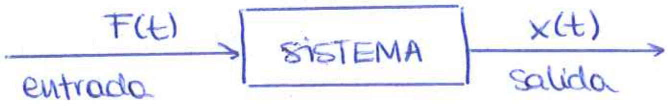
IAESTE BILBAO
Pep Canyelles Colom

AUTOMÁTICA Y CONTROL

- AUTOMÁTICA Y CONTROL -

TEMA 2: INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos son aquellos que evolucionan cuando se actúa sobre él → $f(t)$ (posición, velocidad, aceleración ⇒ $x(t)$; $\frac{\partial x(t)}{\partial t}$; $\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2}$)



CONTROL: métodos para conseguir que un sistema funcione ajustándose a un determinado fin.

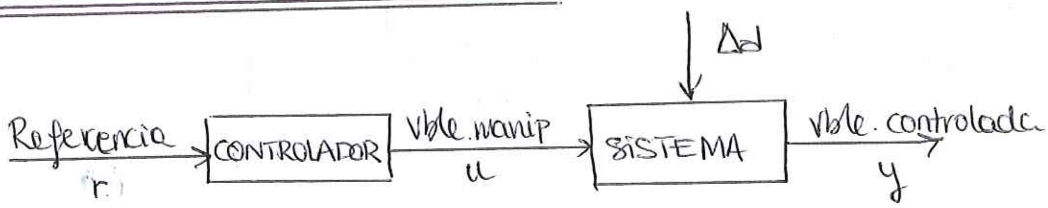
SISTEMA DE CONTROL: conjunto de elementos que regulan el comportamiento de un sistema para lograr un objetivo.

→ MANUAL o AUTOMÁTICO

VARIABLES SIGNIFICATIVAS (tienen un papel relevante en un s. control)

- VARIABLE CONTROLADA → se especifica su comportamiento
- VARIABLE MANIPULADA → se modifica para conseguir un objetivo
- VARIABLES PERTURBACIÓN → influyen en la controlada pero no se pueden manipular.

SISTEMA CONTROL BUCLE ABIERTO



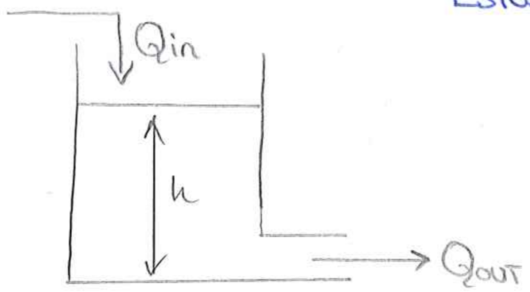
V. significativas

y: vble. controlada → salida proceso
u: vble. manipulada → entrada proceso
r: vble. referencia
Δd: perturbaciones

OBJ: $G = \frac{Y(s)}{U(s)}$

Obtener relación para saber cómo actuar sobre el sistema.

ejemplo 1:



Estado estacionario: $Q_{in} = Q_{out} \rightarrow h\,(m)$

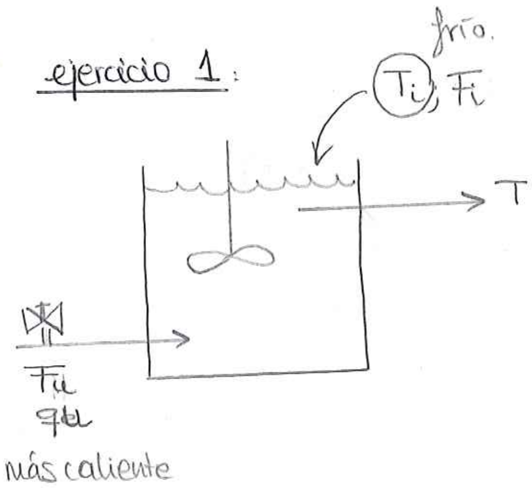
Vbles. significativas

vble. controlada: $h\,(m)$

vble. manipulada: $Q_{in}\,(l/min)$

En un SISTEMA BUCLE CERRADO el objetivo es actuar sobre la variable manipulada para que tenga un comportamiento que se aproxime al deseado. independientemente de las perturbaciones (d) y del desconocimiento completo del funcionamiento del sistema.

ejercicio 1:



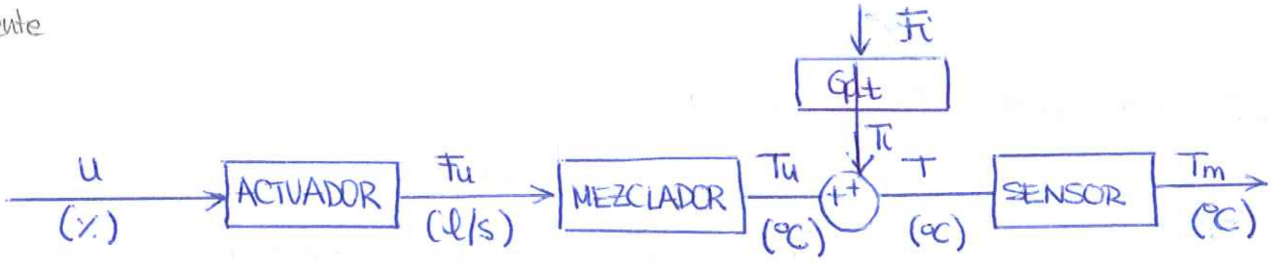
Vbles. significativas

vble. controlada: T (ºC)

vble. manipulada: u (%)

vble. proceso manipulada: F_u (l/s)

vble. perturbación: F_i (l/s)



ejemplo 2 Vables. significativas

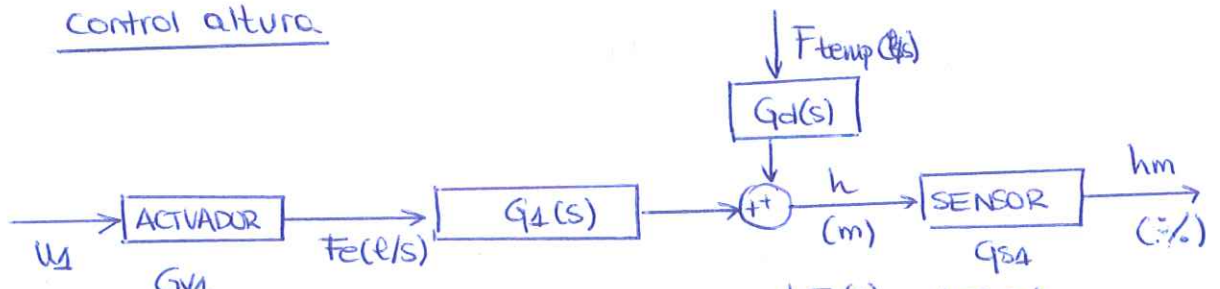
vble. controlada: $h\,(m)$; T_s (ºC).

vble. manipulada: u_1(%) ; u_2(%)

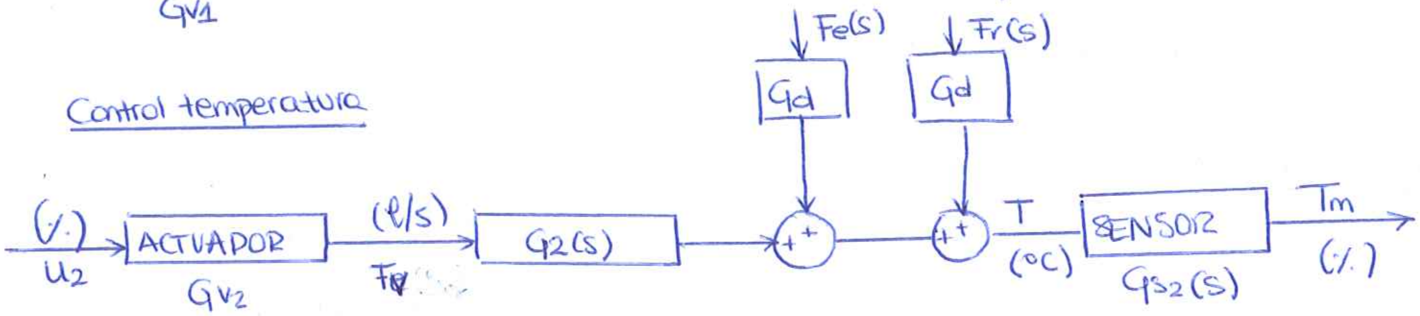
vble. manipulada proceso: F_c (l/s) ; F_b (l/s)

perturbaciones: F_{temp} (l/s)

Control altura

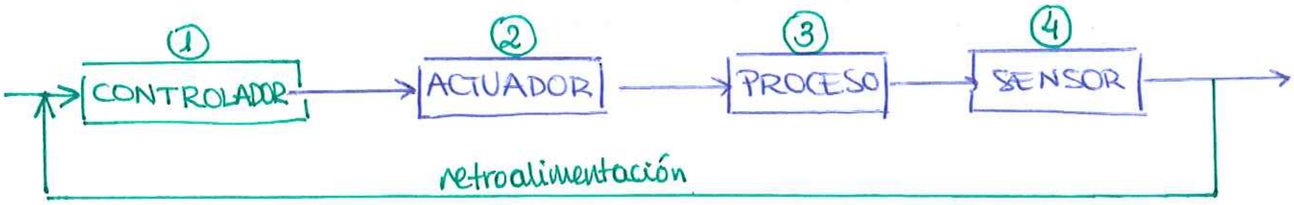


Control temperatura



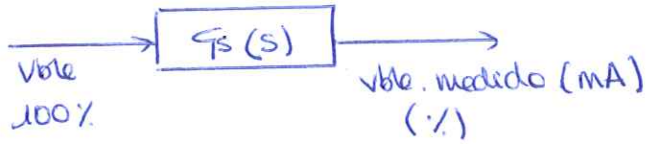
SISTEMA CONTROL BUCLE CERRADO

Utiliza la salida controlada para decidir cómo actuar sobre la vble. manipulada.



SENSOR: dispositivos que miden variables atendiendo a un fenómeno físico.

- **GANANCIA ESTÁTICA**:



$$\boxed{G_s(s) = \frac{100}{\text{rango sensor}}}$$

- **RANGO**: cjto de valores de la vble. que puede medir el instrumento (min - max)
- **ALCANCE**: diferencia entre los valores superior e inferior del rango.
- **RANGO SOBRE CERO**: diferencia entre el cero de la variable y el valor inferior del rango de medida.

TRANSMISOR

Convierte un efecto físico en una señal estándar.

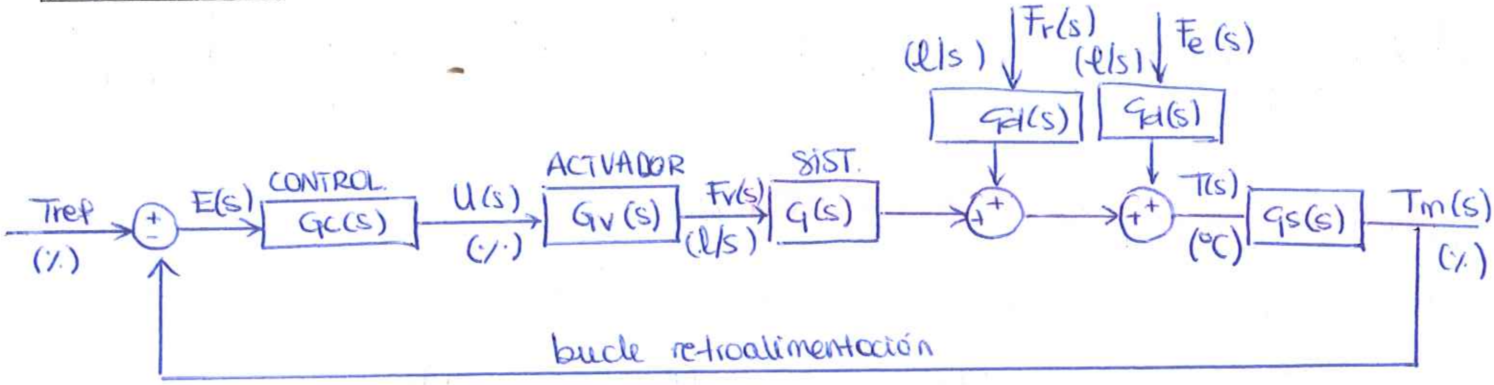
CONTROLADOR → armario de control / sala control / otro edificio.
¿dónde?

Recibe señal correspondiente a la vble. medida y calcula la acción de control atendiendo al logaritmo implementado → PID.

ACTUADOR:

Manipula la vble. de proceso de acuerdo con la acción calculada por el controlador → válvulas, motores, bombas...

ejemplo 2 (BC)



TEMA 3: MODELADO

MODELO: Un modelo es un sistema que responde a una entrada conocida del mismo modo en el que respondería el sistema real.

MODELO MATEMÁTICO: Es el conjunto de ecuaciones que relacionan las variables del sistema y representan su comportamiento ⟶ Relacionan variables de salida con variables de entrada (de las que suponemos que es conocida su evolución).

MODELO DE CONTROL: se obtienen manipulando el modelo matemático hasta encontrar el conjunto de ecuaciones que relacionan las variables de interés para el bucle de control (variables significativas).

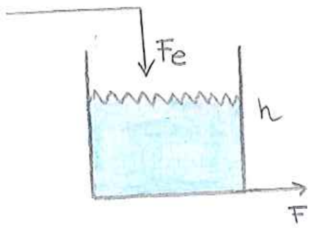
PROCESOS CONTINUOS: Las variables evolucionan continuamente en el tiempo y puede tomar cualquier valor en un rango dado.

Ecuaciones diferenciales totales o en derivadas parciales.

PROCESOS DISCRETOS: Las variables solo cambian en instantes discretos y pueden tomar sólo un número finito de valores.

Secuencias de actividades.

TIPOS DE MODELOS



MODELO ESTÁTICO

Representa situaciones estacionarias

Ecuaciones algebraicas

DISEÑO

$$\boxed{F = F_e \quad ; \quad F = K\sqrt{h}}$$

MODELO DINÁMICO

Relacionan las variables a lo largo del tiempo (evolución temporal).

⇓

Representan el comportamiento a lo largo del tiempo.

Ecuaciones diferenciales.

CONTROL

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt} = F_e - K\sqrt{h}}$$

MODELO DISCRETIZADO

Relacionan las variables de entrada y salida en los instantes de muestreo KT (modelos en tiempo discreto).

MODELO MATEMÁTICO

Se obtienen mediante la aplicación de los principios generales de la física, la química, etc.

MODELO EXPERIMENTAL

Se basa en la experimentación y análisis de datos.

MODELADO MATEMÁTICO

METODOLOGÍA

1. Establecer límites y objetivos del modelo
2. Establecer hipótesis básicas
3. Ecuaciones:
   - LEYES CONSERVACIÓN
   - ECUACIONES DEL DOMINIO { mecánica, eléctrica, hidráulica ...
4. Mirar grados de libertad.

$$\boxed{NF = NV - NE = 0}$$

NF: grados libertad
NV: número variables SALIDA
NE: número ecuaciones.

5. Si tiene ecuaciones no lineales ⟶ LINEALIZAMOS
6. A partir del modelo linealizado ⟶ MODELO DE CONTROL

TIPOS DE MODELOS

- LINEALES O NO LINEALES.
- COEFICIENTES CONSTANTES.
- PARÁMETROS CONCENTRADOS.
- PARÁMETROS DISTRIBUIDOS.

SISTEMAS MECÁNICOS

MASAS AMORTIGUADORES MUELLES

Se aplica:

$$\boxed{2 \text{ LEY NEWTON: } \quad \vec{F} = m\vec{a} \qquad \sum \vec{F} = 0}$$

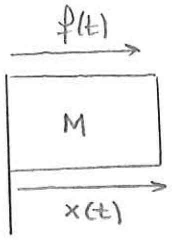
Dos tipos:

1) DE TRASLACIÓN

2) DE ROTACIÓN

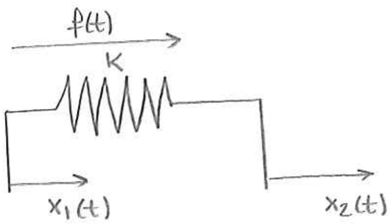
1) SISTEMAS MECÁNICOS DE TRASLACIÓN

MASA



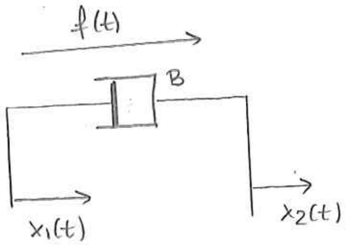
$$f(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

MUELLE



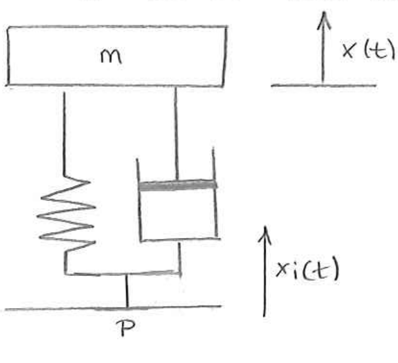
$$f(t) = K\left[x_1(t) - x_2(t)\right]$$

AMORTIGUADOR



$$f(t) = B\left[\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt}\right]$$

Ejemplo: Sistema de suspensión de 1/4 de vehículo: interesa el conocer el desplazamiento de la masa m, $x(t)$, en función de $x_i(t)$.



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$F_K + F_B = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$F_K = K\left[x_i(t) - x(t)\right]$$

$$F_B = B\left[\frac{dx_i(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}\right]$$

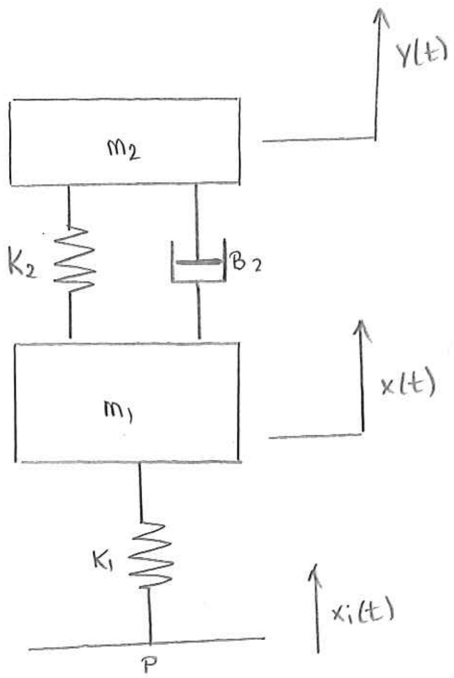
$NV = 3\ (FK, FB, x(t))$

$NE = 3$

$NF = 0$

$$\boxed{m\frac{d^2x(t)}{dt} + B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = B\frac{dx_i(t)}{dt} + Kx_i(t)}$$

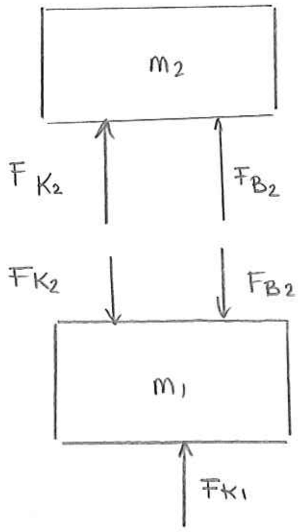
Modelo de 1/4 de coche con rueda:



$x(t) > y(t)$

$x_i(t) > x(t)$

Diagramas sólido libre



Para M1

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$K_1[x_i(t) - x(t)] - K_2[x(t) - y(t)] - B_2\left[\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}\right] = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Para M2

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$K_2[x(t) - y(t)] + B_2\left[\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}\right] = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

M_1: $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + K_1x(t) + K_2x(t) + B_2\dfrac{dx(t)}{dt} = K_1x_1(t) + K_2y(t) + B_2\dfrac{dy(t)}{dt}$

M_2: $m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + K_2y(t) + B_2\dfrac{dy(t)}{dt} = K_2x(t) + B_2\dfrac{dx(t)}{dt}$

2) SISTEMAS MECÁNICOS DE ROTACIÓN

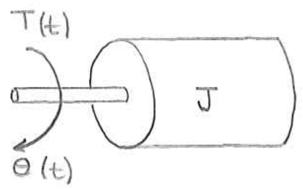
2 LEY DE NEWTÓN: $T = J\alpha$

T: Sumatorio de los pares (Nm)

J: Momento de inercia del cuerpo respecto a su centro de masas ($kg\,m^2$)

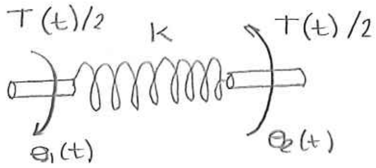
α: aceleración angular del cuerpo (rad/s^2)

INERCIA



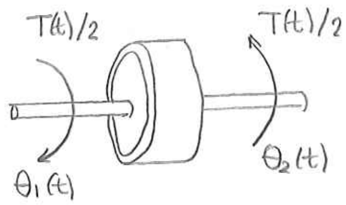
$$T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

RESORTE



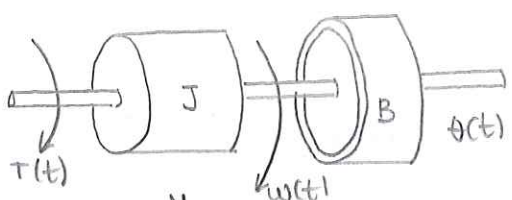
$$T(t) = k\left[\theta_1(t) - \theta_2(t)\right]$$

FRICCIÓN



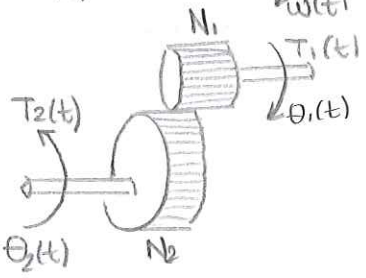
$$T(t) = B\left[\frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{d\theta_2(t)}{dt}\right]$$

Inercia - amortiguador



$$T(t) - T_B(t) = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Tren de engranajes



$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$T_1(t) = \frac{N_1}{N_2}T_2(t)$$

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$$

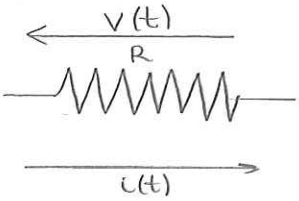
$$\theta_1(t) = \frac{N_2}{N_1}\theta_2(t)$$

$$T_1(t)\theta_1(t) = T_2(t)\theta_2(t)$$

SISTEMAS ELÉCTRICOS

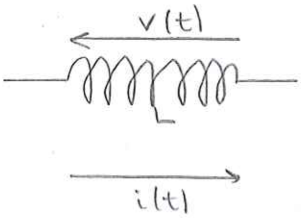
LEYES DE KIRCHHOFF

RESISTENCIA



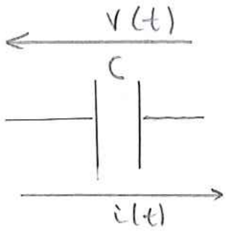
$$v(t) = R\,i(t)$$

BOBINA



$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

CONDENSADOR



$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

Ejemplo 4.

entrada: $e(t)$

salida: $V_c(t)$

$$e(t) = V_R(t) + V_c(t)$$

$$V_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

3 ecuaciones

3 variables $(V_R(t), V_c(t), i(t))$

grados de libertad $\varnothing$

$$i_1(t) = C\,\frac{dV_c(t)}{dt}$$

$$V_R = R \cdot C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt}$$

$$\boxed{e(t) = RC\,\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t)}$$

Relación de la entrada y la salida

Ejemplo 5.

$$e(t) = V_C(t) + V_R(t) + V_L(t)$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

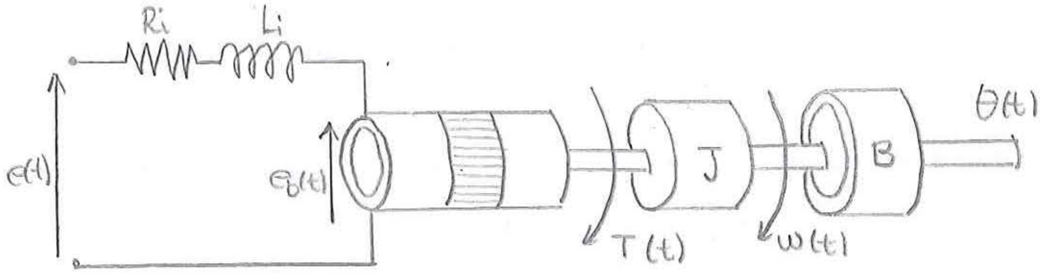
$$V_R(t) = R \cdot i(t) \longrightarrow V_R(t) = R \cdot C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt}$$

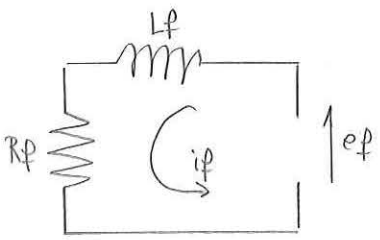
$$V_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \longrightarrow V_L(t) = L \cdot C \cdot \frac{d^2 V_C(t)}{dt^2}$$

$$\boxed{e(t) = V_C(t) + RC\,\frac{dV_C(t)}{dt} + LC \cdot \frac{d^2 V_C(t)}{dt^2}}$$

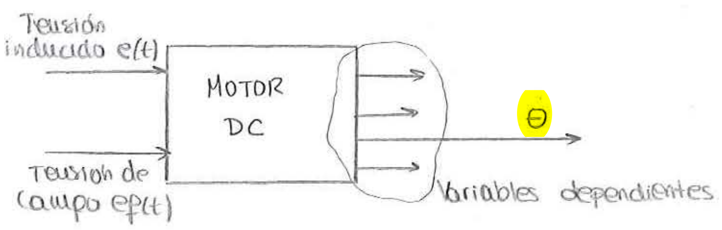
Ejemplo 6.

Motor de corriente continua



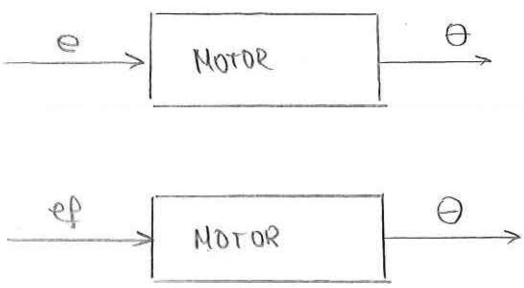


$$T(t) = K_m\, L_i(t) \cdot i_f(t)$$



Nunca se puede tener dos señales diferentes de entrada controlando una misma variable de salida. Si un sistema tiene varias entradas, siempre se dá el caso que hay una es controlable.

A la hora de resolver, tendremos 2 funciones de transferencia una para la relación entre e y Teta y otra para ef y Teta. Por lo tanto hay que reseolverlo como 2 problemas con sus respectivas ecuaciones.



Son iguales pero varían en el modelo de control.

El par motor inducido en el eje es proporcional a la intensidad de inducido y al flujo del entrehierro

HIPÓTESIS

- Despreciamos los efectos no lineales
- No hay pérdidas en pares resistivos.

MODELO MATEMÁTICO

$$T(t) = K_i \phi(t)\, i_i(t)$$

Flujo magnético que se genera en el interhierro

$$\phi(t) = K_f\, i_f(t)$$

Par generado, mover la carga vencer pares resistivos

$$T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt}$$

→ Variable objetivo de control

NV (Variables dependientes) = 5 ($T, i_i, i_f, \phi, \theta$)

NE (número de ecuaciones) = 3

NF (grados de libertad) = 2

El modelo está terminado cuando no hay grados de libertad.

ECUACIÓN DEL INDUCIDO

$$e(t) = R_i\, i_i(t) + L_i\frac{di_i(t)}{dt} + e_b(t)$$

→ por el hecho de girar se produce en tensión electromotriz que se opone a la entrada.

$$e_b = K_b\frac{d\theta}{dt}$$

$$e_f = R_f\, i_f(t) + L_f\frac{di_f(t)}{dt}$$

ANÁLISIS DE GRADOS DE LIBERTAD

NV = ($T, \phi, \theta, i_i, i_f, e_b$)

NE = 6

NF (grados de libertad) = 0

Completo MODELO MATEMÁTICO.

Lo que necesitamos es un modelo matemático de control: queremos controlar una variable $\rightarrow$ Necesitamos manipular una ÚNICA entrada.

Combino ecuaciones para obtener el modelo de control.

MODELO DE CONTROL CONTROLADO POR INDUCIDO

Entrada: Tensión de inducido $e(t)$ $(e_f = cte \Rightarrow i_f = cte)$

Si $\boxed{i_f = cte \Rightarrow \phi = cte}$

ECUACIONES DEL MOTOR ELÉCTRICO

$$T(t) = K_m \cdot i_i(t)$$

$\rightarrow$ meto todas las constantes en una cte de motor

$$K_m = K_1 \phi \cdot K_f \cdot i_f$$

$$e(t) = R_i\, i_i(t) + L_i \frac{di_i(t)}{dt} + e_b(t)$$

$$e_b(t) = K_b \frac{d\theta}{dt}$$

$$T(t) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt}$$

Relación entre $\theta(t)$ y $e(t) \Rightarrow$ Combinar ecuaciones: Tengo que combinar las 4 ecuaciones para hacer la relación. ES muy difícil combinar las ecuaciones en el dominio del tiempo.

TRANSFORMADA DE LAPLACE $\Rightarrow$ Ecuaciones integrodiferenciales se combierten en algebraicas.

HACER LO MISMO CON $e_f(t)$

Entrada: $e_f(t)$ $e(t) = cte$; $i_i = cte$

$$T(t) = K_m\, i_f(t)$$

$$T(t) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt}$$

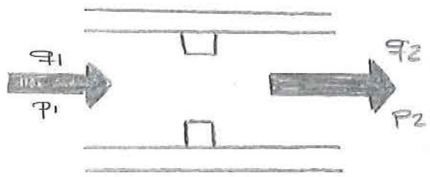
$$e_f(t) = R_f\, i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt}$$

El sistema tal y como lo hemos modelado es un sistema que tiene 2 entradas y 6 salidas. Si sé cómo varían las entradas, sé cómo varían las salidas.

Si yo sólo voy a controlar una salida, sólo puedo manipular una entrada. Si la otra entrada varía (No la perturvo), se trata de una perturbación, por eso es importante realimentar el sistema para saber si las salidas se ajustan a lo deseado.

SISTEMAS HIDRÁULICOS

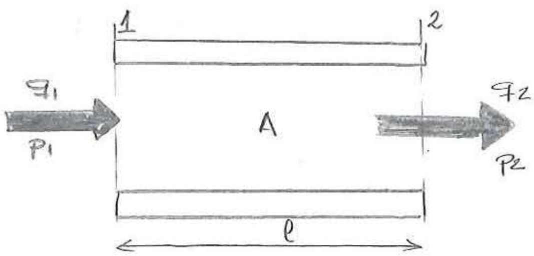
RESISTENCIA DE ORIFICIO



$$R = \frac{dp}{dq}$$

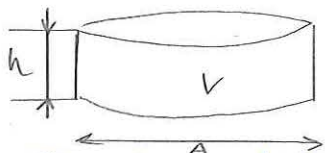
Siempre que tengamos un líquido que circula por un agujero hay una resistencia a su paso.

INERCIA



$$p_1 - p_2 = \frac{\rho l}{A} \frac{dq}{dt}$$

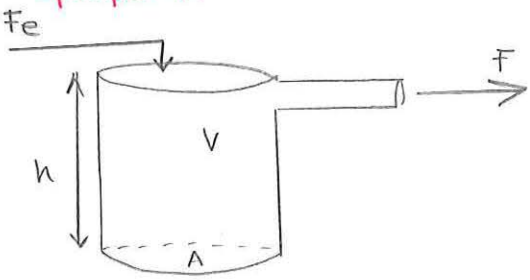
CAPACITANCIA



$$C = \frac{dV}{dh}$$

Incremento de volumen para subir en una unidad la altura

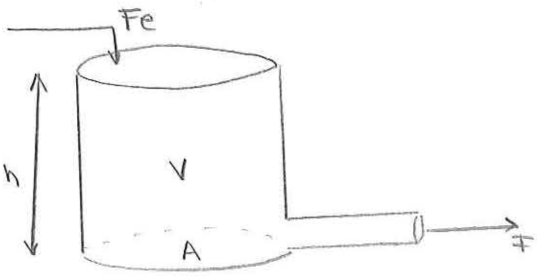
Ejemplo 7:



Tanque con descarga por rebosadero:

$$\boxed{\begin{array}{c} A\frac{dh}{dt} = Fe - F \\ Fe = F \end{array}}$$

Tanque de descarga por gravedad



$$A\frac{dh}{dt} = F_e - F$$

si el flujo es laminar $F = Kh$

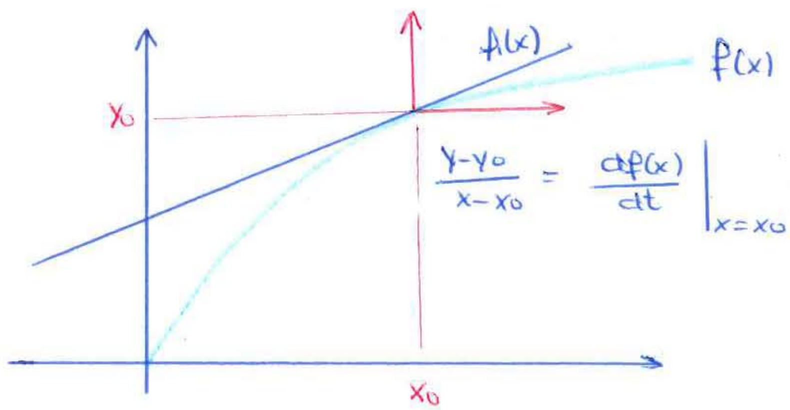
si el flujo es turbulento $F = K\sqrt{h}$

LINEALIZACIÓN DE MODELOS

Todo sistema no lineal puede ser aproximado a un sistema lineal equivalente en los proximidades de operación $\Longrightarrow$ Desarrollando en serie de Taylor y despreciando los términos de orden superior al primero.

PUNTO DE OPERACIÓN: punto de equilibrio alrededor del cual se linealiza el modelo matemático.

$$y = y_0 + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0)$$



La aproximación lineal se obtiene despreciando los términos de orden superior al primero

$$\boxed{f(x) \cong f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0)}$$

Vamos a suponer que tenemos un modelo matemático NO LINEAL de 3 términos :

$$f(u, y, z) = 0$$

u: variable manipulada

y: variable salida

z: variable perturbación

Queremos obtener un modelo LINEAL aproximado.

Tenemos que saber alrededor de qué punto de operación quiero sacar esta aproximación

$$\boxed{\text{PUNTO OPERACIÓN = SOLUCIÓN ECUACIÓN DIFERENCIAL}}$$

$$f(u, y, z) = f(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{PO} \Delta u + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{PO} \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{PO} \Delta z$$

$$\Delta u = (u - \bar{u})$$

$$\Delta y = (y - \bar{y})$$

$$\Delta z = (z - \bar{z})$$

Suponiendo despreciables los términos de orden superior al primero quedaría que la función $f(u, y, z)$ es aproximadamente igual a

$$f(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{PO} \Delta u + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{PO} \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{PO} \Delta z$$

Hemos supuesto que $f(u, y, z) = 0$

$f(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$

Por lo tanto:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{PO} \Delta u + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{PO} \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{PO} \Delta z = 0.$$

$$A\frac{dh}{dt} - Fe + k\sqrt{h} = 0$$

No lineal por $\sqrt{h}$

$$f(Fe, h, \dot{h})$$

$$A\frac{dh}{dt} + k\sqrt{h} - Fe = 0 \quad \text{Nuestra función}$$

Expandiendo en serie de Taylor la función alrededor de un punto de operación $(\overline{Fe}, \overline{h})$

$$\overline{Fe} = k\sqrt{\overline{h}}$$

Despreciando los términos de orden superior al primero, porque los términos de primer orden son los lineales.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial Fe}\right|_{Po} \Delta Fe + \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{Po} \Delta h + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}}\right|_{Po} \Delta\dot{h} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial Fe}\right|_{Pop} = -1$$ (No depende del punto operación por ser un término lineal)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{Pop} = k \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h}}\bigg|_{Pop} = k\frac{1}{2\sqrt{\overline{h}}}$$ → el valor del nivel en un estado estacionario.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}}\right|_{Pop} = A$$ (No depende del punto de operación porque es un término lineal).

$$-\Delta Fe + \underbrace{\frac{k}{2\sqrt{\overline{h}}}}_{\text{valor cte}}\Delta h + A\Delta\dot{h} = 0$$

$$\Delta Fe = Fe - \overline{Fe}$$
$$\Delta h = h - \overline{h}$$
$$\Delta\dot{h} = \dot{h} - \overline{\dot{h}}$$

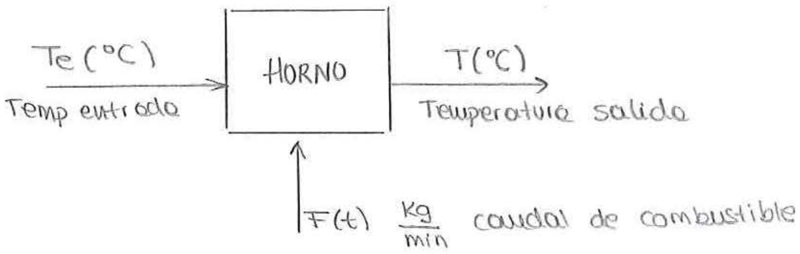
$$\boxed{A\frac{dh(t)}{dt} + \frac{k}{2\sqrt{\overline{h}}}h(t) = Fe(t)}$$

MODELO MATEMÁTICO LINEAL

$$\boxed{\frac{2A\sqrt{\overline{h}}}{k}\frac{dh(t)}{dt} + h(t) = \frac{2\sqrt{\overline{h}}}{k}Fe}$$

MODELO MATEMÁTICO LINEAL APROXIMADO

ejercicio 4: HORNO



Variable controlada: T(°C)

Variable manipulada: F(t) caudal de combustible

Variable perturbación: Te (°C)

PO: $\left[\begin{array}{l} Te = 10°C \quad \text{(puede variar bruscamente)} \\ T = 40°C \end{array}\right.$

$$f(Te, T, F \text{ y sus derivadas})$$

$$(5+3F)\frac{dT}{dt} + 2T^2 = 3FT + Te \qquad (\dot{T}, T, F, Te)$$

- Punto de operación, solución de la ecuación diferencial $\quad \overline{Te} = 10 \quad \overline{T} = 40$

$$(5+3F)\cdot 0 + 2(40)^2 = 3\overline{F}\cdot 40 + 10$$

$$2\cdot 1600 = 120\overline{F} + 10$$

$$\boxed{26{,}6 = \overline{F}} \qquad \{kg/m\}$$

$$\boxed{\text{PUNTO OPERACIÓN} \quad \overline{Te} = 10 \quad \overline{T} = 40 \quad \overline{F} = 26{,}6}$$

CONTINUAMOS CON LA LINEACIÓN

$$(5+3F)\frac{dT}{dt} + 2T^2 = 3FT + Te$$

$$f(F, \dot{T}, T, Te) = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial F}\right|_{Po} = (3\dot{T} - 3T)\Big|_{Po} = -3\cdot 40 = -120 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial Te}\right|_{Po} = -1 \text{ (lineal).}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{T}}\right|_{Po} = 5 + 3F\Big|_{Po} = 5 + 3\cdot 26{,}6 = 84{,}75$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{Po} = (4T - 3F)\Big|_{Po} = 4\cdot 40 - 3\cdot 26{,}6 = 80{,}2$$

$\boxed{\text{VARIABLE DE DESVIACIÓN}}$

$$-120\,\overset{\Delta F}{(F-\bar{F})} + 84{,}8\,\overset{\Delta \dot{T}}{(\dot{T}-\bar{\dot{T}})} + 80{,}2\,\overset{\Delta T}{(T-\bar{T})} + \overset{\Delta Te}{(Te-\bar{Te})} = 0$$

EMPLEO Vbles. desviación

$$84{,}8\frac{dT}{dt} + 80{,}2T = 120F + Te$$

divido entre coef. salidas.

$$\boxed{\underbrace{\frac{dT}{dt} + T}_{\text{SALIDAS}} = \underbrace{1{,}5F + 0{,}01\,Te}_{\text{ENTRADAS}}}$$

Modelo lineal aproximado donde $\dot{T}, T, F, Te$ son variables de desviación.

Que sean variables de desviación significa que

- $\Delta\dot{T} = \frac{dT}{dt}$
- $\Delta T = T$
- $\Delta F = F$
- $\Delta Te = Te$

TEMA 4: REPRESENTACIÓN EXTERNA

HERRAMIENTA MATEMÁTICA: LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

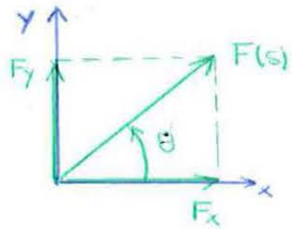
TRANSFORMADA DE LAPLACE: herramienta matemática que permite transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$s = \sigma + j\omega \begin{cases} \sigma \text{ real} \\ \omega \text{ imaginario} \end{cases}$$

$$F(s) = F_x + jF_y$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$



Algunas propiedades:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

si las condiciones iniciales son nulas:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s)$$

Caso general:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{n-1}(0^+)$$

Transformadas de Laplace básicas:

$f(t)$	$F(s)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

EJEMPLO 1

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = f(t)$$

$$s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+) + 2\left[sX(s) - x(0^+)\right] + 5X(s) = F(s)$$

Condiciones iniciales $x(0)=0$; $x'(0)=0$

$$s^2X(s) + 2sX(s) + 5X(s) = F(s)$$

Fuerza constante de amplitud 3N

$f(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3}{s}$

$$[s^2+2s+5]\cdot X(s) = \frac{3}{s}$$

Ojo; L[f(t)]=F(s), pero en este caso f(t) tiene valor f(t)=3N, y su laplaciana es 3/s pero en el caso de que no nos den un valor hay que dejar F(s).

En este caso X(s) no sería una entrada ni salida simplemente la función de transferencia

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+2s+5)s}\cdot 3$$

$$\frac{3}{(s^2+2s+5)s} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{(s^2+2s+5)} = \frac{As^2+2As+5A+Bs+Cs^2}{s(s^2+2s+5)}$$

$$3 = 2As + 5A + Bs + Cs^2 + As^2$$

$0 = C + A \longrightarrow C = \frac{-3}{5}$

$0 = 2A + B \longrightarrow B = -\frac{6}{5}$

$3 = 5A \longrightarrow A = \frac{3}{5}$

$$X(s) = \frac{3/5}{s} + \frac{-6-3s}{(s^2+2s+5)\cdot 5}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{3}{10}e^{-t}\operatorname{sen} 2t \quad \text{siendo } t>0}$$

$$-\frac{3}{5}\left[\frac{2+s}{(s+1)^2+4}\right] = -\frac{3}{5}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right] - \frac{3}{5}\left[\frac{1}{(s+1)^2+4}\right] =$$

$$= -\frac{3}{5}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right] - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{2}{(s+1)^2+4}\right] =$$

$$= -\frac{3}{5}e^{-1t}\cos 2t - \frac{3}{10}e^{-1t}\sin 2t$$

EJERCICIO 1

$$3\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = f(t)$$

$x(0)=0$; $\dot{x}(0)=0$

$f(t)$ escalón de amplitud 1.

$$3[sX(s) - x(0)] + 6X(s) = \frac{1}{s}$$

$$3sX(s) + 6X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s)[3s+6] = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s\,(3s+6)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{3(s+2)}$$

$$3sA + 6A + Bs^2 + Cs = 1$$

$B = 0$

$3A + C = 0 \longrightarrow C = \frac{1}{2}$

$6A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{6}$

$$X(s) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+2}$$

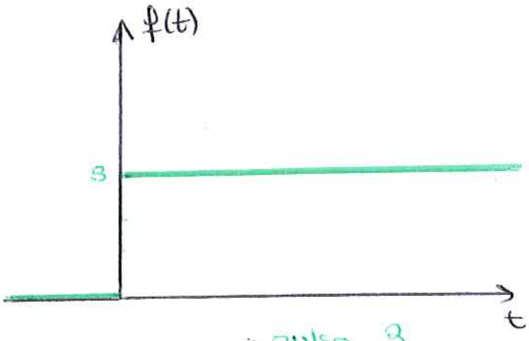
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot e^{-2t}} \quad t \geq 0$$

EJERCICIO 2

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = f(t)$$

$f(t)=0$ para $t<0$ $f(t)=3$ para $t\geq 0$

$x(0)=0$
$\dot{x}(0)=0$



pulso 3.

$$s^2X(s) - s\cancel{x(0)} - \cancel{\dot{x}(0)} + 3[sX(s) - \cancel{x(0)}] + 2X(s) = \frac{3}{s}$$

$$s^2 X(s) + 3s X(s) + 2X(s) = \frac{3}{s}$$

$$[s^2 + 3s + 2] X(s) = \frac{3}{s}$$

$$X(s) = \frac{3}{s(s^2+3s+2)}$$

$$\frac{3}{s(s^2+3s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s^2+3s+2)}$$

$$3 = As^2 + 3As + 2A + Bs^2 + Cs$$

$$0 = A + B \longrightarrow B = -\frac{3}{2}$$

$$0 = 3A + C \longrightarrow C = -\frac{9}{2}$$

$$3 = 2A \longrightarrow A = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3/2}{s} - \frac{3/2\,s + 9/2}{(s^2+3s+2)} = \frac{3/2}{s} - \frac{3}{2}\left[\frac{s+3}{(s^2+3s+2)}\right]$$

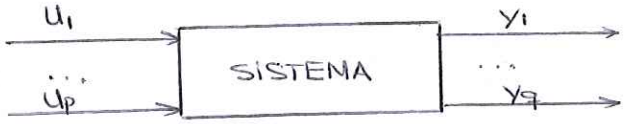
$$\frac{3/2}{s} - \frac{3}{2}\left[\frac{s+3}{(s+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2}\right] = \frac{3/2}{s} - \frac{3}{2}\left[\frac{s+3}{(s+\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}\right]$$

$$s^2 + 3s + \frac{9}{4}$$

$$-\frac{9}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4}$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL Y FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La descripción externa considera al sistema dinámico como una "caja negra" con una o varias entradas que pueden ser manipuladas para gobernar una o más salidas.



FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA: relación entre la transformada de Laplace de la salida y la entrada A CONDICIONES INICIALES NULAS.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$: raíces ceros del sistema
$D(s)$: raíces polos del sistema

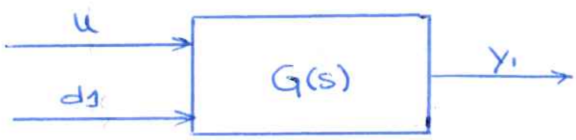
Para que el sistema sea físicamente realizable el grado del numerador debe ser menor o igual que el del denominador.

La función de transferencia es una representación completa de la planta (sist) ya que permite calcular la salida $y(t)$ a cualquier entrada.

1- - Conocida la entrada $r(t)$ podemos obtener $R(s)$ aplicando la transformada de $\mathcal{L}$

2- - Conocidas $R(s)$ y $G(s)$ podemos calcular $y(t) \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}$

Si además de la entrada de control (u) existen otras entradas que pueden variar y no son manipulables (entradas de perturbación d_1) existirán tantas funciones de transferencias como entradas.



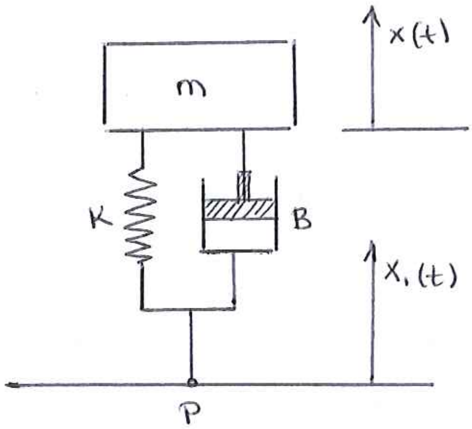
Dado que el sistema es lineal, se puede aplicar $\boxed{\text{PRINCIPIO SUPERPOSICIÓN.}}$

$$Y_1(s) = G_{11}(s)U(s) + G_{12}(s).D_1(s)$$

$$G_{11}(s) = \left.\frac{Y_1(s)}{U(s)}\right|_{d_1=0} \qquad G_{12}(s) = \left.\frac{Y_1(s)}{D_1(s)}\right|_{u=0.}$$

Por cada salida tengo p ecuaciones.

EJEMPLO 2



Modelo matemático

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = B\frac{dx_i(t)}{dt} + Kx_i(t)$$

Aplicando $\mathcal{L}$

$$m\left[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right] + B\left[sX(s) - x(0)\right] + K\,X(s) =$$

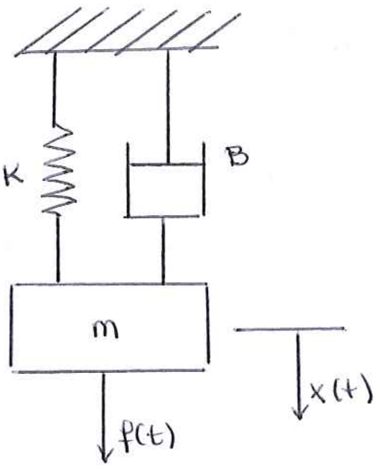
$$= B\left[sX_i(s) - x_i(0)\right] + K\,X_i(s)$$

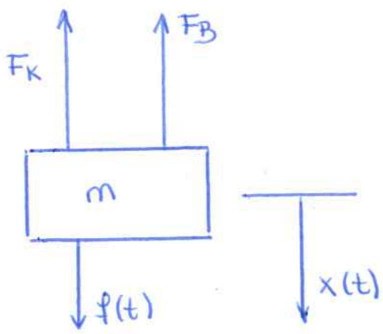
$$ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s) = BsX_i(s) + KX_i(s)$$

$$X(s)\left[ms^2 + Bs + K\right] = X_i(s)\left[Bs + K\right]$$

$$G(s) = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{X(s)}{X_i(s)} = \frac{Bs + K}{ms^2 + Bs + K}$$

EJERCICIO 4





$$F_K + F_B - f(t) = m\,.\,\ddot{x}(t)$$

$$F_K = Kx(t)$$

$$F_B = B\,\dot{x}(t)$$

Ojo!: Laplace $\leftrightarrow$ Es Lineal

$$Kx(t) + B\dot{x}(t) - f(t) = m\,.\,\ddot{x}(t)$$

$\boxed{\text{lineal} \Longrightarrow \text{puedo aplicar transf. de laplace.}}$

$$\mathcal{L}\{Kx(t) + B\dot{x}(t) - f(t) = m\ddot{x}(t)\}$$

$f(t)$ escalón de 3N

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3}{s}$$

$$KX(s) + B[sX(s) - x(0)] - \frac{3}{s} = m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)]$$

$$KX(s) + BsX(s) - \frac{3}{s} = ms^2X(s)$$

$$[K + Bs - ms^2]X(s) = \frac{3}{s}$$

$$\boxed{X(s) = \frac{3}{s[K+Bs-ms^2]}}$$

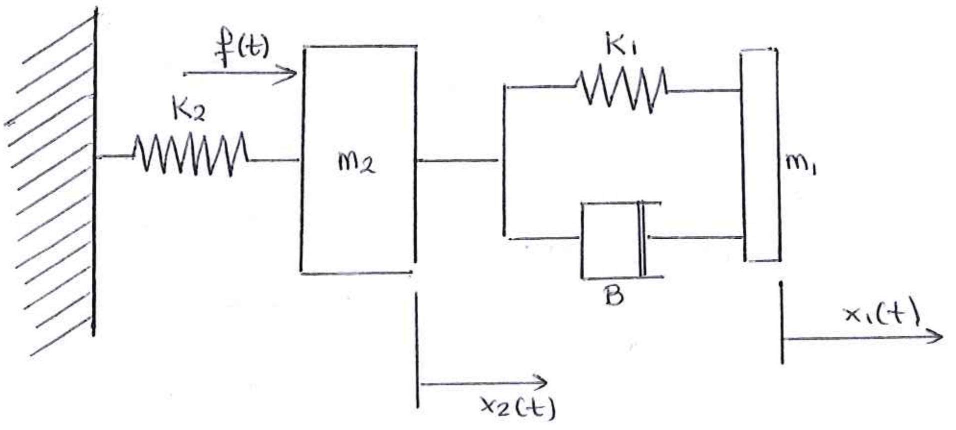
EXPRESIÓN TEMPORAL CORRESPONDIENTE AL DESPLAZAMIENTO $x(t)$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

$$G(s) = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{K+Bs-ms^2}$$

$$[K+Bs-ms^2]X(s) = F(s)$$

EJERCICIO 5



Sean:

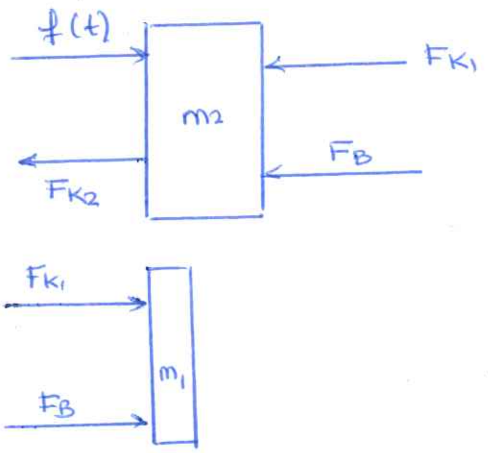
$m_2 = 1000$ kg

$K_2 = 1000$ N/m

$m_1 = 50$ kg

$K_1 = 10$ N/m

$B = 100$ Nw/m



$$F_{K_2} = K_2 x_2(t)$$

$$F_B = B[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)]$$

$$F_{K_1} = K_1[x_2(t) - x_1(t)]$$

$$f(t) - F_{K_1} - F_B - F_{K_2} = m_2\ddot{x}_2$$

$$F_{K_1} + F_B = m_1 \cdot \ddot{x}_1$$

$$G(s) = \left. \frac{X_2(s)}{F(s)} \right|_{x_1 = 0}$$

Como $x_1 = cte$ $\quad F_B + F_{K1} = 0$

$$-F_{K2} + f(t) = m_2 \cdot \ddot{x}_2$$

$$-K_2 x_2 + f(t) = m_2 \cdot \ddot{x}_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} -K_2 X_2(s) + F(s) = m_2 \left[s^2 \cdot X_2(s) - s x_2(0) - \dot{x}_2(0) \right]$$

$$-K_2 X_2(s) + F(s) = m_2 s^2 \cdot X_2(s)$$

$$F(s) = X_2(s) \left[m_2 s^2 + K_2 \right]$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA: $\boxed{G(s) = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{m_2 s^2 + K_2}}$

Suponiendo $f(t)$ escalón de amplitud 3N $\quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3}{s}$

$$\boxed{\frac{3}{s(m_2 s^2 + K_2)} = X_2(s)}$$

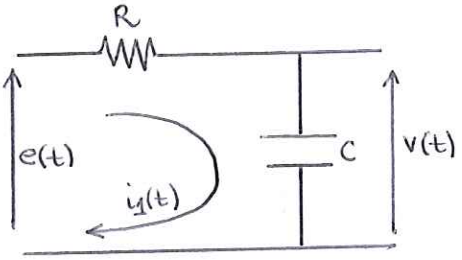
EXPRESIÓN TEMPORAL CORRESPONDIENTE AL DESPLAZAMIENTO $x_2(t)$

Sustituyendo datos:

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA: $G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{1000 s^2 + 1000}$

EXPRESIÓN TEMPORAL: $X_2(s) = \frac{3}{s(1000 s^2 + 1000)}$

EJEMPLO 3



Calcular la función de transferencia entre la tensión e(t) que se aplica a la entrada de la red y la tensión en bornes del condensador, v(t).

Modelo matemático:

$$e(t) = V_R(t) + V(t)$$

$$V_R(t) = i_1(t) \cdot R$$

$$V(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_1(t)dt \longrightarrow \frac{dV(t)}{dt} \cdot C = i_1(t)$$

Transformada de Laplace $\mathcal{L}$:

$$E(s) = V_R(s) + V(s)$$

$$V_R(s) = R I_1(s)$$

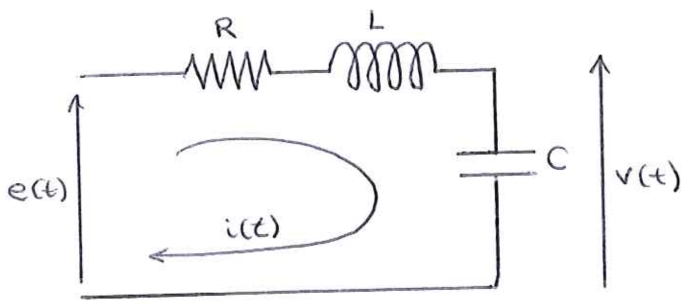
$$C[V(s) \cdot s - \cancel{V(0^+)}] = I_1(s) \longrightarrow V(s) = \frac{1}{C \cdot S} I_1(s)$$

$$E(s) = R I_1(S) + \frac{1}{C \cdot S} I_1(s)$$

$$E(s) = R V(s) . CS + V(s) = V(s)[C \cdot S + 1]$$

$$\boxed{G(s) = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{CS+1}}$$ FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

EJEMPLO 4



Modelo matemático

$$e(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

$$V_R(t) = i(t) \cdot R$$

$$V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$V(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \longrightarrow \frac{dV(t)}{dt} \cdot C = i(t)$$

Transformada de Laplace $\mathcal{L}$

$$E(s) = I(s) . R + L[s I(s) - I(0^+)] + \frac{1}{CS} I(s)$$

$$I(s) = V(s) . C \cdot S$$

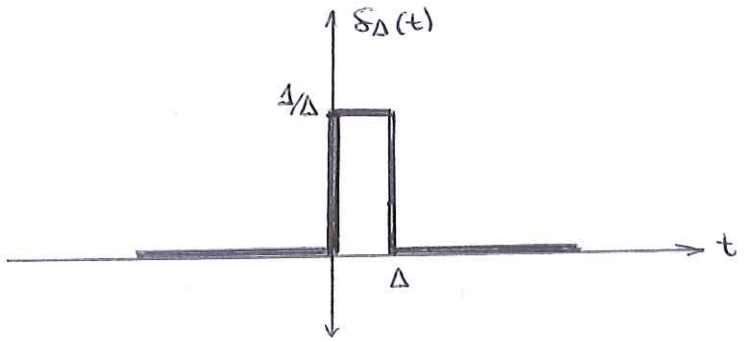
$$E(s) = R \cdot C \cdot s \cdot V(s) + Ls^2 \cdot C \cdot V(s) + V(s)$$

$$E(s) = V(s)\left[RCs + Ls^2 C + 1 \right]$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

$$\boxed{G(s) = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{RCs + Ls^2C + 1}}$$

RESPUESTA IMPULSO



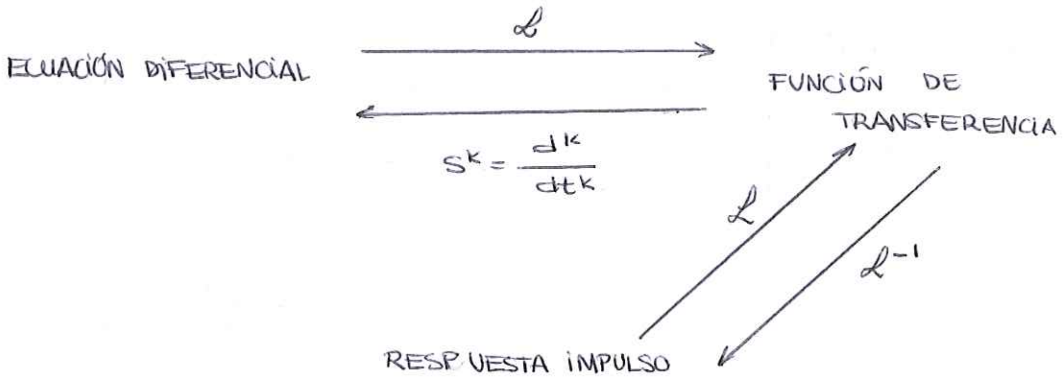
Sea la función de anchura Δ y altura $1/\Delta$ (área = 1)

Se define el impulso unitario como $\boxed{\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)}$

Si $r(t) = \delta(t) \longrightarrow R(s) = 1$: La respuesta temporal a un impulso unitario de un sistema de función de transferencia $G(s)$:

$$Y(s) = G(s) \cdot R(s) = G(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$$



CÁLCULO DE LA SALIDA A CONDICIONES INICIALES

PASO 1: partiendo de la FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA recuperar la ecuación diferencial

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)} \Longrightarrow N(s)R(s) = D(s) \cdot Y(s)$$

PASO 2: sustituir $s^k = \frac{d^k}{dt^k}$

PASO 3: Aplicar la transformada de Laplace a condiciones iniciales

PASO 4: Descomponer en fracciones simples y aplicar la transformada inversa.

EJERCICIO 8

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+4}{s^2+s+1}$$

$$r(t) = \delta(t) \longrightarrow R(s) = 1$$

$$y(0) = 0$$
$$\dot{y}(0) = 0$$

1. PASO

$$Y(s) \cdot [s^2+s+1] = R(s)[s+4]$$

$$Y(s) \cdot s^2 + Y(s) \cdot s + Y(s) = R(s) \cdot s + R(s) \cdot 4$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1} \quad s^k = \frac{d^k}{dt^k}$$

2. PASO

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dr(t)}{dt} + 4r(t)$$

3. PASO: Aplico transformada de $\mathcal{L}$ a condiciones iniciales que nos dan.

$$Y(s) \cdot s^2 - s \cdot \cancel{y(0)} - \cancel{\dot{y}(0)} + sY(s) - \cancel{y(0)} + Y(s) = sR(s) - \cancel{y(0)} + 4R(s)$$

$$Y(s)[s^2+s+1] = R(s)[s+4]$$

$$Y(S) = \frac{S+4}{S^2+S+1} R(S)$$

$R(S) = 1$

$$Y(S) = \frac{S+4}{S^2+S+1} = \frac{S+4}{(S+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1} = \frac{S+4}{(S+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$Y(S) = \frac{S+\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4}{(S+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{S+\frac{1}{2}}{(S+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{\frac{7}{2}}{(S+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$Y(S) = \frac{S+\frac{1}{2}}{(S+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{7}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(S+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \mathcal{L}^{-1}$$

$$\boxed{Y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{7}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t}$$

$$G(S) = \frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{S+4}{S^2+S+1}$$

$r(t) = \delta(t) \longrightarrow R(S) = 1$

$y(0) = 0$

$\dot{y}(0) = 1$

$$Y(S)[S^2+S+1] = R(S)[S+4]$$

$$Y(S).S^2 + Y(S).S + Y(S) = R(S).S + 4.R(S)$$

$$\xrightarrow{S^k = \frac{d^k}{dt^k}}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dr(t)}{dt} + 4r(t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}\ a\,c.i}$$

$$S^2 Y(S) - S.\cancel{y(0^+)} - \dot{y}(0) + S.Y(S) - \cancel{y(0^+)} + Y(S) = S.R(S) - \cancel{r(0^+)} + 4R(S)$$

$$Y(S)[S^2+S+1] - 1 = R(S)[S+4]$$

$$Y(S) = \frac{1}{s^2+s+1} + \frac{s+4}{s^2+s+1} = \frac{s+5}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$Y(S) = \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{+\frac{1}{2}+5}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$Y(S) = \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{\frac{9}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$Y(S) = \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{9}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$Y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{9}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + 8\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

$$G(S) = \frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{s+4}{s^2+s+1}$$

$$R(S) = \frac{3}{s}$$

$$y(0) = 1 \quad ; \quad \dot{y}(0) = 1$$

$$Y(S)[s^2+s+1] = R(S)[s+4]$$

$$Y(S).s^2 + Y(S).s + Y(S) = R(S).s + R(S).4$$

$$s^k = \frac{d^k}{dt^k}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dr(t)}{dt} + 4r(t)$$

$$Y(s)s^2 - y(0)s - \dot{y}(0) + Y(S).s - y(0) + Y(S) = sR(S) - y(0) + 4R(s)$$

$$Y(S)[s^2+s+1] - s - 1 \cancel{-1} = R(s)[s+4] \cancel{-1}$$

$$Y(S)[s^2+s+1] = \frac{3}{s}[s+4] + [s+1]$$

$$Y(S)[s^2+s+1] = 3 + s + 1 + \frac{4.3}{s}$$

$$Y(s) = \overset{1)}{\frac{s+4}{s^2+s+1}} + \overset{2)}{\frac{12}{s(s^2+s+1)}}$$

1) $$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+s+1} \Longrightarrow e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{7}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

2) $$Y(s) = \frac{12}{s(s^2+s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+s+1}$$

$$12 = As^2 + As + A + Bs^2 + Cs$$

$$12 = A$$

$$0 = A + C \longrightarrow C = -12$$

$$0 = A + B \longrightarrow B = -12$$

$$Y(s) = \frac{12}{s} - 12\frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{12}{s} - 12\frac{s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$$

$$= \frac{12}{s} - 12\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - 12\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

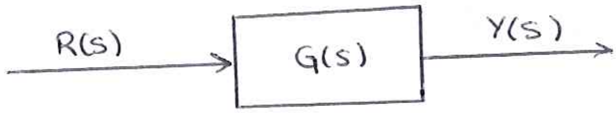
$$= 12 - 12\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{12}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

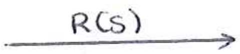
$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{7}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t + 12 - 12e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - 4\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$y(t) = [1 - 12]\, e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \left[\frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}}\right]e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t + 12$$

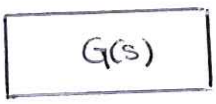
$$\boxed{y(t) = -11\, e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{5}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t + 12}$$

ALGEBRA DE BLOQUES

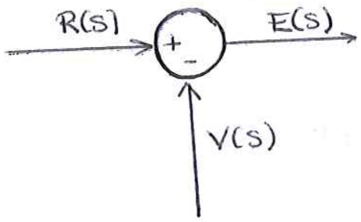




SEÑALES: entran y salen de los bloques

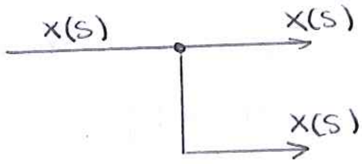


BLOQUES: funciones de transferencia



SUMADOR: puntos a los que llegan señales; señal de salida es la suma / resta de entradas

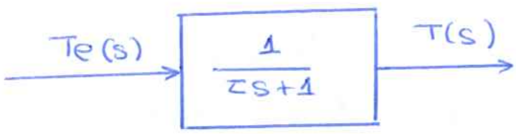
$\rightarrow E(s) = R(s) - Y(s)$



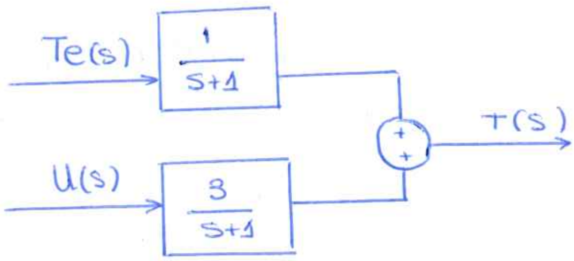
PUNTO DE DISTRIBUCIÓN

EJEMPLOS : operaciones

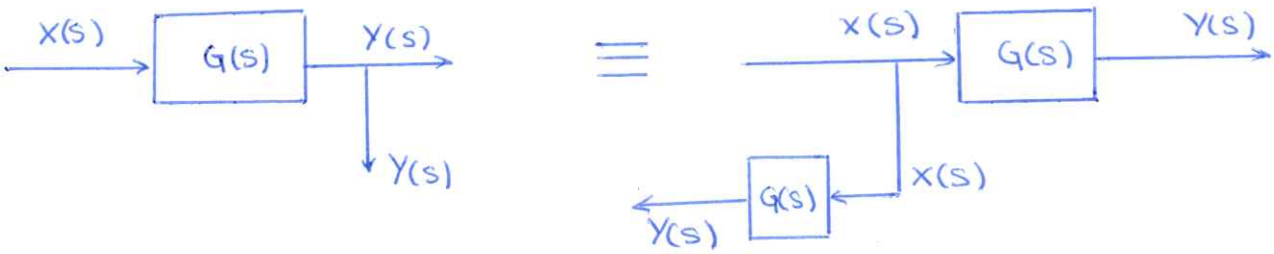
$$T(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \, Te(s)$$

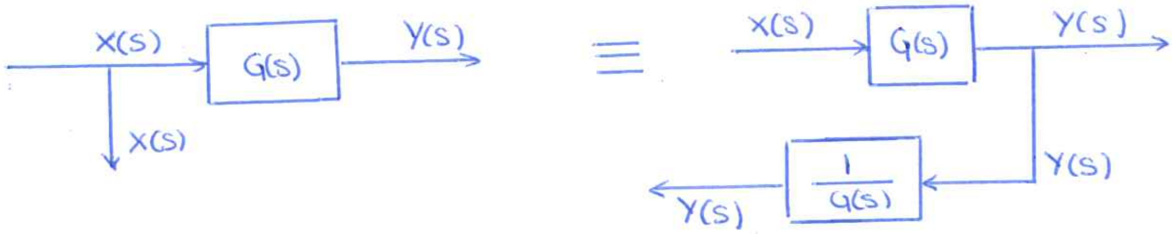


$$T(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1} \, Te(s)}_{T_1} + \underbrace{\frac{3}{s+1} \, U(s)}_{T_2}$$

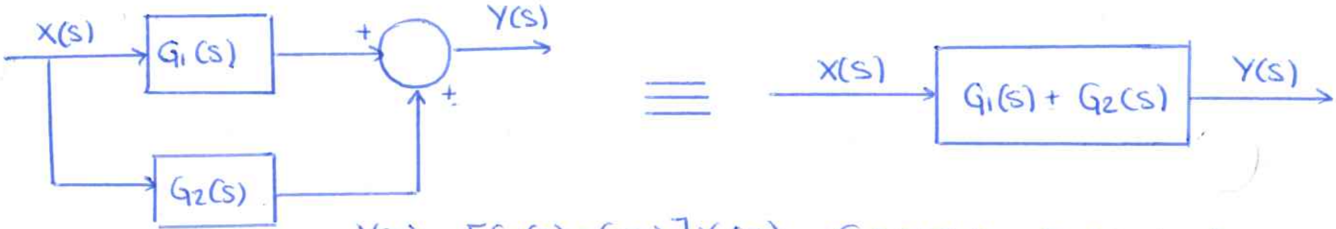


PROPIEDADES





$$Y(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot X(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot X(s)$$



$$Y(s) = [G_1(s) + G_2(s)]X(s) = G_1(s)X(s) + G_2(s) \cdot X(s)$$

Cuando es menos es un más en la fracción

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

Realimentación

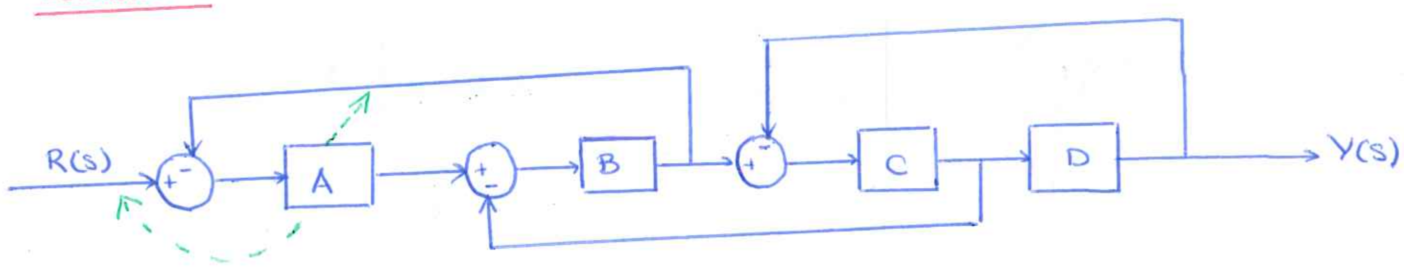
$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)[X(s) - H(s) \cdot Y(s)]$$

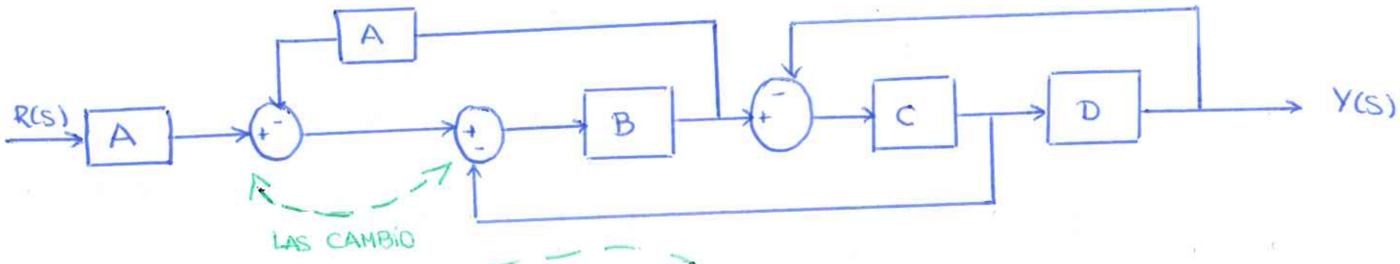
$$Y(s) + G(s)H(s) \cdot Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

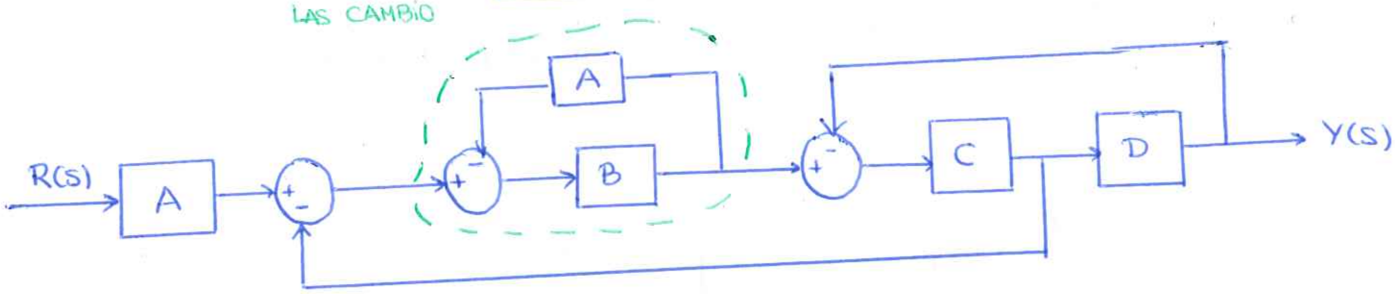
$$Y(s)[G(s)H(s) + 1] = G_1(s) \cdot X(s)$$

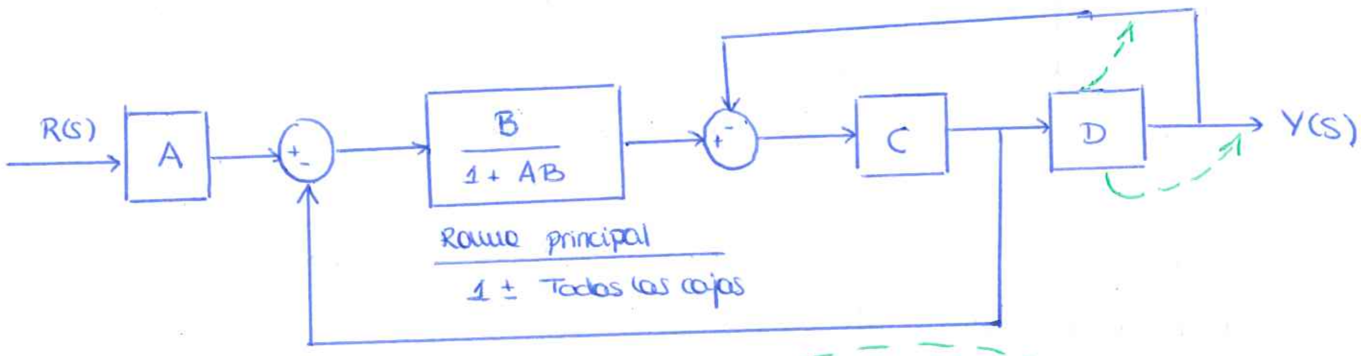
$$Y(s) = \frac{G(s)X(s)}{G(s)H(s) + 1}$$

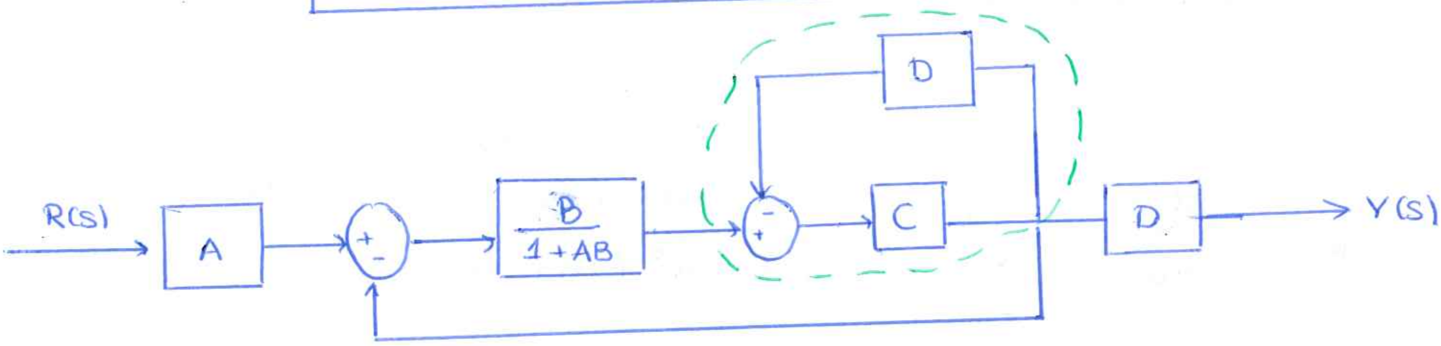
EJERCICIO 9

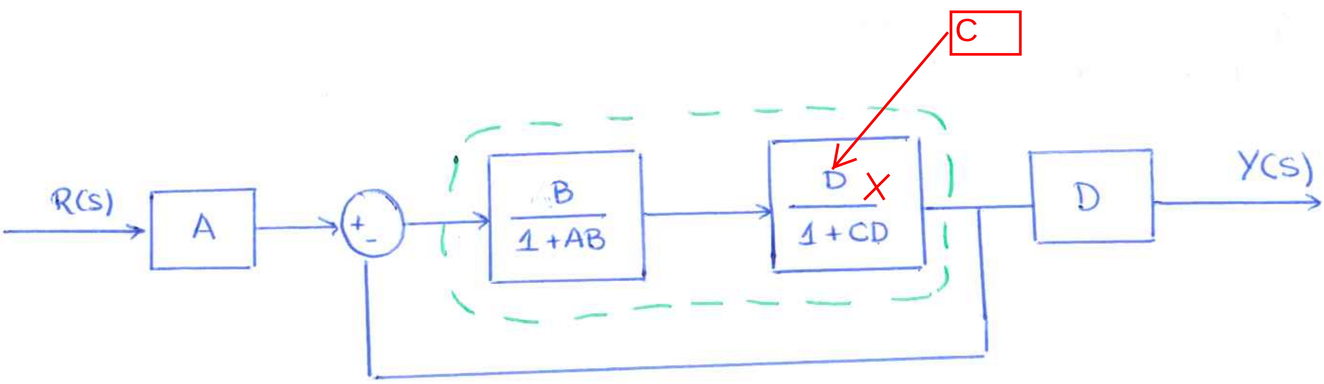

R(s)
A
B
C
D
Y(s)

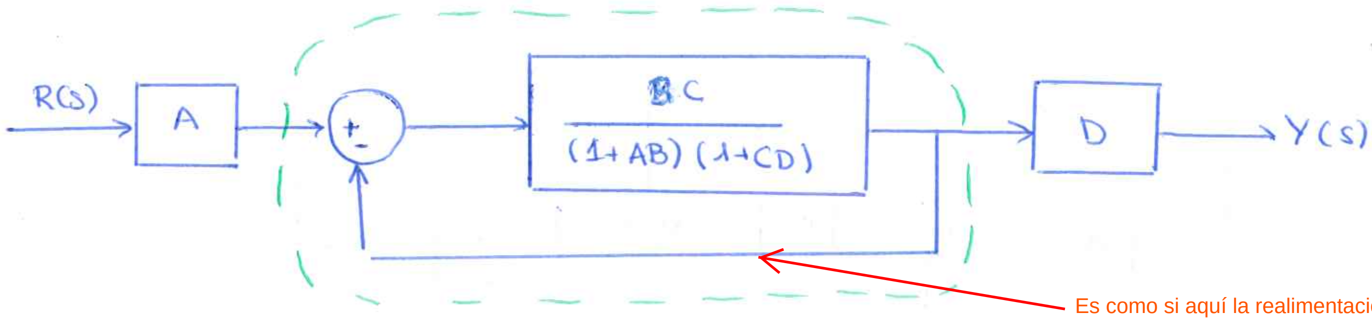

R(s)
A
A
B
C
D
Y(s)
LAS CAMBIO


R(s)
A
A
B
C
D
Y(s)


R(s)
A
$\frac{B}{1+AB}$
C
D
Y(s)
Rama principal
1 ± Todas las cajas

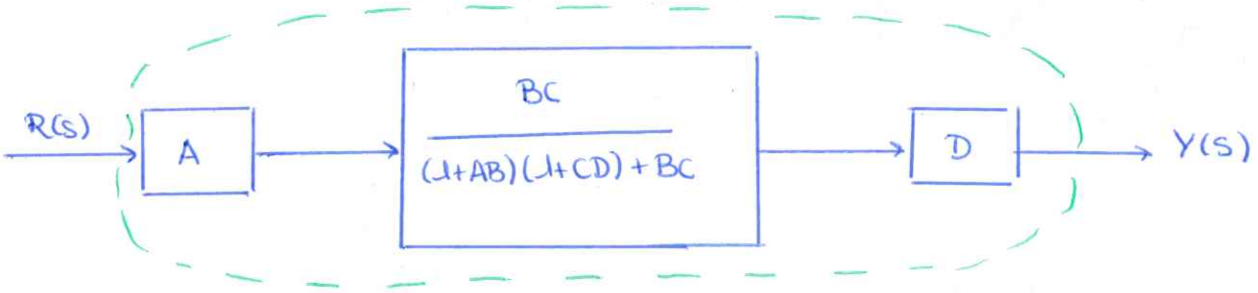

R(s)
A
$\frac{B}{1+AB}$
D
C
D
Y(s)

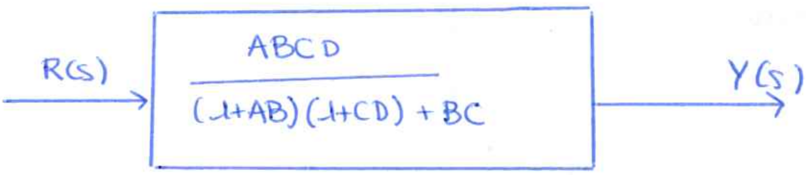

C
R(s)
A
$\frac{B}{1+AB}$
$\frac{D}{1+CD}$
D
Y(s)



Es como si aquí la realimentación =1 (R=1)

$$\frac{\dfrac{BC}{(1+AB)(1+CD)}}{1+\dfrac{BC}{(1+AB)(1+CD)}} = \frac{\dfrac{BC}{(1+AB)(1+CD)}}{\dfrac{(1+AB)(1+CD)+BC}{(1+AB)(1+CD)}} = \frac{BC}{(1+AB)(1+CD)+BC}$$



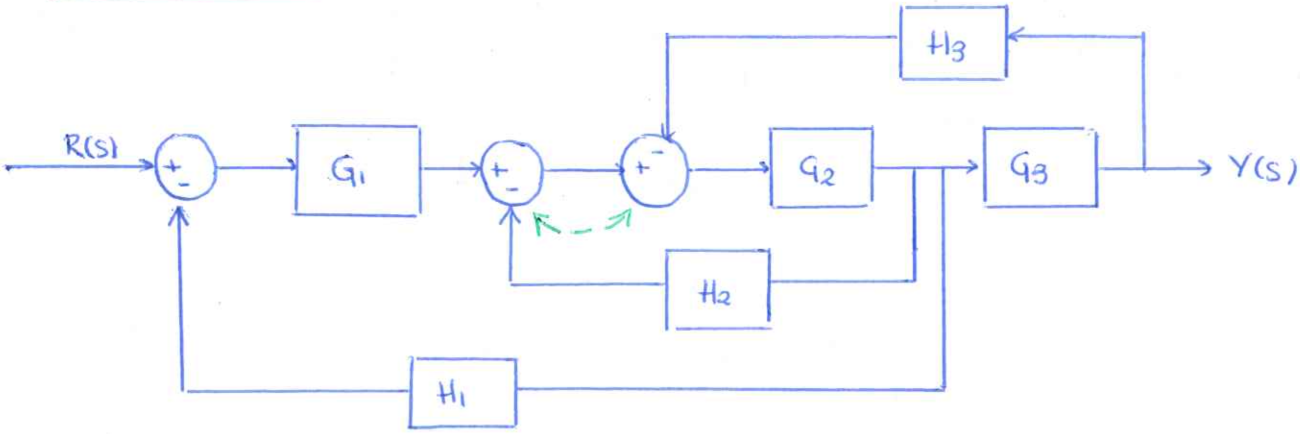


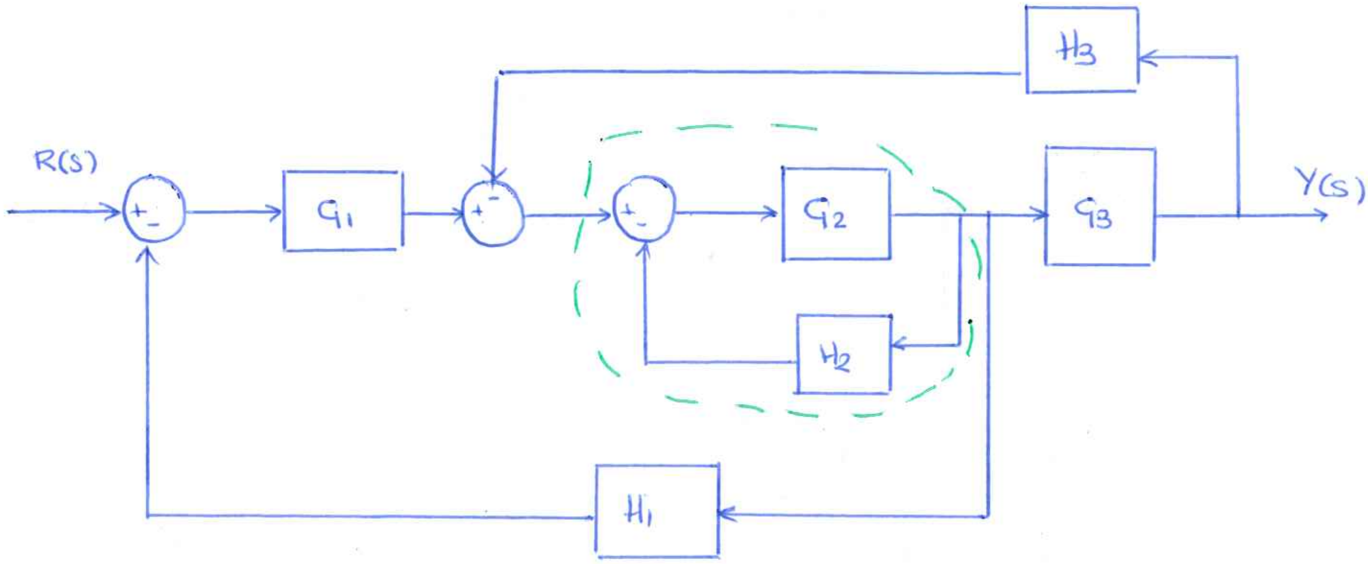
$$\boxed{G(s) = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{ABCD}{(1+AB)(1+CD)+BC}}$$

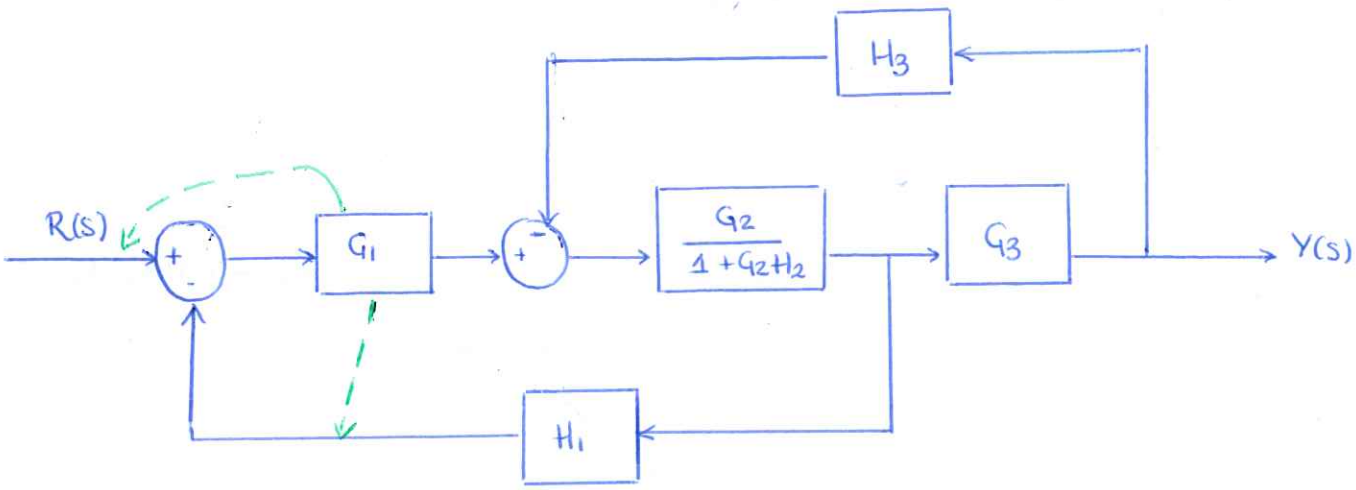
FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

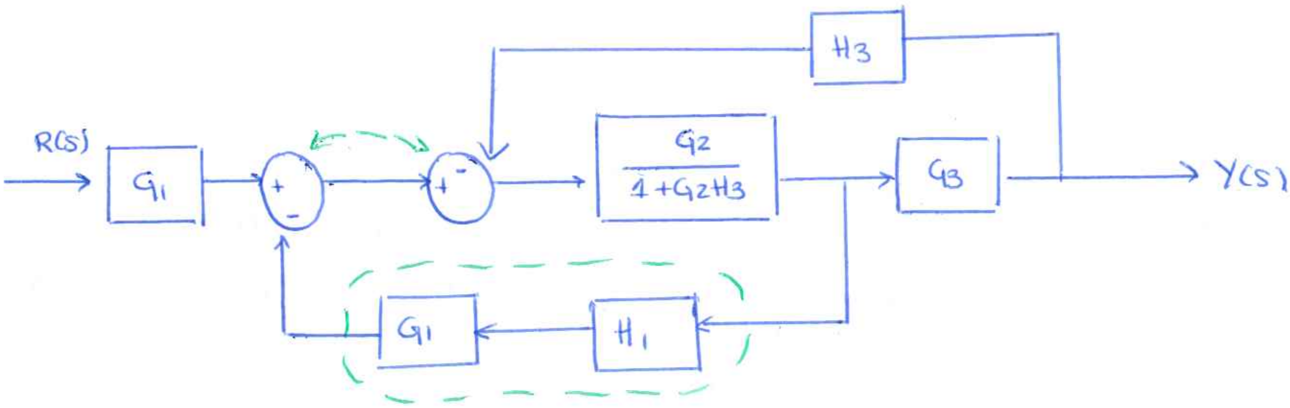
$$Y(s) = \frac{ABCD}{(1+AB)(1+CD)+BC} \cdot R(s)$$

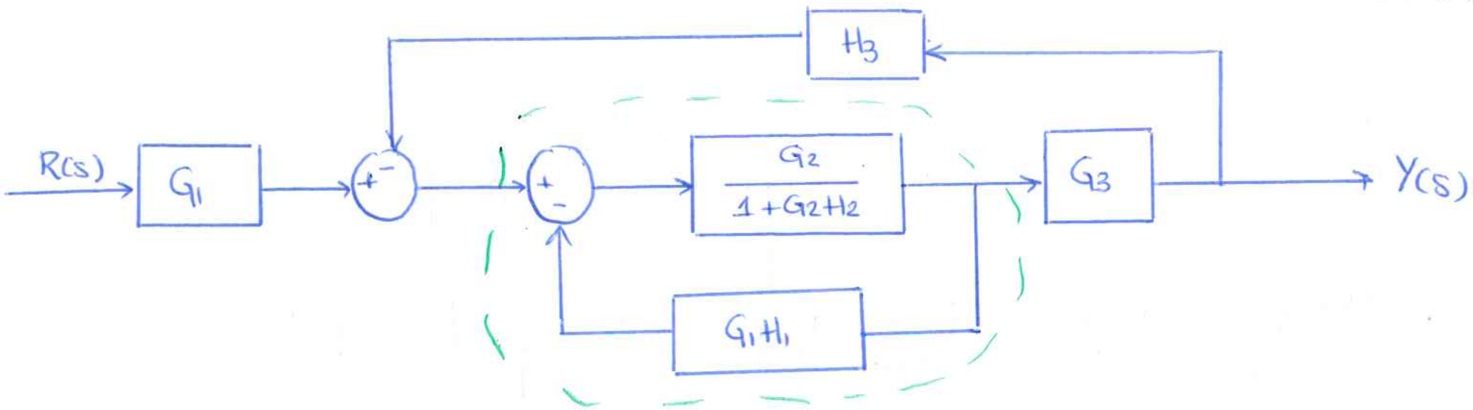
EJERCICIO 10



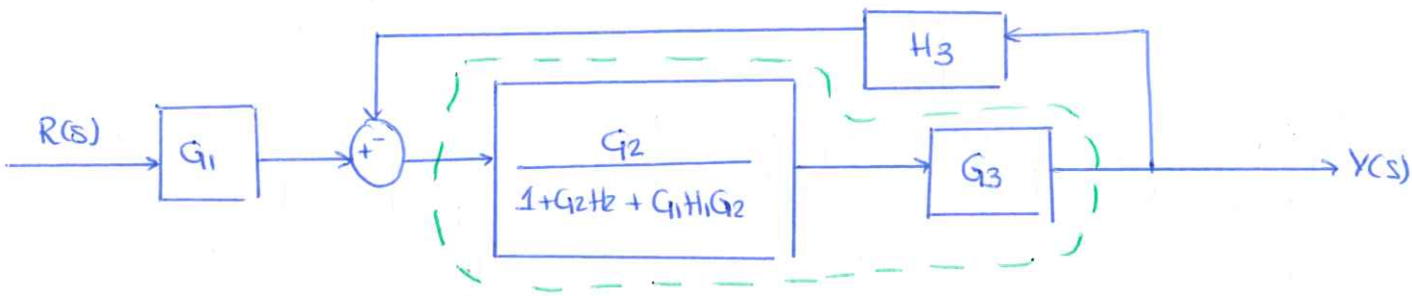


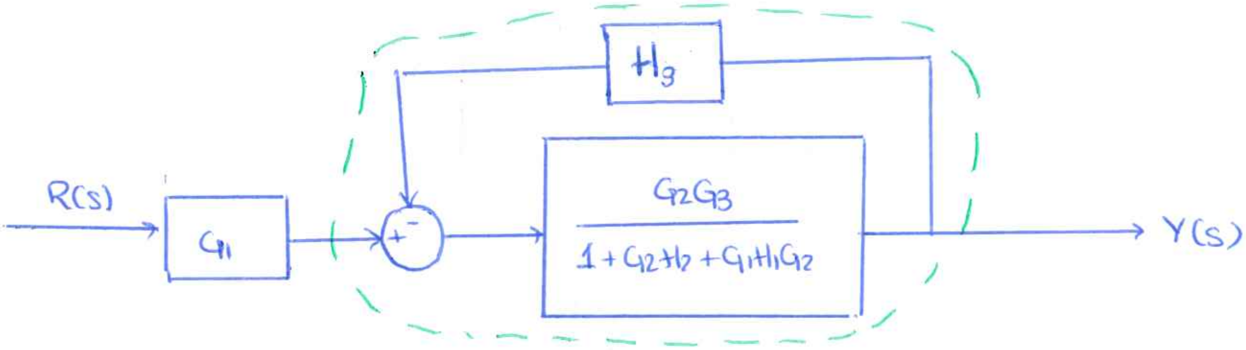




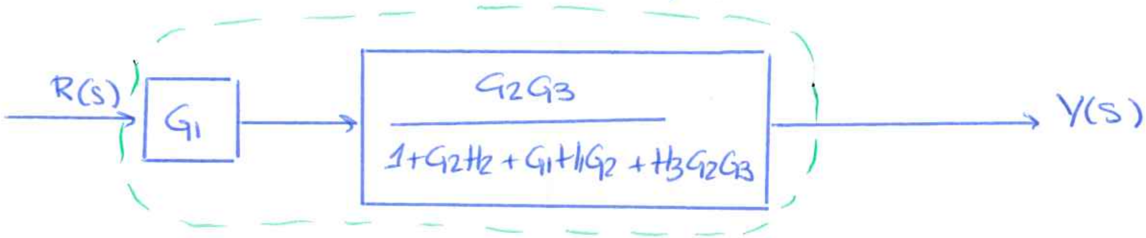


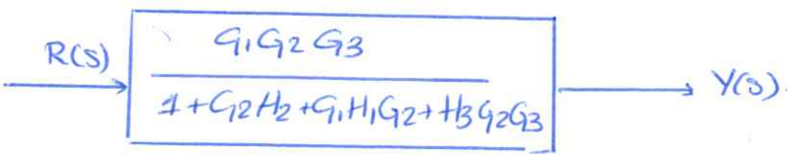
$$\frac{\dfrac{G_2}{1+G_2H_2}}{1+\dfrac{G_1H_1\,G_2}{1+G_2H_2}} = \frac{\dfrac{G_2}{1+G_2H_2}}{\dfrac{1+G_2H_2+G_1H_1G_2}{1+G_2H_2}} = \frac{G_2}{1+G_2H_2+G_1H_1G_2}$$





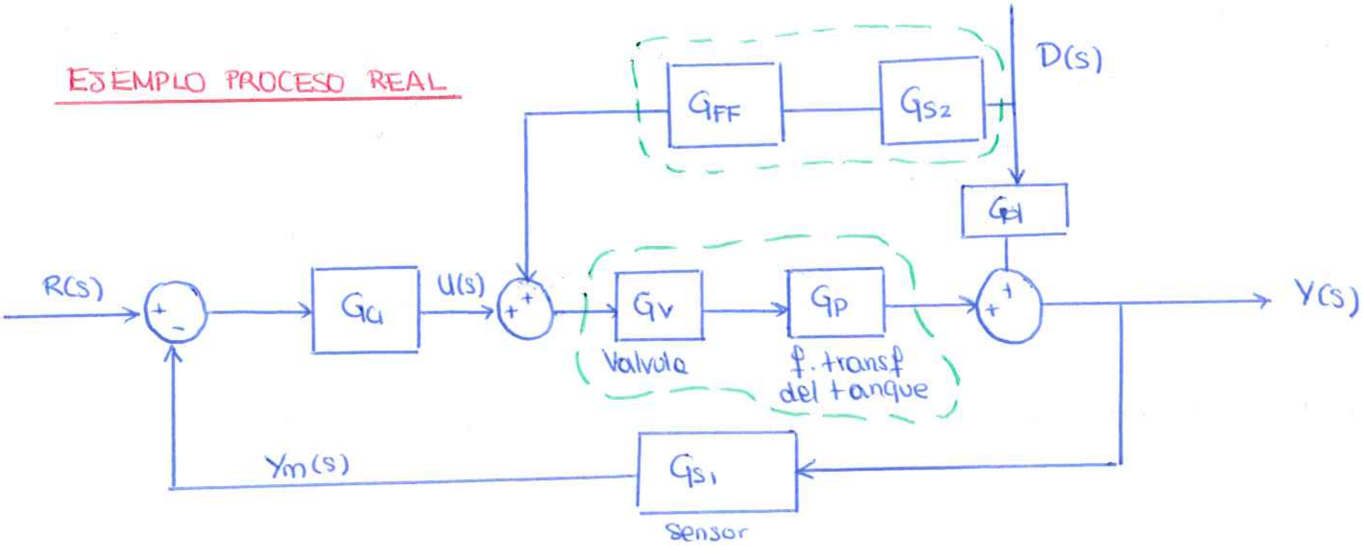
$$\frac{\dfrac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_1H_1G_2}}{1+\dfrac{H_3G_2G_3}{1+G_2H_2+G_1H_1G_2}} = \frac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_1H_1G_2+H_3G_2G_3}$$

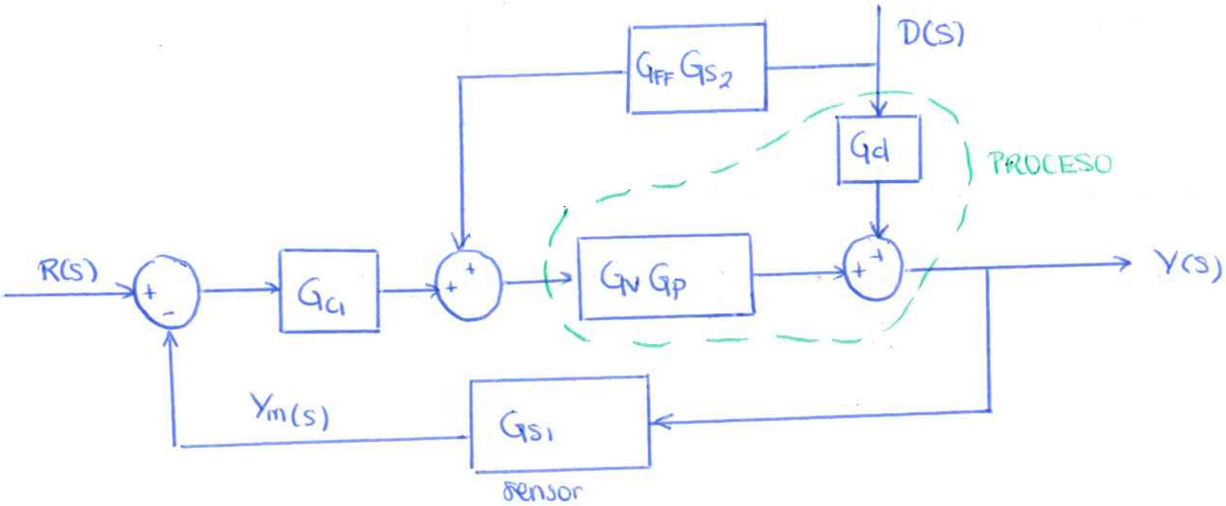




$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2H_2+G_1H_1G_2+H_3G_2G_3}}$$

EJEMPLO PROCESO REAL





Dos entradas R(s) y D(s)

$$G_1(s) = \left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{D=0}$$ comportamiento salida cuando R varía y D cte

$$G_2(s) = \left.\frac{Y(s)}{D(s)}\right|_{R=0}$$ comportamiento salida cuando D varía y R cte

Aproximación lineal válida alrededor del punto de operación:

$$G_{BC}(s) = \left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{D=0} = \frac{G_{C1}\,G_V\,G_P}{1 + G_{C1}\,G_V\,G_P\,G_{S1}}$$

bucle cerrado

cadena principal

cadena principal + realimentación

$$G_2(s) = \left.\frac{Y(s)}{D(s)}\right|_{R=0}$$

$$Y(s) = G_d(s) \cdot D(s) + G_p(s) G_v(s) \left(- G_{C_1}(s) \cdot G_{S_1} \cdot Y(s) + G_{FF}(s) G_{S_2}(s) D(s) \right)$$

por entrar con menos al sumador

$$Y(s) \left[1 + G_p(s) G_v(s) G_{C_1}(s) G_{S_1}(s) \right] = \left[G_d(s) + G_p G_v G_{FF} G_{S_2} \right] D_2$$

$$\boxed{\left.\frac{Y(s)}{D(s)}\right|_{R=0} = \frac{G_d + G_p G_v G_{FF} G_{S_2}}{1 + G_p G_v G_{C_1} G_{S_1}}}$$

Nota: tienen el mismo denominador ⟶ MISMOS POLOS

El sistema realimentado, tenga las entradas que tenga tiene el mismo denominador

TEMA 4: DESCRIPCIÓN EXTERNA DE SISTEMAS DINÁMICOS

1. $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 6x = 6$

$$-3 + X(s)[s^2 + 3s + 6] = 6$$

$$X(s) = \frac{9}{s^2+3s+6}$$

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot 6}}{2} \Rightarrow \frac{9}{s^2+3s+6} = \frac{Bs+C}{s^2+3s+6}$$

$B = 0$
$C = 9$

$$X(s) = \frac{9}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} = \frac{9}{\sqrt{\frac{15}{4}}} \frac{\sqrt{\frac{15}{4}}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} = 4{,}65\, e^{-3/2t} \cdot \operatorname{sen}\sqrt{\frac{15}{4}}\, t$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{-at}\cos bt &\Rightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 - b^2} \\ e^{-at}\operatorname{sen} bt &\Rightarrow \frac{b}{(s+a)^2 - b^2} \end{aligned}}$$

$$X(s)\cdot s^2 - x(0)\cdot s - \dot{x}(0) + 3X(s)\cdot s - x(0) + 6X(s) = \frac{6}{s}$$

$$X(s) = \frac{6+3s}{s}\cdot\frac{1}{(s^2+3s+6)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+3s+6}$$

$$6+3s = \cancel{As^2} + 3s\cdot A + \cancel{6A} + \cancel{Bs^2} + Cs$$

$A = 1$
$B = -1$
$C + 3 = 3 \rightarrow C = 0$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+3s+6} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \underline{x(t) = 1 - \cos\sqrt{\frac{15}{4}}t\, e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{15}{4}}} e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \operatorname{sen}\sqrt{\frac{15}{4}}t}$$

$$-\frac{s}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{15}{4}}\right)^2} = -\left[\frac{s+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{15}{4}}\right)^2}\right]$$

2.

a) $X(s)s^2 - x(0)\cdot s - \dot{x}(0) + 3X(s)\cdot s - 3x(0) + 8X(s) = 0$

$X(s)\left[s^2 + 3s + 8\right] - 1s - 3 - 1 = 0$

$$X(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+8} \longrightarrow \frac{s+4}{(s+\frac{3}{2})^2 + \left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2} = \frac{s+\frac{3}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2 + \left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2} + \frac{\frac{5}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2 + \left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 8}}{2}$$

$x(t) = \cos\sqrt{\frac{13}{2}}t \cdot e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{13}{2}}}\cdot \text{sen}\sqrt{\frac{13}{2}}t \cdot e^{-\frac{3}{2}t}$ MAL

$X(s)s^2 - x(0)s - \dot{x}(0) + 3\left[X(s)\cdot s - x(0)\right] + 8X(s) = 0$

$X(s)\left[s^2 + 3s + 8\right] = 1s + 3 + 3$

$$X(s) = \frac{s+6}{s^2+3s+8} \longrightarrow \frac{s+6}{(s+\frac{3}{2})^2 + \left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2} = \frac{s+\frac{3}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2 + \left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2} + \frac{4{,}5}{(s+\frac{3}{2})^2 + \left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2}$$

$x(t) = \cos\sqrt{6{,}5}\,t \cdot e^{-1{,}5t} + 4{,}5/\sqrt{6{,}5} \cdot \text{sen}\sqrt{6{,}5}\,t \cdot e^{-1{,}5t}$

b) $X(s)s^2 - x(0)s - \cancel{\dot{x}(0)} + 3\left[X(s)s - x(0)\right] + 2X(s) = 0$

$X(s)\left[s^2 + 3s + 2\right] = 3s + 9$

$$X(s) = \frac{3s+9}{s^2+3s+2} = \frac{3s+9}{(s+1)(s+2)} \longrightarrow \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 2\cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} s = -1 \\ s = -2 \end{cases}$$

$3s + 9 = As + A\cdot 2 + Bs + B_1$

$3 = A + B \longrightarrow B = 3 - A$

$9 = 2A + B \longrightarrow 9 = 2A + 3 - A$

$A = 6$

$B = -3$

$x(t) = 6\cdot e^{-t} - 3\cdot e^{-2t}$

c)

$$X(s)\cdot s^2 - x(0)s - \dot{x}(0) + 2\left[X(s)\cdot s - x(0)\right] + 5X(s) = \frac{3}{s}$$

$$X(s)\left[s^2+2s+5\right] = \frac{3}{s}$$

$$X(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} \longrightarrow \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+2s+5)}$$

$$3 = \cancel{As^2} + A2s + \cancel{A5} + \cancel{Bs^2} + Cs$$

$$A = 3/5$$

$$B = -3/5$$

$$-\frac{3}{5}\cdot 2 = C$$

$$X(s) = \frac{3/5}{s} + \frac{-3/5s - 6/5}{s^2+2s+5} = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left[\frac{s-2}{s^2+2s+5}\right] =$$

$$= \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left[\frac{s-2}{(s+1)^2+2^2}\right] = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - \frac{3}{(s+1)^2+2^2}\right] =$$

$$x(t) = 3/5 - \frac{3}{5}\cos 2t\, e^{-t} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot \operatorname{sen} 2t\cdot e^{-t}$$

3. a) $$F(s) = \frac{5}{s} - \frac{4}{s}\cdot e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-6s}$$

b) $$F(s) = \frac{2/3}{s^2} - \frac{2/3}{s^2}e^{-2s} + \cancel{\frac{4}{s}e^{-2s}} - \frac{3}{s}\cdot e^{-6s}$$

NO
CUANDO LE
QUITO LA
CUESTA
SIGUE RECTO
HASTA QUE BAJO DE NUEVO

4. $$U(s) = \frac{0{,}5}{s^2} - \frac{0{,}5}{s^2}e^{-s} - \frac{0{,}5}{s^2}\cdot e^{-s} = \frac{0{,}5}{s^2} - \frac{1}{s^2}\cdot e^{-s}$$

$$Y(s)s - y(0) + 3Y(s) = 2U(s)$$

$$Y(s)[s+3] = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}\cdot e^{-s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+3)} - \frac{2}{s^2(s+3)}\cdot e^{-s}$$

SE ENCUENTRA DESPLAZADO.

