia fijo:

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Traslación y rotación conjuntas: tiene la capacidad de representar conjuntamente la posición y la orientación de un sistema móvil respecto de otro fijo.

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} {}^1_2R & {}^1_2d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & dx \\ u_y & v_y & w_y & dy \\ u_z & v_z & w_z & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las operaciones de traslación y rotación son operaciones no conmutativas entre sí.

4) Composición de matrices de transformación.

Las matrices de transformación pueden componerse dando lugar a otras matrices compuestas que acumulan todas las transformaciones realizadas.

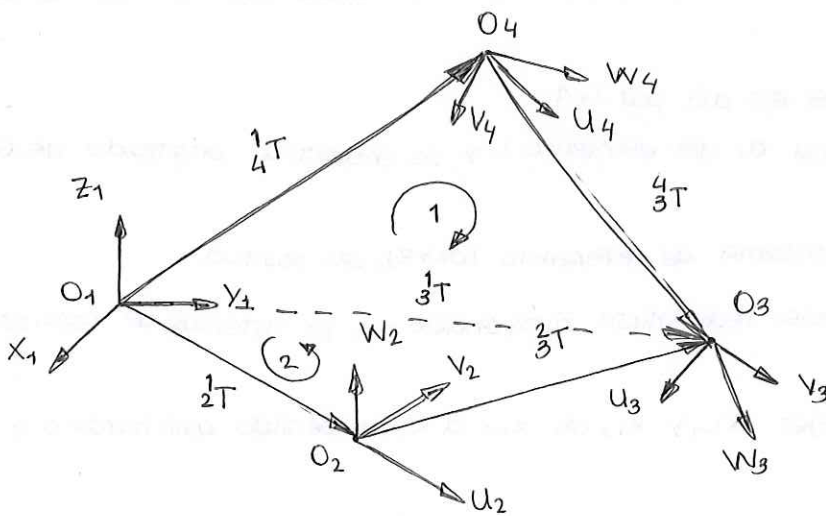
1. Si las transformaciones se refieren al sistema fijo, las sucesivas matrices de transformaciones se van premultiplicando.
2. Si las transformaciones se refieren al sistema móvil, las sucesivas matrices de transformaciones se van postmultiplicando.
3. Cualquier producto de matrices de transformación puede interpretarse como una secuencia de las transformaciones realizadas sobre el sistema de referencia fijo o como una secuencia de transformaciones realizadas sobre el sistema móvil.

5) Transformación inversa.

Es interesante invertir dicha matriz con el objeto de obtener la localización del sistema de referencia 1 respecto de 2.

$${}^2_1T = ({}^1_2T)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^1_2R^T & -{}^1_2R^T \cdot {}^1_2d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6) Ecuaciones de transformación.



La localización del sistema 3 puede ser expresada respecto a 1 mediante:

$$\left. \begin{array}{l} 1: {}^1_3T = {}^1_4T \cdot {}^4_3T \\ 2: {}^1_3T = {}^1_2T \cdot {}^2_3T \end{array} \right\} {}^1_4T \cdot {}^4_3T = {}^1_2T \cdot {}^2_3T : \text{Ecuación de transformación.}$$

MÉTODO MATRICIAL

El objetivo es describir la localización de todos y cada uno de los elementos que constituyen el mecanismo, y está basado en la notación de Denavit-Hartenberg.

Hasta el momento se han utilizado dos sistemas de referencia: uno global (\$OXYZ\$) y otro local (\$OUVW\$).

Si al elemento \$i-1\$ del mecanismo se le asigna el sistema de referencia global, y al elemento \$i\$ el local:

$${}^{i-1}_i r = {}^{i-1}_i T \cdot {}^i r$$

Donde $r(r_u, r_v, r_w, 1)$ son las coordenadas del punto P respecto del sistema de referencia local (OUVW), ${}^{i-1}r(r_x, r_y, r_z, 1)$ son las coordenadas de P respecto del sistema de referencia global (OXYZ). y ${}^{i-1}T$ la matriz de transformación homogénea que define la localización de (OUVW)_i respecto de (OXYZ)_{i-1}.

Los elementos del mecanismo son numerados correlativamente desde el elemento fijo al que se le asigna el 0. Cada elemento del mecanismo se une a los demás por, al menos, dos pares cinemáticos. Los más utilizados son el de rotación y el prismático que se caracterizan por tener un sólo eje.

A cada elemento i se le van a asignar dos parámetros. El primero de ellos, a_i , es la distancia en verdadera magnitud entre los dos ejes, i e $i+1$ del elemento i . El segundo parámetro, α_i , mide el ángulo entre los ejes de los pares del elemento. Se denomina **longitud del elemento** a la distancia a_i , y **torsión del elemento** al ángulo α_i . Estos parámetros son independientes de las dimensiones físicas del elemento.

La distancia d_i (sobre el eje i) entre las rectas se denomina **distancia entre los elementos $i-1$ e i** , y el ángulo θ_i formado por las mismas **ángulo del par**. Estos dos parámetros definen la posición relativa entre dichos elementos. En el caso de un par prismático, d_i es la variable del par y θ_i adopta un valor constante.

1) Sistemas de referencia asociados a elementos.

La convención adoptada para situar los ejes coordenados de cada sistema local es la siguiente:

- ① Se hace coincidir el eje z_i con el eje del par $i+1$.
- ② El eje x_i coincide con la longitud a_i del elemento i , y se encuentra orientado de θ_i hacia 0_i .
- ③ El eje y_i se elige de forma que el sistema de referencia (OXYZ)_i sea positivo.

