

# TEMA 7

---

## **INTRODUCCIÓN A LA RESISTENCIA DE MATERIALES. SISTEMAS FORMADOS POR PIEZAS PRISMÁTICAS**

---



## **7.1. INTRODUCCIÓN**

Se inicia en este tema el estudio propiamente dicho de la **Resistencia de Materiales**. En el tema introductorio a la asignatura se definió la Resistencia de Materiales como la ciencia que se ocupa del cálculo de la resistencia mecánica, de la rigidez y de la estabilidad de los elementos que intervienen en una estructura. Por otra parte, se ha visto también que el análisis de una estructura supone, en primer lugar, determinar las distribuciones de tensiones y deformaciones originadas en la misma como consecuencia de las sollicitaciones que está recibiendo (fuerzas, desplazamientos impuestos, variaciones de temperatura, ... ). Y que ambas distribuciones están relacionadas entre sí mediante las leyes constitutivas del material.

Conocidas las distribuciones de tensiones y de deformaciones, se está en condiciones de juzgar acerca de la resistencia de la estructura, aplicando las correspondientes teorías de fallo. Como es evidente, la resistencia de una estructura estará determinada por el estado de tensiones y deformaciones en los puntos que trabajan en condiciones más desfavorables.

Es interesante observar que mediante los conocimientos proporcionados por la Teoría de la Elasticidad se podría plantear un análisis riguroso y completo de la estructura, pero su resolución estrictamente analítica resulta prácticamente inabordable, y sólo se encuentran soluciones explícitas en muy pocos casos.

Afortunadamente, la inmensa mayoría de los elementos que componen las estructuras suelen presentar unas relaciones tales entre sus dimensiones geométricas que hacen posible la introducción de **hipótesis simplificativas** muy ventajosas para estudiar su comportamiento. Dado que un gran número de las estructuras más comunes están constituidas por **piezas prismáticas**, en el estudio de la Resistencia de Materiales que ahora se inicia se dedicará una atención casi exclusiva al análisis del comportamiento de este tipo de elementos.

## **7.2. LA PIEZA PRISMÁTICA. ESFUERZOS Y TENSIONES. HIPÓTESIS DE NAVIER**

Se define una **pieza prismática** como el volumen engendrado por una superficie plana, denominada *superficie generatriz*, al moverse a lo largo de una línea, llamada

## 7.2. LA PIEZA PRISMÁTICA. ESFUERZOS Y TENSIONES. HIPÓTESIS DE NAVIER

Se define una pieza prismática como el volumen engendrado por una superficie plana, denominada superficie generatriz, al moverse a lo largo de una línea. llamada *eje* o *directriz* de la pieza, de forma que la superficie generatriz permanece constantemente perpendicular a dicho eje, manteniendo en todo momento su centro de gravedad en el mismo

Para su estudio se utiliza un sistema de referencia adecuado a estas características geométricas: se denominará:

eje X a la recta tangente en cada punto al eje de la pieza

eje y a la recta que pasa por el centro de curvatura de la pieza,

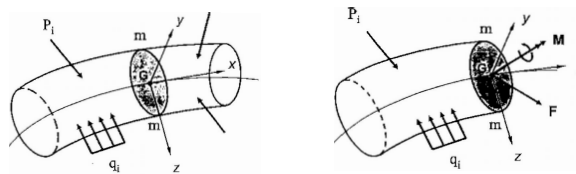
eje z a la recta binormal.

Los ejes x,y,z así definidos se corresponden con el sistema de referencia del triedro intrínseco. Como ejes y, z se elegirán los ejes principales de inercia de la sección.

Imagen

### Concepto de esfuerzo en la sección:

Sea una pieza prismática en equilibrio bajo la acción de unas fuerzas genéricas P y q. Para determinar la distribución de tensiones a que dan lugar en una sección transversal cualquiera m-m, se aplicará el principio del corte, es decir, se cortará la pieza por un plano que contenga dicha sección y se plantearán las condiciones de equilibrio a una de las dos partes en que queda dividida la pieza.