RESUELVO PRIMERA PARTE

$$\frac{1}{s^2(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3}$$

$$1 = As(s+3) + B(s+3) + Cs^2$$

$$1 = As^2 + As\cdot 3 + Bs + \cancel{B\cdot 3} + Cs^2$$

$$B = 1/3$$

$$3A + B = 0 \longrightarrow A = -1/3^2$$

$$C = 1/9$$

$$-\frac{1/9}{s} + \frac{1/3}{s^2} + \frac{1/9}{s+3} \Rightarrow -1/9 + 1/3\, t + 1/9 \cdot e^{-3t} = \frac{1}{9}\left(-1 + 3t + e^{-3t}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{9}\left(-1 + 3t + e^{-3t}\right) - \frac{2}{9}\left(-1 + 3(t-1) + e^{-3(t-1)}\right)$$

5.

$$X(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+4)(s+3)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$5(s+2) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+3}$$

$$5(s+2) = As(s+1)(s+3) + B(s+1)(s+3) + Cs^2(s+3) + Ds^2(s+1)$$

$$5s + 10 = A(s^3 + 4s^2 + 3s) + B(s^2 + 4s + 3) + Cs^3 + 3Cs^2 + Ds^3 + Ds^2$$

$$0 = A + C + D \longrightarrow \quad \frac{25}{9} = C + D$$

$$0 = 4A + B + 3C + D \longrightarrow \quad \frac{70}{9} = 3C + D$$

$$5 = 3A + 4B \longrightarrow A = -\frac{25}{9} \qquad \frac{45}{9} = 2C$$

$$10 = 3B \longrightarrow B = 10/3$$

$$C = 5/2$$

$$D = 5/18$$

$$x(t) = -\frac{25}{9} + \frac{10}{3}t + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{5}{18}\cdot e^{-3t}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} = \frac{0{,}5}{s} - \frac{0{,}5s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$1 = A\cancel{s^2} + 2As + \cancel{2A} + \cancel{Bs^2} + Cs$$

$$A = 0{,}5$$
$$B = -0{,}5$$
$$C = -1$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4-2.4}}{2}$$

$$X(s) = \frac{0{,}5}{s} - 0{,}5 \frac{s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{0{,}5}{s} - 0{,}5\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}\right]$$

$$x(t) = 0{,}5 - 0{,}5\cos 1t \cdot e^{-t} - 0{,}5\,\text{sen}\,t \cdot e^{-t}$$

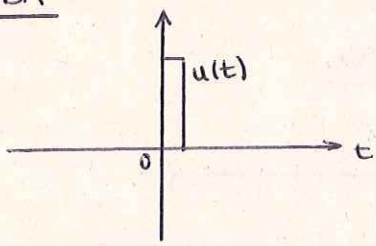
$$X(s) = \frac{2}{s(s^2+\omega^2)} \ \ldots$$

ALGEBRA DE BLOQUES

TEMA 5: ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

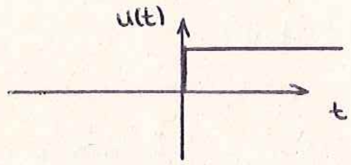
SEÑALES DE PRUEBA

ENTRADA IMPULSO (área u)



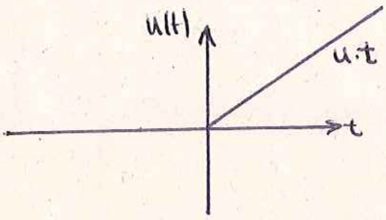
$U(s) = u$

ENTRADA ESCALÓN (amplitud u)



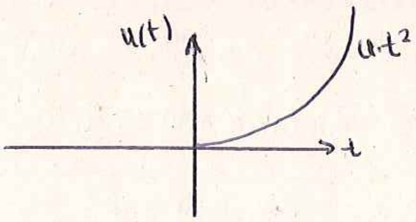
$U(s) = \frac{u}{s}$

ENTRADA RAMPA (pendiente u)



$U(s) = \frac{u}{s^2}$

ENTRADA PARÁBOLA



$U(s) = \frac{u}{s^3}$

SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K r(t) \longrightarrow$$

En general es un modelo en variables de desviación obtenido al haber linealizado un sistema en el P.O.

A mayor Tau más lento será el sistmena

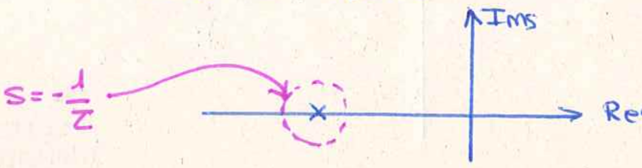
Aplicando la $\mathcal{L}$ a condiciones iniciales nulas obtengo la FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA del sistema.

$$\tau s \cdot Y(s) + Y(s) = K \cdot R(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}}$$

K: Ganancia estática.

τ: Constante de tiempo del sistema: mide la rapidez del sistema.

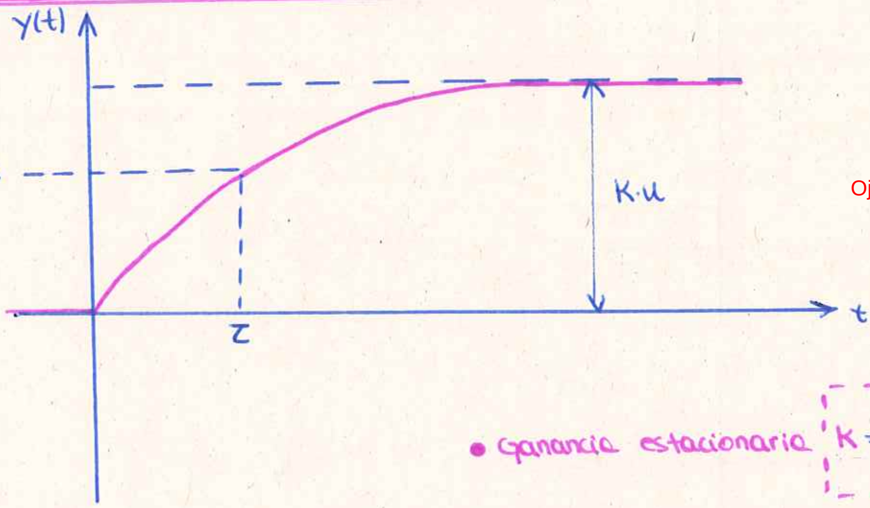


A una entrada escalón, la respuesta temporal del sistema si el escalón es de amplitud u es:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{u}{s} \longrightarrow$$ Aplico transformada inversa de Laplace

$$\boxed{y(t) = K \cdot u \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Si $\tau > 0$ respuesta estable, monótona creciente



Ojo: Es la diferencia entre el inicial y el final.

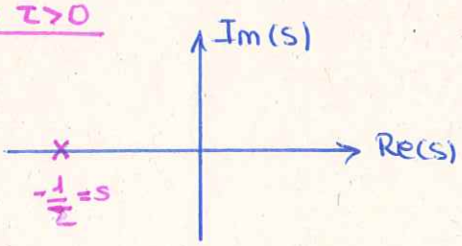
- Ganancia estacionaria $K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$

$|K| < 1$ Atenua

$|K| > 1$ Amplifica

$|K| = 1$ No modifica

CUANDO $\tau > 0$



- Constante de tiempo τ: tiempo en el que la salida alcanza un 63% de su valor final

$\tau > 0$ SIEMPRE EN SISTEMAS ESTABLES

$\tau = K \cdot u \cdot 0{,}63$

- Tiempo de establecimiento: t_s

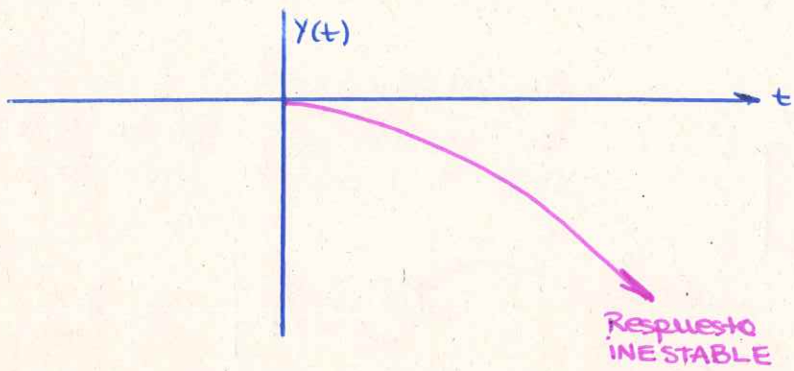
Tiempo en el que se considera que la respuesta está establecida

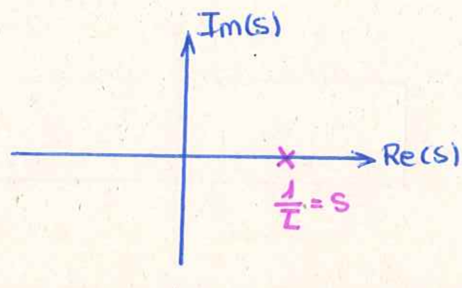
2 criterios.

→ Para $t_s = 3\tau = 0{,}95$ (Criterio del 5%)

→ Para $t_s = 4\tau = 0{,}98$ (criterio del 2%)

Si $\tau < 0$ Respuesta inestable monótona creciente





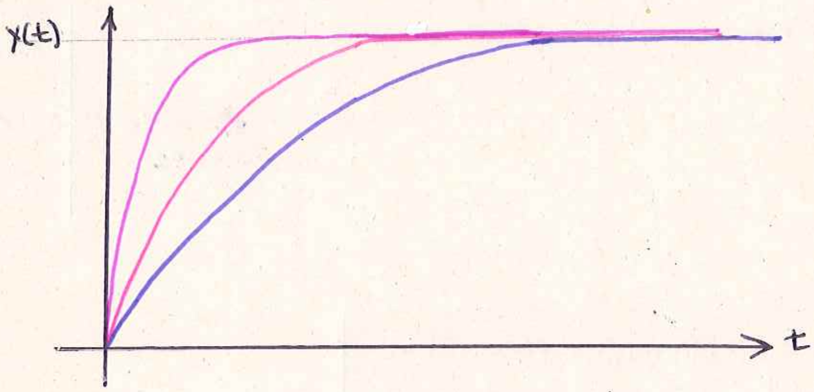
DEF. SISTEMA ESTABLE

UN SISTEMA ES ESTABLE CUANDO A UNA ENTRADA ACOTADA LA SALIDA TAMBIEN ESTÁ ACOTADA.

LA ESTABILIDAD LA DETERMINA LA POSICIÓN DEL POLO NO EL TIPO DE ENTRADA

NOTAS

SISTEMAS CON LA MISMA GANANCIA (K) Y DIFERENTE CTE DE TIEMPO τ

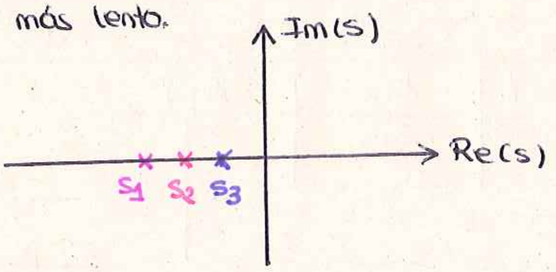


$$G_1(s) = \frac{2}{0{,}5+1}$$

$$G_2(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{2}{2s+1}$$

sistema 1 es el más rápido y el sistema 3 es el más lento.



$$S_1 = -\frac{1}{\tau} = -2$$

$$S_2 = -\frac{1}{\tau} = -1$$

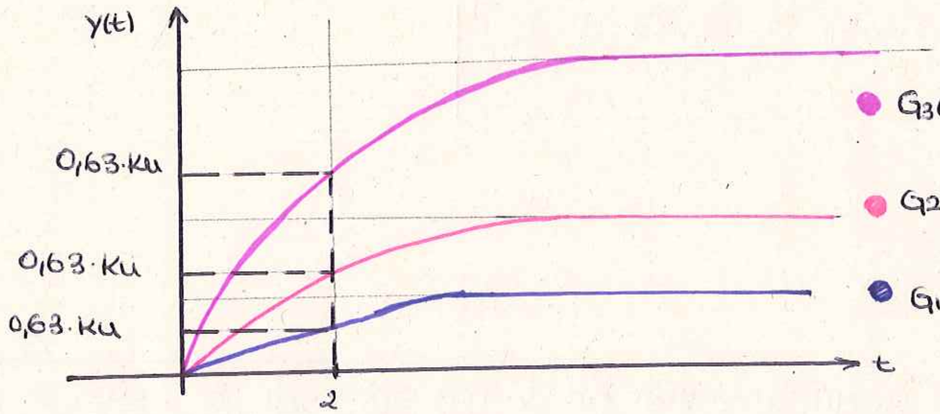
$$S_3 = -\frac{1}{\tau} = -0{,}5$$

CUANTO MAYOR SEA τ, más lento es el sistema, ya que los polos se sitúan más cerca del eje imaginario

→ LA CONSTANTE DE TIEMPO τ DEPENDE DE LA UBICACIÓN DEL POLO

→ CUANTO MÁS CERCA DEL EJE IMAGINARIO, τ ES MAYOR Y EL SISTEMA MÁS LENTO.

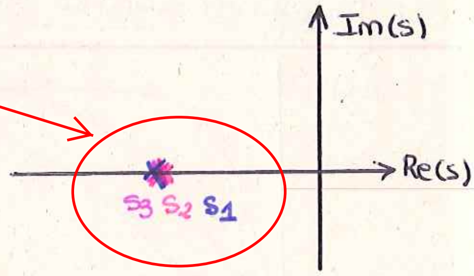
SISTEMAS CON LA MISMA CONSTANTE DE TIEMPO Y DIFERENTE GANANCIA



- $G_3(s) = \dfrac{2}{2s+1}$
- $G_2(s) = \dfrac{1}{2s+1}$
- $G_1(s) = \dfrac{0{,}5}{2s+1}$

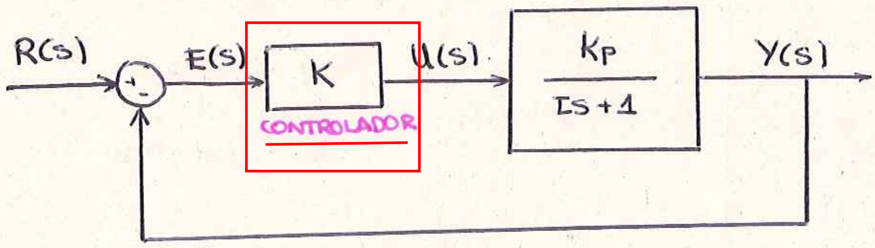
$\tau = 2$

IGUAL RAPIDEZ DE RESPUESTA Y DIFERENTE PRECISIÓN



REALIMENTAR SISTEMAS CON UNA GANANCIA AJUSTABLE

La que variamos es la K del controlador

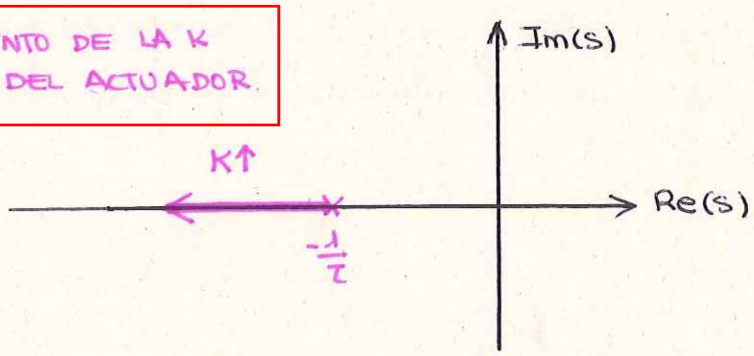


$$G_{BC}(s) = \frac{K \cdot \frac{K_p}{\tau s+1}}{1 + \frac{KK_p}{\tau s+1}} = \frac{KK_p}{\tau s + 1 + KK_p}$$

$$\tau' = \frac{\tau}{1+KK_p}$$

$$K' = \frac{KK_p}{1+KK_p}$$

LÍMITE DE AUMENTO DE LA K
LA SATURACIÓN DEL ACTUADOR.



EL SISTEMA SERÁ MÁS RÁPIDO Y MÁS PRECISO SEGÚN K AUMENTA

La ganancia del sistema realimentado se acerca a 1.

El sistema realimentado se hace más rápido

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\omega_n\delta\frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2\,y(t) = K\omega_n^2\,u(t) \longrightarrow$$

En general, será un modelo en variable de desviación, obtenido al linealizar un sistema no lineal en el P.O.

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \text{FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA}$$

K: Ganancia estática.

δ: Factor de amortiguamiento.

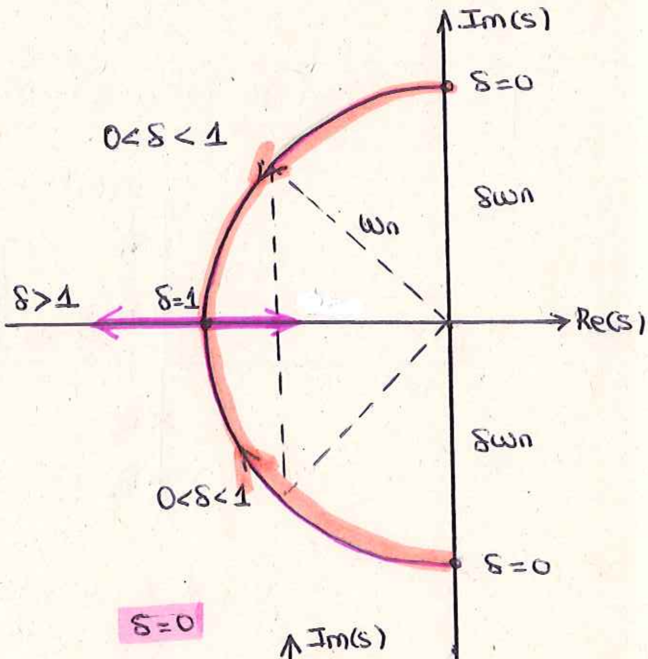
ω_n: Frecuencia natural (rad/s), frecuencia a la que oscilaría el sistema si no tuviera amortiguamiento.

POLOS DEL SISTEMA

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \qquad \text{ECUACIÓN CARACTERÍSTICA}$$

$$s = \frac{-2\delta\omega_n \pm \sqrt{4\delta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\delta\omega_n \pm \sqrt{\delta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} =$$

$$s = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$



$\delta = 1$ POLOS REALES E IGUALES

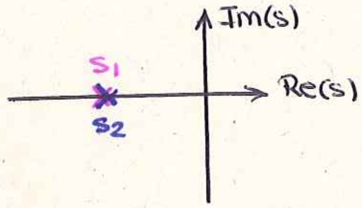
$\delta = 0$ POLOS IMAGINARIOS PUROS

$\delta < 0$ POLOS CON PARTE REAL POSITIVA — SISTEMA INESTABLE

$\delta > 1$ POLOS REALES

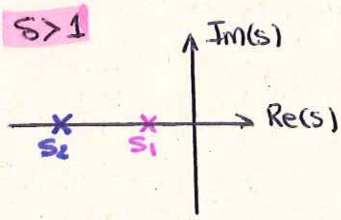
$0 < \delta < 1$ POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS

$\delta = 1$



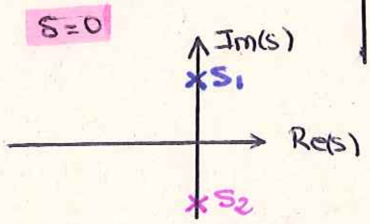
SISTEMA SOBREAMORTIGUADO

$\delta > 1$



SISTEMA SOBRE-AMORTIGUADO

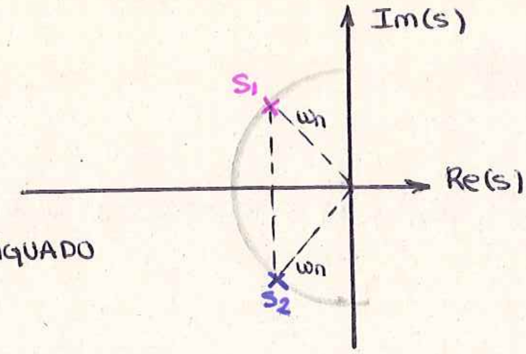
$\delta = 0$



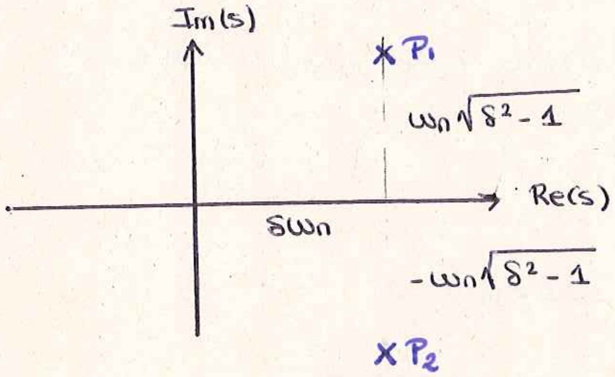
SISTEMA SIN AMORTIGUAMIENTO

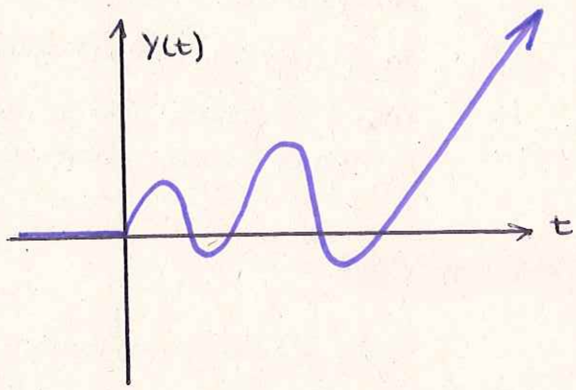
$0 < \delta < 1$

SISTEMA SUB-AMORTIGUADO

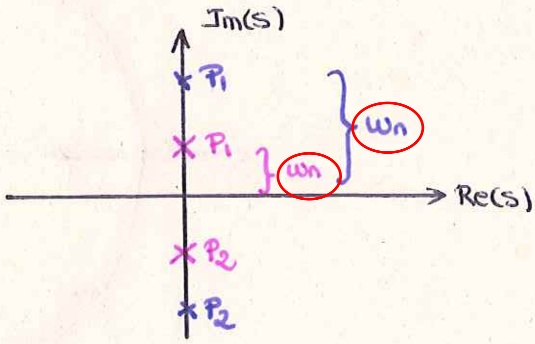


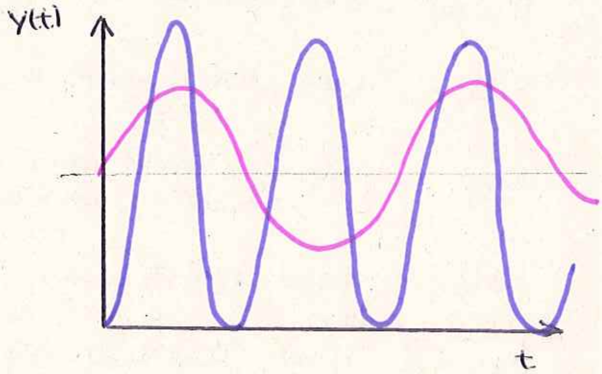
$\boxed{\delta < 0 \quad \text{SISTEMA INESTABLE}}$





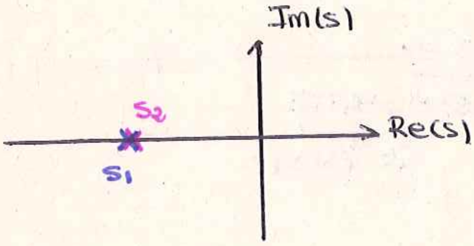
$\boxed{\delta = 0 \quad \text{SISTEMA CRITICAMENTE ESTABLE}}$

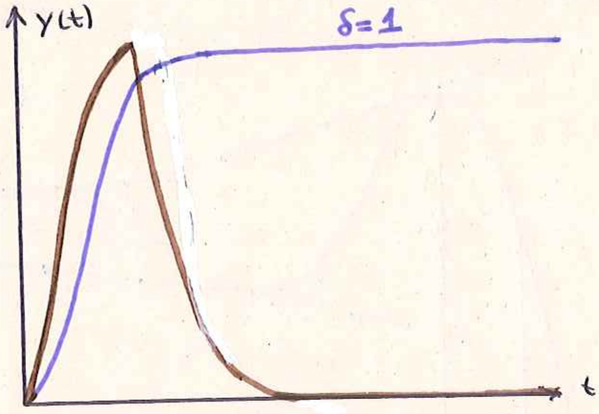




$\omega_n \uparrow$ oscilación mayor.

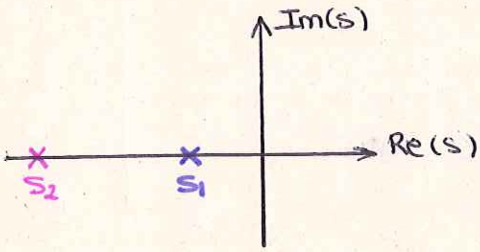
$\delta = 1$ SISTEMA SOBRE-AMORTIGUADO

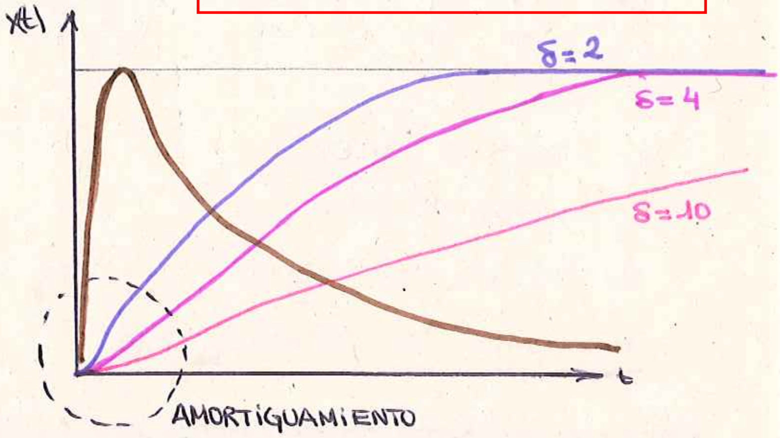




- RESPUESTAS A ESCALÓN
- RESPUESTA A IMPULSO

$\delta > 1$ SISTEMA SOBRE-AMORTIGUADO

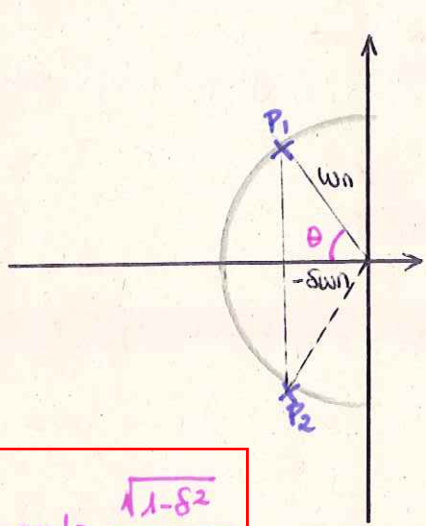


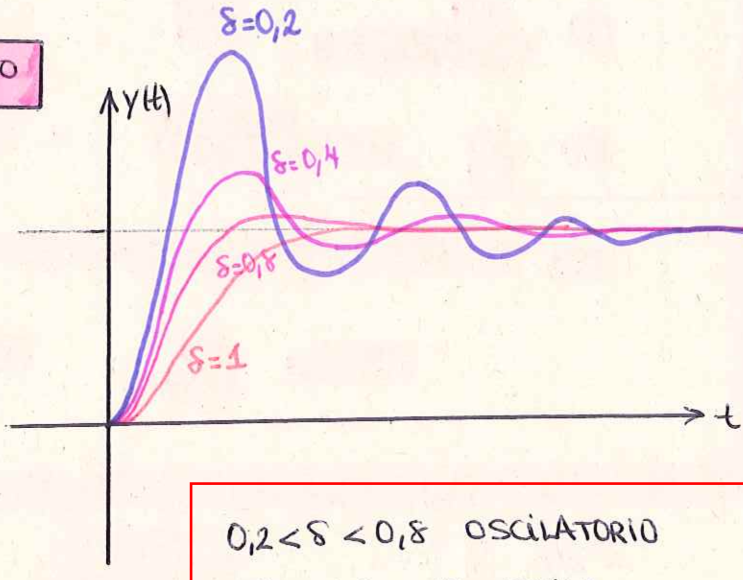


Aproximo a sistemas de 1° orden cuando

$\frac{d_2}{d_1} > 5 \longrightarrow$ Así elimino el amortiguamiento inicial.

$0 < \delta < 1$ SISTEMA SUB-AMORTIGUADO





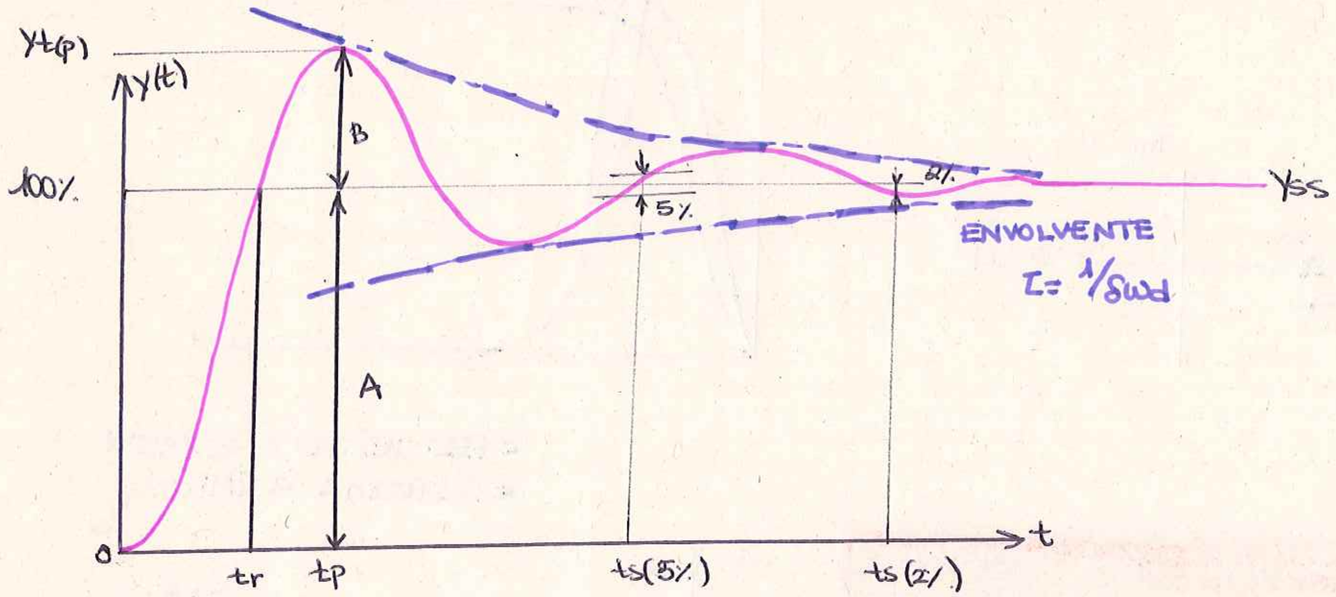
$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$

$0{,}2 < \delta < 0{,}8$ OSCILATORIO

$\delta \geq 0{,}8$ NO OSCILA

$\delta \geq 1$ NO PRESENTA SOBREIMPULSO

ANÁLISIS DEL SISTEMA SUB-AMORTIGUADO $0 < \delta < 1$



tr tiempo de subida

tp tiempo de pico

Mp Máximo sobreimpulso $\quad M_p = \frac{y(t_p) - y_{ss}}{y_{ss}} \cdot 100$

ts tiempo de establecimiento

"FÓRMULAS"

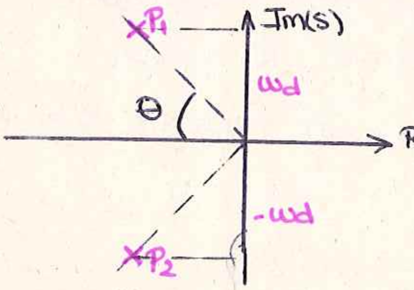
$$t_r = \frac{\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p = \frac{B}{A} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$ (sólo depende del amortiguamiento).

ts UNICAMENTE EN SUB-AMORTIGUADO ⇒ Polos complejos conjugados

$$t_s(5\%) = \frac{3}{\delta \omega_n} \qquad t_s(2\%) = \frac{4}{\delta \omega_n}$$



$\theta = \arccos \delta$

$\delta = \cos \theta$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$ FRECUENCIA AMORTIGUADA

$\boxed{\delta\uparrow \Longrightarrow t_p\uparrow \text{ y } M_p\downarrow}$

NOTA

Y_{ss} = suma de las áreas de la oscilación

→ si están por encima del estacionario se suman

→ si están por debajo del estacionario se restan

$Y(t_p)$ = Valor de la mayor área (la primera).

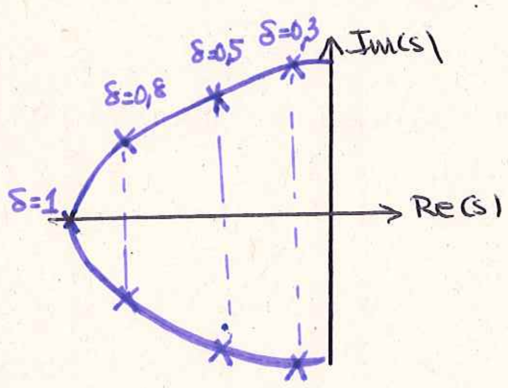
$$M_p = \frac{Y(t_p) - Y_{ss}}{Y_{ss}}$$

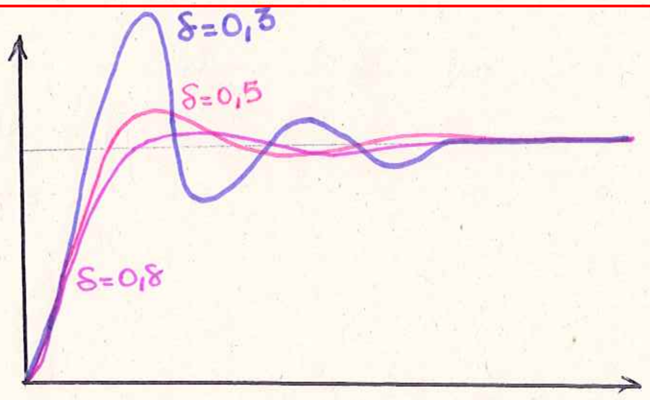
CUANDO ME DAN EL GRÁFICO CON LAS ÁREAS.

MODIFICAR LOS PARÁMETROS.

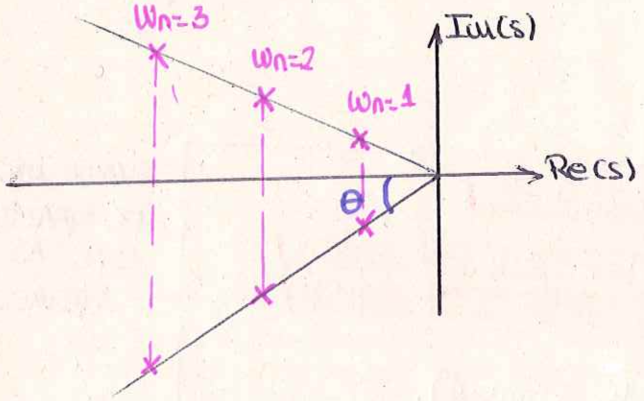
SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN CON ω_n CTE

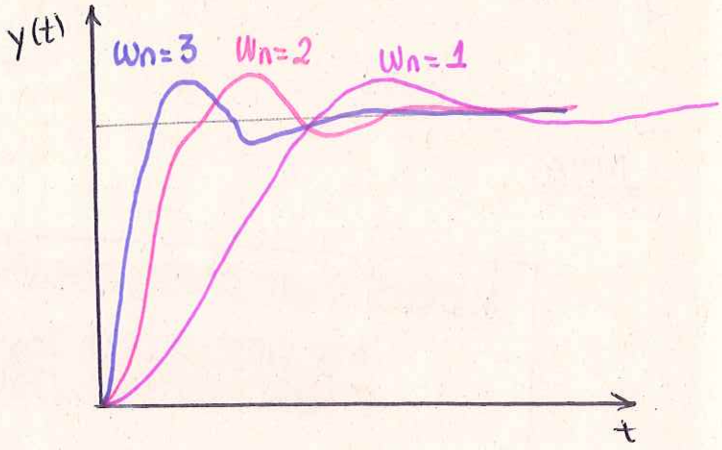
ω_n = CTE $\Longrightarrow$ si $\delta\uparrow \Longrightarrow M_p\downarrow$ $t_s\downarrow$ $t_p\uparrow$, si K = CTE MISMA PRECISIÓN





SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN CON δ CTE



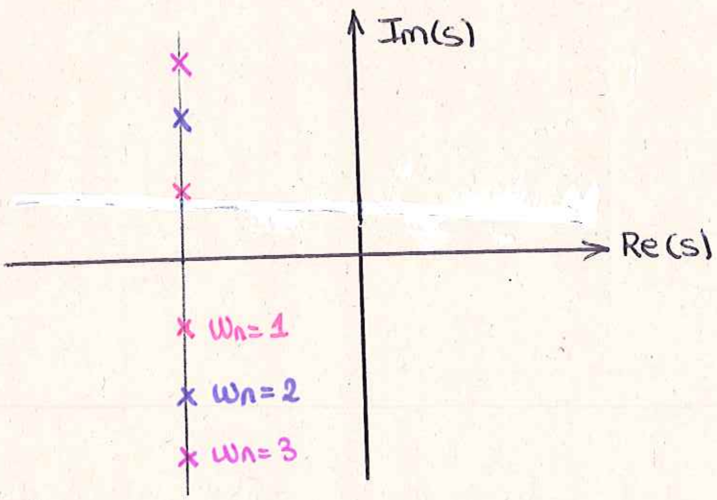


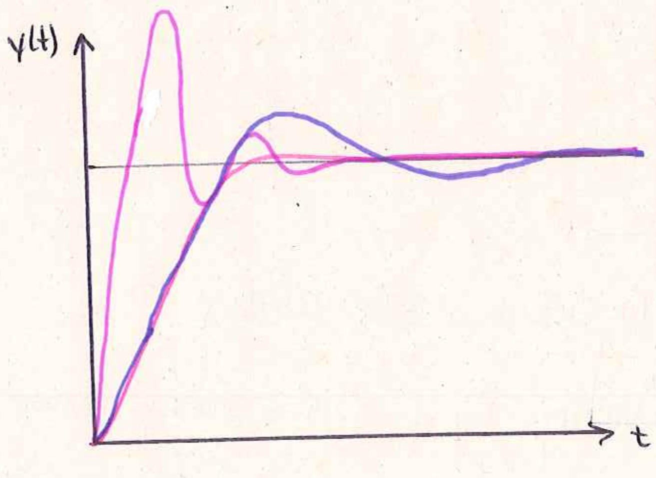
δ CTE $\Longrightarrow$ θ = CTE M_p = CTE

→ $\omega_n \uparrow \Longrightarrow t_s \downarrow \quad t_p \downarrow \quad \omega_d \uparrow$

"Parte Real" al resolver el denominador.

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN CON $\delta\omega_n$ CTE



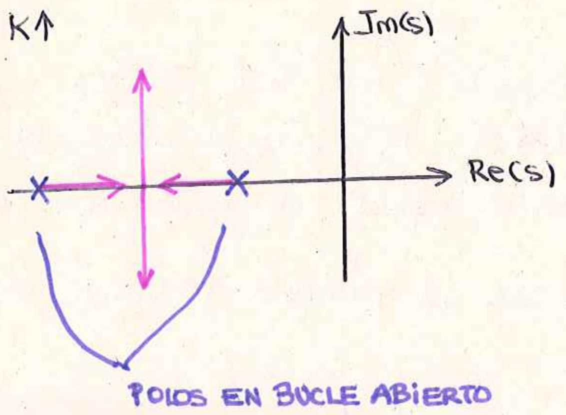


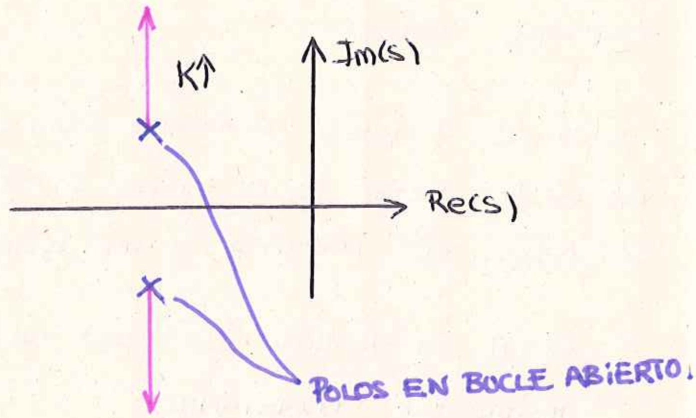
$\delta\omega_n$ CTE $\Longrightarrow t_s$ = CTE

→ si $\delta \uparrow \Longrightarrow M_p \downarrow \quad \omega_d \downarrow \quad t_p \uparrow$; si K = CTE MISMA PRECISIÓN

EFECTO DE REALIMENTAR UN SISTEMA DE 2. ORDEN

Si K aumenta el sistema se vuelve más rápido ya que el polo dominante se aleja del eje imaginario. En los sistemas sobre amortiguados el polo se aleja hasta un valor de K límite a partir del cual el sistema se vuelve sub-amortiguado (polos complejos conjugados).



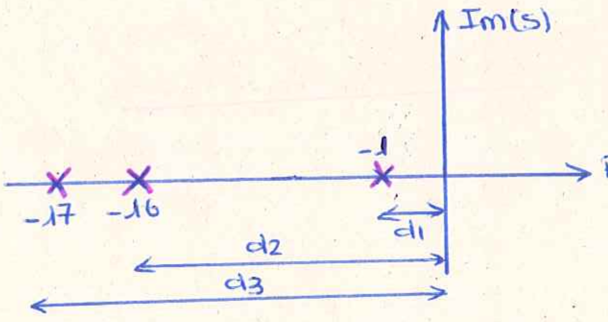


SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR

- El añadir polos contribuye a retrasar la respuesta del sistema.
- Cuando τ_i es mayor, la parte real del polo es mayor por lo que la exponencial asociada tardará más en desaparecer. Es decir, el polo tiene mayor influencia sobre la respuesta transitoria, la realentiza.
- La forma de la respuesta depende de los polos dominantes, aquellos que son más lentos.
- Un polo se puede considerar dominante respecto a otro si la relación entre las partes reales es al menos 5 $\Rightarrow$ $\boxed{d_2/d_1 > 5}$. Desprecio el efecto de los polos más rápidos y me quedo con el efecto del polo dominante.

OJO! Al eliminar los polos no dominantes LA GANANCIA ESTÁTICA DEBE permanecer CONSTANTE.

Ejemplo:



$d_2/d_1 > 5 \rightarrow P_1$ dominante

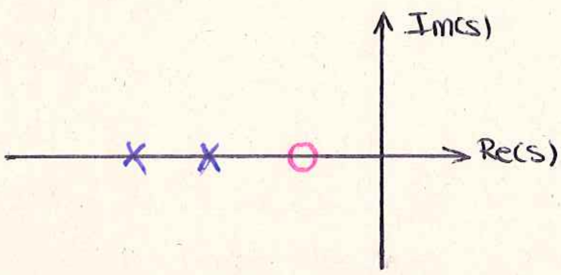
$d_3/d_1 > 5 \rightarrow P_1$ dominante

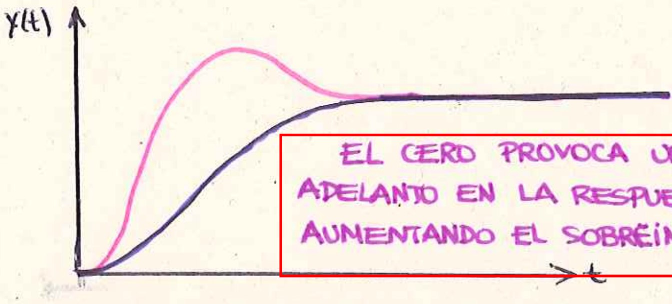
$$\boxed{G(s) = \frac{544}{(1+s)(s+16)(s+17)} = \frac{544}{(s+1)\cdot 16\cdot 17} = \frac{2}{s+1}}$$

EFECTO DE LOS CEROS SOBRE LA RESPUESTA

CUANDO C ES UN CERO ESTABLE (está en el semiplano izquierdo) la respuesta se adelanta.

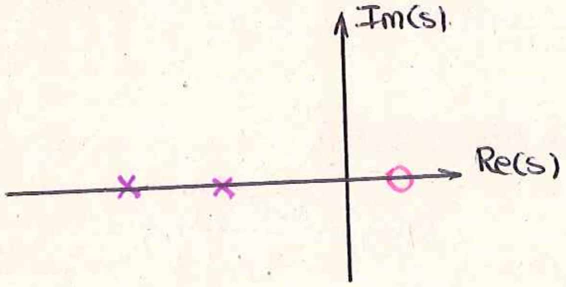
No produce oscilaciones si la respuesta sin cero no las tenía, pero puede producir un sobreimpulso si es más dominante que los polos.

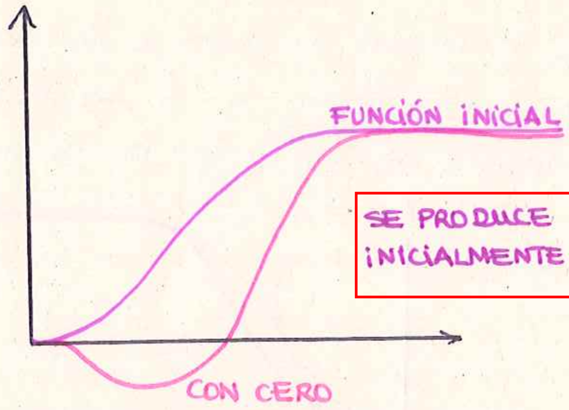




EL CERO PROVOCA UN ADELANTO EN LA RESPUESTA AUMENTANDO EL SOBREIMPULSO

Cuando tenemos un cero inestable (situado en el semiplano derecho) se produce una respuesta inicialmente inversa.





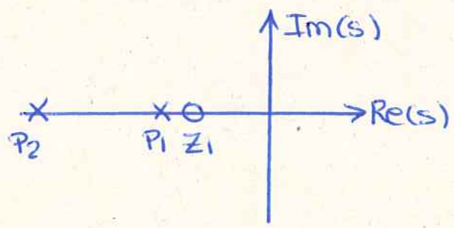
SE PRODUCE RESPUESTA INICIALMENTE INVERSA

¡¡LA ESTABILIDAD DEL SISTEMA LA DETERMINAN LOS POLOS, NO LOS CEROS, POR ESO PUEDO TENER POLOS EN EL SEMIPLANO DERECHO!!

EFECTO DE AÑADIR CEROS

- El efecto de añadir ceros contribuye a adelantar la respuesta.
- Si existe un cero cerca de un polo el residuo del polo se hace muy pequeño → Los polos y ceros muy próximos entre sí se cancelan

⇓

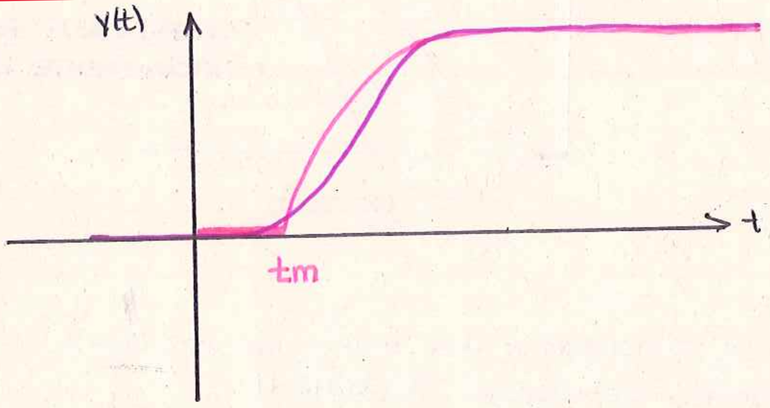


$$\frac{(s+z_1)}{(s+P_1)\,(s+P_2)} = \frac{z_1}{(s+P_2)\,P_1}$$

IMPORT. ⇒ PRIMERO SE ANALIZAN LAS CANCELACIONES ENTRE CEROS Y POLOS LUEGO SE ELIMINAN LOS POLOS NO DOMINANTES

RESPUESTAS CON TIEMPO MUERTO

Cuando el número de polos no dominantes es elevado y la respuesta del sistema es en forma de S tumbada no se puede despreciar el efecto de retardo de los polos no dominantes.



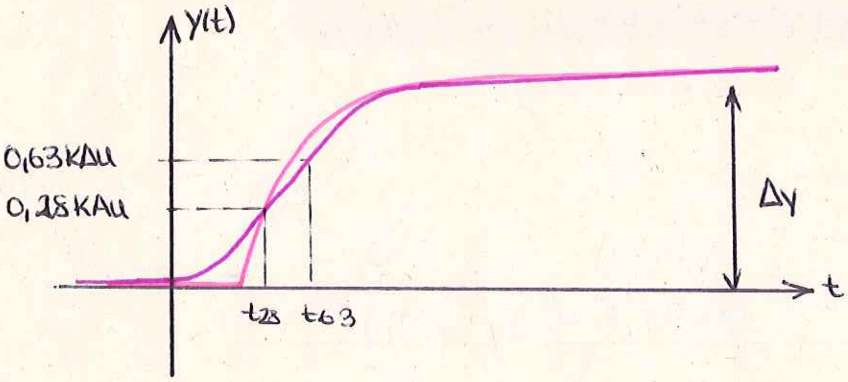
APROXIMACIÓN

$$G(s) = \frac{K e^{-tm \cdot s}}{\tau s + 1}$$

La respuesta de un sistema de orden superior con respuesta escalón monótona creciente puede aproximarse por la de uno de primer orden mas un tiempo muerto POMTM (con retardo puro).

IDENTIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE UN MODELO POMTM

MÉTODO DE LOS DOS PUNTOS.



$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-tms}}{\tau s + 1}$$

Conocidos t_{28} y t_{63} obtener tm y τ

FÓRMULAS

$$t_{28} = tm + \tau / 3 \qquad t_{63} = tm + \tau$$

Resumen

TEMA 5: ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

SISTEMAS 1º ORDEN

→ Derivan de una ecuación dif: $\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K r(t)$

sin coeficientes salida.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{\tau \cdot s + 1}$$

Cuando la ecuación inicialmente es no lineal, linealizamos y por tanto τ y K dependen del punto de operación P.O.

$$\tau(s\,Y(s) - \cancel{y(0^+)}) + Y(s) = K \cdot R(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$ Función de transferencia.

PARÁMETROS DEL SISTEMA

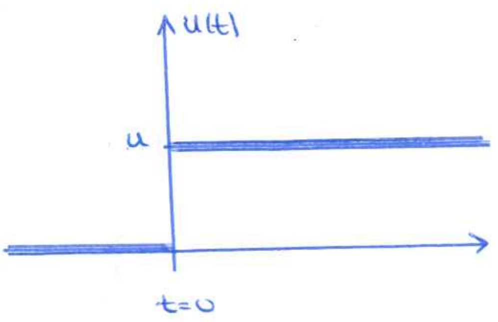
- K Ganancia del sistema. Va a tener unidades [unids Y / unids U] [unids salida / unids entrada]
- τ Constante de tiempo del sistema [unidades de tiempo]. Mide lo rápido que es el sistema.

Polo del sistema (inverso de la constante tiempo):

EJEMPLO

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Vamos a estudiar la respuesta a entrada de escalón unitario de un sistema de 1º orden.



$$\longrightarrow U(s) = \frac{u}{s}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{u}{s}$$

La función de transferencia es independiente de la entrada

Lo que depende de la entrada es la salida: para una salida concreta tendremos una entrada concreta.

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K}{\tau s+1} \cdot \frac{u}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1}$$

$$K \cdot u = A\tau s + A + Bs$$

$$A = K \cdot u$$

$$0 = A\tau + B \longrightarrow B = -\tau K u$$

$$Y(s) = \frac{Ku}{s} + \frac{-\tau K u}{\tau s + 1} = Ku \left[\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \right]$$

$$\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1$$

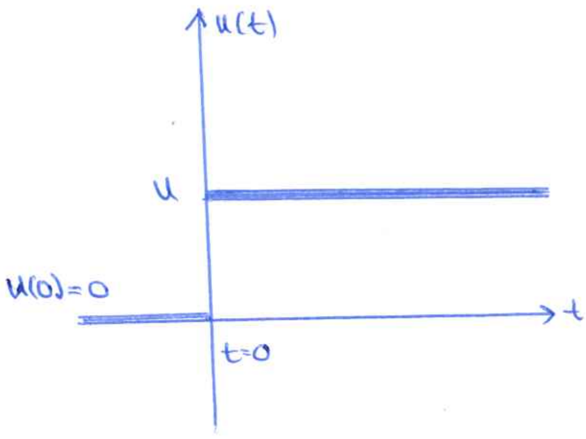
$$\frac{\tau}{\tau s+1} = \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

componente temporal

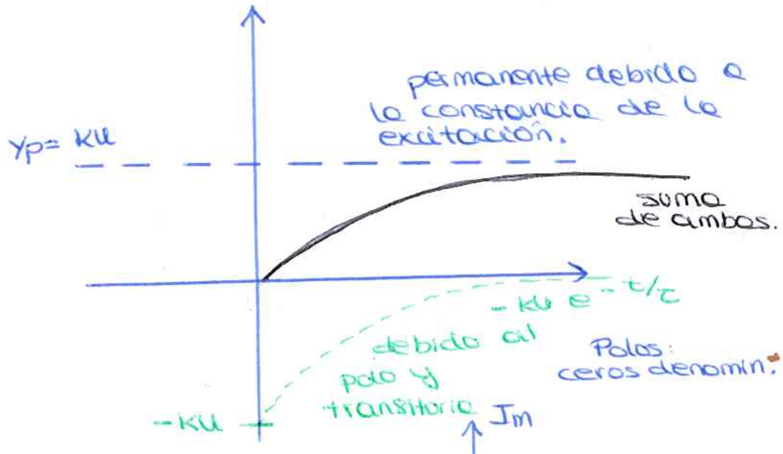
$$Y(t) = Ku - Ku\, e^{-\frac{1}{\tau}t} = Ku \left[1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right]$$

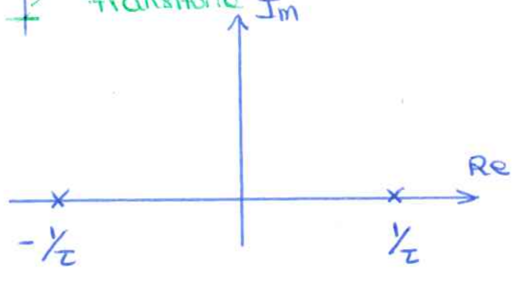
Vamos a dibujar la salida y la entrada:

ENTRADA



SALIDA





$$Y_t = \lim_{t \to \infty} e^{-t/\tau} = 0$$

sólo si $\tau > 0$

Los sistemas son estables $\Leftrightarrow$ todos los polos del sistema están en el semiplano izquierdo.

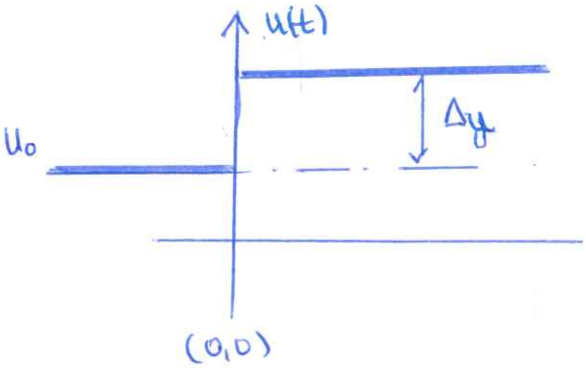
K: ganancia $\quad K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ puede ser 0 + o −

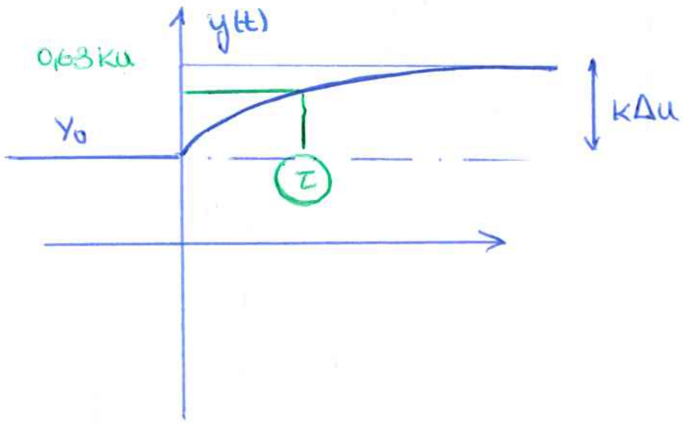
$y(t) = Ku\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$

transitorio

constante

Poniéndolo en forma genérica respecto al punto de operación:





→ Ganancia amplifica o atenúa el sistema

$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$

$K < 1$ atenúa

$K > 1$ amplifica

$K = 1$ mantiene

$K > 0$

$K < 0$

La frontera entre el transitorio y el permanente se establece.

Vamos a caracterizar el transitorio:

para $t = \tau$

$$y(\tau) = Ku\,\underbrace{\left[1 - e^{-1}\right]}_{0{,}63} = 0{,}63\,Ku$$

63% de su valor final.

τ: constante de tiempo: es el tiempo en el que el sistema de 1° orden alcanzó el 63% de su valor final.

Decidir cuando podemos considerar que se ha alcanzado el sistema estacionario.

Para $t=\tau$ $\quad (1-e^{-1})=0,63$

$t=2\tau$ $\quad (1-e^{-2})=0,86$

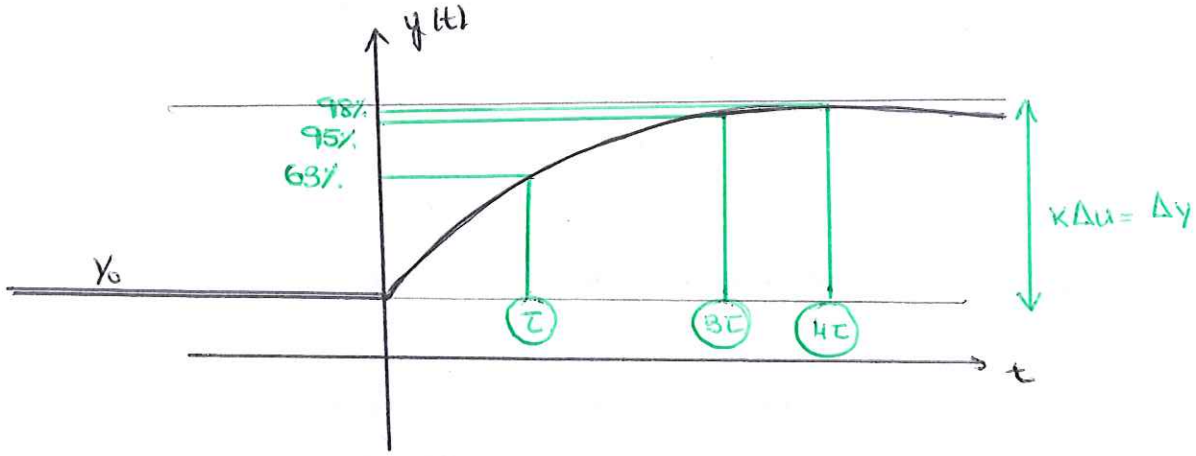
$t=3\tau$ $\quad (1-e^{-3})=0,95$ — Criterio del 5%.

$t=4\tau$ $\quad (1-e^{-4})=0,98$ — Criterio del 2%.

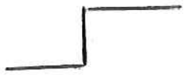
$$t_s = \begin{cases} 3\tau \text{ (criterio del 5\%)} \\ 4\tau \text{ (criterio del 2\%)} \end{cases}$$

τ: tiempo en el que se alcanza el 63% de $K\Delta u$

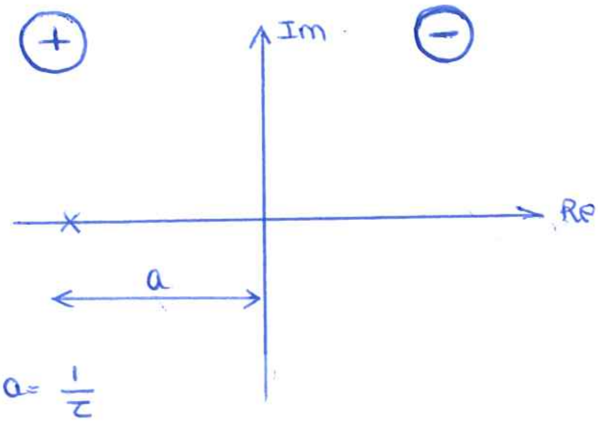
$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$



INTERPRETACIÓN EN EL PLANO S



$$y(t) = Ku\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \xrightarrow{\quad \mathcal{L} \quad} U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{\tau s + 1}} \longrightarrow Y(s)$$



$a = \frac{1}{\tau}$

EJEMPLO

$$RC\,\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = e(t)$$

$$G(s) = \frac{V(s)}{R(s)} = \frac{1}{RC\tau + 1} \longrightarrow \begin{matrix} \tau = RC \\ K = 1 \end{matrix}$$

Respuesta $\Rightarrow$ $\quad v(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$

$$Y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

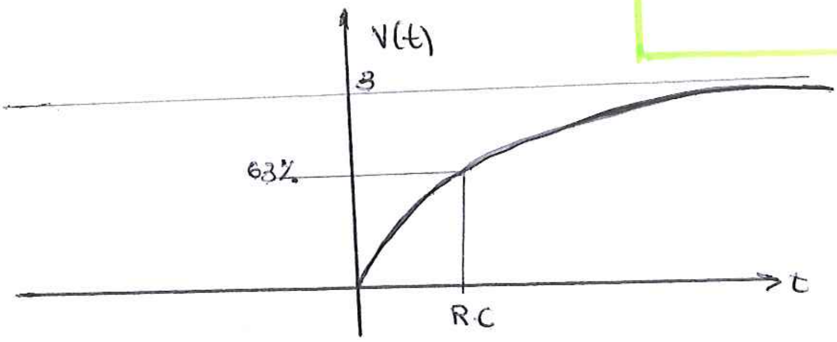
$$Y_{ss} = G(0) \longrightarrow K = \frac{\Delta y}{\Delta r} = \frac{y_{sr}}{+} = G(0)$$

TEOREMA VALOR FINAL

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s)$$

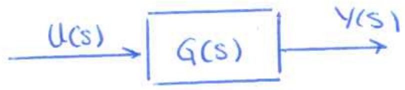
Sólo si todas las raíces del polinomio denominador tienen parte real negativa.

Cuanto mayor es R o C más lento será el sistema.



SISTEMAS PRIMER ORDEN

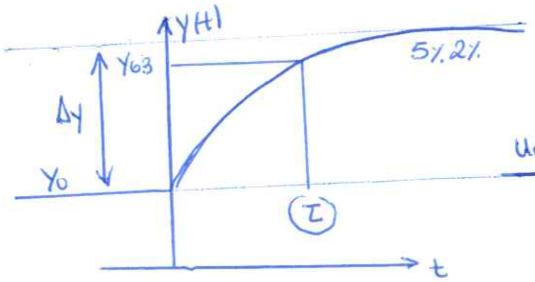
$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

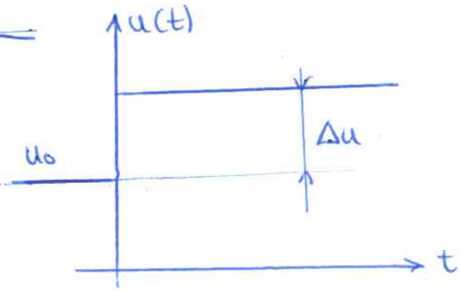


k: ganancia estática $\quad K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ mide la precisión

τ: el tiempo en el que la salida alcanza un 63% de su final

$$\boxed{Y_{63} = \bar{Y} + 0{,}63\,\Delta y}$$

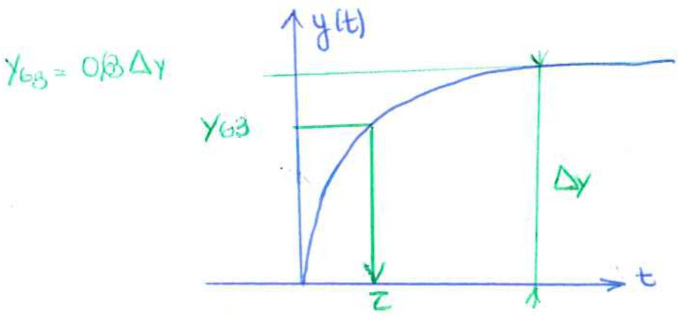


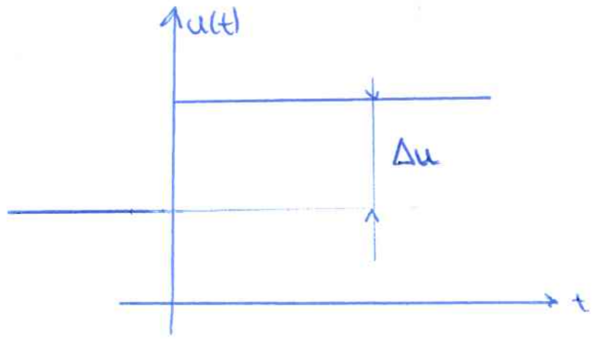


$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \qquad Y_{63} = \bar{Y} + 0{,}63 \cdot \Delta y \qquad ts = \begin{cases} 3\tau\ (5\%) \\ 4\tau\ (2\%) \end{cases}$

Cuando el sistema está 5% 2% consideramos que se encuentra ya estabilizado

IDENTIFICACIÓN EXPERIMENTAL: cuando me dan el gráfico sacar la función de transferencia.

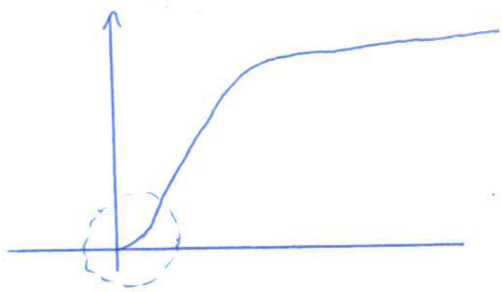




Curva de reacción
tangente en el origen no nula.
salida creciente

$\underbrace{\hspace{6cm}}$

SISTEMA DE PRIMER ORDEN



APROXIMO A 1° ORDEN

Sabemos que no es de primer orden pero se asemeja

1 POLO DOMINANTE: las componentes de los demás polos desaparecen muy rápido

Si el sistema está linealizado la ganancia (K) depende del punto de operación.

EJERCICIO

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

salida a escalón de amplitud u; $y(t) = Ku(1 - e^{-t/\tau})$

salida a impulso de área u

$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{C.i.nul} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

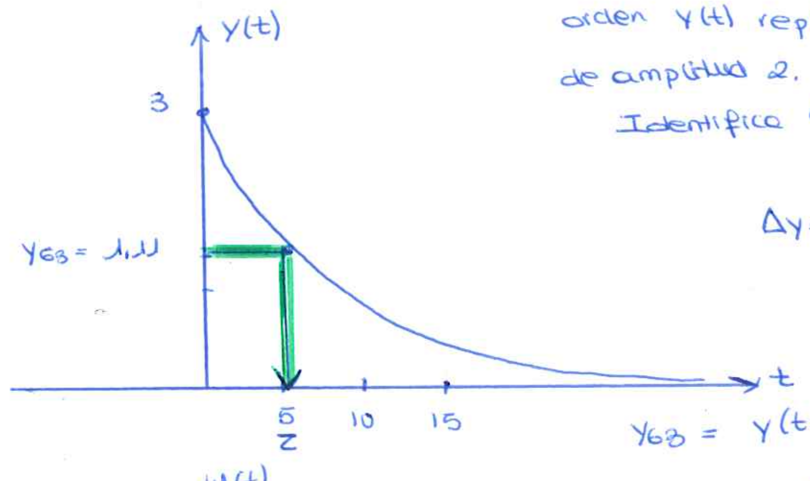
$$\begin{cases} Y(s) = G(s) \cdot U(s) \\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot U(s)] \\ U(s) = u \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot u = \frac{K \cdot u/\tau}{s + 1/\tau} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \boxed{\frac{K \cdot u}{\tau} e^{-1/\tau\, t} = y(t)}$$

EJERCICIO (diapositiva 22)

Identificación experimental del sistema de 1° orden $y(t)$ representa la respuesta a un impulso de amplitud 2.

Identifica $G(s)$



$$\Delta y = y_{fin} - y_{in} = 0 - 3 = -3$$

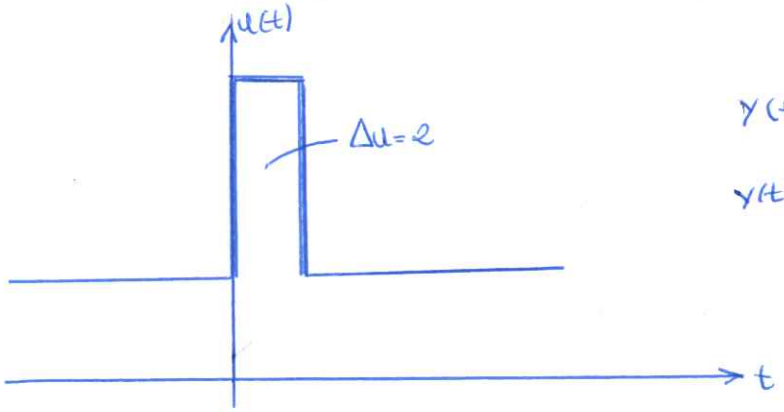
$$0{,}63\,\Delta y = -1{,}89$$

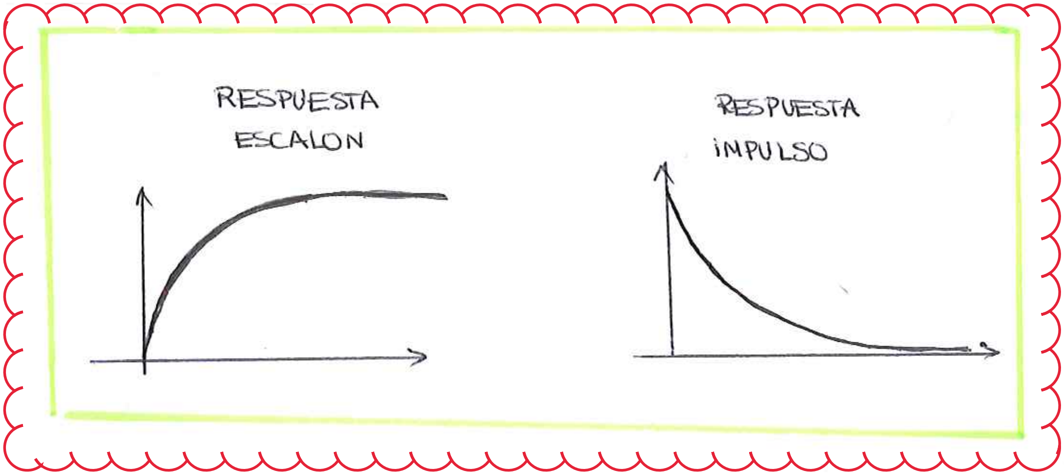
$$y_{63} = y(t=0) + 0{,}63\,\Delta y = 3 - 1{,}89 = 1{,}11$$

$$\tau = 5$$

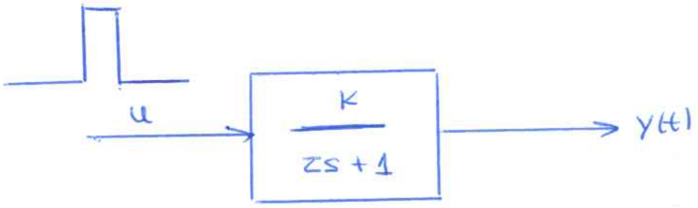
$$y(t=0) = 3 = \frac{K \cdot 2}{5} \Longrightarrow \boxed{K = 7{,}5}$$

$$y(t) = \frac{Ku}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

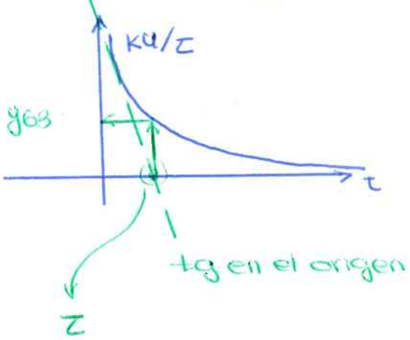




Identificación gráfico de τ (pulso)



$$y(t) = \frac{K \cdot u}{\tau} e^{-t/\tau}$$



$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

$$\rightarrow y_0 = \frac{Ku}{\tau}$$

$$\rightarrow m = \ddot{y}(t) = -\frac{Ku}{\tau^2} e^{-t/\tau}$$

$$m(t=0) = \dot{y}(t=0) = -\frac{Ku}{\tau^2}$$

$$t = 0 \quad \left(0, \frac{Ku}{\tau}\right)$$

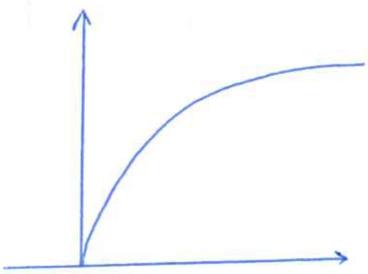
$$y(t) = \frac{Ku}{\tau} = -\frac{Ku}{\tau^2}(t=0)$$

$$y(t) = \frac{Ku}{\tau} - \frac{Ku}{\tau^2} t$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{Ku}{\tau}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

en $t = \tau$ $\quad y(t) = 0$

Identificación gráfico de τ (escalón unitario)

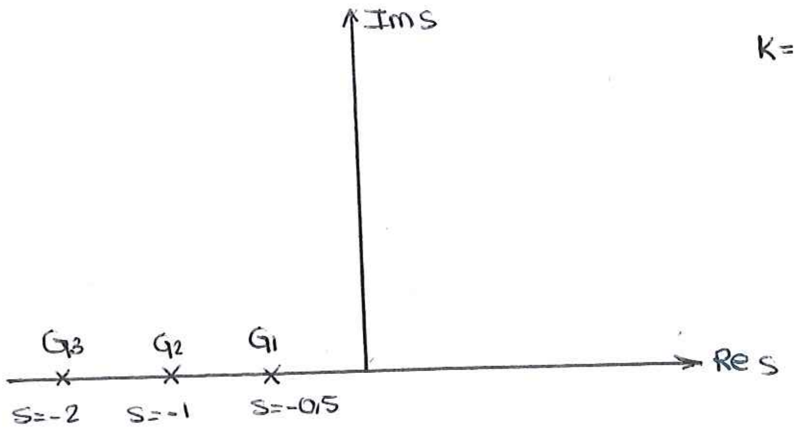


$$y(t) = Ku\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{Ku}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

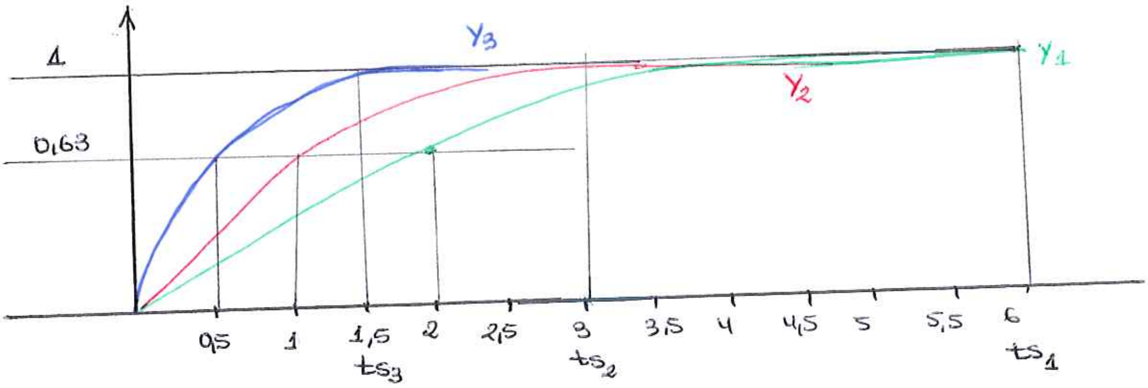
$$m(t=0) = \dot{y}(t=0) = \frac{Ku}{\tau}$$

SISTEMAS CON MISMA GANANCIA (K) Y DIFERENTE CTE DE TIEMPO



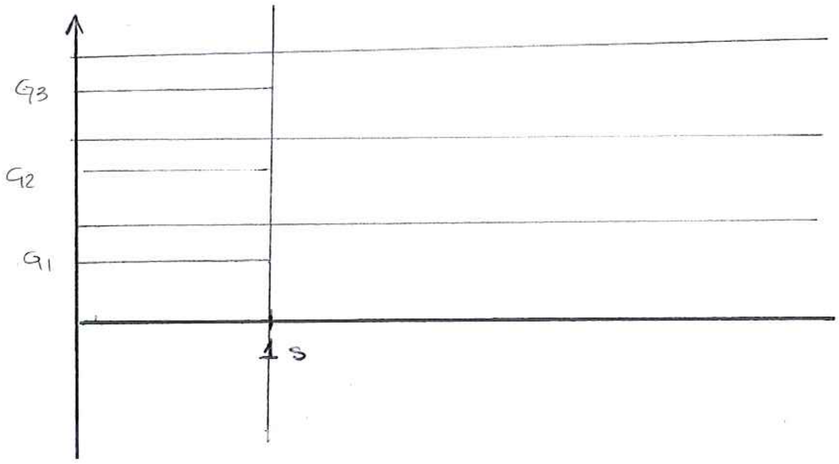
$K=1$

$$G_1(s)=\frac{1}{2s+1} \qquad G_2(s)=\frac{1}{s+1} \qquad G_3(s)=\frac{1}{0{,}5s+1}$$



mismo τ y $\neq$ ganancia

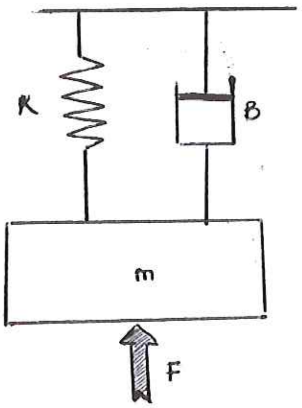
$$G_1(s)=\frac{1}{s+1} \qquad G_2(s)=\frac{2}{s+1} \qquad G_3(s)=\frac{3}{s+1}$$

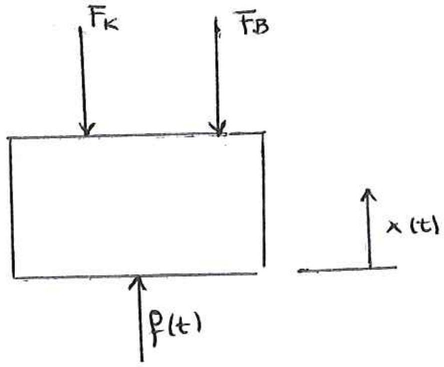


Respuesta a rampa $\quad u(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$$y(t) = Kt - K\tau t + K\tau e^{-t/\tau}$$

EJERCICIO 5





$$F(t) - Kx(t) - B\frac{dx(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}_{c.i.n.} = F(s) - KX(s) - BsX(s) = ms^2\,X(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + K}$$ (dos polos).