Los parámetros de un elemento pueden redefinirse apoyándose en los sistemas de referencia elementales adoptados:

- θ_i es el ángulo formado por los ejes x_{i-1} y x_i , de x_{i-1} a x_i en sentido antihorario y desde el sentido positivo de z_{i-1} .
- d_i es la distancia entre los ejes x_{i-1} y x_i medida a lo largo del eje z_{i-1} .
- a_i es la distancia entre los ejes z_{i-1} y z_i medida a lo largo del eje x_i ($a_i \geq 0$).
- α_i es el ángulo formado por los ejes z_{i-1} y z_i , de z_{i-1} a z_i en sentido antihorario y desde el sentido positivo de x_i .

En resumen:

1. Identificar los ejes de los pares cinemáticos.
2. Colocar sobre el eje de cada par i el eje z_{i-1} .
3. Calcular las rectas que contienen las mínimas distancias entre los ejes de los pares, y los puntos de intersección entre unas y otros.
4. Asignar x_i a la perpendicular común a los ejes z_{i-1} y z_i , dando el sentido positivo de $i-1$ a i . Si z_{i-1} y z_i se cortan, x_i será la recta que pasando por el punto de corte es perpendicular al plano que contiene a z_{i-1} y z_i . En este caso, el sentido no está

definido por lo que deberá elegirse.

5. Elegir el eje Y_i de modo que se defina un sistema de referencia positivo.

6. situar, si fuera posible, Z_n alineado con Z_{n-1} .

2) Matrices de transformación elementales.

un sistema de referencia móvil $(ouvw)$, inicialmente coincidente con $(oxyz)_{i-1}$, puede llevarse a coincidir con $(oxyz)_i$ a través de la siguiente secuencia de movimientos:

1. Rotación alrededor de w , coincidente con Z_{i-1} en esta posición, del ángulo θ_i .

2. Traslación según el eje w de la distancia d_i .

3. Traslación según el eje u de la distancia a_i .

4. Rotación alrededor del eje u del ángulo α_i .

De esta forma:

$${}^i T = T_{\theta_i, w} \cdot T_{d_i, w} \cdot T_{a_i, u} \cdot T_{\alpha_i, u}$$

$${}^i T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i \cdot c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i \cdot s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde α_i, a_i, d_i son constantes, mientras que θ_i es la variable del par de rotación i .

ANÁLISIS DE POSICIONES EN MECANISMOS DE CADENA ABIERTA

Existen dos tipos de problemas a resolver; el problema de posición directo, que consiste en determinar la posición y orientación de la garra del robot con respecto a un sistema de referencia fijo, cuando se conocen los valores de las variables de los pares; el de posición inverso consiste en dada la localización de la garra del robot, obtener las configuraciones posibles que puede adoptar el robot.

1) Problema de posición directo.

El método matricial expuesto proporciona cada matriz de transformación elemental

${}^i T$. La ecuación de lazo queda:

$${}^0 T = {}^0 T_1 \cdot {}^1 T_2 \cdot \dots \cdot {}^{n-1} T_n = \begin{bmatrix} U_x & V_x & W_x & d_x \\ U_y & V_y & W_y & d_y \\ U_z & V_z & W_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que representa la posición de la garra respecto de la base del robot. La resolución del problema directo consiste en obtener dicha matriz.

2) Problema de posición inverso.

La operación principal de un robot es controlar la localización de la garra; de obtener el valor de los gdl del robot para que su elemento terminal ocupe una determinada localización espacial.

Una vez resuelto el problema de posición directo, se conocen los términos de la matriz ${}^0 T$. Se trata de expresar las variables de los pares q_i en función de

ellos.

Es un sistema fuertemente no lineal con múltiples soluciones.

La existencia de soluciones lleva a la definición del **espacio de trabajo** como aquella región del espacio accesible al elemento terminal del robot. Para que una solución exista debe encontrarse dentro del espacio de trabajo.

La existencia de soluciones múltiples obliga al sistema a elegir una determinada. El criterio de decisión más razonable consiste en quedarse con la solución más cercana a la posición actual; aunque puede ser que la solución más cercana no sea admisible.

Los métodos analíticos proporcionan todas las soluciones. Cuando consiguen hacerlo en forma cerrada, el tiempo de resolución es mínimo. Sin embargo, no todos los manipuladores serie de 6gdl tienen solución analítica.

Una condición suficiente para que un robot de 6gdl con pares R tenga solución analítica es que tres de sus ejes adyacentes intersecten en un punto.

Método del desacople cinemático, aplicable a aquellos robots cuyos tres últimos ejes se cortan en un punto coloquialmente llamado "muñeca del robot". Consiste en desacoplar ambos problemas: posición y orientación. Es determinante el hecho de que la posición de la muñeca del robot dependa exclusivamente de los tres primeros grados de libertad del robot.

El punto O_m coincide con uno de los orígenes O_i . Por tanto, su posición respecto del sistema fijo $(OXYZ)_0$ es ${}^0\bar{d}$. Téngase en cuenta que al cortarse Z_{i-1} y Z_i , el parámetro a_i se anula y por tanto ${}^0\bar{d}$ no depende de q_i . La posición del elemento terminal del robot queda definida por ${}^0\bar{d} = (d_x, d_y, d_z)$:

$${}^0\bar{d} = \bar{d}_m + \overline{O_m O_n}$$

Y como $\overline{O_m O_n} = g \bar{K} w$

$$\bar{d}_m = {}^0\bar{d} - g \bar{K} w \quad \begin{cases} d_{mx} = d_x - g w_x \\ d_{my} = d_y - g w_y \\ d_{mz} = d_z - g w_z \end{cases}$$

A partir de los datos de orientación de la garra.

$${}^0R = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}$$