( $\sum F = 0$  y  $\sum M = 0$ ), se puede obtener el valor de una fuerza F y un momento M resultantes aplicados en el centro de gravedad de la sección. Si en lugar de aplicar esas dos ecuaciones vectoriales de equilibrio se aplican las correspondientes seis ecuaciones escalares:  $\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = \sum M_x = \sum M_y = 0$

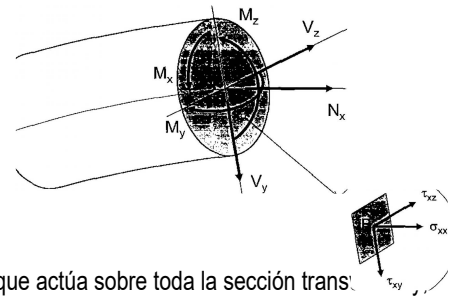
Las denominaciones específicas de cada uno de estos esfuerzos son las siguientes:

$N_x$ : esfuerzo normal, perpendicular al plano de la sección.

$\tau_{xy}, \tau_{xz}$ : esfuerzos cortantes, contenidos en el plano de la sección.

$M_x$ : momento torsor.

$M_y, M_z$ : momentos flectores



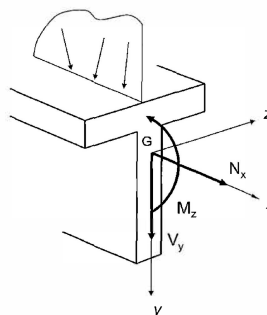
Los esfuerzos de sección son estáticamente equivalentes a la distribución de tensiones que actúa sobre toda la sección transversal, por lo tanto, se pueden expresar analíticamente en función de las tensiones en la forma:

$$N_x = \int \sigma_{xx} dA \quad M_x = \int (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA$$

$$V_y = \int \tau_{xy} dA \quad M_y = \int \sigma_{xx} z dA$$

$$V_z = \int \tau_{xz} dA \quad M_z = \int \sigma_{xx} y dA$$

Para obtener la distribución de tensiones en la sección, es preciso resolver las ecuaciones integrales. Para obtener la distribución de tensiones en la sección, es preciso resolver las ecuaciones integrales. La resolución analítica se facilita considerablemente introduciendo la hipótesis de Navier (o hipótesis de Bernoulli o de las secciones planas) y consiste en suponer que las secciones planas y normales al eje geométrico de la barra antes de la deformación, permanecen planas y normales al eje después de la deformación.



prismática en equilibrio bajo la acción de unas fuerzas genéricas  $P_i$  y  $q_i$  (fig. 7.2). Para determinar la distribución de tensiones a que dan lugar en una sección transversal cualquiera  $m-m$ , se aplicará el principio del corte, es decir, se cortará la pieza por un plano que contenga dicha sección y se plantearán las condiciones de equilibrio a una de las dos partes en que queda dividida la pieza.

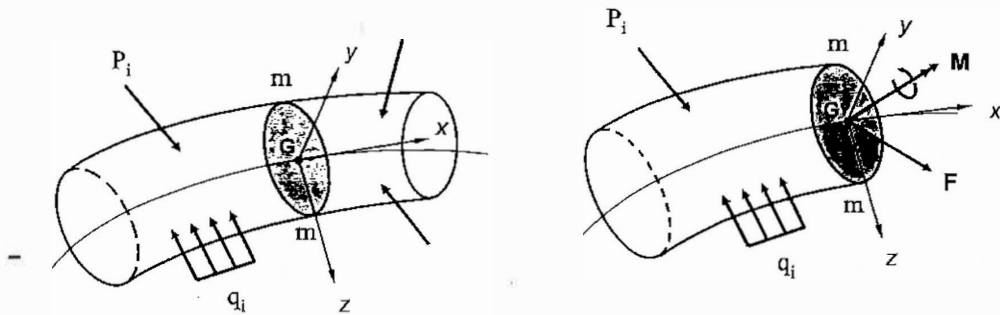


Figura 7.2. Aplicación del principio del corte a una pieza prismática

$$\sum M_z = 0$$

Mediante la aplicación de las condiciones universales de equilibrio ( $\sum \vec{F} = \vec{0}$  y  $\sum M_G = \vec{0}$ ), se puede obtener el valor de una fuerza  $\vec{F}$  y un momento  $\vec{M}$  resultantes aplicados en el centro de gravedad de la sección. Es habitual descomponer  $\vec{F}$  y  $\vec{M}$  según los tres ejes coordenados. A las componentes así obtenidas se les denomina *esfuerzos de sección*. Estos esfuerzos se pueden obtener directamente si en lugar de aplicar esas dos ecuaciones vectoriales de equilibrio se aplican las correspondientes seis ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 & & \end{aligned} \quad (7.1)$$

Las denominaciones específicas de cada uno de estos esfuerzos (fig. 7.3) son las siguientes:

- $N_x$  : **esfuerzo normal**, perpendicular al plano de la sección.
- $V_y, V_z$  : **esfuerzos cortantes**, contenidos en el plano de la sección.
- $M_x$  : **momento torsor**.
- $M_y, M_z$  : **momentos flectores**.