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$ $\longrightarrow$ divido entre m

$$G(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{K}{m}}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{m} = 2\delta\omega_n \\ \omega_n^2 = \frac{K}{m} \\ K\omega_n^2 = \frac{1}{m} \end{cases} \longrightarrow K = \frac{1}{K}$$ ganancia estática del sistema

$$K = \frac{\Delta x}{\Delta F}$$

TEMA 5: ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

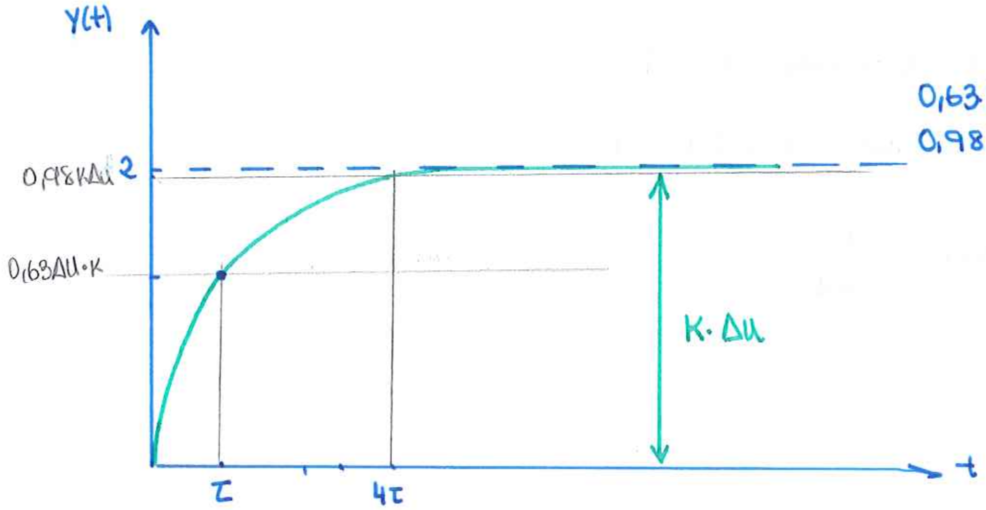
EJERCICIO 1

RESPUESTA A ESCALÓN UNITARIO $R(s) = \frac{1}{s}$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s+2{,}5} \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s}\,\frac{5}{s+2{,}5} \longrightarrow Ku\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = y(t)$$

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2{,}5} = \frac{2}{5} \\ K &= 2 \end{aligned}\right\} \quad G(s) = \frac{2}{0{,}4s + 1}$$

$$y(t) = 2\left(1 - e^{-2{,}5t}\right)$$



$0{,}63\,Ku = 0{,}63 \cdot 2 = 1{,}26$

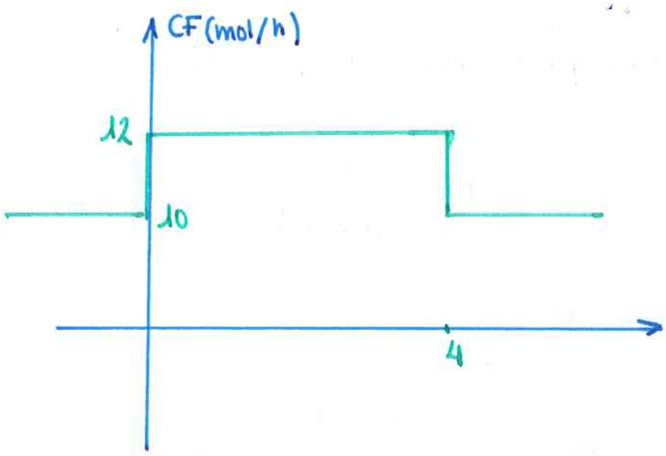
$0{,}98\,Ku = 0{,}98 \cdot 2 = 1{,}96$

$\tau = 0{,}4$

$4\tau = 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6$

EJERCICIO 2

$$G(s) = \frac{C'(s)}{C'_F(s)} = \frac{0{,}3}{4s+1}$$



$$C'_F(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s} \cdot e^{-4s}$$

$C(t)$?

$$C'(s) = \frac{0{,}3}{4s+1} \cdot \frac{2}{s} - \left(\frac{0{,}3}{4s+1} \cdot \frac{2}{s} e^{-4s}\right)$$ DESPLAZADA

RESUELVO LA PRIMERA

$$C(s) = \frac{0{,}075}{s+0{,}25} \cdot \frac{2}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0{,}25}$$

$$0{,}15 = As + 0{,}25A + Bs$$

$$A = 0{,}6$$
$$B = -0{,}6$$

$$c(t) = 0{,}6 - 0{,}6\,e^{-0{,}25t} - 0{,}6 + 0{,}6\,e^{-0{,}25(t-4)}$$

EJERCICIO 3

$t = 6$

escalon $= 3 kg/m^3$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{3}{3} = 1$$

$t = 0{,}63\Delta y = 0{,}63 \cdot 3 = 1{,}89 \Longrightarrow \tau \; 1 \; 7s$

como tengo un desplazamiento $\tau = 7 - 6 = 1s$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

EJERCICIO 4

a) $\Delta u = 1$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{3}{1} = 3$$

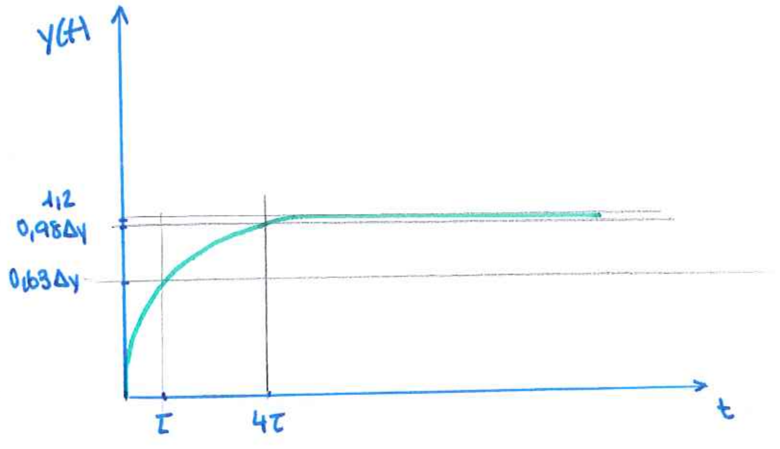
$0{,}63 \cdot \Delta y = 0{,}63 \cdot 3 = 1{,}89 \Longrightarrow \tau = 0{,}6s$

$$G(s) = \frac{3}{0{,}6s+1}$$

b) Realimentamos el sistema

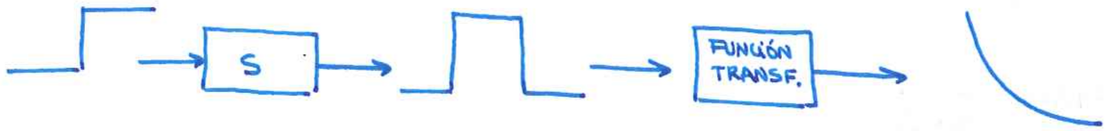
$$G_{RC}(s) = \frac{\frac{3}{0{,}6s+1}}{1 + \frac{3 \cdot 0{,}5}{0{,}6s+1}} = \frac{3}{0{,}6s + 2{,}5} = \frac{1{,}2}{0{,}24s + 1}$$

$$y(t) = K\Delta u \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 1{,}2\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}24}}\right)$$



EJERCICIO 5

RESPUESTA ESCALÓN AMPLITUD 2 → Sin embargo la gráfica representa la respuesta impulso



$$\left.\begin{array}{l}\Delta y = -3 \\ \Delta u = 2\end{array}\right\} \quad K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = -1{,}5$$

$$\Delta y \cdot 0{,}63 = -1{,}89 \longrightarrow 5 = \tau$$

$$G(s) = s \cdot \frac{-1{,}5}{5s+1}$$

EJERCICIO 6

$$G(s) = \frac{6}{s^2+s+8} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\omega_n = \sqrt{8} = 2{,}83$ rad/s

$\delta = 0{,}18$

$K = 0{,}75$

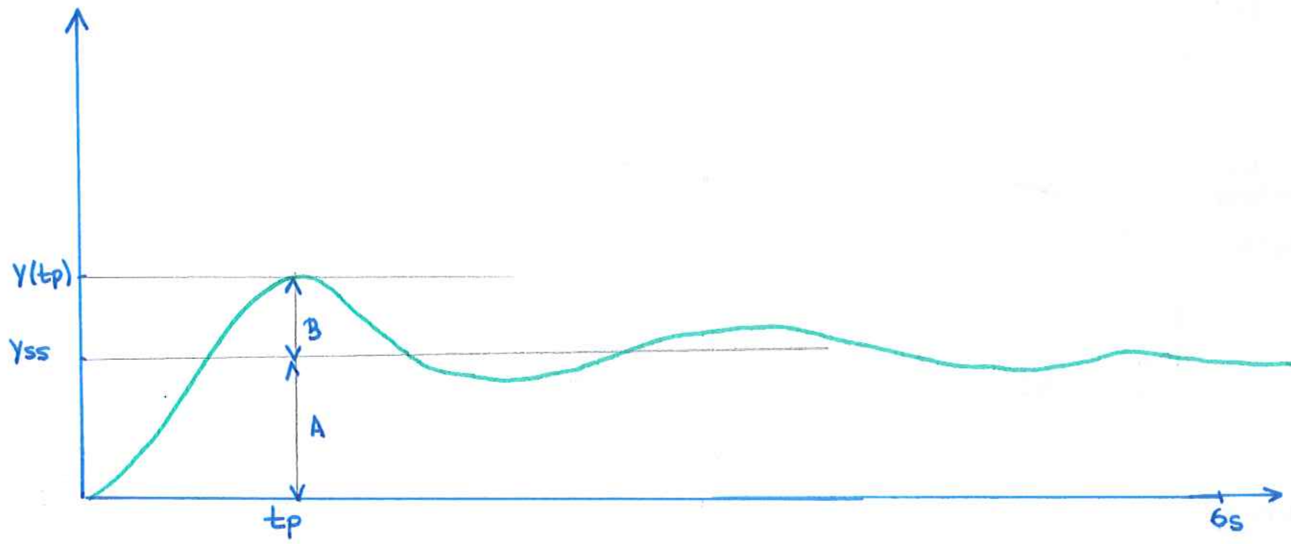
$$M_p = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0{,}57 \quad (57\%)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} = 1{,}13\ s$$

$$t_s\,(5\%) = \frac{3}{\delta\omega_n} = 5{,}9\ s$$

$Y_{ss} = 0{,}75$

$y(t_p) = Y_{ss} + M_p \cdot Y_{ss} = 0{,}75 + 0{,}57 \cdot 0{,}75 = 1{,}17$



EJERCICIO 7

$$G_1(s) = \frac{-s}{s+2}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{1/s} = \frac{-s}{s+2} \longrightarrow Y(s) = \frac{-1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = -e^{-2t}$$

MAL $G_2(s) = \frac{s-2}{s+4} \longrightarrow \begin{array}{l|l} s-2 & s+4 \\ 0\ -4 & 1 \end{array} \longrightarrow 1 + \frac{-4}{s+4} \longrightarrow y(t) = 1 - 4e^{-4t}$

MAL $G_3(s) = \frac{1{,}25}{s^2+s+2{,}5} = \frac{1{,}25}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\sqrt{2{,}25})^2} = \frac{1{,}25}{1{,}5}$.

$$Y_2(s) = \frac{s-2}{s+4}\cdot\frac{1}{s} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s} \longrightarrow s-2 = As + Bs + 4B$$

$B = -0{,}5$

$1 = A + B$

$A = 1{,}5$

$$Y_2(t) = 1{,}5e^{-4t} - 0{,}5$$

$$Y_3(s) = \frac{1{,}25}{s^2+s+2{,}5}\cdot\frac{1}{s} = \frac{As+B}{s^2+s+2{,}5} + \frac{C}{s} \longrightarrow 1{,}25 = As^2 + Bs + Cs^2 + Cs + 2{,}5C$$

$C = 0{,}5$

$B = -0{,}5$

$A = -0{,}5$

$$Y_3(s) = \frac{0{,}5}{s} - 0{,}5\left[\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\sqrt{2{,}25})^2}\right] = \frac{0{,}5}{s} - 0{,}5\left[\frac{s+0{,}5}{(s+0{,}5)^2+\sqrt{2{,}25}^2} + \frac{0{,}5}{(s+0{,}5)^2+\sqrt{2{,}25}^2}\right]$$

$$Y_3(t) = 0{,}5\left[1 - \cos\sqrt{2{,}25}t\, e^{-0{,}5t} - \operatorname{sen}\sqrt{2{,}25}t\cdot e^{-0{,}5t}\cdot 0{,}66\right]$$

$$Y_4(s) = \frac{1}{s^2+2s-1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s-0{,}41} + \frac{B}{s+2{,}41} + \frac{C}{s}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \begin{cases} 0{,}41 \\ -2{,}41 \end{cases}$$

$$1 = As^2 + A \cdot 2{,}41 \cdot s + Bs^2 - Bs0{,}41 + C[s^2+2s-0{,}99]$$

$$C = -1$$

$$0 = A\,2{,}41 - B0{,}41 + C \cdot 2$$

$$0 = A + B + C \longrightarrow A = -1-B$$

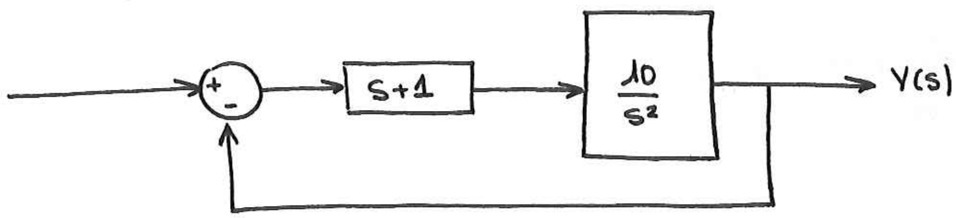
$$0 = -2{,}41 - 2{,}41B - 0{,}41B + 2$$

$$B = 0{,}146$$

$$A = 0{,}853$$

$$y_4(t) = 0{,}853\, e^{0{,}41t} + 0{,}146\, e^{-2{,}41t} - 1$$

EJERCICIO 8



$$G(s) = \frac{(s+1) \cdot 10}{(s+1) \cdot 10 + s^2} = \frac{10s+10}{s^2+10s+10}$$

$$\omega_n = \sqrt{10} = 3{,}16$$

$$\delta = 1{,}58 \quad \text{(sistema sobreamortiguado)}$$

Calcular $y(t)$:

Respuesta escalón unitario

$$s = \frac{-10 \pm \sqrt{100-40}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{60}}{2} \begin{cases} s_1 = -1{,}13 \\ s_2 = -8{,}87 \end{cases}$$

$$10s + 10 = A(s+8{,}87)s + B(s+1{,}13)s + C\,\underbrace{(s+8{,}87)(s+1{,}13)}_{s^2+10s+10}$$

$$C = 1$$

$$\cancel{10} = \cancel{10} + 8{,}87A + 1{,}13B$$

$$-10 = A + B$$

$$A = -1{,}14$$

$$B = 0{,}135$$

$$y(t) = 1 - 1{,}14 \cdot e^{-8{,}87t} + 0{,}135\, e^{-1{,}13t}$$

Derivo e igualo a cero para hallar el máximo de la función

$$y'(t)\ 1{,}14 \cdot 8{,}87 \cdot e^{-8{,}87t} - 0{,}135 \cdot 1{,}13 \cdot e^{-1{,}13t} = 0$$

$$e^{-8{,}87t} = 0{,}015\, e^{-1{,}13t}$$

$$-8{,}87t_p = \ln 0{,}015 \quad -1{,}13t_p$$

$$\underline{t_p = 0{,}54\,s}$$

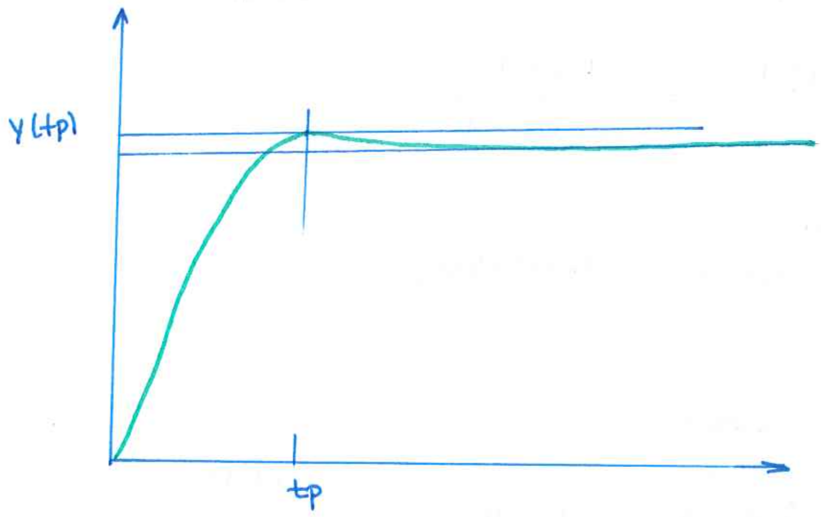
Sustituyo el valor en la función para calcular $y(t_p)$

$$y(t_p) = 1 - 1{,}14 \cdot e^{-8{,}87 \cdot 0{,}54} + 0{,}135 \cdot e^{-1{,}13 \cdot 0{,}54}$$

$$\underline{y(t_p) = 1{,}06 \simeq 1}$$

$$\underline{Y_{ss}} = \lim_{t \to \infty} y(t) = \underline{1}$$

$$M_p = \frac{y(t_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = 0{,}06$$



EJERCICIO 9

$y(t_p) = 1 + 0{,}25 = 1{,}25$

$y(ss) = 1$

$M_p = \dfrac{1{,}25 - 1}{1} = 0{,}25 \ (25\%)$

$M_p = e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \longrightarrow \ln 0{,}25 = -\dfrac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$

$\ln 0{,}25 \sqrt{1-\delta^2} = -\pi\delta$

$\ln 0{,}25^2 (1-\delta^2) = \pi^2 \cdot \delta^2$

$(\ln 0{,}25)^2 = (\ln 0{,}25^2 + \pi^2)\delta^2$

$\delta = 0{,}4$

$t_p = 3 = \dfrac{\pi}{w_n\sqrt{1-0{,}4^2}} \longrightarrow w_n = \dfrac{\pi}{3\sqrt{1-0{,}4^2}} = 1{,}24 \text{ rad/s}$

$G_{BC}(s) = \dfrac{K}{\tau s^2 + s + K} = \dfrac{K/\tau}{s^2 + 1/\tau\, s + K/\tau}$

$2 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}14 = 1/\tau \rightarrow \tau = 1{,}09\,s$

$(1{,}24)^2 = K/1{,}09 \longrightarrow K = 1{,}7$

EJERCICIO 10

$t_p = 2 = \dfrac{\pi}{w_n\sqrt{1-\delta^2}} \longrightarrow w_n = 1{,}71$

$M_p = 0{,}25 = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \longrightarrow \delta = 0{,}4$

$$\frac{K_1 \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{(1+K_2 s)K_1}{s^2}} = \frac{K_1}{s^2 + K_1K_2 s + K_1}$$

$K_1 = w_n^2 = 2{,}94$

$K_2 = \dfrac{2 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}71}{2{,}94} = 0{,}46$

EJERCICIO 11

$$Y(s)s^2 + K\,Y(s)\cdot s + Y(s)\cdot 4 = X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+Ks+4} = \frac{0{,}25}{0{,}25s^2 + \frac{K}{0{,}25}s + 1}$$

ecuación característico: $\dfrac{-K \pm \sqrt{K^2-16}}{2}$

$-10 \leq K \leq 0$ INESTABLE $\rightarrow$ POLOS EN EL SEMIPLANO POSITIVO

$K=0$ POLOS IMAGINARIOS PUROS $\rightarrow$ SISTEMA CRITICAMENTE ESTABLE

$0<K<4$ POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS $\rightarrow$ SISTEMA SUB AMORTIGUADO

$K=4$ POLOS REALES DOBLES

$4<K<10$ POLOS REALES

$\}\rightarrow$ SISTEMA SOBRE AMORTIGUADO

EJERCICIO 12

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{18}{s^2+3s+9}$$

$$U(s) = \frac{3}{s}$$

$$Y(s) = \frac{18}{s^2+3s+9}\cdot\frac{3}{s} = \frac{As+B}{s^2+3s+9} + \frac{C}{s}$$

$$54 = As^2 + Bs + Cs^2 + 3sC + 9C$$

$$54/9 = C = 6$$

$$0 = B + 3C \longrightarrow B = -18$$

$$A = -C = -6$$

$$Y(s) = -\frac{6s+18}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6{,}75}\right)^2} + \frac{6}{s} = -6\left[\frac{s+3}{\left(s+\frac{3}{2}\right) + \left(\sqrt{6{,}75}\right)^2}\right] + \frac{6}{s}$$

$$y(t) = -6\cdot\cos\sqrt{6{,}75}t\cdot e^{-1{,}5t} - \frac{6\cdot 1{,}5}{\sqrt{6{,}75}}\,\mathrm{sen}\sqrt{6{,}75}t\cdot e^{-1{,}5t} + 6$$

$y(t) \leq 10$

Supongo que será en el estacionario → o pico

↳ IMPORTANTE:

$y_{ss} = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = 6$ Teorema del valor final

$10 = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = s \cdot \frac{18}{s^2+3s+9} \cdot \frac{x}{s}$

$10 = 2x$

↳ $\boxed{x = 5}$ valor máximo de escalón que puede aceptar.

EJERCICIO 12

$4X(s)s^2 + 0{,}8X(s) \cdot s + X(s) = P(s)$

$G(s) = \frac{P(s)}{X(s)} = \frac{1}{(4s^2+0{,}8s+1)} = \frac{0{,}25}{s^2+0{,}2s+0{,}25}$

$\omega_n = \sqrt{0{,}25}$

$\delta = \frac{0{,}2}{2\sqrt{0{,}25}} = 0{,}2$ SISTEMA SUB AMORTIGUADO ($0 < \delta < 1$)
POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS

$K = 1$

$M_p = e^{\frac{-\pi \cdot 0{,}2}{\sqrt{1-0{,}2^2}}} = 0{,}53$ (53%)

c) $P(t) = 2e^{-4t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{s+4}$

$X(s)[4s^2+0{,}8s+1] = \frac{2}{s+4}$

$G(s) = \frac{2}{4s^2+0{,}8s+1} \cdot \frac{1}{s+4} = \frac{0{,}5}{s^2+0{,}2s+0{,}25} \cdot \frac{1}{s+4}$

$0{,}5 = A(s^2+0{,}2s+0{,}25) + Bs(s+4) + C(s+4)$

$B = -0{,}03$
$C = 0{,}12$
$A = 0{,}03$

$$Y(s)=\frac{0{,}03}{s+4}+\frac{-0{,}03s+0{,}12}{s^2+0{,}2+0{,}25}$$ → Si me pidieran temporal $\mathcal{L}^{-1}$

EJERCICIO 15

$t_p = 1{,}7$

$$t_p = 1{,}7 = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} \longrightarrow \omega_n = 2{,}08 \text{ rad/s}$$

$$M_p = \frac{B}{A} = 0{,}2 = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$\operatorname{Ln} 0{,}2^2\,(1-\delta^2) = \pi^2\cdot\delta^2$$

$$\operatorname{Ln} 0{,}2^2 = (\operatorname{Ln} 0{,}2^2+\pi^2)\cdot\delta^2$$

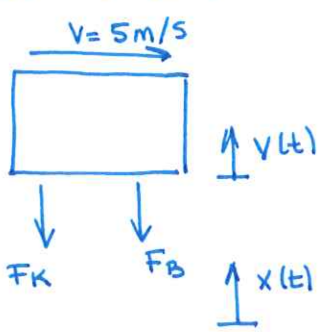
$$\delta = 0{,}46$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \Rightarrow y_{ss} = 4/2 = 2$$

$$G(s) = \frac{2\cdot 2{,}08^2}{s^2+2\cdot 0{,}46\cdot 2{,}08s+2{,}08^2} = \frac{8{,}62}{s+1{,}91s+4{,}31}$$

EJERCICIO 16

Diagrama del sólido libre:



Modelo matemático:

$$\Sigma F = m\cdot\vec{a}$$

$$F_B + F_K = m\cdot\vec{a}$$

$$-B(\dot{y}-\dot{x}) - K(y-x) = m\ddot{y}$$

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = B\dot{x} + Kx$$

$$Y(s)\left[s^2\cdot m + sB + K\right] = X(s)\left[Bs+K\right]$$

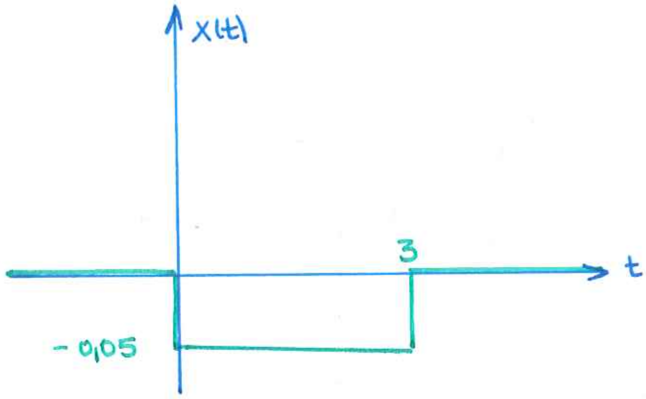
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Bs+K}{s^2M+sB+K} = \frac{B/M\, s + K/M}{s^2 + B/M\, s + K/M}$$

Sustituyo los datos:

$$G(s) = \frac{10s + 500}{s^2 + 10s + 500} \quad \text{FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA}$$

$$X(s) = -\frac{0{,}05}{s} + \frac{0{,}05}{s} e^{-3t}$$

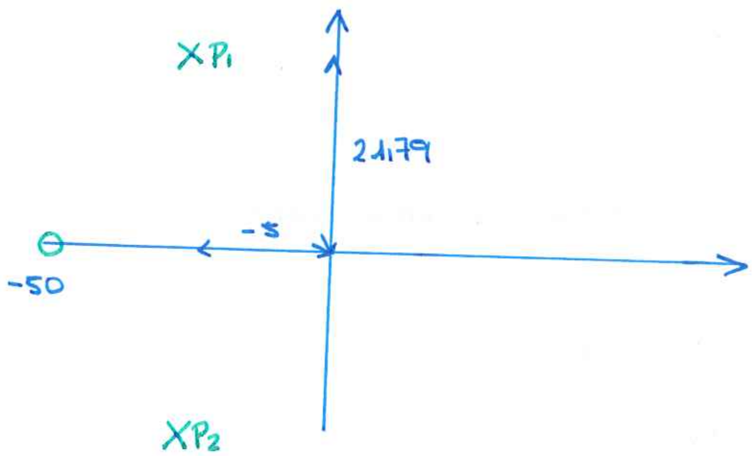
$$s = vt \longrightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{15}{5} = 3s$$



POLOS DEL SISTEMA

CEROS $\quad s_1 = -50$

POLOS $\quad s_{1,2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 500}}{2} = -5 \pm 21{,}79j$



CALCULAR LA RESPUESTA

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{10s + 500}{s^2 + 10s + 500} \left[-\frac{0{,}05}{s} + \frac{0{,}05}{s} e^{-3t} \right]$$

SIN DESPLAZAMIENTO

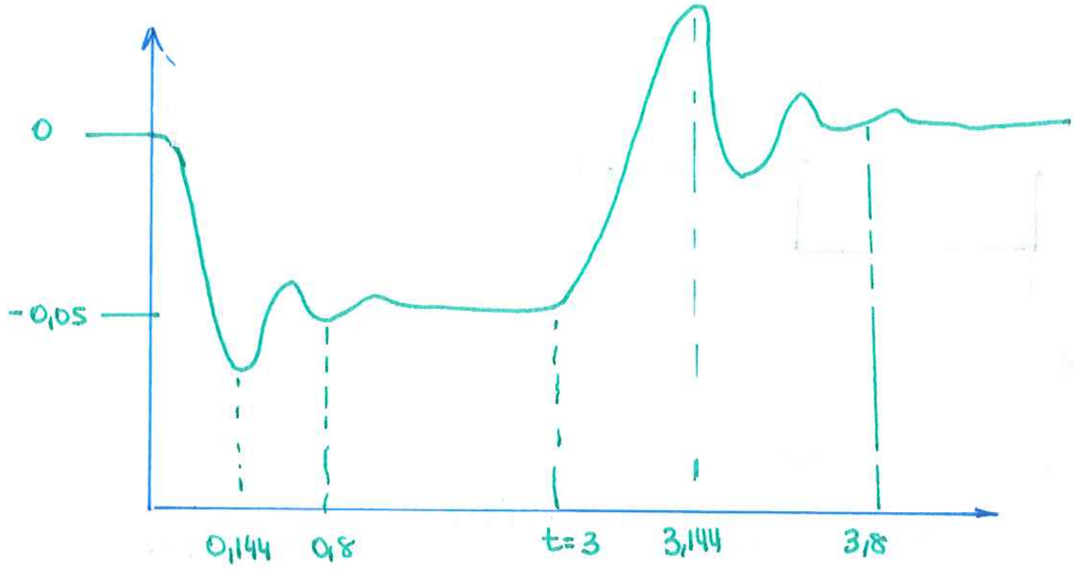
$$-0{,}05\,(10s + 500) = A\,(s^2 + 10s + 500) + (Bs + C)\,s$$

$$\left.\begin{aligned} -0{,}5 &= A\cdot 10 + C \\ 0 &= A + B \\ -25 &= A\cdot 500 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= -0{,}05 \\ B &= 0{,}05 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

$$y(t) = -0{,}05 + 0{,}05\cos\sqrt{475}\,t\, e^{-5t} - \frac{0{,}05\cdot 5}{\sqrt{475}} \operatorname{sen}\sqrt{475}\,t \cdot e^{-5t} + 0{,}05$$

$$-0{,}05\cos\sqrt{475}\,(t-3)\, e^{-5(t-3)} + \frac{0{,}05\cdot 5}{\sqrt{475}} \operatorname{sen}\sqrt{475}\; t-3\; e^{-5(t-3)}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



Hay que calcular los parámetros

$$\omega_n = \sqrt{500}$$

$$\delta = \frac{5}{\sqrt{500}} = 0{,}22 \quad \text{SISTEMA SUB-AMORTIGUADO}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0{,}48 \;(48\%)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} = 0{,}144$$

$$t_s = \frac{4}{\delta\omega_n} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Para disminuir la amplitud de las oscilaciones δ tiene que ser mayor (a mayores factores de amortiguamiento, menores oscilaciones)

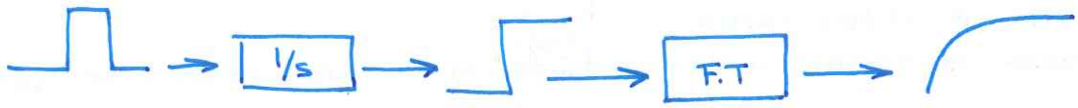
$$\omega_n = \sqrt{K/M}$$

$$2\omega_n\delta = B/M \longrightarrow \delta = B/M \cdot \frac{1}{2}\, \sqrt{M}/\sqrt{K} = \frac{B}{2\sqrt{K}\sqrt{M}}$$

Para disminuir las oscilaciones del sistema tendríamos que aumentar el coeficiente de rozamiento viscoso del amortiguador (B) o disminuir la constante elástica del muelle.

EJERCICIO 17

La respuesta es de tipo escalón pero me dicen que la entrada es un impulso



$$y = 5(1-e^{-t}) \rightarrow K = 5$$
$$\tau = 1$$

$$G(s) = 1/s \cdot \frac{5}{s+1}$$

EJERCICIO 18

$Yss = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1{,}47$

$y(tp) = 2{,}05$

$$Mp = \frac{y(tp) - yss}{Yss} = 0{,}39 \ (39\%) \qquad K = \frac{Yss}{\Delta u} = \frac{1{,}47}{2}$$

$$\ln 0{,}39^2 = (\ln 0{,}39^2 + \pi^2)\,\delta^2$$

$$\delta = 0{,}28$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{4{,}5\sqrt{1-\delta^2}} = 0{,}72$$

$$G(s) = \frac{1{,}47 \cdot 0{,}53/2}{s^2 + 0{,}4s + 0{,}53} = \frac{0{,}78/2}{s^2 + 0{,}4s + 0{,}53} = \frac{0{,}39}{s^2 + 0{,}4s + 0{,}53}$$

EJERCICIO 19

A: sistema de primer orden $K = 1$, $\tau = 1s$ $\Rightarrow G_2(s)$

B: Sistema SUB AMORTIGUADO $0 < \delta < 1$ $\Rightarrow G_7(s)$

C:  $\rightarrow$ SISTEMA SUB-AMORTIGUADO $\Rightarrow G_1(s)$

D: SISTEMA DE PRIMER ORDEN
EMPIEZA EN NEGATIVO $\rightarrow$ HAY UN CERO EN EL PLANO POSITIVO $\Rightarrow G_8(s)$

E: SISTEMA SUB-AMORTIGUADO CON UN CERO EN EL PLANO POSITIVO $\Rightarrow G_6(s)$

F: SISTEMA DE PRIMER ORDEN $K = 1$, $\tau = 0,1$ $\Rightarrow G_5(s)$

G: SISTEMA DE PRIMER OREN $K = 0,1$, $\tau = 0,1$ $\Rightarrow G_4(s)$

H: SISTEMA SOBRE AMORTIGUADO CON UN CERO MÁS DOMINANTE QUE LOS POLOS $\Rightarrow G_9(s)$

I: SISTEMA SOBRE AMORTIGUADO POLOS DOBLES $\Rightarrow G_3(s)$

EJERCICIO 21

$t_s \leq 2s$

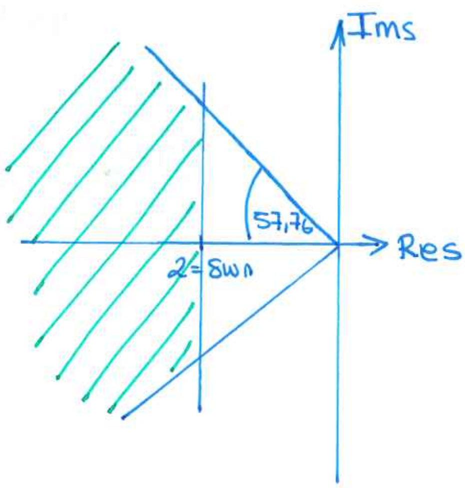
$M_p \leq 10\% \Rightarrow (\ln 0,1)^2 \geq (\ln 0,1^2 + \pi^2)\,\delta^2$

$\delta \leq 0,59$

$\delta = \cos\theta$

$\theta = 53,76°$

$t_s \leq 2 \Rightarrow \underbrace{\dfrac{4}{\omega_n \delta}}_{\delta\omega_n \geq 2} \leq 2 \longrightarrow \omega_n \geq 3,39 \text{ rad/s}$



EJERCICIO 22

E: $\delta = 0 \Rightarrow \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} = \dfrac{1}{s^2 + 4}$

$T_n = \dfrac{2\pi}{\omega_n} \longrightarrow \omega_n = 2 \text{ rad/s}$

$\Downarrow$ 3,14

$K = 0{,}25$

D: $\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s} \cdot e^{-2s} = Y(s)$

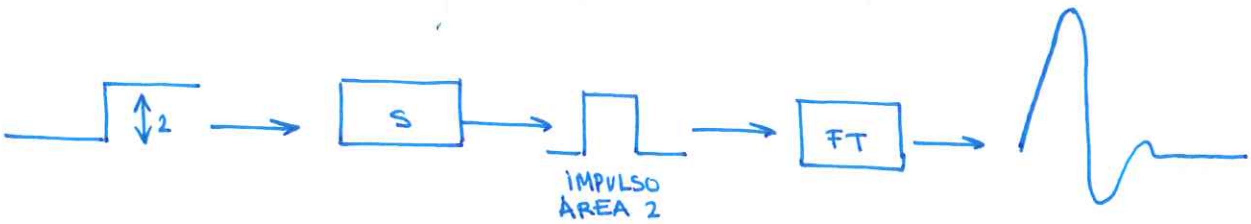
$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{Y(s)}{1/s} = 1 - e^{-2s}$

EJERCICIO 23

OSCILACION $3 > 1 > 2 > 4$

TIEMPO DE PICO $3 < 1 < 2 < 4$

EJERCICIO 24



$Yss = 2{,}32 + -0{,}32 = 2$

$Y(tp) = 2{,}32$

$Mp = \dfrac{2{,}32 - 2}{2} = 0{,}16$

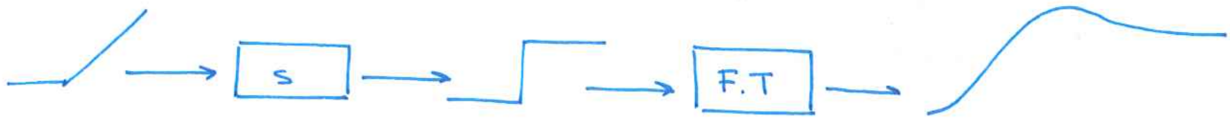
$(\ln 0{,}16)^2 = (\ln 0{,}16^2 + \pi^2)\,\delta^2$ $\qquad K = \dfrac{Yss}{2} = 1$

$\delta = 0{,}73$

$\omega_n = \dfrac{\pi}{3{,}6\sqrt{1-\delta^2}} = 1{,}29 \text{ rad/s}$

$G(s) = s \cdot \dfrac{1{,}29^2}{s^2 + 1{,}88s + 1{,}29^2}$

EJERCICIO 25



La entrada es una rampa, pero la respuesta es la típica de un escalón, por lo que en un punto del proceso se multiplica por s.

Ahora calculo la función de transferencia:

$$M_p = \frac{B}{A} = \frac{0,15}{1,5} = 0,1$$

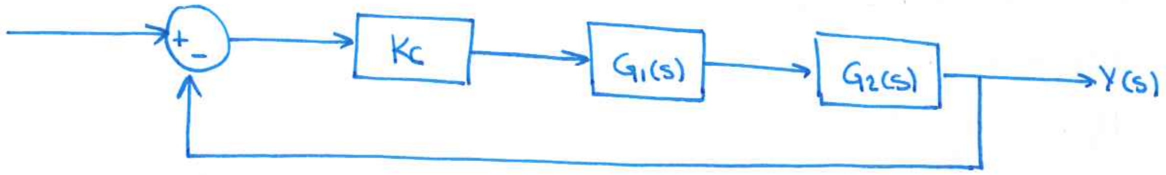
$$\delta^2 = \frac{\ln 0,1^2}{\ln 0,1^2 + \pi^2} \Longrightarrow \delta = 0,59$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = 1,5$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{1,5\sqrt{1-0,59^2}} = 2,5967 \text{ rad/s}$$

$$G(s) = s \cdot \frac{1,5 \cdot 6,74}{s^2 + 3s + 6,74} = s \cdot \frac{10,11}{s^2 + 3s + 6,74}$$

EJERCICIO 26



$G_1(s) =$

$\left.\begin{array}{l}\Delta u = 1 \\ \Delta y = 4\end{array}\right\} K = \Delta y / \Delta u = 4$

$\Delta y \cdot 0,63 = 0,63 \cdot 4 = 2,52 \Rightarrow \tau \simeq 2s$

$$G_1(s) = \frac{4}{2s+1}$$

$G_2(s)$:

$\left.\begin{array}{l}\Delta u = 1 \\ \Delta y = 2\end{array}\right\} K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = 2$

$\Delta y \cdot 0,63 = 2 \cdot 0,63 = 1,26 \Rightarrow \tau \simeq 1s$

$$G_2(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$G_{BC}(s)=\frac{8K_c}{(2s+1)(s+1)+8K_c}=\frac{8K_c}{2s^2+s+2s+1+8K_c}=\frac{8K_c}{2s^2+3s+1+8K_c}=\frac{4K_c}{s^2+\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}+4K_c}$$

$$=\frac{8}{s^2+1{,}5s+8{,}5}$$

$\omega_n=\sqrt{8{,}5}=2{,}92$ rad/s

$2\delta\omega_n=1{,}5 \longrightarrow \delta=0{,}26$

$K=\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{8}{8{,}5}=0{,}94$

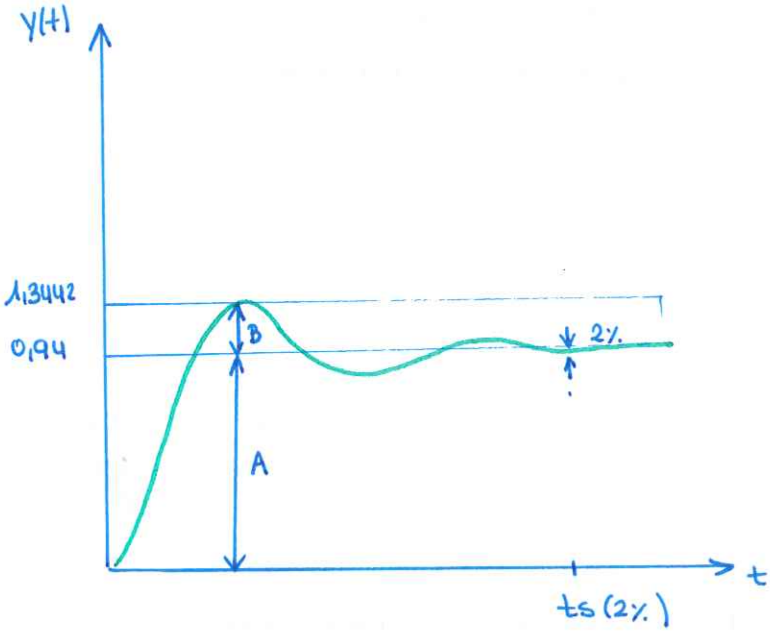
$M_p=e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}=0{,}43$ (43%)

$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}=1{,}11\,s$

$t_s(2\%)=\frac{4}{\delta\omega_n}=5{,}33\,s$

$y_{ss}=K\cdot\Delta u=0{,}94\cdot 1=0{,}94$

$y(t_p)=1{,}3442$

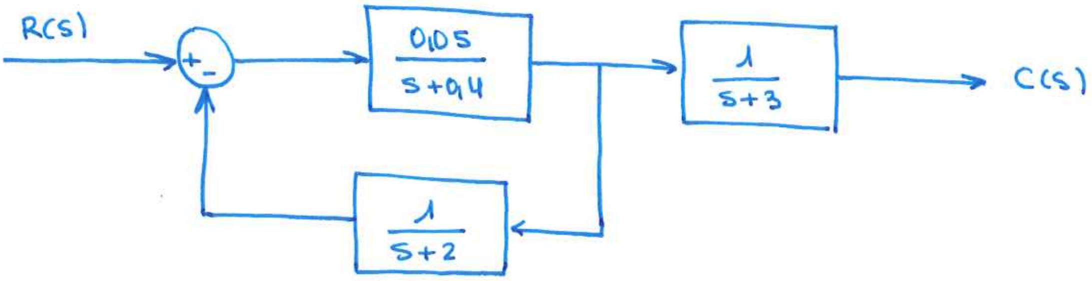


EJERCICIO 27

Obtener el sistema de orden reducido equivalente

CRITERIOS DE REDUCCIÓN

1. CANCELACIÓN CERO POLO
2. POLO DOMINANTE

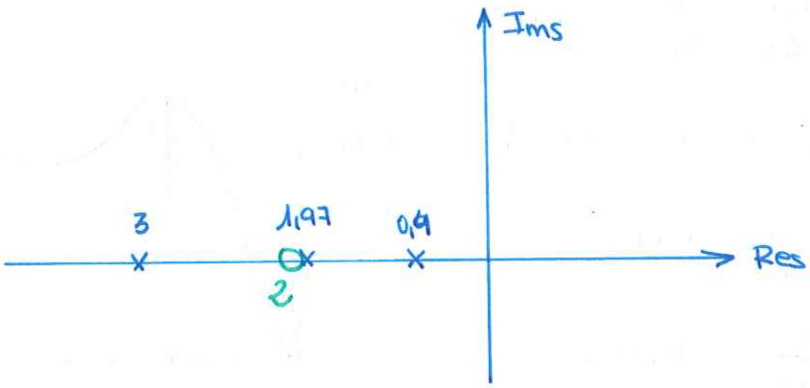


$$G_1(s)=\frac{0{,}05\,/\,s+0{,}4}{1+\frac{0{,}05}{(s+0{,}4)(s+2)}}=\frac{0{,}05\,(s+2)}{(s+0{,}4)(s+2)+0{,}05}$$

$$G_2(s) = \frac{0{,}05(s+2)}{s^2 + 2{,}4s + 0{,}85} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$\frac{-2{,}4 \pm \sqrt{2{,}4^2 - 0{,}85 \cdot 4}}{2} = -1{,}2 \pm 0{,}768 \begin{cases} s_1 = -0{,}43 \\ s_2 = -1{,}97 \end{cases}$$

$$G_2(s) = \frac{0{,}05(s+2)}{(s+0{,}4)(s+1{,}97)(s+3)}$$



1. CANCELANDO EL POLO CON EL CERO

$$G_2(s) = \frac{0{,}05 \cdot 2}{(s+0{,}4)(s+3)\,1{,}97} = \frac{0{,}05}{(s+0{,}4)(s+3)}$$

2. EL POLO 0,4 ES DOMINANTE, PUEDO DESPRECIAR EL EFECTO DEL MÁS RÁPIDO

$$G_2(s) = \frac{0{,}05}{(0{,}4s+1) \cdot 3} = \frac{0{,}017}{\cancel{0{,}4s + 1}}$$

s+0.43

TEMA 6: DISEÑO DE SISTEMAS REALIMENTADOS

FÓRMULAS

ESTABILIDAD: CRITERIO RH
- CONDICIÓN NECESARIA: $\exists$ todos los a_i ($i = 0 \ldots n$)
- CONDICIÓN SUFICIENTE: PRIMERA COLUMNA DE LA TABLA DE RH. POSITIVA

CASOS ESPECIALES:

1. SI HAY UN CERO EN LA PRIMERA COLUMNA
   sustituyo por ε $(\varepsilon \to 0^+)$

2. SI HAY UNA FILA ENTERA DE CEROS
   SUSTITUYO POR LA DERIVADA DE LA FILA ANTERIOR

CALCULAR K_u y T_u y ω_u

SUSTITUYO EN LA ECUACIÓN COMPLEMENTARIA $s = j\omega_u$

$$T_u = \frac{2\pi}{\omega_u}$$

ERRORES

$$\boxed{e_{ss_{pert}} = -y_{ss} \cdot K_{realim}}$$

$$y_{ss} \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s\,Y(s)$$ — LA DE LA PERT.

$e_{ss_{entrada}} \Rightarrow$

$$K_p = \lim_{s \to 0} G_{BA}(s) \longrightarrow e_{ss_p} = \frac{1}{1+K_p}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G_{BA}(s) \longrightarrow e_{ss_v} = \frac{1}{K_v}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2\,G_{BA}(s) \longrightarrow e_{ss_a} = \frac{1}{K_a}$$

$$e_{ss_{TOTAL}} = e_{ss_{entrada}} + e_{ss_{pert}}$$

EJERCICIOS

EJERCICIO 1

1. CONDICIÓN NECESARIA: Todos los coeficientes han de existir y tienen que ser mayores > 0. (positivos)

$$E.c = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + \frac{Kc}{8}$$

$$1 + \frac{Kc}{8} > 0 \longrightarrow Kc > -8$$

2. CONDICIÓN SUFICIENTE: Todos los elementos de la primera columna de la tabla de RH han de ser positivos

s^3	1	3	0
s^2	3	$1+\frac{Kc}{8}$	0
s^1	$\frac{9-1-\frac{Kc}{8}}{3}$	0	0
s^0	$1+\frac{Kc}{8}$	0	0

$$s^1: \longrightarrow 72-8-Kc > 0 \longrightarrow Kc < 64$$

$$s^0: \longrightarrow 1+\frac{Kc}{8} > 0 \longrightarrow Kc > -8$$

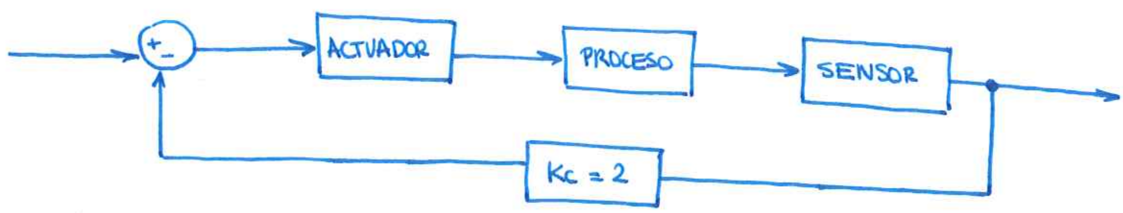
$$-8 < Kc < 64$$

- $Ku = 64$
- $3s^2 + 1 + \frac{64}{8} = 0 \quad (s = \omega u j)$

  $-3\omega u^2 + 9 = 0$

  $\omega u = \sqrt{3}$ rad/s
- $Tu = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ s

EJERCICIO 2



$$G_{BC} = \frac{\frac{2,5}{1+2s} \cdot \frac{KT}{1+\tau s}}{1 + \frac{2,5}{1+2s} \cdot \frac{KT}{1+s} \cdot 2} = \frac{2,5 \cdot KT}{(1+2s)(1+s) + 5KT} = \frac{2,5KT}{2s^2 + 3s + 1 + 5KT} = \frac{1,25KT}{s^2 + 1,5s + 0,5 + 2,5KT}$$

$$S_1=S_2=\frac{-1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2-4\cdot(0{,}5+2{,}5\,K_T)}}{2}$$

$1{,}5^2-2-10K_T=0 \longrightarrow$

$K_T=0{,}025$ POLOS REALES DOBLES

$K_T<0{,}025$ POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS

$K_T>0{,}025$ POLOS REALES

Si $K_T=0{,}025$

$$\omega_n=\sqrt{0{,}5+2{,}5\cdot 0{,}025}=0{,}75 \text{ rad/s}$$

$$\delta=\frac{1{,}5}{2\cdot 0{,}75}=1$$

Si $K_T\uparrow$ $\delta\downarrow$ $M_p\uparrow$ $\omega_n\uparrow$ $\delta\omega_n=\text{cte}$

EJERCICIO 3

$$G(s)=\frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$$ (Es estable)

a) sistema de tipo 1 (un integrador en el origen)

b) $$G_{BC}(s)=\frac{K(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)+(s+1)(s+3)K}$$ $$\lim_{s\to 0} Y(s)=\frac{3K}{3K}=1$$

c) Entrada escalón $K_p=\infty$

$e_{ss}=0$

Entrada rampa $$K_v=\lim_{s\to 0} s\cdot K\frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)s}=K\frac{3}{8}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}=\frac{8}{3K}$$

EJERCICIO 4

Calcular $y(t)$ para $K=7$

$$G_{BC}(s)=\frac{7}{(s+2)(s+10)+7}=\frac{7}{s^2+12s+20+7}=\frac{7}{s^2+12s+27}=\frac{7}{(s+3)(s+9)}$$

$$\frac{-12\pm 6}{2}\begin{cases}-3\\-9\end{cases}$$

$$Y(s) = G_{BC}(s) \cdot R(s)$$

$$Y(s) = \frac{7}{(s+3)(s+9)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$7 = A(s+3)s + B(s+9) \cdot s + C(s+3)(s+9)$$

$$7 = As^2 + A3s + Bs^2 + B9s + Cs^2 + C12s + 27C$$

$$C = 0{,}26$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 3A + 9B + 12C \\ 0 = A + B \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B = -0{,}39 \\ A = 0{,}13 \end{array}$$

$$\boxed{y(t) = 0{,}13\, e^{-9t} - 0{,}39 \cdot e^{-3t} + 0{,}26}$$

$K = 20$

$$G(s) = \frac{20}{s^2 + 12s + 40} \longrightarrow Y(s) = \frac{20}{s^2 + 12s + 40} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 12s + 40}$$

$$20 = As^2 + 12As + A \cdot 40 + Bs^2 + Cs$$

$$0 = 6 + C$$

$$C = -6$$

$$A + B = 0$$

$$B = -0{,}5$$

$$Y(s) = \frac{0{,}5}{s} + \frac{-0{,}5s - 6}{(s+6)^2 + 2^2} = \frac{0{,}5}{s} - 0{,}5\left[\frac{s+6}{(s+6)^2 + 2^2} + \frac{6}{(s+6)^2 + 2^2}\right]$$

$$\boxed{y(t) = 0{,}5 - 0{,}5\cos 2t\, e^{-6t} - 0{,}5 \cdot 3 \operatorname{sen} 2t \cdot e^{-6t}}$$

b) Es un sistema de Tipo 0 (0 integrador en el origen)

7: $$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{7}{(s+2)(s+10)} = \frac{7}{20}$$

$$e_{ssp} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \frac{7}{20}} = 0{,}74$$

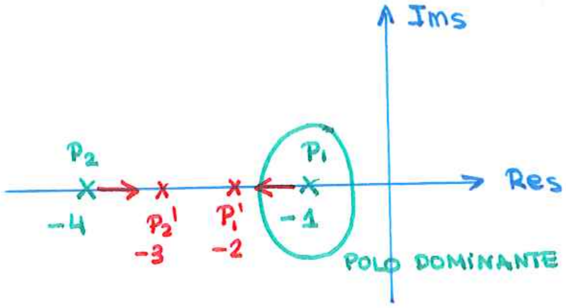
20: $$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{20}{(s+2)(s+10)} = \frac{20}{20} = 1$$

$$e_{ssp} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

EJERCICIO 5

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

a) Constante de tiempo dominante = $\tau = 1\,s$



$$-1 = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = 1\,s$$ CONSTANTE DE TIEMPO DOMINANTE

b) Para qué valor de K la constante de tiempo dominante es la mitad?

$$\tau = 0{,}5$$

$$P = -\frac{1}{\tau} = -2$$

$$G_{BC}(s) = \frac{K}{(s+1)(s+4)+K} = \frac{K}{(s^2+5s+4+K)} \Rightarrow$$ solución de la ecuación característica tienen que ser -2 y -3.

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25-4(4+K)}}{2} = -2$$

$$-5 \pm \sqrt{25-16-4K} = -4$$

$$25-16-4K = 1$$

$$-4K = -8$$

$$\boxed{K = 2}$$

c) $$G_{BC} = \frac{2}{s^2+5s+6} = \frac{2}{(s+3)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+3)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{s}$$

$$2 = A(s+2)s + B(s+3)s + C(s+3)(s+2)$$

$$2 = As^2 + 2As + Bs^2 + 3Bs + Cs^2 + C5s + C6$$

$$C = 1/3$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 5C + 3B + 2A \\ 0 &= C + B + A \end{aligned}\right\}$$

$$1/3 - A = B$$

$$0 = \frac{5}{3} + 1 - 3A + 2A$$

$$A = \frac{8}{3}$$

$$B = -\frac{7}{3}$$

$$y(t) = \frac{8}{3}e^{-3t} - \frac{7}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}$$

Error en estado estacionario

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{2}{(s+1)(s+4)} = 0{,}5$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+0{,}5} = \frac{2}{3}$$

$$G_{BC}(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + 4 + K}$$

$$\delta = 0{,}7$$

$$5 = 2\delta\omega_n \longrightarrow \omega_n = 3{,}57$$

$$12{,}755 = 4 + K$$

$$\boxed{K = 8{,}755}$$

Error

$$K_p = \lim_{s \to \infty} \frac{K}{(s+1)(s+4)} = 2{,}2$$

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+K_p} = 0{,}3136$$

EJERCICIO 6

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+3)}$$

Constante de tiempo dominante del sistema = 2s

$$P = -\frac{1}{\tau} = -0{,}5$$

$$G_{BC}(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+3) + K(s+1)} = \frac{K(s+1)}{s^2 + (3+K)s + K}$$

e.c. $s^2 + (3+K)s + K = 0$

$$\frac{-(3+K) \pm \sqrt{(3+K)^2 - 4K}}{2} = -0{,}5$$

$$\sqrt{(3+K)^2 - 4K} = -1 + (3+K)$$

$$(3+K)^2 - 4K = (2+K)^2$$

$$9 + 6K \cancel{+K^2} - 4K = 4 + 4K \cancel{+K^2}$$

$$5 = 2K$$

$$\boxed{K = 2{,}5}$$

segundo polo

$$\frac{-5{,}5 \pm \sqrt{5{,}5^2 - 10}}{2} = -5 = P_2$$

b) sistema de Tipo 1 (1 integrador en el origen)

Error a entrada escalón = 0

RAMPA: $K_V = \lim_{s \to 0} s \cdot \dfrac{2{,}5\,(s+1)}{s\,(s+3)} = 0{,}83$

$$e_{ssV} = \frac{1}{K_V} = 1{,}2$$

c) Calcular $y(t)$

$$G_{BC}(s) = \frac{2{,}5(s+1)}{s^2 + 5{,}5s + 2{,}5} \longrightarrow Y(s) = \frac{2{,}5(s+1)}{s^2 + 5{,}5s + 2{,}5} \cdot \frac{1}{s}$$

$$2{,}5 + 2{,}5s = A(s+0{,}5)s + B(s+5)s + C(s+5)(s+0{,}5)$$

$$2{,}5 = C \cdot 2{,}5 \Rightarrow C = 1$$

$$2{,}5 = 0{,}5A + 5B + 5{,}5C$$

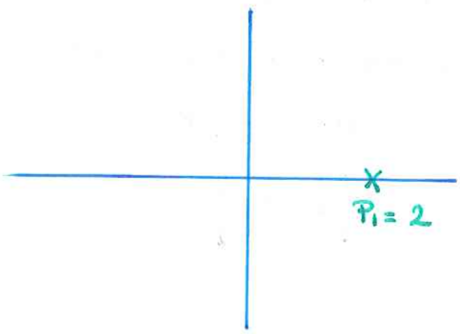
$$0 = A + B + C$$

$\vdots$

$$\boxed{y(t) = 1 - 0{,}55 \cdot e^{-0{,}5t} - 0{,}44 \cdot e^{-5t}}$$

EJERCICIO 7

a) No es un sistema estable → El polo se encuentra en el semiplano positivo



b) $G_{BC}(s) = \dfrac{K}{s - 2 + K}$ → cuando $K > 2$ el sistema se vuelve ESTABLE.

c) $\tau = 0{,}1 s$

$$P = -\frac{1}{\tau} = -10$$

$$G_{BC}(s) = \frac{K}{s-2+K} \longrightarrow -2+K = 10 \longrightarrow \boxed{K=12}$$

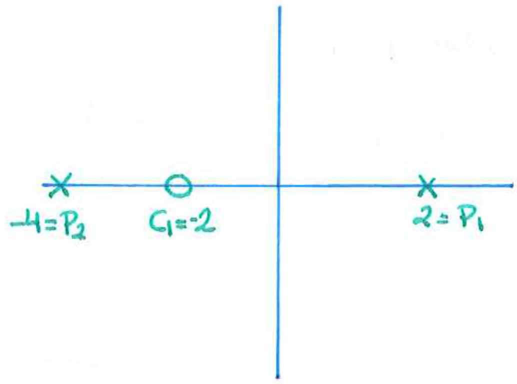
d) $$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{10}{s-2} = -5$$

$$e_{ssv} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1-5} = \underline{-0{,}25}$$

EJERCICIO 8

$$G(s) = \frac{s+2}{(s-2)(s+4)}$$

a) Sí. Tiene un polo en el semiplano positivo



b) Calcular K $\quad \tau_{dom} = 1s$

$$P = -\frac{1}{\tau} = -1$$

$$G_{BC}(s) = \frac{(s+2)K}{(s-2)(s+4)+(s+2)K} = \frac{(s+2)K}{s^2-2s+4s-8+Ks+2K} = \frac{(s+2)K}{s^2+(2+K)s+(2K-8)}$$

$$s_1, s_2 = \frac{-(2+K) \pm \sqrt{(2+K)^2-4(2K-8)}}{2} = -1$$

$$\sqrt{(2+K)^2-(2K-8)4} = -2+(2+K)$$

$$(2+K)^2-(2K-8)4 = K^2$$

$$4+4K+\cancel{K^2}-8K+32 = \cancel{K^2}$$

$$-4K = -36$$

$$\boxed{K=9}$$

EJERCICIO 9

a) $\delta = 0{,}5$

$$G_{BC}(s) = \frac{K}{s(s+1)+K} = \frac{k}{s^2+s+K}$$

$$1 = 2\delta\omega_n \longrightarrow \omega_n = 1$$

$$K = \omega_n^2 = 1 \longrightarrow \boxed{K=1}$$

b) Entrada rampa unitaria sistema de tipo 1 → ERROR FINITO

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{(s+1)s} = 1$$

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{1} = 1$$

c) $e_{ssv} = 0{,}1$

$$K_v = 10 = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{K}{(s+1)\cancel{s}}$$

$$\boxed{K=10}$$

$$G_{BC}(s) = \frac{10}{s^2+s+10} \longrightarrow \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{10} \\ \delta = \dfrac{1}{2\sqrt{10}} = 1{,}58 \end{array}$$

d) Para $K = 10$

$\delta = 0{,}5$

$$G_{BC_1}(s) = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1+\frac{10}{s(s+1)}K_g s} = \frac{10}{s(s+1)+10K_g s}$$

$$G_{BC_2}(s) = \frac{10}{s^2+s+10K_g s+10}$$

$\omega_n = \sqrt{10}$ rad/s

$$2\omega_n\delta = \omega_n = (1+10K_g)$$

$$\frac{\sqrt{10}-1}{10} = \boxed{K_g = 0{,}216}$$

ERROR

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{10}{s(s+1) + 10K_g s} = \frac{10}{s+1+10K_g} = 3,16$$

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = 0,32$$ EL ERROR ES MAYOR

EJERCICIO 10

$$G_{BC_1}(s) = \frac{10}{s(s+1) + 10K_g s}$$

$$G_{BC_2}(s) = \frac{10K_a}{s(s+1) + 10K_g s + 10K_a} = \frac{10K_a}{s^2 + (10K_g+1)s + 10K_a}$$

$$e_{ssv} = 0,1 \longrightarrow K_v = 10$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{K_a \cdot 10}{s(s+1) + 10K_g s} = \lim_{s \to 0} \frac{K_a \cdot 10}{s+1+10K_g} = \frac{K_a \cdot \cancel{10}}{1+10K_g} = \cancel{10}$$

$$K_a = 1 + 10K_g$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta = 0,5 \\ \omega_n = \sqrt{10K_a} \end{array}\right\} \quad 2\delta\omega_n = \omega_n = \sqrt{10K_a} = 10K_g + 1$$

$$10K_a = 100K_g^2 + 20K_g + 1$$

$$10 + 100K_g = 100K_g^2 + 20K_g + 1$$

$$100K_g^2 - 80K_g - 9 = 0$$

$$K_g = \frac{+80 \pm \sqrt{80^2 + 9 \cdot 4 \cdot 100}}{200} = \frac{80 \pm 100}{200}$$

$\cancel{K_g = -0,1}$ NO NEGATIVA

$$\boxed{K_g = 0,9}$$

$$K_a = 1 + 10 \cdot 0,9 = 10$$

$$\boxed{K_a = 10}$$

EJERCICIO 11

$$G_{BC1}(s) = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{kg\,s}{0,1s+1}} = \frac{0,1s+1}{s(s+1)(0,1s+1) + kg\,s}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{(0,1s+1)ka}{s(s+1)(0,1s+1)+kg\,s} = \frac{(0,1s+1)ka}{(s+1)(0,1s+1)+kg} = \frac{ka}{1+kg}$$

$$\boxed{e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1+kg}{ka}}$$

EJERCICIO 12

$$G_{BC}(s) = \frac{\frac{1}{s^2+0,2s+2}}{1 + \frac{1}{s^2+0,2s+2} \cdot kg\,s \cdot ka} = \frac{1}{s^2+(0,2+kg\,ka)s+2}$$

No sé

$$Y(s) = \frac{ka}{s^2+0,2s+2+kg\,s} \rightarrow \frac{K_1 Ka}{s^2+0,2s+2+kg\,s+K_1Ka}$$

EJERCICIO 13

$\varnothing = 20m$

$\rightarrow V = 56 km/h$

$T_d = 2V$

$$G(s) = \frac{100}{s^2+8s+100} \qquad G_c(s) = \frac{Ka}{0,2s+1}$$

$$G_{BC}(s) = \frac{100\,Ka}{(s^2+8s+100)(0,2s+1)+100Ka} = \frac{100\,Ka}{0,2s^3+2,6s^2+28s+100+100Ka}$$

1. CONDICIÓN NECESARIA $\quad 100+100Ka > 0$

$Ka > -1$

2. CONDICIÓN SUFICIENTE : TABLA DE R-H

$$
\begin{array}{llll}
s^3 & 0{,}2 & 28 & 0 \\
s^2 & 2{,}6 & 100(1+Ka) & 0 \\
s^1 & \dfrac{2{,}6\cdot 28 - 20(1+Ka)}{2{,}6} & 0 & 0 \\
s^0 & 100\,(1+Ka) & 0 & 0
\end{array}
$$

$\longrightarrow \quad 2{,}6\cdot 28 - 20 - 20Ka > 0$

$\dfrac{2{,}6\cdot 28 - 20}{20} > Ka$

$$\boxed{-1 < Ka < 2{,}64}$$

b) Calculo $Y(s)$

$Y(s) = G_{BC}\cdot R(s) = 0$

$e_{ss}\Big|_{pert} = -y_{ss}\cdot k\ (\text{redim}) = 0$

$Y_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = s\,\dfrac{56\cdot 100}{s^2+8s\cdot 100}$

$G_{BA}(s) = \dfrac{100}{s^2+8s+100}\cdot\dfrac{Ka}{0{,}2s+1}$

$56\ km/h = \dfrac{1000\,m}{1\,km}\cdot\dfrac{1h}{3600} = \underline{\underline{15{,}56}}$

$K_p = \lim_{s\to 0} G_{BA}(s) = Ka$

$e_{ss_p} = \dfrac{1}{1+Ka} =$

$E(s) = R(s) - \underbrace{H(s)}_{Y(s)} = R(s) - \left[D(s) + \dfrac{100}{s^2+8s+100}\cdot\dfrac{Ka}{0{,}2s+1}\,E(s)\right]$

$E(s)\left[1 + \dfrac{100Ka}{(s^2+8s+100)(0{,}2s+1)}\right] = R(s) - D(s)$

$E(s)\left[\dfrac{(s^2+8s+100)(0{,}2s+1) + 100Ka}{(s^2+8s+100)(0{,}2s+1)}\right] = \cancel{R(s)} - D(s)$

$E(s) = -\dfrac{(s^2+8s+100)(0{,}2s+1)}{(s^2+8s+100)(0{,}2s+1)+100Ka}\,D(s)$

$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = s\,\dfrac{(s^2+8s+100)(0{,}2s+1)}{(s^2+8s+100)(0{,}2s+1)+100Ka}\cdot\dfrac{56}{s}$

Teorema valor final

$= \dfrac{56\cdot 100}{100+100Ka} =$

TEMA 6. DISEÑO DE SISTEMAS REALIMENTADOS (II)

INTRODUCCIÓN

PID ACCIONES Y PARÁMETROS

$$m(t) = K_c \left[e(t) + \underbrace{\frac{1}{T_i} \int e(t)\,dt}_{\text{TÉRMINO PROPORCIONAL AL ERROR INSTANTÁNEO}} + \underbrace{T_d \frac{de(t)}{dt}}_{\text{ANTICIPA LA TENDENCIA}} \right]$$

TÉRMINO PROPORCIONAL AL ERROR INSTANTÁNEO
Todo lo anterior acumulado al sistema intenta compensarlo

ANTICIPA LA TENDENCIA

K_c: GANANCIA PROPORCIONAL

T_d: TIEMPO DERIVATIVO

T_i: TIEMPO INTEGRAL

ACCIONES MÁS COMUNES

PROPORCIONAL P

PROPORCIONAL + INTEGAL PI

PROPORCIONAL + DERIVATIVA PD

PROPORCIONAL + DERIVATIVA + INTEGRAL PID

DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL: EFECTOS DE LAS ACCIONES DEL CONTROLADOR

ACCIÓN PROPORCIONAL: CONTROL P

Se utiliza para aumentar la velocidad de respuesta

$\frac{1}{\tau} > \rightarrow \tau$ disminuye.

Valores límites:

- Por estabilidad K_u
- Por límite físico del actuador (SATURACIÓN)

} EL PRIMERO QUE SE ALCANCE EN EL SISTEMA SERÁ EL LÍMITE

ACCIÓN INTEGRAL

Se utiliza para aumentar el tipo de sistema

↳ AUMENTA EL TIPO → SISTEMA SE VUELVE MÁS LENTO

↳ AÑADE UN POLO EN EL ORIGEN

↳ INESTABLE

Se suele utilizar junto al proporcional y su función básicamente es anular el error al añadir polos en el origen.

PI $$\boxed{G_c(s) = \frac{K_c}{T_i} \frac{1 + T_i s}{s}}$$

Cuanto menor sea T_i, mayor será la acción integral y antes se corrige el error.

T_i: intentar darle un valor de forma que cancele un polo lento del sistema.

ACCIÓN DERIVATIVA

Es una acción anticipativa que se anticipa a los cambios en el error

$$G(s) = K_c T_d s$$

Cero en el origen y ningún polo, no existe en la realidad. Hay que introducirle un filtro (que es un polo real muy lejano del origen) para volverlo real e implementarlo.

PD $$\boxed{G_c(s) = K_c(1 + T_d s)}$$

T_d: Tiempo en el que la acción proporcional iguala a la acción derivativa con e variando linealmente.

Se utiliza porque su EFECTO ESTABILIZADOR PERMITE AUMENTAR KC → VELOCIDAD DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA.

¡¡SÓLO SE UTILIZA EN SISTEMAS DE DINÁMICA LENTA!!

DESVENTAJAS:

- En el punto de consigna se producen saltos grandes,
- RUIDOS
- No se puede aplicar con TMOM' ⇒ Tiempos muertos grandes.

CONTROLADOR PID NO INTERACTIVO

$$m(t) = \bar{m} + K_c \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(\tau)\,d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

ALGORITMO IDEAL

$$\boxed{G_c(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] = K_c \frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{T_i s}}$$

- No es físicamente realizable porque hay más ceros que polos
- Muy sensible a la señal de ruido
- Ceros reales para $T_i > 4T_d$

ALGORITMO REAL

$$\boxed{G_c(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} \right]}$$

- Físicamente realizable
- Máxima ganancia limitada a $K_c \cdot N$
- N fija la máxima ganancia derivativa ($N = 10$ normalmente)

SINTONÍA DE PIDs

⇒ PIDs NO SON APLICABLES CUANDO
- RETARDOS GRANDES
- RESPUESTAS INVERSAS → POLOS SEMIPLANO DERECHO
- INESTABILIDAD

SINTONÍA: Escoger los parámetros K_c, T_i y T_d

UTILIZAMOS

P:
- Cuando sea tolerable un error
- El sistema realimentado sea ya de tipo 1

PI
- Cuando no es aceptable un error

PID
- Si no hay ruido y queremos aumentar la velocidad de respuesta.
- Procesos lentos
- NO TIEMPOS MUERTOS.

MÉTODOS DE SINTONÍA

1. MÉTODOS DE PRUEBA Y ERROR:

MÁS RÁPIDO

1. Se parte de valores bajos de Kc y se va aumentando hasta obtener una forma de respuesta aceptable

2. Aumentar ligeramente Td para mejorar la respuesta (nos permite subir más Kc).

QUITAMOS EL ERROR

3. Disminuir Ti hasta eliminar el error es estado estacionario.

2. MÉTODO DE ZIEGLE - NICHOLS:

Hallar Tu mediante el criterio de estabilidad

$$K_u \longrightarrow \omega_u \longrightarrow T_u = \frac{2\pi}{\omega_u}$$

EN BUCLE CERRADO:

	Kc	Ti	Td
P	0,5Ku	—	—
PI	0,4Ku	0,8Tu	—
PID	0,6 Ku	0,5Tu	0,125 Tu

EN BUCLE ABIERTO

	Kc	Ti	Td
P	$\frac{1}{K}\left(\frac{T}{t_m}\right)$	—	—
PI	$\frac{0{,}9}{K}\left(\frac{T}{t_m}\right)$	$3t_m$	—
PID	$\frac{1{,}2}{K}\left(\frac{T}{t_m}\right)$	$2t_m$	$0{,}5t_m$

Rango de utilización $0{,}1 < Y = \frac{t_m}{T} < 1$

3. MÉTODOS ANALÍTICOS BASADOS EN MODELOS

CONTROL P

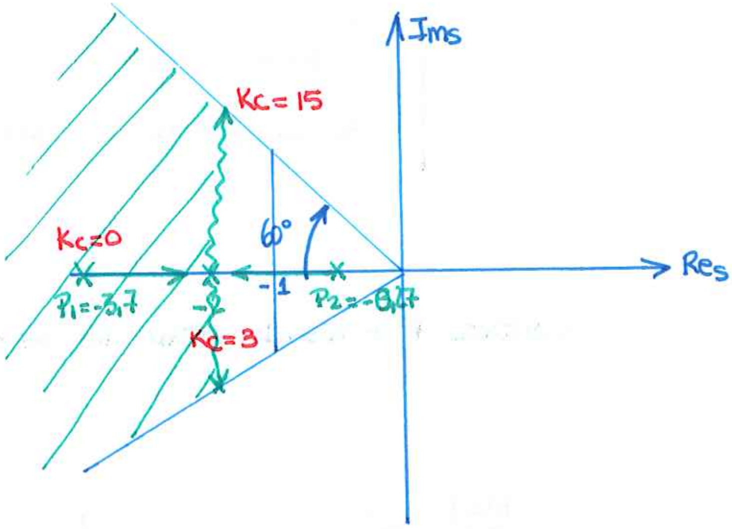
El control P de sistemas de primer y segundo orden se puede hacer de forma analítica para cumplir las especificaciones del transitorio o del estacionario.

- Al aumentar Kc → aumenta la ganancia
  Disminuye la constante de tiempo

- Se pueden fijar:

  - En el estacionario el ERROR DE POSICIÓN
  - En el transitorio LA CONSTANTE DE TIEMPO

EJERCICIO



$$G(s) = \frac{1}{s^2+4s+1}$$

$M_p \leq 16,3\%$

$$e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 16,3\%$$

$$-\pi\delta \leq \ln 0,163 \cdot \sqrt{1-\delta^2}$$

$$\pi^2\delta^2 \leq (\ln 0,163)^2 \cdot (1-\delta^2)$$

$$(\pi^2 + \ln 0,163)^2 \delta^2 \leq (\ln 0,163)^2$$

$$\delta \leq 0,5 \longrightarrow \delta = \cos\theta$$

$$\cos\theta \leq 0,5$$

$$\theta \leq \arccos 0,5 = 60°$$

Si $\delta = 0,5$

$$4 = 2\delta\omega_n \longrightarrow \delta\omega_n = 2$$

$$t_s \leq 4s \longrightarrow \frac{4}{\delta\omega_n} = \frac{4}{\delta\omega_n} \leq 4 \longrightarrow \delta\omega_n \geq 1$$

Polos: $\frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \begin{cases} -3,7 \\ -0,27 \end{cases}$

$$G_{BC}(s) = \frac{K_c}{s^2+4s+1+K_c}$$ ¿cuando son dobles?

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16-4(1+K_c)}}{2} \longrightarrow 16-4(1+K_c) = 0$$

$$4 = 1 + K_c$$

$$\underline{K_c = 3}$$

$\omega_n^2 = 1 + K_c$

$\omega_n = \sqrt{1+K_c}$

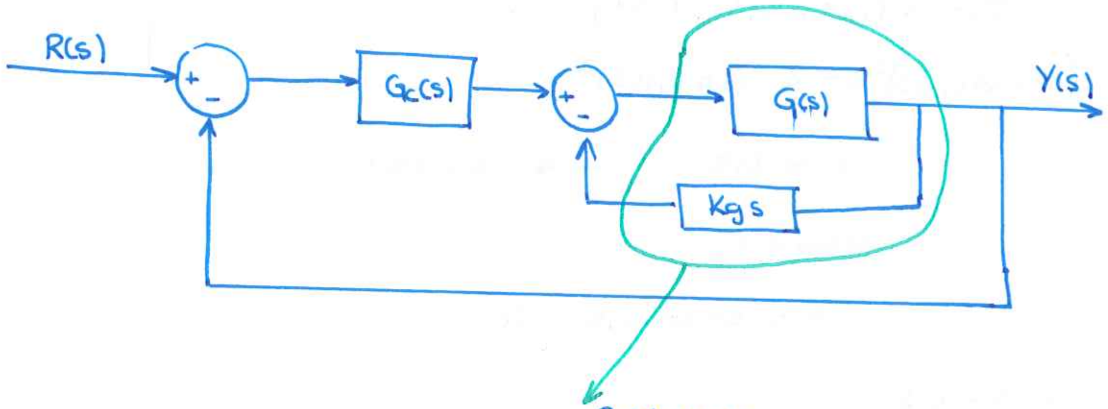
$2 = \delta \omega_n$

$4 = \omega_n = \sqrt{1+K_c} \longrightarrow 15 = K_c$

$3 < K_c < 15$

Se cumplen ambas especificaciones.

CONTROL P + REALIMENTADO DE VELOCIDAD



Bucle interno que realimenta la derivada de la salida

AUMENTA ESTABILIDAD.

Kc: se emplea para CUMPLIR ESPECIFICACIONES DEL PERMANENTE

Kg: se emplea para CUMPLIR ESPECIFICACIONES TRANSITORIO

Cuando sólo uso Kc solo puedo fijar o del permanente o del transitorio.

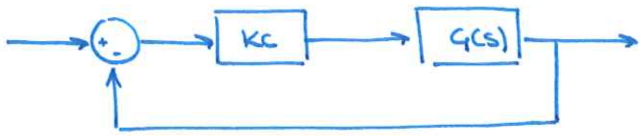
EJERCICIO

$\delta = 0{,}7$ CONDICIÓN TRANSITORIO

$e_{ssv} = 0{,}1$ CONDICIÓN PERMANENTE

INTENTO UN P AUNQUE SÉ QUE NO VA A CUMPLIR BIEN ANBAS

$$G(s) = \frac{25}{s(s+2)}$$



$$G_{BC}(s) = \frac{25K_c}{s^2 + 2s + 25K_c}$$

$2\delta\omega_n = 2$

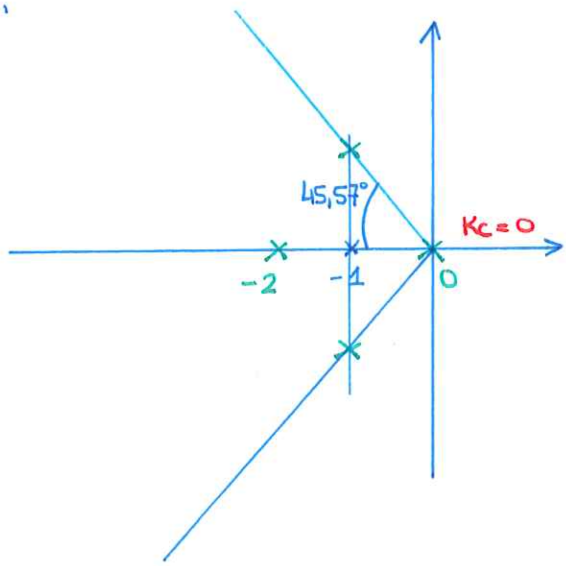
$\delta\omega_n = 1$

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} \longrightarrow K_v = 10 = \lim s \cdot \frac{K_c \cdot 25}{s(s+2)} = \frac{K_c \cdot 25}{2} = K_c \cdot 12{,}5$$

$$K_c = \frac{10}{12{,}5} = 0{,}8$$

$$\delta = \cos\theta \rightarrow \theta = 45{,}57°$$

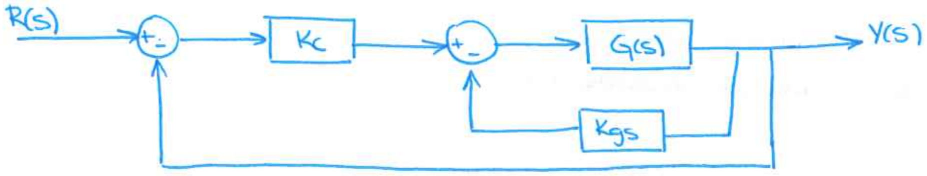
Polos del sistema.



$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(25K_c)}}{2} \longrightarrow 4 - 4(25K_c) = 0$$

$$\frac{1}{25} = K_c$$

REALIMENTACIÓN DE VELOCIDAD



$$G_{BC}(s)_1 = \frac{25}{s^2+(2+K_g)s}$$

$$G_{BC}(s)_2 = \frac{K_c \cdot 25}{s^2+(2+K_g)s+25K_c}$$

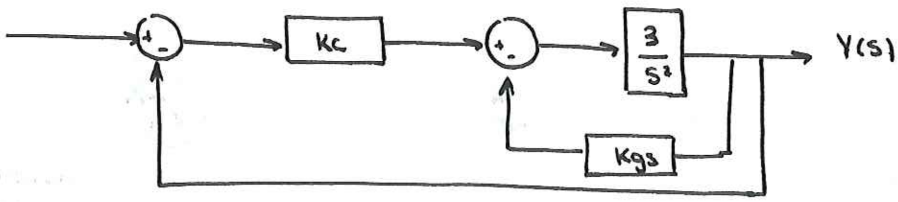
Kg para TRANSITORIO $\Rightarrow$ $2+K_g = 2 \cdot \delta \cdot \omega_n$

Kc para ESTACIONARIO $\Rightarrow$ $e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = 0{,}1 \rightarrow K_v = 10 = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{25}{\cancel{s}\left[s+(2+K_g)\right]} = \frac{25}{2+K_g}$

$$20+10K_g = 25$$
$$10K_g = 5$$
$$K_g = 0{,}5$$

$$2{,}5 = 2 \cdot 0{,}7 \cdot \omega_n$$
$$\omega_n = 1{,}79$$

EXAMEN ORDINARIO 28 DE JUNIO DE 2013



$M_p \leq 10\%$

$t_s \leq 1s$ (5%)

Kc ESTACIONARIO

KG TRANSITORIO

FT: $G_{BC1}(s) = \dfrac{3}{s^2 + kgs \cdot 3}$

$G_{BC2}(s) = \dfrac{\dfrac{3kc}{s^2+kgs\cdot 3}}{1+\dfrac{3kc}{s^2+kgs\cdot 3}} = \dfrac{3kc}{s^2 + kgs \cdot 3 + 3kc}$

TRANSITORIO

$e^{-\pi\delta/\sqrt{1-\delta^2}} \leq 0{,}1$

$-\pi\delta \leq \ln 0{,}1 \cdot \sqrt{1-\delta^2}$

$\pi^2\delta^2 \leq (\ln 0{,}1)^2 (1-\delta^2)$

$(\pi^2 + \ln 0{,}1^2)\,\delta^2 \leq \ln 0{,}1^2$

$\delta^2 \leq 0{,}35$

$\delta \leq 0{,}59$

$\cos\theta \leq 0{,}59$

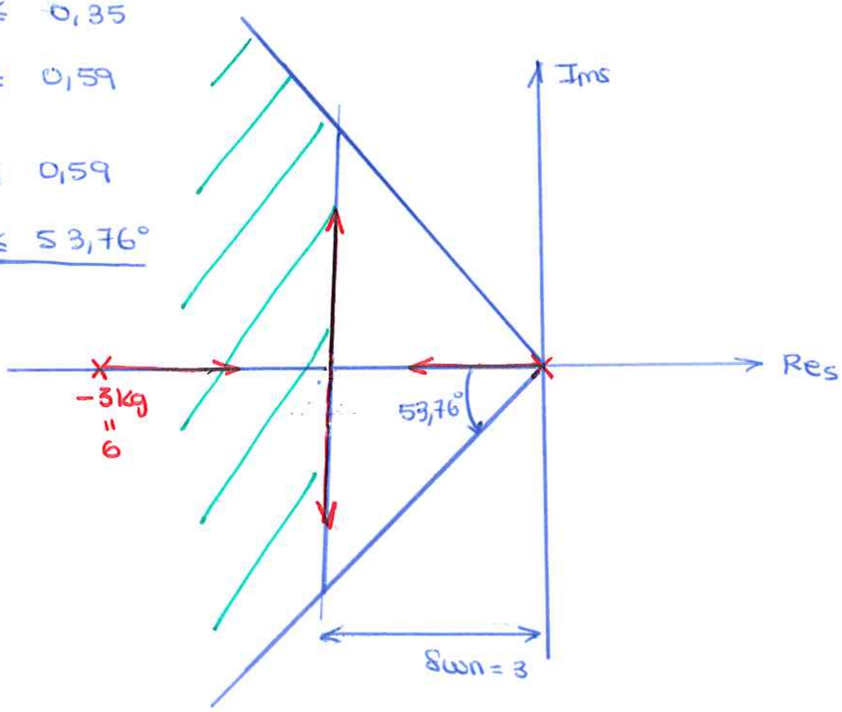
$\theta \leq 53{,}76°$

ESTACIONARIO

$t_s \leq 1s$

$\dfrac{3}{\delta\omega_n} \leq 1s$

$3 \leq \delta\omega_n$



Si tomamos valores límites.

$Kg \cdot 3 = 2 \cdot \delta\omega_n$

$Kg = 2$

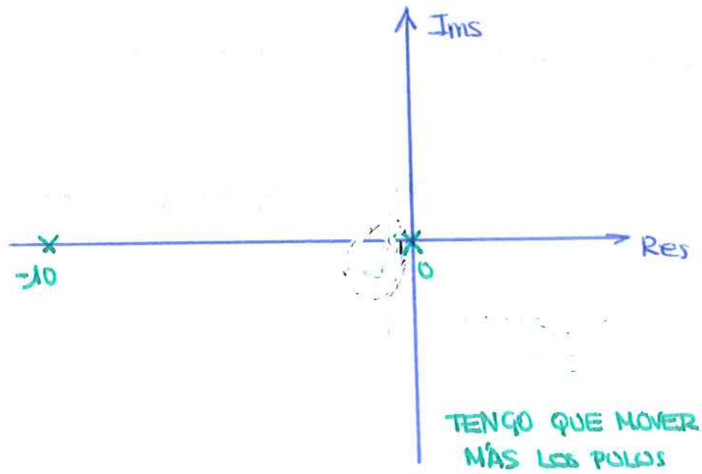
$\omega_n = \dfrac{3}{0{,}59} = 5$

$\omega_n^2 = 3 \cdot KC$

$Kc = \dfrac{25}{3}$

EJERCICIOS 2-3-4

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+10)}$$



TENGO QUE MOVER MÁS LOS POLOS HACIA LA IZDA.

sistema de tipo 1 $\rightarrow e_{ssp} = 0$

$t_s(2\%) \leq 4/10$

$$G_{BC}(s) = \frac{K_c}{s^2 + s10 + K_c}$$

$$\frac{4}{\delta\omega_n} \leq \frac{4}{10} \longrightarrow \underline{\underline{\delta\omega_n \geq 10}}$$

PD: $K_c(1 + T_d s)$

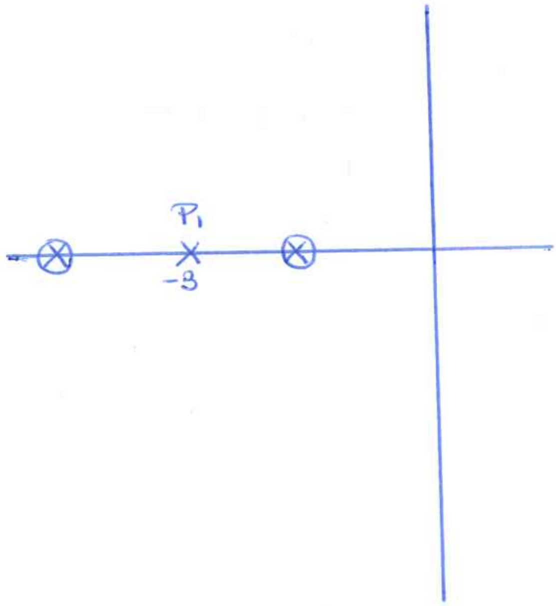
$$G_{BC}(s) = \frac{(1+T_d s)K_c}{s^2 + 10s + (1+T_d s)K_c}$$

$$s^2 + 10s + T_d K_c s + K_c = 0$$

$$\frac{10 - T_d K_c \pm \sqrt{(10 T_d K_c)^2 - K_c \cdot 4}}{2}$$

$$100 T_d^2 \cdot K_c^{\cancel{2}} - 4\cancel{K_c} = 0$$

b) $G_2(s) = \dfrac{(s+2)(s+5)}{4s\,(s^2+7s+10)}$



$t_s(5\%) = 1\,s$

$\dfrac{3}{\delta\omega_n} = 1 \longrightarrow \delta\omega_n = 1 \cdot 3 = 3$

$G_{BC}(s) = \dfrac{k_c\,(s+2)(s+5)}{4s(s^2+7s+10) + k_c\,(s+2)(s+5)}$

$\dfrac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{-7 \pm 3}{2} \begin{cases} -5 \\ -2 \end{cases}$

$G_{BC}(s) = \dfrac{K_c}{4s + K_c} = \dfrac{1}{\frac{4}{K_c}s + 1}$

$t_s(5\%) = 3\tau = 1 \longrightarrow \tau = \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{K_c}$

$\tau = \dfrac{4}{K_c} \longrightarrow$

$K_c = 4 \cdot 3 = 12$

c) Tengo que meter un controlador PI

$G_c(s) = \dfrac{K_c}{T_i}\,\dfrac{1+T_i s}{s}$

$G_{BC}(s) = \dfrac{\dfrac{40k_c\,(1+T_i s)}{T_i s\,(s+1)(s+2)}}{1 + \dfrac{40\,k_c\,(1+T_i s)}{T_i s\,(s+1)(s+2)}} = \dfrac{40k_c\,(1+T_i s)}{T_i s(s+1)(s+2) + 40\,k_c\,(1+T_i s)}$

Con T_i anulo el polo más dominante $\Rightarrow$ $\boxed{T_i = 1}$

$G_{BA}(s) = \dfrac{40\,k_c\,(1+T_i)}{T_i s\,(s+1)(s+2)}$

$12{,}25\% \leq M_p \leq 25\%$

$\delta \leq \sqrt{\dfrac{\ln 0{,}25^2}{\ln 0{,}25^2 + \pi^2}} = 0{,}40$

$\delta \geq \sqrt{\dfrac{\ln 0{,}1225^2}{\ln 0{,}1225^2 + \pi^2}} = 0{,}55$

→ INTERVALO DE ÁNGULOS $\begin{cases} \theta \leq 66{,}18^\circ \\ \theta \geq 56{,}24^\circ \end{cases}$

$$G_{BC}(s) = \frac{40\,K_c}{s(s+2) + 40\,K_c} = \frac{40\,K_c}{s^2 + 2s + 40\,K_c}$$

- $\delta = 0{,}32 \rightarrow$

$$t_s\,(5\%) = \frac{3}{\delta \omega_n} \leq 6$$

$$0{,}5 \leq \delta \omega_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \delta \omega_n \\ \omega_n = \dfrac{1}{0{,}32} \\ \omega_n^2 = \left(\dfrac{1}{0{,}4}\right)^2 = 40\,K_c \longrightarrow K_c = 0{,}15 \end{array} \right.$$

- $\delta = 0{,}55 \longrightarrow$

$$0{,}5 \leq \delta \omega_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \delta \omega_n \\ \omega_n = \dfrac{1}{0{,}55} \\ \omega_n^2 = \left(\dfrac{1}{0{,}55}\right)^2 = 40\,K_c \longrightarrow K_c = 0{,}0826 \end{array} \right.$$

$$0{,}0826 < K_c < 0{,}15$$

T_i SE USA PARA CANCELAR EL POLO DOMINANTE

EJERCICIO

$$G(s) = \frac{0{,}5}{(s+1)(s+5)}$$

$$\left.\begin{array}{l} t_s(2\%) \leq 2s \\ M_p \leq 4{,}3\% \\ e_{ssp} = 0 \end{array}\right\} \text{Empleo PI}$$

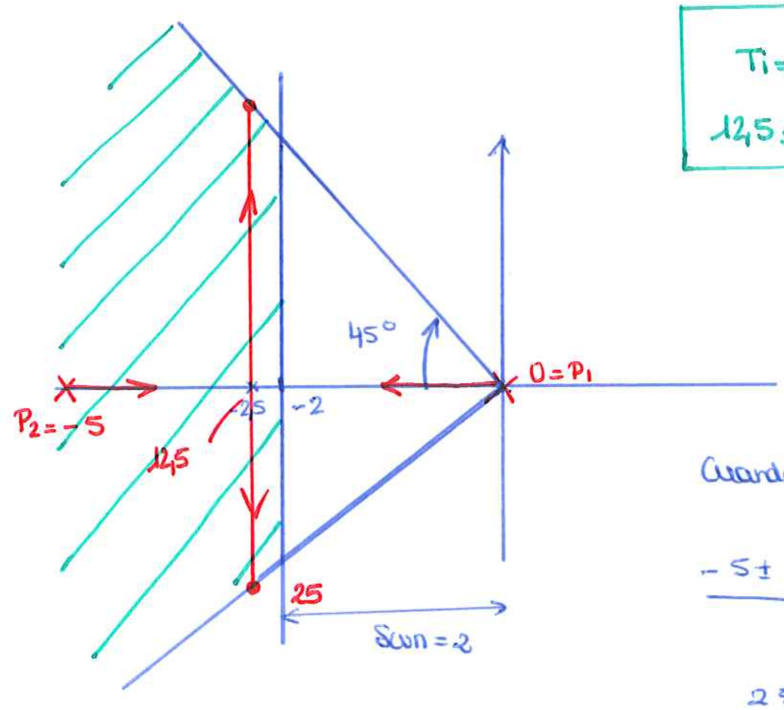
$$G_c(s) = \frac{K_c}{T_i} \; \frac{1+T_i s}{s}$$

T_i lo empleo para cancelar el polo dominante $P = -1 \longrightarrow T_i = 1$

$$G_{BA}(s) = \frac{K_c \cdot 0{,}5}{(s+5) \cdot s}$$

$M_p \leq 4{,}3\% \longrightarrow \delta \leq 1/\sqrt{2} \longrightarrow \theta \leq 45°$

$t_s(2\%) = \dfrac{4}{\delta\omega_n} \leq 2 \longrightarrow \delta\omega_n \geq 2$



$$\boxed{\begin{array}{l} T_i = 1 \\ 12{,}5 \leq K_c \leq 25 \end{array}}$$

Cuando se juntan?

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 0{,}5 K_c}}{2}$$

$$25 - 4 \cdot 0{,}5 K_c = 0$$

$$12{,}5 = K_c$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 12{,}5}}{2}$$

$$G_{BC}(s) = \frac{0{,}5 K_c}{s^2 + 5s + 0{,}5 K_c}$$

$5 = 2\delta\omega_n$

$\omega_n = \dfrac{5}{2} \cdot \sqrt{2}$

$\omega_n^2 = \dfrac{25}{4} \cdot 2$

$0{,}5 K_c = \dfrac{25}{4} 2 \longrightarrow K_c = 25$

CONTROL PID: LUGAR DE LAS RAICES

LUGAR DE LAS RAICES: Lugar geométrico de la ubicación de los polos de la ecuación característica cuando la ganancia varía de 0 a ∞

NÚMERO DE RAMAS = NÚMERO DE POLOS

CADA RAMA COMIENZA EN UN POLO Y ACABA EN UN CERO

CUANDO $N^oP > N^oC \longrightarrow (N^oP - N^oC)$ RAMAS ACABAN EN EL ∞

PUNTOS DEL EJE REAL QUE PERTENECEN AL LUGAR DE LAS RAICES $\Rightarrow$

LOS QUE A SU DERECHA TENGAN UN NUMERO IMPAR DE POLOS Y CEROS.

SI N^oPOLOS > N^oCEROS $\Rightarrow$ LAS RAMAS TERMINAN EN CEROS INFINITOS SON ASINTÓTICAS A RECTAS QUE FORMAN UN ÁNGULO CON EL EJE REAL DE

$$\theta = \pm \frac{(2k+1)\pi}{N^o_{POLOS} - N^o_{CEROS}} \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

$K = 0, 1 \text{ y } -1$

CORTE DE LAS ASINTOTAS CON EL EJE REAL

$$\sigma = \frac{\left|\sum^{CEROS}_{VALOR}\right| - \left|\sum^{POLOS}_{VALOR}\right|}{N^o POLOS - N^o CEROS}$$

PUNTOS DISPERSIÓN Y CONVERGENCIA:

$$\text{MAX y MIN de} = -\frac{1}{G(s) \cdot H(s)}$$

CORTE CON EL EJE IMAGINARIO

Ku R·H

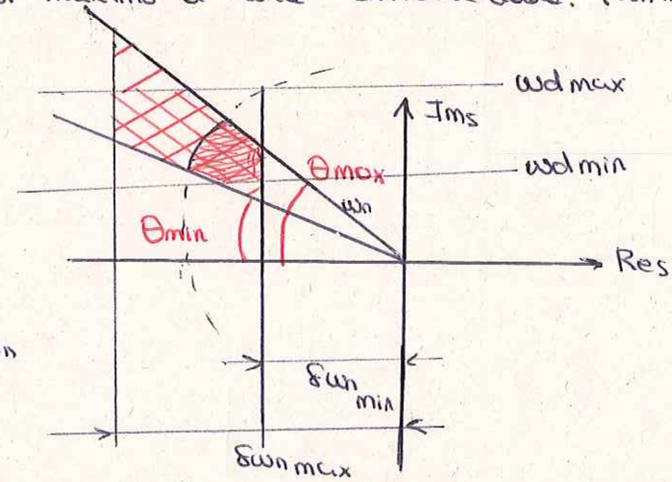
DISEÑO PID.s

Especificaciones de la respuesta:

definen la zona del plano s donde deben ubicarse los polos dominantes del sistema en bucle cerrado.

→ Especificación de permanente, relacionado con el tipo de sistema.

→ también puedo limitar el error máximo a una entrada dada. ($W_n min$)



Especificaciones transitorio:

tipicamente

M_p → acotan δ

t_s → valor mínimo para δw_n

w_d → parte imaginaria de los polos

Delimitan la zona del plano s para los polos dominantes.

Especificaciones de permanente

$\left.\begin{matrix} K_p \\ K_v \\ K_a \end{matrix}\right\}$ → W_n mínimo

$G_{BC}(s)$ con el controlador elegido ⟶ La ecuación característica deseada

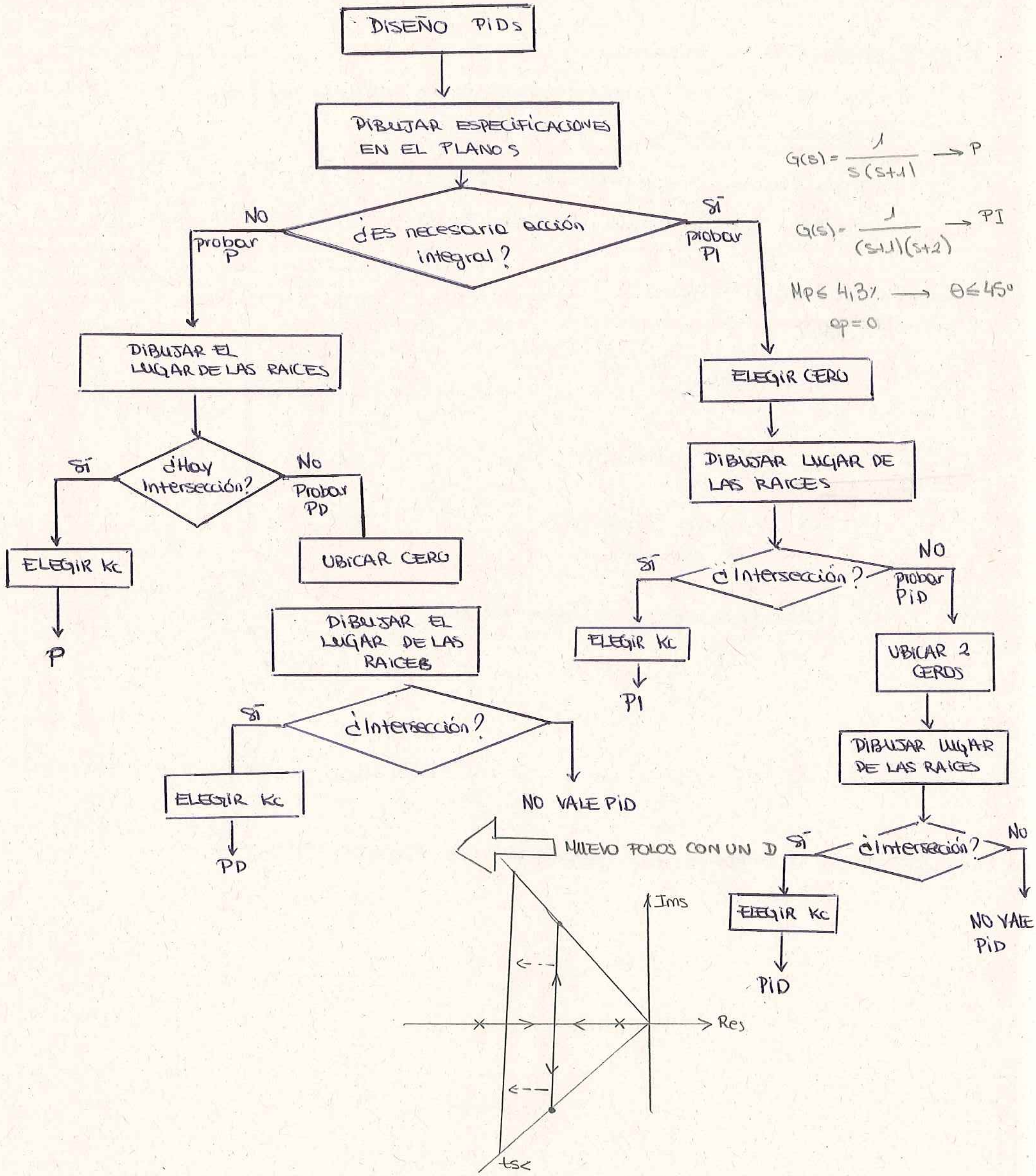
Igualando ambos obtengo los parámetros del sistema diseñado.

$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \longrightarrow P$

$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \longrightarrow PI$

$M_p \leq 4{,}3\% \longrightarrow \theta \leq 45^\circ$

$e_p = 0$



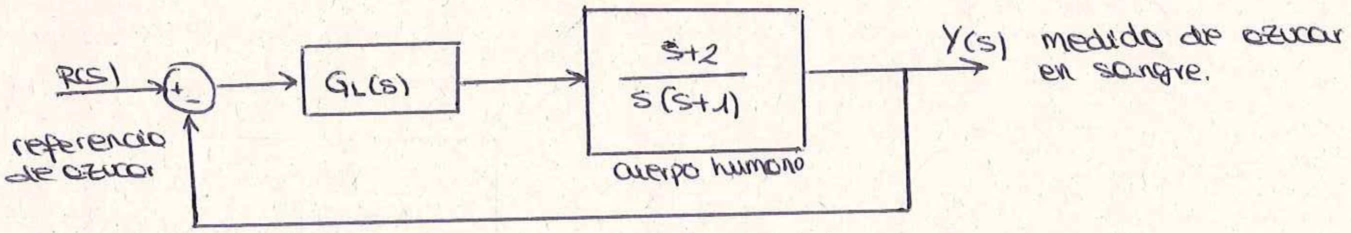
* Cuando se ubican ceros (PI, PID, PD) es posible tener que iterar con el lugar de las raices.

* La elección de ceros:
  - CANCELACIÓN de polos dominantes del sistema.
  - Si no es posible por cancelación, situarlos de manera que el lugar de las raices pase por la zona de especificación

* Comprobar los resultados : si hay ceros en bucle cerrado puede aparecer máximo sobreimpulso.

EJERCICIO

Diagrama de bloques del cuerpo humano que regula el nivel de azúcar en sangre.

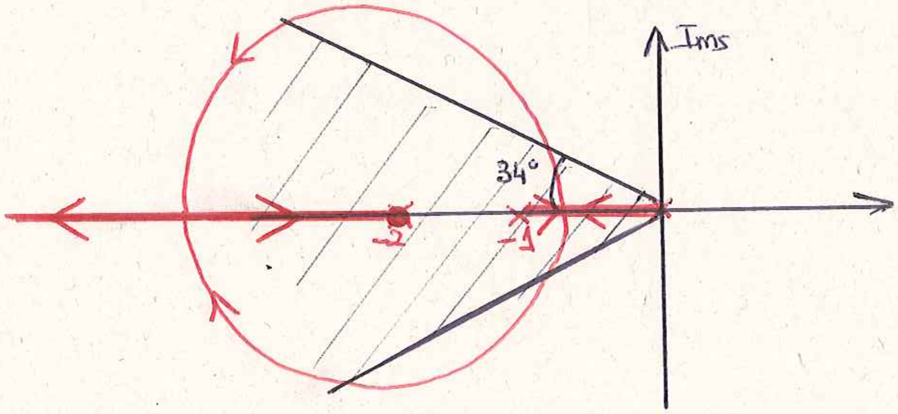


Diseñar un PID de manera que haya un sobre impulso menor posible

$M_p = 1\%$

1. Dibujar las especificaciones

$M_p = 0{,}01 \longrightarrow \delta = 0{,}8 \longrightarrow \theta = 34°$



LUGAR DE LAS RAICES

$n=2;\ m=1$

nº ramas = n = 2

nº asíntotas = n - m = 1

$\theta = \frac{(2K+1)}{n-m} \cdot 180 \qquad K=0$

$\theta_0 = 180°$

$\sigma = \frac{\sum P_i - Z_i}{m-m} = -1$

lugar eje real

$(-\infty,-2)\ (-1,0)$

No hay corte con el eje imaginario por ser un sist de segundo orden.

¿Necesito un integrador?

$e_p = 0$ como G(s) aporta un polo en $s=0$ no necesito I

PRUEBO P

Dibujar el lugar de las raíces.

Para elegir K_c calculo la $G_{BC}(s)$

$$G_{BC}(s) = \frac{K_c(s+2)}{s(s+1) + K_c(s+2)}$$

$$1 + K_c = 2\omega_n \cdot \delta \longrightarrow \omega_n = \frac{1+K_c}{2 \cdot \delta}$$

$$2K_c = \omega_n^2 \longrightarrow \omega_n = \sqrt{2K_c}$$

$$2K_c \cdot 4 \cdot \delta^2 = (1+K_c)^2 \longrightarrow \begin{array}{l} K_{c1} \simeq 2{,}76 \\ K_{c2} \simeq 0{,}36 \end{array}$$

$\omega_{n1} = 2{,}34$ rad/s

$\omega_{n2} = 0{,}84$ rad/s

Con δ y ω_n ya puedo calcular los polos.

Con $K_{c1} = 2{,}76$

$$s_{1,2} = (-1{,}87) \pm 1{,}5j$$

ALGO MAYOR QUE -2

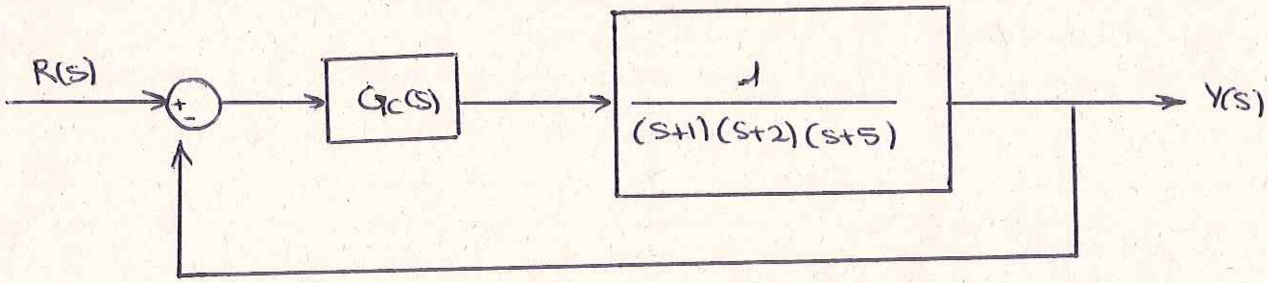
el cero es más dominante → Aparece un sobre impulso. Esto no vale porque no se puede aceptar un sobreimpulso.

RESPUESTA

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Con } K_{c2} = 0{,}36 \\ s_{1,2} = -0{,}68 \pm 0{,}5j \end{array}}$$

Si en el bucle cerrado el cero es más dominante hay un pequeño sobreimpulso

EJERCICIO



a) Gc(S) de forma que el SR sea estable (sistema realimentado)

b) Gc(S) de forma que el sistema realimentado sea un $e_p = 0$

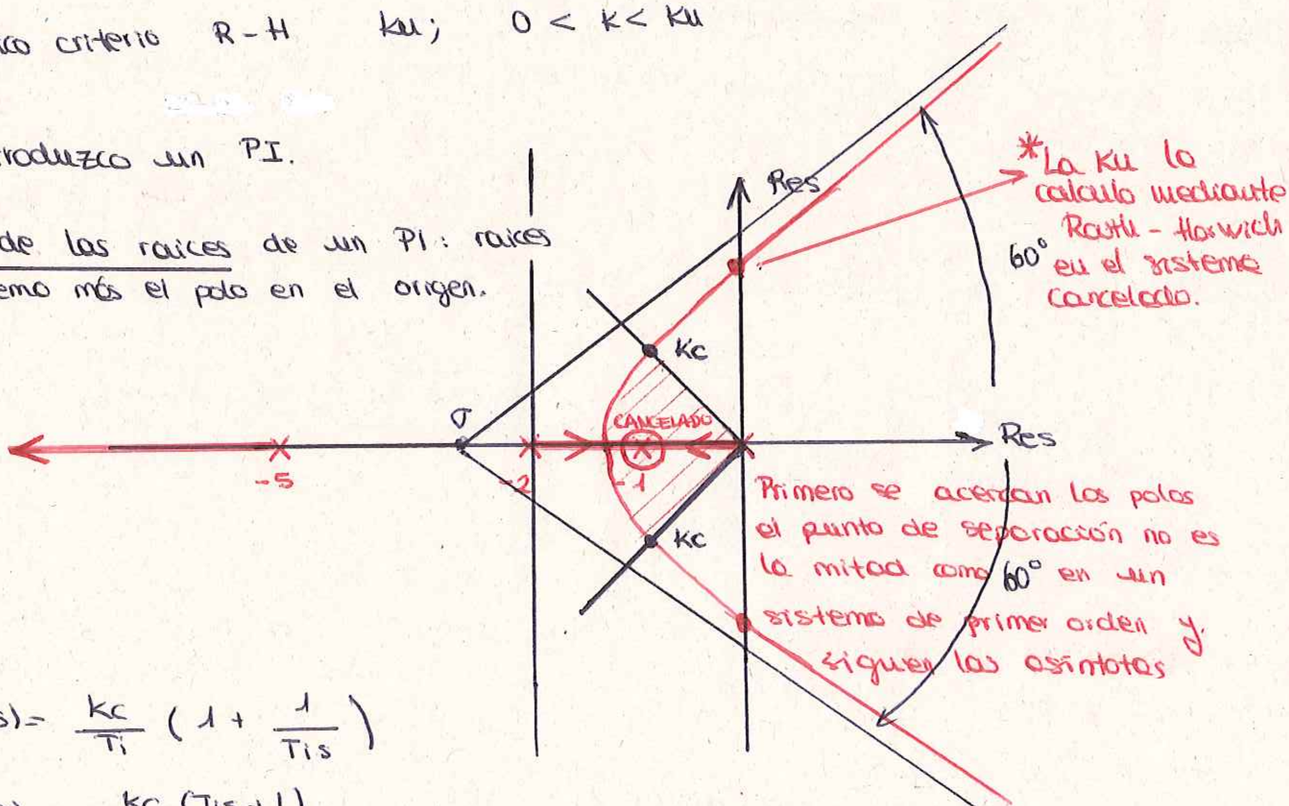
c) además $M_p \leq 4{,}3\%$

d) además $t_s \leq 2$

a) Aplico criterio R-H k_u; $0 < k < k_u$

b) Introduzco un P.I.

<u>Lugar de las raices</u> de un PI: raices del sistema más el polo en el origen.



$$G_c(S) = \frac{k_c}{T_i}\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$G_c(S) = \frac{k_c\,(T_i s + 1)}{T_i s}$$

$$G_c(S) = k_c\left(\frac{s + 1/T_i}{s}\right)$$ ⟶ Ubicamos el zero del PI de manera que cancela el polo más dominante (-1)

$$1 = \frac{1}{T_i} \longrightarrow \boxed{T_i = 1}$$

$n = 3$; $m = 0$

nº de ramas $= 3 = n$

nº de asintotas $= n - 3 = 3$

$$\sigma = \frac{\Sigma P_i - \Sigma z_i}{n-m} = \frac{-7}{3}$$

$$\theta = \frac{(2K-1)}{n-m} \cdot 180 \qquad \begin{matrix} K=0 \\ K=1 \\ K=3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \theta_0 = 60^\circ \\ \theta_1 = 180^\circ \\ \theta_2 = -60^\circ \end{matrix}$$

Lugar en el eje real.

*

$$1 + K \frac{1}{(S+5)(S+2)s} = 0$$

$\boxed{0 \leq k < 70}$ sistema estable.

Cualquier valor de K me asegura un ep=0.
Lo único que me cambia los diferentes valores es el comportamiento en el transitorio.

c) $M_p \leq 4{,}3\% \longrightarrow \delta = 0{,}707 \longrightarrow \theta \leq 45^\circ$

$$(s+a)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2) \longleftrightarrow \text{iguala con} \longleftrightarrow s(s+2)(s+5) + K_C = 0$$

polo real al que tiende a ∞

polos complejos conjugados (los del principio)

$a > 5\delta\omega_n$

$\delta = 0{,}707$

Ecuaciones

$$\left\{ \begin{matrix} 7 = a + 1{,}4\omega_n \\ 10 = 1{,}4\omega_n a + \omega_n \\ K = a\omega_n^2 \end{matrix} \right\} \quad K_c \; ; \; a \; ; \; \omega_n \qquad (\delta = 0{,}707)$$

$K_c = 7$

$a = 5{,}4$

d) además $t_s \leq 2s$

Tengo que introducir un PID.

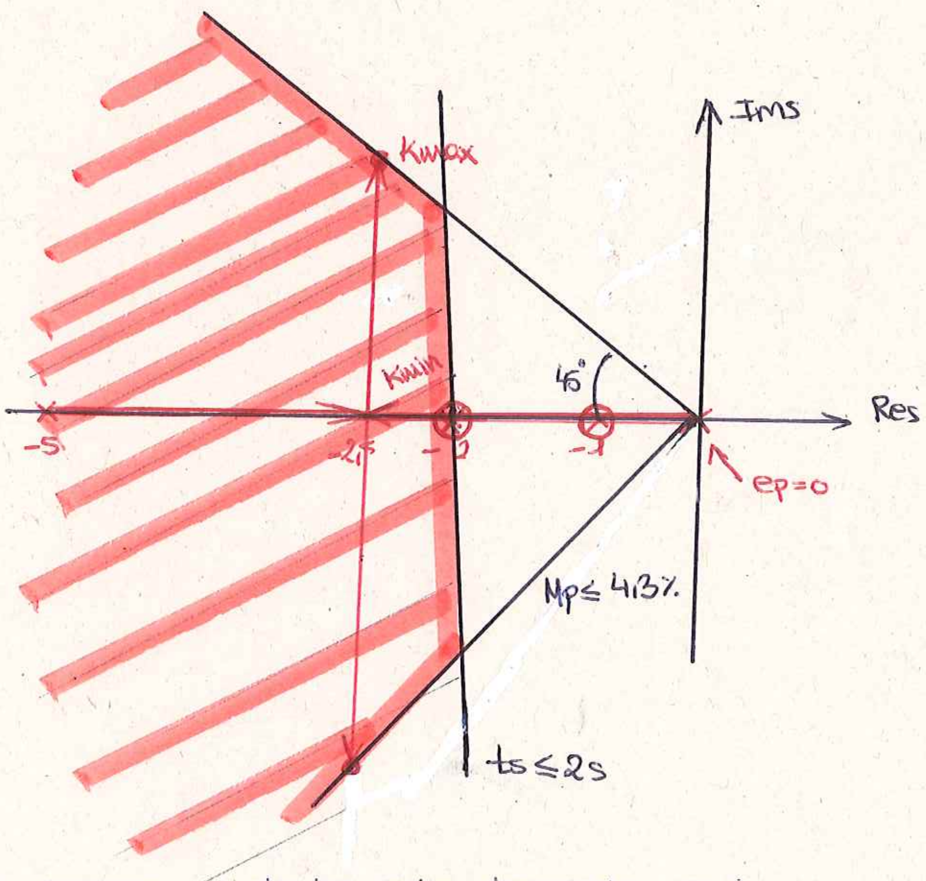
Ahora tengo dos ceros

$$G_c(s) = K_c\left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right]$$

$$G_c(s) = \frac{K_c\left[T_i T_d s^2 + T_i s + 1\right)}{s}$$

ecuación ceros: $s^2 + \frac{1}{T_d}s + \frac{1}{T_i T_d} = 0$

los sitúo en los ceros dominantes.



Igualo las ecuaciones de los polos dominantes y los ceros:

$$s^2 + \frac{1}{T_d}s + \frac{1}{T_i T_d} = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

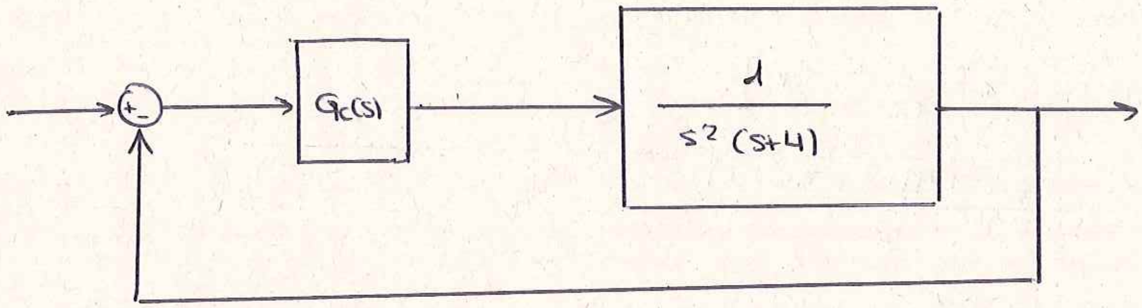
$$T_d = \frac{1}{3}$$

$$T_i = 1{,}5$$

$$\boxed{K_{min} < K < K_{max}}$$

EJERCICIO

En el que hay que situar el cero no cancelando un polo dominante sino en otra parte.



Controlador más simple que estabiliza el sistema.

TEMA 7: ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

$G(j\omega)$ es una función compleja por lo que está se puede descomponer en

MÓDULO $\quad |G(j\omega)| = \sqrt{X^2(\omega) + Y^2(\omega)} = |G(-j\omega)|$

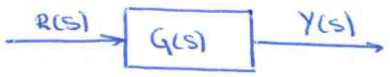
ARGUMENTO $\quad \mathrm{Arg}\,G(j\omega) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \Phi(\omega)$

$$y_{ss} = A|G(j\omega)|\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

Cuando la entrada es una señal sinusoidal, la salida también es una señal sinusoidal de la misma frecuencia que la entrada

- Atenuada / Amplificada por $|G(\omega_i)|$ = Amplitud
- Desfasada un ángulo $\phi = \arg(G(j\omega))$ = Desfase

<u>EJERCICIO 1</u>



$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+5)}$$

$r(t) = 2\,\mathrm{sen}\,3t$

$$y_{ss}(t) = A|G(j\omega)|\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 1)}{-\omega^2(j\omega + 5)} \longrightarrow \text{Hallamos módulo y argumento}$$

UN POLO EN EL ORIGEN ES UN DESFASE DE $-90^\circ \rightarrow s^2 = -90 \cdot 2 = -180^\circ$

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{10^2 + (10\omega)^2}}{\sqrt{5^2 + \omega^2}} = \frac{10\sqrt{1+\omega^2}}{\omega^2\sqrt{25+\omega^2}}$$

$$\mathrm{Arg}\,G(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \mathrm{actg}\,\frac{10\omega}{10} - 180^\circ - \mathrm{actg}\,\frac{\omega}{5}$$

PARA UNA $\omega = 3$ rad/s

$$|G(j\omega)| = \frac{10\sqrt{1+9}}{9\sqrt{25+9}} = 0{,}6$$

$$Arg(G(j\omega)) = arctg\ 3 - 180°C - actg\ \frac{3}{5} = -139{,}4°$$

$\downarrow$

Hay que pasarlo a radianes.

$360 \text{ --- } 2\pi$

$-139'46 \text{ --- } x$

$220{,}6°C$

$$\frac{220{,}6 \cdot 2\pi}{360} = 3{,}85 \text{ rad}$$

$$\boxed{y_{ss}(t) = 2 \cdot 0{,}6 \text{ sen } (3t + 3{,}85 \text{ rad})}$$

Está desfasado $-139{,}4°$

Y se encuentra atenuada

EJERCICIO 2

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+6}$$

$$G(j\omega) = \frac{4+j\omega}{-\omega^2+5j\omega+6}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{16+\omega^2}}{\sqrt{(6-\omega^2)^2+25}}$$

$$Arg(G(j\omega)) = arctg\ \frac{\omega}{4} - arctg\ \frac{5\omega}{6-\omega^2}$$

$\downarrow$

Distintos cuadrantes para diferentes valores de ω

si $\omega^2 < 6 \longrightarrow$ arctg $\oplus$

si $\omega^2 > 6 \longrightarrow$ ángulo de la calculadora $+180°$

$$Arg(G(j\omega)) = arctg\ \frac{\omega}{4} - \left[180 + arctg\ \frac{5\omega}{6-\omega^2}\right]$$

EJERCICIO 3

$$e(t) = V_R(t) + V_L(t) + v(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + v(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$e(t) = R \cdot C \frac{dv(t)}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + v(t)$$

$\mathcal{L}$

$$E(s) = \left[RC \cdot s + LC \cdot s^2 + 1\right] V(s) \longrightarrow \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{0{,}1s + \frac{1}{20}s^2 + 1}$$

$$G(s) = \frac{1}{0{,}1s + \frac{1}{20}s^2 + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{0{,}1 j\omega - \frac{1}{20}\omega^2 + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{20}\omega^2)^2 + 0{,}1^2}} = \frac{1}{10{,}25} = 0{,}098$$

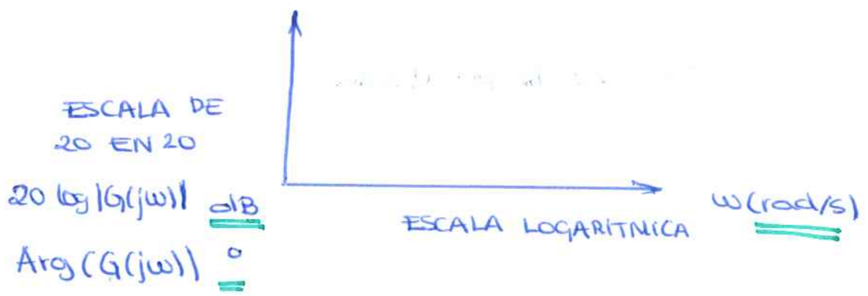
$$Arg(G(j\omega)) = 0 - \text{actg}\,\frac{0{,}1}{1 - \frac{1}{20}\cdot 15^2} = -180 - (-0{,}56) = -179{,}44^\circ$$

$$y_{ss} = A|G(j\omega)|\,\text{sen}(\omega t + \phi) = 0{,}0\,8\ \text{sen}(15t - 179{,}44)$$

DIAGRAMA DE BODE

Los diagramas de BODE representan

$$\left.\begin{array}{l} 20\log|G(j\omega)| \\ Arg(G(j\omega)) \end{array}\right\} \text{ en función de } \omega\,(rad/s)$$



● El diagrama de $|G(j\omega)|$ en decibelios (dB) puede obtenerse por la superposición de polos y ceros.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA RESPUESTA FRECUENCIAL

CURVA DEBIDA A LA GANANCIA ESTÁTICA

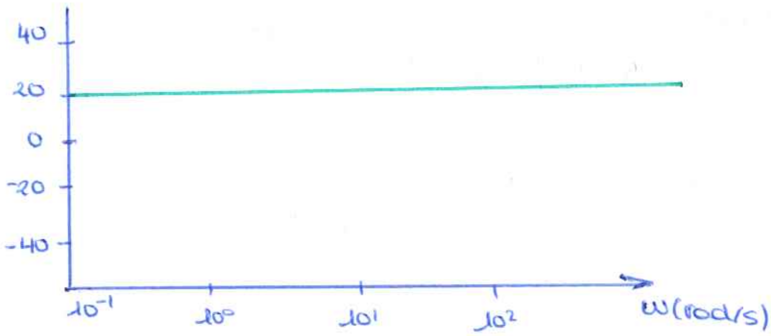
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|K| = cte \qquad Arg\,G(j\omega)(°) = 0° \text{ ó } \pi \text{ (si } K<0)$$

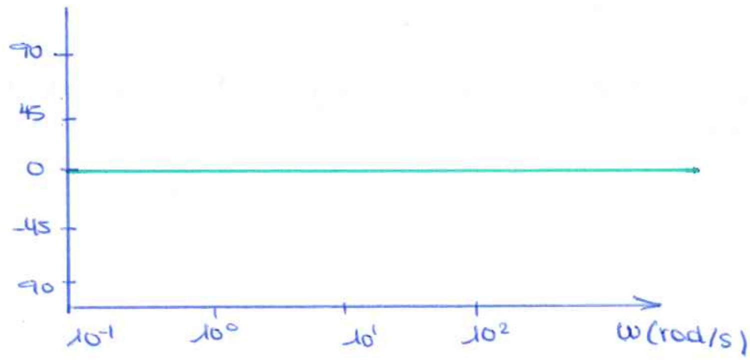
Ejemplo:

$K = 10$

$|G(j\omega)| = 20\log 10 = 20$ dB

$Arg\,G(j\omega)(°) = 0°$





CURVA DEBIDA AL POLO EN EL ORIGEN

$$G(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = 20\left[\cancel{\log(1)} - \log|\omega|\right] = -20\log\omega$$

Recta de pendiente -20 dB

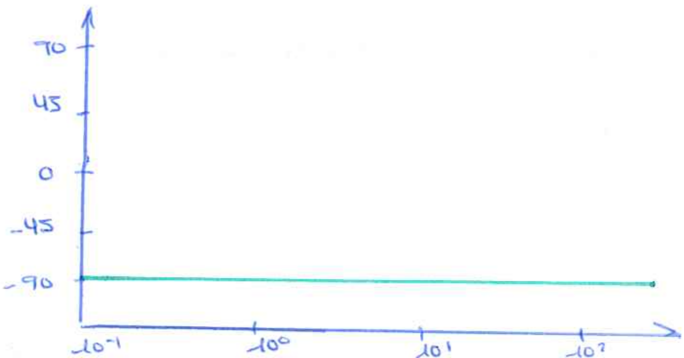
$Arg\,G(j\omega) = -90°\ \forall\omega$

Cuando es un polo múltiple

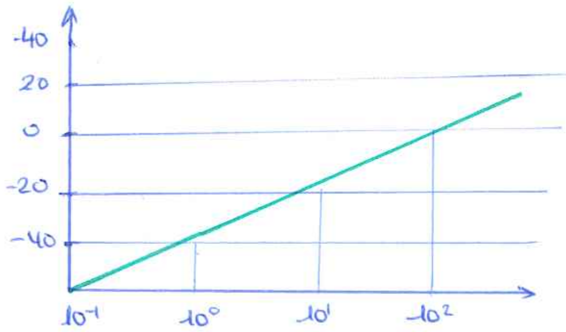
$$G(s) = \frac{1}{s^n}$$

Recta de pendiente $-20 \cdot n$ dB

Argumento $-90 \cdot n\,°$



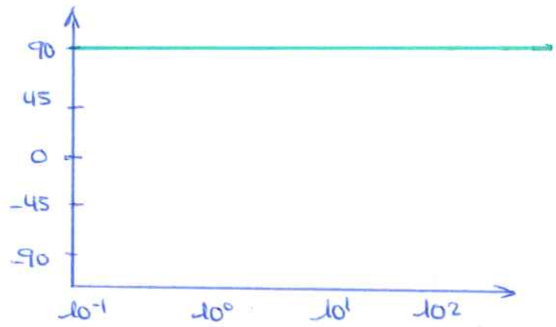
CURVAS DEBIDAS A CEROS EN EL ORIGEN



$$G(s) = s \longrightarrow G(j\omega) = j\omega$$

MÓDULO $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(\omega)$ RECTA PENDIENTE +20dB

ARGUMENTO $+90\ \forall\omega$



Cuando es un cero múltiple

$G(s) = s^n$

$|G(j\omega)|_{dB} \Rightarrow$ recta pendiente $20 \cdot n$

$Arg\,(G(j\omega)) \Rightarrow 90 \cdot n\ \forall\omega$

CURVAS DEBIDAS A UN POLO SIMPLE

$$G(s) = \frac{1}{\tau s+1} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+\tau\omega j}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{1+\tau\omega}\right) = -20\log|1+\tau\omega j| = -20\log\sqrt{1+\omega^2\cdot\tau^2}$$

si $\omega \to 0$ $\quad |G(j\omega)|_{dB} \longrightarrow 0$

si $\omega \to \infty$ $\quad |G(j\omega)|_{dB} \longrightarrow -20\log\omega\tau$

$$Arg\,G(j\omega) = +0 - arg\frac{1+j\omega\tau}{1} = -\arctan\omega\tau$$

$\omega \to 0$ $\quad Arg\,G(j\omega) = 0^\circ$

$\omega \to \omega/\tau$ $\quad Arg\,G(j\omega) = -45^\circ$

$\omega \to \infty$ $\quad Arg\,G(j\omega) = -90^\circ$

Ejemplo

$$G(s) = \frac{1}{10s+1}$$

$$|G(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{10s+1}\right| = 0 - 20\log|10j\omega+1| = -20\log\sqrt{10^2\omega^2+1}$$

Si $\omega \to 0 \longrightarrow |G(j\omega)| = 0$

Si $\omega \to \infty$ — $|G(j\omega)| = -20\log 10\omega$ recta de pendiente 10.

$\omega_n = \frac{1}{10} \rightarrow$ en ese momento interseca con lo de $\omega \to 0$ porque $\log 1 = 0$.

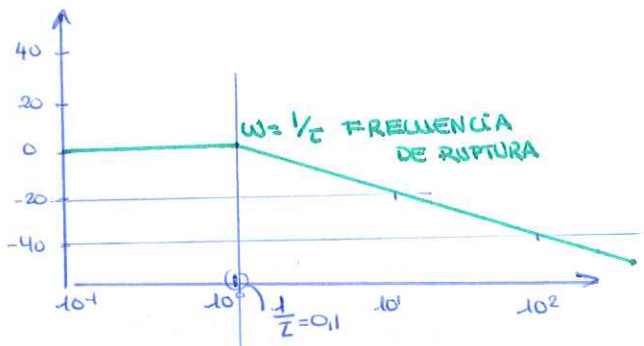
A esta $\omega = \frac{1}{\tau}$ se la denomina frecuencia de ruptura y cambia el módulo de la pendiente.

$$\text{Arg } G(j\omega) = \text{Arg}\left(\frac{1}{10s+1}\right) = 0 - \text{Arg}\,(10j\omega + 1) = -\text{arctg}\,\frac{10\omega}{1}$$

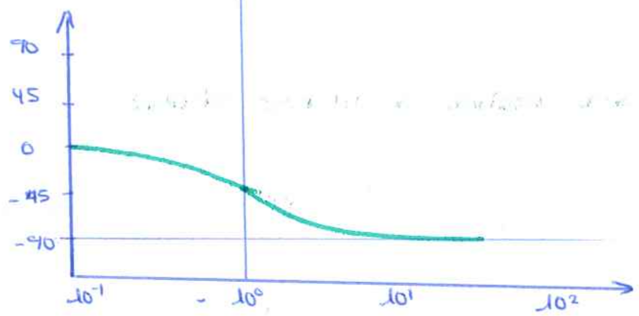
$\omega \to 0 \rightarrow \text{Arg}\,G(j\omega) = 0°$

$\omega = 1/\tau \rightarrow \text{Arg}\,G(j\omega) = -45°$

$\omega \to \infty \rightarrow \text{Arg}\,G(j\omega) = -90°$



Para polos reales múltiples las curvas del módulo y el argumento se multiplican por n.



NOTA: Los SISTEMAS LENTOS (τ GRANDES) tienen frecuencia de ruptura pequeña lo que significa que su ancho de banda es pequeño.

Los SISTEMAS RÁPIDOS son capaces de responder a señales de mayor frecuencia.

CURVAS DEBIDAS A CEROS SIMPLES

$$G(s) = \tau s + 1$$

El argumento $\omega \to 0 \rightarrow 0°$

$\omega = 1/\tau \rightarrow 45°$

$\omega \to \infty \rightarrow 90°$

El Módulo $\omega \to 0 \rightarrow 0$

$\omega \to \infty \rightarrow$ Recta de pendiente ascendente + 20 dB/decada

Los ceros amplifican las señales de ruido por su ascendente desde la frecuencia de ruptura.

POLOS DE SEGUNDO ORDEN

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\delta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2j\delta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1}$$

$$|G(j\omega)| = 0 - 20\log\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

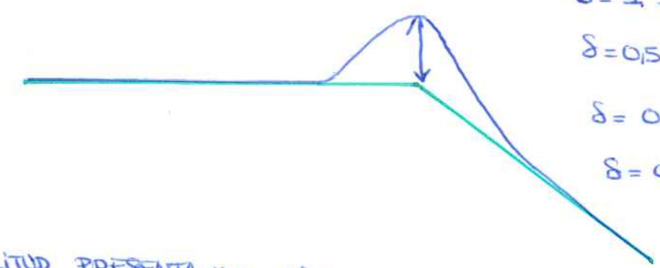
$\omega \to 0 \longrightarrow |G(j\omega)| = 0 \longrightarrow \operatorname{Arg}(G(j\omega)) = 0°$

$\omega \to \omega_n \longrightarrow |G(j\omega)| = -20\log(2\delta) \longrightarrow \operatorname{Arg}(G(j\omega)) = 90°$

$\omega \to \infty \longrightarrow |G(j\omega)| = -40\log\frac{\omega}{\omega_n} \longrightarrow \operatorname{Arg}(G(j\omega)) = -180°$

- FRECUENCIA DE RUPTURA $\underline{\underline{\omega_n}}$

↳ ERROR COMETIDO EN ω_n: Cuanto menor es δ, mayor es el error.



$\delta = 1 \rightarrow G_{dB} = -6$

$\delta = 0{,}5 \longrightarrow G_{dB} = 0$

$\delta = 0{,}1 \rightarrow G_{dB} = +14$

$\delta = 0{,}01 \longrightarrow G_{dB} = +40$

CUANDO $\delta < 1/\sqrt{2}$

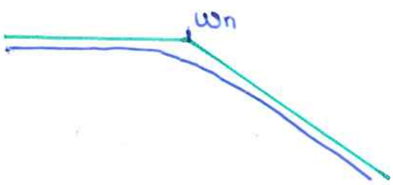
LA CURVA DE AMPLITUD PRESENTA UN MÁXIMO EN

$$\boxed{\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\delta^2}}$$

EL MÁXIMO CRECE SEGÚN δ DECRECE

$$\boxed{M_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}}$$

CUANDO $\delta > 1/\sqrt{2}$



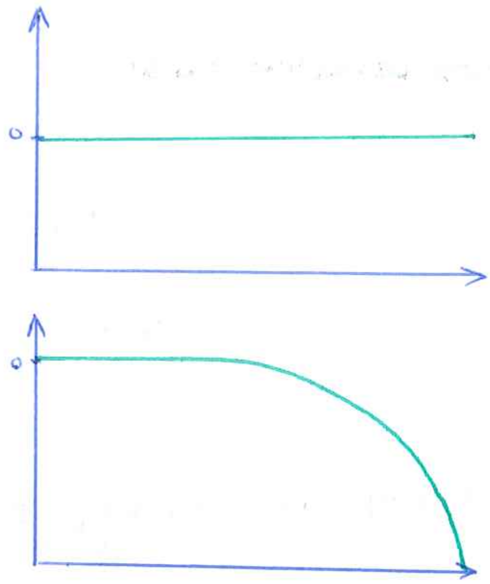
RETARDO PURO

$$G(s) = e^{-t_m s}$$

NO ME APORTA MÓDULO EN NINGUNA FRECUENCIA
SOLO FASE NEGATIVA

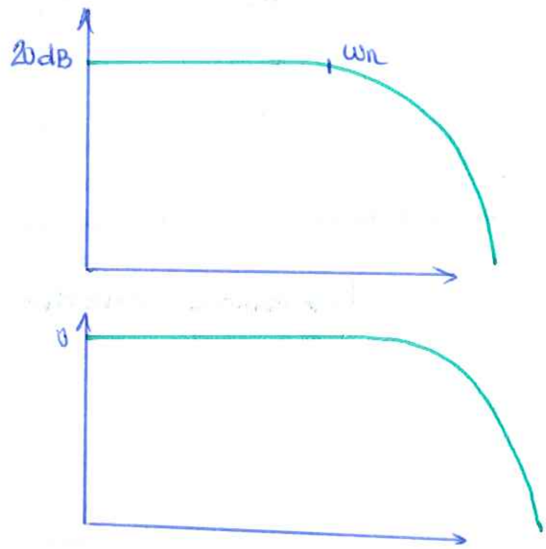
$$\text{Arg}\, G(j\omega) = \text{Arg}\left(e^{-j\omega t_m}\right) = -\omega t_m$$

$$\text{Arg}\, G(j\omega) = -\frac{360}{2\pi \text{ rad}}\, \omega t_m \text{ rad} = -57{,}3\, \omega t_m{}^{\circ}$$



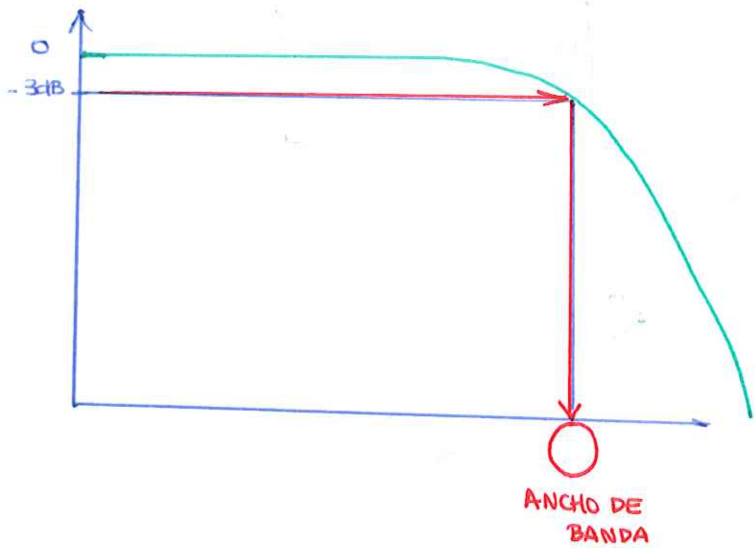
POMTM

$$G(s) = \frac{e^{-t_m s}}{1 + \tau s}$$



ANCHO DE BANDA

frecuencia a la que la atenuación es 3 dB menor que la atenuación a frecuencia nula.



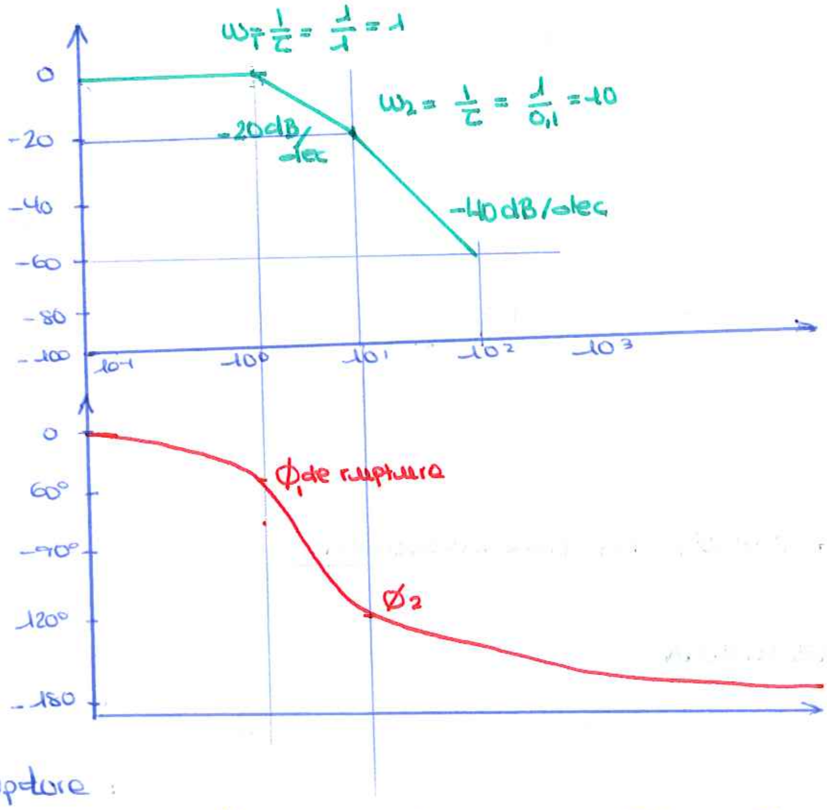
EJERCICIO 6

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s \cdot 0{,}1+1)}$$ curva módulo y curva argumento

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega \cdot 0{,}1+1)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega}\,\sqrt{0{,}1^2\omega^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega}\,\sqrt{0{,}1^2\omega^2+1}}$$

$$\text{Arg}\, G(j\omega) = \text{Arg}\, 1 - \text{Arg}(s+1) - \text{Arg}(s \cdot 0{,}1+1) = 0 - \text{arctg}\left(\frac{\omega}{1}\right) - \text{arctg}\left(\frac{0{,}1\omega}{1}\right)$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{1+\omega^2} - 20 \log \sqrt{0{,}1^2\omega^2+1}$$



Angulos de ruptura:

$$\phi(\omega) = -\text{arctg}(1) - \text{arctg}(0{,}1) = -50{,}71° = \phi_1$$

$$\phi(\omega) = -\text{arctg}(10) - \text{arctg}(1) = -129{,}29° = \phi_2$$

Frecuencias de ruptura:

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = 1 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\tau_2} = 10 \text{ rad/s}$$

Ganancia $K = 20 \log 1 = 0$ dB (No hay elevación desde 0).

$$\underline{\text{Módulo}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2} + \sqrt{1+(0{,}1\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}25} + \sqrt{1+0{,}1^2\cdot 0{,}25}} = 0{,}89$$

$$\underline{\text{Arg}} \Rightarrow -\arg \omega - \arg 0{,}1\omega = -\arg 0{,}5 - \arg 0{,}1\cdot 0{,}5 = -29{,}43^\circ$$

$\downarrow$ paso a radianes

$r(t) = 2 \operatorname{sen} 0{,}5t$

$$\frac{-29{,}43\cdot 2\pi}{360} = -0{,}51 \text{ rad}$$

$$\underline{Y_{ss} = 0{,}89\cdot 2\cdot \operatorname{sen}(0{,}5t - 0{,}51)}$$

$r(t) = 2 \operatorname{sen} 5t$

$$\underline{\text{Módulo}} = \frac{1}{\sqrt{1+25}\,\sqrt{1+0{,}1^2\cdot 25}} = 0{,}17$$

$$\underline{\text{Arg}} = -\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 0{,}1\cdot 5 = -105{,}25^\circ \rightarrow \text{Paso a radianes}$$

$$\frac{-105{,}25\cdot 2\pi}{360} = -1{,}84 \text{ rad}$$

$$\underline{Y_{ss} = 0{,}17\cdot 2 \operatorname{sen}(5t - 1{,}84)}$$

IDENTIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

SISTEMAS DE FASE MÍNIMA

Es igual que los diagramas de BODE pero alguno inestable

ALTURA DE LA ASÍNTOTA A BAJAS FRECUENCIAS

$20\cdot \log k$ en $\omega = 1$ rad/s

LA PENDIENTE DE LA ASÍNTOTA A BAJAS FRECUENCIAS INDICA EL NÚMERO DE POLOS O CEROS QUE TIENE EN EL ORIGEN

$\pm 20\cdot n$ dB/década

n polos / ceros origen.

FRECUENCIAS DE RUPTURA: SON LAS FRECUENCIAS EN LAS QUE EL DIAGRAMA DE BODE CAMBIA DE PENDIENTE

CON CADA POLO/CERO SIMPLE LA PENDIENTE CAMBIA −/+ 20 dB/década

CON CADA POLO/CERO DE SEGUNDO ORDEN LA PENDIENTE CAMBIA −/+ 40 dB/década.

ESJERCICIO 7

No tiene polos ni ceros en el origen

$K \Rightarrow \quad 20 = 20 \log K$

$K = 10$

Frecuencias de ruptura

$\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = 0{,}6 \longrightarrow \tau_1 = 1{,}67$

$\omega_2 = \frac{1}{\tau_2} = 10 \longrightarrow \tau_2 = 0{,}1$

$$G(s) = \frac{10}{(1{,}67s+1)(0{,}1s+1)}$$

EJERCICIO 8

Tiene un polo en el origen $\Rightarrow$ ACCIÓN INTEGRAL

$K \Rightarrow \quad 20 = 20 \log K \quad \Rightarrow K = 10 \Rightarrow$ ACCIÓN PROPORCIONAL

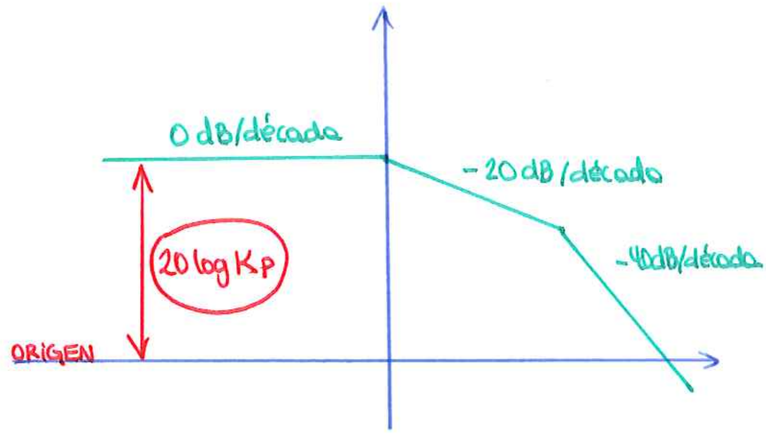
ERROR EN EL RÉGIMEN PERMANENTE DE SISTEMAS REALIMENTADOS

- LOS COEFICIENTES ESTÁTICOS DE ERROR PUEDEN EXTRAERSE DEL BODE EN BUCLE ABIERTO.
  - Si el BODE en BA tiene una asíntota plana $\rightarrow$ SIS. TIPO 0
  - Si el BODE en BA a bajas frecuencias tiene una pendiente de -20 dB/década $\rightarrow$ SIST. TIPO 1
  - Si el BODE en BA a bajas frecuencias tiene una pendiente de -40 dB/década $\rightarrow$ SIST. TIPO 2

SISTEMAS REALIMENTADOS DE TIPO 0

$K_p = \lim_{\omega \to 0} G(j\omega)H(j\omega)$

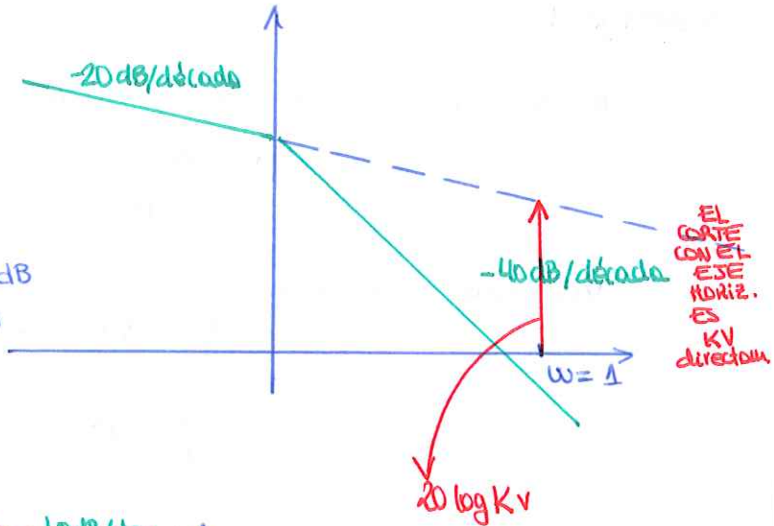
$\omega \to 0 \Rightarrow |G(j\omega)H(j\omega)|_{dB} = 20 \log K_p$



SISTEMA DE TIPO 1

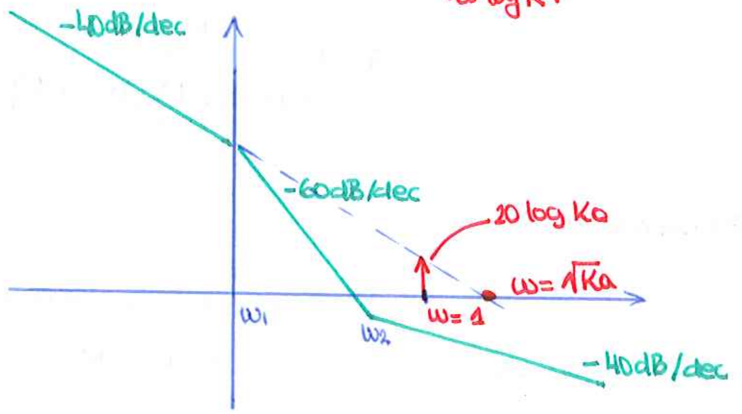
Prolongo la asíntota de bajas frecuencias

A frecuencia $\omega = K_v \Rightarrow |G(j\omega)H(j\omega)| = 0\,dB$
corte con el eje horizontal



SISTEMA DE TIPO 2

a frecuencia $\omega = \sqrt{K_a}$: $|G(j\omega)H(j\omega)| = 0\,dB$
corte con el eje horizontal.



EJERCICIO 10

Sistema de Tipo 0 → No tiene integradores en el origen.

$K_p \Rightarrow \quad 20 = 20 \log K_p \longrightarrow K_p = 10$

$$e_p = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11} = 0{,}091 \quad (9{,}1\%)$$

ESTABILIDAD RELATIVA DE SISTEMAS REALIMENTADOS

ESTABILIDAD CRÍTICA: cuando los polos son imaginarios puros, es decir:

$$\delta = 0$$

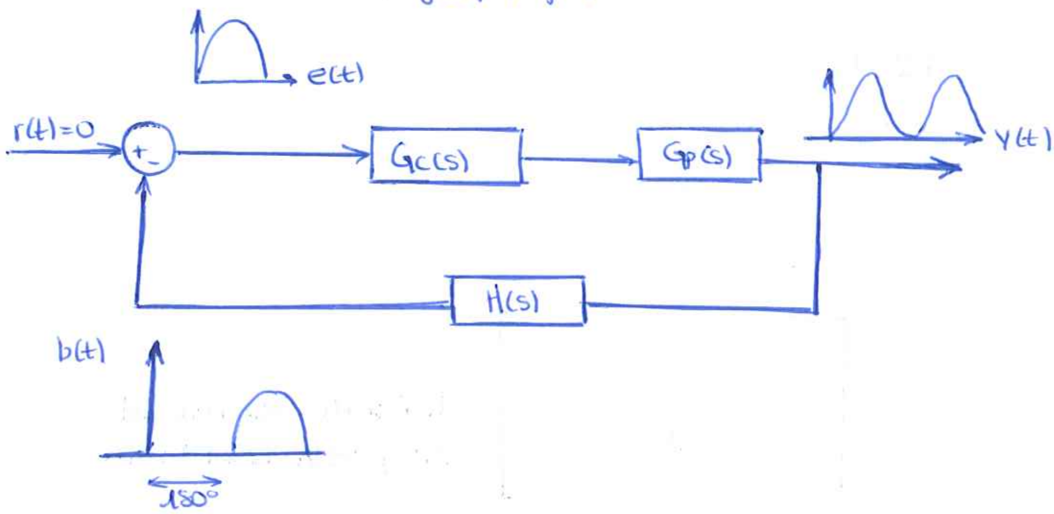
Cuantificamos la estabilidad. Vamos a medir la estabilidad relativa entre dos sistemas y vamos a decir cual es más estable que el otro en cantidad

Un sistema es críticamente estable cuando

$$1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = -1$$

$$\left[\begin{array}{l} |G(j\omega)H(j\omega)| = 1 \\ \text{Arg}\, G(j\omega)H(j\omega) = -180^\circ \end{array}\right] \text{ESTABILIDAD CRÍTICA}$$



La señal debe pasar a través de los elementos del bucle y aparecer en b(t) con la misma amplitud y desfasada 180°.

CONDICIONES ESTABILIDAD:

UN SISTEMA LINEAL OSCILARÁ CON AMPLITUD CONSTANTE SI:

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = 1 \text{ a la frecuencia de } \text{Arg}\, G(s)H(s) = -180^\circ$$

Si $|G(s)H(s)| < 1$ LAS OSCILACIONES DECAEN $\Rightarrow$ SIST. ESTABLE

Si $|G(s)H(s)| > 1$ LAS OSCILACIONES CRECEN $\Rightarrow$ SIST. INESTABLE

Si $\text{Arg}\, G(s)H(s) < -180^\circ$ LAS OSCILACIONES DECAEN $\Rightarrow$ SIST. ESTABLE

Si $\text{Arg}\, G(s)H(s) > -180^\circ$ LAS OSCILACIONES CRECEN $\Rightarrow$ SIST. INESTABLE

DEFINICIONES

FRECUENCIA DE CRUCE DE FASE: ωf

Frecuencia a la que $Arg(G(s)H(s))$ alcanza por primera vez $-180°$

FRECUENCIA DE CRUCE DE GANANCIA: ωg

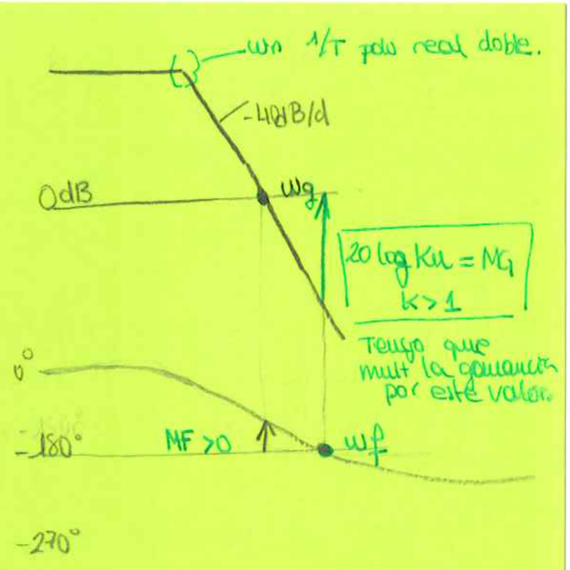
Frecuencia a la que $|GBA(j\omega)|$ alcanza por primera vez el valor 1 → Frecuencia a la que hay 0dB

MARGEN DE FASE MF

Bajo ωg a la gráfica de fases, donde corta con la gráfica ver cual es su distancia respecto a la cota de $-180°$

MARGEN DE GANANCIA MG

Subo ωf arriba hasta que corte con la gráfica y mido la distancia hasta el origen 0dB.



Cuando pase de pendiente recta a -40 dB/d significa que tengo polos de segundo orden pueden ser complejos conjugados o polos reales dobles ($\xi = 1$).

Si NO CORTA -180° no será estable porque el cambio de ganancia no cambia la fase. $\omega f \nexists \Rightarrow MG = \infty$

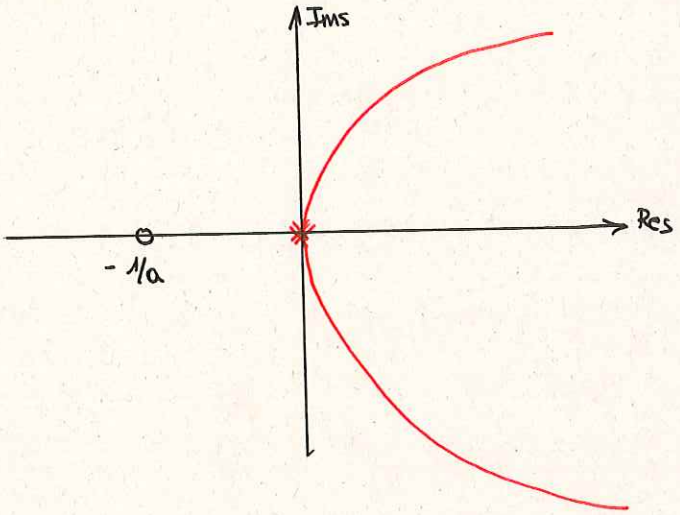
$$\boxed{\begin{array}{c} 6\,dB < MG < 8\,dB \\ 45° < MF < 65° \end{array}}$$

SISTEMA ESTABLE CON BUENA RESPUESTA

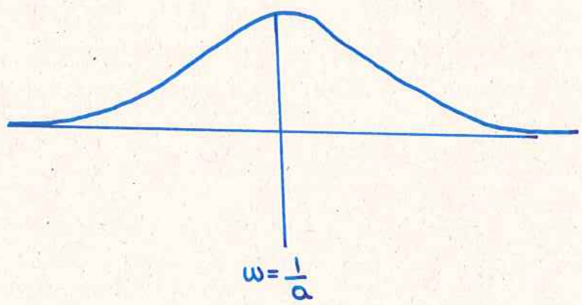
EL SISTEMA ES ESTABLE SI

$MF > 0 \quad MG > 0$

EJERCICIO 11.



$$GH = \frac{as+1}{s^2}$$



$$GH(j\omega) = \frac{aj\omega + 1}{-\omega^2}$$

$$|GH(j\omega)| = \frac{\sqrt{(a\omega)^2+1}}{\omega^2}$$

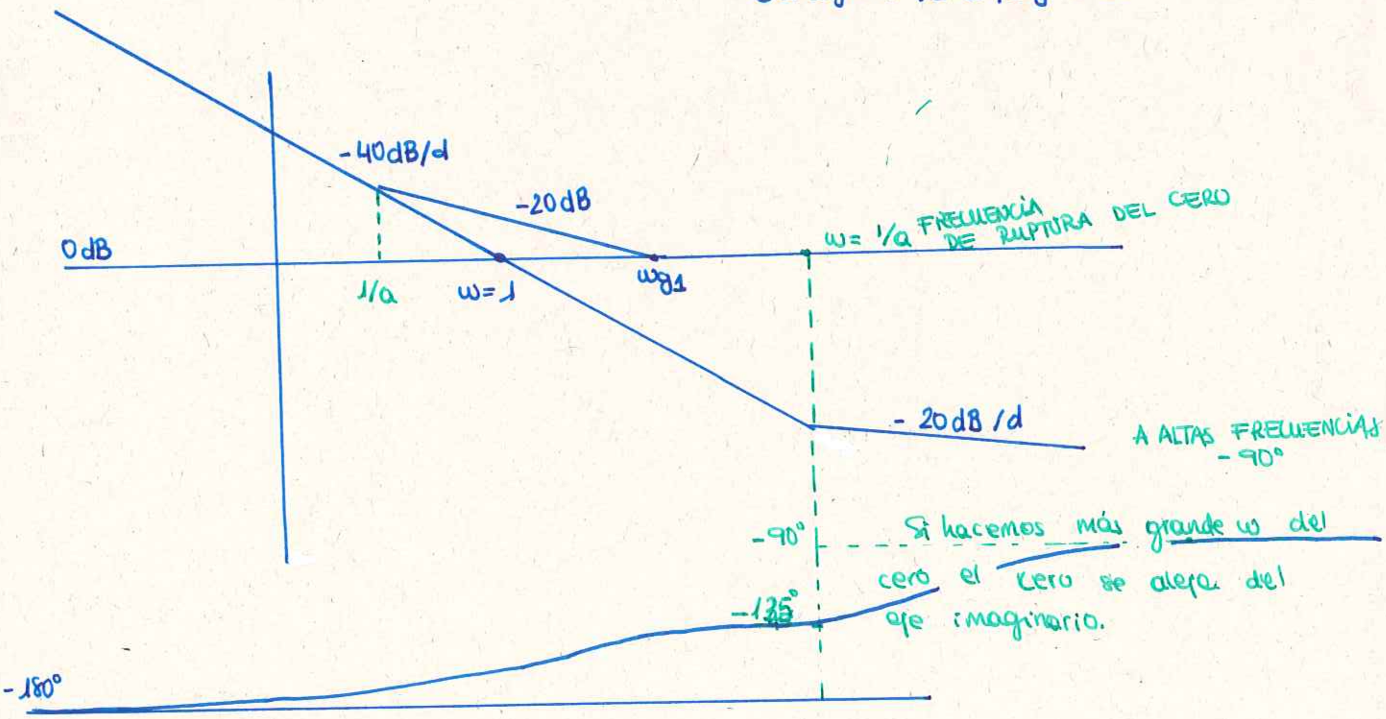
$$Arg(GH(j\omega)) = actg\ \frac{a\omega}{1} - 180^\circ$$

$$MF = 45^\circ \Rightarrow MF = 180 + Arg\ GH(j\omega)_{\omega=\omega g}$$

$$|GH(j\omega g)| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{(a\omega g)^2+1}}{\omega g^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2\omega g^2} = \omega g^2 + 1$$

$$a^2\omega g^2 = \omega g^4 + 2\omega g^2 + 1$$

$$0 = \omega g^4 + (2-a^2)\omega g^2 + 1$$



Si hacemos más grande ω del cero el cero se aleja del eje imaginario.

$$45 = 180 + \text{Arctg}\,\frac{a\omega}{1} - 180$$

$$45 = \text{Arctg}\,\frac{a\omega}{1}$$

$$a\omega_g = 1$$

Para que el márgen de fase sea 45° $\omega_g \cdot a = 1$.

$$\sqrt{1+1} = 1 \cdot \omega_g^2$$

$$\sqrt{2} = \omega_g^2$$

$$\omega_g = 1{,}19 \text{ rad/s}$$

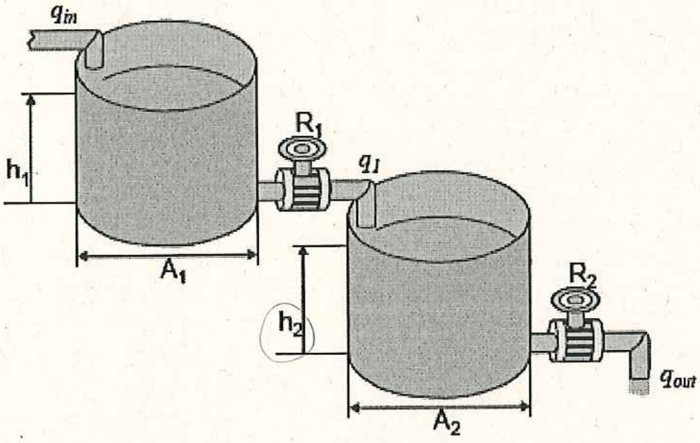
SEMINARIOS
A2C

FICHA DE TRABAJO PREVIO SEMINARIO 1

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE:

1. Problema 2-A del tema 3 de la colección de problemas:

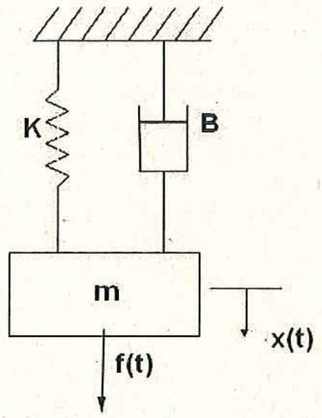
En la figura se representan dos depósitos cilíndricos de sección transversal constante situados verticalmente en serie, que descargan por gravedad. Al depósito superior entra un caudal $q_{in}(t)$, éste depósito superior descarga un caudal $q_1(t)$ sobre el inferior y éste a su vez descarga un caudal $q_{out}(t)$ en un depósito colector. El caudal de descarga depende del nivel alcanzado por el líquido en el depósito.



A. Obtener el modelo matemático que represente el comportamiento dinámico del proceso de la figura, suponiendo que el régimen es laminar. Suponiendo que se desea conocer la evolución del nivel del tanque 2 ante variaciones en el caudal de entrada, q_{in}, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.

2. Problema 6 del tema 3 de la colección de problemas:

El sistema mecánico de la figura está formado por una masa, un muelle y un amortiguador. Hallar el modelo matemático del sistema que relacione el desplazamiento x(t) de la masa m con la fuerza f(t) que se aplica sobre ella.



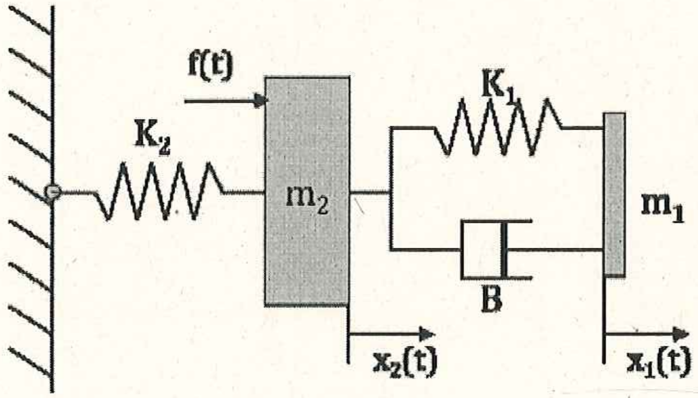
FICHA DE TRABAJO SEMINARIO 1

TRABAJO A REALIZAR DURANTE EL SEMINARIO:

Durante el seminario se discutirán los problemas trabajados en casa y se resolverán el siguiente:

1. Problema 8 de la colección de problemas del tema 3:

   El sistema de la figura representa un absorbedor de energía. La masa m_1 es relativamente pequeña y está unida a la masa principal m_2 a través de un muelle de constante k_1 y un amortiguador de constante B, con objeto de reducir vibraciones en el desplazamiento x(t) de la masa m por acción de la fuerza f(t). Hallar el modelo matemático que relaciona el desplazamiento x(t) de la masa m_2 con la fuerza externa f(t) aplicada.

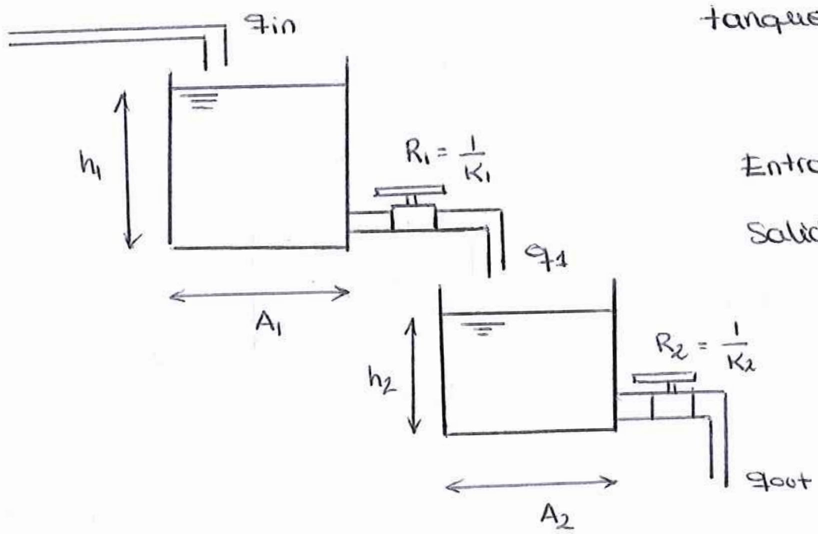


EDURNE MONTES

FICHA TRABAJO PREVIO SEMINARIO 1

1. PROBLEMA

Problema 2-A del tema 3 de la colección de problemas:



tanques de descarga por gravedad.

Entrada q_{in}

Salida q_1, h_1, h_2, q_{out}

A. Obtener el modelo matemático suponiendo que el régimen es laminar:

Tanque 1: $A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{in} - q_1$ (1)

Laminar: $q_1 = K_1 \cdot h_1$ (2)

Tanque 2: $A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_{out}$ (3)

Laminar: $q_{out} = K_2 \, h_2$ (4)

Variables significativas: aquellas variables de interes.

q_{in} variable manipulada

h_2 variable controlada

$NV = 4 \; (q_1, q_{out}, h_1, h_2)$

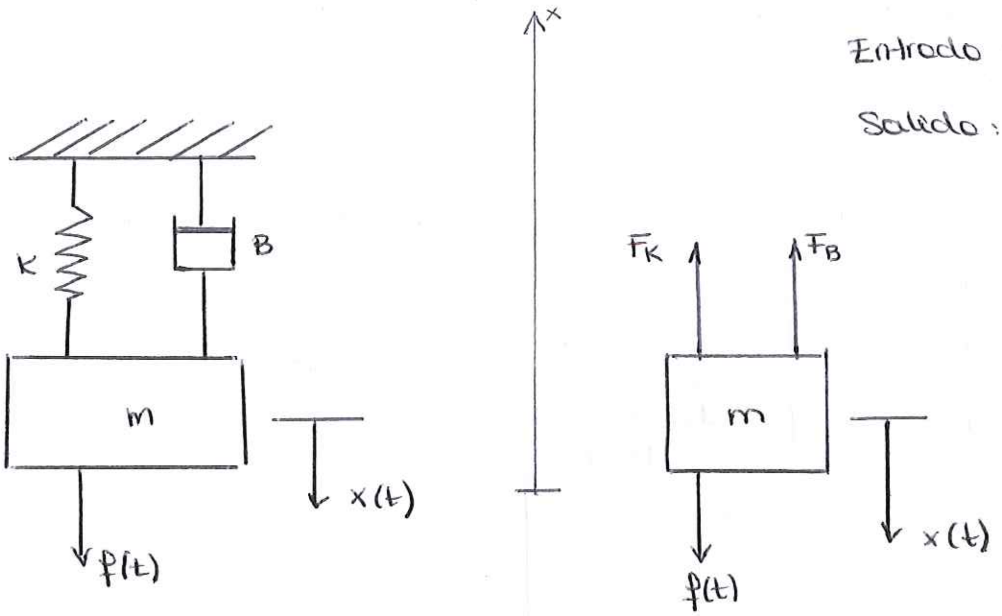
$NE = 4$

$NF = 0$

Modelo de control $A_2 \frac{dh_2}{dt} = - A_1 \frac{dh_1}{dt} + q_{in} - K_2 \cdot h_2$

2. PROBLEMA

Problema 6 del tema 3 de la colección de problemas.



Entrada : f(t)

Salida : x(t)

Hallar el modelo matemático que relacione el desplazamiento x(t) con la fuerza f(t).

2. Ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\quad F_K + F_B - f(t) = -m \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ (1)

HIPOTESIS: suponemos que el muelle y el amortiguador parten de la posición 0, es decir $x_1(t) = 0$.

HIPOTESIS: suponemos que en el momento de partida la masa se encuentra en reposo $\dfrac{dx_1(t)}{dt} = 0$.

$$F_K = K\left[-x(t)\right] \quad (2)$$

$$F_B = B\left[-\frac{dx(t)}{dt}\right] \quad (3)$$

NV= 3 (F_K, F_B, x(t))

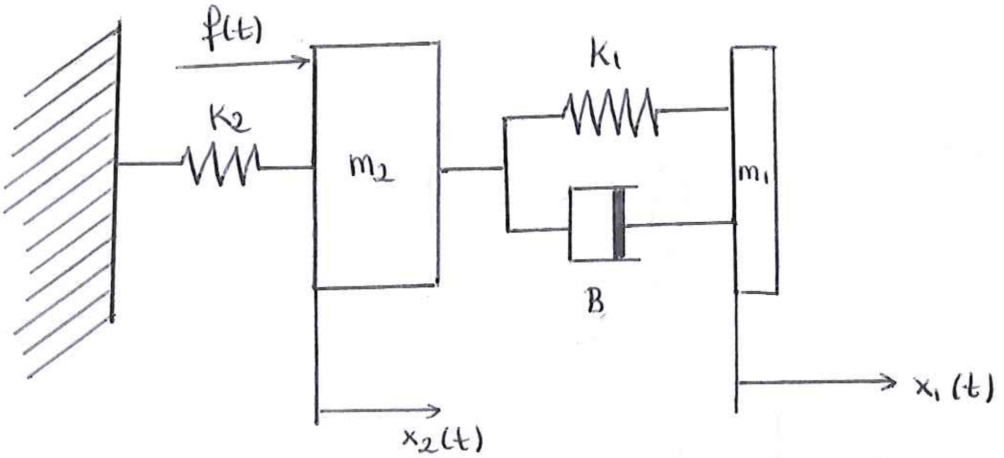
NE = 3

NF = 3

$$+K \cdot x(t) + B\frac{dx(t)}{dt} + f(t) = +m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

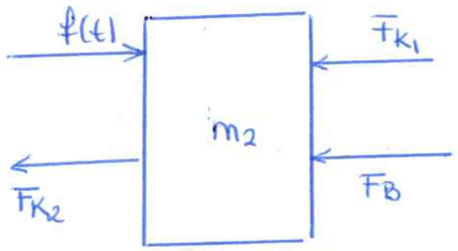
SEMINARIO 1: AUTOMÁTICA Y CONTROL

1. Problema 8 de la colección de problemas del tema 3:

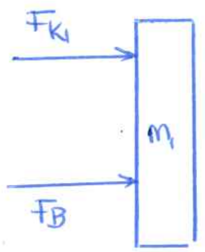


1. Diagrama del sólido libre.

Sólido 1



Sólido 2



2. Modelo matemático

$$f(t) - F_{K2} - F_{K1} - F_B = m_2 \cdot \ddot{x}_2(t)$$

$$F_{K2} = K_2\, x_2(t)$$

$$F_{K1} = K_1\,(x_2(t) - x_1(t))$$

$$F_B = B\,(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t))$$

Como he puesto la flecha en el diagrama del sólido libre en su dirección real, los módulos de F_{K2}, F_{K1} y F_B tienen que ser positivos $\Rightarrow$ mayor menos la menor.

$$F_{K1} + F_B = m_1 \cdot \ddot{x}_1(t)$$

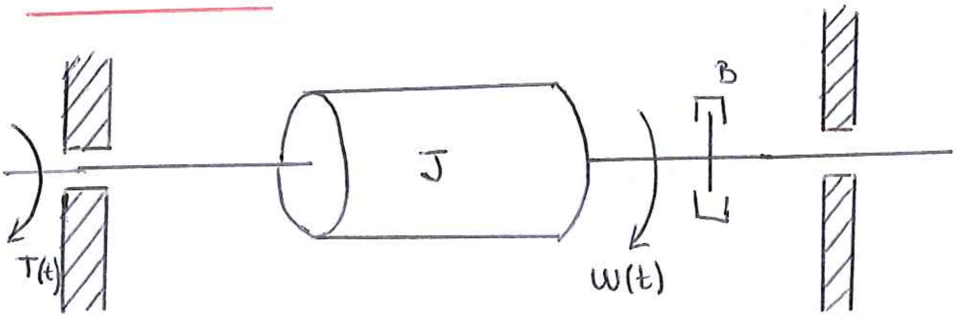
NV = 5 (F_{K1}, F_{K2}, F_B, $x_1(t)$, $x_2(t)$)

NE = 5

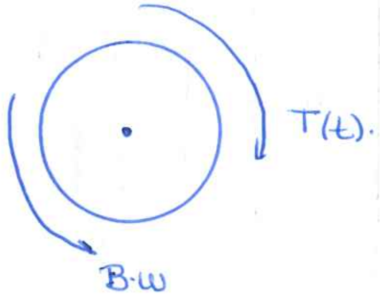
Grados libertad = 0.

3. Relación de $x_2(t)$ y $f(t)$ $\Longrightarrow$ No es trivial. Mediante $\mathcal{L}$.

EJERCICIO 10



1. Diagrama sólido libre

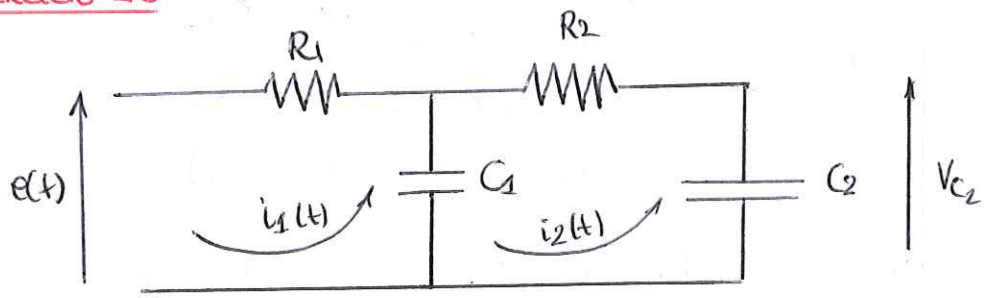


2. Modelo Matemático

$$T(t) - B\cdot\omega = J\dot{\omega}$$

$\boxed{\text{Suma de pares motores = momento de inercia × aceleración angular}}$

EJERCICIO 15



1. Modelo matemático : método de mallas

$$e(t) = i_1 R_1 + \frac{1}{C_1}\int (i_2(t) - i_1(t))\,dt$$

$$-R_2 i_2 - \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt + \frac{1}{C_1}\int [i_1(t) - i_2(t)]\,dt = 0$$

$$e(t) = i_1 R_1 + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt \quad V_{C_2}$$

→ Relación entre $e(t)$ y V_{C_2}

Variable manipulada : $e(t)$

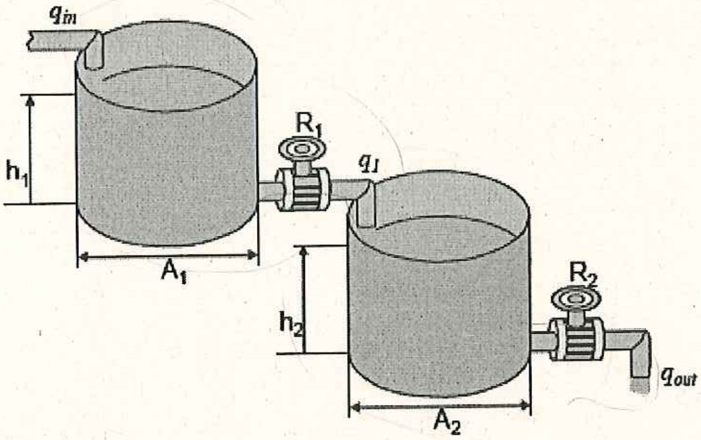
Variable controlada : V_{C_2}

FICHA DE TRABAJO PREVIO SEMINARIO 2

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE:

1. Problema 2-B del tema 3 de la colección de problemas:

En la figura se representan dos depósitos cilíndricos de sección transversal constante situados verticalmente en serie, que descargan por gravedad. Al depósito superior entra un caudal $q_{in}(t)$, éste depósito superior descarga un caudal $q_1(t)$ sobre el inferior y éste a su vez descarga un caudal $q_{out}(t)$ en un depósito colector. El caudal de descarga depende del nivel alcanzado por el líquido en el depósito.



A. Si el flujo de descarga es turbulento, la relación existente entre el caudal de descarga y el nivel en cada uno de los depósitos es no lineal. Obtener el modelo lineal aproximado en los alrededores de un punto nominal de operación.

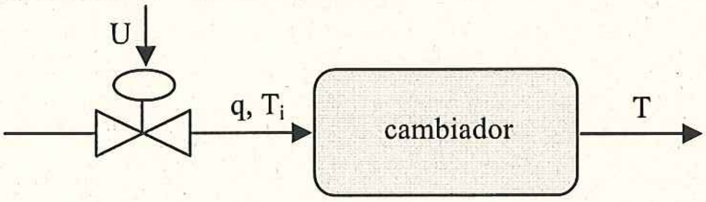
FICHA DE TRABAJO SEMINARIO 2

TRABAJO A REALIZAR DURANTE EL SEMINARIO:

Durante el seminario se discutirán el problema anterior y se resolverán el siguiente problema:

1. Problema 20 de la colección de problemas del tema 3:

   El sistema de la figura representa un intercambiador de calor. Este contiene un sistema de calefacción interno no manipulable que calienta un caudal de agua q desde una temperatura Ti a una temperatura T.



La relación de la temperatura de salida T (en ºC) con la señal de entrada a la válvula U (en % de apertura) y con la temperatura del líquido de entrada Ti (en ºC) viene dada por la siguiente expresión:

$$3\frac{dT}{dt} = -6T + 8,8U^2 + 2T_i \qquad \text{(tiempo en minutos)}$$

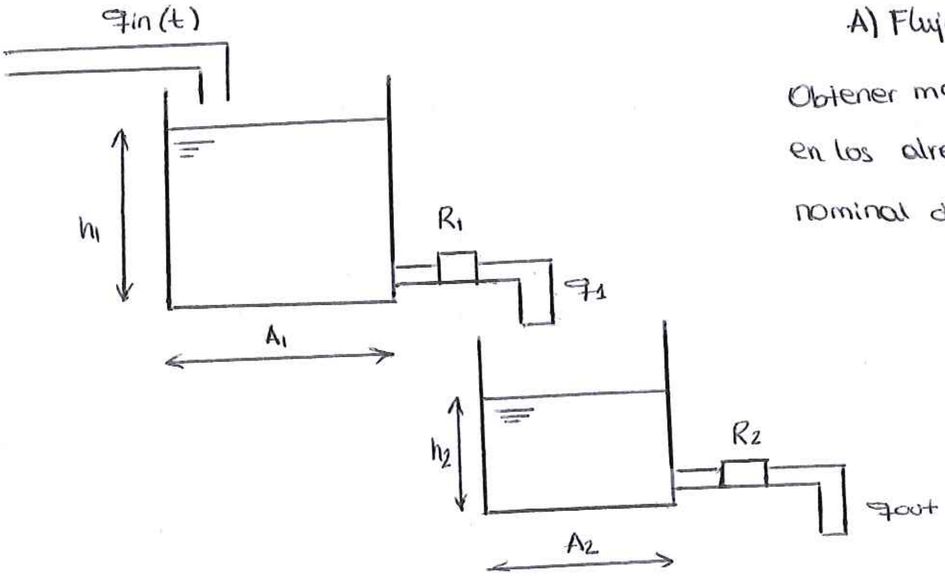
En el punto nominal de operación, la temperatura de entrada es de 10ºC y la temperatura de salida es de 40ºC.

Obtener, para el punto de operación dado, un modelo lineal que relacione la temperatura de salida con la apertura de válvula y con la temperatura de la corriente de entrada.
Identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.

FICHA TRABAJO PREVIO SEMINARIO 2

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE

1. Problema 2-B del tema 3 de la colección de problemas



A) Flujo de descarga turbulento.
Obtener modelo lineal aproximado en los alrededores de un punto nominal de operación.

TANQUE 1

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{int} - q_1 \qquad q_1 = K_1 \cdot \sqrt{h_1}$$

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{int} - K_1 \cdot \sqrt{h_1} \longrightarrow A_1 \frac{dh_1}{dt} - q_{int} + K_1\sqrt{h_1} = 0$$

No lineal por $\sqrt{h_1}$

$f(q_{in}, h_1, \dot{h}_1)$

Expandiendo en serie de taylor la función alrededor de un punto operación $(\bar{q}_{int}, \bar{h}_1)$. Despreciando los términos de orden superior al primero:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial q_{in}}\right|_{PO} \Delta q_{in} + \left.\frac{\partial f}{\partial h_1}\right|_{PO} \Delta h_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}_1}\right|_{PO} \Delta \dot{h}_1 = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial q_{in}}\right|_{PO} = -1$$ (No depende del P.O. porque es un término lineal)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h_1}\right|_{PO} = K_1 \frac{1}{2} \left.\frac{1}{\sqrt{h_1}}\right|_{PO} = K \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}}$$ $\bar{h}_1$ el valor del nivel en un estado estacionario

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}_1}\right|_{PO} = A_1$$ (No depende del PO porque es un término lineal)

$$-\Delta q_{int} + \frac{K_1}{2\sqrt{h_1}} \cdot \Delta h_1 + A_1 . \Delta \mathring{h}_1 = 0$$

$$\Delta q_{in} = q_{in}(t) - \overline{q_{int}}$$

$$\Delta h_1 = h_1(t) - \overline{h_1}$$

$$\Delta \mathring{h} = \mathring{h}(t) - \overline{\mathring{h}}$$

Los valores que no dependen de (t) son nulos.

$$\Delta \frac{dh(t)}{dt} + \frac{K}{2\sqrt{\overline{h_1}}} h(t) = q_{in}(t)$$

MODELO MATEMATICO LINEAL

$$\left(\frac{2\Delta\sqrt{\overline{h_1}}}{K}\right)\frac{dh_1(t)}{dt} + h_1(t) = \frac{2\sqrt{\overline{h_1}}}{K_1} q_{int}$$

MODELO MATEMÁTICO LINEAL APROXIMADO

TANQUE 2

$$\Delta_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_{out}$$

$$q_{out} = K_2\sqrt{h_2}$$

$$q_1 = K_1\sqrt{h_1}$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - K_2\sqrt{h_2}$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = K_1\sqrt{h_1} - K_2\sqrt{h_2}$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} - K_1\sqrt{h_1} + K_2\sqrt{h_2} = 0$$

Serie de Taylor

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h_2}\right|_{P_0} \Delta h_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial \mathring{h}_2}\right|_{P_0} \Delta \mathring{h}_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial h_1}\right|_{P_0} \Delta h_1 = 0$$

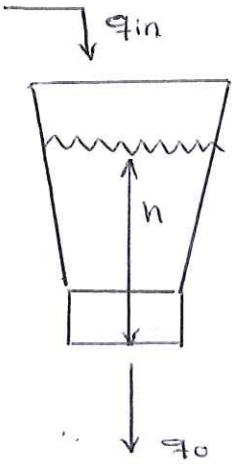
$$\frac{\partial f}{\partial h_2} = K_2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_2}} = K_2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\overline{h_2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial h_1} = K_1 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{h_1}} = K_1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{h_1}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathring{h}_2} = A_2$$

$$A_2 \Delta \mathring{h}_2 + \frac{K_1}{2\sqrt{\overline{h_1}}} \Delta h_1 + \frac{K_2}{2\sqrt{\overline{h_2}}} \Delta h_2$$

EJERCICIO 5



LINEALIZAR

$V = kh^3$ ← ecuación no lineal.

$h = f(q_{in})$

Régimen turbulento.

$q_o = k \cdot \sqrt{h}$

$* \; q_{in} - q_o = \frac{dV}{dt}$

← ecuación no lineal

Linealizar el modelo en el pto de operación $(q_{in\,eq}, q_{o\,eq}, h_{eq})$

1) Linealizar $q_o = k \cdot \sqrt{h}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial q_o}\right|_{P_o} = 1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{P_o} = \frac{k}{2\sqrt{h_{eq}}}$$

$$\Delta q_o = \frac{k}{2\sqrt{h_{eq}}} \Delta h$$

2) Linealizar $V = kh^3$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial V}\right|_{P_o} = 1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{P_o} = 3kh_{eq}^2$$

$$\Delta V = 3kh_{eq}^2 \Delta h$$

Modelo lineal sólo funciona si los incrementos son pequeños

$$q_{in} = q_{ieq} + \Delta q_{in}$$
$$q_o = q_{oeq} + \Delta q_o$$
$$h = h_{eq} + \Delta h$$
$$V = V_{eq} + \Delta V$$

me voy al modelo *

$$q_{ieq} + \Delta q_{in} - q_{oeq} - \Delta q_o = \frac{d}{dt}\left[V_{eq} + \Delta V\right]$$

en equilibrio $q_{ieq} = q_{o\,eq}$

$$\Delta q_{iu} - \Delta q_o = \frac{d}{dt}\left[V_{eq} + \Delta V\right] \longrightarrow \frac{d}{dt} V_{eq} = 0 \text{ porque es cte}$$

$$\Delta q_{iu} - \Delta q_o = \frac{d}{dt}\Delta V$$

me piden relación de q_{iu} con h

$$\Delta q_{iu} - \frac{K}{2\sqrt{h_{eq}}} \cdot \Delta h = \frac{d}{dt}\Delta V$$ relación lineal entre las variables

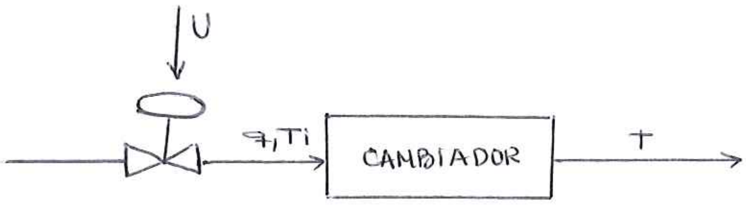
$$\Delta q_{iu} - \frac{K}{2\sqrt{h_{eq}}} \cdot \Delta h = \frac{d}{dt}\left[3K h_{eq}^2 \, \Delta h\right]$$ saco lo que es cte fuera de la derivada

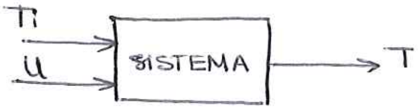
$$\boxed{\Delta q_{in} - \frac{K}{2\sqrt{h_{eq}}} \cdot \Delta h = 3K h^2_{eq} \frac{d}{dt}\Delta h}$$

Donde pone Δq_{in} pongo q_{iu} $\longrightarrow$ Variable de desviación

$$\boxed{q_{iu} - \frac{K}{2\sqrt{h_{eq}}} \cdot h = 3K h^2_{eq}\, \mathring{h}}$$ $\longrightarrow$ donde $\left.\begin{matrix} q_{iu} \\ h \\ \mathring{h} \end{matrix}\right\}$ Variables de desviación

EJERCICIO 2





$$3\frac{dT}{dt} = -6T + 8{,}8U^2 + 2T_i$$

P.O ($T_i = 10°C$, $T = 40°C$)

Saco el caudal U, porque tiene que verificar la ecuación estática:

$$0 = -6T + 8{,}8U^2 + 2T_i$$

$$0 = -6\cdot 40 + 8{,}8\cdot U^2 + 2\cdot 10$$

$$U = 5\ \%$$

$$3\frac{dT}{dt} + 6T - 8{,}8U^2 - 2T_i = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{T}}\right|_{Po} = 3$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{Po} = 6$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_{Po} = -17{,}6U = -88$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial T_i}\right|_{Po} = -2$$

Si nos piden solo linealizar dejo así no importa calcular los pequeños incrementos

$$\boxed{3\Delta\dot{T} + 6\Delta T - 88\Delta U - 2\Delta T_i = 0}$$

No pasar los incrementos. dejar en función de los pequeños incrementos.

$$3\cdot\dot{T} + 6T - 240 - 88U + 440 - 2T_i + 20 = 0$$

$$\Delta\dot{T} = \dot{T} - \cancel{\dot{T}_{eq}} = \dot{T}$$

$$\Delta T = T - T_{eq} = T - 40$$

$$\Delta U = U - U_{eq} = U - 5$$

$$\Delta T_i = T_i - T_{i\,eq} = T_i - 10$$

$$3\dot{T} + 6T - 2T_i - 88U + 220 = 0$$

No.

$$\boxed{3\dot{T} + 6T - 88U - 2T_i = 0}$$

DESPUÉS DE LINEALIZAR: $\mathcal{L}$.

Dos funciones de transferencia posibles

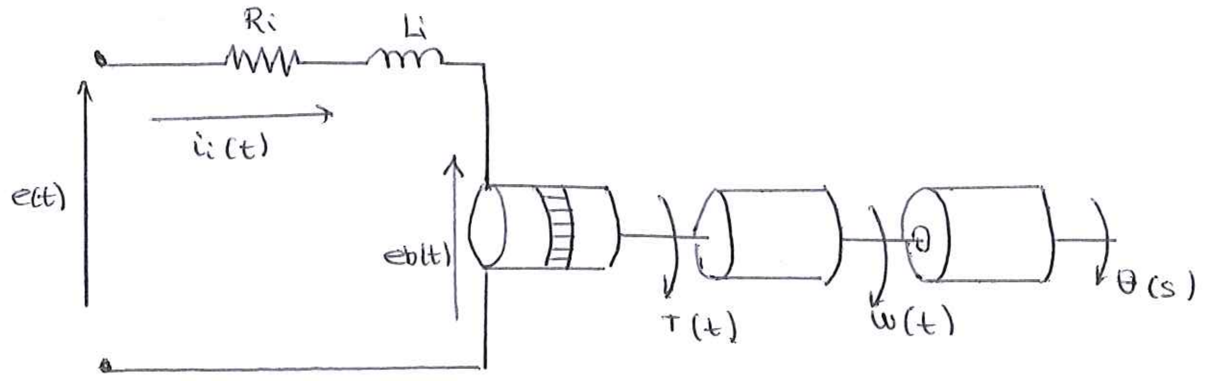
$$G_1(s) = \left.\frac{\Delta T(s)}{\Delta T_i(s)}\right|_{\Delta U = 0}$$

$$G_2(s) = \left.\frac{\Delta T(s)}{\Delta U(s)}\right|_{\Delta T_i = 0}$$

Principio de superposición (ahora que el sistema es lineal)

$$\Delta T(s) = G_1(s)\cdot\Delta T_i(s) + G_2(s)\cdot\Delta U(s)$$

MODELO MATEMÁTICO MOTOR



$$T(t) = K_i \cdot \phi(t) \cdot i_i(t)$$

$$\phi(t) = K_f \cdot i_f(t)$$

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}$$

$$e(t) = R_i\, i_i(t) + L_i \frac{di_i(t)}{dt} + e_b(t)$$

$$e_b(t) = K_b \dot{\theta}$$

$$e_f(t) = R_f\, i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt}$$

2 formas de control

- inducido
  - $e(t) \longrightarrow i_i(t)$
  - $i_f = cte \longrightarrow \phi = cte$
- campo
  - $e_f(t) \longrightarrow i_f(t)$
  - $i_i = cte,\ e = cte$

Vamos a controlarlo por campo $\longrightarrow$ Relación $G(s) = \dfrac{\Theta(s)}{E_f(s)}$ $\dfrac{\text{Angulo girado}}{\text{Tensión de campo}}$

SEMINARIO 3

OBJETIVOS:

- Conocida la función de transferencia de un sistema de primer orden y la entrada al mismo, ser capaces de encontrar el comportamiento de la salida en el tiempo y caracterizarla en base a su respuesta transitoria (τ) y estacionaria (k).

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE:

1. Problema 2-B del tema 3 de la colección de problemas

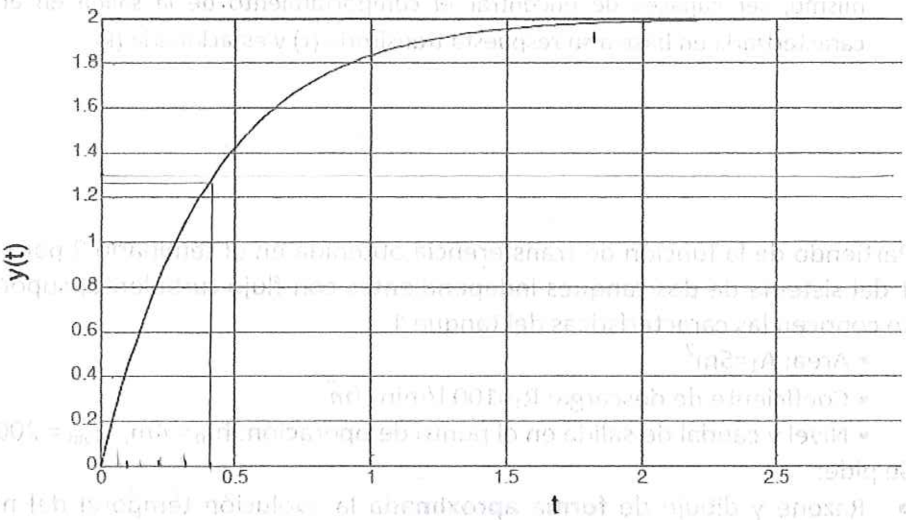
Partiendo de la función de transferencia obtenida en el seminario 2 para el tanque 1 del sistema de dos tanques independientes con flujo turbulento, supóngase que se conocen las características del tanque 1:

- Area: A_1=5m^2
- Coeficiente de descarga: R_1=100 l/min $\sqrt{m}$
- Nivel y caudal de salida en el punto de operación: h_{10} = 4m, Q_{out} = 200 l/min

Se pide:

- Razone y dibuje de **forma aproximada** la evolución temporal del nivel en el tanque 1, h1(t), marcando los valores significativos de la respuesta sobre la gráfica, cuando el caudal de entrada se incrementa en 2 l/min sobre el punto de operación. No hace falta resolver la ecuación diferencial. Se deben utilizar los parámetros de la función de transferencia.
- ¿Cuál será la influencia en la respuesta si el área del tanque se duplica? ¿Y si se reduce a la mitad?
- ¿Qué diferencia en la respuesta puede esperarse si el punto de operación es tal que el nivel en el tanque es de 2m (la mitad del anterior)?

2. Sea un sistema mecánico de traslación del que se conoce su respuesta temporal a una entrada de fuerza de valor 1 N que se aplica de forma continua a partir de t=0 (las unidades de salida se miden en m/s y el tiempo en segundos):

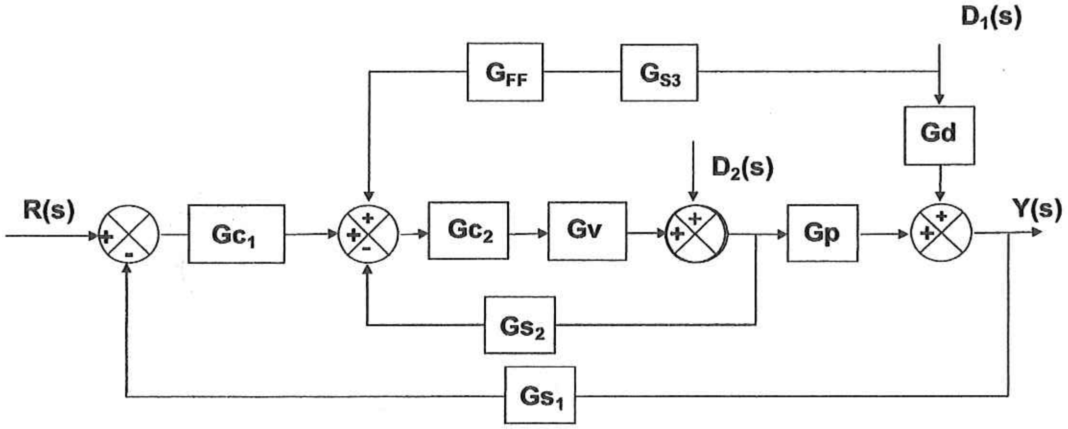


Se pide:

- Obtenga un modelo en forma de función de transferencia a partir de la respuesta temporal.