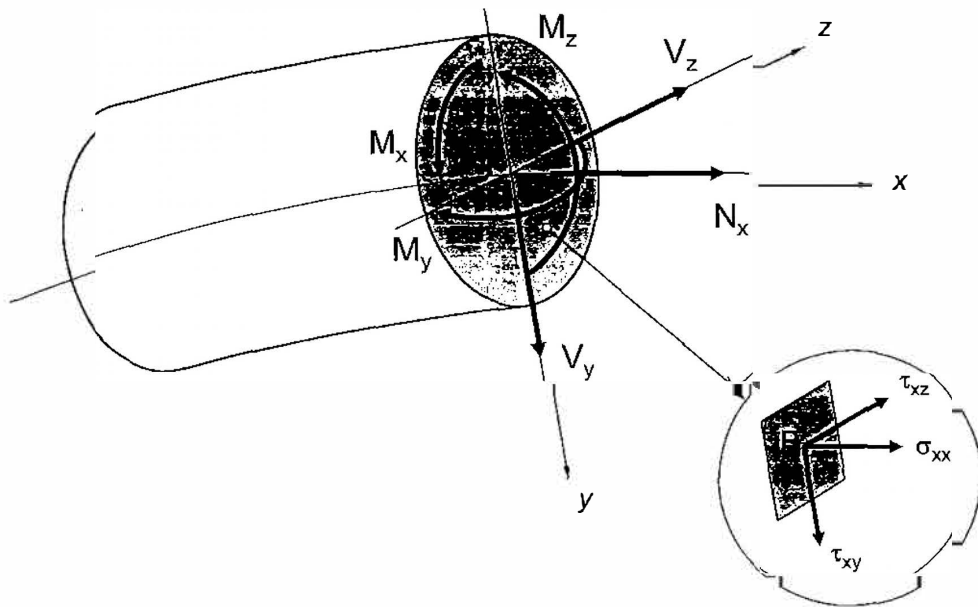


Figura 7.3. Esfuerzos de sección

Evidentemente, los esfuerzos de sección son estáticamente equivalentes a la distribución de tensiones que actúa sobre toda la sección transversal y, por lo tanto, se pueden expresar analíticamente en función de las tensiones en la forma:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int \sigma_{xx} dA & M_x &= \int (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA \\
 V_y &= \int \tau_{xy} dA & M_y &= \int \sigma_{xx}z dA \\
 V_z &= \int \tau_{xz} dA & M_z &= \int \sigma_{xx}y dA
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

En el caso particular de una pieza prismática recta, de sección simétrica, sometida a cargas situadas en el plano de simetría  $xy$ , el problema se convierte en un problema plano y se reduce a encontrar los tres esfuerzos:  $N_x$ ,  $V_y$ ,  $M_z$ , tal como se observa en la fig. 7.4.

Para obtener la distribución de tensiones en la sección, es preciso resolver las ecuaciones integrales (7.2), en donde cada una de las componentes de tensión es, en general, una función de las coordenadas  $y, z$ . La resolución analítica se facilita considerablemente introduciendo una hipótesis simplificativa relativa a las deformaciones y basada en la experiencia. Esta hipótesis se denomina **hipótesis de**

**Navier (o hipótesis de Bernouilli o de las secciones planas)** y consiste en suponer que las secciones planas y normales al eje geométrico de la barra antes de la deformación, permanecen planas y normales al eje después de la deformación. En temas posteriores se aplicará esta hipótesis para hallar la distribución de tensiones bajo distintos supuestos de cargas.