Problema 17 del tema 4 de la colección de problemas

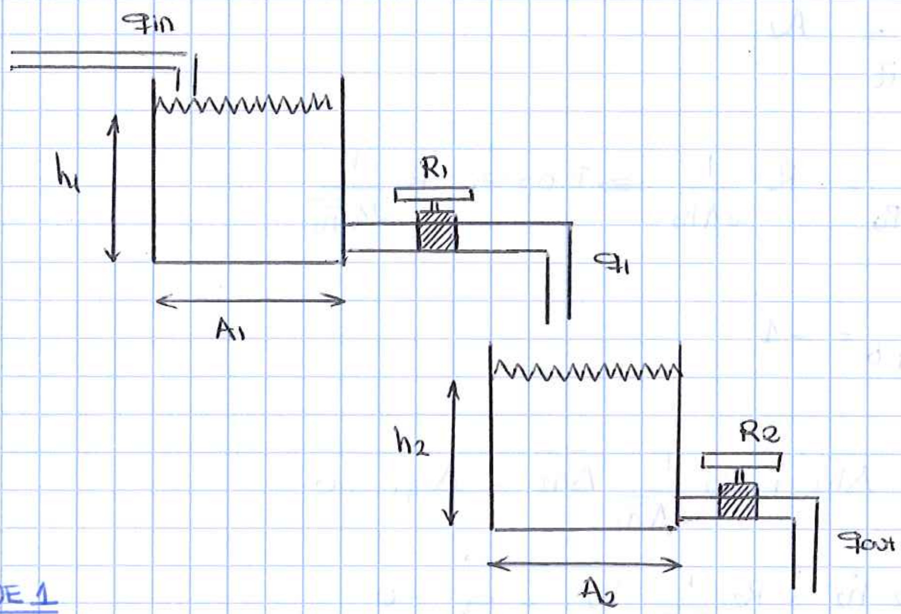
Reducir el siguiente diagrama de bloques calculando las funciones de transferencia necesarias para Y(s):



TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE

1. Problema 2-B del tema 3 de la colección de problemas.

Partiendo de la función de transferencia obtenida en el Sem. 2:



TANQUE 1

$$A_1 \cdot \dot{h}_1 = q_{in} - q_1$$

$$q_1 = R_1 \cdot \sqrt{h}$$

No es lineal, linealizamos. $(\sqrt{h})$

$$A_1 \cdot \dot{h}_1 = q_{in} - R_1 \sqrt{h}$$

Expandiendo en serie de Taylor alrededor del punto de operación $(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1)$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}_1}\right|_{P_0} = A_1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h_1}\right|_{P_0} = R_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{h}} \longrightarrow \text{p. op} \longrightarrow R_1 \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial q_{in}}\right|_{P_0} = -1$$

$$A_1 \Delta \dot{h}_1 + R_1 \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}} \cdot \Delta h_1 - \Delta q_{in} = 0$$

$$A_1 \cdot h_1 + \frac{R_1}{2\sqrt{\bar{h}_1}} \cdot h_1 - q_{in} = 0$$

TANQUE 2

$$\left.\begin{aligned} A_2 . \dot{h}_2 &= q_1 - q_{out} \\ q_{out} &= R_2 \sqrt{h_2} \end{aligned}\right\} \quad A_2 \dot{h}_2 = q_{in} - R_2 \sqrt{h_2}$$

No es lineal $\Rightarrow$ Expandimos en serie de Taylor alrededor de un punto operacion

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}_2}\right|_{P_0} = A_2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial h_2}\right|_{P_0} = R_2 \frac{1}{2\sqrt{h_2}} \Longrightarrow P.op \Rightarrow R_2 \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_2}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial q_1}\right|_{P_0} = -1$$

$$A_2 . \Delta \dot{h}_2 + R_2 \frac{1}{2.\sqrt{\bar{h}_2}} \Delta h_2 - \Delta q_1 = 0$$

$$A_2 . \dot{h}_2 + R_2 \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_2}} . h_2 - q_1 = 0$$

COMBINANDO

$$A_2 \dot{h}_2 = q_1 - q_{out} \qquad q_{out} = R_2 \sqrt{h_2}$$

$$A_1 \dot{h}_1 = q_{in} - q_1 \qquad q_1 = R_1 \sqrt{h_1}$$

$$A_1 \dot{h}_1 = q_{in} - (A_2 \dot{h}_2 + R_2 \sqrt{h_2})$$

$$q_{in} = A_1 \dot{h}_1 + A_2 \dot{h}_2 + R_2 \sqrt{h_2}$$

FUNCIÓN TRANSFERENCIA TANQUE 1 (Resolviendo ecuación diferencial).

Sistema linealizado:

$$A_1 \cdot \dot{h}_1 + R_1 \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}} h_1 - q_{in} = 0$$

$G(s) = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}}$ FUNCIÓN TRANSFERENCIA

$$A_1 \left[sH_1(s) - \cancel{h_1(0^+)} \right] + R_1 \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}} H_1(s) = Q_{IN}(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{H_1(s)}{Q_{IN}(s)} = \frac{1}{A_1 s + R_1 \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}}}}$$

$$H_1(s)\left[A_1 s + R_1 \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}} \right] = Q_{IN}(s)$$

DATOS: $A_1 = 5 m^2$ $R_1 = 100 \; l/min \sqrt{m}$ $h_{1_0} = 4m$

$$G(s) = \frac{1}{5s + 25} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+5}\right) = \frac{H_1(s)}{Q_{IN}(s)}$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+5}\right) Q_{IN}(s) = H_1(s)$$

Cuando el caudal de entrada se incremento en 2l/min sobre el punto de operación.

¿¿ $Q_{IN}(s)$ escalon 2 ??

$$Q_{IN}(s) = \frac{2}{s}$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+5}\right) \cdot \frac{2}{s} = H_1(s)$$

$$H_1(s) = \frac{2}{5s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$$

$$\frac{2}{5} = As + A5 + Bs \longrightarrow A = \frac{2}{25}$$

$$B = -\frac{2}{25}$$

$$H_1(s) = \frac{2/25}{s} - \frac{2/25}{s+5}$$

$$H_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_1(s)\} = \frac{2}{25} - \frac{2}{25} e^{-5t} = \frac{2}{25}\left[1 - e^{-5t}\right]$$

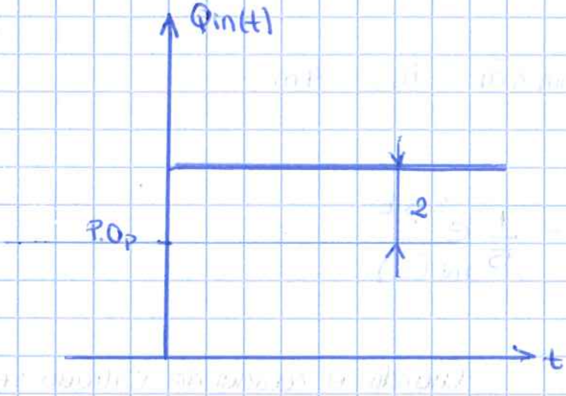
$$G(s) = \frac{1}{5s+25} = \frac{1/25}{\frac{1}{5}s+1} = \frac{H_1(s)}{Q_{IN}(s)}$$

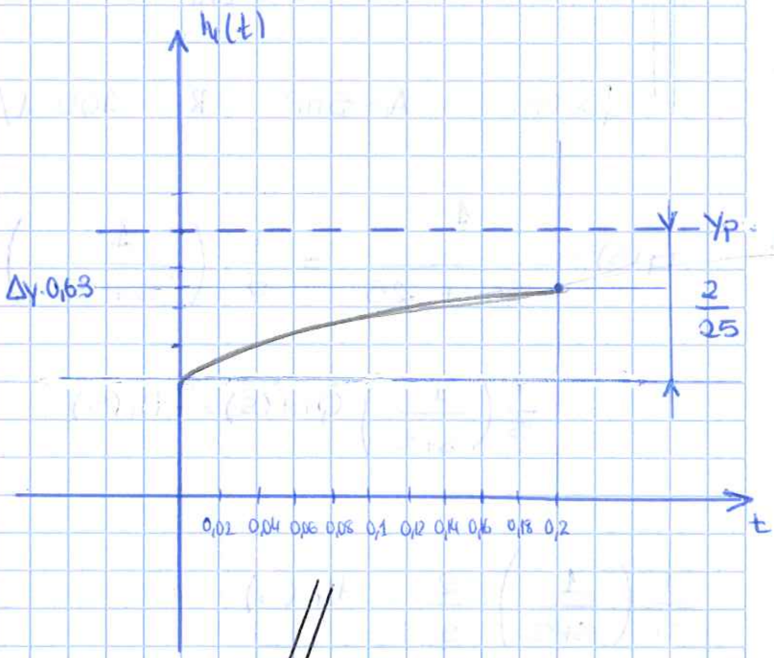
$$\frac{1/25}{\frac{1}{5}s+1} \cdot \frac{2}{s} = H_1(s)$$

$$\boxed{K = \frac{1}{25} \quad \tau = \frac{1}{5} \quad u = 2}$$

$$H_1(t) = Ku\left[1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right]$$

$$H_1(t) = \frac{2}{25}\left[1 - e^{-5t}\right]$$





$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \rightarrow \Delta y = \frac{1}{25} \cdot 2 = \frac{2}{25}$$

¿Cuál es la influencia de la respuesta si el área del tanque se duplica?

$$G(s) = \frac{1}{2A_1 s + R_1 \frac{1}{2\sqrt{h_1}}} = \frac{1}{10s + 25} = \frac{1/25}{\frac{2}{5}s + 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} k = 1/25 \\ \tau = 2/5 \\ u = 2 \end{array}}$$

Alcanza el estacionario más tarde.

EL SISTEMA ES MÁS LENTO

¿Y si se reduce a la mitad?

$$G(s) = \frac{1}{\frac{A_1 s}{2} + R_1 \frac{1}{2\sqrt{h_1}}} = \frac{1}{\frac{5}{2}s + 25} = \frac{1/25}{\frac{1}{10}s + 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} k = 1/25 \\ \tau = 1/10 \\ u = 2 \end{array}}$$

EL SISTEMA ES MÁS RÁPIDO.

¿Qué diferencia en la respuesta se puede esperar si el punto de operación es tal que el nivel del tanque es de 2m? (La mitad).

$$G(s) = \frac{1}{A_1 s + R_1 \frac{1}{2\sqrt{\frac{h_1}{2}}}} = \frac{1}{5s + 35,35} = \frac{1/35,35}{0,14s + 1}$$

$\tau = 0,14$ (disminuye)

$k = 1/35,35$ (disminuye)

$u = 2$

Se alcanza el estado estacionario más rápido, pero tiene menor precisión.

EJERCICIO 2.

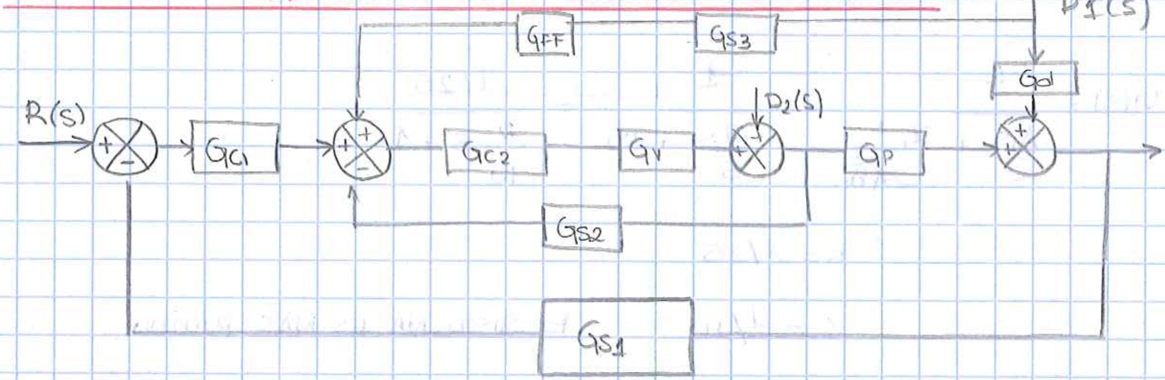
Respuesta a una función escalón

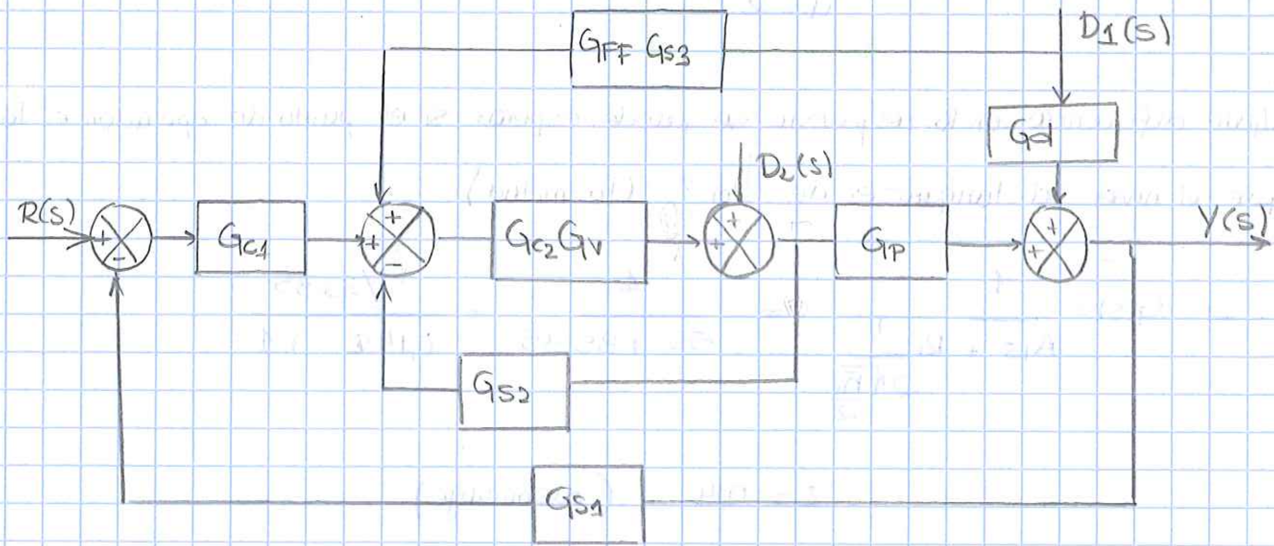
$$\boxed{G(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1} = \frac{2}{0{,}4s+1}}$$

$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$ $\Delta u = 1$ $\Delta y = K = 2$

$0{,}63 \cdot 2 = 1{,}26 \longrightarrow \tau = 0{,}4$

PROBLEMA 17 DEL TEMA 4 DE LA COLECCIÓN DE PROBLEMAS





3 entradas.

$$G_1(s) = \left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{\substack{D_2(s)=0 \\ D_1(s)=0}}$$ Comportamiento de salida cuando R varía y D_1, D_2 ctes

$$G_2(s) = \left.\frac{Y(s)}{D_2(s)}\right|_{\substack{R=0 \\ D_1=0}}$$ Comportamiento de la salida cuando $D_2(s)$ varía y $R(s)$, $D_1(s)$ ctes.

$$G_3(s) = \frac{Y(s)}{D_1(s)}\Bigg|_{\substack{R(s)=0 \\ D_2(s)=0}}$$

Comportamiento de la salida cuando D_1 varia y R y D_2 permanecen constantes.

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}\Bigg|_{\substack{D_2=0 \\ R=0}} = \frac{G_{c1} \cdot G_{c2} G_v \cdot G_p}{1 + G_{c1} G_{c2} G_v G_p \cdot G_{S2} G_{S1}}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{D_2(s)}\Bigg|_{\substack{R=0 \\ D_1=0}} = \frac{G_{c2} G_v \cdot G_p}{1 + G_{c1} G_{c2} G_v G_p G_{S2} G_{S1}}$$

$$G_3(s) = \frac{Y(s)}{D_1(s)}\Bigg|_{\substack{R=0 \\ D_2=0}} = \frac{G_{FF} \cdot G_{S3} G_{c2} G_v \cdot G_p + G_d}{1 + G_{c1} G_{c2} G_v G_p G_{S2} G_{S1}}$$

TRABAJO A REALIZAR DURANTE EL SEMINARIO:

Durante el seminario se discutirán los problemas anteriores y se resolverán los siguientes problemas:

3. Sea un termómetro que tarda 30 segundos en dar la temperatura de un cuerpo. Suponiendo que se comporta como un sistema de 1º orden, deduzca su G(s) (suponga el criterio del 2% en el tiempo de establecimiento).

4. Dibujar la forma de respuesta a escalón unitario indicando los valores significativos de los sistemas con las siguiente funciones de transferencia:

$$G(s) = \frac{6}{s+2} \qquad G(s) = \frac{s+1}{s+2} \qquad G(s) = \frac{-2}{2s+1}$$

5. Se conoce que la respuesta de un sistema a impulso unitario tiene la siguiente expresión:

$$y(t) = 4 - 4e^{-t}$$

¿Es posible conocer su función de transferencia?

SEMINARIO 4

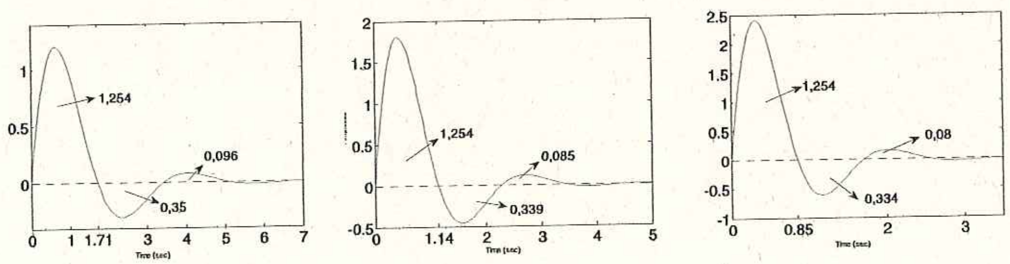
OBJETIVOS:

- Conocer la relación que existe entre los polos de un sistema y las características principales de su respuesta temporal y utilizar esa relación para: (1) ser capaces de identificar un modelo de función de transferencia a partir de la respuesta experimental a una entrada conocida; (2) ser capaces de comparar sistemas dinámicos de los que se conoce su función de transferencia en términos de estabilidad, rapidez y precisión; (3) ser capaces de relacionar la situación de los polos con la respuesta temporal.

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE:

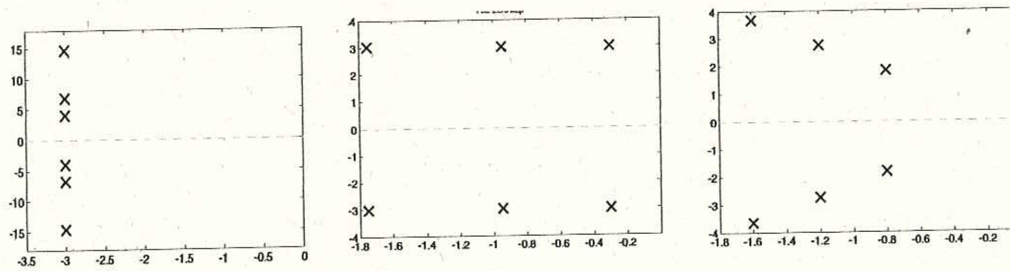
1. Sean tres sistemas de segundo orden sub-amortiguados, de función de transferencia G1(s), G2(s) y G3(s) respectivamente, cuyas respuestas a entrada impulso unitario son las de la figura:

respuesta G1(s) | respuesta G2(s) | respuesta G3(s)



   a) ¿Qué tienen en común las tres funciones de transferencia?. Justifique la respuesta

   b) ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde al diagrama de polos de los tres sistemas? Marque sobre ella los polos que corresponden a cada función de transferencia. Justifique la respuesta.



2. Señale en el plano s la región en la que se encuentran todos los sistemas de segundo orden sin ceros cuyas respuestas a entrada escalón tienen las siguientes características:

Tiempo de establecimiento menor o igual que 3 segundos (suponga el criterio del 5%).
Sobreimpulso menor del 30% .

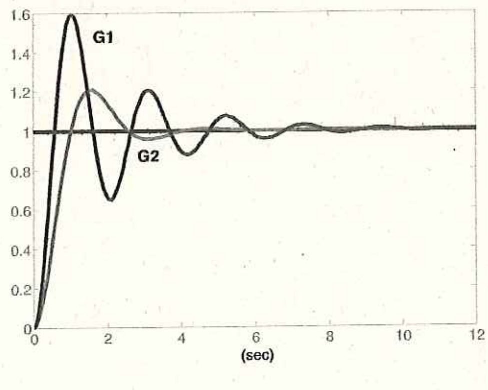
3. Sea un sistema cuyo comportamiento dinámico viene representado por su ecuación diferencial:

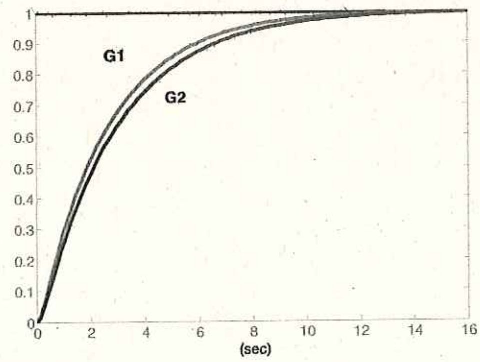
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=r(t)$$

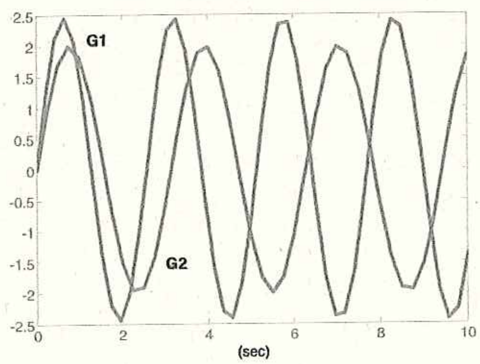
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta? ¿por qué?

Los polos del sistema son:
a) reales b) complejos conjugados c) imaginarios puros d) ninguna de las anteriores

4. Se conocen las siguientes respuestas de sistemas dinámicos cuando su entrada se aplica un escalón unitario:







Para cada una de las gráficas:

a) ¿en qué zona del plano s se encuentran los polos de los dos sistemas?

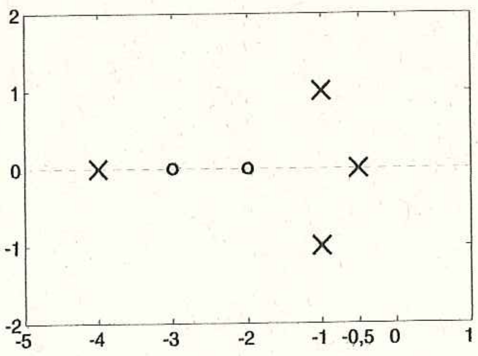
b) ¿Cuáles son las características de respuesta de ambos sistemas en términos de estabilidad y rapidez?

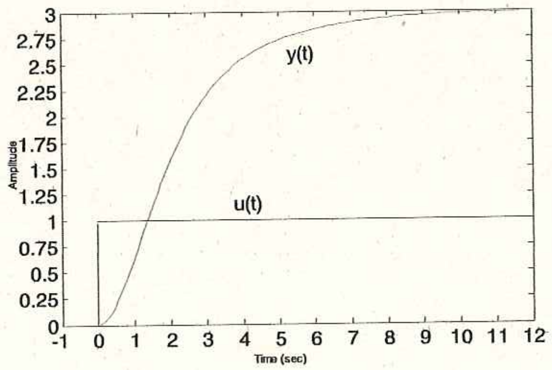
c) Dibuje (de forma aproximada) la situación de los polos de ambos sistemas.

TRABAJO A REALIZAR DURANTE EL SEMINARIO:

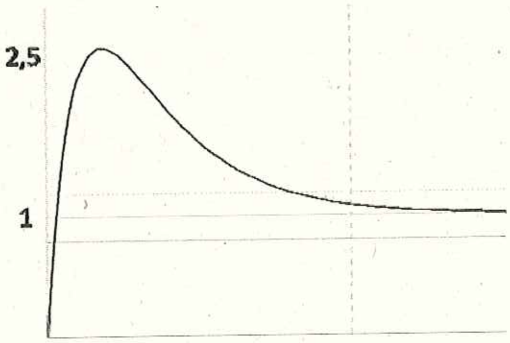
Durante el seminario se discutirán los problemas anteriores y se resolverán los siguientes problemas:

5. Se conocen el diagrama de polos y ceros de un sistema y su respuesta a escalón unitario, que se ilustran en las siguientes figuras. Obtenga la función de transferencia:

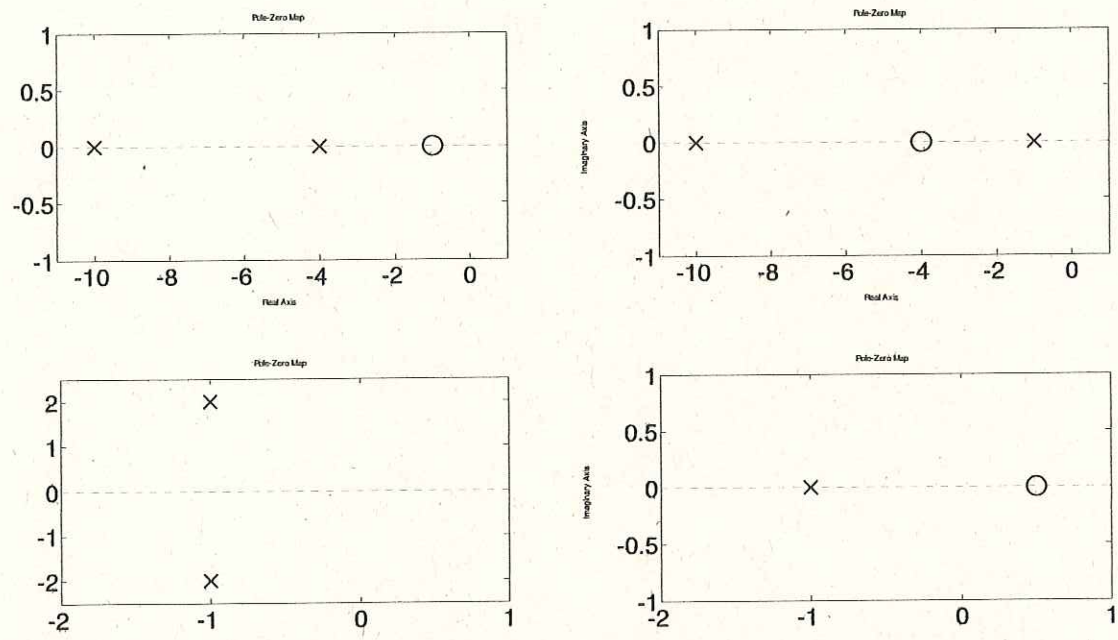




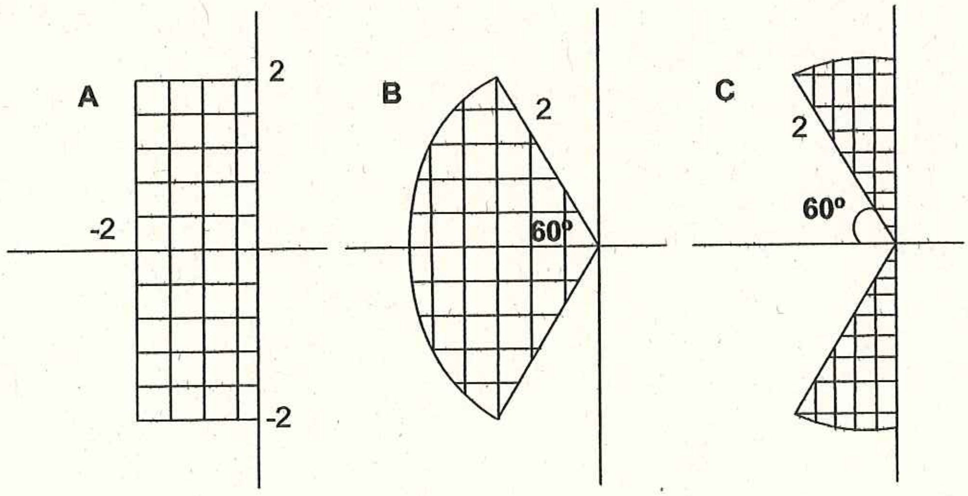
6. Sea un proceso del que se conoce su respuesta a escalón unitario, que es la representada en la figura:



Razone, SIN REALIZAR CÁLCULOS MATEMÁTICOS, cuál de los siguientes diagramas de polos y ceros es el que corresponde a dicha respuesta escalón.



7. Razone cuál de los siguientes lugares geométricos en el plano s corresponde a todos los sistemas de segundo orden (sin ceros) cuyas respuestas a entrada escalón tienen las siguientes características:
Coeficiente de amortiguamiento mayor o igual a 0,5
Frecuencia natural menor o igual que 2 rad/s



SEMINARIO 4

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO

EJERCICIO 1

Respuesta $G_1(s)$

$Y_{ss} = 1,254 - 0,35 + 0,096 = 1$

$Y_{escalón}(t_p) = 1,254$

$$M_p = \frac{Y(t_p) - Y_{ss}}{Y_{ss}} = \frac{1,254 - 1}{1} = 0,254 \longrightarrow 25,4\%$$

$$M_p = e^{\frac{-\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \longrightarrow \ln M_p = \frac{-\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \longrightarrow 1 - \delta^2 = \frac{\pi^2 \cdot \delta^2}{(\ln M_p)^2}$$

$$1 = \left(\frac{\pi^2}{(\ln M_p)^2} + 1 \right) \delta^2 \longrightarrow \delta = 0,4$$

$0 < \delta < 1$ SUBAMORTIGUADO

$$t_p = 1,71 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \longrightarrow \omega_n = \frac{\pi}{1,71 \sqrt{1-(0,4)^2}} = 2 \text{ rad/s}$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{Y_{ss}}{\Delta u} = \frac{1}{1} = 1$$

$$G_1(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1 \cdot (2)^2}{s^2 + 2 \cdot 0,4 \cdot 2s + 2^2} = \frac{4}{s^2 + 1,6s + 4}$$

Respuesta $G_2(s)$

$Y_{ss} = 1,254 - 0,339 + 0,085 = 1$

$$\omega_n = \frac{\pi}{1,14 \sqrt{1 - 0,4^2}} = 3$$

$Y_{escalon}(t_p) = 1,254$

$M_p = 0,254 \longrightarrow 25,4\%$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{Y_{ss}}{\Delta u} = \frac{1}{1} = 1$$

$\delta = 0,4$

$0 < \delta < 1$ SISTEMA SUB-AMORTIGUADO

$$G_2(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{9}{s^2 + 2{,}4s + 9}$$

Respuesta $G_3(s)$

$Y_{ss} = 1{,}254 - 0{,}334 + 0{,}08 = 1$

$Y_{escalon}(t_p) = 1{,}254$

$M_p = 0{,}254 \longrightarrow 25{,}4\%$

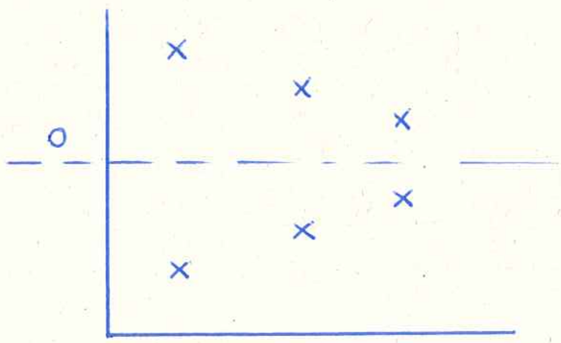
$\delta = 0{,}4$ $\quad\quad 0 < \delta < 1$ SISTEMA SUB-AMORTIGUADO

$$\omega_n = \frac{\pi}{0{,}85\left(\sqrt{1-\delta^2}\right)} = 4$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{y_{ss}}{\Delta u} = 1$$

$$G_3(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{16}{s^2 + 3{,}2s + 16}$$

Los tres sistemas coinciden en todo menos en la frecuencia natural ω_n



EJERCICIO 2

$t_s \leq 3$ (5%)

$M_p < 30\%$

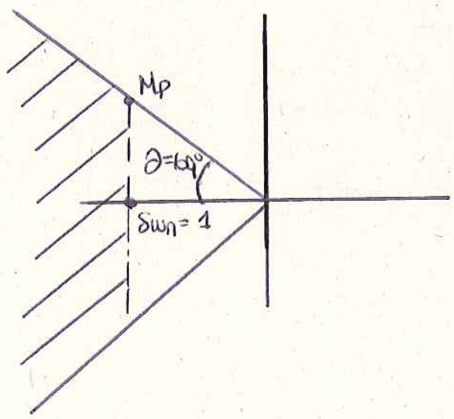
$$t_s = \frac{3}{\delta \omega_n} = 3 \quad (5\%)$$

$$M_p = 0{,}3 = e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \longrightarrow \ln M_p = -\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$1-\delta^2 = \frac{\pi^2 \cdot \delta^2}{(\ln M_p)^2} \longrightarrow 1 = \left(\frac{\pi^2}{(\ln M_p)^2} + 1\right)\delta^2 \longrightarrow \delta = 0{,}36$$

$$0 < \overset{\delta}{0{,}36} < 1$$ SIST. SUB-AMORTIGUADO

$$\frac{3}{\delta\omega_n} = 3 \longrightarrow \delta\omega_n = 1 \longrightarrow \omega_n = 2{,}78$$



$$\delta = \cos\vartheta \longrightarrow 0{,}36 = \cos\vartheta$$

$$\partial = 69^\circ$$

EJERCICIO 3

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = r(t)$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 2\left[Y(s)\cdot s - y(0)\right] + 5Y(s) = R(s)$$

$$Y(s)\left[s^2 + 2s + 5\right] = R(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+2s+5} \longrightarrow s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 5}}{2} = -1 \pm 2i$$

⟹ Salen polos complejos conjugados

EJERCICIO 4

Gráfico 1

a) Son sistemas de segundo orden sub-amortiguados los polos son complejos conjugados.

b) G_1 oscila más, llega más tarde al estado estacionario y por tanto es más lento y el sistema es estable.

c)

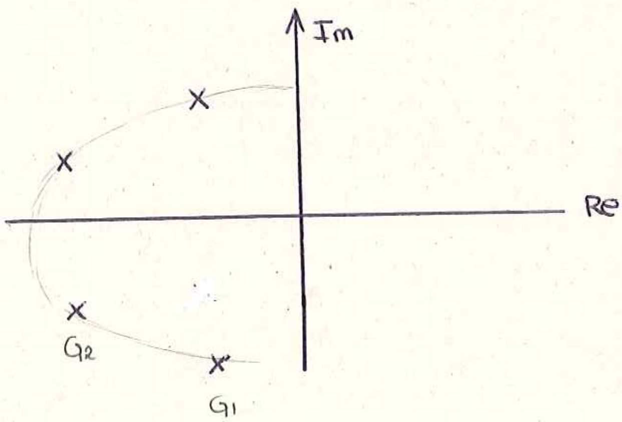


Gráfico 2

a) Sistemas de segundo orden sobre-amortiguado, los polos son reales

b) G_1 tiene mayor delta (δ) que G_2 por lo tanto G_1 es más rápido y el sistema es estable.

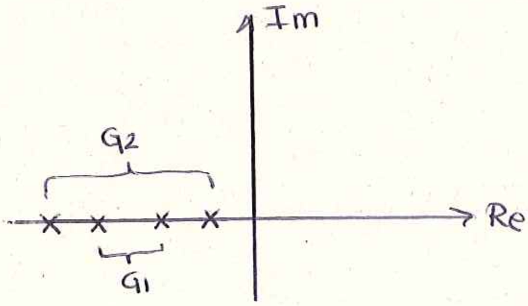
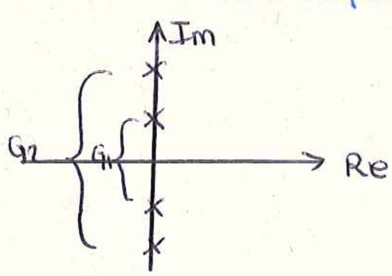


Gráfico 3

a) sistemas críticamente amortiguados $\delta = 0$; polos imaginarios puros

b) G_1 oscila más, tiene un periodo menor, con lo que será más rápido que G_2. El sistema es críticamente estable.

c)



TRABAJO A REALIZAR DURANTE EL SEMINARIO

EJERCICIO 5

$p_1 = -1 + j$

$p_2 = -1 - j$

$p_3 = -0{,}5$

$p_4 = -4$

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{(s+4)(s+0{,}5)(s^2+2s+2)}$$

$$s^2+2s+2=0 \longrightarrow s = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 2}}{2} = 1 \pm j$$

$$K = \frac{2\cdot \cancel{3}}{4\cdot \cancel{0{,}5}\cdot 2} = \cancel{3} \longrightarrow K = 2$$

$$G(s) = \frac{2(s+2)(s+3)}{(s+4)(s+0{,}5)(s^2+2s+2)}$$

EJERCICIO 6

1. Gráfico

EJERCICIO 7

Respuesta: B

SEMINARIO 5

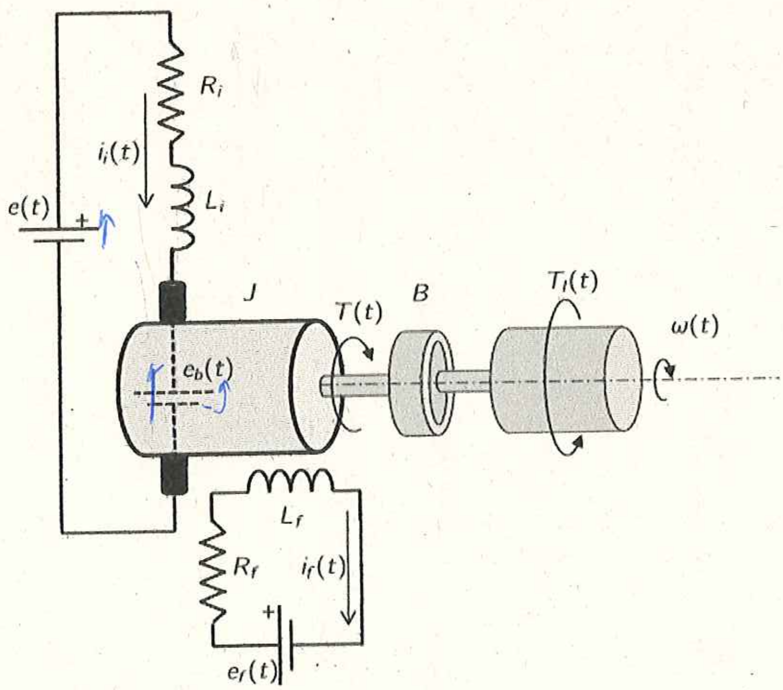
OBJETIVOS:

- Analizar la respuesta temporal de sistemas de 2º orden.
- Ser capaces de ajustar una ganancia para que el sistema responda a unas especificaciones de respuesta dadas.

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE:

PROBLEMA 1: Motor de corriente continua controlado por inducido

El sistema de la figura representa un motor DC. Este sistema convierte energía eléctrica en energía mecánica, generando un par T(t) [N.m] en el eje motor y por tanto, en función del par resistente $T_L(t)$, un movimiento angular en el eje motor de aceleración $d\omega(t)/dt$ [rad/s^2] y velocidad ωt) [rad/s].



Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema son:

$$T(t) = K_i K_f i_f(t) i_i(t)$$

$$e(t) = R_i i_i(t) + L_i \frac{di_i(t)}{dt}$$

$$e_b(t) = K_b \omega(t)$$

$$e_f(t) = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt}$$

$$T(t) = J.\frac{dw(t)}{dt} + B.w(t) + T_L(t)$$

De igual modo, al estar controlado por inducido, se supone constante la tensión del circuito del estator $e_f(t)$, con lo que la intensidad de flujo $i_f(t)$ es constante. De este modo, se puede suponer la siguiente relación constante,

$$K_m = K_i K_f i_f$$

El fabricante del motor, en su hoja de características, recoge los valores nominales de los parámetros del motor, siendo sus valores,

$R_i = 0{,}5\Omega$	$J = 8 \cdot 10^{-3} Kgm^2$
$L_i = 0{,}025H$	$B = 2 \cdot 10^{-5} Nm/(rad/s)$
$K_b = 0{,}08V/(rad/s)$	$K_m(t) = 0{,}1\ Nm/A$

Se pide:

a) Identifique las variables significativas del sistema cuando se controla por inducido, incluyendo las perturbaciones si las hubiera, y dibuje el diagrama de bloques incluyendo todas las variables junto con sus unidades.

b) Obtenga la función de transferencia que relaciona la velocidad angular del motor con respecto a la tensión de inducido de entrada: ω(s)/e(s), según los parámetros definidos.

c) Dibuje la respuesta aproximada de la velocidad cuando se somete al motor a una entrada de tipo de escalón en la tensión de entrada de amplitud 1 V. Obtenga los parámetros característicos que representan la respuesta transitoria del sistema, así como la velocidad angular del motor en régimen permanente o estacionario (valor final). ?

d) Razone si el modelo obtenido en el apartado b) es simplificable, y en caso de poderse, obtenga el modelo simplificado.

SEMINARIO 5

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO

PROBLEMA 1: Motor de corriente continua controlado por inducido:

$$T(t) = K_i K_f i_f(t) i_i(t)$$

$$e(t) = R_i i_i(t) + L_i \frac{di_i(t)}{dt} + e_b(t)$$

$$e_b(t) = K_b \omega(t)$$

$$e_f(t) = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt}$$

$$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\cdot\omega(t) + T_L(t)$$

Controlado por inducido $e_f = cte \longrightarrow i_f = cte.$

$$K_m = K_i \cdot K_f \cdot i_f.$$

$$T(t) = K_m i_i(t)$$

$$e(t) = R_i i_i(t) + L_i \frac{di_i(t)}{dt} + e_b(t)$$

$$e_b(t) = K_b \cdot \omega(t)$$

$$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\cdot\omega(t) + T_L(t)$$

DATOS

$R_i = 0{,}5\ \Omega$ $\qquad$ $J = 8\cdot10^{-3}\ kgm^2$

$L_i = 0{,}025H$ $\qquad$ $B = 2\cdot10^{-5}\ Nm/(rad/s)$

$K_b = 0{,}08V/(rad/s)$ $\qquad$ $K_m(t) = 0{,}1 Nm/A$

Ecuaciones sustuidas:

$$T(t) = 0{,}1\, i_i(t)$$

$$e(t) = 0{,}5\, i_i(t) + 0{,}025\cdot \frac{di_i(t)}{dt} + e_b(t)$$

$$e_b(t) = 0{,}08\, \omega(t)$$

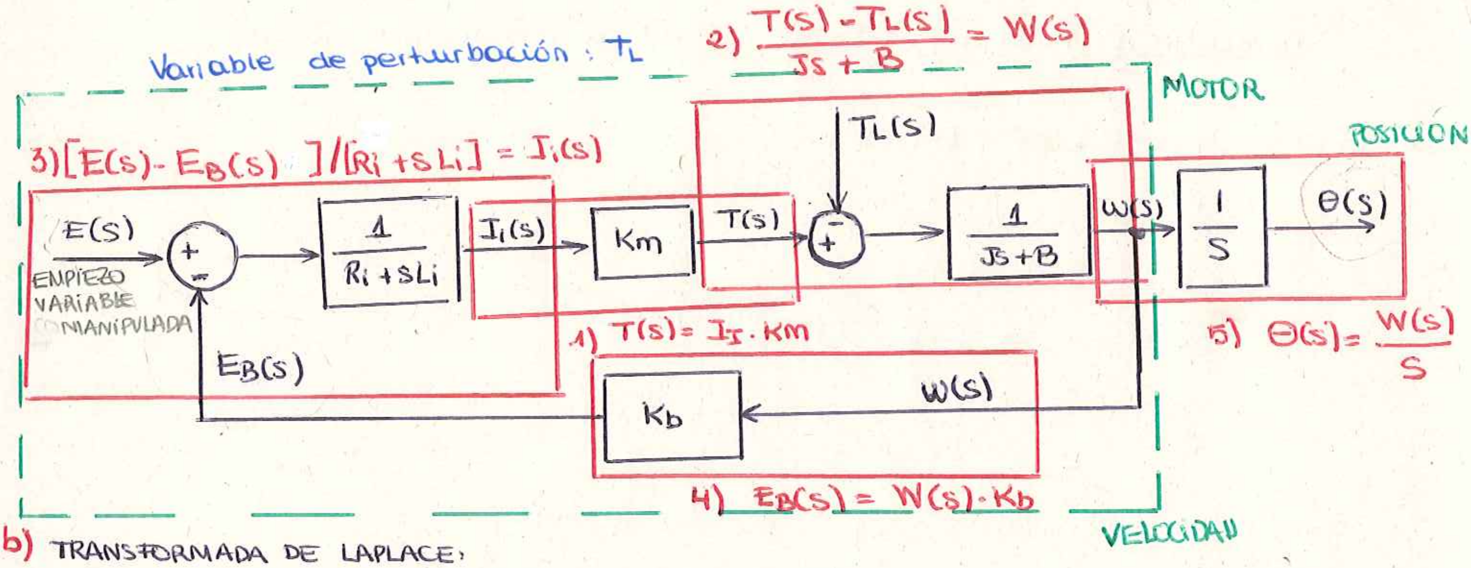
$$T(t) = 8\cdot10^{-3} \frac{d\omega(t)}{dt} + 2\cdot10^{-5}\, \omega(t) + T_L(t)$$

a) VARIABLES SIGNIFICATIVAS:

Variable manipulada : $e(t)$

Variable controlada : $\omega(t)$

Variable de perturbación : T_L



b) TRANSFORMADA DE LAPLACE:

1) $T(s) = 0{,}1\, I_I(s)$

3) $E(s) = 0{,}5\, I_I(s) + 0{,}025 s\, I_I(s) + E_B(s)$

4) $E_B(s) = 0{,}08\, W(s)$

2) $T(s) = 8 \cdot 10^{-3} s \cdot W(s) + 2 \cdot 10^{-5} W(s) + \cancel{T_L(s)}$ PERTURBACIÓN Tensión de carga.

5) $W(s) = s\,\theta(s)$

$$E(s) = \frac{0{,}5 \cdot T(s)}{0{,}1} + \frac{0{,}025 s\, T(s)}{0{,}1} + 0{,}08\, W(s)$$

$$0{,}1 E(s) = 0{,}5 \left[8 \cdot 10^{-3} s\, W(s) + 2 \cdot 10^{-5} W(s)\right] + 0{,}025 s \left[8 \cdot 10^{-3} s\, W(s) + 2 \cdot 10^{-5} W(s)\right] + 0{,}08\, W(s) \cdot 0{,}1$$

$$0{,}1 E(s) = \left[2 \cdot 10^{-4} s^2 + (4 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-7}) s + 1 \cdot 10^{-5} + 0{,}008\right] W(s)$$

$$0{,}1 E(s) = \left[2 \cdot 10^{-4} s^2 + 4{,}0005 \cdot 10^{-3} s + 8{,}01 \cdot 10^{-3}\right] W(s)$$

$$G(s) = \frac{W(s)}{E(s)} = \frac{0{,}1}{(2 \cdot 10^{-4} s^2 + 4{,}0005 \cdot 10^{-3} s + 8{,}01 \cdot 10^{-3})}$$

$$G(s) = \frac{500}{s^2 + 20{,}0025 s + 40{,}05}$$

c) $G(s) = \dfrac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \delta s + \omega_n^2}$

$\omega_n = 6,33$

$k = 12,48$

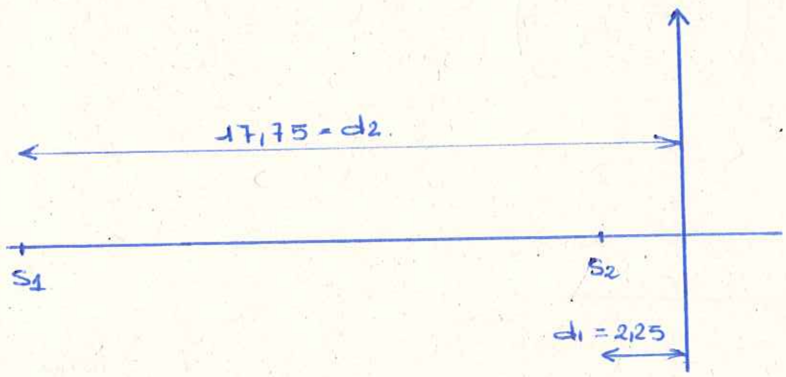
$\delta = 1,58$

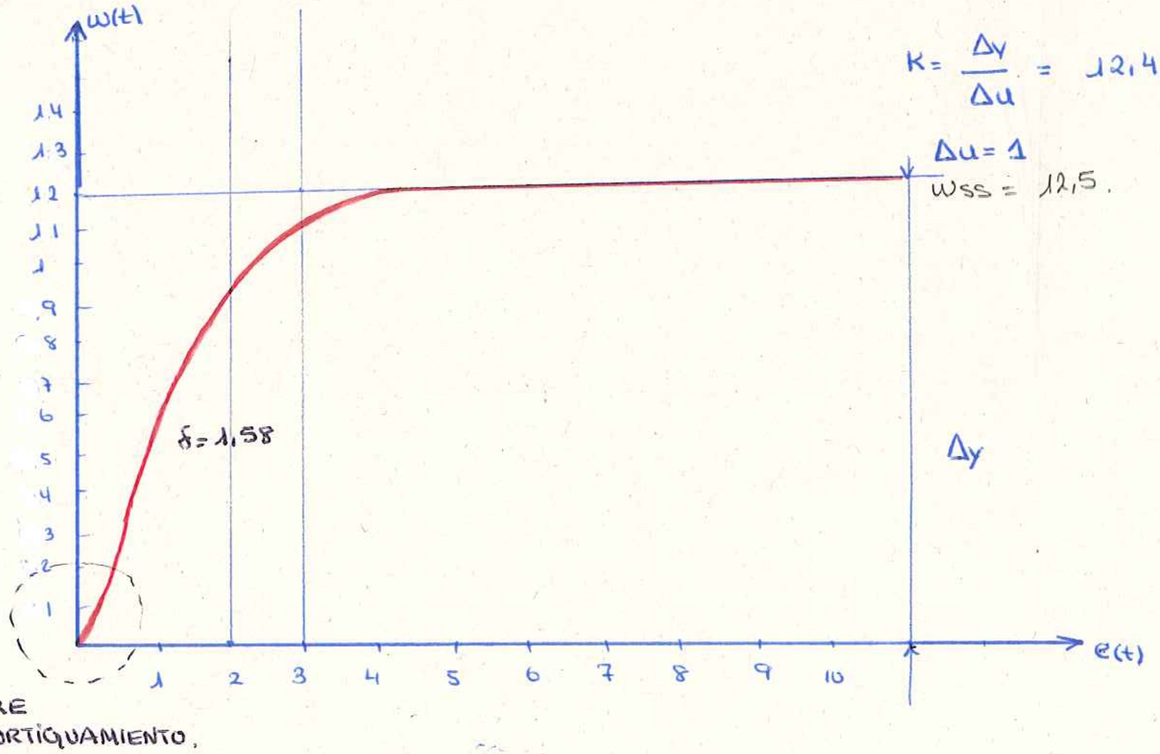
POLOS DEL SISTEMA

$s_1 = -17,75$

$s_2 = -2,25$

$\delta > 1$ SISTEMA SOBRE - AMORTIGUADO: POLOS REALES





$K = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = 12,48$

$\Delta u = 1$

$w_{ss} = 12,5.$

PARÁMETROS.

Calcular $k \Rightarrow G_1(0) = 12,5.$

$\lim_{t \to \infty} w_s(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot W(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot G_1(s) \cdot \frac{1}{s} = G(0).$

tma valor fin

Tiempo de establecimiento $\Rightarrow$ $t_s \simeq 4 \cdot \tau_{dom} = \frac{1}{2,25} \cdot 4 = 1,77$ s.

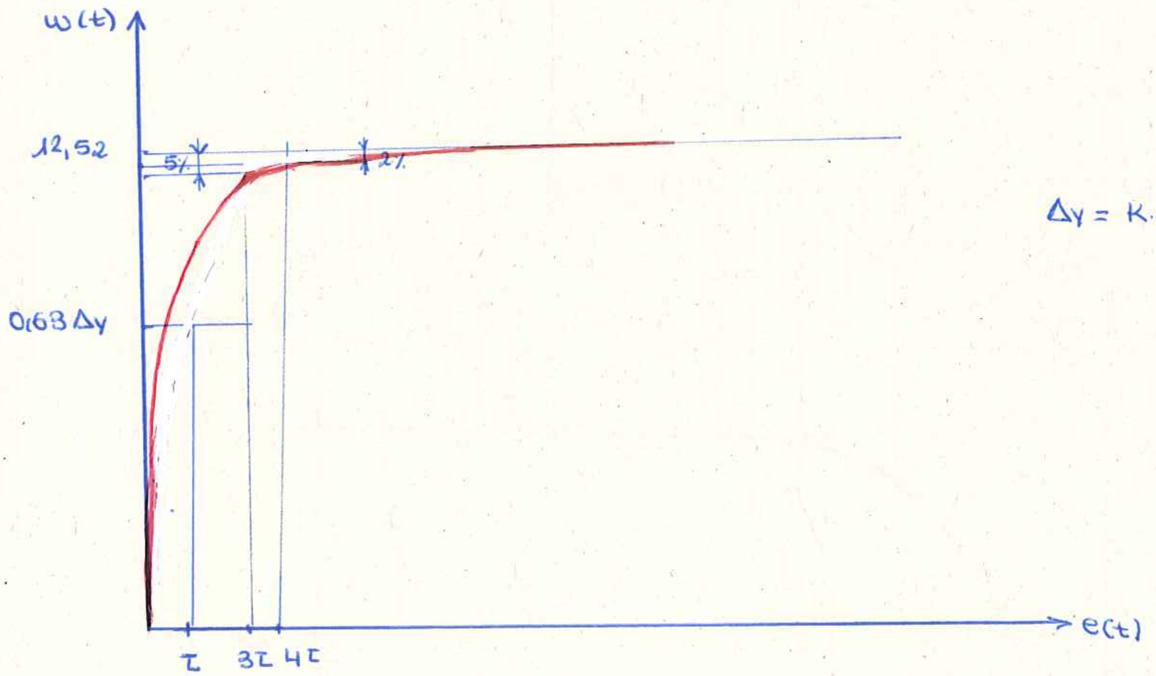
d) Sí es simplificable

$$\frac{d_2}{d_1} = 7{,}9 > 5 : \; P_1 \text{ es el polo dominante}$$

$$G(s) = \frac{500}{(s+17{,}75)(s+2{,}25)} \simeq \frac{500}{(s+2{,}25)(17{,}75)} = \frac{28{,}17}{s+2{,}25}$$

SISTEMA DE PRIMER ORDEN

$$\checkmark \; G(s) = \frac{12{,}52}{\frac{1}{2{,}25}s + 1} \qquad \left(\frac{K}{\tau s + 1}\right) \qquad K = 12{,}52 \quad \tau = \frac{1}{2{,}25}$$



$\Delta y = K \cdot \Delta u = 12{,}52$

PROBLEMA 2: (cuestión 1 del examen de junio de 2013)

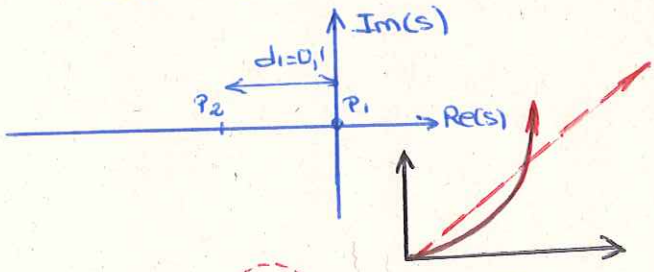
Dadas las funciones de transferencia de los siguientes sistemas:

$$G_1(s) = \frac{5}{s(1+10s)} \quad ; \qquad G_2(s) = \frac{0.5}{(0.1+s)}$$

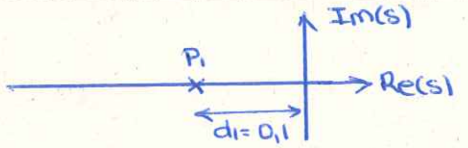
$$G_3(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+0.1s)(1+0.01s)}; \; G_4(s) = \frac{(1-s)}{(1+10s)(1+s)}$$

Dibuje de forma aproximada la respuesta a escalón unitario de cada uno de los sistemas, justificando la respuesta.

Nota: No es necesario el cálculo analítico de la respuesta temporal.

G₁(s): Diagrama de polos y ceros y respuesta temporal aproximada	Justificación
$G_1(S) = \frac{5}{S(1+10s)} = \frac{0,5}{s(s+0,1)}$  $v(t) = -50 + 5t + 50 \cdot e^{-0,5t}$	polos del sistema $s(s+0,1) = 0$ $P_1 = -0,1$ $P_2 = 0$ $\frac{0,5}{s^2(0,1+s)} = Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{0,1+s}$ $0,5 = A \cdot 0,1s + As^2 + B0,1 + Bs + Cs^2$ $A + C = 0 \rightarrow C = 50$ $0,1A + B = 0 \rightarrow A = -50$ $0,1B = 0,5 \rightarrow B = 5$
(G₁(s): ¿Cuál es su ganancia estática?	Justificación
K (Ganancia estática) = ∞ No tiene ganancia estática porque no alcanza un estado estación	$Y(\infty) = Ku$ $Y(\infty) = \infty$ $K = \infty$
G₁(s): ¿Cuál es su tiempo de establecimiento aproximado? (criterio 5%)	Justificación
t_s = no existe = ∞ No se establece nunca al no alcanzar su estado estacionario	No hay estacionario.

G₂(s): Diagrama de polos y ceros y respuesta temporal aproximada



$y(t) = 5(1 - e^{-0,1t})$

Justificación

$0,1 + s = 0$

Polos: $s = -0,1$

$Y(s) = \frac{0,5}{0,1+s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{0,1+s}$

$0,5 = 0,1A + As + Bs$

$A = 5$

$B = -5$

$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 5 - 5 \cdot e^{-0,1t}$

G₂(s): ¿Cuál es su ganancia estática?

$K = 5 \quad (G(0) = 5 = K)$

Qué tienen que justificar aquí. Justificación

$y(\infty) = K \cdot u$

$y(\infty) = 5$

$K = 5$

G₂(s): ¿Cuál es su tiempo de establecimiento aproximado? (criterio 5%)

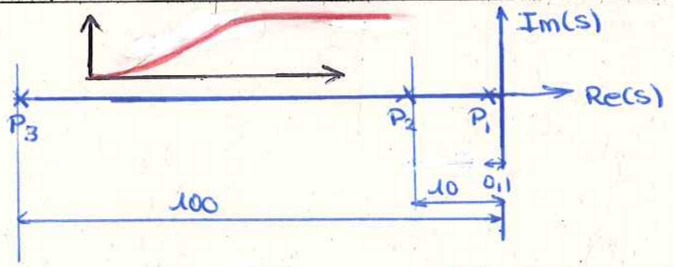
$t_{est}(5\%) = 30\,s$

Justificación

$\tau = 10\,s$

$3\tau = 30\,s$

G₃(s): Diagrama de polos y ceros y respuesta temporal aproximada



$y(t) = 10 - 10,1 \cdot e^{-0,1t} - 10,1 \cdot e^{-10t} + \frac{10}{1} \cdot e^{-100t}$

Justificación

$(1+10s)(1+0,1s)(1+0,01s) = 0$

$s_1 = -0,1$

$s_2 = -10$

$s_3 = -100$

$Y(s) = \frac{10}{s} - \frac{101}{1+10s} - \frac{1,01}{1+0,1s} + \frac{1,01}{1+0,01s}$

G₃(s): ¿Cuál es su ganancia estática?

$K = 10 \quad (G(0) = 10 = K)$

Justificación

$y(\infty) = K \cdot u$

$y(\infty) = 10$

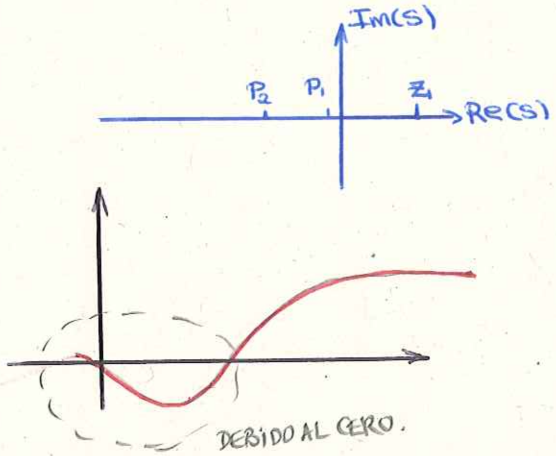
G₃(s): ¿Cuál es su tiempo de establecimiento aproximado? (criterio 5%)

$t_s(5\%) = 3 \cdot \tau = 30\,s$

Justificación

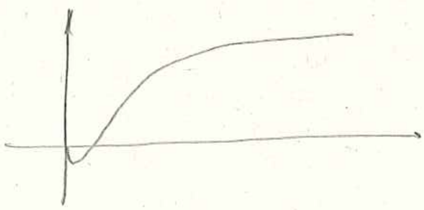
Reducida

$G_3(s) = \frac{10}{1+10s}$

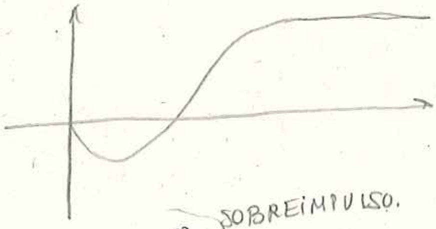
$G_4(s)$: Diagrama de polos y ceros y respuesta temporal aproximada	**Justificación**
	$(1+10s)(1+s)=0$ $s_1=-1$ $s_2=-0{,}1$ $(1-s)=0$ $z_1=1$ Con un cero inestable se produce una rta. inicialmente negativa
$G_4(s)$: ¿Cuál es su ganancia estática?	**Justificación**
$K=1$ $\quad (G(0)=1=K)$	$d_2/d_1 = 1/0{,}1 = 10 > 5$ P_1 = polo dominante
$G_4(s)$: ¿Cuál es su tiempo de establecimiento aproximado? (criterio 5%)	**Justificación**
$t_s(5\%) = 3\cdot\tau = 3\cdot 10 = 30\,s.$	$G_{1eq} = \dfrac{(1-s)\cdot 1}{(1+10s)}$

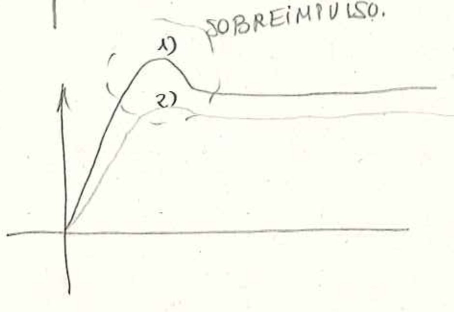
plano derecho

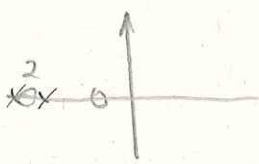
Cuanto más lejos el cero afecta menos la curva



si está más cerca







$y(t) + \left(\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{dy}{dt}$

TRABAJO A REALIZAR DURANTE EL SEMINARIO:

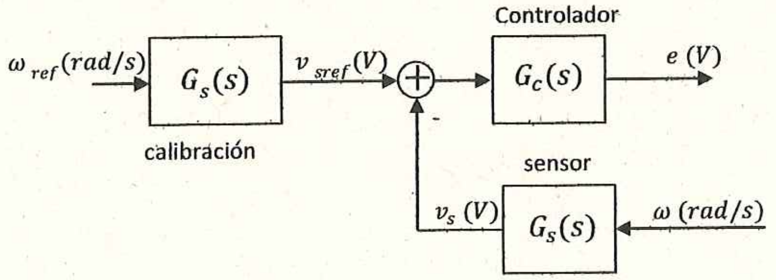
Durante el seminario se discutirán los problemas anteriores y se resolverán los siguientes problemas:

PROBLEMA 1: Control de velocidad y posición en el motor de corriente continua

a) En el sistema motor del trabajo previo, se instala un sensor de velocidad en el eje del motor (tacómetro). La respuesta del sensor es lineal, de modo que cuando el sensor gira a ω=10 rad/s, la tensión de salida del mismo es v_s=0,1 v. Suponiendo que la dinámica del sensor es mucho más rápida que la del motor, obtener el modelo del sensor.

b) Dibujar el diagrama de bloques del motor controlado por inducido cuando se desea implementar un **control de velocidad** mediante el uso de un controlador proporcional $G_c(s)=K_{cv}$. La medida de velocidad para su realimentación se realiza a través del sensor caracterizado en el apartado a). Incluir en dicho diagrama todas las variables junto con sus unidades físicas.

Nota: La entrada de referencia al sistema se realizará utilizando las mismas unidades de salida, esto es ω_{ref} [rad/s]. Por ello, se ha de incluir una calibración antes del lazo de realimentación de la forma,

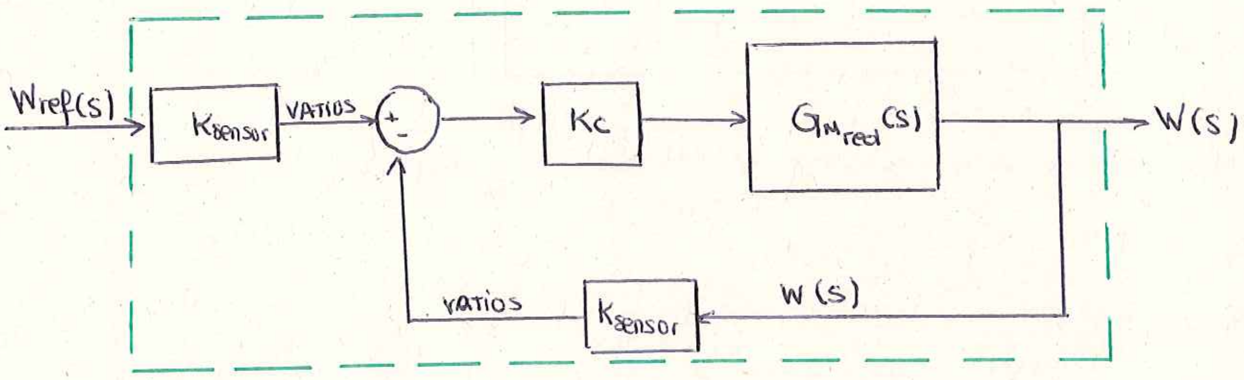


c) Determinar el valor de K_c para que la respuesta ω(t) presente un valor en estado estacionario de 35 rad/s cuando al sistema realimentado se le somete a una entrada escalón de valor 45 rad/s.

d) A partir de la función de transferencia simplificada ω(s)/e(s) obtenida en el apartado d) de la preparación del seminario, obtener la función de transferencia que relaciona la posición angular del eje motor con respecto a la tensión de inducido, esto es: θ(s)/e(s).

PROBLEMA 1: Control de velocidad y posición en el motor de corriente continua

A) y B)



$$K_{sensor} = \frac{V_s}{\omega} = \frac{0{,}1\ V}{10\ rad/s} = 0{,}01\ \frac{V}{rad/s}$$

C)

$$W(s) = G_C(s) \cdot W_{ref}(s)$$

$$G_C(s) = \frac{W(s)}{W_{ref}(s)} = \frac{K_{sensor} \cdot K_C \cdot G_{Mred}}{1 + K_{sensor} \cdot K_C \cdot G_{Mred}} = \frac{0{,}01 \cdot K_C \cdot \frac{12{,}52}{1+0{,}44s}}{1 + 0{,}01 \cdot K_C \frac{12{,}52}{1+0{,}44s}} =$$

$$= \frac{0{,}1252\ K_C}{1 + 0{,}44s + K_C \cdot 0{,}1254} = \frac{0{,}2817\ K_C}{s + 2{,}25 + 0{,}2817 K_C}$$

$$W(s) = \lim_{t \to \infty} w(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot W(s) = \cancel{s} \cdot \frac{0{,}2817\ K_C}{\cancel{s} + 2{,}25 + 0{,}2817 K_C} \cdot \frac{45}{\cancel{s}} = 35$$

$$45 \cdot 0{,}2817\ K_C = 2{,}25 \cdot 35 + 0{,}2817\ K_C \cdot 35$$

$$\boxed{K_C = 27{,}96}$$

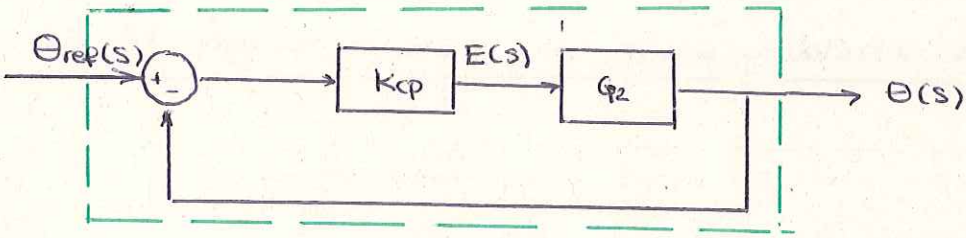
D)

$$G_D(s) = \frac{\Theta(s)}{E(s)}$$

$$\Theta(s) = G_D(s) \cdot E(s) = G_C(s) \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s)$$

$$G_D(s) = \frac{12{,}52}{s + 0{,}44s^2} = \frac{28{,}17}{s^2 + 2{,}25s}$$

E)



$$M_p = 4{,}32\% \longrightarrow \delta = \sqrt{\frac{Ln^2(M_p)}{Ln^2(M_p)+\pi^2}} = 0{,}707143 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$G_E(s) = \frac{\Theta(s)}{\Theta_{ref}(s)} = \frac{K_{cp}\cdot\frac{28{,}7}{s^2+2{,}25s}}{1+\frac{K_{cp}\cdot 28{,}7}{s^2+2{,}25s}} = \frac{K_{cp}\cdot 28{,}7}{s^2+2{,}25s+K_{cp}\cdot 28{,}7}$$

$$2{,}25 = 2\delta\cdot\omega_n \longrightarrow \omega_n = \frac{2{,}25}{\delta\cdot 2} = \frac{2{,}25}{2}\cdot\sqrt{2} = 1{,}59$$

$$\omega_n^2 = 2{,}53 = 28{,}7\cdot K_{cp}$$

$$\boxed{K_{cp} = 0{,}088}$$

e) Se desea implementar un **control en posición del motor** basándose en el modelo calculado en el apartado anterior θ(s)/e(s). A tal fin se implementa un controlador proporcional de ganancia K_{cp} y una realimentación unitaria. Dibujar el diagrama de bloques del sistema controlado, identificando los bloques y variables significativas (de nuevo incluir las unidades físicas). Obtener el valor de K_{cp} para que ante un cambio en la referencia tipo escalón, la respuesta del motor (su posición angular) presente un sobreimpulso máximo de 4,32%.

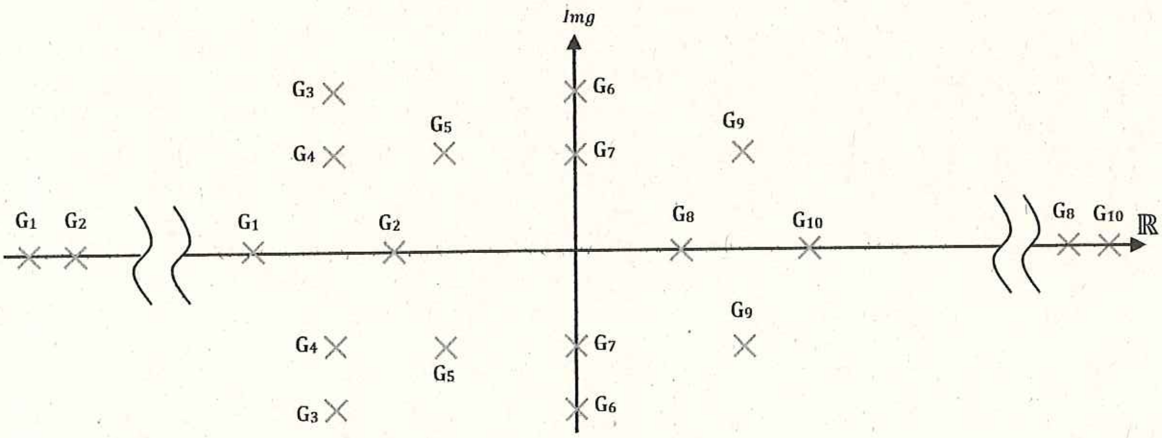
$M_p = 4,32\% \longrightarrow \delta = \sqrt{\dfrac{\ln^2 M_p}{\ln^2 M_p + \pi^2}}$

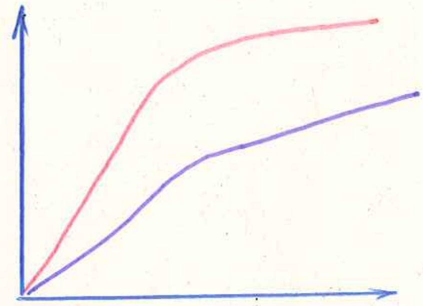
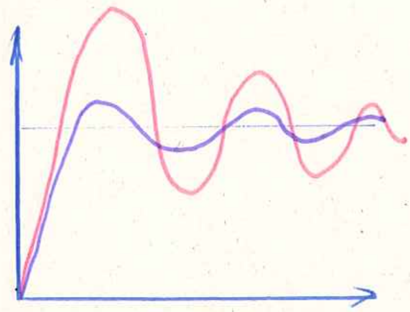
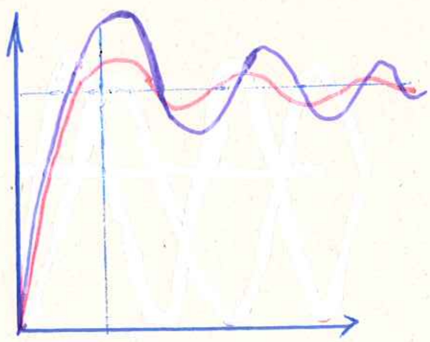
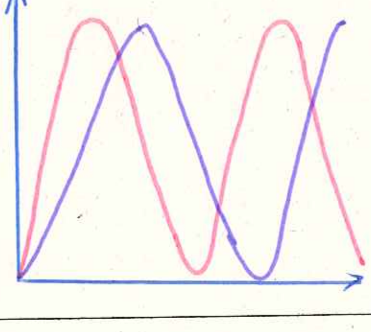
PROBLEMA 2: (cuestión 1 del examen de enero de 2013)

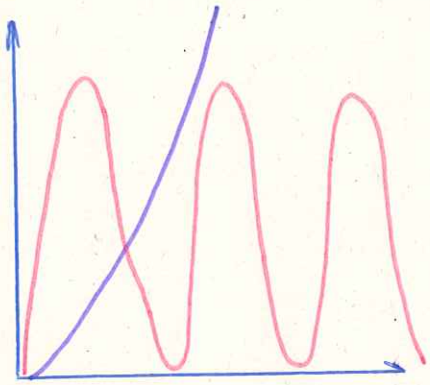
En la figura se han representado los polos de un conjunto de sistemas de segundo orden sin ceros.

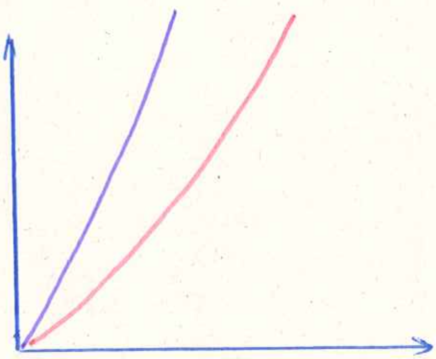
Dibuje de forma aproximada la respuesta temporal a entrada escalón, superponiendo en la misma la respuesta de los pares de sistemas que se indican.

Razone en cada apartado en qué se diferencian las respuestas.



G_1-G_2: Respuesta temporal 	Diferencias de respuesta: Ambos son sistemas sobreamortiguados que no oscilan G2 es más lento que G1 (su polo es más lento al estar más cerca del origen
G_3-G_4: Respuesta temporal 	Diferencias de respuesta: Ambos son sistemas sub-amortiguados igual de rápidos. G3 tiene mayor sobre impulso y oscila más.
G_4-G_5: Respuesta temporal 	Diferencias de respuesta: Ambos son sistemas subamortiguados con el mismo tiempo de pico. G5 es más lento que G4
G_6-G_7: Respuesta temporal 	Ambos son sistemas críticamente estables con oscilación constante G6 tiene mayor frecuencia (mayor parte imaginaria).

<table>
<tr>
<td>G_7-G_9: Respuesta temporal
</td>
<td>G_7 es criticamente estable, tiene una oscilacion mantenida.

G_9 es inestable.</td>
</tr>
<tr>
<td>G_8-G_{10}: Respuesta temporal
</td>
<td>Diferencias de respuesta:

Ambos sistemas son inestables
G_{10} tiende mas rápido al infinito.</td>
</tr>
</table>

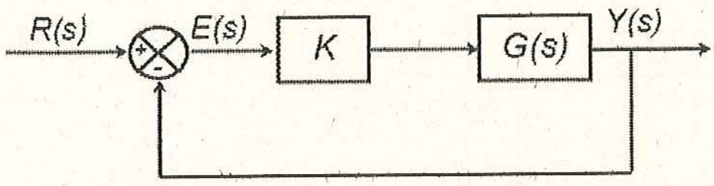
SEMINARIO 6

OBJETIVOS:

- Analizar la estabilidad de sistemas realimentados. Obtener el valor de la K última; ganancia que hay que añadir a la cadena directa que hace que el sistema sea críticamente estable así como el valor del periodo de la oscilación. Hallar el valor de la ganancia K de un sistema realimentado para conseguir una especificación de respuesta.

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE:

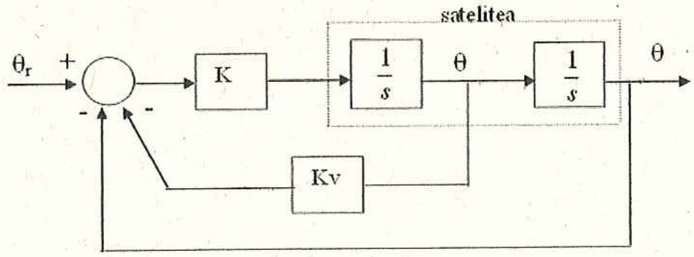
1. Sea el sistema realimentado de la figura, del que se conoce la función de transferencia $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+7)}$:



a) Calcule, justificando la respuesta, cuánto tardará en desaparecer la respuesta transitoria del sistema de función de transferencia G(s). Es decir, si no se realimentara.

b) Para el sistema realimentado:
- Calcule la ecuación característica del sistema en bucle cerrado y dibuje la posición de los polos del sistema en bucle cerrado en función de K.
- ¿Sería posible encontrar un valor de K para que el tiempo calculado en el apartado a) se divida por 2? (nota: Dibuje dónde debería situarse el polo dominante para conseguirlo y analice si pertenece al lugar de las raíces).

2. La figura representa el diagrama de bloques del sistema de control de un satélite, donde θ es la posición angular.



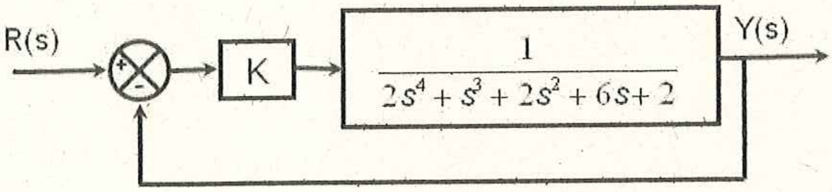
a) ¿Cuál es el objetivo de control de este sistema?

b) Calcule la función de transferencia en bucle cerrado

c) Calcule el valor en estado estacionario que tendrá la salida del sistema realimentado si la referencia es de 2 radianes.

d) Calcule la relación que debe existir entre Kv y K para que la respuesta a escalón de posición responda lo más rápido posible y sin sobreimpulso (nota: utilice la relación que existe entre la posición de los polos y la respuesta temporal).

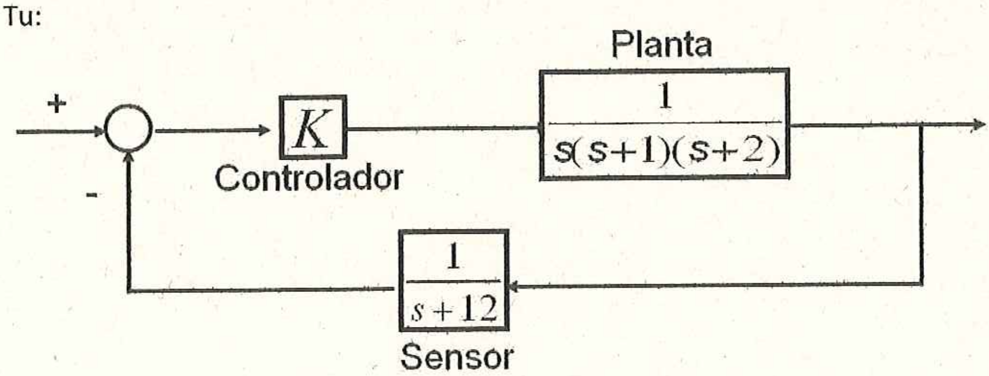
3. Analice la estabilidad del siguiente sistema realimentado:



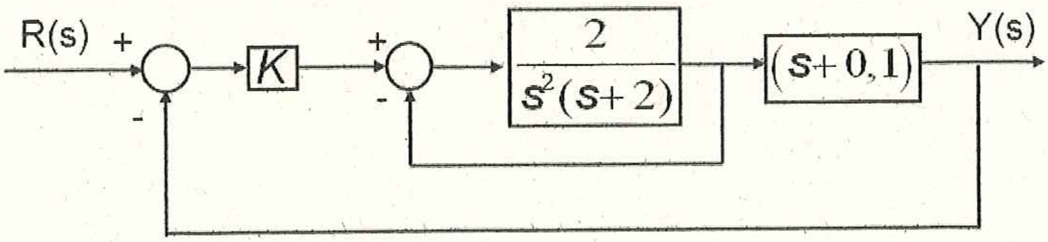
TRABAJO A REALIZAR DURANTE EL SEMINARIO:

Durante el seminario se discutirán los problemas anteriores y se resolverán los siguientes problemas:

4. Calcule los valores de K para los que el sistema de la figura es estable. Hallar la Ku para el cual el sistema es críticamente estable, así como su periodo de oscilación, Tu:



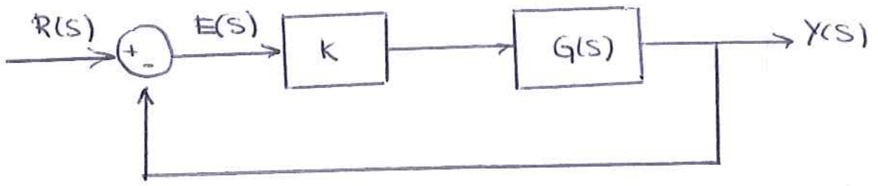
5. Calcule el valor de K que hace que el sistema realimentado sea críticamente estable, así como su periodo de oscilación, Tu.



SEMINARIO 6

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE

EJERCICIO 1



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+7)}$$

BUCLE ABIERTO

$$E(s)\,K\,G(s) = Y(s) \longrightarrow G_{TOT} = \frac{Y(s)}{E(s)} = K \cdot G(s) = \frac{K}{s^2+8s+7}$$

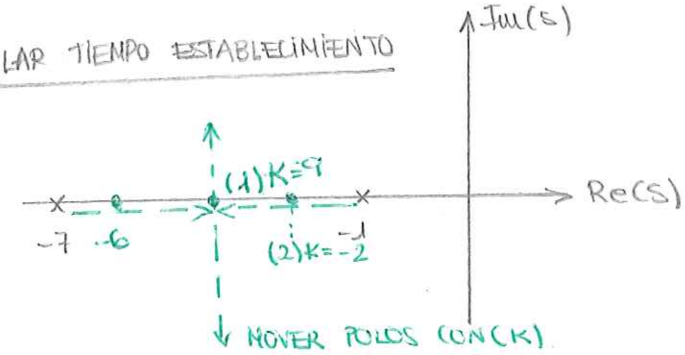
Saco polos reduzco T.

BUCLE CERRADO

$$G_{TOT}(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{K/(s+1)(s+7)}{1 + K/(s+1)(s+7)} = \frac{K}{(s+1)(s+7)+K}$$

- Ecuación característica en bucle cerrado: $s^2 + 8s + 7 + K = 0$.

a) CALCULAR TIEMPO ESTABLECIMIENTO



$\frac{d_2}{d_1} > 5 \rightarrow -1 = P_1$ polo dominante.

$$G_{red} = \frac{K/7}{s+1}$$

$t_s(98\%) \simeq 4\,\tau_{dom} = 4 \cdot 1 = 4$ s. (de forma aprox).

b) Valor de K $\rightarrow$ $t_s(98\%) = 2$ s

$$s_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(7+K)}}{2} = -4 \pm \sqrt{16 - (7+K)}$$

$16 - (7+K) = 0 \longrightarrow K = 9$ $\qquad s_{1,2} = -4$ raiz doble. (1)

Constante tiempo polo dominante $\tau_{dom} = 0,5$ (si la constante de polo es 0,5) el polo está situado en -2

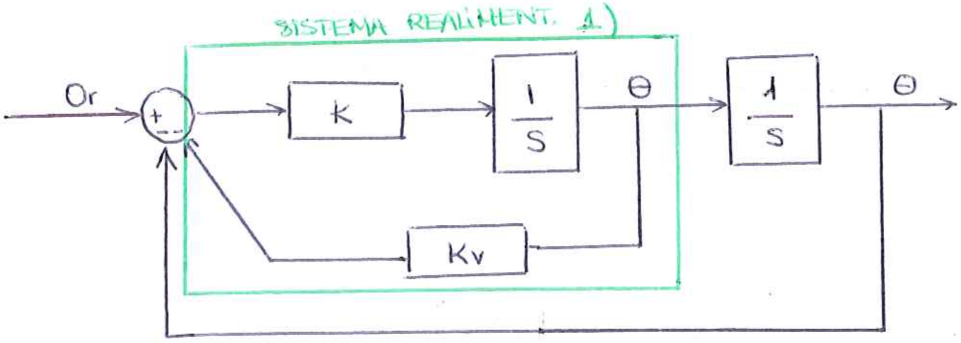
$$-4 + \sqrt{16 - 7 + K} = -2$$

$$16 - 7 - K = 4$$

$$K = +5 \quad (2)$$

$$\boxed{\text{LOS POLOS ESTÁN EN } -6 \text{ Y } -2}$$

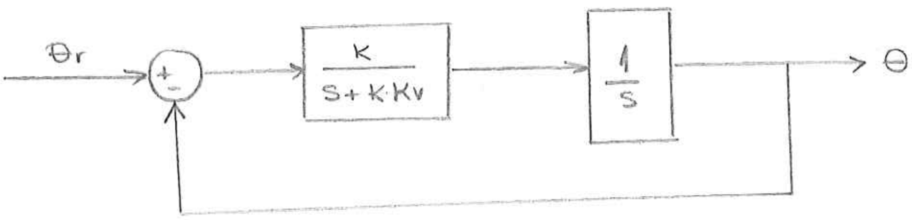
EJERCICIO 2



a) Corregir la posición del satélite gracias a una posición de referencia θ_r.
La posición angular del satélite siga a la consigna.

b) FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN BUCLE CERRADO

$$G_1(s) = \frac{K \cdot 1/s}{1 + K \cdot 1/s \cdot K_v} = \frac{K}{s + K \cdot K_v}$$



$$G_2(s) = \frac{\frac{K}{s + K \cdot K_v} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{K}{s + K \cdot K_v} \cdot \frac{1}{s}} = \frac{K}{s^2 + K K_v s + K}$$

c) Calcule el valor en estado estacionario que tendrá la salida del sistema si la referencia son 2rad.

$$\Theta(s) = G_2(s) \cdot \Theta_r(s) = \frac{K}{s^2 + K K_v s + K} \cdot \frac{2}{s}$$

$$\theta_{ss} = \lim_{t \to \infty} \theta_s(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \Theta(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot G_2(s) \cdot \frac{2}{\cancel{s}} = G(0) \cdot 2 = \frac{K}{K} \cdot 2 = 2 \text{ rad}$$

teorema valor final

d)

Para que responda sin sobreimpulso $\delta > 1$

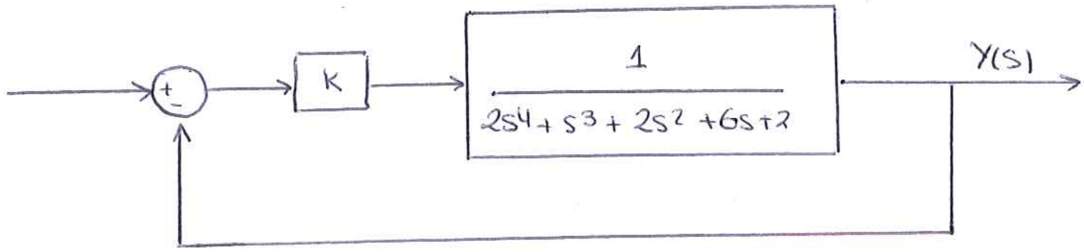
El más rápido de los $\delta > 1 \longrightarrow \delta = 1$

$$2\delta\omega_n = K \cdot K_v \longrightarrow \boxed{K_v = \frac{2}{\sqrt{K}}}$$

$$\omega_n^2 = K$$

EJERCICIO 3.

Analiza la estabilidad del siguiente sistema realimentado.



Función de transferencia

$$G(s) = \frac{\frac{K}{2s^4+s^3+2s^2+6s+2}}{1+\frac{K}{2s^4+s^3+2s^2+6s+2}} = \frac{K}{2s^4+s^3+2s^2+6s+2+K}$$

Ecuación característica:

$$2s^4+s^3+2s^2+6s+2+K=0.$$

$\boxed{K>-2}$ Cumple la condición necesaria $\Rightarrow$ Existen todos los coeficientes y son positivos

$K>-2$

s^4	2	2	$2+K$
s^3	1	6	0
s^2	$\frac{2-12}{1}$	$\frac{2+K}{1}$	0
s^1	$\frac{-60-2-K}{-10}$	0	0
s^0	$\frac{(-62-K)(2+K)(-10)}{-62-K}$	0	0

NO ES ESTABLE PARA NINGÚN VALOR DE K

DOS CAMBIOS DE SIGNO (2 RAICES POSITIVAS)

SISTEMA INESTABLE

TRABAJO A REALIZAR DURANTE EL SEMINARIO

4.

$$G(s) = \frac{K \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+12)}} = \frac{K(s+12)}{s(s+1)(s+2)(s+12)+K} = \frac{K(s+12)}{s^4+15s^3+38s^2+24s+K}$$

Condición necesaria: $\exists$ todos los coeficientes y son del mismo signo $K>0$.

s^4	1	38	K
s^3	15	24	0
s^2	36,4	K	0
s	$\frac{873-15K}{36,4}$	0	0
s^0	K	0	0

$\longrightarrow \quad 15K = 873 \longrightarrow K = 58{,}24$

$0 < K < 58{,}24$

$K_u = 58{,}24$

$36{,}4 s^2 + 58{,}24 = 0 \qquad s = j\omega$

$-36{,}4\omega_u^2 + 58{,}24 = 0$

$\omega_u^2 = 1{,}6 \longrightarrow \omega_u = 1{,}265$

$T_u = \frac{2\pi}{\omega_u} = 4{,}98\ s$

5.

$$G_1(s) = \frac{\dfrac{2}{s^2(s+2)}}{1 + \dfrac{2}{s^2(s+2)}} = \frac{2}{s^2(s+2)+2}$$

$$G_{TOT}(s) = \frac{K \dfrac{2}{s^2(s+2)+2} \cdot (s+0{,}1)}{1 + \dfrac{K\,2}{s^2(s+2)+2} \cdot (s+0{,}1)} = \frac{2K(s+0{,}1)}{s^2(s+2)+2+2K(s+0{,}1)}$$

Condición necesaria:

Todos los coeficientes tienen que existir y ser del mismo signo

ec. car: $s^3 + 2s^2 + 2Ks + 0{,}2K + 2 = 0$

$K > 0$

$K > -10$

$$\begin{array}{l|cccc}
s^3 & 1 & 2K & 0 & \\
s^2 & 2 & 0{,}2K+2 & 0 & \\
s & \dfrac{2^2K - 0{,}2K - 2}{2} & 0 & 0 & \longrightarrow \quad 3{,}8K = 2 \longrightarrow K = 0{,}526 \\
s^0 & 0{,}2K+2 & 0 & 0 & \longrightarrow \quad K = -10
\end{array}$$

$K_u = 0{,}526$

$2s^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}526 + 2 = 0 \qquad s = j\omega$

$-2\omega_u^2 = 2{,}10526$

$\omega_u^2 = 1{,}05 \longrightarrow \omega_u = 1{,}02598$

$$T_u = \frac{2\pi}{1{,}02598} = 6{,}12\ s$$

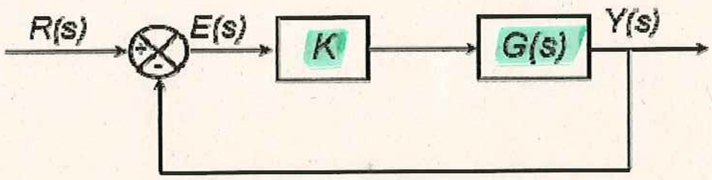
SEMINARIO 7

OBJETIVOS:

- Diseñar controladores tipo PID para cumplir unas especificaciones de comportamiento. Utilizaremos el lugar de las raíces (sistema realimentado con control puramente proporcional) para analizar si este tipo de controlador puede cumplirlas. Si no, en función de las especificaciones analizaremos si es necesario introducir acción integral (PI o PID) o derivativa (PD). Siempre debemos elegir la solución más simple que las cumpla.

TRABAJO PREVIO AL SEMINARIO A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE:

1. Sea el siguiente sistema realimentado, con $G(s)=\dfrac{16}{s(s+4)}$:



   a) Se desea diseñar un controlador para el sistema de la figura de forma que el error estacionario a rampa de pendiente 2 sea 0,1. Razone el tipo de algoritmo que es necesario y calcule sus parámetros. ¿Dónde se ubican los polos del sistema en lazo cerrado?
   b) Para el mismo sistema realimentado, diseñe un sistema de control tal que los polos en bucle cerrado sean $s_{1,2}=-2\pm j\sqrt{3}$
   c) ¿Es posible cumplir las dos con el controlador elegido?

2. Para el mismo sistema realimentado pero ahora con $G(s)=\dfrac{1}{s^2}$

   Diseñe un controlador de forma que los polos del sistema en bucle cerrado se ubiquen en $s_{1,2}=-1\pm j$. ¿Cuál es el algoritmos PID más sencillo que lo logrará?.

3. Sea un intercambiador de calor al que entra un caudal de una mezcla líquida para que sea calentada. Suponer el sistema trabajando en un punto de operación en el que la temperatura de entrada es de 20 °C, la temperatura de salida es de 40 °C, con una presión del vapor de calentamiento de 0.8 psi dada por una apertura del 50% de la válvula de vapor correspondiente.

   La curva de la figura siguiente representa la evolución de la temperatura de salida del intercambiador cuando, en un instante determinado, se incrementa la señal a la válvula

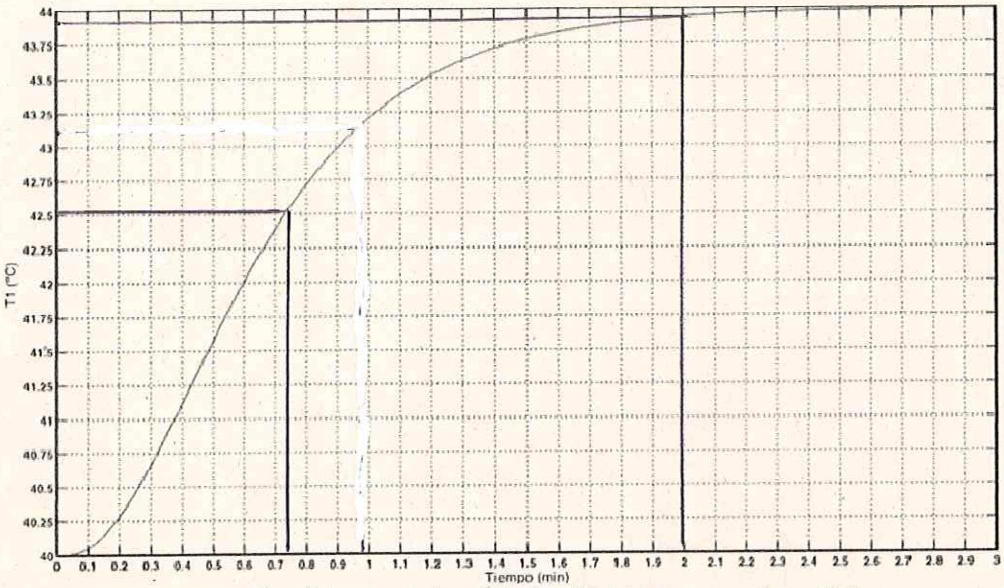
en un 10%. Diseñe un controlador PID para que la temperatura a la salida siga sin error a cambios escalón en la referencia.

$\tau = 0{,}75$

$t_s(2\%) = 3s$

POLO DOMINANTE

$(s + 1{,}33)$



Temperatura a la salida cuando la señal a la válvula se incrementa un 10%

TRABAJO A REALIZAR DURANTE EL SEMINARIO:

Durante el seminario se discutirán los problemas anteriores y se resolverán los siguientes problemas:

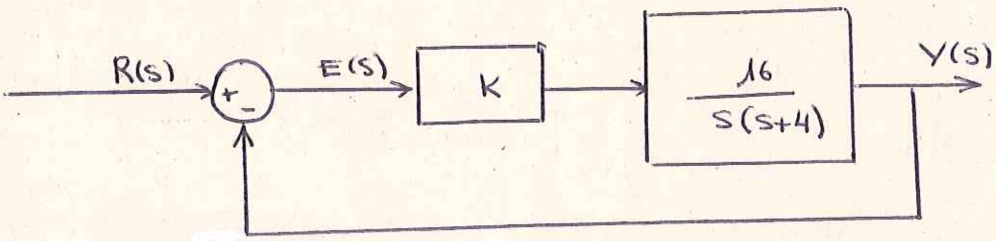
4. Diseñe un controlador tipo PID para un sistema del que se conoce la función de transferencia, G(s), que no presente error a cambios escalón en la referencia:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

5. Dado el sistema de función de transferencia: $G(s) = \frac{0,5}{(s+1)(s+5)}$ se desea diseñar un controlador por realimentación que cumpla las siguientes especificaciones:

$t_s(2\%) \leq 2s$, $M_p \leq 4{,}3\%$, $e_p \leq 35\%$.

SEMINARIO 7



a) sistema de tipo 1: 1 polo en el origen

$$R(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$e_{ss} = \frac{2}{K_v} = 0{,}1 \longrightarrow K_v = 20$$

Vamos a intentar con un contr P:

$$G_{BC}(s) = \frac{K_c \cdot \frac{16}{s(s+4)}}{1 + \frac{K_c \cdot 16}{s(s+4)}} = \frac{16K_c}{s(s+4) + 16K_c}$$

$$Y(s) = G_{BC}(s) \cdot R(s) = \frac{16K_c}{s(s+4)+16K_c} \cdot \frac{2}{s^2}$$

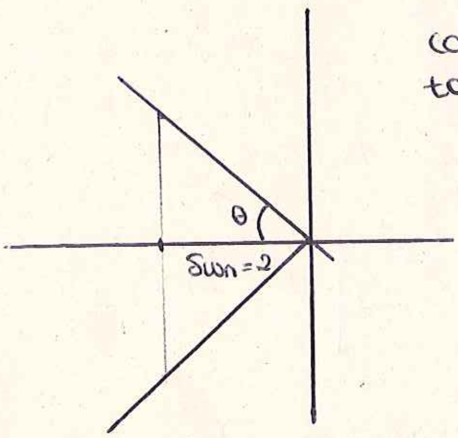
$$K_v = \lim_{s \to 0} s \cdot K_c \cdot \frac{16}{s(s+4)} = 4 \cdot K_c = 20 \longrightarrow \boxed{K_c = 5}$$

Los polos en lazo cerrado donde se ubican

$$G_{BC}(s) = \frac{40}{s^2 + 4s + 40}$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 40 \cdot 4}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{-144}}{4} = \frac{-4 \pm 12i}{4} = -1 \pm 3i$$

b)



$$\cos\theta = \delta = 0{,}76$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 40{,}89^\circ$$

$$\omega_n = \frac{2}{0{,}76} = 2{,}65$$

$$\omega_n^2 = 7$$

$$G_{BC}(s) = \frac{16K_C}{s^2+4s+16K_C}$$

$$4 = 2 \cdot \delta \omega_c$$

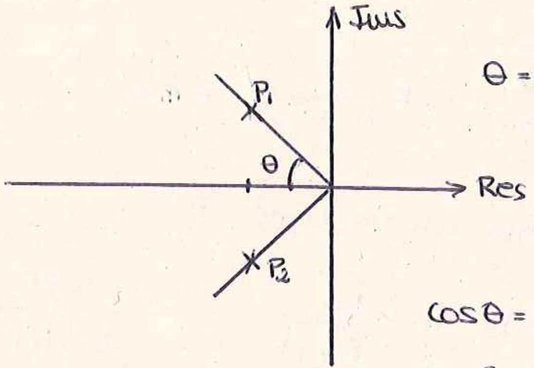
$$16K_C = \omega_c^2$$

$$K_C = \frac{7}{16} = 0{,}44$$

c) No es posible con un controlador P.

EJERCICIO 2

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$



$\theta = 45°$

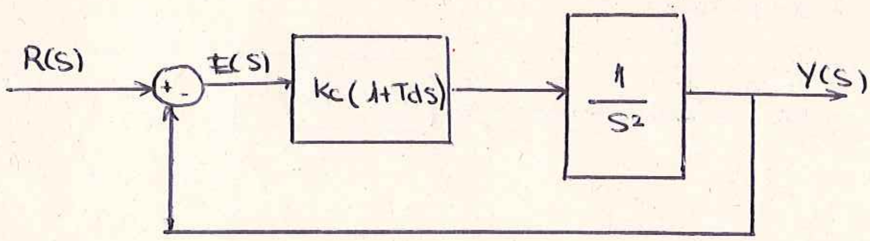
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \delta$$

$$\omega_n \cdot \delta = 1$$

$$\omega_n = \sqrt{2}$$

$$\omega_n^2 = 2$$

Control P-D



$$G_{BC}(s) = \frac{\dfrac{K_C(1+T_ds)}{s^2}}{1+\dfrac{K_C(1+T_ds)}{s^2}} = \frac{K_C(1+T_ds)}{s^2+K_CT_ds+K_C}$$

$$K_C = 2$$

$$K_C \cdot T_d = 2\omega_n \cdot \delta = 2 \cdot 1 \longrightarrow T_d = 1$$

$$G_{BC}(s) = \frac{2(1+s)}{s^2+2s+2}$$

PID CONTROLADOR PD $\boxed{G_c(s) = 2(1+s)}$

TRABAJO A REALIZAR EN EL SEMINARIO

EJERCICIO 4

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

sistema de tipo 1 (un integrador en el origen).
Para una entrada de tipo escalón el error es nulo con un controlador P para cualquier valor de Kc.

Demostración

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K_c}{s(s+1)(s+2)} = \infty$$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = 0.$$

EJERCICIO 5

$$G(s) = \frac{0{,}5}{(s+1)\ (s+5)}$$

1)
$M_p \leq 4{,}3\%$

$$M_p = e^{\frac{-\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$\pi^2 \delta^2 \leq (\ln 0{,}043)^2 (1-\delta^2)$$

$$\delta^2 \cdot 19{,}77 \leq (\ln 0{,}043)^2$$

$$\delta^2 \leq 0{,}5$$

$$\delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \boxed{\theta \leq 45°}$$

2) $e_p \leq 35\%$

$$\frac{1}{1+K_p} \leq 0{,}35$$

$$1 \leq 0{,}35 + 0{,}35 K_p$$

$$K_p \geq 1{,}86$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K_c \cdot 0{,}5}{(s+1)(s+5)} = \frac{0{,}5}{5} = 0{,}1\,K_c$$

$$0{,}1\,K_c \geq 1{,}86$$

$$\boxed{K_c \geq 18{,}6}$$

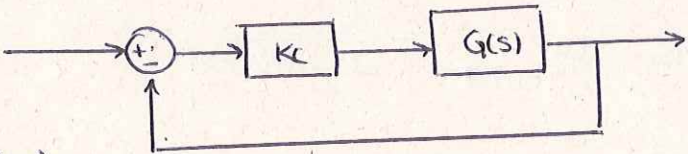
$t_s\,(2\%) \leq 2s$ En un sistema subamortiguado

$$t_s\,(2\%) = \frac{4}{\delta\omega_n} = \frac{4}{3} = 1{,}33 \leq 2s \checkmark$$ se verifica

$$G_{BC}(s) = \frac{K_c \cdot 0{,}5}{s^2 + 6s + 5 + K_c \cdot 0{,}5}$$

$$\Downarrow$$

$$G_{BC}(s) = \frac{13}{s^2 + 6s + 18}$$ (complejos conjugados)



$$\Rightarrow \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 18 \cdot 4}}{2} = -3 \pm 3i$$

$2\delta\omega_n = \text{cte} = 6$

- $\delta\omega_n = 3$

$\omega_n = 3\sqrt{2}$

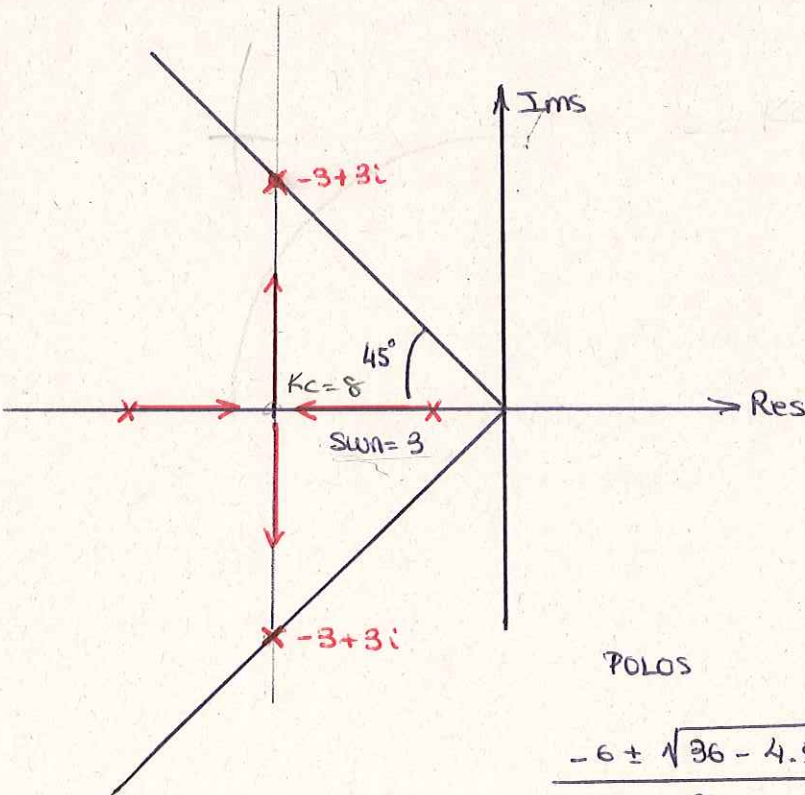
$\omega_n^2 = 9 \cdot 2 = 18$

$18 = 5 + K_c \cdot 0{,}5$

$13 \cdot 2 = K_c$

$26 = K_c \geq 18{,}6 \checkmark$

VERIFICA



POLOS

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5}}{2} \quad s_1 = \frac{-6+4}{2} \quad s_2 = \frac{-6-4}{2}$$

CONTROLADOR P

$$\boxed{K_c \leqq 26}$$

EJERCICIO 3

PO. $T_{in} = 20°C$

$T_{out} = 40°C$

$P = 0{,}8$ psi

50% valvula.

Se incrementa la señal de la valvula en un 10%.

Sin error $\longrightarrow$ Pi

$$G_c(s) = \frac{K_c}{T_i} \frac{1 + T_i s}{s}$$

$T_{out_2} = 44°C$

SISTEMA SOBREAMORTIGUADO

$\delta > 1$ (polos reales)

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2}$$

$Y(s) = 44°C$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{44-40}{0{,}1} = 40 \qquad G = \frac{K}{1+\tau s} e^{-t_m s}$$

$y(t_1) = 40 + 0{,}23\ \Delta y = 40 + 0{,}23\ (+44-40) = 41{,}132 \longrightarrow t_{23} = 0{,}4$ min

$y(t_2) = 40 + 0{,}63\ \Delta y = 40 + 0{,}63\ (40-40) = 42{,}52 \longrightarrow t_{63} = 0{,}5$ min

$\tau = 1{,}5\,(t_2 - t_1) = 0{,}15$ min

$t_m = t_{63} - \tau = 0{,}35$ min

Vamos a la tabla en bucle abierto

$$K_c = \frac{1{,}2}{K}\left(\frac{\tau}{t_m}\right) \longrightarrow K_c = 0{,}013$$

$T_i = 2t_m \longrightarrow T_i = 0{,}7$

$T_D = 0{,}5 t_m \longrightarrow T_D = 0{,}175$

EXÁMENES
A&C

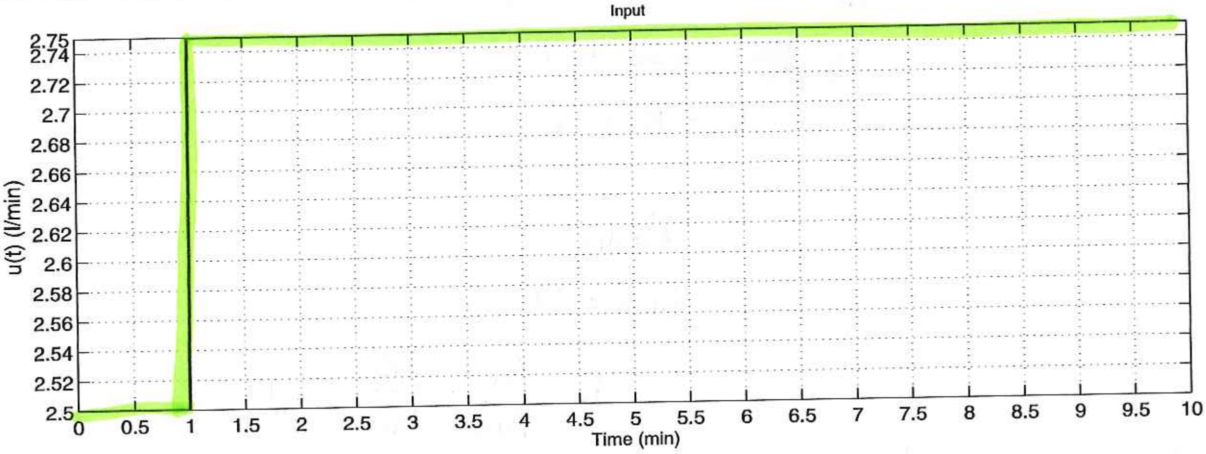
Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa / Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao — eman ta zabal zazu — Universidad del país vasco / Euskal herriko unibertsitatea	**AUTOMÁTICA Y CONTROL**	**Curso: 2013/2014** 30/Noviembre/2013
	Nombre Izena ____	**Tiempo:** 2h
	1ºApellido ____ 1 Deitura	
	2º Apellido ____ 2 Deitura	**Grupo Taldea**

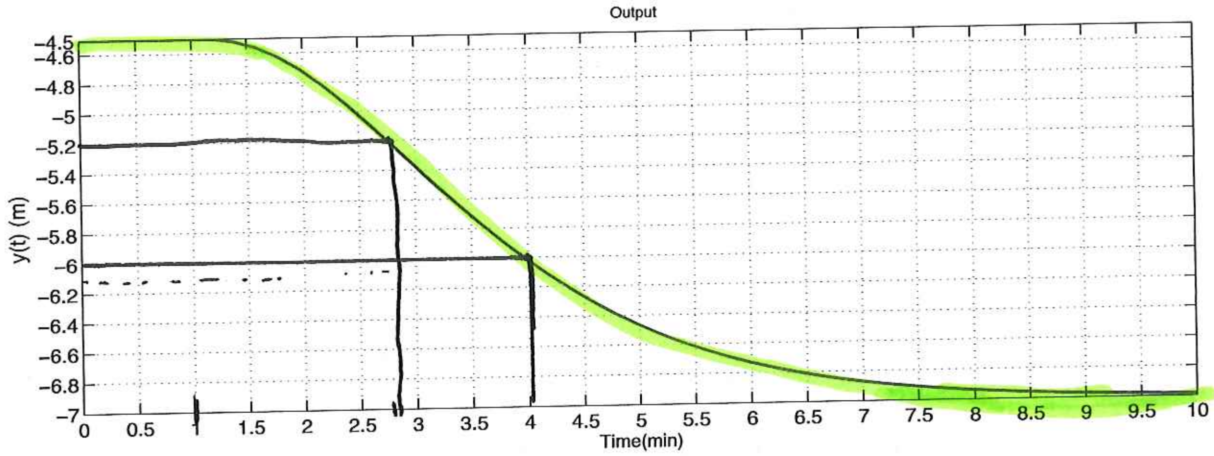
Este examen parcial vale el 15% de la nota final.

A las cuestiones respondidas correctamente se les asignará +1 punto. A las respondidas incorrectamente o dobles -0.33 puntos y a las cuestiones no respondidas 0 puntos.

Con el fin de lograr la puntuación de un apartado es **imprescindible marcar la opción correcta y justificar correctamente dicha elección.**

1.- Un sistema de almacenamiento de líquido presenta la siguiente evolución cuando se modifica su entrada de caudal respecto a la que presenta en el Punto de Operación.





Indique cual es el modelo aproximado del sistema

a) $G(s) = \frac{-3.5}{4s+1} e^{-1.25s}$

b) $G(s) = \frac{-10}{1.8s+1} e^{-1.2s}$

c) $G(s) = \frac{-10}{4s+1} e^{-2.25s}$

d) $G(s) = \frac{3.5}{1.8s+1} e^{-2.25s}$

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$t_{28} = t_m + \tau/3$

$t_{63} = t_m + \tau$

$t_{63} = 3\,min$

$t_{28} = 1{,}8\,min$

$1{,}8 = t_m + \tau/3$

$3 = t_m + \tau$

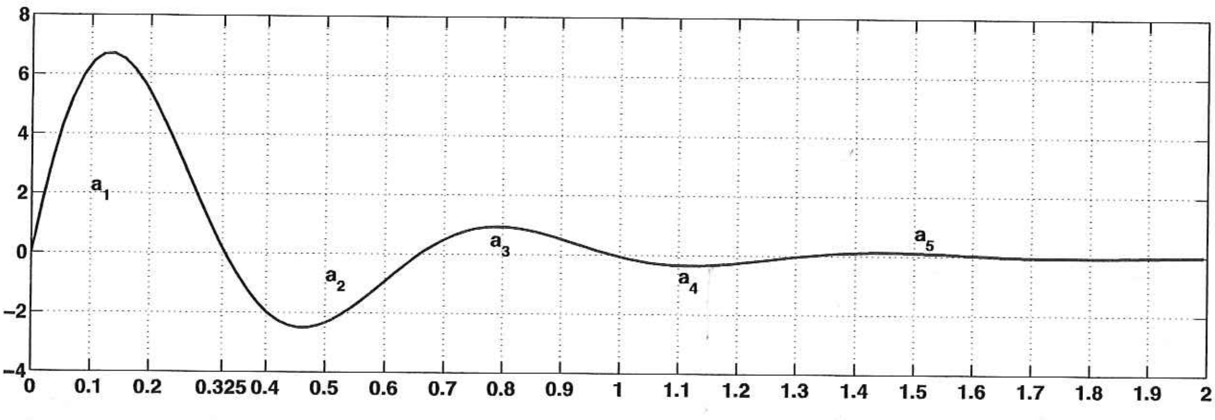
$1{,}2 = 0 + \frac{2}{3}$

$\tau = 1{,}8$

$t_m = 1{,}2$

$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{-2{,}5}{0{,}25} = -10$

2.- Un sistema responde de la siguiente manera ante una entrada escalón unitario.



donde a_1=1.3696 , a_2=0.5109, a_3=0.1904, a_4=0.0709 y a_5=0.0264.

$y_{ss} = \sum a_i = 1{,}0046$

$y(t_p) = 1{,}3696$

Indique cuál de las siguientes funciones de transferencia corresponde al sistema de la figura,

a) $G(s) = \frac{10}{0.1s^2+0.6s+10}$ b) $G(s) = \frac{10s}{0.1s^2+0.6s+10}$

c) $G(s) = \frac{10s}{s^2+6s+10}$ d) $G(s) = \frac{10s}{s^2+6s+100}$

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$y_{ss} = 1{,}0046$

$y(t_p) = 1{,}3696$

$M_p = \frac{1{,}3696 - 1{,}0046}{1{,}0046} = 0{,}36 \quad (36\%)$

$\delta^2 = \frac{(\ln 0{,}36)^2}{(\ln 0{,}36)^2 + \pi^2} = 0{,}094 \Rightarrow \underline{\delta = 0{,}307}$

$\delta \simeq 0{,}3$

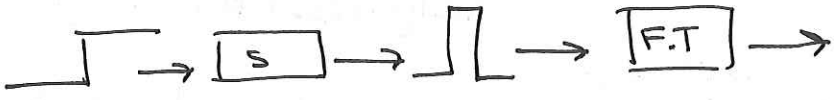
$t_p = 0{,}325 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \Longrightarrow \underline{\omega_n = 10{,}156}$ rad/s

$\omega_n \simeq 10$

$2\delta\omega_n \simeq 6$

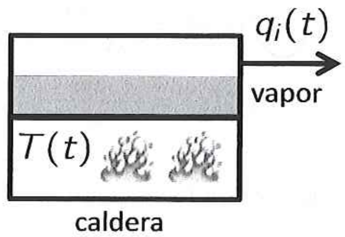
$K = \frac{y_{ss}}{\Delta u} = \frac{y_{ss}}{\Delta u} = 1$

Es una entrada a escalón unitario sin embargo la respuesta es la típica de un escalón.



$G(s) = s \cdot \frac{100}{s^2 + 6s + 100} = s \frac{10}{0{,}1s^2 + 0{,}6s + 10}$

3.- Se dispone del siguiente sistema en el que la entrada es la temperatura de la cámara de vapor y la salida es el caudal de vapor que se genera:



La relación entre la entrada de temperatura T(t) y la salida de caudal de vapor $q_i(t)$ la da la siguiente ecuación:

$$-45q_i(t)\frac{dT(t)}{dt}+400q_i(t)=-\frac{d^2q_i(t)}{dt^2}+\frac{T^2(t)}{20}-2q_i(t)\frac{dq_i(t)}{dt}$$

¿Cuál de las siguientes funciones de transferencia es la correcta si se considera un punto de operación en el que q_{i0}= 1.25 l/min?

$+400\cdot 1{,}25 = \frac{T^2}{20} \Rightarrow T=100\ °C$

a) $G(s)=\frac{45s+6.32}{s^2+58.75s+353}$

b) $G(s)=\frac{45s+6.32}{s^2+2.5s+400}$

c) $G(s)=\frac{56.25s+10}{s^2+2.5s+400}$

d) $G(s)=\frac{56.25s+10}{s^2+58.75s+353}$

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

Se trata de un sistema no lineal $\Rightarrow$ Linealizamos.

$f(q_i, \dot{T}, \ddot{q}_i, \dot{q}_i, T)$

$\left.\frac{\partial f}{\partial q_i}\right| = -45\dot{T}+400+2\dot{q}_i\Big|_{PO} = 400$

$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right| = 2q_i\Big|_{PO} = 2\cdot 1{,}25 = 2{,}5$

$\left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_i}\right| = 1$

$\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right| = -\frac{2T}{20}\Big|_{PO} = \frac{-2\cdot 100}{20} = -10$

$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{T}}\right| = -45\cdot q_i\Big|_{PO} = -56{,}25$

$400q_i+2{,}5\dot{q}_i+\ddot{q}_i = 10T+56{,}25\dot{T}$

$Q_i(s)\left[s^2+2{,}5s+400\right] = T(s)\left[10+56{,}25s\right]$

$$\frac{Q_i(s)}{T(s)} = \frac{10+56{,}25s}{s^2+2{,}5s+400}$$

4.- Aplicando las leyes fundamentales del movimiento a un sistema mecánico se ha hallado su modelo matemático en forma de ecuación diferencial que relaciona la fuerza ejercida en el sistema, f(t) (N), y el desplazamiento del mismo, x(t) (m),

$$20\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 80\frac{df(t)}{dt} - 6\frac{dx(t)}{dt} + 20f(t) = \frac{2d^3x(t)}{dt^3} + 10\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 6\frac{dx(t)}{dt} - 40f(t)$$

Determine la función de transferencia del sistema ante condiciones iniciales nulas,

a) $G(s) = 10\frac{s^2+4s+3}{s^3+5s^2+6s}$

b) $G(s) = \frac{20(s+1)}{2s(s+3)}$

c) $G(s) = \frac{20(s+1)(s+2)}{2s^3+10s^2+12s}$

d) $G(s) = \frac{20s^2+80s+20}{2s(s+2)(s+3)}$

$G(s) = \frac{20\cancel{(s+3)}(s+1)}{2(+2+s)(s+3)s}$

$G(s) = \frac{10(s^2+4s+3)}{s(s^2+5s+6)}$

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$F(s)[20s^2 + 80s + 20 + 40] = X(s)[2s^3 + 10s^2 + 6s + 6s]$

$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{20s^2 + 80s + 80}{2s^3 + 10s^2 + 12s} = \frac{20s^2+80s+60}{s(2s^2+10s+12)}$

$20[s^2+4s+3]$

$\frac{-4 \pm \sqrt{16-3\cdot 4}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2}$ → -3, -1

$\frac{-10 \pm \sqrt{100-12\cdot 4\cdot 2}}{4} = \frac{-10\pm 2}{4}$ → $s_1=-2$, $s_2=-3$

$\frac{-5 \pm \sqrt{25-6\cdot 4}}{2} = \frac{-5\pm 1}{2}$ → -2, -3

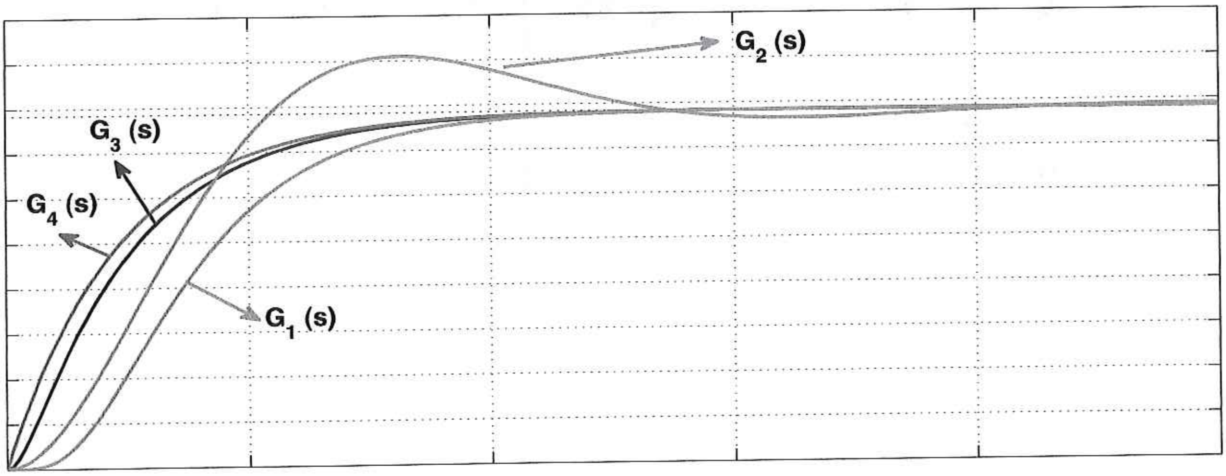
5.- Tras modelar un sistema, se ha deducido que su función de transferencia es

$$G(s) = \frac{0.05(s+2)}{(s^2+2.4s+0.85)(s+3)}$$

$(s+1{,}968)(0{,}43)(s+3)$

$\rightarrow \frac{-2{,}4 \pm \sqrt{2{,}4^2 - 4\cdot 0{,}85}}{2} = \frac{-2{,}4\pm}{2}$

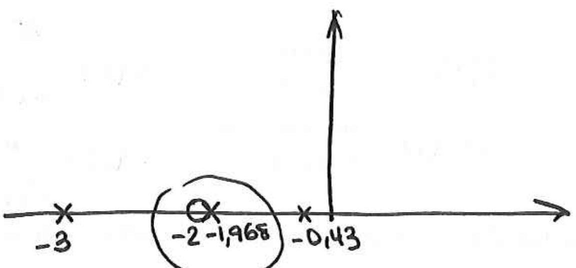
Determinar cual de las siguientes respuestas tipo escalón corresponde al sistema anterior,



a) $G_1(s)$ b) $G_2(s)$

c) $G_3(s)$ d) $G_4(s)$

Justifique brevemente la elección en el recuadro inferior



se cancelan por proximidad.

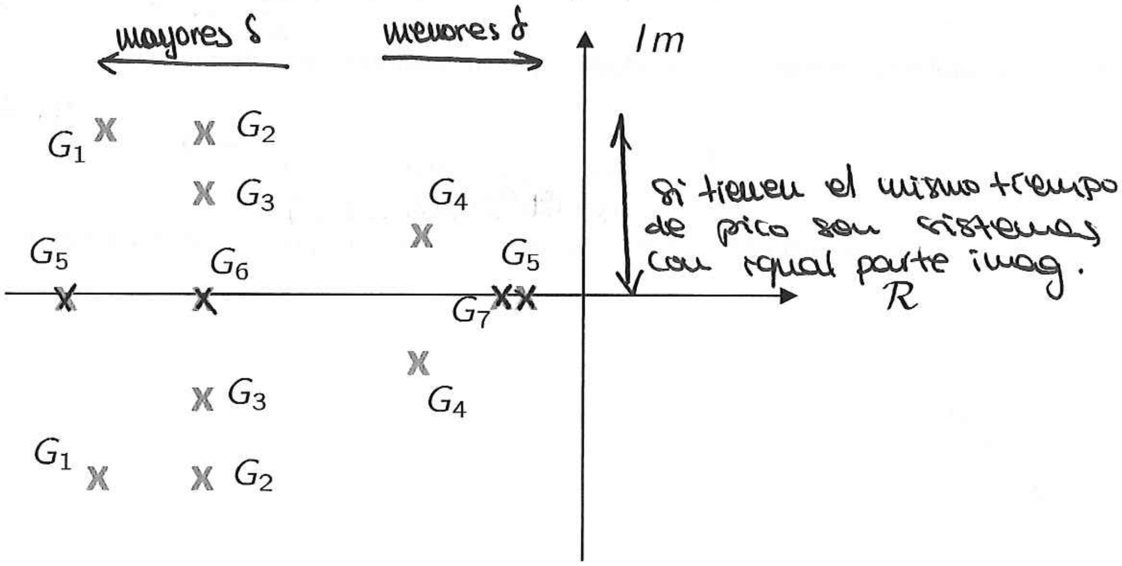
$$d_1/d_2 = \frac{-3}{-0,43} \approx 7 > 5 \text{ reduzco polo dominante.}$$

$$G(s) = \frac{0,05 \cdot 2}{(s+0,43)(s+3)1,968}$$

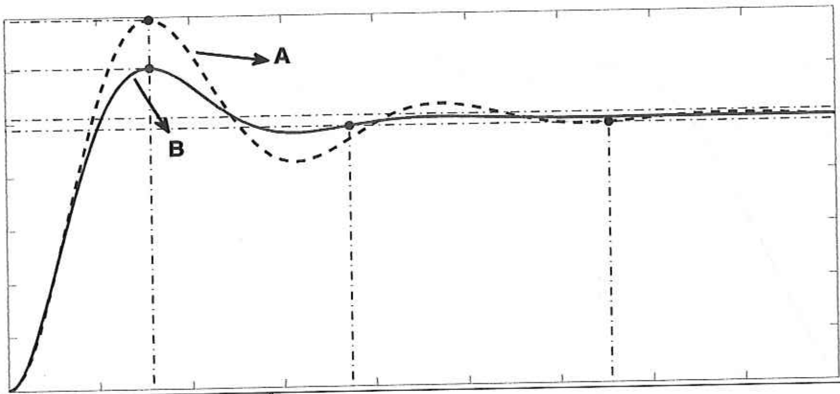
$$G(s) = \frac{0,05}{(s+0,43)(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{0,05}{(s+0,43)3} = \frac{0,017}{s+0,43} = \frac{0,039}{2,32s+1}$$

Se conocen los diagramas de ceros y polos de los siguientes sistemas.

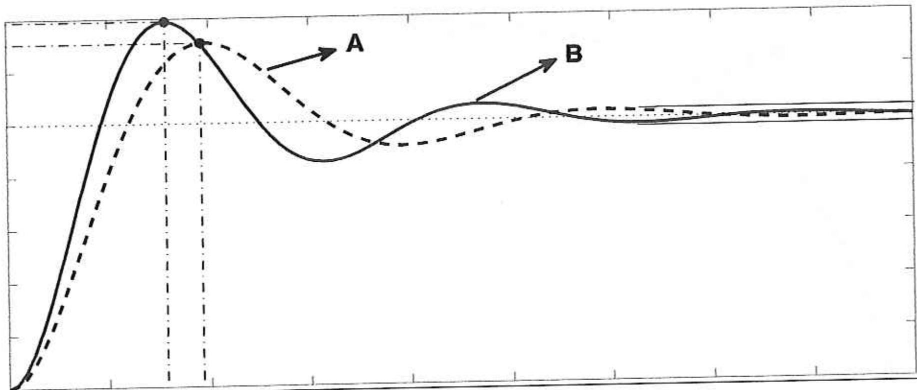


6.-Determine en base al diagrama de polos y ceros anterior, a qué sistema corresponden las respuestas temporales A y B suponiendo que su entrada es un escalón unitario.



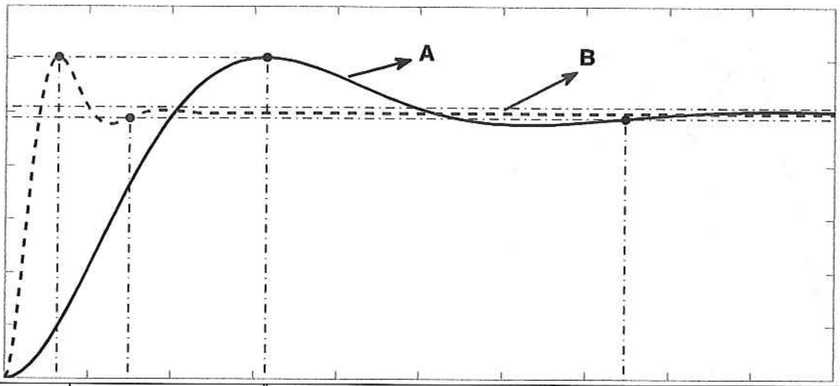
	A	B	Justifique la respuesta
a	$G_2(s)$	$G_1(s)$	Las funciones tienen el mismo tiempo de pico ⇒ Sistemas con polos de igual parte imaginaria
b	$G_1(s)$	$G_2(s)$	A mayor Mp mayor ángulo con el eje real ⇒ menor δ.
c	$G_2(s)$	$G_3(s)$	
d	$G_3(s)$	$G_2(s)$	

7.-Determine en base al diagrama de polos y ceros anterior, a qué sistema corresponden las respuestas temporales A y B suponiendo que su entrada es un escalón unitario.



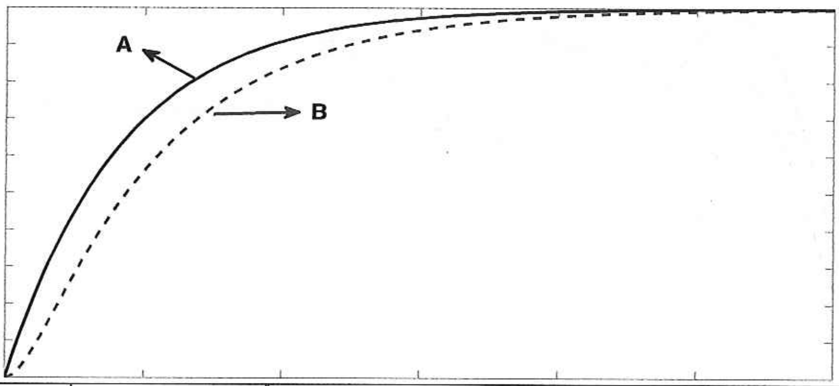
	A	B	Justifique la respuesta
a	$G_2(s)$	$G_1(s)$	Las respuestas tienen el mismo tiempo de establecimiento ⇒
b	$G_1(s)$	$G_2(s)$	sistemas con misma parte real
c	$G_2(s)$	$G_3(s)$	A mayor Mp, menor δ.
d	$G_3(s)$	$G_2(s)$	

8.-Determine en base al diagrama de polos y ceros anterior, a qué sistema corresponden las respuestas temporales A y B suponiendo que su entrada es un escalón unitario.



	A	B	Justifique la respuesta
a	$G_4(s)$	$G_1(s)$	Funciones con mismo sobreimpulso $\delta_B = \delta_A$ $\Downarrow$ Mismo ángulo de los polos con el eje real $\rightarrow$ G1 y G4
b	$G_1(s)$	$G_4(s)$	
c	$G_4(s)$	$G_3(s)$	
d	$G_3(s)$	$G_4(s)$	

9.-Determine en base al diagrama de polos y ceros anterior, a qué sistema corresponden las respuestas temporales A y B suponiendo que su entrada es un escalón unitario.



	A	B	Justifique la respuesta
a	$G_5(s)$	$G_6(s)$	
b	$G_6(s)$	$G_5(s)$	
c	$G_7(s)$	$G_5(s)$	
d	$G_5(s)$	$G_7(s)$	

10.-Sea un sistema del que se conoce su función de transferencia

$$G(s) = \frac{10s(s+1)(s+2)}{s^4+1}$$

Se realimenta el sistema con realimentación unitaria y ganancia Kc. El sistema realimentado será estable:

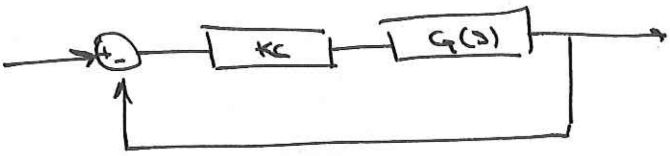
a) $K_c > 0$

b) Inestable para $\forall K_c$

c) $K_c > 0.083$

d) $K_c \in (0.066, 0.083)$

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior



$$G_{BC}(s) = \frac{10s(s+1)(s+2)\cdot Kc}{s^4+1+10s(s+1)(s+2)\cdot Kc}$$

ec. carac.: $s^4+1+10s(s^2+3s+2)\cdot Kc = s^4 + \underset{Kc}{10s^3} + \underset{Kc}{30s^2} + \underset{Kc}{20s} + 1$

Empleo criterio de R.H.

1. Condición necesaria: Han de existir todos los coeficientes y ser estrictamente positivos $Kc > 0$

2. Condición suficiente: la primera columna de la ~~gra~~ tabla de R.H ha de ser positivo.

s^4	1	$30Kc$	1
s^3	$10Kc$	$20Kc$	0
s^2	$\frac{300Kc^2-20Kc}{10Kc} \rightarrow 30Kc-2$	$\frac{10Kc\cdot 1}{10Kc}$	0
s^1	$\frac{(30Kc-2)\cdot 20Kc - 10Kc}{30Kc-2}$	0	0
s^0	1	0	0

$(30Kc-2)20Kc - 10Kc > 0$

$(30Kc-2)\cdot 20 - 10$

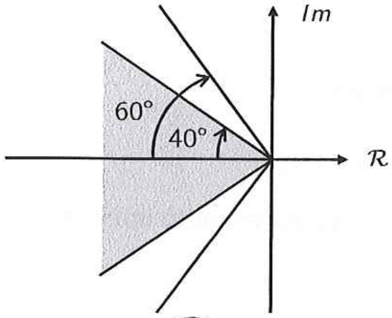
$30Kc - 2 > 0{,}5$

$30Kc > 2{,}5$

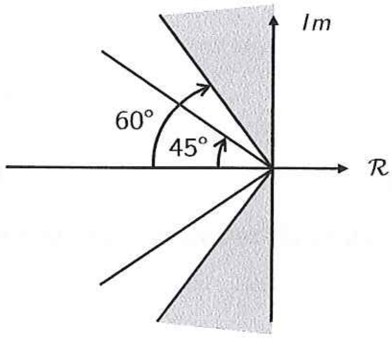
$$\boxed{Kc > 0{,}083}$$

11.- Se ha determinado que un sistema de segundo orden ha de presentar un sobreimpulso máximo entre el 4.3% y el 16.3%. ¿En qué zona del plano s están ubicados sus polos?

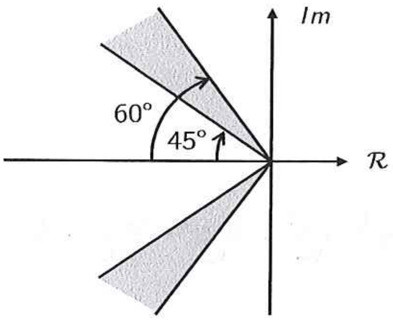
a)



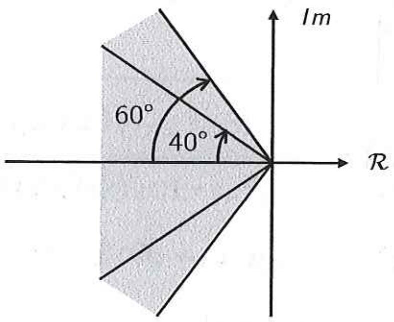
b)



c)



d)



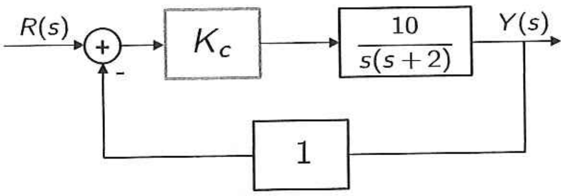
Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$4{,}3\% < M_p < 16{,}3\% \rightarrow \delta \geq \cancel{45^\circ}\ 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta \geq 45^\circ$

$$\delta^2 \leq \frac{\ln 0{,}163^2}{\ln 0{,}163^2 + \pi^2}$$

$\delta \leq 0{,}5 \rightarrow \theta \leq 60^\circ$

12.- En el siguiente sistema realimentado, calcule el rango de valores de K_c que hace que el sistema presente un sobreimpulso máximo entre el 16.3% y el 4.3%.



a) $K_c < 0.2$

b) $K_c < 0.4$

c) $K_c > 0.4$ y $K_c < 0.2$

d) $K_c \in (0.2, 0.4)$

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$\boxed{0{,}5 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}}$

$G_{BC}(s) = \dfrac{10K_c}{s^2 + 2s + 10K_c}$

$1 = \delta\omega_n$ $\quad$ $\dfrac{1}{0{,}5} = \omega_1 = 2$

$1 = \delta\omega_n$ $\quad$ $\dfrac{1}{1/\sqrt{2}} = \omega_n = \sqrt{2}$

$\omega_n = \sqrt{10K_c}$

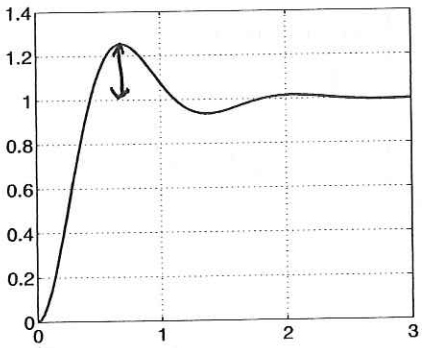
$K_c = 0{,}4$

$K_c = 0{,}2$

$\boxed{0{,}2 < K_c < 0{,}4}$

13.- En el sistema realimentado anterior se han probado 4 valores de K_c diferentes. Las respuestas del sistema realimentado ante un cambio de referencia escalón unitario son:

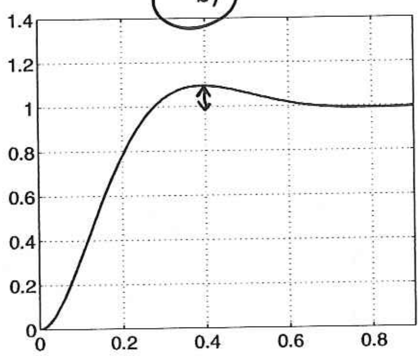
a)



$M_p = \dfrac{B}{A} = \dfrac{0{,}25}{1} = 25\%$

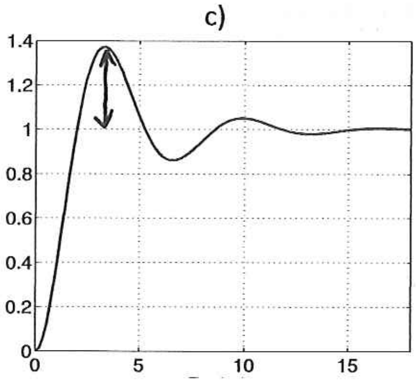
No puede ser

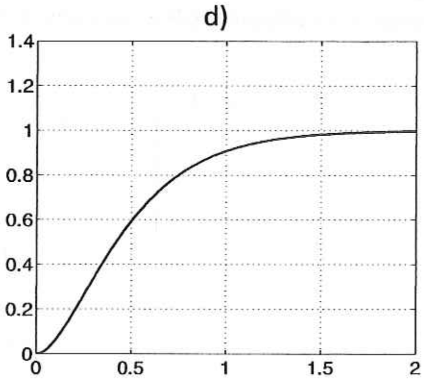
b)



puede ser

$M_p = \dfrac{B}{A} = \dfrac{0{,}1}{1} = 0{,}1\%$ (10%)





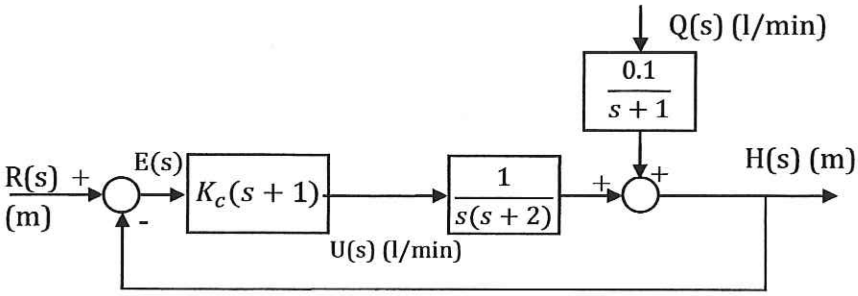
Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$$M_p = \frac{B}{A} = \frac{1{,}38}{1} = 1{,}38 \quad (138\%)$$

D) No tiene sobre impulso.

b) CUMPLE LA ESPECIFICACIÓN

El siguiente diagrama de bloques muestra el sistema de control de nivel de un tanque con descarga por gravedad. El nivel h(t) se controla mediante una electroválvula con controlador integrado que aumenta o disminuye el caudal de entrada u(t). El tanque no tiene cubierta, por lo que cuando llueve, el caudal de agua de lluvia q(t) afecta al nivel del tanque.



$$E(s) = R(s) - H(s) = R(s) - \left[\frac{0{,}1}{s+1} Q(s) + \frac{K_c(s+1)}{s(s+2)} E(s) \right]$$

$$E(s)\left[1 + \frac{K_c(s+1)}{s(s+2)} \right] = R(s) - \frac{0{,}1}{s+1} Q(s)$$

A entrada R(s) Nula:

13.-¿Cuál es la función de transferencia del error debida al caudal de la lluvia E(s)/Q(s)?

a) $\frac{E(s)}{Q(s)} = \frac{s(s+2)}{s(s+2)+Kc(s+1)}$

b) $\frac{E(s)}{Q(s)} = \frac{-s(s+2)}{s(s+2)+Kc(s+1)}$

c) $\frac{E(s)}{Q(s)} = \frac{-0{,}1\cdot s\cdot(s+2)}{s(s+2)+Kc(s+1)}$

d) $\frac{E(s)}{Q(s)} = \frac{-0{,}1\cdot s\cdot(s+2)}{s(s+2)(s+1)+Kc(s+1)^2}$

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$$E(s)\left[\frac{s(s+2)+Kc(s+1)}{s(s+2)}\right] = -\frac{0{,}1}{s+1}Q(s)$$

$$\frac{E(s)}{Q(s)} = \frac{-0{,}1\,s(s+2)}{(s+1)\left[s(s+2)+Kc(s+1)\right]}$$

14.-Si se introduce un escalón de amplitud 10 en la referencia R(s), y se produce una perturbación Q(s) con forma de escalón de amplitud 0.5 ¿Cuál es el error en el estado estacionario?

a) $e_{ss} = 0$

b) $e_{ss} = \frac{-10}{1+K_c}$

c) $e_{ss} = \infty$

d) $e_{ss} = \frac{-0{,}1}{K_c^2}$

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

Si se introduce un escalón 10 $\left(R(s) = \frac{10}{s}\right)$ $Q(s) = \frac{0{,}5}{s}$

$Q(s) = 0{,}5$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = \cancel{s}\cdot\left[\frac{s(s+2)}{s(s+2)+kc(s+1)}\right]\left[\frac{10}{\cancel{s}} - \frac{0{,}1}{s+1}\cdot\frac{0{,}5}{\cancel{s}}\right]$$

$e_{ss} = 0$

15.- Si el caudal de la lluvia Q(s) se incrementa, y ahora se considera una entrada rampa de pendiente 0,5 ¿Cuál es el error en el estado estacionario para la misma entrada de referencia (R(s) escalón de amplitud 10)?

a) $e_{ss} = \infty$

b) $e_{ss} = 0$

c) $e_{ss} = \frac{-10}{1+K_c}$

d) $e_{ss} = \frac{-0,1}{K_c}$

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$$ess = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \left[\frac{s(s+2)}{s(s+2)+Kc(s+1)}\right]\left[\frac{10}{\cancel{s}} - \frac{0,1}{s+1}\cdot\frac{0,5}{s^{\cancel{2}}}\right]$$

$$ess = \lim_{s\to 0} \cancel{\frac{s(s+2)}{s(s+2)+Kc(s+1)}\cdot 10} - \frac{\cancel{s}(s+2)}{s(s+2)+kc(s+1)}\cdot\frac{0,1}{s+1}\cdot\frac{0,5}{\cancel{s}}$$

$$ess = \lim_{s\to 0} -\frac{2}{Kc}\cdot\frac{0,1}{1}\cdot 0,5 = -\frac{0,1}{Kc}$$

16.- Sea un sistema del que se conoce su función de transferencia:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

Se realimenta el sistema con realimentación unitaria y ganancia K_c. Con $\boxed{K_c = 37.6}$ se consigue que el sobreimpulso a entrada escalón sea de:

a) $M_p = 30\%$

b) $M_p = 40\%$

c) $M_p = 50\%$

d) ninguna de las anteriores

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$$G(s)_{BC} = \frac{376}{s^2 + 11s + 386}$$

$$\omega n = \sqrt{376} = 19,39$$

$$11 = 2\delta\omega n$$

$$\delta = 0,28$$

$$Mp = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0,395 \simeq 0,4 \ (40\%)$$

17.- Para el mismo sistema de la cuestión 16, el tiempo de establecimiento (criterio del 2%) a entrada escalón es de:

a) $t_{ss} = 1.6s$

b) $t_{ss} = 3.2s$

c) $t_{ss} = 5.7s$

d) ninguna de las anteriores

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

~~ξ = el del polo~~

para K= 37,6 polos complejos conjugados, puedo aplicar

$t_s(2\%) = \frac{4}{\delta \omega_n} = \frac{4}{\frac{11}{2}} = \frac{8}{11} = 0{,}727.$

18.- Para el mismo sistema realimentado se desea conseguir que el sobreimpulso sea menor del 20% manteniendo el tiempo de establecimiento de la cuestión 18. La ganancia K_c debe tomar el valor:

a) $K_c = 13.6$

b) $K_c = 7.6$

c) $K_c = 3.6$

d) ninguna de las anteriores

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$M_p \leq 20\%$ $\quad \delta \leq \sqrt{\frac{\ln 0{,}2^2}{\ln 0{,}2^2 + \pi^2}} = 0{,}45$

$G_{BC}(s) = \frac{10K_c}{s^2 + 11s + 10K_c + 10}$

$5{,}5 = \delta\omega_n$

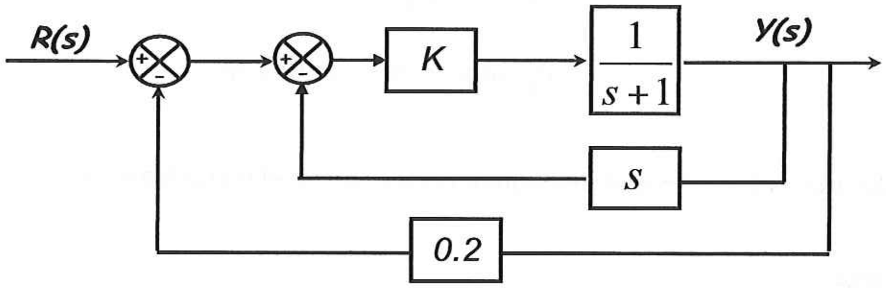
$\omega_n \geq 12{,}06$

$10 + 10K_c \geq 145{,}5$

~~$K_c \geq 14{,}55$~~

$K_c \geq 13{,}55$

19.- Sea el sistema de la figura:



Indique cuál es la constante de tiempo del sistema:

a) $\frac{1+K}{1+0.2K}$

b) $K+1$

c) $\frac{K}{1+0.2K}$

d) ninguna de las anteriores

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$G_{BC}(s)_1 = \frac{K}{s+1+Ks} \longrightarrow G_{BC}(s)_2 = \frac{K}{(1+K)s+1+0{,}2K}$

Constante de tiempo

$\tau = \frac{1+K}{1+0{,}2K}$

20.- Indique cual es el error en estado estacionario del sistema a entrada escalón unitario, del sistema mostrado en la cuestión 19

a) 0

b) ∞

c) $\frac{1}{1+0.2K}$

d) $\frac{K}{1+0.2K}$

Realice los cálculos más relevantes que justifiquen la elección en el recuadro inferior

$\lim_{s \to 0} = \frac{0{,}2K}{(1+K)s+1} = K0{,}2$

$essp = \frac{1}{1+K \cdot 0{,}2}$

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao eman ta zabal zazu Universidad del país vasco Euskal herriko unibertsitatea	**AUTOMÁTICA Y CONTROL** Nombre ______________________ Izena 1ºApellido______________________ 1 Deitura 2º Apellido______________________ 2 Deitura	**Curso: 2014/2015** 29/Noviembre/2014 **Tiempo:** 1 h 30 m **Grupo** **Taldea**

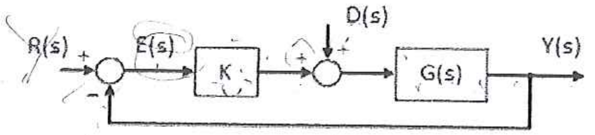
ESTE EXAMEN PARCIAL CONSTITUYE EL 15% DE LA NOTA FINAL.

LAS CUESTIONES RESPONDIDAS CORRECTAMENTE PUNTÚAN +1. LAS INCORRECTAS Y LAS NO CONTESTADAS, 0 PUNTOS.

ES IMPRESCINDIBLE RODEAR CON UN CÍRCULO LA OPCIÓN ELEGIDA (A, B, C, D) JUSTIFICANDO ADECUADAMENTE DICHA ELECCIÓN. PARA ELLO TODAS LAS CUESTIONES LLEVAN UN RECUADRO EN BLANCO A CONTINUACIÓN, DONDE LLEVAR A CABO LOS CÁLCULOS MÁS RELEVANTES.

EJERCICIO 1

Sea el siguiente sistema realimentado,

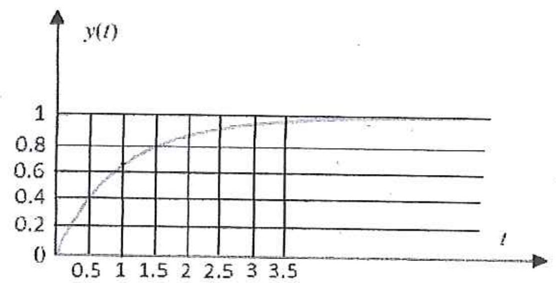


$E(s) = R(s) - E(s)\,G(s)\,K - D(s)\,G(s)$

$E(s)\,[1 + G(s)\,K] = -DG($

$E(s) = \dfrac{-DG}{1+GK} + R$

donde la respuesta de un sistema $G(s)$ a una entrada escalón de amplitud 2 es,



CUESTIÓN 1.- ¿Cuál es el error estacionario a una entrada de referencia rampa de pendiente 0.5?

A) $e_{ss} = \dfrac{2K}{1 + 0.5K}$

B) $e_{ss} = 0$

C) $e_{ss} = \infty$

D) $e_{ss} = \dfrac{K}{1 + 0.5K}$

OPCIÓN C)

Del gráfico de la respuesta a entrada escalón de amplitud 2 se puede identificar la función de transferencia. El sistema responde como uno de primer orden.
Identificación:

$$\left.\begin{array}{c} K = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = \dfrac{1}{2} = 0.5 \\ y_{63} = 0.63 \cdot 1 \rightarrow t_{63} = \tau = 1\ seg \end{array}\right\} \rightarrow G(s) = \frac{0.5}{s+1}$$

El sistema realimentado es de tipo 0 (no tiene polos en el origen), por lo que no es capaz de seguir a una entrada de referencia R(s) rampa de pendiente 0.5, es decir, el error a entrada rampa es infinito.

?

CUESTIÓN 2.- ¿Para K = 2, cuál es el error estacionario a una entrada escalón unitario tanto en la entrada de referencia como en la perturbación?

A) $e_{ss} = 0$

B) $e_{ss} = \infty$

C) $e_{ss} = 1.5$

D) $e_{ss} = 0.25$

OPCIÓN D)

El sistema es de primer orden y estable para todo valor de K, por lo que se puede calcular el error en estado estacionario aplicando el teorema del valor final. Siendo el sistema lineal, el error a cambios en las entradas de referencia y perturbación será la suma del error a cada entrada. Es decir, $e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd}$.

Como el sistema es de tipo 0, presentará error a entrada escalón en la referencia, de valor normalizado:
$e_p = \frac{1}{1+Kp}$ y $Kp = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{0,5K}{s+1} = 0,5K$
por lo que para K=2:

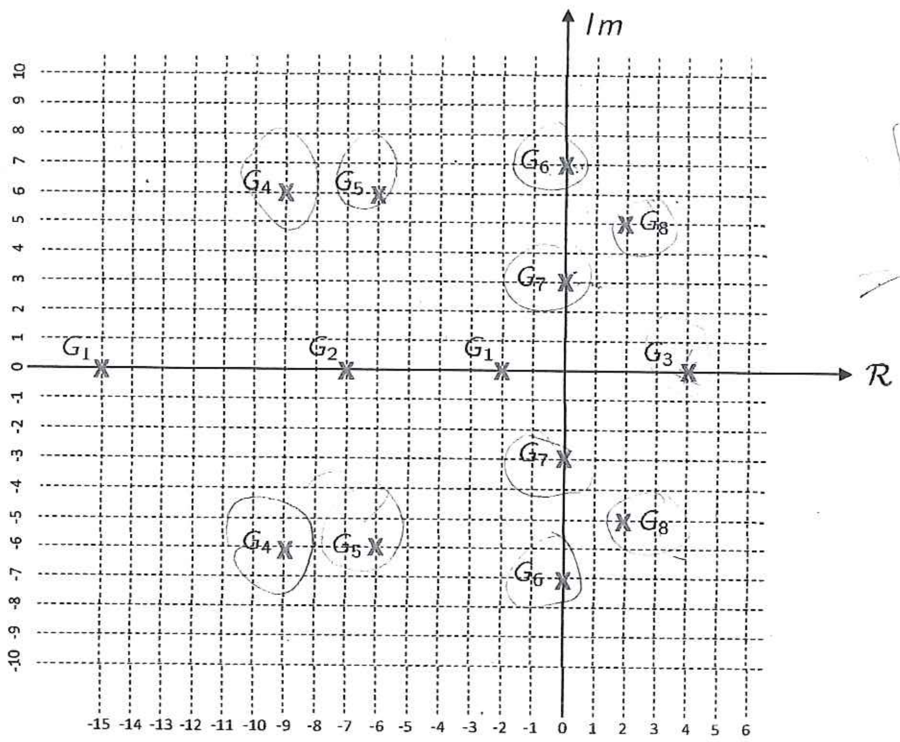
$$e_{ssr} = \frac{1}{1+0,5K} = \frac{1}{2}$$

Por otra parte, el error a pertubación podrá calcularse a partir de la función de transferencia en bucle cerrado E(s)/D(s) cuando la referencia no varía:
$G_{D-E}(s) = \left.\frac{E(s)}{D(s)}\right|_{R=0} = \frac{-G(s)}{1+KG(s)}$ por lo que $e_{ssd} = \lim_{s\to 0} s E(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{-G(s)}{1+KG(s)} D(s) = -\frac{1}{4}$
Por lo que $e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

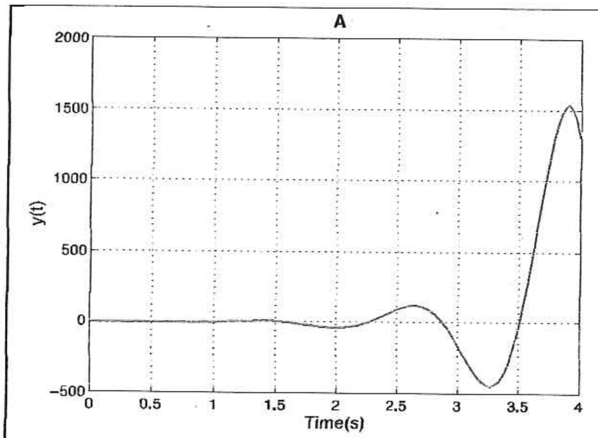
$$\frac{\frac{-0,5}{s+1}}{1+2\cdot\frac{0,5}{s+1}}\cdot 1 = \frac{-0,5}{s+2}\cdot 1 \rightarrow \lim_{s\to 0}\frac{-0,5}{s+2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

EJERCICIO 2

En la figura se han representado los polos y ceros de 8 sistemas diferentes:



CUESTIÓN 3.- De entre los sistemas representados en el diagrama de polos y ceros, ¿cuál corresponde a la siguiente respuesta impulso unitario aplicada en t=1s? Justifique la respuesta.



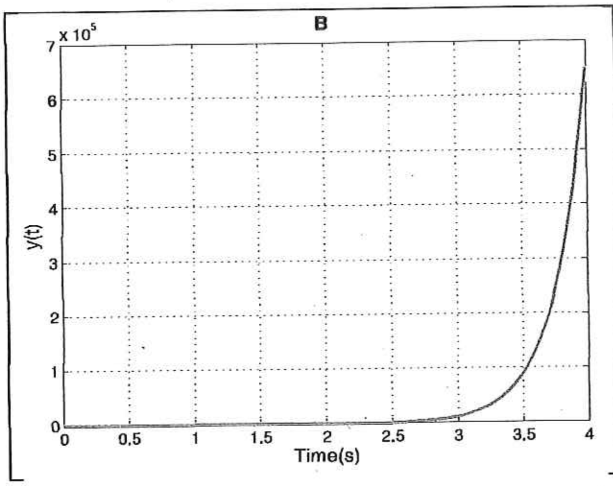
Sistema: G8

Justificación:

La respuesta es inestable, por lo tanto tiene polos en el semiplano derecho. Además presenta oscilaciones, por lo tanto, los polos son complejos conjugados con parte real positiva (las oscilaciones son debidas a la parte imaginaria).

El único sistema que cumple es G8

CUESTIÓN 4.- De entre los sistemas representados en el diagrama de polos y ceros, ¿cuál corresponde a la siguiente respuesta impulso unitario aplicada en t=1s? Justifique la respuesta.



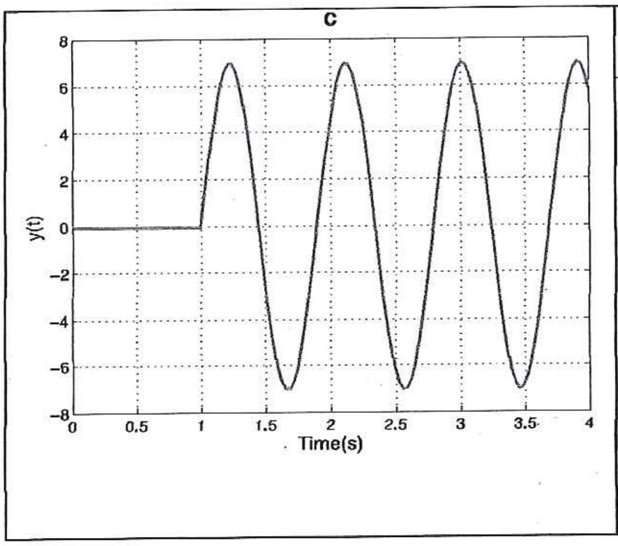
Sistema: G3

Justificación:

La respuesta es inestable, por lo tanto tiene polos en el semiplano derecho. No presenta oscilaciones, por lo tanto, los polos son reales con parte real positiva.

El único sistema que cumple es G3

CUESTIÓN 5.- De entre los sistemas representados en el diagrama de polos y ceros, ¿cuál corresponde a la siguiente respuesta impulso unitario aplicada en t=1s? Justifique la respuesta.



Sistema: G6

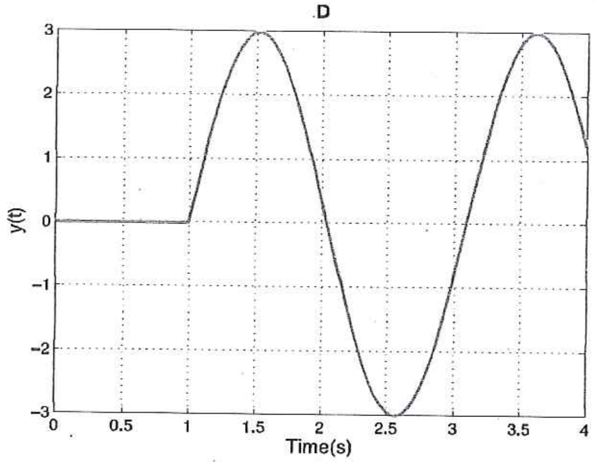
Justificación:

La respuesta es oscilatoria mantenida, por lo tanto los polos deben ser dos y estar situados sobre el eje imaginario. Existen dos sistemas que cumplen esa condición: G6 y G7.

Los polos de G6 tienen parte imaginaria más ~~pequeña~~ grande que los de G7, luego su frecuencia de oscilación ω_n es ~~menor.~~ mayor

En las gráficas C y D se observa que el periodo de C es mayor que el de D, por lo que la respuesta C corresponde al sistema G6.

CUESTIÓN 6.- De entre los sistemas representados en el diagrama de polos y ceros, ¿cuál corresponde a la siguiente respuesta impulso unitario aplicada en t=1s? Justifique la respuesta.

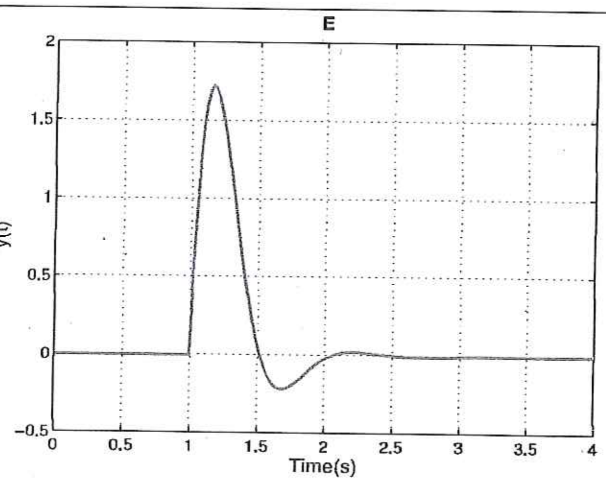


Sistema: G7

Justificación:

El mismo razonamiento hecho en el apartado anterior lleva a que la respuesta D se corresponde con los polos del sistema G7.

CUESTIÓN 7.- De entre los sistemas representados en el diagrama de polos y ceros, ¿cuál corresponde a la siguiente respuesta impulso unitario aplicada en t=1s? Justifique la respuesta.

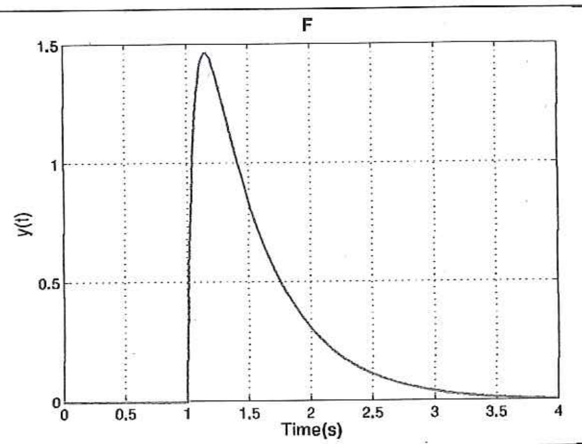


Sistema: G5

Justificación:

Se trata de un sistema estable de segundo orden y subamortiguado con $0 \leq \delta \leq 1$, por tanto tiene una pareja de polos complejos conjugados con parte real negativa.
Hay dos sistemas que cumplen esa condición: G4 y G5. Observando sus respuestas temporales se ve que G4 se establece antes que G5, por tanto la respuesta E corresponde a G5, que es más lento ya que la parte real de sus polos está situada más a la derecha.
También puede justificarse observando que la respuesta E está menos amortiguada que la H, es decir, que $\delta_E < \delta_H$. En el diagrama G5 es el sistema menos amortiguado de ambos.

CUESTIÓN 8.- De entre los sistemas representados en el diagrama de polos y ceros, ¿cuál corresponde a la siguiente respuesta impulso unitario aplicada en t=1s? Justifique la respuesta.

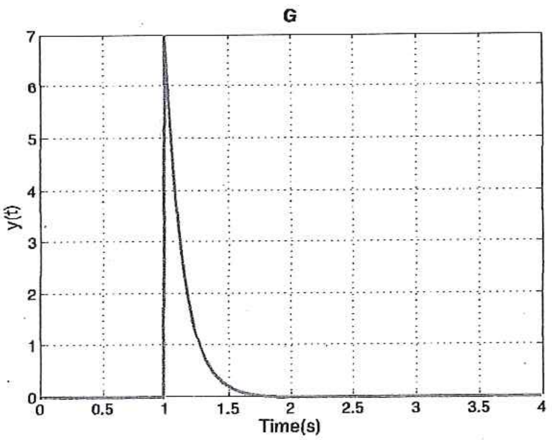


Sistema: G1

Justificación:

Se trata de la respuesta a impulso de un sistema estable de segundo orden sobreamortiguado, por lo que sus polos tendrán parte real negativa (un polo doble también podría ser). Sólo hay un sistema que cumpla la condición y es G1.

CUESTIÓN 9.- De entre los sistemas representados en el diagrama de polos y ceros, ¿cuál corresponde a la siguiente respuesta impulso unitario aplicada en t=1s? Justifique la respuesta.

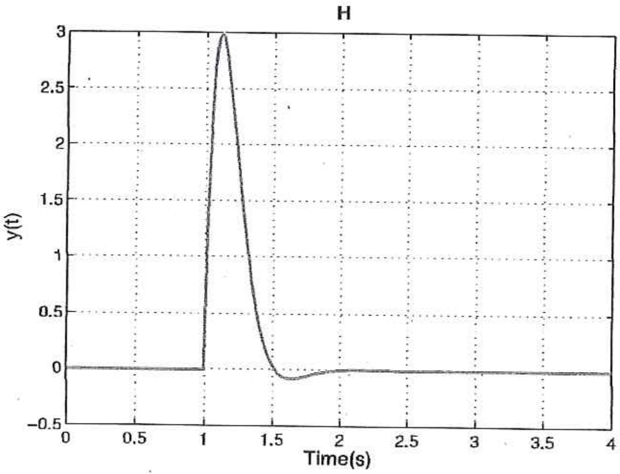


Sistema: G2

Justificación:

Se trata de la respuesta a un sistema estable de primer orden, por lo tanto tiene un polo con parte real negativa. Sólo hay un sistema que cumpla y es G2.

CUESTIÓN 10.- De entre los sistemas representados en el diagrama de polos y ceros, ¿cuál corresponde a la siguiente respuesta impulso unitario aplicada en t=1s? Justifique la respuesta.



Sistema: G4

Justificación:

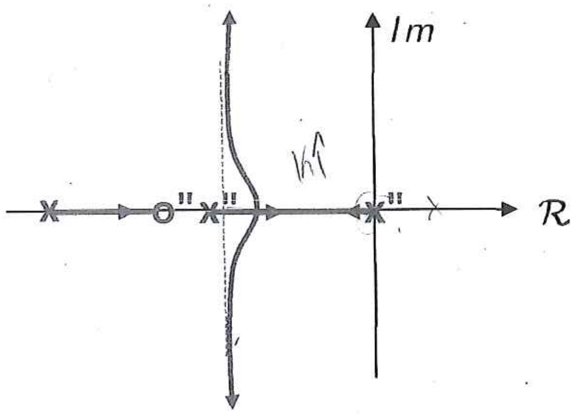
Se trata de un sistema estable de segundo orden y subamortiguado con $0 \leq \delta \leq 1$, por tanto tiene una pareja de polos complejos conjugados con parte real negativa.

Hay dos sistemas que cumplen esa condición: G4 y G5. Observando sus respuestas temporales se ve que G4 se establece antes que G5, por tanto la respuesta H corresponde a G4, que es más rápido ya que la parte real de sus polos está situada más a la izquierda.

También puede justificarse observando que la respuesta H está más amortiguada que la E, es decir, que $\delta_E < \delta_H$. En el diagrama G4 es el sistema más amortiguado de ambos.

EJERCICIO 3

La figura representa el Lugar de las Raíces de un sistema realimentado con ganancia K y H(s)=1.



CUESTIÓN 11.- Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta

A) El sistema realimentado sigue sin error a entradas escalón y rampa

B) El sistema realimentado es estable para todo K > 0, y el e_{ss} a entrada escalón es 0

C) Existe un valor de K a partir del cual el sistema es inestable y el e_{ss} es finito

D) Todas las anteriores son falsas

OPCIÓN B)

El lugar de las raices representa cómo se mueven los polos del sistema en bucle cerrado cuando K varía de 0 a ∞. Las ramas parten de K=0 (polos en bucle abierto) y llegan a los ceros cuando K→∞, estando n-m ceros (exceso polo-cero) en el ∞.

Por tanto, del lugar de las raíces se deriva que el sistema en bucle abierto tiene un polo en el origen, por lo que el sistema realimentado es de tipo 1 y no presenta error a cambios escalón en la referencia.

Así mismo, se observa que para todo valor de K>0 los polos del sistema en bucle cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo, por lo que el sistema es estable para K>0.

(s+0)

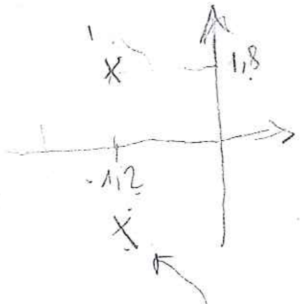
tipo 1 → ess esc = 0
ess ramp = 1/kv
ess par = 1/ka

EJERCICIO 4

Se conoce la dinámica de cuatro sistemas, representadas de distinta forma.

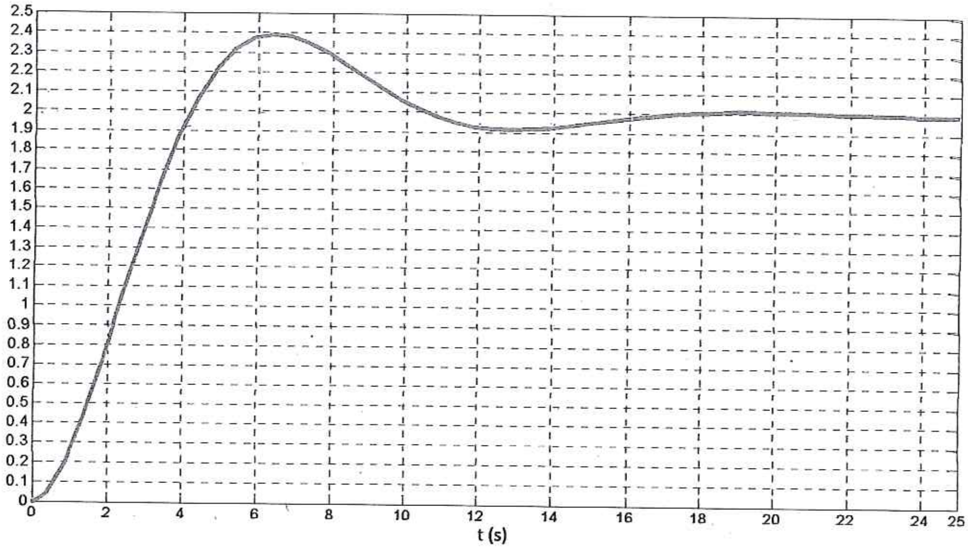
Del sistema 1 se conoce su función de transferencia:

$$G_1(s) = \frac{5}{(1+0.142s)(s^2+2.4s+5)}$$



Del sistema 2 se conoce su respuesta a escalón de amplitud 2:

$M_p = 0,2 \rightarrow \delta =$



$\omega_n = 2,23$

$\delta = \frac{2,4}{2 \cdot 2,23} = 0,53$

$M_p = 0,14\%$

Del sistema 3 se conoce la ecuación diferencial de E/S:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 0.8\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 0.1\frac{dr(t)}{dt} + 0.4r(t)$$

$(s^2+0,8s+10)\,Y(s) = (0,1s+0,4)$

$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0,1s+0,4}{s^2+0,8s+10}$

$\omega_n^2 = 10 \rightarrow \omega_n = 3,16$

$2\delta\omega_n = 0,8 \rightarrow \delta = 0,12$

$M_p = 0,68 \rightarrow 68\%$

Del sistema 4 se conoce un modelo aproximado de primer orden más tiempo muerto:

$$G_4(s) = \frac{5}{1+0.8s}e^{-0.6s}$$

$\tau = (t_{63} - t_{28})\frac{3}{2}$

$t_m = t_{63} - \tau$

CUESTIÓN 12.- ¿Cuáles de estos sistemas presentan un sobreimpulso $M_p \leq 25\%$?

A) G_1 y G_3

B) G_3 y G_4

C) G_1 y G_2

D) G_2 y G_3

OPCIÓN C)

➔ **Sistema G1**: sistema de tercer orden, siendo uno de sus polos real $p_1 = -7.04$. Los otros dos polos son complejos conjugados de valor, $s^2 + 2.4s + 5 = 0 \rightarrow p_{1,2} = -1.2 \pm 1.88j$, por lo que el polo real es no dominante y la respuesta será prácticamente la correspondiente a los polos complejos conjugados. Identificando δ y ω_n de la ecuación general de polos de segundo orden:

$$s^2 + 2{,}4\,s + 5 = s^2 + 2\delta\omega_n s + {\omega_n}^2$$

Por lo que: ${\omega_n}^2 = 5$; $2\delta\omega_n = 2{,}4 \rightarrow \omega_n = 2{,}23$; $\delta = 0{,}53 \rightarrow M_p = 13{,}5\%$

SÍ CUMPLE

➔ **Sistema G2**: De la gráfica se observa que es un sistema sobreamortiguado, por tanto, del gráfico se puede obtener: $M_p = \frac{y(t_p)-y_{ss}}{y_{ss}} = \frac{2{,}4-2}{2} = 0.2 \rightarrow \boxed{M_p = 20\%}$

SÍ CUMPLE

Ya no haría falta seguir porque la respuesta correcta es C)

➔**Sistema G3**: Aplicando la transformada de Laplace a condiciones inciales nulas se puede obtener la *función de transferencia y, por tanto, los polos del sistema:*

$$(s^2 + 0{,}8s + 10)Y(s) = (0{,}1s + 0{,}4)R(s) \rightarrow \quad G(s) = \frac{0{,}1(s+4)}{s^2 + 0{,}8s + 10}$$

Igualando los coeficientes con la ecuación general de polos de segundo orden, se pueden identificar δ y ω_n:
${\omega_n}^2 = 10$; $2\delta\omega_n = 0{,}8 \rightarrow \omega_n = 3{,}16$; $\delta = 0{,}13 \rightarrow M_p = 67\%$
El sistema tiene un cero por lo que sería necesario analizar la influencia que tendrá en la respuesta. Ahora bien, como el cero adelanta, empeoraría la situación y el sistema sin el efecto del cero no cumple la especificación de sobreimpulso.

NO CUMPLE

➔ **Sistema G4**: Es un sistema de POMTM, y al ser un sistema de primer orden, no presenta sobreimpulso

SÍ CUMPLE

CUESTIÓN 13.- ¿Cuáles de estos sistemas presentan un tiempo de establecimiento $t_s(\%2) \leq 4$ s?

A) G_1 y G_3

B) G_1 y G_2

C) G_3 y G_4

D) G_1 y G_4

OPCIÓN D)

→ **G_1:** El tiempo de establecimiento lo fijan la parte real de los polos complejos conjugados, ya que el polo real es no dominante.

$\boxed{t_{s(2\%)} = \frac{4}{\delta\omega_n} = 3{,}3s \leq 4s}$ SÍ CUMPLE

→**G_2:**

Del gráfico se observa: $\boxed{t_{s(2\%)} > 4s}$ *NO CUMPLE*

→**G_3:**

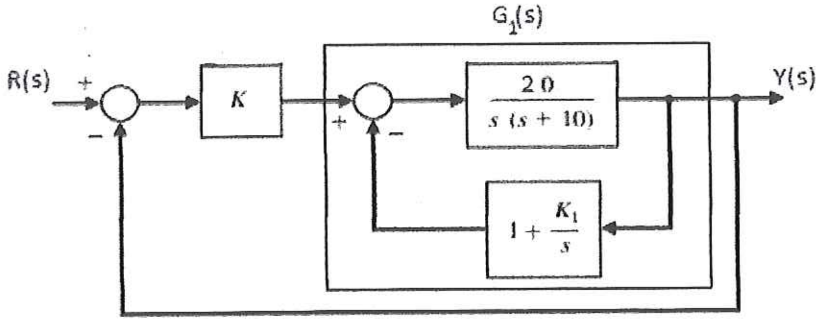
$\boxed{t_{s(2\%)} = \frac{4}{\delta\omega_n} = \frac{4}{0.4} = 10 > 4s}$ NO CUMPLE

→**G_4:**

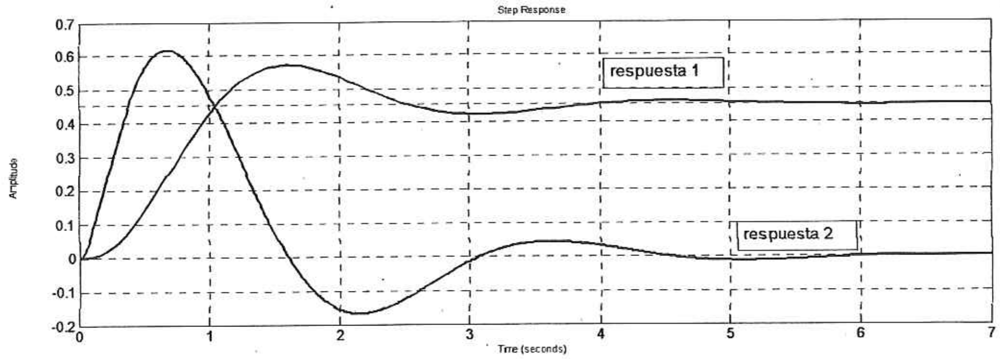
Tiempo de establecimiento del polo: $t_{s(2\%)} = 4\tau + t_m = 3.8\,s \leq 4s$ SÍ CUMPLE

EJERCICIO 5

Dado el sistema de control:



CUESTIÓN 14.- Basándose en la figura, donde se muestran dos respuestas distintas a entrada escalón, justifique adecuadamente cuál de ellas corresponde a $G_1(s)$.



A) Respuesta 1 **B)** Respuesta 2

C) Ambas respuestas pueden ser válidas **D)** Ninguna de las dos

OPCIÓN B)

Calculamos la función de transferencia G1(s),

$$G_1(s) = \frac{\frac{20}{s(s+10)}}{1 + \frac{20}{s(s+10)}\frac{s+K_1}{s}} = \frac{20s}{s^2(s+10) + 20(s+K_1)}$$

Como se observa de la función de transferencia G1, se trata de un sistema de tercer orden con un derivador (un cero en el origen). Por tanto, la respuesta a entrada escalón se presenta como la respuesta a una entrada impulso, y por tanto la respuesta 2 es la correspondiente a dicho sistema.

CUESTIÓN 15.- Para $K_1 = 2.2$, determine el intervalo de valores de K que hacen que el sistema de control en lazo cerrado sea asintóticamente estable.

A) $0 < K < 1$

B) $K > 0$

C) $0 < K < 0.78$

D) $2.8 < K < 3.2$

Calculamos la función de transferencia en BC: $G_{BC}(s) = \frac{KG_1(s)}{1+KG_1(s)}$

Ecuación característica:

$$1 + KG_1(s) = s^3 + 10s^2 + 20s(1 + K) + 44 = 0$$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz:

a) Condición necesaria: $\forall a_i > 0 \rightarrow K > 0$
b) Condición suficiente (los coeficientes de la primera columna de la tabla de Routh tienen que ser positivos)

Tabla de Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 20(1+K) \\ s^2 & 10 & 44 \\ \hline s^1 & b_1 & \\ s^0 & c_1 & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{1}{-10}\begin{vmatrix} 1 & 10(1+K) \\ 10 & 44 \end{vmatrix} = -0.1(44 - 20(1+K)) > 0 \rightarrow K > 0$$

$$c_1 = 44 > 0$$

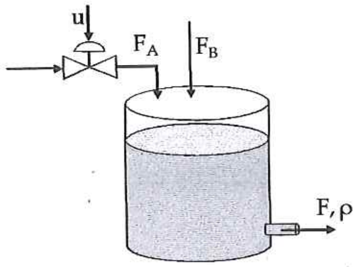
Por tanto, para que los elementos de la primera columna sean positivos se tiene que cumplir que K>0.

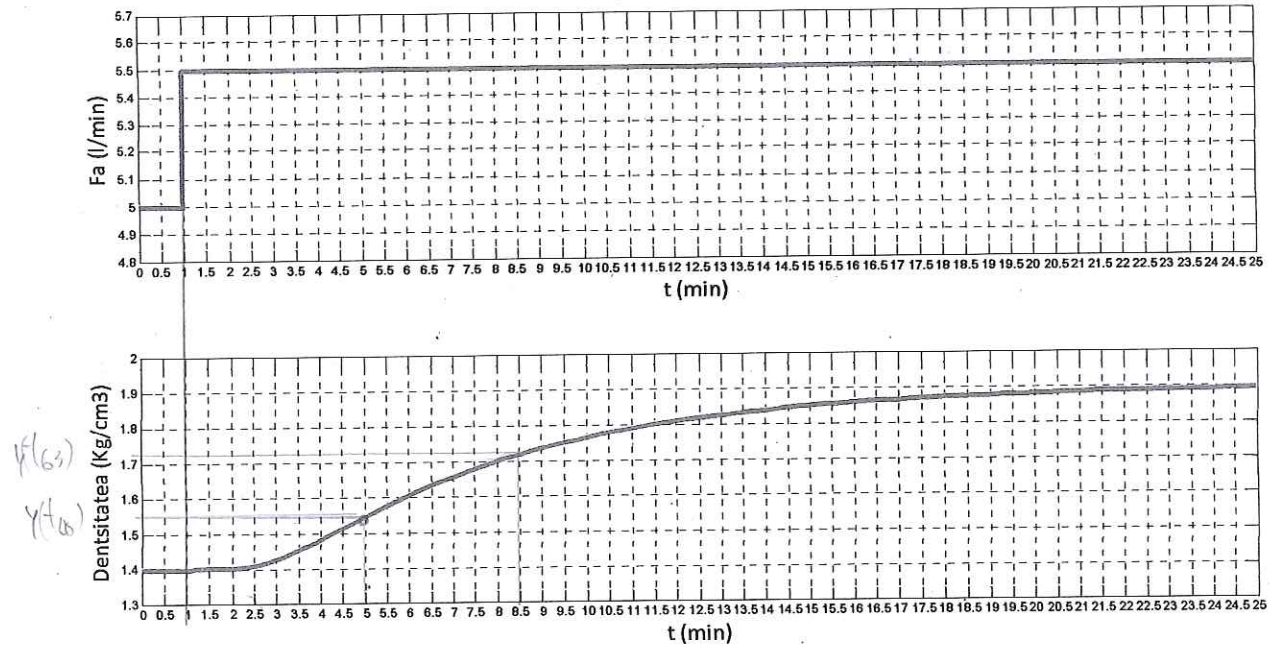
$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & 20(1+K) \\ S^2 & 10 & 44 \\ S^1 & \frac{44-200(1+K)}{-10} & \end{array}$$

$-4'4$

EJERCICIO 6

La densidad de una mezcla de dos productos A y B responde como se ilustra en la figura cuando se produce un incremento en el caudal de producto A.





CUESTIÓN 16.- Indique cuál de los siguientes puede ser un modelo aproximado del sistema:

A) $G(s) = \frac{2}{7s+1}e^{-3.5s}$

B) $G(s) = \frac{2}{4.5s+1}e^{-2.5s}$

C) $G(s) = \frac{1}{4.5s+1}e^{-3.5s}$

D) $G(s) = \frac{1}{4.5s+1}e^{-2.5s}$

OPCIÓN D)

De la gráfica se observa que la variación escalón en la entrada se produce en t=1s.

Aplicando el método de los dos puntos:

$y_{63} = (1.9 - 1.4)0.63 + 1.4 = 1.715 \rightarrow t_{63} = 8 - 1 = 7s$ 8'5 - 1 = 7'5

$y_{28} = (1.9 - 1.4)0.28 + 1.4 = 1.54 \rightarrow t_{63} = 5 - 1 = 4s$ 5 - 1 = 4

De esta forma los parámetros del sistema de POMTM,

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{0.5}{0.5} = 1$$

$$\tau = 1.5(t_{63} - t_{28}) = 4.5s$$

$$t_m = t_{63} - \tau = 2.5\ seg$$

τ = 1'5 (7'5 - 4) = 5,25

tm = 7'5 - 5'25 = 2,25

La electroválvula que regula el caudal de entrada de producto A $F_A(t)$ (l/min) se rige por la ecuación:

$$\frac{dF_A(t)}{dt} + 12\sqrt{F_A(t)} = 0.2u(t)$$

donde u(t) (%) es la señal de apertura dada a la válvula, y su valor en el punto de operación es del 50%.

CUESTIÓN 17.- ¿Cuál de los siguientes modelos sería el más adecuado para modelar la válvula?

A) $G(s) = \frac{0.45}{s+22{,}5}$

B) $G(s) = \frac{0.2}{s+7{,}2}$

C) $G(s) = \frac{0{,}2}{1+7{,}2s}$

D) ninguna de las anteriores

OPCIÓN B)

En el punto de operación $u_0 = 50\%$. El punto de operación cumple la ecuación estática,

$$12\sqrt{F_{A0}} = 0.2u_0 \rightarrow F_{A0} = 0.6944 \text{ l/min}$$

Al estar en un PO, linealizamos alrededor de dicho PO, aplicando el desarrollo de Taylor:

$$f\left(\frac{dF_A(t)}{dt}, F_A(t), u(t)\right) = \frac{dF_A(t)}{dt} + 12\sqrt{F_A(t)} - 0.2u(t) = 0$$

$$f\left(\frac{dF_A(t)}{dt}, F_A(t), u(t)\right) \approx \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{F_A}}\right|_{OP} \Delta\frac{dF_A(t)}{dt} + \left.\frac{\partial f}{\partial F_A}\right|_{OP} \Delta F_A(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{OP} \Delta u(t) = 0$$

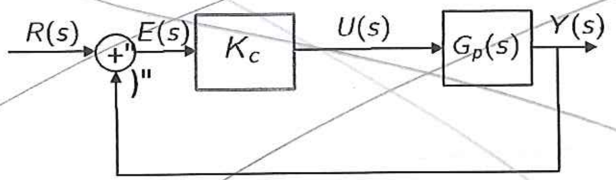
$$f\left(\frac{dF_A(t)}{dt}, F_A(t), u(t)\right) \approx \Delta\frac{dF_A(t)}{dt} + \frac{12}{2\sqrt{F_{A0}}}\Delta F_A(t) - 0.2\Delta u(t) = 0$$

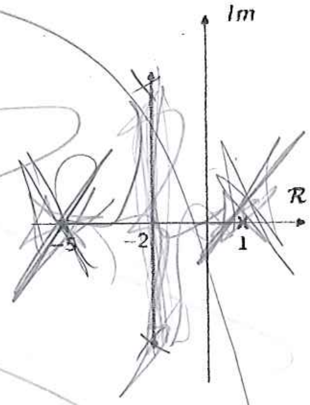
Aplicando Laplace a condiciones iniciales nulas,

$$(s + 7.2)F_A(s) = 0.2U(s) \rightarrow \frac{F_A(s)}{U(s)} = \frac{0.2}{s + 7.2}$$

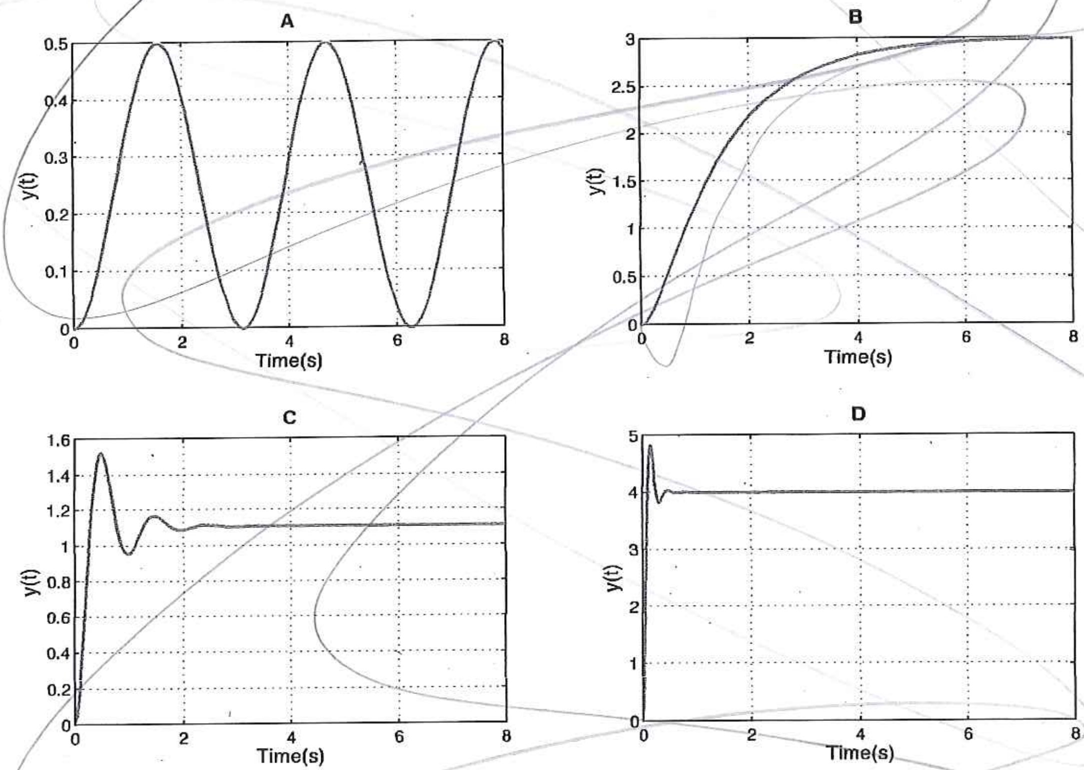
EJERCICIO 7

El diagrama de bloques representa un sistema de control basado en un control proporcional en el que se desea controlar una planta inestable $G_p(s)$. Se muestra también el lugar de las raíces del sistema realimentado, en función de K_c. Tanto $G_a(s)$ como $G_p(s)$ tienen una ganancia estática unitaria.





CUESTIÓN 18.- Se introduce un escalón unitario en la entrada de referencia r(t). De entre las siguientes respuestas temporales y(t), ¿cuáles son posibles?



A) a y b

B) b y c

C) a y d

D) c y d

OPCIÓN B)

El lugar de las raices (LR) muestra la ubicación de los polos del BC del sistema en función de Kc. Por lo tanto, podemos saber cómo va a responder en cada uno de los casos el sistema.

Como es un sistema de segundo orden en BA también lo será en BC.

➔gráfico A: sistema críticamente estable, es decir, polos imaginarios puros. Por tanto, no es posible,
➔gráfico B: Corresponde a un sistema sobreamortiguado, es decir, con plos reales. Por tanto es posible.
➔gráficos C y D: Corresponde a un sistema subamortiguado, es decir, con polos complejos conjugados. En el lugar de las raices se ve que la respuesta puede ser subamortiguada, pero el tiempo de establecimiento de la OPCIÓN C) es menor (más lento) que el de la OPCIÓN D).

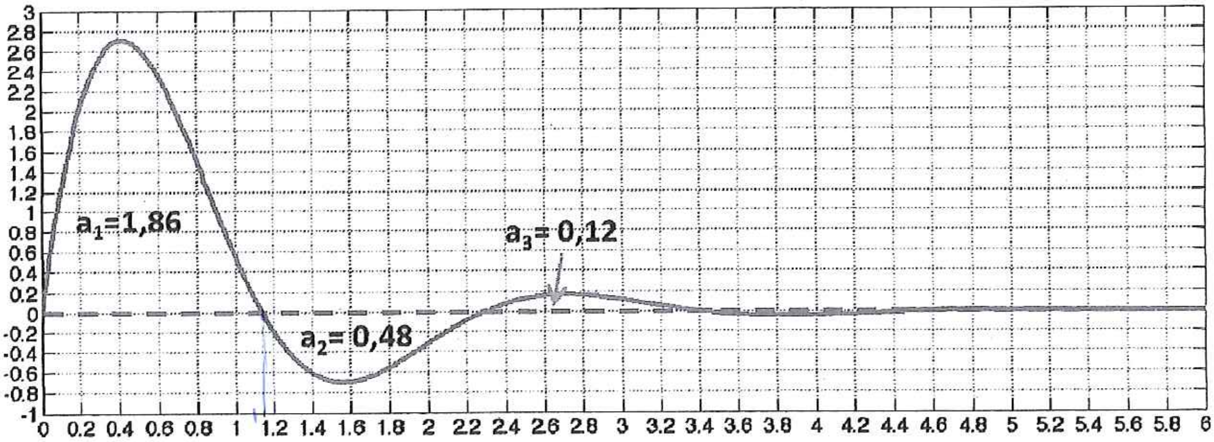
Del LR se observa que cuando los polos son complejos conjugados, la parte real es -2, y el tiempo de establecimiento es aproximadamente

$$t_{ss(\%5)} \approx \frac{4}{\delta\omega_n} = 2\ s$$

El gráfico D corresponde a un sistema subamortiguado con un tiempo de establecimiento menor que 2 segundos, más rápido, y el gráfico C sin embargo, se corresponde con un ts alrededor de 2s. Por tanto, D no son posibles.

EJERCICIO 8

En la figura se muestra el desplazamiento de un sistema mecánico cuando se aplica una fuerza en forma de escalón de amplitud 3.



CUESTIÓN 19.- Indique cuál de las siguientes funciones de transferencia representa su comportamiento dinámico.

A) $G(s) = \frac{4,5}{s^2+2,4s+9}$

B) $G(s) = \frac{9}{s(0,5s^2+1,2s+4,5)}$

C) $G(s) = \frac{9s}{0,5s^2+1,2s+4,5}$

D) $G(s) = \frac{4,5s}{s^2+2,4s+9}$

OPCIÓN D)

La gráfica se corresponde con la respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada impulso. Sin embargo, como es a una entrada escalón y es igual a la respuesta impulso de un sistema de segundo orden, se puede deducir que el sistema tiene un derivador (es decir, un cero en el origen)

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2 s}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Para identificar la función de transferencia del sistema cuya respuesta a una entrada impulso es la de la figura, utilizamos los datos:

$$y_{ssm} = \int_0^\infty y_i(t)dt = 1.86 - 0.48 + 0.12 = 1.5$$

$$y_p = \int_0^{t_p} y_i(t)dt = 1.86$$

Por tanto, la ganancia $K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1.5}{3} = 0.5$

Además,

$M_p = \frac{y_p - y_{ssm}}{y_{ssm}} = 0.24$ → $\delta = 0.4$ y de la gráfica obtenemos $t_p = 1.15 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$ → $\omega_n = 3\ rad/s$

Y si debe tener un derivador, sólo puede ser correcta la opción D)

Dado el sistema:

$$G(s) = \frac{0,5(s + 4,9)}{(s^2 + s + 1)(0,2s + 1)(0,1s + 1)}$$

CUESTIÓN 20: ¿Es posible encontrar una función de transferencia más simple que represente el comportamiento temporal del sistema de manera adecuada?

A) $G(s) = \frac{0,5(s+4,9)}{(s^2+s+1)(0,2s+1)}$

B) $G(s) = \frac{0,5(s+4,9)}{(s^2+s+1)(0,2s+1)0,1}$

C) $G(s) = \frac{2,45}{(s^2+s+1)}$

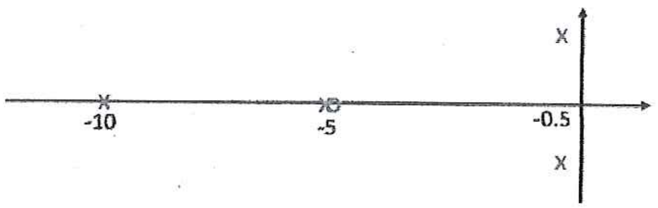
D) $G(s) = \frac{0,05(s+4,9)}{(0,2s+1)}$

OPCIÓN C)

Expresando la FT de la siguiente forma,

$$G(s) = \frac{25(s + 4.9)}{(s^2 + s + 1)(s + 5)(s + 10)}$$

Dibujando el diagrama de polos y ceros,



Como se ve, los polos dominantes son los polos complejos conjugados. Además, el polo en s=-5 y el cero en s= -4.9 pueden cancelarse, y el polo en s=-10 puede sustituirse por su ganancia estática al no ser dominante.

Por tanto,

$$G(s) = \frac{2.45}{(s^2 + s + 1)}$$

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

eman ta zabal zazu

Universidad del país vasco
Euskal herriko unibertsitatea

AUTOMÁTICA Y CONTROL

Curso: 2012/2013

26/Enero/2013

Nombre
Izena ______________________

1ºApellido
1 Deitura ______________________

2º Apellido
2 Deitura ______________________

Tiempo:

2,5h

Grupo
Taldea

MODELO A

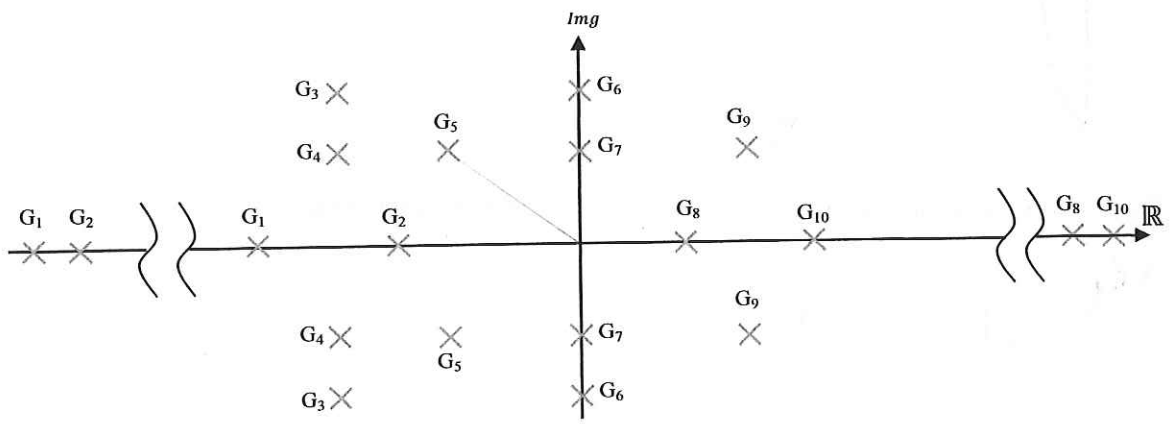
Este examen tiene un peso del 70% sobre la nota final. Para aprobar la asignatura es necesario obtener una puntuación mínima de 3/7 en este examen. En este caso, se sumará la nota de prácticas (peso del 15%) y la nota obtenida en el parcial (15%).

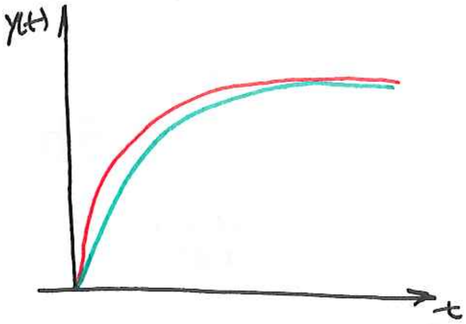
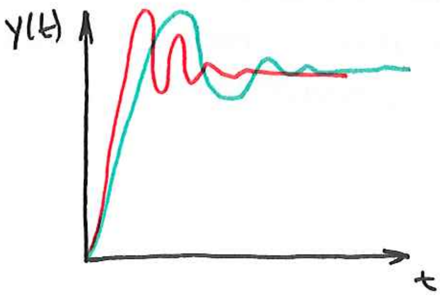
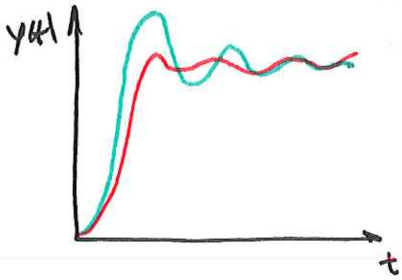
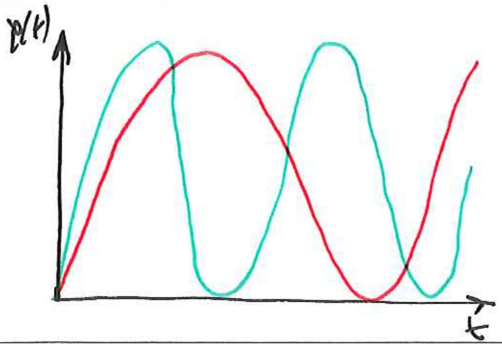
Todas las preguntas tienen el mismo valor.

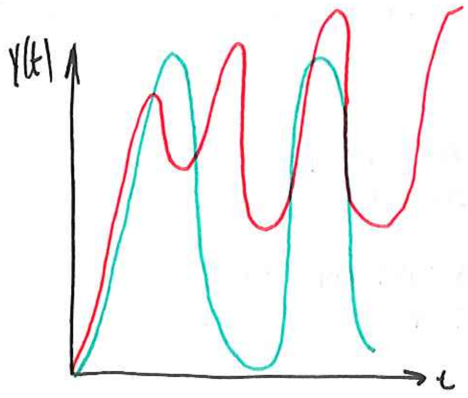
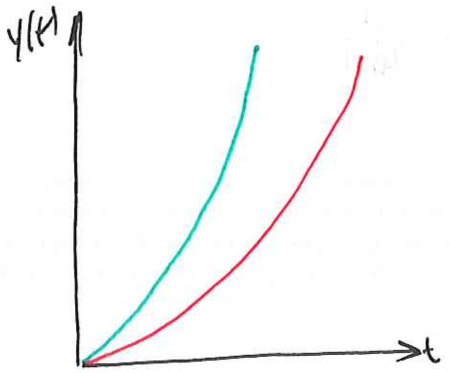
1. En la figura se han representado los polos de un conjunto de sistemas de segundo orden sin ceros.

Dibuje de forma aproximada la respuesta temporal a entrada escalón, superponiendo en la misma la respuesta de los pares de sistemas que se indican.

Razone en cada apartado en qué se diferencian las respuestas.



G_1-G_2: Respuesta temporal	Diferencias de respuesta:
	
G_3-G_4: Respuesta temporal	Diferencias de respuesta:
	
G_4-G_5: Respuesta temporal	Diferencias de respuesta:
	
G_6-G_7: Respuesta temporal	Diferencias de respuesta:
	

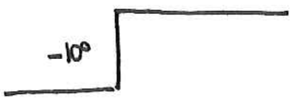
G_7-G_9: Respuesta temporal	Diferencias de respuesta:
	
G_8-G_{10}: Respuesta temporal	Diferencias de respuesta:
	

2. Un termómetro se encuentra a temperatura ambiente a 20ºC y se introduce bruscamente en un recipiente cuya temperatura interior es de 10ºC. Se ha recogido en la siguiente tabla las medidas marcadas por el termómetro y tomadas cada segundo.

t(s)	0	1	2	3	4	5	6	…	20	21
T(ºC)	20	17,8	16,1	14,7	13,7	12,9	12,3	…	10	10

¿Cuál es la variable de entrada? ¿y la de salida?

Variable de entrada Escalón de -10° C
Variable de salida T(°C) → 10°C



Identifique la función de transferencia más simple que represente de forma aceptable la dinámica del termómetro.

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\tau \Rightarrow 0{,}63 \cdot \Delta y = \underline{\underline{6{,}3}}$$

$$\tau = 4$$

$$\frac{T_m(s)}{T(s)} = \frac{1}{4s+1}$$

Solución: $\frac{T_m(s)}{T(s)} = \frac{1}{4s+1}$

3. Se conoce la característica estática de un sistema (relación entrada/salida en estado estacionario), para un conjunto de valores de la entrada (ver figura A). El ingeniero de control encargado de su operación, repentinamente desaparecido de la empresa, trabajaba con un modelo aproximado del sistema en un cierto punto de operación de función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\boxed{-0{,}85}}{1 + 0{,}25s}$$

¿A qué punto de operación de los 5 marcados en la figura A representa este modelo? Razone la respuesta.

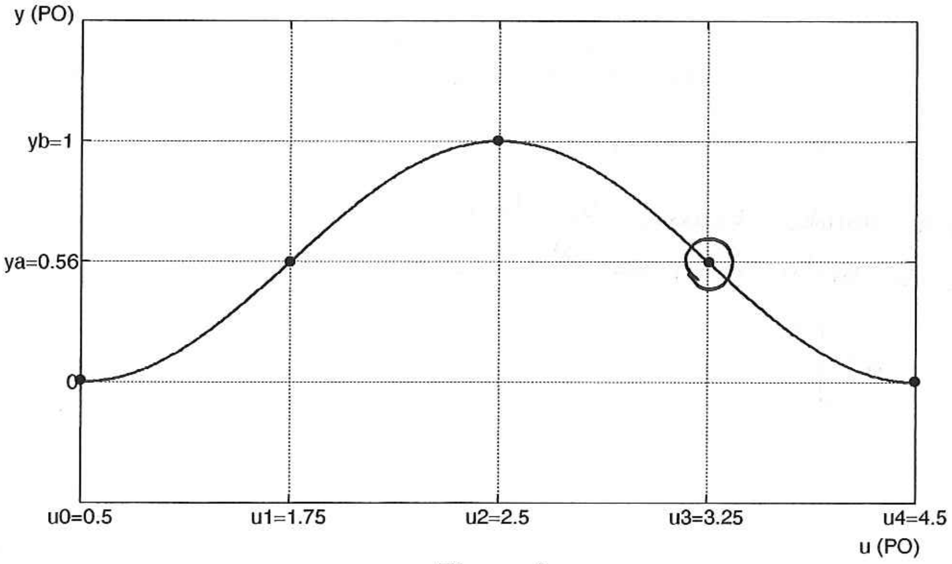


Figura A

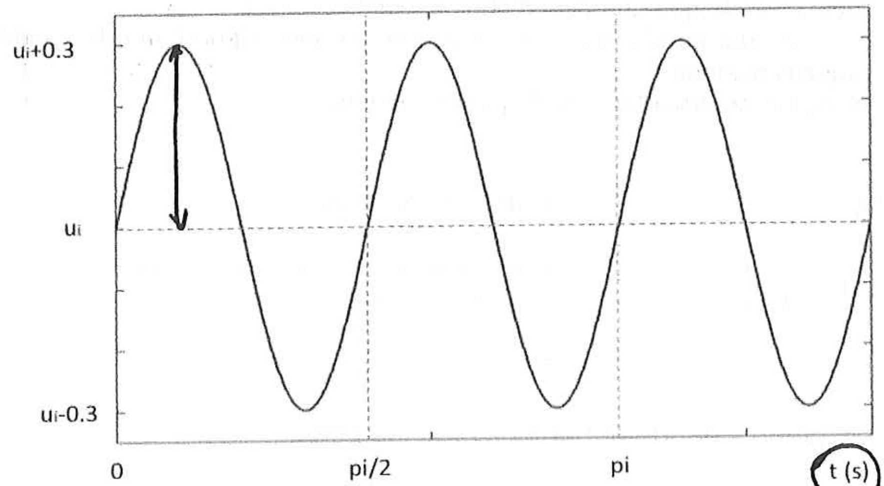
El punto de operación tiene que cumplir la ecuación

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-0{,}85}{1+0{,}25s}$$

$$Y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} Y(s)\cdot s = 0{,}85$$

Solución: **PO=(u_3,y_a)**

4. ¿Qué salida aproximada tendrá el sistema en estado estacionario a la entrada ilustrada en la figura B?. Suponiendo que u_i corresponde a la entrada en el punto de operación identificado en el apartado anterior, calcule analíticamente la expresión de la salida (no es necesario dibujarla).



$T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ rad/s

Figura B

entrada sinusoidal $u(t) = (u_i + 0{,}3)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

$\underline{u_i = 3{,}25}$

$u(t) = 3{,}55\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

$$|G(s)| = \frac{0{,}85}{\sqrt{1^2 + (0{,}25\omega)^2}} = 0{,}79$$

$$\mathrm{Arg}(G(j\omega)) = \frac{\pi}{180^\circ} - \arctan\frac{0{,}25\omega}{1} = 158{,}56$$

$\omega = 4$ rads $\qquad \underline{A = 0{,}3}$

$$|G(j\omega)| = \frac{0{,}85}{\sqrt{1+(0{,}25\cdot 4)^2}} = 0{,}6$$

$$Arg(j\omega) = -\pi - \operatorname{arctan}\frac{4\cdot 0{,}25}{1} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Y_{ss} = \underbrace{0{,}56}_{\text{estacionario}} + 0{,}3\cdot 0{,}6\left(4t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Solución: $y_{ss}(t) = 0.56 + 0.18\sin\left(4t + \frac{3\pi}{4}\right)$

Sean 3 sistemas de los que se conoce su comportamiento dinámico en forma de función de transferencia. Se realimentan todos ellos con realimentación unitaria y se quiere diseñar para cada uno el controlador más simple que consiga ciertas especificaciones de respuesta. Los modelos de cada sistema y las especificaciones que tiene que cumplir cada bucle de control aparecen en las siguientes tablas.

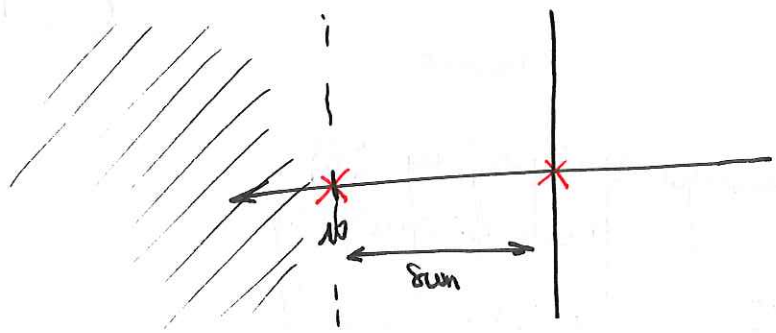
Se pide:

- Dibuje la zona del plano s donde podrían situarse los polos del sistema en bucle cerrado que cumplen dichas especificaciones.
- Razone cuál es el controlador más simple que 'a priori' puede cumplir las especificaciones.
- Diseñe el controlador elegido para cada caso.

5.

PLANTA_1	ESPECIFICACIONES
$G_1(s) = \dfrac{1}{s(s+10)}$	• ess= 0 a entrada escalón unitario • ts (2%) ≤4/10 s

Zona del plano s donde deben ubicarse los polos



$$t_s \le \frac{4}{10} \qquad \frac{4}{\delta\omega} \le \frac{4}{10} \rightarrow 10 \le \delta\omega$$

Razonamiento del controlador necesario

Tengo que emplear un PD para mover mis polos a la izquierda para que se encuentren en la zona de especificaciones

$$\delta\omega_n \geq 10$$

Diseño del controlador

$$G_c(s) = K_c(1+T_d s)$$

$$G_{BC}(s) = \frac{K_c(1+T_d s)}{s^2+10s+K_c+K_cT_d s} = \frac{K_c(1+T_d s)}{s^2+(10+K_cT_d)s+K_c}$$

Si sitúo el polo en $T_d = 0{,}1$ elimino el polo situado en $P=-10$

$$G(s) = \frac{K_c}{s}$$

$$10 + 0{,}1\,K_c = 2\overset{10}{(\delta\omega_n)}\ \underline{\text{mínimo}}$$

$$\boxed{K_c \geq 100}$$

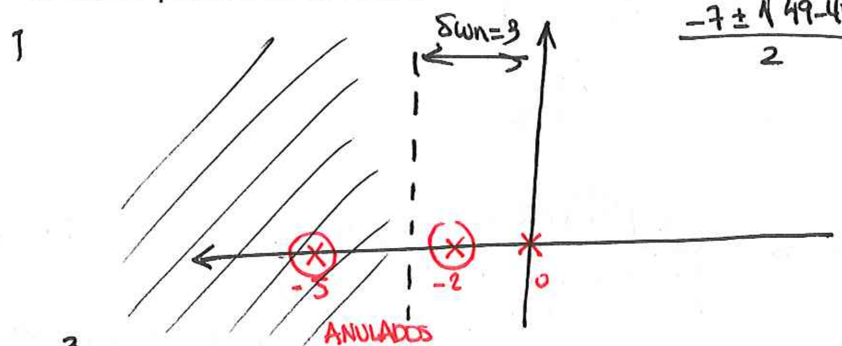
Solución: PD, $\boldsymbol{T_d = 0.1}$, $\boldsymbol{K_c} > 100$

6.

PLANTA_2	ESPECIFICACIONES
$G_2(s) = \dfrac{(s+2)(s+5)}{4s(s^2+7s+10)}$	• ess=0 a entrada escalón unitario • ts (5%) =1 s

Zona del plano s donde deben ubicarse los polos

$$\frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{-7\pm 3}{2} \left\langle \begin{matrix} -5 \\ -2 \end{matrix} \right.$$



$$\frac{3}{\delta\omega_n} \leq 1s \rightarrow \delta\omega_n \geq 3$$

Razonamiento del controlador necesario

Utilizo un P porque no me piden especificaciones de error nulo y al ser un sistema de tipo 1 el error a entrada escalón ya es 0

Diseño del controlador

$$G(s) = \frac{(s+5)(s+2)}{4s\,(s+5)(s+2)} \longrightarrow G_{BC} = \frac{K_c}{4s + K_c}$$

error $\quad t_s(3\%) = 3\tau$

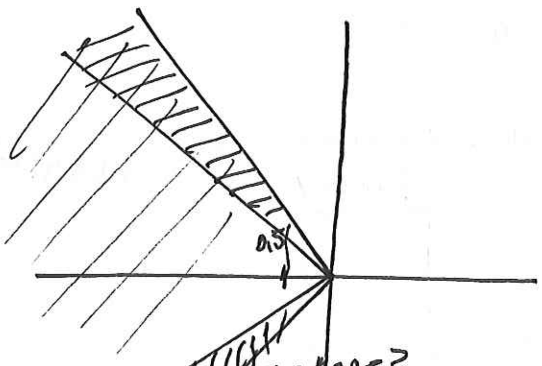
$\tau = \frac{4}{K_c}$ $\qquad \underline{\underline{K_c = 12}}$

Solución: $K_c = 12$

7.

PLANTA_3	ESPECIFICACIONES
$G_3(s) = \frac{40}{(s+1)(s+2)}$	• ess=0 a entrada escalón unitario • 12.25% <Mp< 25% • ts (5%) ≤6 s — SOBREAMORTIGUADO

Zona del plano s donde deben ubicarse los polos



$Mp > 12{,}25\% \Rightarrow \delta^2 > \frac{\ln 0{,}1225^2}{\ln 0{,}1225^2 + \pi^2} \Rightarrow \delta > 0{,}55 \Rightarrow \theta \geq 56{,}24^\circ$

$Mp < 25\% \Rightarrow \delta^2 < \frac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}25^2 + \pi^2} \Rightarrow \delta < 0{,}4 \Rightarrow \theta \leq 66{,}19^\circ$

Sistema sobre amortiguado

polo dominante

$3\tau \leq 6$

$\boxed{\tau \leq 2}$ $\qquad \frac{1}{\tau} = P$

Razonamiento del controlador necesario

Empleo un controlador PI porque me piden que el error a entrada escalón sea nulo y yo tengo un sistema de Tipo 1.

Diseño del controlador

$G_c(s) = \frac{K_c}{T_i} \frac{(1+T_i s)}{s}$ el Ti lo empleo para anular el polo mas dominante = $\boxed{1 = T_i}$

$G_{BA}(s) = \frac{K_c}{s} \frac{40}{(s+2)}$

$G_{BC}(s) = \frac{40K_c}{s^2+2s+40K_c}$ → Sistema puede ser sobreamortiguado ⇒ Calculo límite,

$\frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 40 K_c}}{2}$ ⇒ Cuando se hacen uno

$40 \cdot 4 K_c = 4$

$K_c = 0{,}025$

Pero los límites no están en el eje real ⇒ Subirlo hasta que cumplo especificacion δ.

$\underline{\delta > 0{,}55}$

$2 = 2\delta w_n$

$\frac{1}{0{,}55} = w_n \longrightarrow w_n = 1{,}82 \Rightarrow w_n^2 = 40K_c$

$\boxed{K_{c1} = 0{,}0826}$

Solución: PI: $K_c \in (00.0826, 0.15625)$, $T_i = 1$

$\delta < 0{,}4$

$2 = 2\delta w_n$

$\frac{1}{0{,}4} = w_n \longrightarrow w_n = 2{,}5 \Rightarrow w_n^2 = 40K_c$

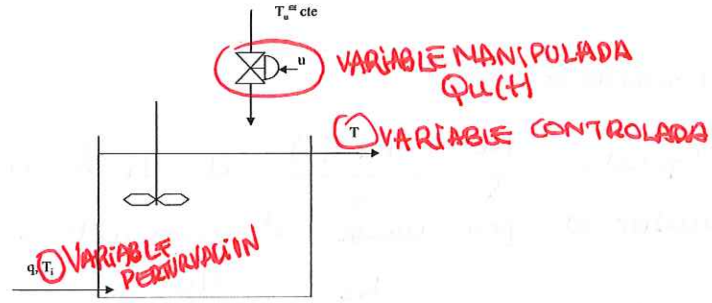
$\boxed{K_{c2} = 0{,}15625}$

$\boxed{0{,}0826 < K_c < 0{,}15624}$

8. Sea el proceso de la figura, en el que se introduce un caudal de líquido *q* a una temperatura *Ti* en un tanque perfectamente agitado. Dicho líquido se mezcla con otro cuyo caudal se manipula mediante una válvula automática que recibe una señal u. Este líquido entra a una temperatura Tu más elevada y se emplea para calentar la mezcla. La mezcla de líquido sale del tanque, por rebose, a una temperatura T.

Se sabe que la temperatura Ti sufre variaciones importantes a lo largo del tiempo. Sin embargo, el caudal q y la temperatura Tu se mantienen sensiblemente constantes.

$T_U > T_i$



En el punto de operación, la temperatura T es de 100 ºC, y la señal a la válvula es del 20%. La relación matemática que existe entre la temperatura del líquido a la entrada (T_i), la temperatura a la salida (T) y la señal a la válvula (u) es conocida y se puede representar por la siguiente expresión:

$$\frac{dT}{dt} = -20\log T + T_i + 0.75u$$

Se pide:

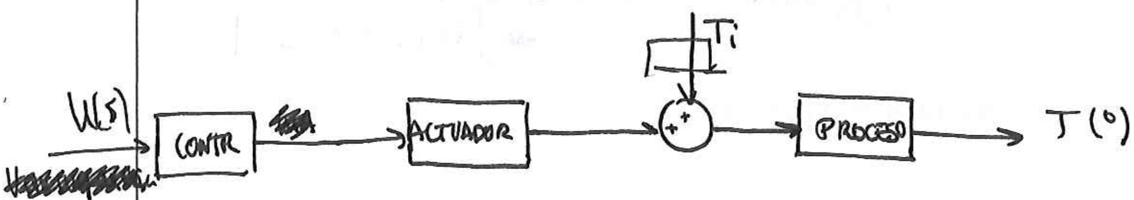
Identifique cuáles son las variables significativas del sistema y dibuje el diagrama de bloques en bucle abierto.

Variables significativos

Perturbación Ti

Variable controlada T

Variable manipulada u



Obtener las funciones de transferencia identificadas.

Nota : $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{\ln 10}\frac{1}{x}$

$0 = -20 \log 100 + T_i + 0{,}75 \cdot 0{,}2$

$T_i = 45{,}9°$ Punto operación

Sistema no lineal $\Rightarrow$ linealizar ~~de~~ el proceso.

$f(\dot{T}, T, T_i, u)$

$\left.\frac{\partial f}{T_i}\right|_{PO} = +1$

$\left.\frac{\partial f}{T}\right|_{PO} = 20 \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{T_0} = 20 \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{100} = 0{,}087$

$\left.\frac{\partial f}{T_i}\right|_{PO} = -1$

$\left.\frac{\partial f}{u}\right|_{PO} = -0{,}75$

$\dot{T} + 0{,}087T - T_i - 0{,}75u$

$\mathcal{L} \downarrow$

$T(s)[s+0{,}087] - T_i(s) - 0{,}75\, U(s) = 0$

Uno constante otro $\underline{\underline{u_0}}$

$F_T \Big|_{T_i(s)=0} = \frac{T(s)}{U(s)} = \frac{0{,}75}{s+0{,}087}$

$F_T \Big|_{U(s)=0} = \frac{T(s)}{T_i} = \frac{1}{s+0{,}087}$

Solución: $G_d(s) = \frac{T(s)}{T_i(s)} = \frac{1}{s+0.086}$, $G_p(s) = \frac{T(s)}{U(s)} = \frac{0.75}{s+0.086}$

9. Dadas las siguientes funciones de transferencia, discuta (sin calcular) qué método utilizaría para analizar su estabilidad:

- $G_1(s) = \frac{1}{s^2+7s+10}$
- $G_2(s) = \frac{2}{s^3+s^2+2s+2}$
- $G_3(s) = \frac{3}{s+2}e^{-5t}$

$G_1(s) = \frac{1}{s^2+7s+10}$ $\Rightarrow$ Calculo las raíces y ambas me dan negativas

$\frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{2}$ $\to -5$, -2

se trata de un sistema estable

$G_2(s) = \frac{2}{s^3+s^2+2s+2}$ $\Rightarrow$ Emplearía el método de R-H

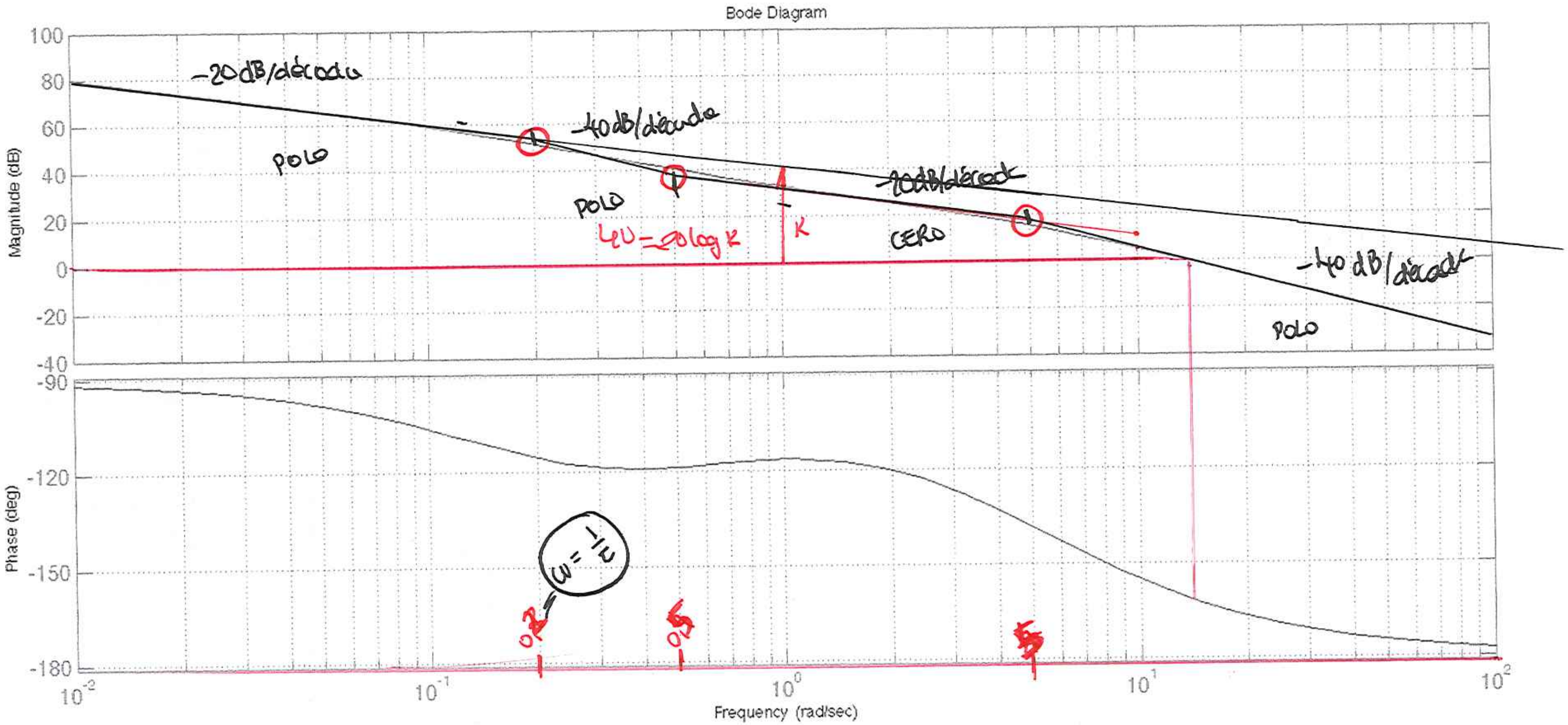
Cumple la condición necesaria existen todos los coeficientes y son estrictamente positivos

Condición suficiente $\Rightarrow$ la primera columna de la tabla de R-H tiene que estar compuesta de términos positivos

Si ambas condiciones se cumplen $\Rightarrow$ ESTABLE.

$G_3(s) = \frac{3}{s+2}e^{-5t}$ $\Rightarrow$ lo calcularía mediante el diagrama de BODE.

10. Se conoce la respuesta en frecuencia de un sistema dinámico representada por el diagrama de Bode de módulo y fase (ver figura).



$(s+0{,}3)\ (s+0{,}7)\ (s+7)$

$0{,}3 = \frac{1}{\tau}$

$\cancel{G(s) = \frac{K\,(s+0{,}7)}{s\,(s+0{,}3)(s+7)}}$

$G(s) = \frac{K\,(s+0{,}5)}{s\,(s+0{,}2)(s+5)} = \frac{K\,(2s+1)}{s\,(5s+1)\,(s0{,}2+1)}$

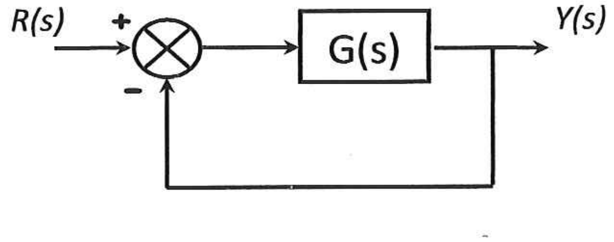
13

Se pide:

Identifique la función de transferencia correspondiente, razonando la respuesta.

Solución: $G(s) = \frac{100(2s+1)}{s(5s+1)(0.2s+1)}$

Suponga ahora que dicha función de transferencia es la G(s) del sistema realimentado de la figura.



¿Qué margen de ganancia y margen de fase tiene este sistema realimentado? ¿qué significado tiene?

$$\left\{ \begin{array}{l} Mg = \infty \\ MF = 20^\circ \end{array} \right.$$

Nunca llega a $\underline{\underline{-180^\circ C}}$

Solución: MF: 20º y $MG = \infty$

¿Qué error presentará el sistema a entradas escalón y rampa?

Error a entrada escalón = 0

Error a entrada Rampa.

$20 \log Kv = 40$

$\log Kv = 20$

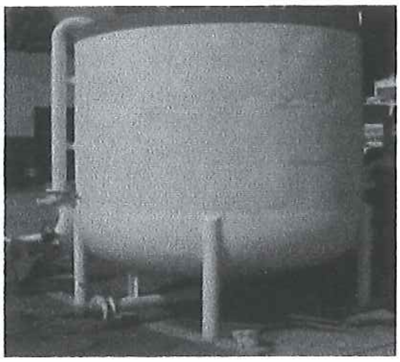
$Kv = 100$

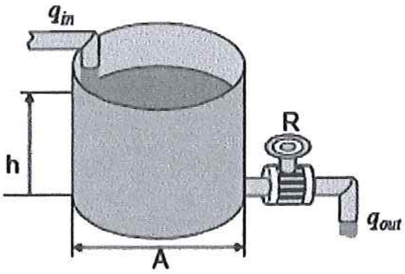
$ess_v = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Solución: $e_{ssp} = 0,\ e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{100} = 0.01$

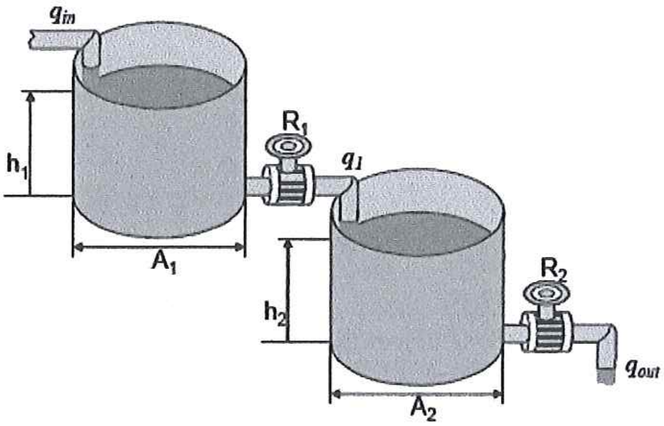
TEMA 3 MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS

1. Para obtener el modelo matemático del proceso de la figura, se utiliza el esquema de la derecha. Suponiendo que el flujo de descarga es laminar, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.





2. En la figura se representan dos depósitos cilíndricos de sección transversal constante situados verticalmente en serie, que descargan por gravedad. Al depósito superior entra un caudal $q_{in}(t)$, éste depósito superior descarga un caudal $q_1(t)$ sobre el inferior y éste a su vez descarga un caudal $q_{out}(t)$ en un depósito colector. El caudal de descarga depende del nivel alcanzado por el líquido en el depósito.



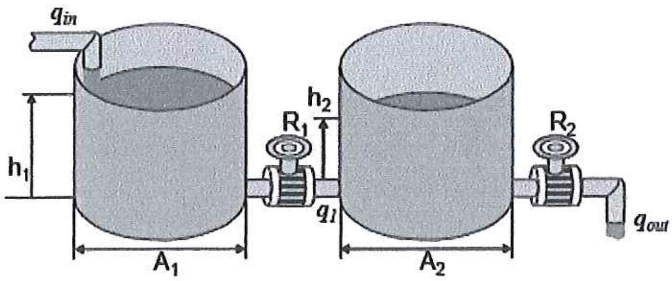
A. Obtener el modelo matemático que represente el comportamiento dinámico del proceso de la figura, suponiendo que el régimen es laminar. Suponiendo que se desea conocer la evolución del nivel del tanque 2 ante variaciones en el caudal de entrada, q_{in}, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.

B. Si el flujo de descarga es turbulento, la relación existente entre el caudal de descarga y el nivel en cada uno de los depósitos es no lineal. Obtener el modelo lineal aproximado en los alrededores de un punto nominal de operación.

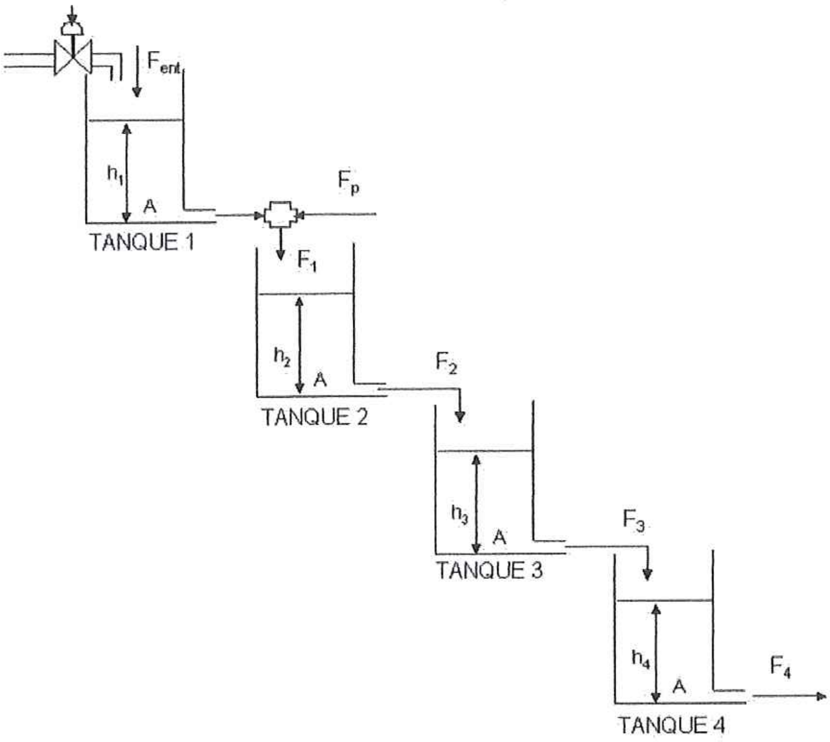
3. Sea el sistema de la figura, constituido por dos tanques conectados en serie.

Se pide:

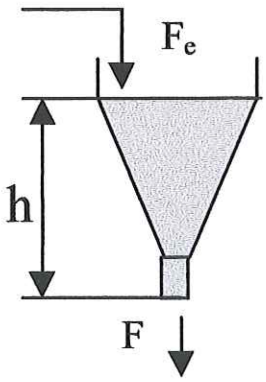
a) Obtener el modelo matemático del comportamiento dinámico del proceso.
b) En este caso las dos capacidades interaccionan. Comparar los resultados con el ejercicio anterior.



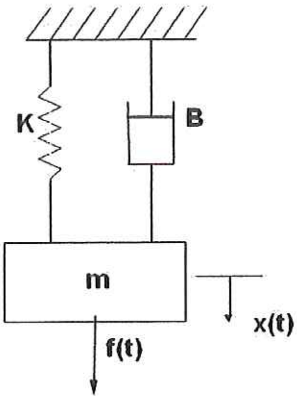
4. Sea el proceso continuo de mezclado de la figura, compuesto por cuatro tanques situados a distinta altura, de tal forma que la salida del primer tanque alimenta al segundo, la del segundo al tercero y la del tercero al cuarto. El segundo tanque recoge además un caudal de líquido, F_P, procedente de otro proceso. Los tanques son idénticos, de área transversal $A=1\ m^2$ y resistencia al flujo K. Las características del orificio de salida hacen que en el punto de operación correspondiente a un caudal nominal de 3 l/s, la altura que alcanza el nivel del líquido en el tanque 4 sea de 1 m. Hallar un modelo linealizado alrededor del punto de operación que relacione el caudal de salida del tanque 4 con respecto a las variables de entrada F_{ent} y F_p. Con objeto de controlar dicho caudal, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.



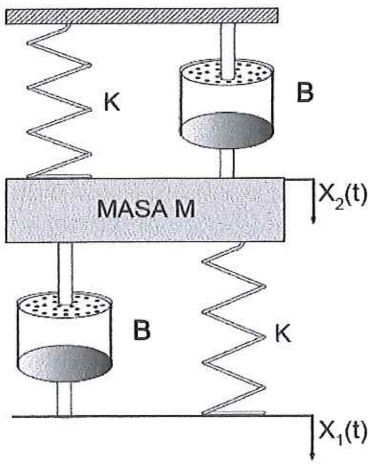
5. Sea el tanque cónico de la figura. Hallar el modelo dinámico linealizado alrededor del punto de operación (Fe_0,F_0,h_0). Nota: Considerar un régimen turbulento donde la relación entre el caudal y la altura es no lineal $F = B \cdot h^{1/2}$. El otro término no lineal lo introduce la geometría cónica $V = K \cdot h^3$. Con objeto de controlar el nivel del tanque, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.



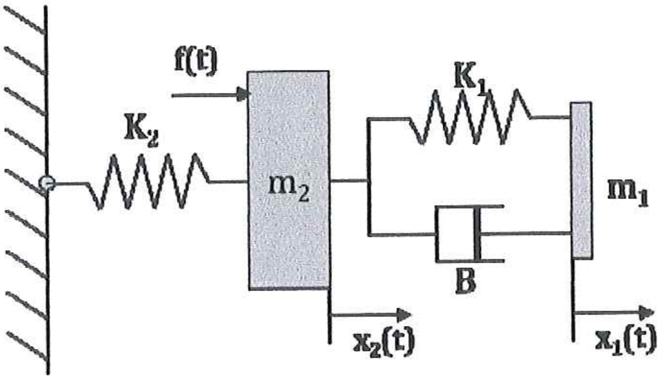
6. El sistema mecánico de la figura está formado por una masa, un muelle y un amortiguador. Hallar el modelo matemático del sistema que relacione el desplazamiento x(t) de la masa m con la fuerza f(t) que se aplica sobre ella.



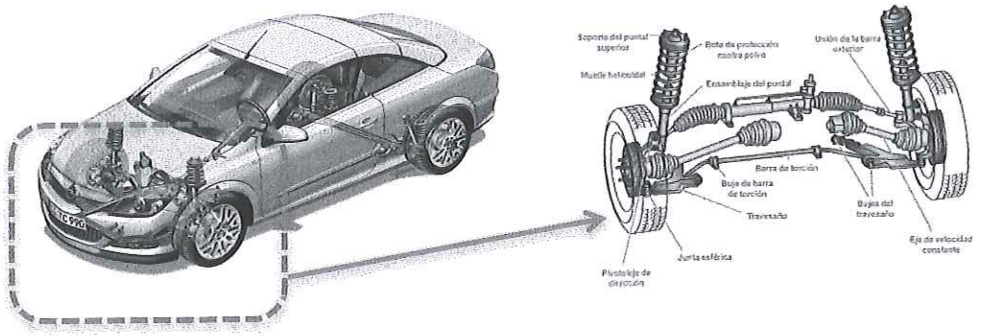
7. Dado el sistema mecánico de la figura, hallar el modelo matemático que relacione el desplazamiento $X_2(t)$ de la masa M con respecto al desplazamiento $X_1(t)$.



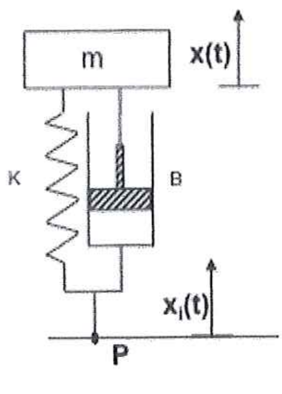
8. El sistema de la figura representa un absorbedor de energía. La masa m_1 es relativamente pequeña y está unida a la masa principal m_2 a través de un muelle de constante k_1 y un amortiguador de constante B, con objeto de reducir vibraciones en el desplazamiento x(t) de la masa m por acción de la fuerza f(t). Hallar el modelo matemático que relaciona el desplazamiento x(t) de la masa m_2 con la fuerza externa f(t) aplicada.



9. Sea el sistema de suspensión de un automóvil. Para obtener su modelo matemático se realiza las siguientes hipótesis:



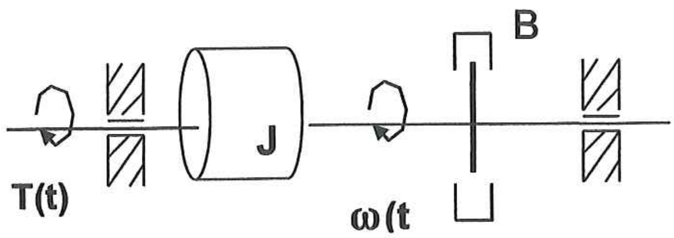
- Considerar únicamente la suspensión lineal en el eje vertical del vehículo.
- Suponer que el sistema de suspensión se reparte por igual entre las cuatro ruedas del vehículo, con lo que el problema se reduce a calcular el sistema de suspensión en una rueda.



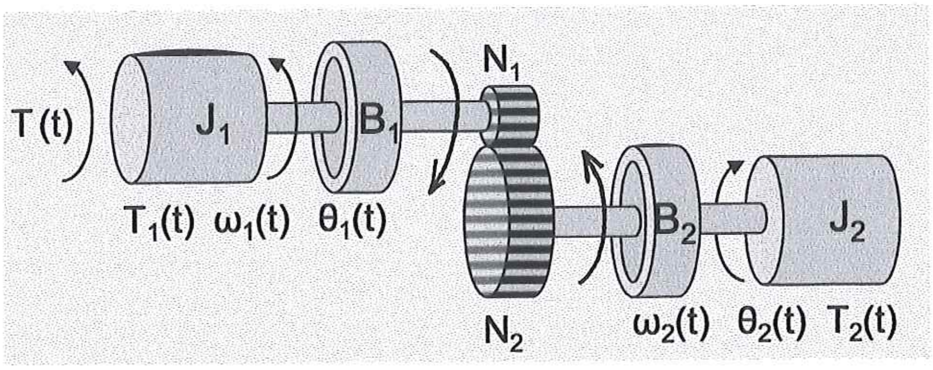
Se pide:

a) Identificar las variables significativas de dicho sistema.
b) Obtener el modelo matemático del sistema de suspensión simplificado.

10. Sea el sistema de la figura, consistente en una carga inercial y un amortiguador de fricción viscosa. Obtener el modelo matemático que relaciona la velocidad angular $\omega(t)$ con el par aplicado T(t).



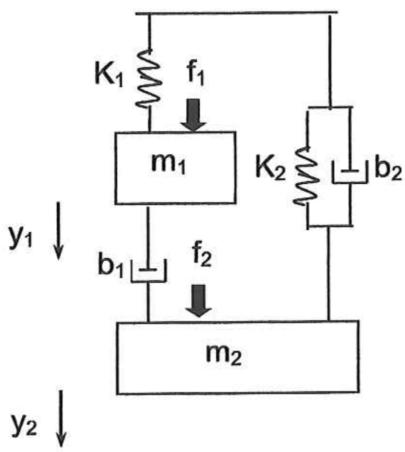
11. Dado el sistema motor-engranaje-carga de la figura, obtener el modelo matemático que relaciona el ángulo de giro del eje de carga $\theta_2(t)$ con el par aplicado T(t).



Nota: Considerar que en un engranaje ideal se cumple:

- La relación entre el radio y el número de dientes es: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2}$
- Los desplazamientos lineales de las ruedas son iguales: $\theta_1\, r_1 = \theta_2\, r_2$
- No hay pérdida de energía en el engranaje : $\theta_1\, T_1 = \theta_2\, T_2$
- Luego se puede escribir: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{T_1}{T_2}$

12. Sea el sistema mecánico de la figura, donde:
- $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son los desplazamientos desde la posición de equilibrio de ambas masas ($y_1(t) > y_2(t)$)
- $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos fuerzas externas, y las condiciones iniciales se consideran nulas.

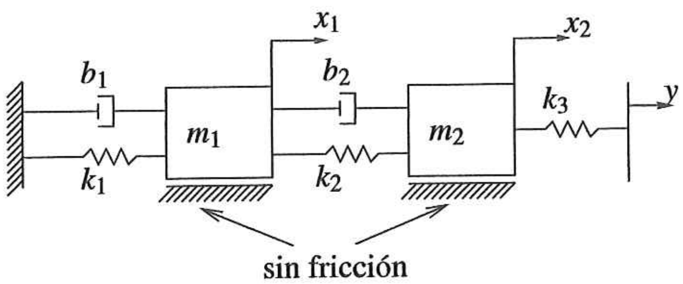


Calcular:

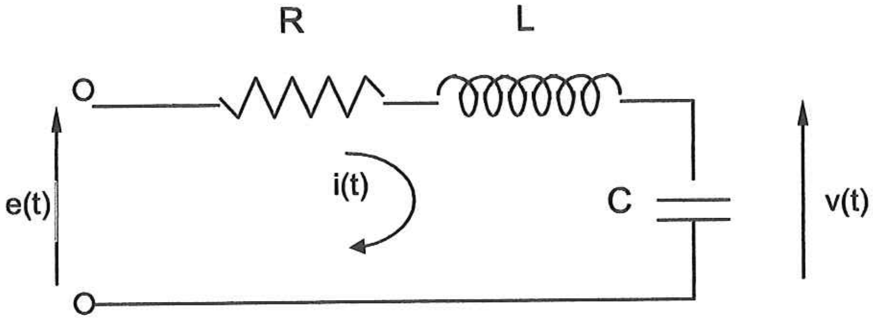
a) Ecuaciones diferenciales que constituyen su modelo matemático.

b) Construir el diagrama de boques siendo $\mathbf{f_1}$ y $\mathbf{f_2}$ las entradas del sistema e $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$ las salidas de este.

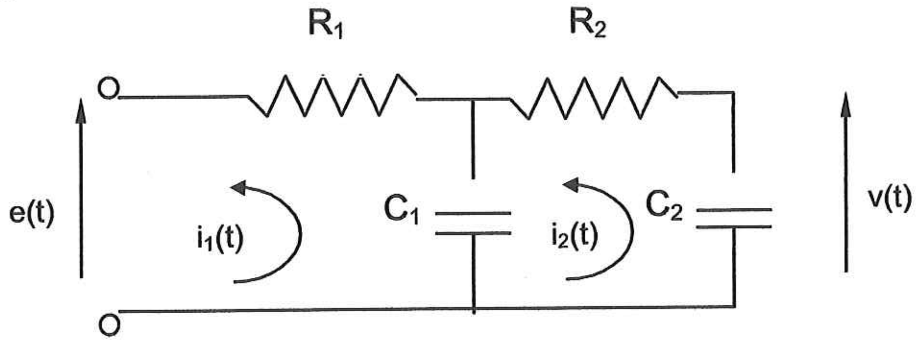
13. Escribir las ecuaciones diferenciales para el sistema mecánico de la figura. Obtener el modelo matemático que relacionen los desplazamientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ con la entrada $y(t)$.



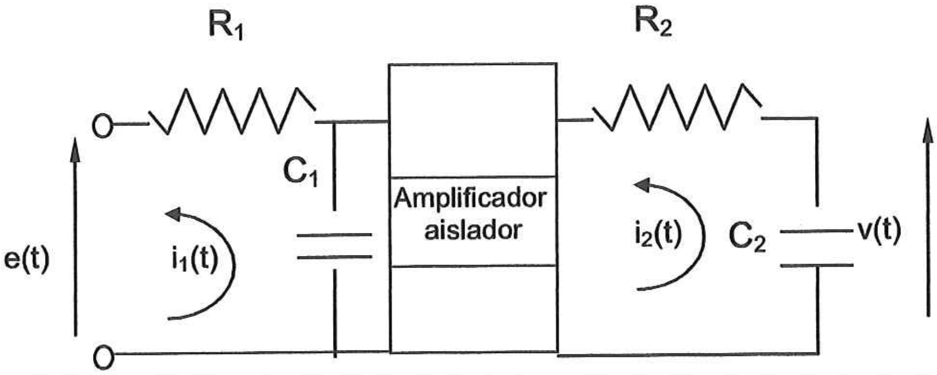
14. Sea el circuito de la figura, formado por una resistencia, una bobina y un condensador. Obtener el modelo matemático que representa la relación entre la intensidad que circula por la malla i(t) y la tensión de alimentación del circuito e(t).



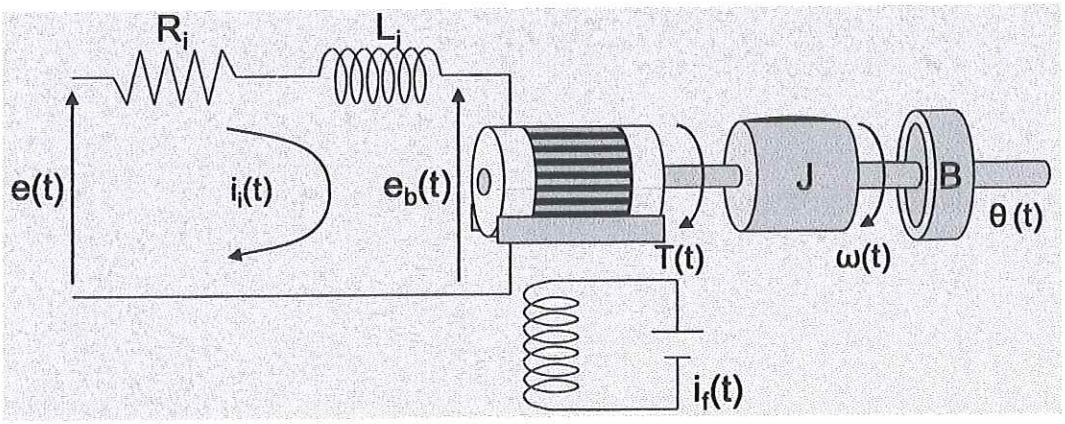
15. Sea el circuito de la figura. Obtener el modelo matemático que representa la relación entre las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$ y la tensión de alimentación del circuito e(t).



16. Sea el circuito de la figura. Cuando la impedancia de entrada del segundo elemento es infinita, la salida del primer elemento no resulta afectada por la conexión al segundo elemento. Obtener el modelo matemático que representa la relación entre las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$ y la tensión de alimentación del circuito e(t).



17. Dado el motor de corriente continua de la figura, obtener el modelo matemático que relaciona la posición del eje del motor con respecto a la tensión de alimentación e(t). Si el objetivo es que el motor gire a una determinada velocidad, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.



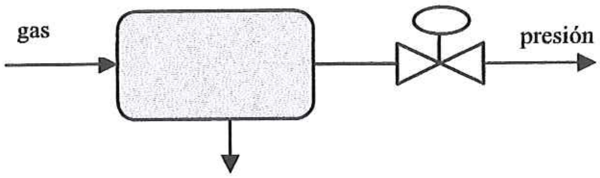
18. Encontrar una aproximación lineal de las siguientes funciones en términos de las variables de desviación:

a) $f(x,y) = y^2 x + 2x + \ln y$

b) $f(x,y) = \dfrac{3\sqrt{x}}{y} + 2\,\mathrm{sen}\,xy$

c) $f(x,y) = y^x$

19. Sea el sistema de almacenamiento de un cierto gas, cuya presión se puede regular manipulando la línea de salida, tal y como ilustra refleja la figura:

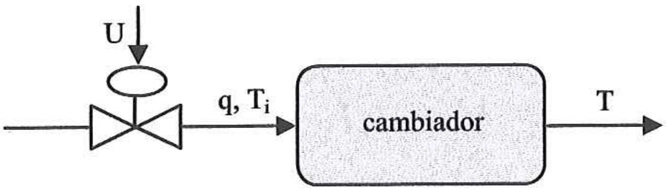


El punto de operación del sistema corresponde a una presión de 3 bar en el depósito de almacenamiento, cuando la señal a la válvula es del 30 %. La presión en el interior del tanque es muy sensible a cambios en la temperatura del producto de entrada. Se sabe que la relación entre la temperatura (en °C) del gas que llega al dispositivo de almacenamiento y la presión en bar en el mismo, viene dada por:

$$1800\frac{dp}{dt} = (-3p^2 + 30)T(t-0.4) - 30$$

Hallar un modelo linealizado que relacione la presión con la temperatura alrededor del punto de operación.

20. El sistema de la figura representa un intercambiador de calor. Este contiene un sistema de calefacción interno no manipulable que calienta un caudal de agua q desde una temperatura Ti a una temperatura T.



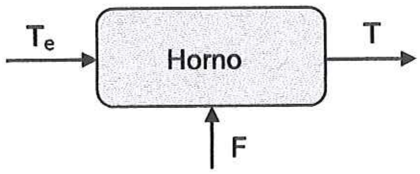
La relación de la temperatura de salida T (en °C) con la señal de entrada a la válvula U (en % de apertura) y con la temperatura del líquido de entrada Ti (en °C) viene dada por la siguiente expresión:

$$3\frac{dT}{dt} = -6T + 8{,}8U^2 + 2T_i \qquad \text{(tiempo en minutos)}$$

En el punto nominal de operación, la temperatura de entrada es de 10°C y la temperatura de salida es de 40°C.

Obtener, para el punto de operación dado, un modelo lineal que relacione la temperatura de salida con la apertura de válvula y con la temperatura de la corriente de entrada.
Identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.

21. Sea un horno de calentamiento de un material que entra a temperatura Te y sale a temperatura T. Para que el material alcance la temperatura final deseada se manipula el caudal F de fluido calefactor. El sistema debe diseñarse para trabajar en un punto de operación en que el material entra a 10 °C y sale a 40 °C, aunque se debe tener en cuenta que la temperatura de entrada de material puede variar de forma significativa y puede medirse.



Por otro lado se sabe que la relación entre la temperatura de entrada del material Te (ºC), la temperatura de salida del material T (ºC,) y el caudal de combustible F (kg/min) viene dada por la expresión:

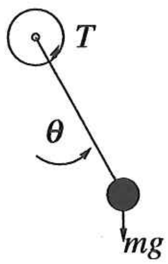
$$(5+3F)\frac{dT}{dt}+2T^2=3FT+T_e$$

Se pide:

a) Identificar las variables significativas.
b) Obtener un modelo linealizado del proceso para el punto de operación dado.

22. La ecuación que describe la dinámica del péndulo de la figura viene dada por:

$$ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta-kl\dot{\theta}+\frac{T}{l}$$

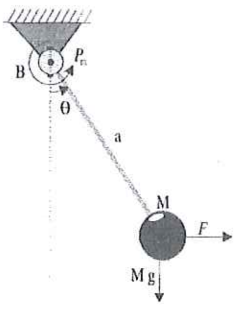


donde m es la masa de la bola, l es la longitud del brazo, θ es el ángulo entre la vertical y el brazo, g es la aceleración de la gravedad, k es coeficiente de fricción y T es una entrada. Calcular el sistema linealizado alrededor de un punto de operación.

23. La siguiente figura representa un péndulo, cuya varilla tiene una masa despreciable y longitud 1m. En su extremo sujeta una bola de masa 100 gr, sometida a la acción de la gravedad (g=10 m/s^2) y a la fuerza puntual F(t) en dirección horizontal. Además se aplica un par motor $P_m(t)$, al que se oponen la inercia del conjunto péndulo-bola (J=1 N·m·s^2/rad) y el rozamiento en el eje de giro (B=2 N·m·s/rad).

Se pide:

a) Obtener el modelo matemático de este péndulo (es decir, la relación entre θ(t), $P_m(t)$ y F(t)).
b) Obtener el valor del par motor para que el sistema encuentre en equilibrio cuando $\bar{\theta}=30^{\circ}$ y $\bar{F}=0\ N$.
c) Linealizar el modelo matemático del sistema que relacione la salida Θ(t) para una entrada $P_m(t)$ conocida, alrededor de dicho punto de operación.



se

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES TEMA 3

01.Solución: Supuesto que se quiera controlar la altura h(t) (variable controlada), q_{out} sería la variable manipulada, y q_{in} variable de perturbación.

$$\frac{H(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{R}{1 + ARs}$$

03.Solución:

a)

$$\frac{Q_{out}(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{1}{1 + A_1R_1s} \cdot \frac{1}{1 + A_2R_2s}$$

b)

$$\frac{Q_{out}(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{1}{A_1A_2R_1R_2s^2 + (A_1A_2R_1R_2 + A_1R_2)s}$$

05.Solución: La variable controlada es la altura h(t) que alcanza el nivel de líquido en el tanque, la variable manipulada es el flujo de salida F(t), y $F_e(t)$ es una variable de perturbación.

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta F_e(s)} = \frac{1}{s3Kh_{eq}^2 + \frac{B}{2\sqrt{h_{eq}}}}$$

07.Solución:

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + 2Bs + 2K}$$

09.Solución: La variable que se desea controlar es x(t), mientras que $x_i(t)$ es una variable de perturbación. No obstante, a no ser que se tuviera acceso a manipular los coeficientes B ó K del amortiguador (control activo), no sería posible el control.

$$\frac{X_2(s)}{X_i(s)} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K}$$

11.Solución: llamando $n=N_1/N_2$:

$$\frac{\vartheta_2(s)}{T(s)} = \frac{n}{s[J_1 + n^2J_2 + B_1 + n^2B_2]}$$

TEMA 4 DESCRIPCIÓN EXTERNA DE SISTEMAS DINÁMICOS

1. Resolver, mediante la aplicación de la Transformada de Laplace, la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 6x = 6$$

siendo las condiciones iniciales:

$$x(0) = 0; \dot{x}(0) = 3$$

Resultado:

$$X(s) = \frac{9}{s^2 + 3\,s + 6} \rightarrow x(t) = 4{,}635e^{-1{,}5t} sen 1{,}937t$$

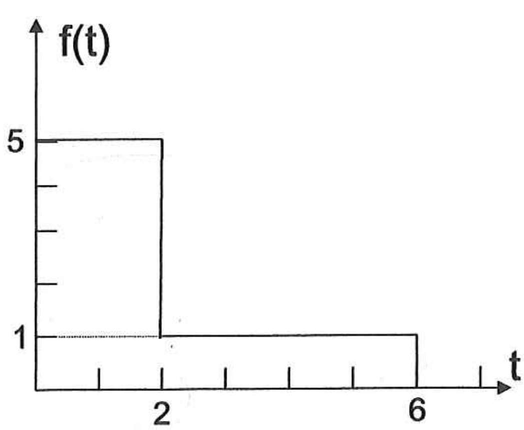
2. Resolver mediante la aplicación de la Transformada de Laplace las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

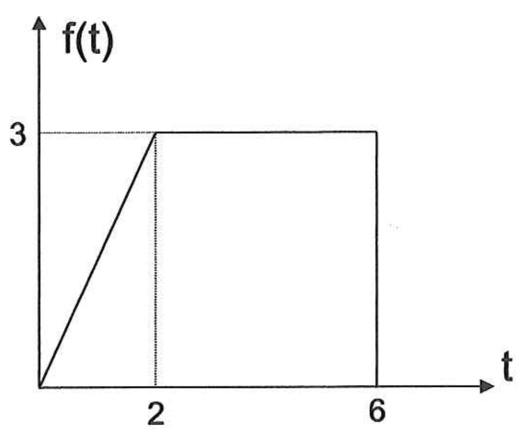
a) $\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t) + 8\,x(t) = 0 \quad ; \quad x(0) = 1\ ;\ x'(t) = 3$

b) $\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t) + 2\,x(t) = 0 \quad ; \quad x(0) = 3\ ;\ x'(t) = 0$

c) $\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) + 5\,x(t) = 3 \quad ; \quad x(0) = 0\ ;\ x'(t) = 0$

3. Encontrar la expresión de la transformada de Laplace de las siguientes funciones temporales:



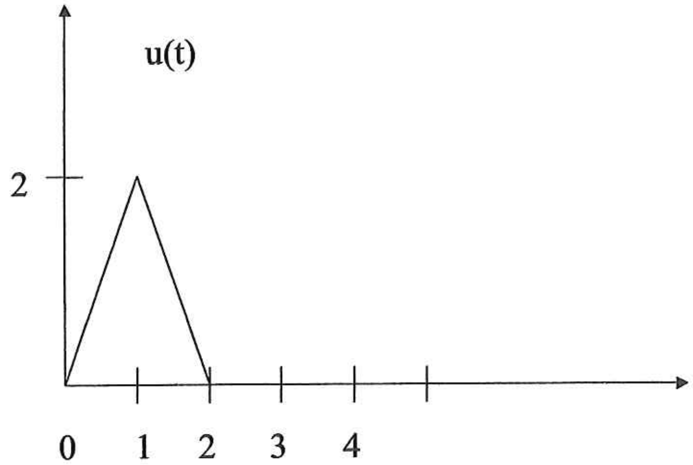


Resultado:

a) $F(s)=\frac{5}{s}-\frac{4}{s}e^{-2s}-\frac{1}{s}e^{-6s}$

b) $F(s)=\frac{1{,}5}{s^2}-\frac{1{,}5}{s^2}e^{-2s}-\frac{3}{s}e^{-6s}$

4. Calcular la evolución de la salida en un sistema representado por la ecuación diferencial: $\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2u(t)$ a la entrada u(t) dada por la siguiente gráfica:



Resultado:

$U(s)=\frac{0{,}5}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}$; $y(t)=\frac{1}{9}(3t-1+e^{-3t})-\frac{2}{9}\delta(t-1)\left[3(t-1)-1+e^{-3(t-1)}\right]$

5. Hallar x(t) si su transformada de Laplace toma las siguientes expresiones:

a) $X(s)=\frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)}$

b) $X(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}$

c) $X(s)=\frac{2}{s(s^2+\omega^2)}$

6. Hallar la Transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $F(s)=\frac{2\,s^4+43\,s^3+67\,s^2-32\,s+160}{s^3+22\,s^2+40\,s}$

b) $F(s)=\dfrac{1}{s\left(s^2+2\,s+2\right)}$

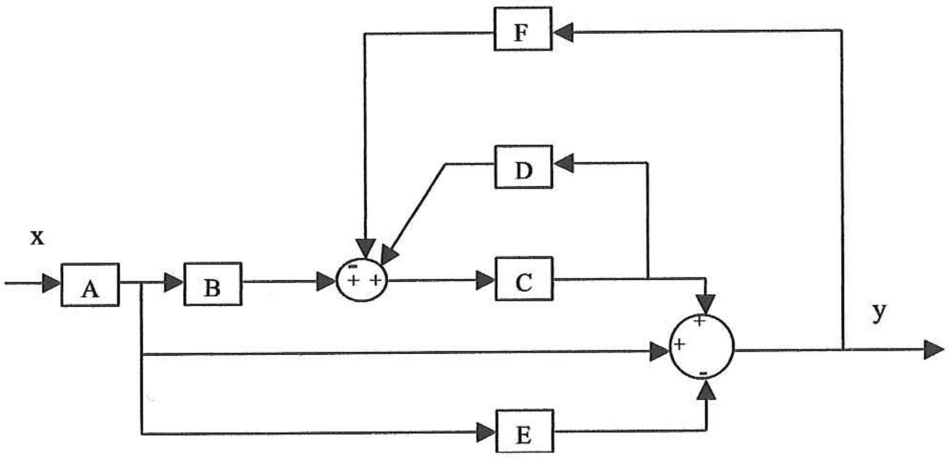
c) $F(s)=\dfrac{5\left(s+2\right)}{s^2\left(s+1\right)\left(s+3\right)}$

d) $F(s)=\dfrac{\left(s+3\right)}{\left(s+1\right)\left(s+2\right)}$

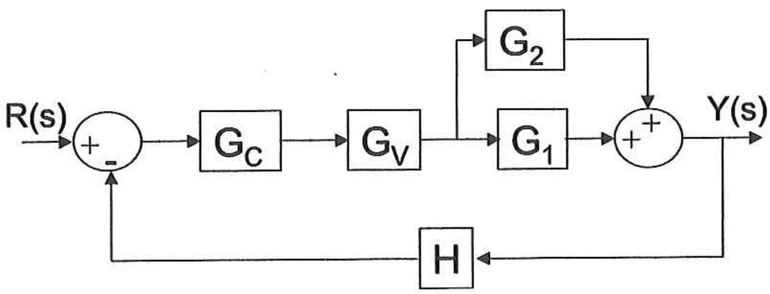
e) $F(s)=\dfrac{s^3+5\,s^2+9\,s+7}{\left(s+1\right)\left(s+2\right)}$

f) $F(s)=\dfrac{2\,s+12}{s^2+2\,s+5}$

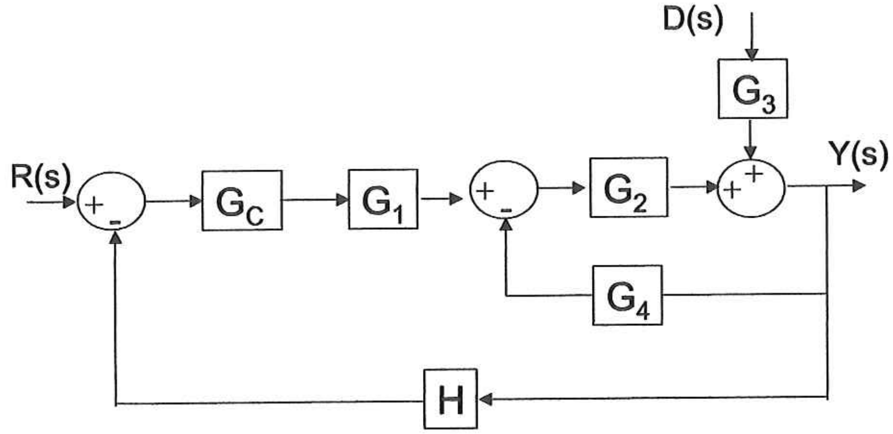
7. Encontrar la función de transferencia de la entrada X(s) a las salida Y(s) en el diagrama de bloques de la figura:



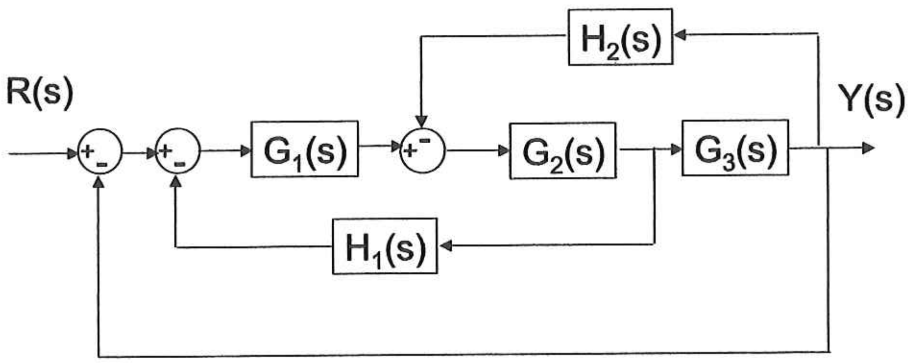
8. Encontrar la función de transferencia entre R(s) e Y(s) en el diagrama de bloques de la figura:



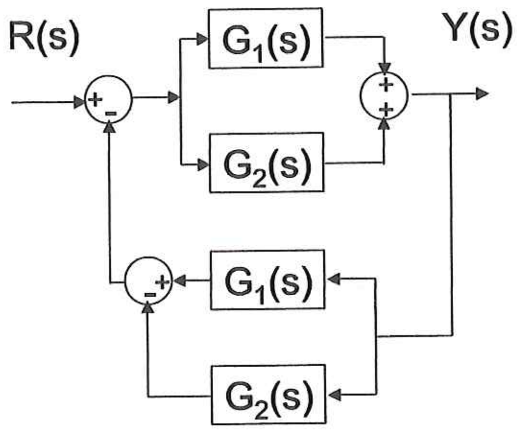
9. Encontrar la función de transferencia Y(s)/R(s) en el diagrama de bloques de la figura:



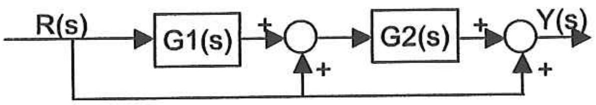
10. Encontrar la función de transferencia Y(s)/R(s) en el diagrama de bloques de la figura:



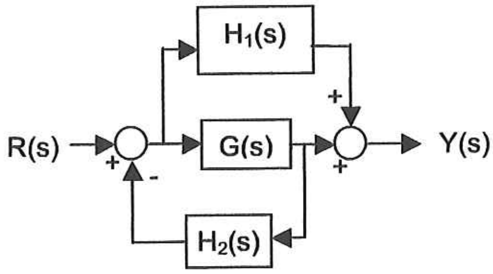
11. Simplificar el diagrama de bloques de la figura y encontrar la función de transferencia entre R(s) e Y(s):



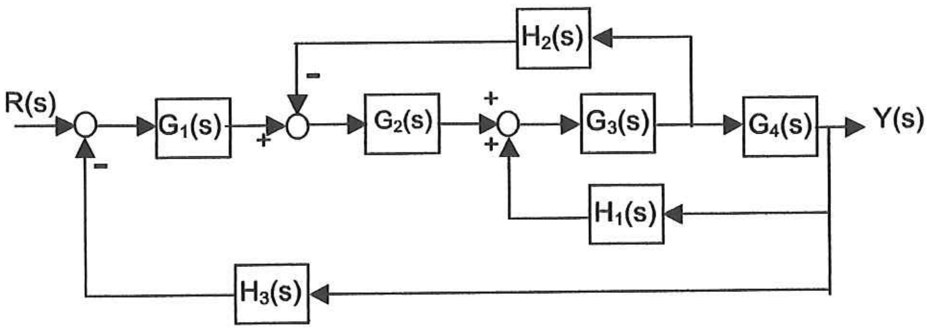
12. Simplificar el siguiente diagrama de bloques.



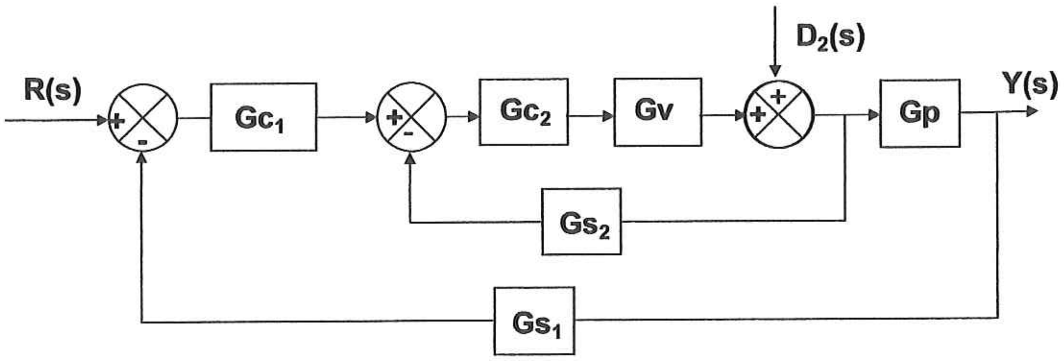
13. Simplificar el siguiente diagrama de bloques.



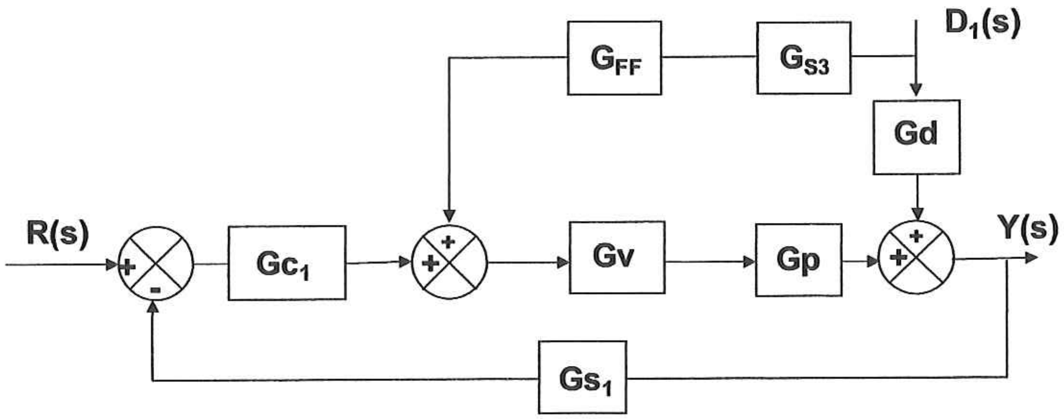
14. Reducir el siguiente diagrama de bloques a un solo bloque Y(s)/R(s).



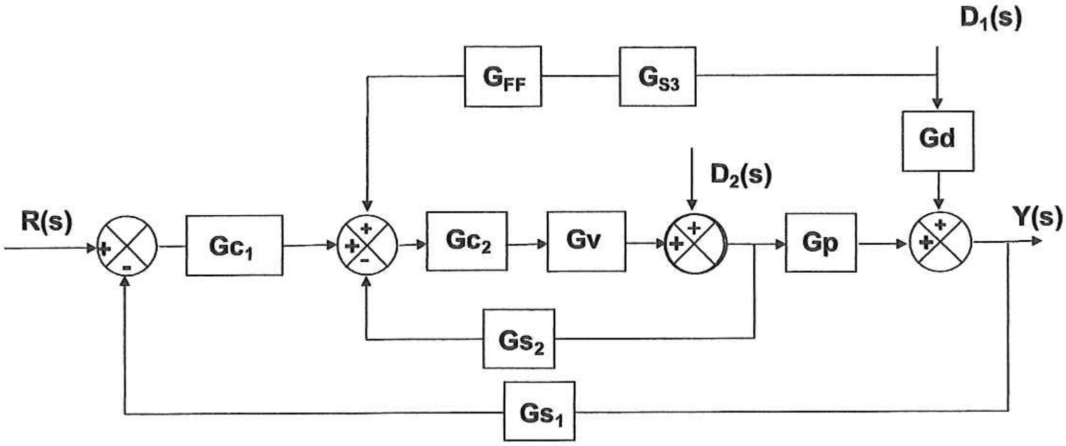
15. Reducir el siguiente diagrama de bloques calculando las funciones de transferencia necesarias para Y(s):



16. Reducir el siguiente diagrama de bloques calculando las funciones de transferencia necesarias para Y(s):

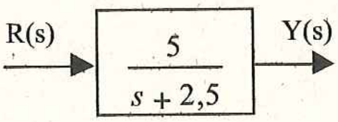


17. Reducir el siguiente diagrama de bloques calculando las funciones de transferencia necesarias para Y(s):



TEMA 5 ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

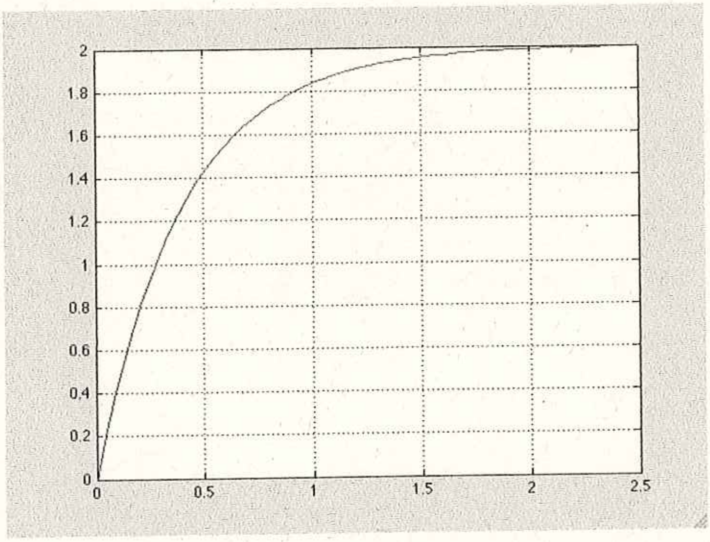
1. Dibujar la respuesta escalón unitario del sistema de la figura calculando los valores más significativos de ambas.



Solución:

$$G(s)=\frac{5}{s+2{,}5}=\frac{2}{0{,}4s+1}\begin{cases}K=2\\ \tau=0{,}4\end{cases}$$

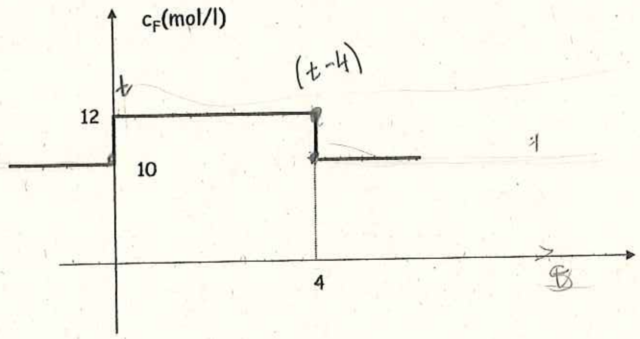
$$y(t)=2\left(1-e^{-2{,}5t}\right)$$



2. El comportamiento dinámico de un reactor tipo tanque agitado puede ser representado por la función de transferencia:

$$G(s)=\frac{C'(s)}{C_F'(s)}=\frac{0{,}3}{4s+1}$$

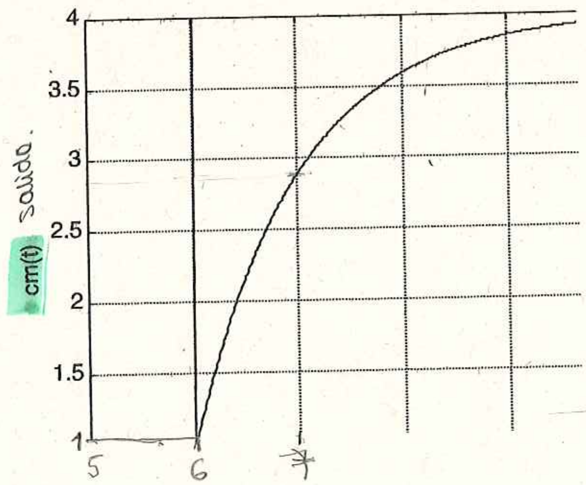
donde C'(s) representa la concentración de salida (mol/l) y C_F' la de alimentación (mol/l). Obtener c'(t) para una entrada en C_F como la representada en la figura.



Solución:

$$c(t) = 0{,}6\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right) - 0{,}6\left(1 - e^{-\frac{(t-4)}{4}}\right)$$

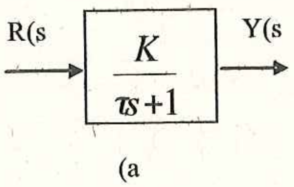
3. La concentración cáustica de una corriente de proceso se mide mediante una célula de conductividad. Para determinar las características del proceso se provoca en t=6 un cambio escalón de valor 3 Kg/m^3 en la concentración cáustica que pasa a través de la célula, c(t). La concentración medida $c_m(t)$ es la representada en la figura. Determinar la función de transferencia entre c_m y c.

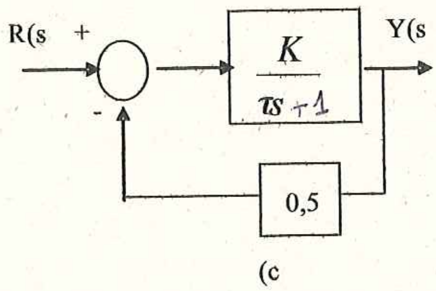


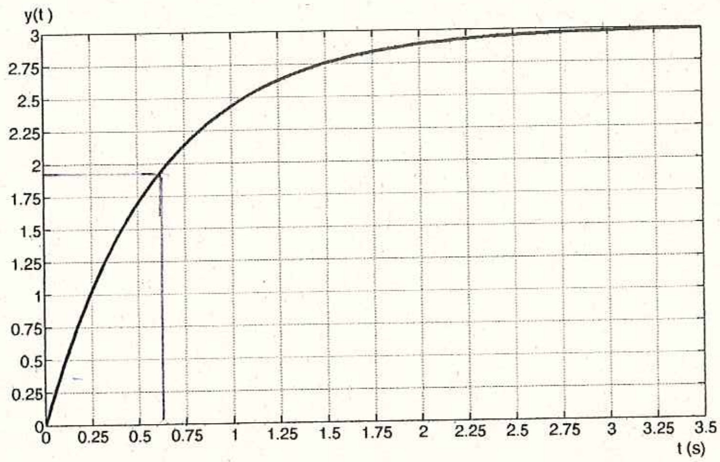
Solución:

$$G(s) = \frac{C_m(s)}{C(s)} = \frac{1}{1{,}1s + 1}$$

4. El sistema de primer orden de la figura a) tiene como respuesta a entrada escalón unitario la gráfica de la figura b). Obtener a partir de dicha respuesta los parámetros del sistema. Se realimenta el sistema tal y como se indica en la figura c). Calcular analíticamente los parámetros que definen la respuesta escalón unitario del sistema en bucle cerrado y dibujar la forma de respuesta.







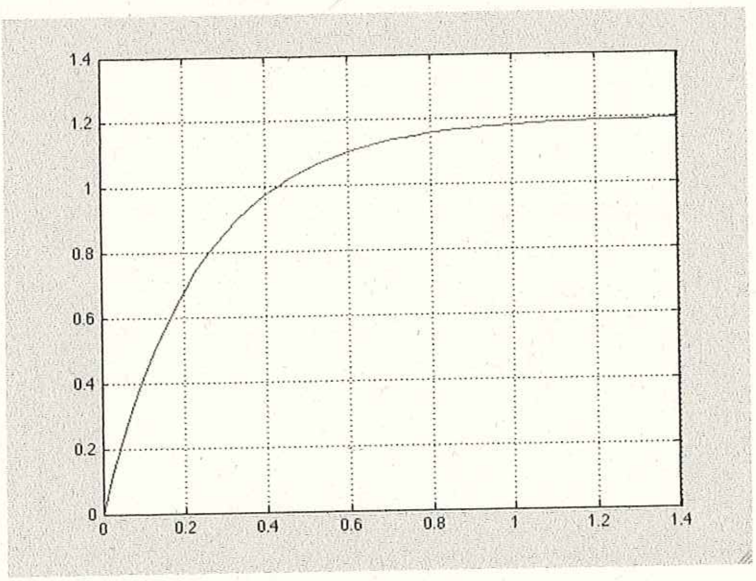
Solución:

De la gráfica (sistema de 1º orden) se obtienen los parámetros:

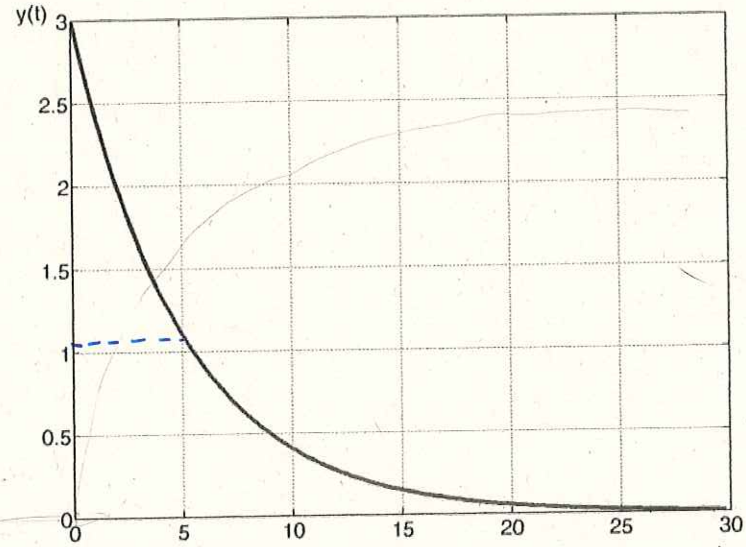
$$\begin{cases} K = 3 \\ \tau = 0,6s \end{cases}$$

La respuesta temporal del sistema realimentado es:

$$y(t) = 1,2\left(1 - e^{-\frac{t}{0,24}}\right)$$



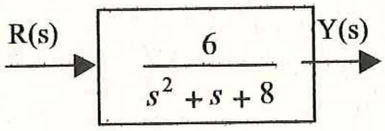
5. La respuesta de la figura corresponde a un sistema de primer orden cuando se le excita con un escalón de amplitud 2. Encontrar la función de transferencia de dicho sistema.



Solución:

$$G(s)=\frac{-1,5s}{5s+1}$$

6. Dibujar la respuesta escalón unitario del sistema de la figura calculando los valores más significativos de ambas.



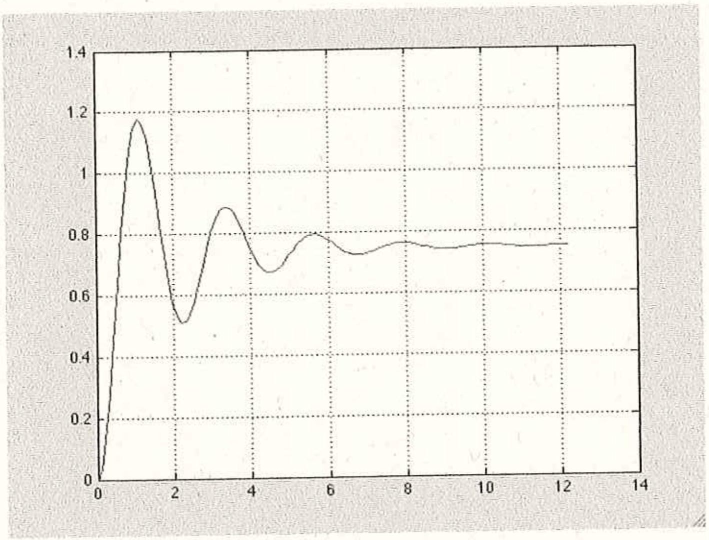
Solución:

De la función de transferencia (sistema de 2º orden) se obtienen los parámetros:

$$\begin{cases} K=0,75 \\ \delta=0,17 \\ w_n=2,83 rad/s \end{cases}$$

$y(t)$ *está caracterizada por los valores significativos:*

$$\begin{cases} y_{ss}=0,75 \\ y(t_p)=1,17 \\ t_p=1,13s \\ M_p=0,57 \rightarrow (57\%) \\ t_s \approx 6s \end{cases}$$



7. Dibujar la respuesta escalón unitario de los siguientes sistemas:

$a)\quad G_1(s) = \dfrac{-s}{s+2}$ $\qquad b)\quad G_2(s) = \dfrac{s-2}{s+4}$

$c)\quad G_3(s) = \dfrac{1{,}25}{s^2+s+2{,}5}$ $\qquad d)\quad G_4(s) = \dfrac{1}{s^2+2s-1}$

Solución:

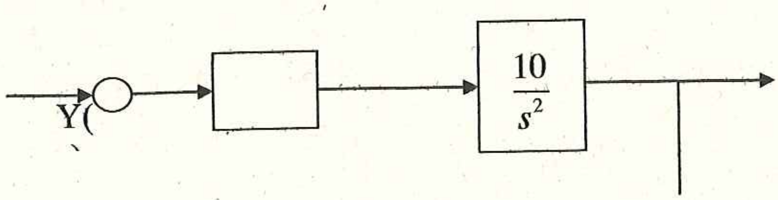
a) $y_1(t) = -e^{-2t}$

b) $y_2(t) = 0{,}5 + 1{,}5e^{-4t}$

c) $y_3(t) = 0{,}5\left[1 - e^{-0{,}5t}\cos 1{,}5t - \dfrac{1}{3}e^{-0{,}5t}sen1{,}5t\right]$

d) $y_4(t) = -1 + 0{,}146 \cdot e^{-2{,}41t} + 0{,}853 \cdot e^{0{,}41t}$

8. Calcular analíticamente los valores significativos y dibujar la respuesta del sistema de la figura a escalón unitario.



$$-0,138 \cdot 1,12\, e^{-1,12t} + 1,14 \cdot 8,87 \cdot e^{-8,87t} = 0.$$

$$0,138 \cdot 1,12 \cdot e^{-1,12t} = 1,14 \cdot 8,87 \cdot e^{-8,87t}$$

Solución:

$$y(t) = 1 + 0,138 \cdot e^{-1,12t} - 1,14 \cdot e^{-8,87t}$$

$1 + 0,138 - 1,14 \cdot e^{-8,7t}$

$$-4,18 \quad -1,12t = -8,87t$$

$$-4,18 =$$

$t_p = 0,539$

Valores significativos :

$$\begin{cases} y_{ss} = 1 \\ y(t_p) = 1,017 \\ t_p = 0,55s \\ M_p = 0,017 \rightarrow (1,7\%) \end{cases}$$

9. La figura 2a representa la respuesta del sistema de la figura 2b a entrada escalón unitario. Determinar los valores de K y τ a partir de la curva de respuesta.

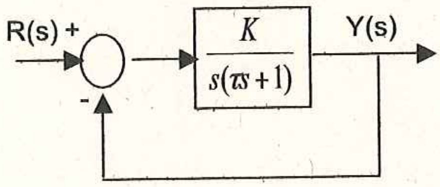


Figura 2a

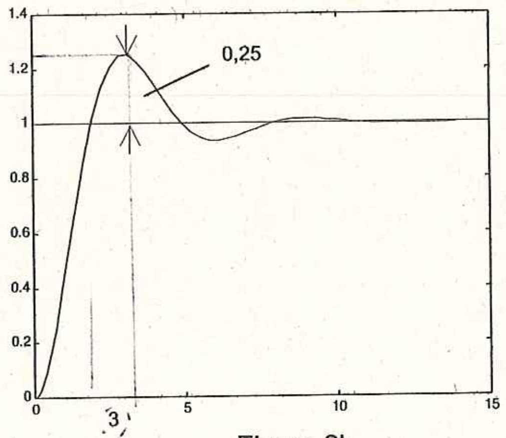
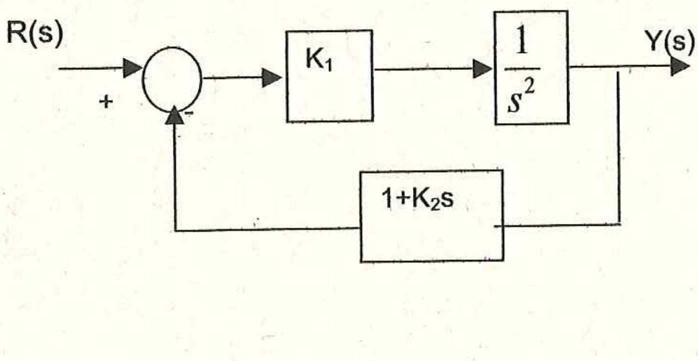


Figura 2b

Solución:

$$\begin{cases} K = 1,425 \\ \tau = 1,09s \end{cases}$$

10. Determinar los valores de las constantes K_1 y K_2 del sistema de la figura de forma que el sobre-impulso máximo en la respuesta a escalón unitario sea del 25% y el tiempo de pico 2 segundos.



Solución:

$K_1=2,92$
$K_2=0,46$

11. Para la ecuación:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+K\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=x(t)$$

a) Encontrar la función de transferencia y ponerla en la forma $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{as^2+bs+1}$.
b) Analizar cómo será la respuesta del sistema (independientemente de la entrada de excitación) para valores de K comprendidos en el rango $-10\leq K\leq 10$.

12. El comportamiento dinámico de un proceso físico puede ser representado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{18}{s^2+3s+9}$$

a) Ante un cambio escalón de amplitud 3 en x(t), ¿cuál será el nuevo valor en estado estacionario de la salida y(t)?
b) Por razones físicas, se requiere que $y(t)\leq 10$. ¿Cuál es el mayor cambio escalón en x(t) que el proceso puede tolerar sin exceder sus límites?

13. El balance de momento-fuerza en un manómetro de mercurio da lugar a la siguiente ecuación:

$$4\frac{d^2x(t)}{dt^2}+0,8\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=p(t)$$

donde x(t) es el desplazamiento de la columna de mercurio respecto a su posición de equilibrio y p(t) es la presión variante en el tiempo que actúa sobre el manómetro.

a) encontrar la función de transferencia, suponiendo que el sistema parte de su punto de equilibrio
b) ¿qué se puede decir de la respuesta temporal del sistema?. Y de su amortiguamiento?
c) Calcular la respuesta del manómetro a un cambio en la presión, $p(t)=2e^{-4t}$

14. Se ha encontrado la siguiente expresión para la respuesta temporal de un sistema de segundo orden:

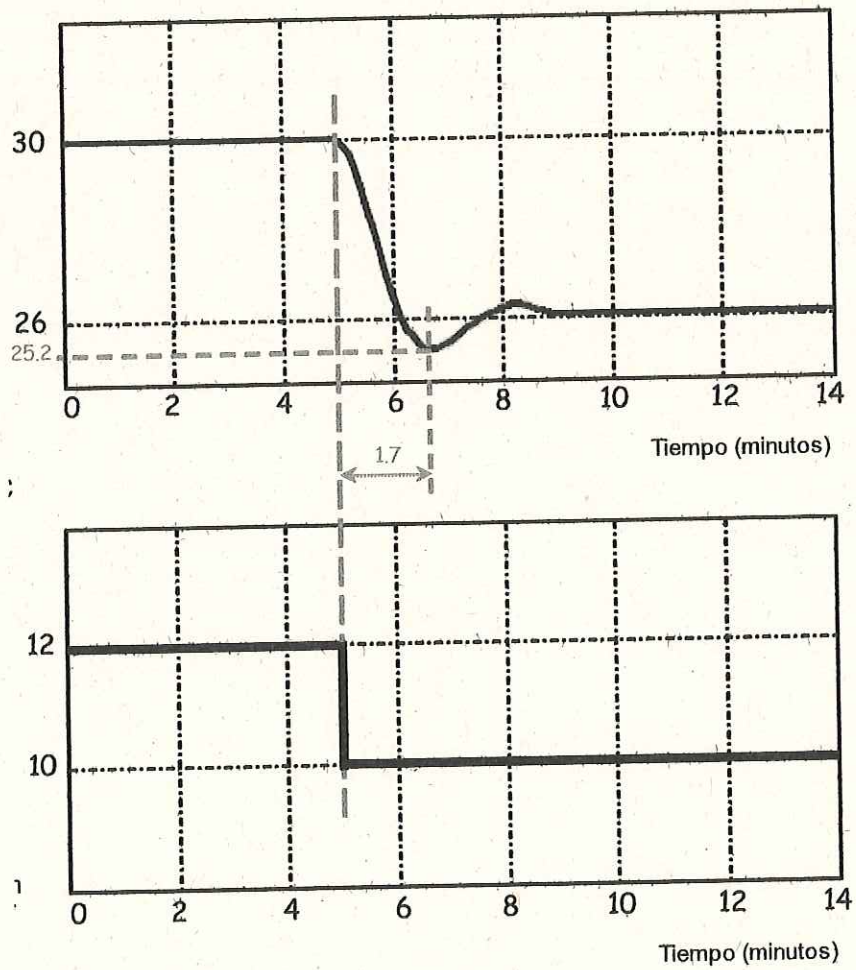
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -W^2\frac{dy}{dt} - \frac{KV}{W}y + Qx^{\frac{3}{2}}$$

a) ¿Cuál es el efecto en la constante de tiempo efectiva del sistema y en el coeficiente de amortiguamiento un valor doble de V si se mantiene W constante?

b) ¿Y si W vale el doble y V se mantiene constante?

c) Encontrar la función de transferencia $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$

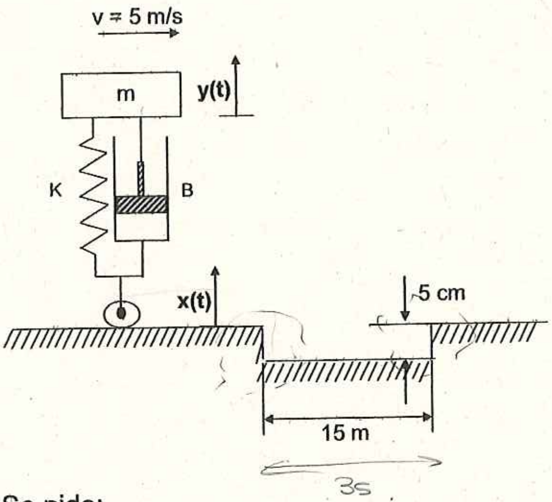
15. Se quiere obtener un modelo para describir la relación entre la temperatura de un reactor químico (variable de salida) y la temperatura del caudal de entrada al reactor (variable de entrada). Para ello se dispone de los datos de un ensayo ante un escalón que se muestran en la siguiente figura:



Solución:

$$G(s) = \frac{8,65}{s^2 + 1,91s + 4,33}$$

16. Un modelo simplificado de un sistema de suspensión se puede representar de la siguiente forma:



$M = 100\ Kg$
$K = 50000\ N/m$
$B = 1000\ Ns/m$

x(t): punto de contacto del suelo

y(t): desplazamiento vertical de la masa

Se pide:

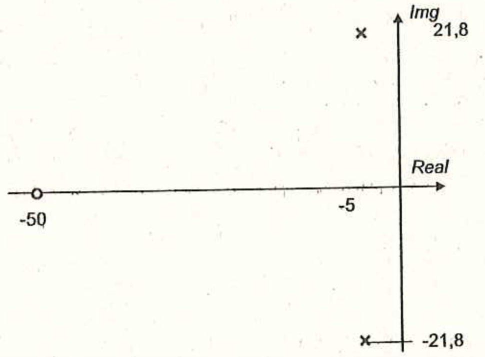
a) Determinar el modelo matemático que describe el sistema de suspensión, considerando condiciones iniciales de equilibrio.
b) Obtener la función de transferencia del sistema, $G(s) = Y(s)/X(s)$.
c) Calcular y representar en el *plano s* sus polos y ceros.
d) Obtener la expresión matemática de la entrada y representarla gráficamente en el tiempo.
e) Representar gráficamente la respuesta *y(t)* (evolución en el tiempo del desplazamiento vertical de la masa) ante la entrada *x(t)* propuesta. Esta representación (aproximada) debe deducirse de las características de *G(s)*, evitando el cálculo de las transformadas y anti-transformadas de Laplace.
f) ¿Qué modificaciones (aumentar o disminuir) se podría hacer en los parámetros *K* (constante elástica del muelle) y/o *B* (coeficiente de rozamiento viscoso del amortiguador) para disminuir la amplitud de las oscilaciones de la masa ante entradas como la representada en este ejercicio?

Solución:

a) $$\boxed{M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\left[\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}\right] + K[y(t) - x(t)] = 0}$$

b) $$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K} \rightarrow G(s) = \frac{1000s + 50000}{100s^2 + 1000s + 50000} \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{10(s+50)}{s^2 + 10s + 500}}$$

c) Se trata de una función de transferencia que indica que el sistema es de segundo orden con un cero y dos polos. El cero se encuentra en $s = -50$. Los polos del sistema se encuentran en las raíces de denominador de la función de transferencia $s = -5 \pm j21{,}8$. Así pues, la representación de polos y ceros en el plano s es,

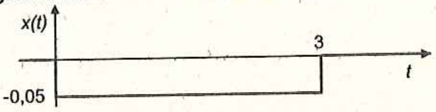


Dado que el cero correspondiente al sistema se encuentra muy alejado respecto de los polos, para el estudio temporal del sistema, se puede suponer que el sistema se comporta como un sistema equivalente de segundo orden puro,

$$G(s)=\frac{Bs+K}{Ms^2+Bs+K} \rightarrow G_{eq}(s)=\frac{K}{Ms^2+Bs+K}=\frac{K/M}{s^2+B/M\,s+K/M} \rightarrow \boxed{G_{eq}(s)=\frac{500}{s^2+10s+500}}$$

d) Obtener la expresión matemática de la entrada y representarla gráficamente en el tiempo.

Dado que se trata de un sistema de suspensión que se mueve a una velocidad de 5m/s, la distancia del escalón es de 15m y su altura es de 0,05m, la representación gráfica de la entrada sería,



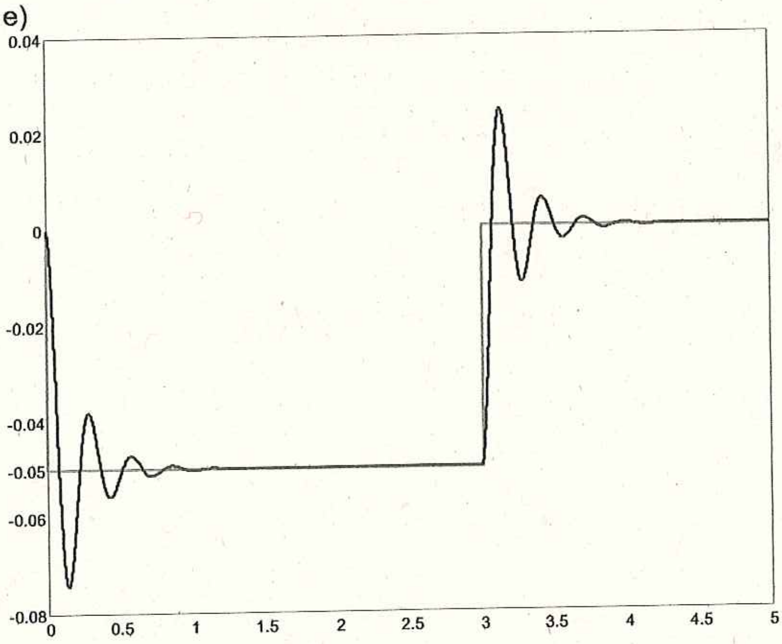
Como se puede observar, la entrada x(t) se puede representar matemáticamente como la suma de dos escalones, uno de amplitud -0,05 desde t0=0s, y el otro de amplitud 0,05 desde t=3s,

$$x(t)=-0{,}05r(t)+0{,}05r(t-3);\quad r(t)=1\,\forall t\geq 0$$

Si lo expresamos en el dominio transformado de Laplace,

$$X(s)=-\frac{0{,}05}{s}+\frac{0{,}05}{s}e^{-3s}$$

e)



f)

La oscilación en la respuesta del sistema se debe al comportamiento subamortiguado del sistema. La amplitud de las oscilaciones está directamente relacionada con el valor del coeficiente de amortiguamiento. De esta forma, para que disminuir la amplitud de las oscilaciones es necesario aumentar el coeficiente de amortiguamiento. Así pues, partiendo de la función de transferencia del sistema,

$$s^2 + B/M\,s + K/M = s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{K/M} \\ \delta\omega_n = B/2M \end{cases} \underset{M=100}{\longrightarrow} \quad \delta = \frac{B}{20\sqrt{K}}$$

Según indica la expresión, para aumentar el coeficiente de amortiguamiento es necesario aumentar el valor de B y/o disminuir el valor de K.

17. Se conoce la expresión temporal de la respuesta de un sistema cuando se le aplica una entrada impulso unitario:

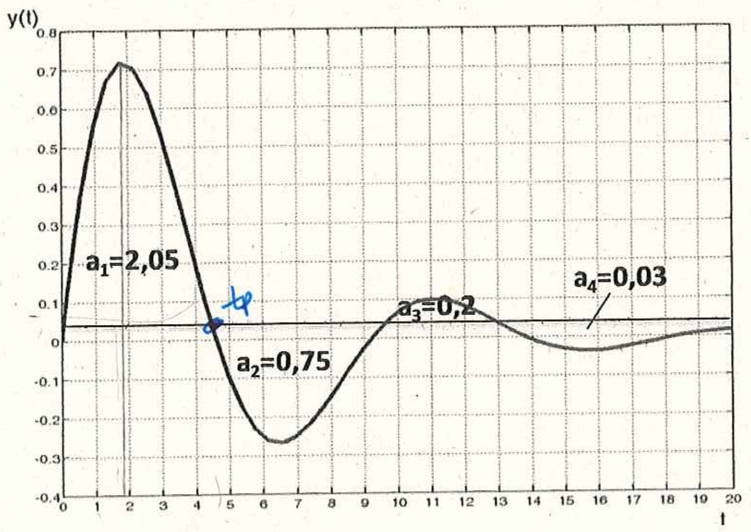
$$y(t) = 5 - 5e^{-t}$$

Hallar su función de transferencia.

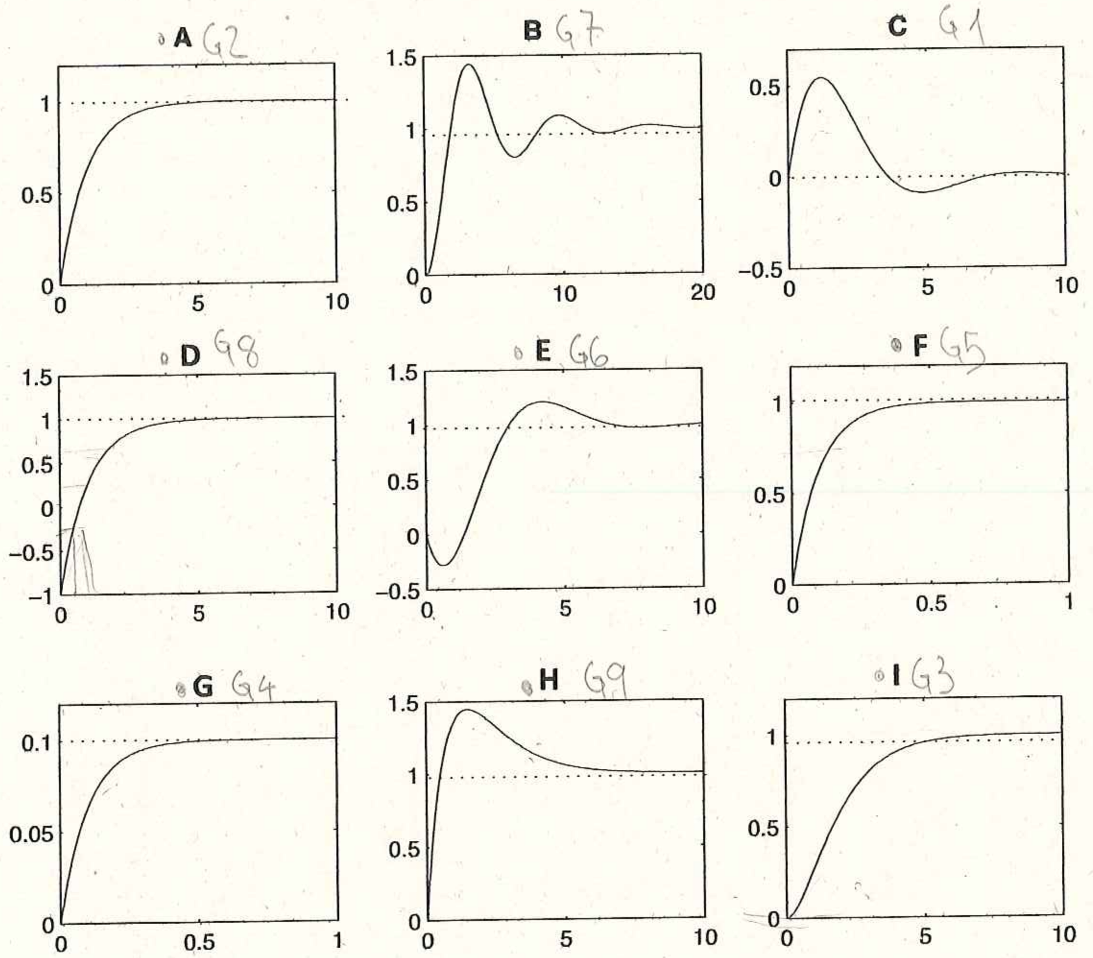
Solución:

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)}$$

18. La respuesta de la figura corresponde a un sistema de segundo orden cuando se le excita con un impulso de amplitud 2. Encontrar la función de transferencia de dicho sistema.



19. Asociar las siguientes funciones de transferencia con las respuestas a entrada escalón. Justificar la respuesta.



$$G_1(s) = \frac{s}{(s^2+s+1)} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s+1} \qquad G_3(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}$$

$\delta = 1$ sobre amortigu polos dobles.

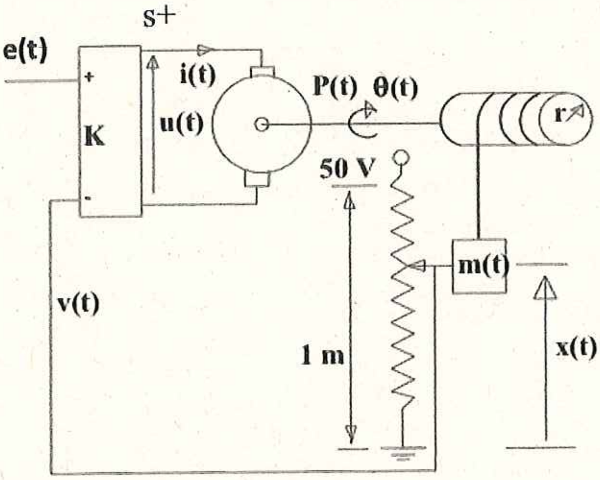
$$G_4(s) = \frac{1}{s+10} \qquad G_5(s) = \frac{10}{s+10} \qquad G_6(s) = \frac{-s+1}{s^2+s+1}$$

$$G_7(s) = \frac{1}{s^2+0{,}5s+1} \qquad G_8(s) = \frac{-s+1}{s+1} \qquad G_9(s) = \frac{3s+1}{s^2+2s+1}$$

Solución:

$G_1(s)$ → C
$G_2(s)$ → A
$G_3(s)$ → I
$G_4(s)$ → G
$G_5(s)$ → F
$G_6(s)$ → E
$G_7(s)$ → B
$G_8(s)$ → D
$G_9(s)$ → H

20. El sistema de la figura representa un mecanismo elevador de posicionamiento vertical que desplaza un elemento móvil con masa m(t) variable (perturbación del sistema). La altura x(t) del elemento móvil se fija mediante la tensión de referencia e(t).



Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema son:

$$u(t) = K\,[e(t) - v(t)]$$
$$u(t) = R \cdot i(t) + Ke \cdot d\theta(t)/dt$$
$$P(t) = Km \cdot i(t)$$
$$P(t) = F \cdot d\theta(t)/dt + J \cdot d^2\theta(t)/dt^2 + r^2 \cdot m(t) \cdot d^2\theta(t)/dt^2 + r \cdot g \cdot m(t)$$
$$x(t) = r \cdot \theta(t)$$
$$v(t) = A \cdot x(t)$$

Constantes:

K = modificable	$Ke = 0{,}09\ V \cdot s \cdot rad^{-1}$	$Km = 0{,}1\ N \cdot m \cdot A^{-1}$
$R = 5\ \Omega$	$F = 0{,}2 \cdot 10^{-3}\ N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$	$J = 10^{-5}\ Kg \cdot m^2$
$r = 1$ cm	$g = 10\ m \cdot s^{-2}$	$A = 0.5\ V \cdot cm^{-1}$

Se pide:

a) Dibujar el diagrama de bloques sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio con una masa $\bar{m}$=0,3 Kg y a una altura $\bar{x}$=0,5 m .

b) Obtener la función de transferencia X(s)/E(s).

c) Determinar el valor de K para que el sistema tenga una sobre-oscilación del 4,32% y representar, para ese valor de K, la forma aproximada de la respuesta x(t) del sistema ante una entrada escalón de 2 voltios en la señal e(t).

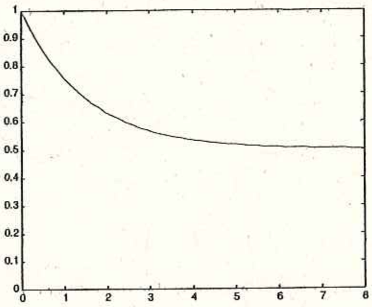
21. Dada la función de transferencia sombrear la zona del plano s en la que el tiempo de establecimiento es menor de 2 segundos y el sobre-impulso menor del 10%. ¿Cuáles son los valores de δ y ω_n ?

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$$

22. Obtener las funciones de transferencia de los sistemas cuya respuesta escalón unitario es la que aparece en la figura.

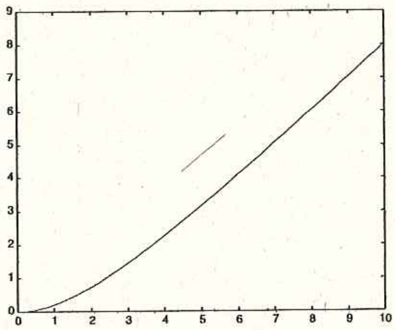
1,5

A



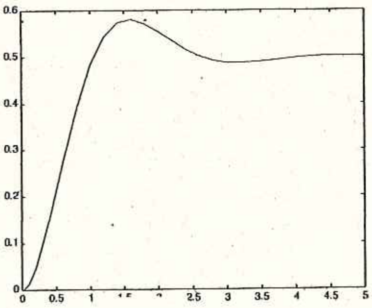
K

B



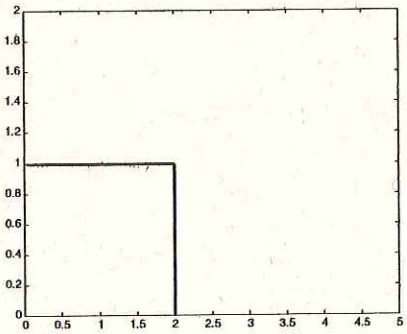
T

C



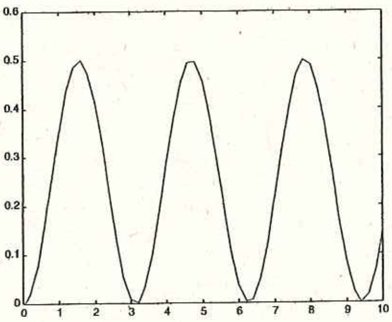
1,51

D



0,581

E



Solución:

a) $G(s)=\dfrac{3s+1}{3s+2}$

b) $G(s)=\dfrac{1}{s(2s+1)}$

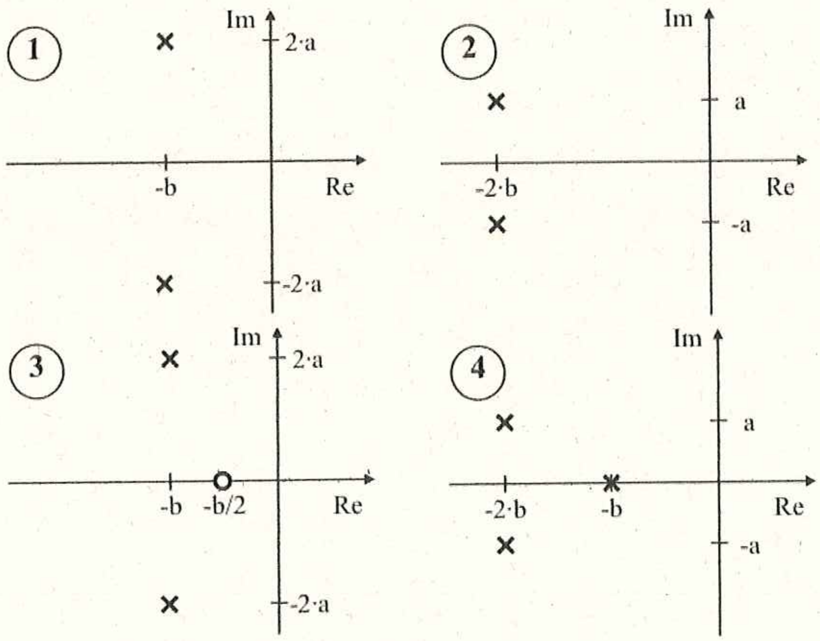
c) $G(s)=\dfrac{2{,}645}{s^2+2{,}3s+5{,}3}$

d) $G(s)=1-e^{-2s}$

e) $G(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$

23. Dados los cuatro sistemas representados por sus mapas de polos y ceros, ordenarlos en función de:

- Mayor a menor oscilación.
- Mayor a menor tiempo de pico.

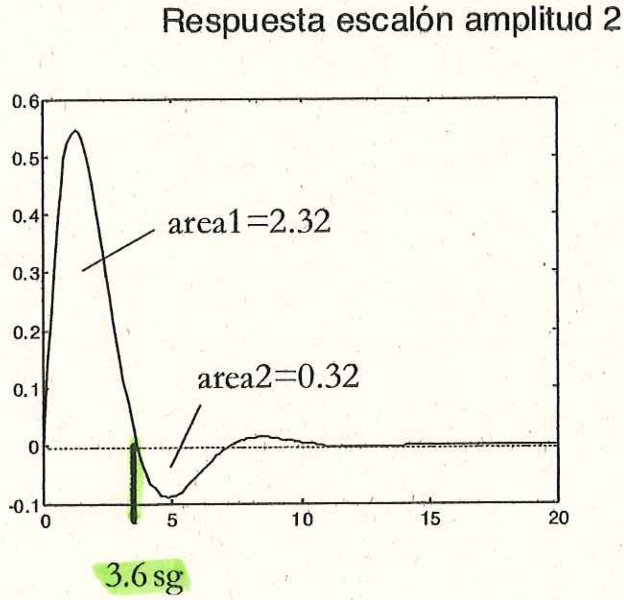


Solución:

$wd_3 = wd_1 > wd_2 = wd_4$

$tp_3 < tp_1 < tp_2 < tp_4$

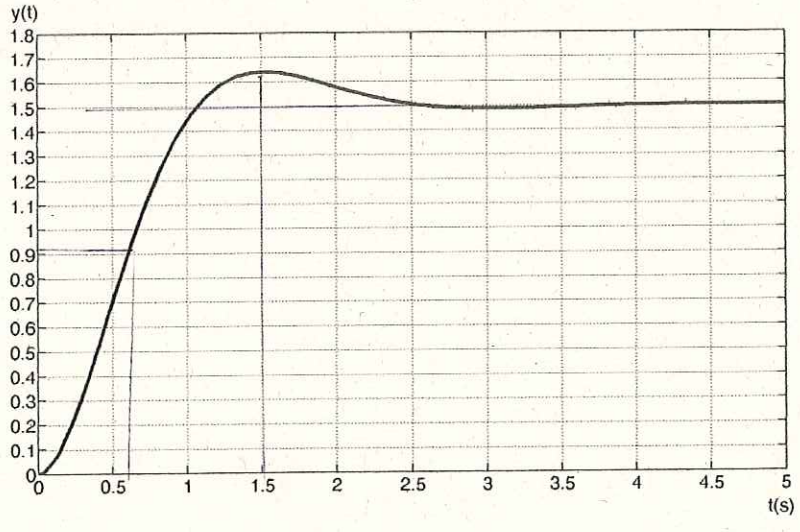
24. La respuesta de la figura corresponde a un sistema de segundo orden cuando se le excita con un escalón de amplitud 2. Encontrar la función de transferencia de dicho sistema.



Solución:

$$G(s)=\frac{s}{s^2+s+1}$$

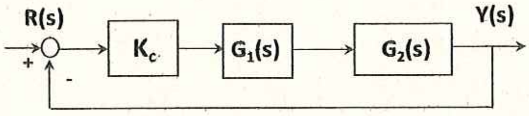
25. La respuesta de la figura corresponde a un sistema de segundo orden cuando se le excita con una rampa unitaria. Encontrar la función de transferencia de dicho sistema.



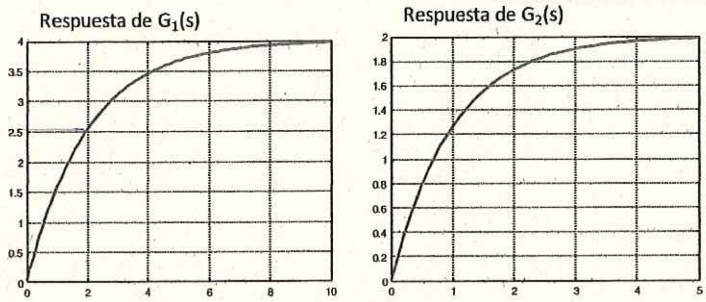
Solución:

$$G(s)=\frac{10s}{s^2+3s+6,7}$$

26. Sea el sistema realimentado de la figura.



Se conocen las respuestas de $G_1(s)$ y $G_2(s)$ cuando se produce un incremento en escalón unitario en sus respectivas entradas, que pueden verse en las gráficas siguientes.



a) Obtener la función de transferencia del sistema en bucle cerrado para K_c=2, indicando el valor de los parámetros K, δ y ω_n.
b) Dibujar la respuesta Y(s) del sistema en bucle cerrado para K_c=2. Indicar sobre la gráfica los valores significativos de la respuesta (M_p, t_p, t_s, y_{ss})

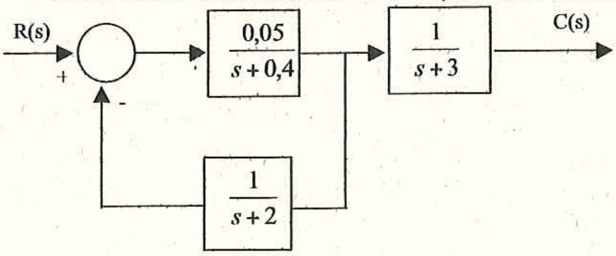
Solución:

$$G(s) = \frac{8}{s^2 + 1,5s + 8,5}$$

De la función de *transferencia se obtienen los parámetros*:

$$\begin{cases} K = 0,94 \\ \delta = 0,26 \\ w_n = 2,91 rad/s \end{cases}$$

27. Obtener el sistema de orden reducido, equivalente al dado en la figura, razonando la simplificación. ¿Qué diferencia cabría esperar entre la respuesta de ambos a entrada escalón unitario?. Comprobarlo mediante simulación.



Solución:

$$G(s) = \frac{0,05(s+2)}{(s+0,43)(s+1,97)(s+3)} \approx \frac{0,17}{(s+0,43)}$$

TEMA 6 SISTEMAS REALIMENTADOS

1. Sea la ecuación característica de un sistema realimentado con control proporcional:

$$1+G_c(s)G_p(s)=s^3+3s^2+3s+1+\frac{K_c}{8}.$$

Encontrar la ganancia crítica (última), K_u que hace al sistema críticamente estable, así como el periodo de la oscilación.

Resultado: $K_u=64,\quad P_u=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

2. Sean $G_a(s)$, $G_p(s)$ y $G_T(s)$ las funciones de transferencia de un actuador, del proceso y del sensor-transmisor:

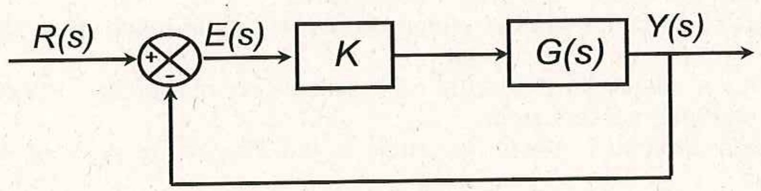
$G_a(s)=K_v=1$, $G_p(s)=\frac{2{,}5}{1+2s}$ y $G_T(s)=\frac{K_T}{1+\tau_T s}$

El controlador que se utiliza en el bucle de realimentación es proporcional de ganancia K_c=2. Se pide:

a) Dibujar el diagrama de bloques del bucle de realimentación.
b) Analizar el efecto de K_T sobre la respuesta en bucle cerrado a un cambio en el punto de consigna (calculando δ y ω_n para varios valores de K_T manteniendo τ_T=1).

Resultado:
$K_T \le 0.025$ polos reales
$K_T > 0.025$ polos complejos conjugados
si $K_T\uparrow\ \delta\downarrow,\ \omega_n\uparrow,\ \delta\omega_n=\text{cte}$

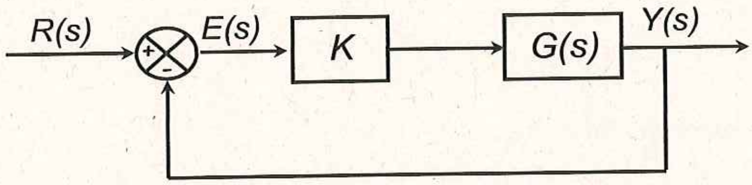
3. Sea el siguiente sistema realimentado con $G(s)=\dfrac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$:



a) ¿De qué tipo es este sistema?
b) ¿Cuál es la ganancia en bucle cerrado?
c) Hallar e_{ss} a entradas escalón y rampa unitarios.

Resultado: $a)\ 1\quad b)\ 1\quad c)\ e_{ss}=\frac{8}{3K}$

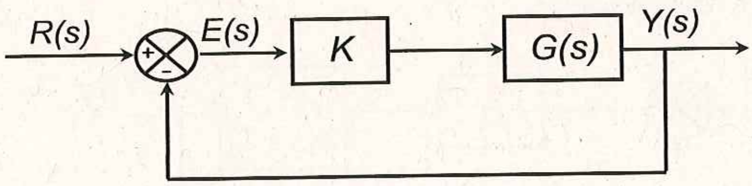
6. Sea el siguiente sistema realimentado con $G(s)=\dfrac{s+1}{s(s+3)}$:



a) Encontrar el valor de K que hace que la constante de tiempo dominante del sistema sea de 2 segundos. Encontrar asimismo la ubicación del segundo polo.
b) Calcular el error en estado estacionario a entradas escalón y rampa unitarios.
c) Calcular la respuesta y(t) a entrada escalón unitario.

Resultado: $a)\quad K=2{,}5 \quad s=-5 \quad b)\quad ess=1{,}2 \quad c)\quad y(t)=1-0{,}55e^{-0{,}5t}-0{,}44e^{-5t}$

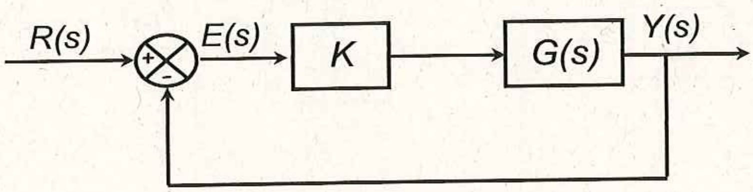
7. Sea el siguiente sistema realimentado con $G(s)=\dfrac{1}{s-2}$:



a) ¿Es un sistema estable?
b) Demostrar que su comportamiento dinámico varía al introducir una realimentación con ganancia proporcional K.
c) Encontrar el valor de K que estabiliza el sistema con constante de tiempo T=0,1 segundos.
d) ¿Cuál es el error en estado estacionario a entrada escalón unitario?

Resultado: $c)\quad K=12 \quad d)\quad e_{ss}=-0{,}2$

8. Sea el siguiente sistema a realimentado con $G(s)=\dfrac{s+2}{(s-2)(s+4)}$:



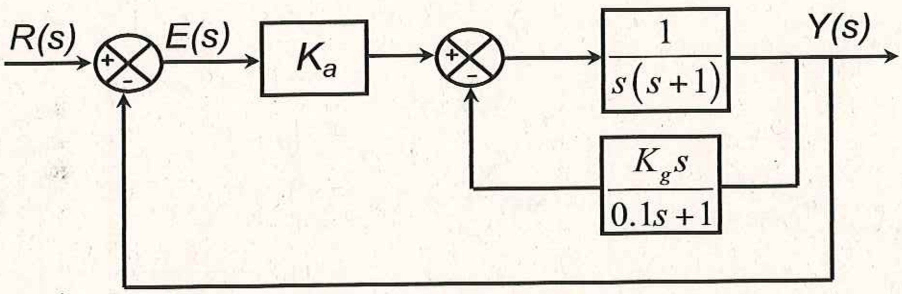
a) Este sistema sería inestable sin realimentación. ¿Por qué?

a) Investigar si con esta estructura es posible alcanzar las especificaciones de los problemas anteriores. Es decir, error en estado estacionario a rampa unitaria 0,1 y coeficiente de amortiguamiento 0,5.

b) ¿Qué valores de K, si es que existen, lo hacen posible?

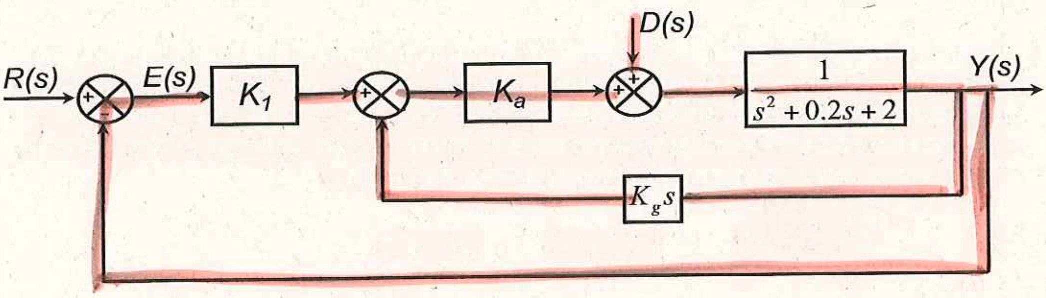
Resultado: $a)\quad K_a = 10 \quad K_g = 0,9$

11. La realimentación de velocidad transitoria que se representa en la figura es una variante de la del problema anterior. Determinar el error en estado estacionario a entrada escalón y rampa y compararlos con los obtenidos con realimentación de velocidad pura.



Resultado: $a)\quad e_{ss} = \frac{1+\ K_g}{K_a}$

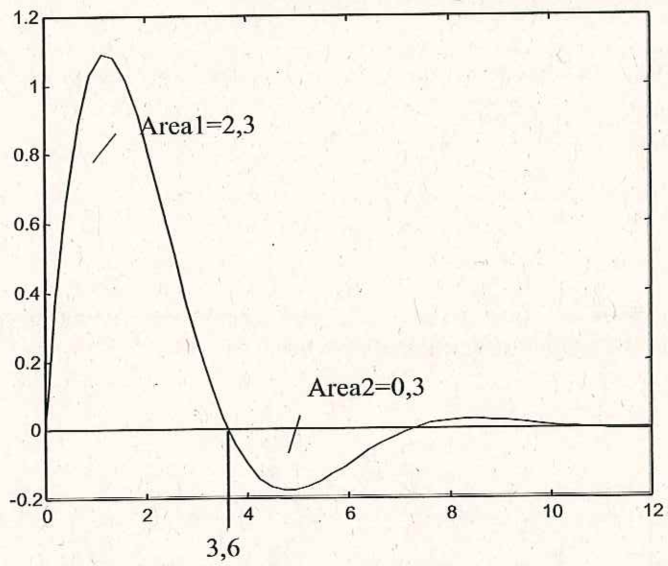
12. El diagrama de bloques de un estabilizador de balanceo de un barco es el representado en la figura. Dado que la dinámica del barco se caracteriza por tener un amortiguamiento bajo, se incluye realimentación de velocidad.



a) Expresar la función de transferencia que asocia el efecto de perturbación D(s) producida por las olas con el ángulo de balanceo del barco Y(s).

b) Encontrar las ecuaciones que deben satisfacer K_a, K_1 y K_g para asegurar un valor de la salida en estado estacionario no mayor de 0,1 y un coeficiente de amortiguamiento de 0,5, en respuesta a un escalón unitario en D(s),

Resultado: $a)\quad \frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{0,5}{s^2 + (0,2 + 0,5K_aK_g)s + 2 + 0,5K_1K_a} \qquad b)\quad K_1K_a > 6 \quad K_aK_g > 4,07$



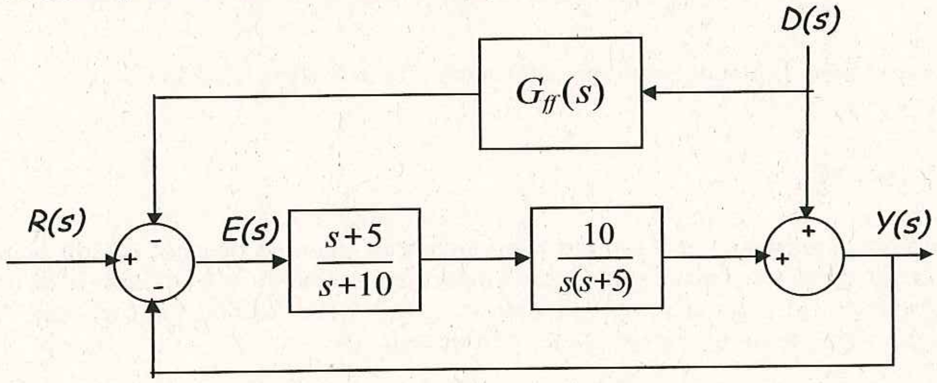
a) Dibujar el diagrama de bloques del sistema realimentado,
b) Calcular las funciones de transferencia de todos los bloques del diagrama.

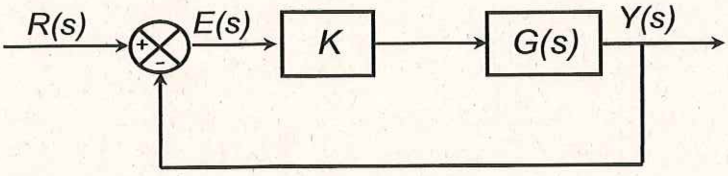
Para una entrada escalón unitario en r(t), se pide:

c) Ajustar el valor de K para que el tiempo de establecimiento del sistema de segundo orden reducido equivalente sea $\frac{\pi}{0{,}155}s$.
d) Estudiar la validez de la aproximación anterior.
e) Calcular y(t) en régimen permanente para k=2.

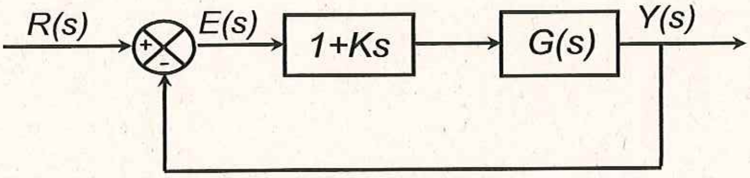
Resultado: *a)* $K = 0{,}477$

15. La figura muestra el diagrama de bloques del sistema de control de antena del campo de colectores solares. La señal D(s) denota las perturbaciones de las ráfagas de viento que actúan sobre la antena. La función de transferencia $G_{ff}(s)$ se utiliza para eliminar el efecto de D(s) sobre la salida Y(s).





DISEÑO A



DISEÑO B

Para ambos diseños determinar:

a) El tiempo de subida (tiempo en que el sistema alcanza por primera vez el 100% de su valor final)
b) El tiempo de pico
c) El tiempo de establecimiento (utilizando el criterio del 5%)
d) El máximo sobreimpulso
e) Comentar los dos diseños y explicar las diferencias y las similitudes entre los dos diseños.

Resultado:
$A)\quad a)\, t_r = 1{,}21\, s \quad b)\, 1{,}81\, s \quad c)\, t_s = 3\, s \quad d)\, M_p = 16\,\%$
$B)\quad a)\, t_r = 0{,}48\, s \quad b)\, 0{,}72\, s \quad c)\, t_s = 1{,}2\, s \quad d)\, M_p = 16{,}3\,\%$

} Mismo por depender solo de δ

18. Dado el sistema $G(s) = \dfrac{0{,}5}{(s+1)(s+5)}$, **diseñar un controlador** que cumpla las siguientes **especificaciones**:

- Tiempo de establecimiento (con el criterio del 98%) menor o igual a 2 segundos.
- Máximo sobre impulso menor o igual a 4,3%.
- Error a entrada escalón (error de posición) menor o igual al 35%.

19. Dado el mismo sistema $G(s) = \dfrac{0{,}5}{(s+1)(s+5)}$, obtener el regulador que cumple las siguientes **especificaciones**:

- Tiempo de establecimiento (con el criterio del 98%) menor o igual a 2 segundos.
- Máximo sobre impulso menor o igual a 4,3%.
- Error a entrada escalón (error de posición) nulo.

TEMA 7 ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

1. Trace el diagrama de Bode asintótico de los siguientes sistemas:

$$a)\ G(s)=\frac{4}{s+2} \qquad b)\ G(s)=\frac{40}{s^2+s+4}$$

$$c)\ G(s)=\frac{4}{(1+0.4s)(s+1)} \qquad d)\ G(s)=\frac{8}{s(1.25s+1)(s+2)}$$

$$e)\ G(s)=\frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)} \qquad f)\ G(s)=\frac{5(s+0.6)}{s(0.25s+1)(2.5s+1)(s+2)}$$

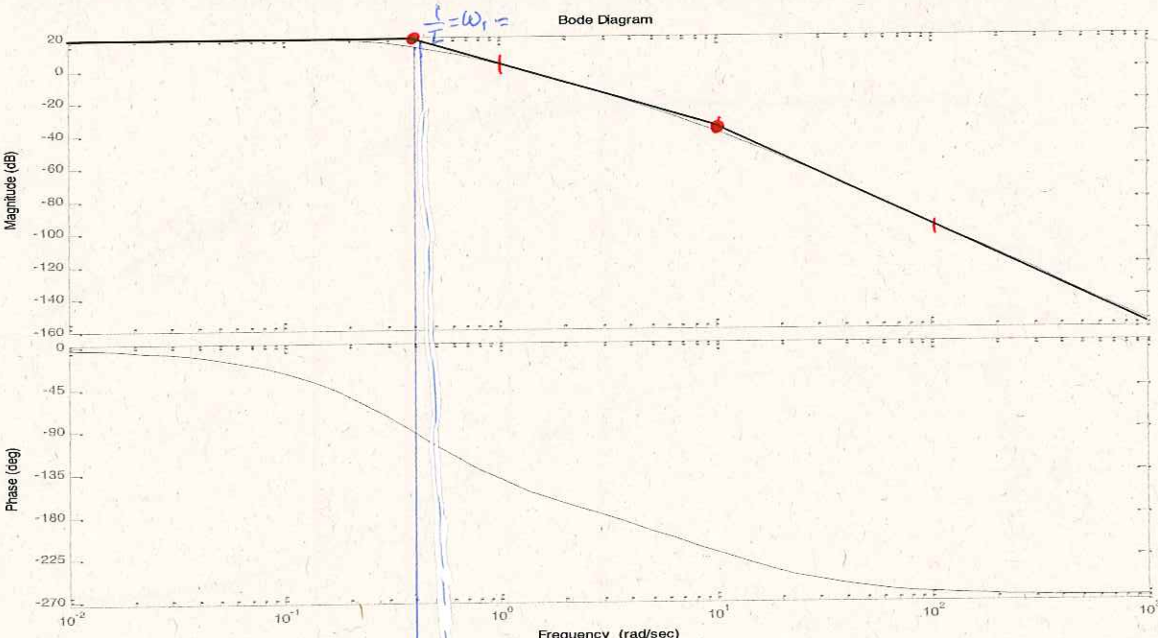
2. Trace el diagrama de Bode asintótico del siguiente sistema,

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(1+0,1s)}$$

y calcule la respuesta en estado estacionario a las siguientes entradas senoidales, ¿qué efecto tiene la frecuencia en la amplitud y el desfase?

$$r(t)=2sen0,5t$$
$$r(t)=2sen5t$$

3. Identificar el sistema cuyo Bode de módulo es:

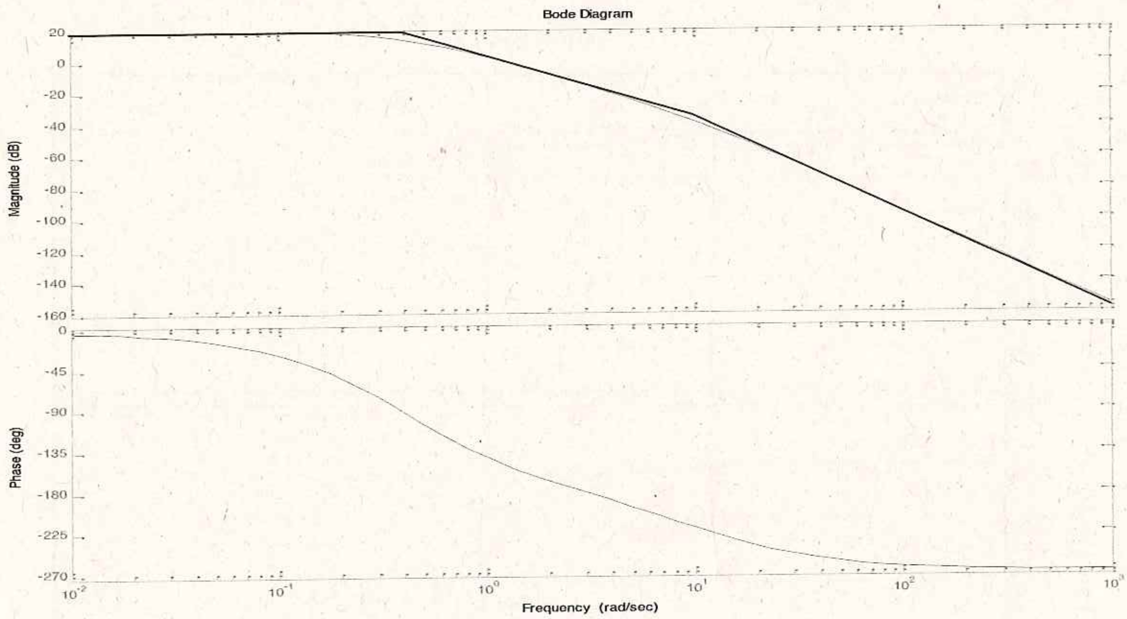


Resultado: $G(s)=\dfrac{10}{(1+2,5s)^2(1+0,1s)}$

Resultado:

$$G_{PI}(s) = \frac{10}{(1+0,1s)(1+0,033s)(1+0,01s)(1+0,0033s)} = \frac{9 \cdot 10^7}{(s+10)(s+30)(s+100)(s+300)}$$

6. El diagrama de la figura representa la $G_{BA}(s)$ de un sistema realimentado. ¿Qué error presentará a entrada escalón?



Resultado: $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{11}$

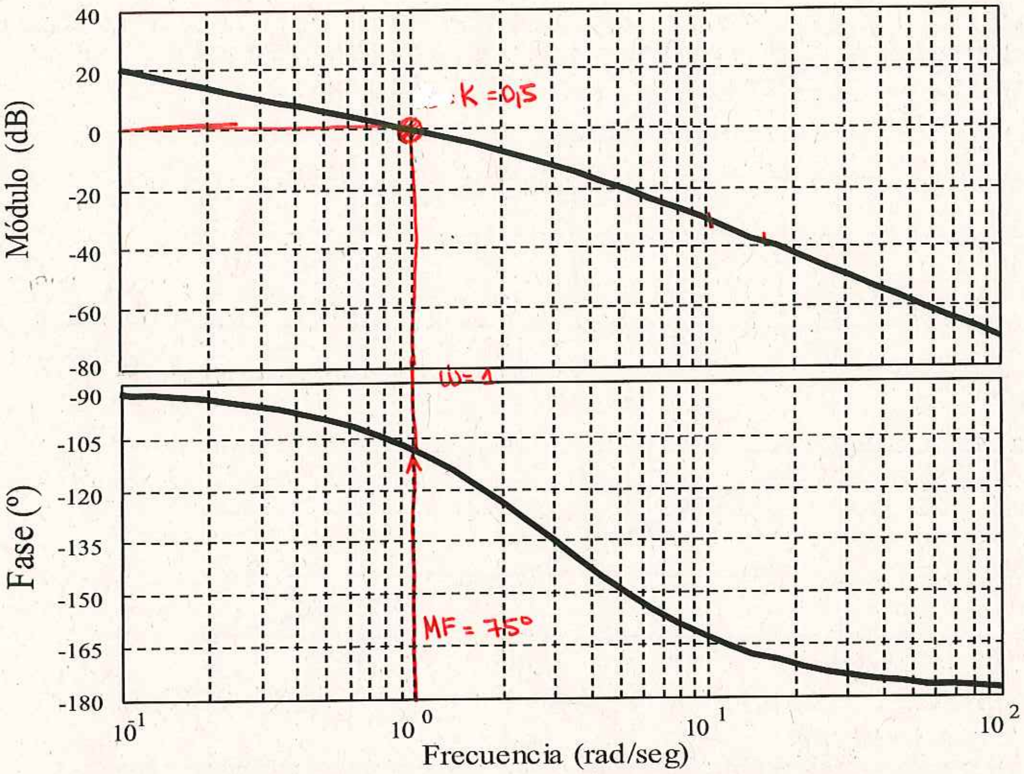
7. Sea el siguiente sistema realimentado con realimentación unitaria, calcule el valor de a para que MF=45°:

$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

8. Sea un sistema realimentado con la siguiente función de transferencia en bucle abierto:

$$G_{BA}(s) = \frac{ke^{-s}}{s}$$

¿Cuál es el máximo valor de k que asegura la estabilidad en bucle cerrado?



a) Calcule el MG y MF.
b) ¿Cuál será el error estacionario del sistema a entrada escalón 0,5?
c) ¿Y a rampa de pendiente 0.5?
d) ¿Será capaz de seguir a una señal de referencia r(t)=3sen5t?
e) ¿Es posible aumentar la K del controlador antes de que el sistema realimentado se haga inestable?

Resultado:

a) MG= infinito y MF=75º   MG = ∞   MF = 75º

b) e_{ss} = 0   0 porque tiene un integrador en el origen

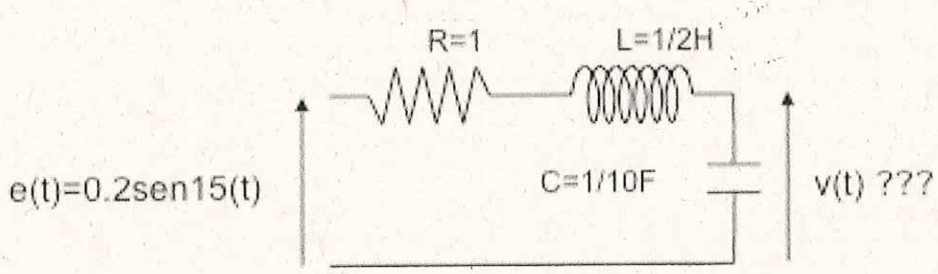
c) e_{ss} = 2 $1/K = 1/0{,}5 = 2$

d) No porque para w=5 el modulo de G(jw) es -20dB, y por tanto la señal de salida está tan atenuada que no logra seguir para esa frecuencia a dicha referencia.

e) Sí, hasta que K sature.

11. Para el mismo sistema realimentado:

13. Calcula la expresión de la tensión existente en los bornes del condensador, v(t), ante una entrada e(t) = 0.2 sen15t. (Pregunta del examen de Junio de 2013).



TEMA 6 SISTEMAS REALIMENTADOS

1. Sea la ecuación característica de un sistema realimentado con control proporcional:

$$1+G_c(s)G_p(s)=s^3+3s^2+3s+1+\frac{K_c}{8}.$$

Encontrar la ganancia crítica (última), K_u que hace al sistema críticamente estable, así como el periodo de la oscilación.

Resultado: $K_u=64,\quad P_u=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

2. Sean $G_a(s)$, $G_p(s)$ y $G_T(s)$ las funciones de transferencia de un actuador, del proceso y del sensor-transmisor:

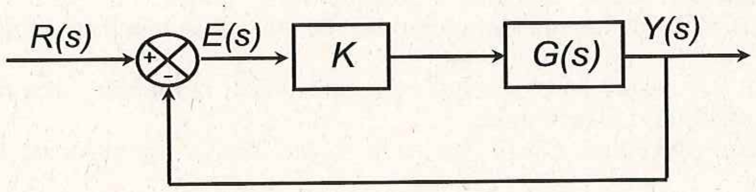
$G_a(s)=K_v=1$, $G_p(s)=\frac{2,5}{1+2s}$ y $G_T(s)=\frac{K_T}{1+\tau_T s}$

El controlador que se utiliza en el bucle de realimentación es proporcional de ganancia K_c=2. Se pide:

a) Dibujar el diagrama de bloques del bucle de realimentación.
b) Analizar el efecto de K_T sobre la respuesta en bucle cerrado a un cambio en el punto de consigna (calculando δ y ω_n para varios valores de K_T manteniendo τ_T=1).

Resultado:
$K_T \le 0.025$ polos reales
$K_T > 0.025$ polos complejos conjugados
si $K_T \uparrow\ \delta\downarrow,\ \omega_n\uparrow,\ \delta\omega_n=\text{cte}$

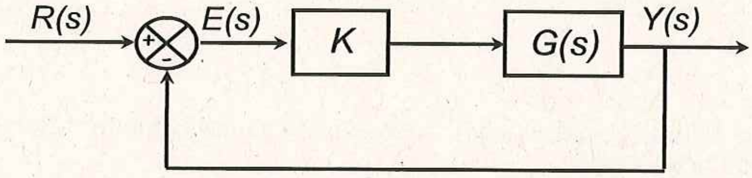
3. Sea el siguiente sistema realimentado con $G(s)=\dfrac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$:



a) ¿De qué tipo es este sistema?
b) ¿Cuál es la ganancia en bucle cerrado?
c) Hallar e_{ss} a entradas escalón y rampa unitarios.

Resultado: *a)* 1 *b)* 1 *c)* $e_{ss}=\frac{8}{3K}$

4. Sea el siguiente sistema realimentado con $G(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s+10)}$:



Examinar el efecto de la realimentación:

a) Calculando la respuesta escalón unitario para K=7 y K=20.
b) Hallando e_{ss} en ambos casos a partir de los coeficientes estáticos de error.
c) Comparando ambas respuestas en cuanto al tiempo de establecimiento y la naturaleza de la respuesta.

Resultado:

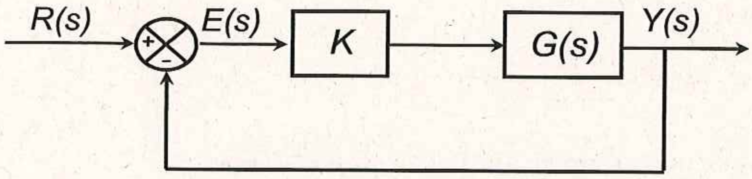
a) $K=7 \Rightarrow y(t)=0,26-0,39e^{-3t}+0,13e^{-9t}$

$K=20 \Rightarrow y(t)=0,5-0,5e^{-6t}\cos 2t+1,5e^{-6t}sen2t$

b) $K=7 \Rightarrow ess=0,74$

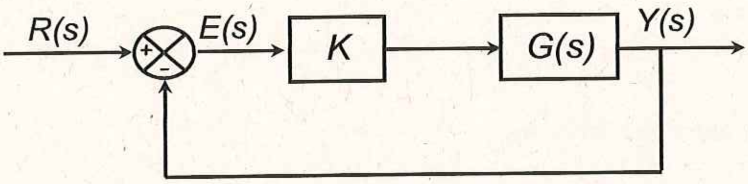
$K=20 \Rightarrow ess=0,5$

5. Sea el siguiente sistema realimentado con $G(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+4)}$:



a) ¿Cuál es la constante de tiempo dominante de la planta?
b) ¿Para qué valor de K, la constante de tiempo dominante es la mitad de la del apartado a)?
c) Para el valor de K calculado en el apartado b), calcular la respuesta escalón unitario y el error en estado estacionario.
d) El error estacionario disminuye con la ganancia. ¿Qué limitará el valor de la ganancia?
e) Hallar el valor de K y el error en estado estacionario correspondiente para que el coeficiente de amortiguamiento del sistema en lazo cerrado sea aproximadamente 0,7.

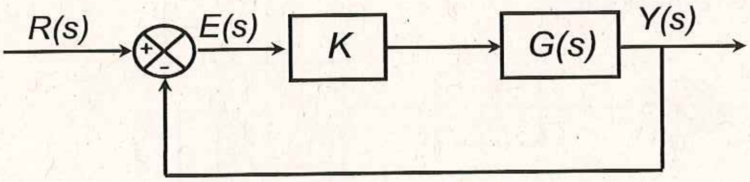
6. Sea el siguiente sistema realimentado con $G(s)=\dfrac{s+1}{s(s+3)}$:



a) Encontrar el valor de K que hace que la constante de tiempo dominante del sistema sea de 2 segundos. Encontrar asimismo la ubicación del segundo polo.
b) Calcular el error en estado estacionario a entradas escalón y rampa unitarios.
c) Calcular la respuesta y(t) a entrada escalón unitario.

Resultado: *a)* $K=2,5 \quad s=-5$ *b)* $ess=1,2$ *c)* $y(t)=1-0,55e^{-0,5t}-0,44e^{-5t}$

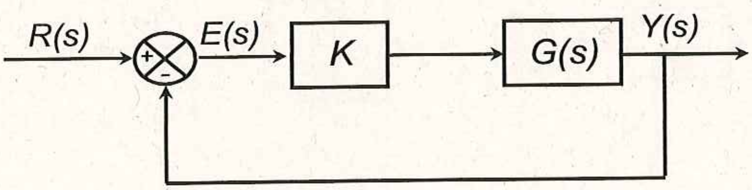
7. Sea el siguiente sistema realimentado con $G(s)=\dfrac{1}{s-2}$:



a) ¿Es un sistema estable?
b) Demostrar que su comportamiento dinámico varía al introducir una realimentación con ganancia proporcional K.
c) Encontrar el valor de K que estabiliza el sistema con constante de tiempo T=0,1 segundos.
d) ¿Cuál es el error en estado estacionario a entrada escalón unitario?

Resultado: *c)* $K=12$ *d)* $e_{ss}=-0,2$

8. Sea el siguiente sistema a realimentado con $G(s)=\dfrac{s+2}{(s-2)(s+4)}$:

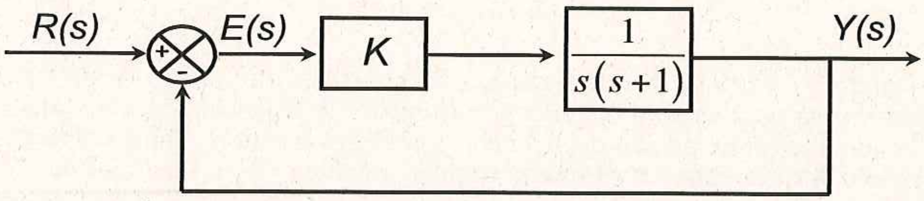


a) Este sistema sería inestable sin realimentación. ¿Por qué?

b) Calcular el valor de K para que la constante de tiempo dominante del sistema en lazo cerrado sea 1 segundo.

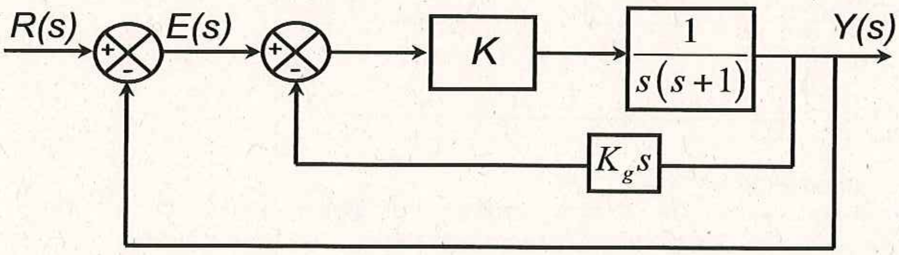
Resultado: $K = 9$

9. Sea el sistema realimentado de la figura:



a) Encontrar el valor de K que hace que el sistema en lazo cerrado tenga un coeficiente de amortiguamiento $\delta = 0{,}5$.
b) Calcular el error en estado estacionario a entrada rampa unitaria.
c) Calcular el valor de K para que el error en estado estacionario a rampa unitaria sea de 0,1. ¿Cuál es el valor del coeficiente de amortiguamiento en este caso?

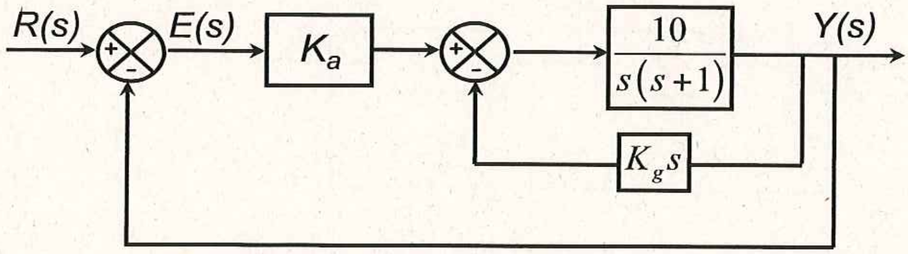
Dar a K el valor obtenido en el apartado c), e introducir realimentación de velocidad como se muestra en la figura siguiente:



d) ¿Qué valor hay que dar a K_g para obtener un amortiguamiento de valor 0,5?
e) ¿Cómo es el error en comparación con el del apartado b)?

Resultado: $a)\quad K = 1 \quad b)\quad ess = 1 \quad c)\quad K = 10 \quad \delta = 0{,}158 \quad d)\quad K_g = 0{,}216$

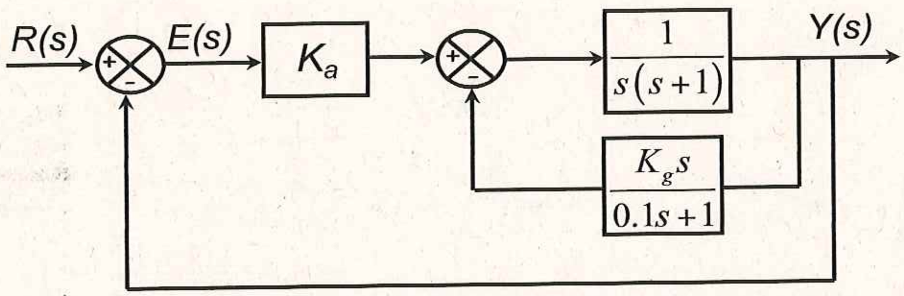
10. En la figura se representa un sistema como el del ejercicio anterior para K=10 y añadiéndole un amplificador de ganancia K_a.



a) Investigar si con esta estructura es posible alcanzar las especificaciones de los problemas anteriores. Es decir, error en estado estacionario a rampa unitaria 0,1 y coeficiente de amortiguamiento 0,5.
b) ¿Qué valores de K, si es que existen, lo hacen posible?

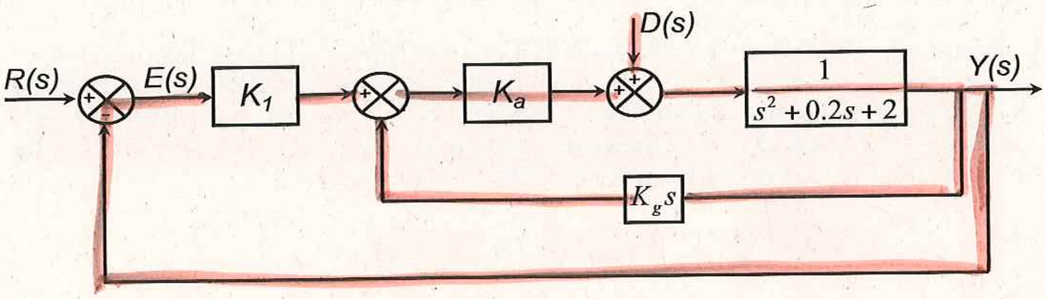
Resultado: $a)\ K_a = 10 \quad K_g = 0{,}9$

11. La realimentación de velocidad transitoria que se representa en la figura es una variante de la del problema anterior. Determinar el error en estado estacionario a entrada escalón y rampa y compararlos con los obtenidos con realimentación de velocidad pura.



Resultado: $a)\ e_{ss} = \dfrac{1+\ K_g}{K_a}$

12. El diagrama de bloques de un estabilizador de balanceo de un barco es el representado en la figura. Dado que la dinámica del barco se caracteriza por tener un amortiguamiento bajo, se incluye realimentación de velocidad.



a) Expresar la función de transferencia que asocia el efecto de perturbación D(s) producida por las olas con el ángulo de balanceo del barco Y(s).
b) Encontrar las ecuaciones que deben satisfacer K_a, K_1 y K_g para asegurar un valor de la salida en estado estacionario no mayor de 0,1 y un coeficiente de amortiguamiento de 0,5, en respuesta a un escalón unitario en D(s),

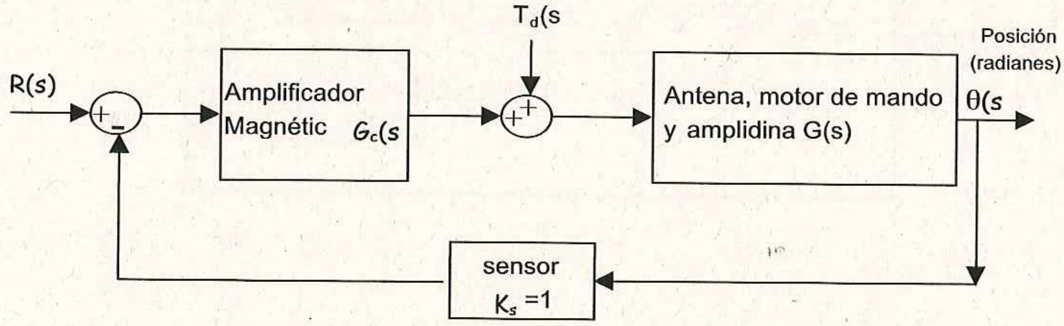
Resultado: $a)\ \dfrac{Y(s)}{T_d(s)} = \dfrac{0{,}5}{s^2 + (0{,}2 + 0{,}5K_aK_g)s + 2 + 0{,}5K_1K_a} \qquad b)\ K_1K_a > 6 \quad K_aK_g > 4{,}07$

13. Últimamente han adquirido gran importancia las grandes antenas para microondas tanto en radioastronomía como en el rastreo de satélites. Estas antenas están expuestas a momentos de torsión muy grandes debido a las ráfagas de viento. Concretamente, para una antena de 20 m. de diámetro, los experimentos muestran que un viento de 56 Km/h ejerce una perturbación máxima de 2 voltios a la entrada T_d de la amplidina. Se conoce la función de transferencia del conjunto antena–motor de mando–amplidina:

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 8s + 100}$$

La siguiente figura muestra un sistema de control de la antena, en el que como controlador se utiliza un amplificador magnético cuya función de transferencia es:

$$G_c(s) = \frac{K_a}{0{,}2s + 1}$$



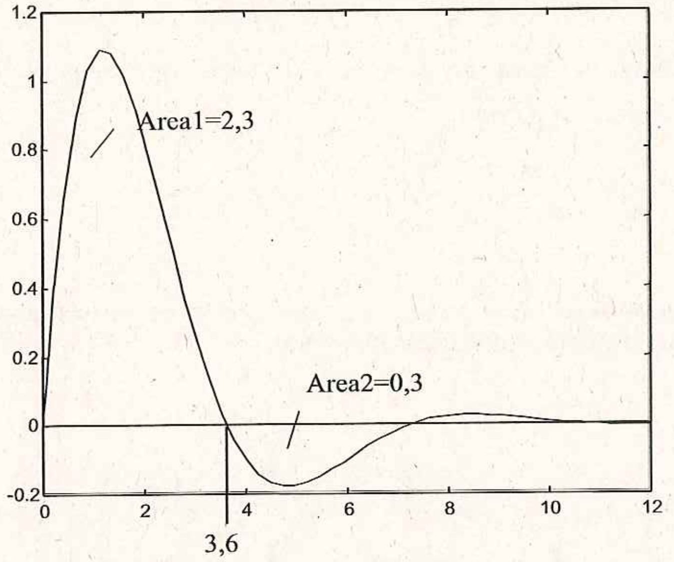
a) Determinar la estabilidad del sistema en función de la ganancia K_a del amplificador.

Sean la referencia R(s) = 0 y un viento constante de 56 Km/h en D(s):

b) Determinar el error en estado estacionario del sistema en bucle abierto (K_s=0).
c) ¿Existe un valor de K_a que asegure que el sistema en bucle cerrado en las mismas condiciones del apartado presenta un error en estado estacionario por debajo de 2°? Si existe, calcular su valor. Si no existe, calcular el mínimo error que puede obtenerse y el correspondiente valor de K_a.

Resultado: *a)* $-1 < K_a < 2{,}64$ *b)* $\theta_{ss} = 2\,rad$ *c)* $K_a \geq 56{,}3$

14. Para controlar la salida y(t) de un sistema G(s) se diseña un bucle simple de realimentación. La gráfica de la figura representa la salida y(t) de G(s) ante un escalón de amplitud 2 en su entrada. Para medir y(t) se utiliza un captador H(s), que ante una variación escalón en su entrada, su salida z(t) responde según la ecuación $z(t) = (3 - 3e^{-t})$. La señal de error se calcula como la diferencia entre la señal r(t) de referencia y la señal z(t) medida por el captador. El controlador, un integrador de ganancia K variable, tiene como entrada el error, en función del cuál calcula la salida u(t) de actuación sobre el sistema G(s).



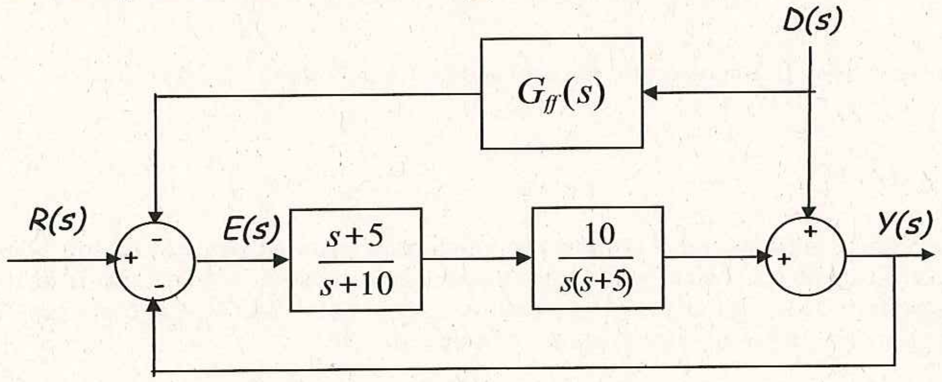
a) Dibujar el diagrama de bloques del sistema realimentado,
b) Calcular las funciones de transferencia de todos los bloques del diagrama.

Para una entrada escalón unitario en r(t), se pide:

c) Ajustar el valor de K para que el tiempo de establecimiento del sistema de segundo orden reducido equivalente sea $\frac{\pi}{0,155}s$.
d) Estudiar la validez de la aproximación anterior.
e) Calcular y(t) en régimen permanente para k=2.

Resultado: *a)* $K = 0,477$

15. La figura muestra el diagrama de bloques del sistema de control de antena del campo de colectores solares. La señal D(s) denota las perturbaciones de las ráfagas de viento que actúan sobre la antena. La función de transferencia $G_{ff}(s)$ se utiliza para eliminar el efecto de D(s) sobre la salida Y(s).

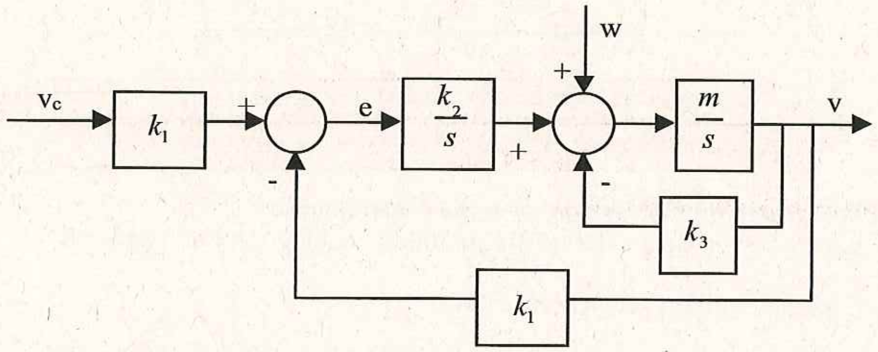


a) Encontrar la función de transferencia $\left.\dfrac{Y(s)}{D(s)}\right|_{R=0}$.

b) Determinar la expresión de $G_{ff}(s)$ de tal forma que el efecto de D(s) sea eliminado por completo.

Resultado: *b)* $G_{ff}(s) = \dfrac{s(s+10)}{10}$

16. En la figura se muestra una posible representación de un sistema de control de velocidad de un automóvil con control integral.



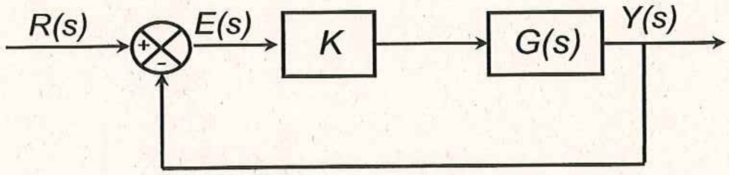
a) Encontrar la función de transferencia entre la velocidad V(s) y la señal de referencia $V_c(s)$.
b) Encontrar la función de transferencia entre la velocidad V(s) y la señal de perturbación W(s).
c) Si la entrada $V_c(s)=0$, encontrar la función de transferencia que relaciona la salida V(s) con la perturbación del viento W(s).
d) ¿Cuál es la respuesta en estado estacionario de v(t) si w(t) es una función rampa y la entrada $V_c(s)=0$?
e) ¿De qué tipo es este sistema en relación a cada una de las entradas?

Resultado: *a)* $\dfrac{V(s)}{W(s)} = \dfrac{ms}{s(s+K_3m)+K_1K_2m}$ *b)* $v_{ss} = \dfrac{A}{K_1K_2}$ *c)* $e_{ss} = \dfrac{K_3}{K_1K_2}$

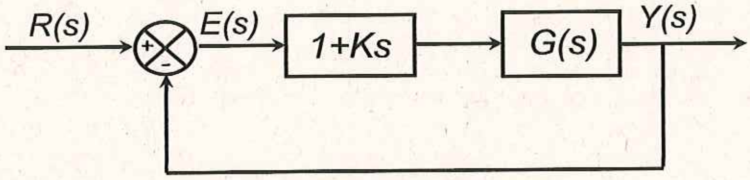
17. Un sistema tiene una función de transferencia en bucle abierto dada por:

$$G(s) = \frac{25}{s(s+2)}$$

Para controlar este sistema se han propuesto dos diseños alternativos en bucle cerrado. El diseño A es un simple controlador proporcional y el diseño B es un controlador PD. La ganancia k en ambos casos debe calcularse para que el amortiguamiento del sistema en bucle cerrado sea 0,5.



DISEÑO A



DISEÑO B

Para ambos diseños determinar:

a) El tiempo de subida (tiempo en que el sistema alcanza por primera vez el 100% de su valor final)
b) El tiempo de pico
c) El tiempo de establecimiento (utilizando el criterio del 5%)
d) El máximo sobreimpulso
e) Comentar los dos diseños y explicar las diferencias y las similitudes entre los dos diseños.

Resultado:

$A)\quad a)\, t_r = 1{,}21\, s \quad b)\, 1{,}81\, s \quad c)\, t_s = 3\, s \quad d)\, M_p = 16\,\%$

$B)\quad a)\, t_r = 0{,}48\, s \quad b)\, 0{,}72\, s \quad c)\, t_s = 1{,}2\, s \quad d)\, M_p = 16{,}3\,\%$

} Mismo por depender solo de δ

18. Dado el sistema $G(s) = \dfrac{0{,}5}{(s+1)(s+5)}$, **diseñar un controlador** que cumpla las siguientes **especificaciones**:

- Tiempo de establecimiento (con el criterio del 98%) menor o igual a 2 segundos.
- Máximo sobre impulso menor o igual a 4,3%.
- Error a entrada escalón (error de posición) menor o igual al 35%.

19. Dado el mismo sistema $G(s) = \dfrac{0{,}5}{(s+1)(s+5)}$, obtener el regulador que cumple las siguientes **especificaciones**:

- Tiempo de establecimiento (con el criterio del 98%) menor o igual a 2 segundos.
- Máximo sobre impulso menor o igual a 4,3%.
- Error a entrada escalón (error de posición) nulo.

TEMA 7 ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

1. Trace el diagrama de Bode asintótico de los siguientes sistemas:

$$a)\ G(s)=\frac{4}{s+2} \qquad b)\ G(s)=\frac{40}{s^2+s+4}$$

$$c)\ G(s)=\frac{4}{(1+0.4s)(s+1)} \qquad d)\ G(s)=\frac{8}{s(1.25s+1)(s+2)}$$

$$e)\ G(s)=\frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)} \qquad f)\ G(s)=\frac{5(s+0.6)}{s(0.25s+1)(2.5s+1)(s+2)}$$

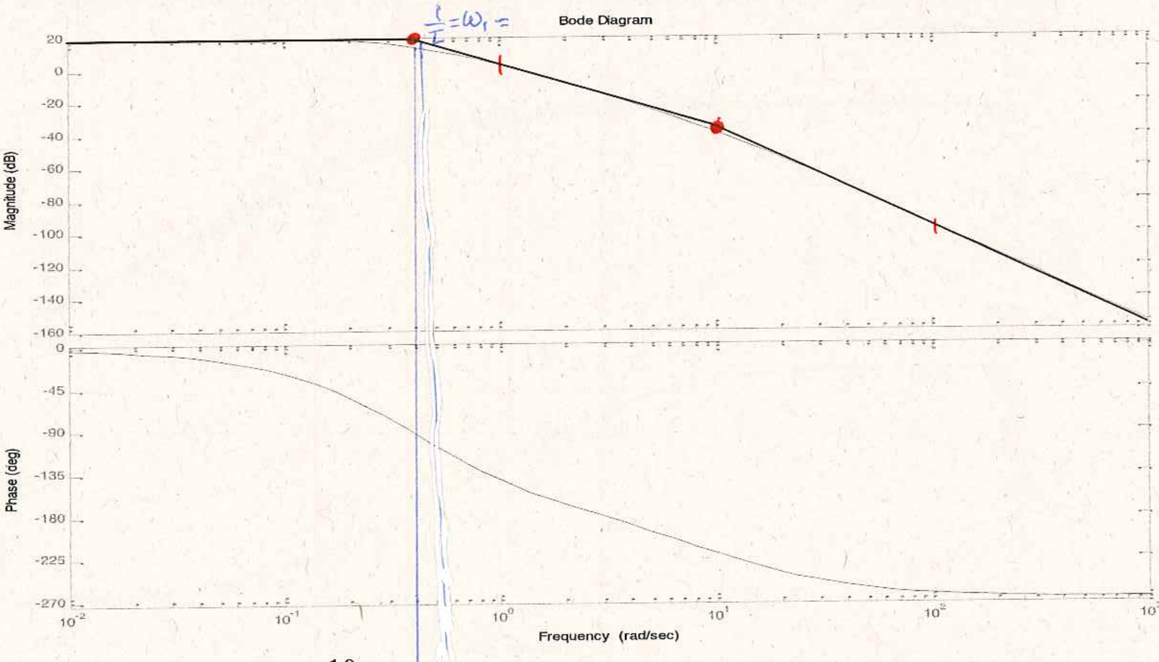
2. Trace el diagrama de Bode asintótico del siguiente sistema,

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(1+0,1s)}$$

y calcule la respuesta en estado estacionario a las siguientes entradas senoidales, ¿qué efecto tiene la frecuencia en la amplitud y el desfase?

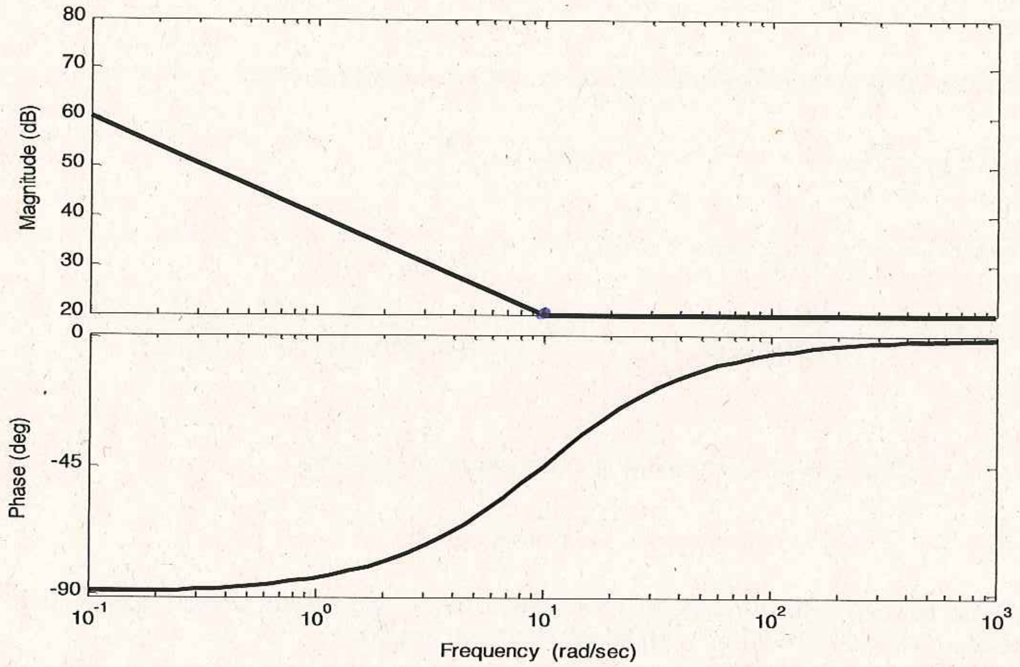
$$r(t)=2sen0,5t$$
$$r(t)=2sen5t$$

3. Identificar el sistema cuyo Bode de módulo es:



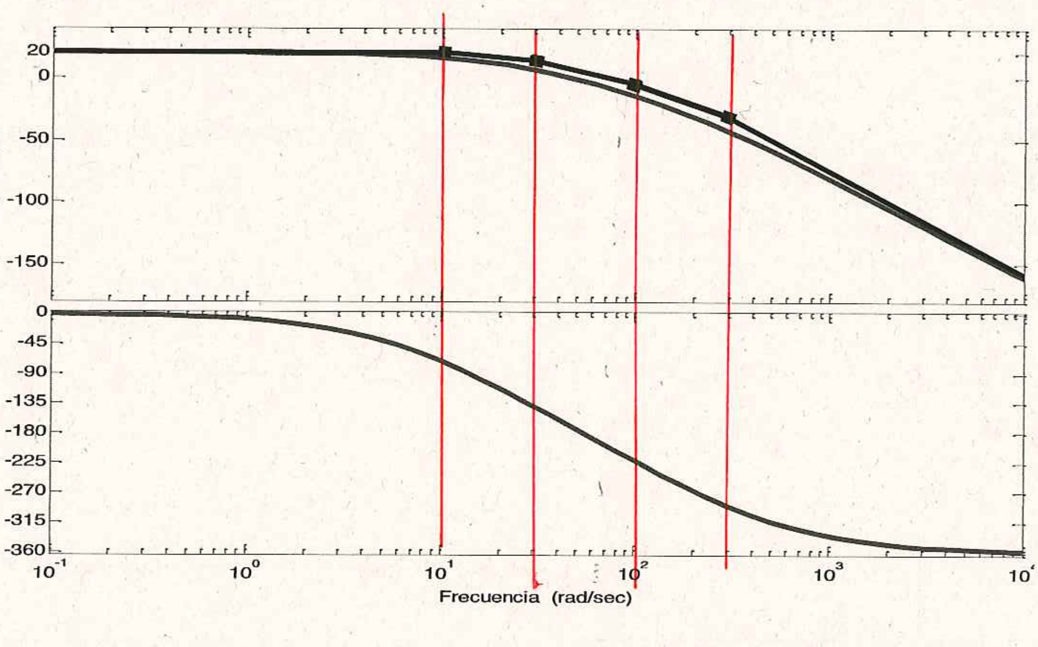
Resultado: $G(s)=\dfrac{10}{(1+2,5s)^2(1+0,1s)}$

4. El diagrama de la figura representa la G(s) de un controlador tipo PID. ¿Qué acciones tiene y cuál es el valor de sus parámetros?



Resultado: $G_{PI}(s) = \dfrac{10(1+0,1s)}{s}$

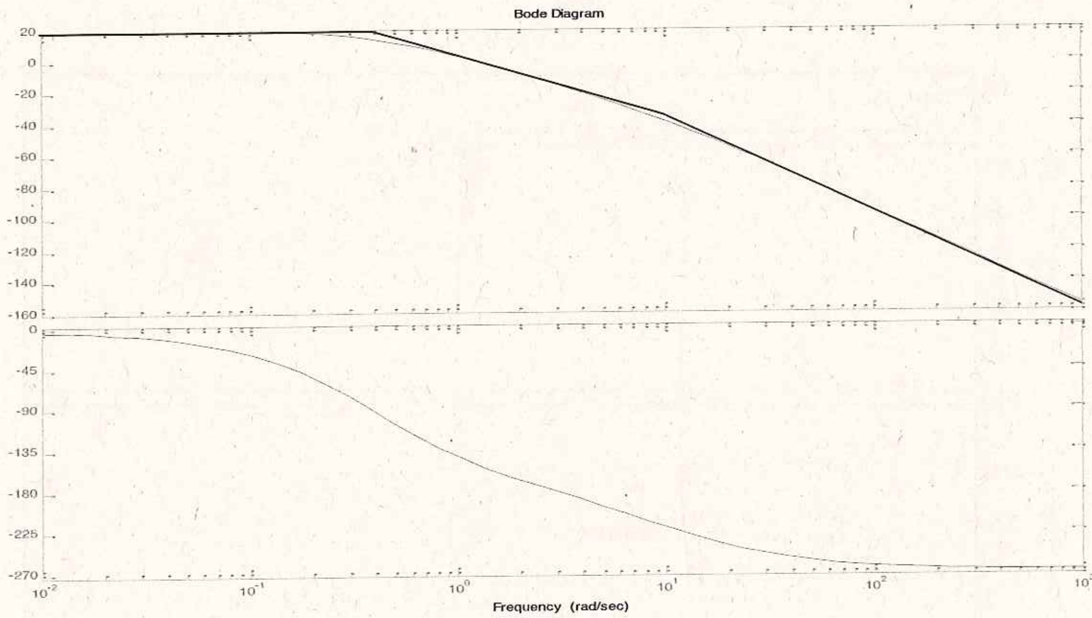
5. El diagrama de la figura representa la G(s) de un sistema de fase mínima. Identifique G(s).



Resultado:

$$G_{PI}(s) = \frac{10}{(1+0,1s)(1+0,033s)(1+0,01s)(1+0,0033s)} = \frac{9 \cdot 10^7}{(s+10)(s+30)(s+100)(s+300)}$$

6. El diagrama de la figura representa la $G_{BA}(s)$ de un sistema realimentado. ¿Qué error presentará a entrada escalón?



Resultado: $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{11}$

7. Sea el siguiente sistema realimentado con realimentación unitaria, calcule el valor de a para que MF=45°:

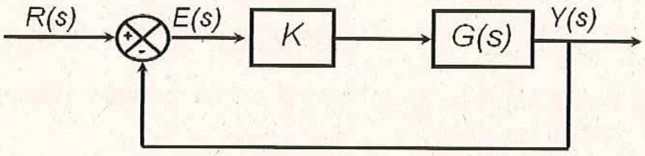
$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

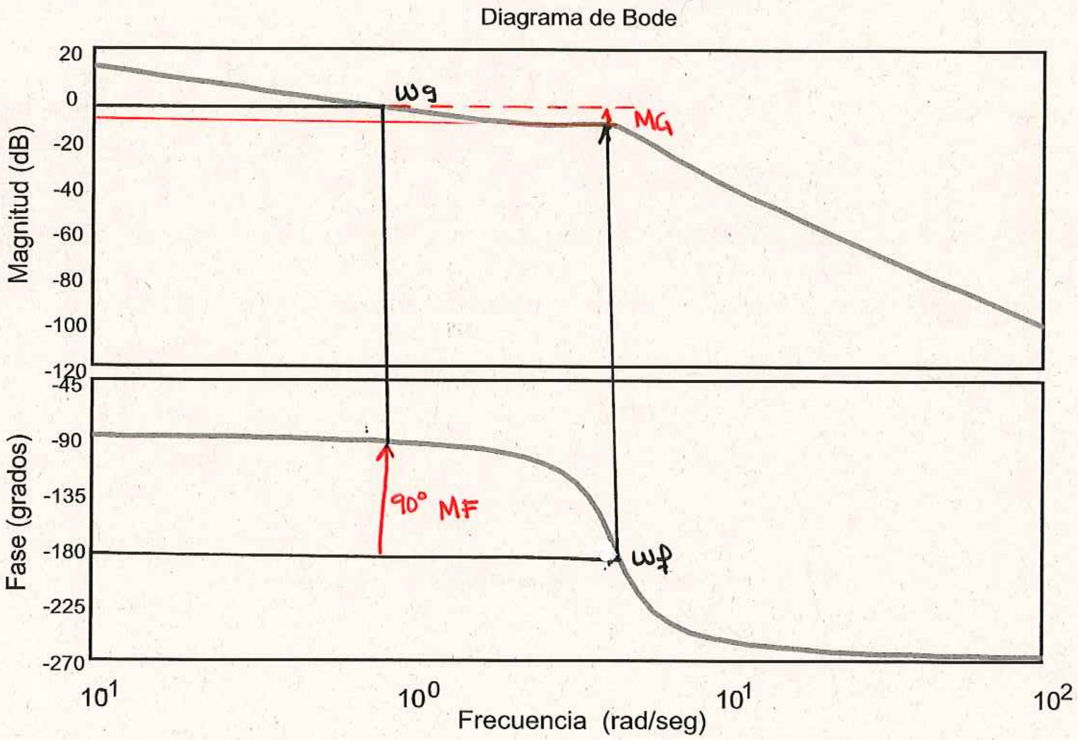
8. Sea un sistema realimentado con la siguiente función de transferencia en bucle abierto:

$$G_{BA}(s) = \frac{ke^{-s}}{s}$$

¿Cuál es el máximo valor de k que asegura la estabilidad en bucle cerrado?

9. Sea el sistema realimentado de la figura del que se conoce el diagrama de Bode de KG(s). Analice la estabilidad relativa (MG y MF). ¿Es posible aumentar más la ganancia K del controlador?

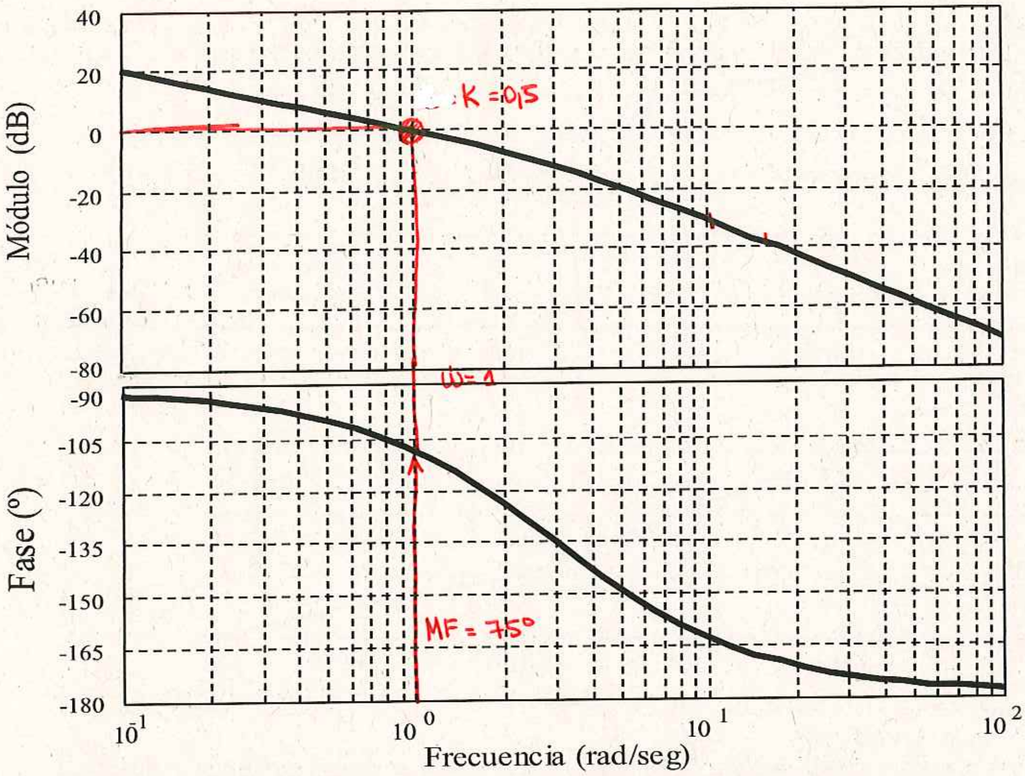




Resultado:

Sistema estable MG>0 y MF>0; SISTEMA ESTABLE
Es posible aumentar K hasta un valor de K=5,6. ?

10. Para el mismo sistema realimentado:



a) Calcule el MG y MF.
b) ¿Cuál será el error estacionario del sistema a entrada escalón 0,5?
c) ¿Y a rampa de pendiente 0.5?
d) ¿Será capaz de seguir a una señal de referencia r(t)=3sen5t?
e) ¿Es posible aumentar la K del controlador antes de que el sistema realimentado se haga inestable?

Resultado:

a) MG= infinito y MF=75º MG = ∞ MF = 75°

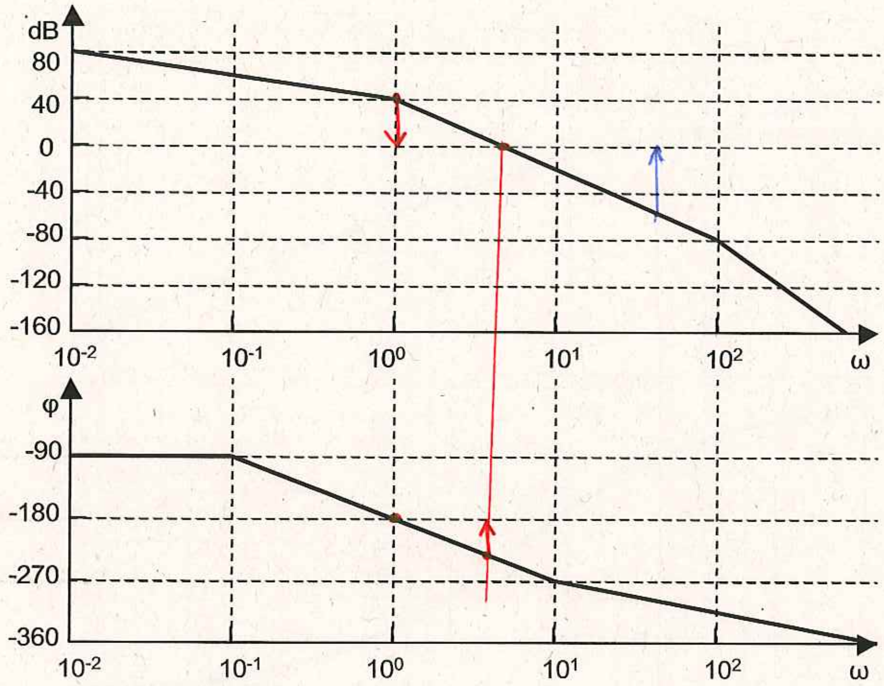
b) e_{ss} = 0 0 porque tiene un integrador en el origen

c) e_{ss} = 2 1/K = 1/0,5 = 2

d) No porque para w=5 el modulo de G(jw) es -20dB, y por tanto la señal de salida está tan atenuada que no logra seguir para esa frecuencia a dicha referencia.

e) Sí, hasta que K sature.

11. Para el mismo sistema realimentado:



$\omega_f = \omega_g$ críticamente estable.

$\omega_f = 50$

a) Calcule el MG y MF.

b) Si el sistema realimentado es estable, ¿hasta dónde se puede aumentar la ganancia del controlador sin que el sistema se haga inestable? Si es inestable, razone qué se podría hacer para estabilizarlo hasta obtener un MG=6dB.

Resultado:

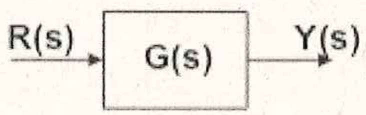
a) MG=-40dB y MF=-50º aprox. MF= 50º MG= -40dB

b) Sistema inestable; Para estabilizarlo y obtener un MG=6dB la ganancia debería aumentar a K=199,52.

Se trata de un sistema inestable

MG = 6dB ⇒ Ganancia: aumentar

12. Dado el sistema G(S), obtener la expresión de la respuesta a la entrada senoidal siguiente: r(t)=2sen3t



$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+5)}$$

Resultado: $y_{ss}(t) = 1{,}2\,sen(3t - 139{,}46^{\circ})$

13. Calcula la expresión de la tensión existente en los bornes del condensador, v(t), ante una entrada e(t) = 0.2 sen15t. (Pregunta del examen de Junio de 2013).