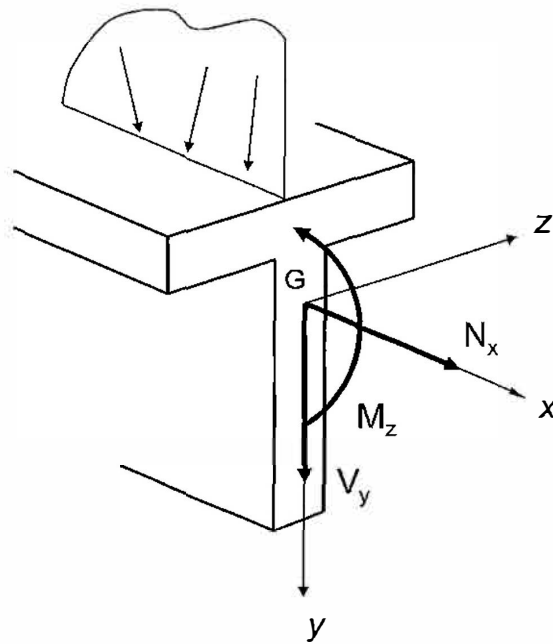
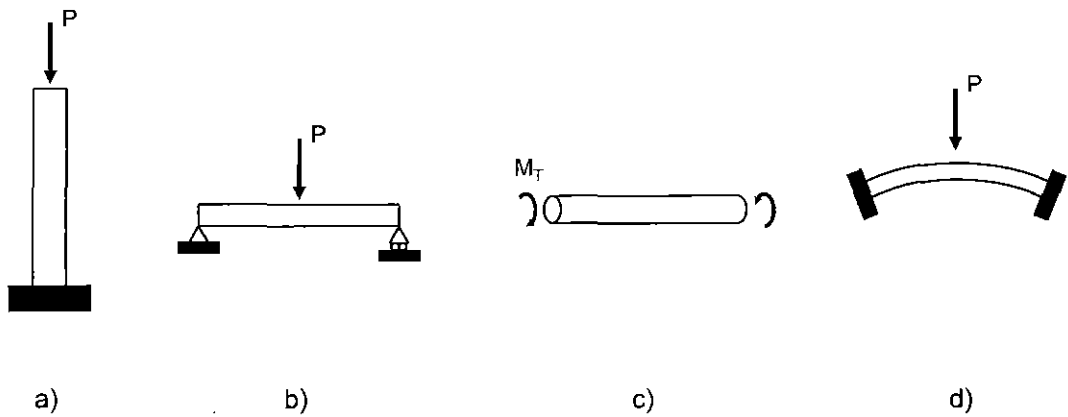


Figura 7.4. Pieza recta y simétrica con carga en el plano de simetría

### **7.3. PIEZAS PRISMÁTICAS Y ESTRUCTURAS SEGÚN EL MODO DE TRABAJO**

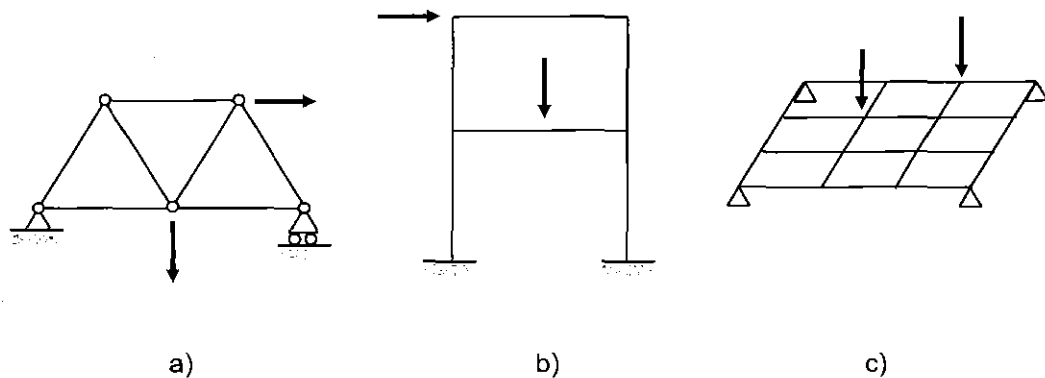
Las piezas prismáticas reciben denominaciones diferentes según sea su forma fundamental de trabajo (fig. 7.5). Y así, se denominan **columnas** cuando soportan fundamentalmente esfuerzos de compresión; **vigas** si la forma de trabajo preferente es la flexión; y **árboles** o **ejes** cuando lo es la torsión. En algunas ocasiones se reserva la denominación de **árbol** a una pieza que trabaja exclusivamente a torsión, en tanto que se denomina **eje** a la que trabaja con una combinación de flexión y torsión. Finalmente, los **arcos** son piezas que pueden absorber cargas verticales que se transmiten a través de su directriz curva, de forma que, por lo general, trabajan fundamentalmente a compresión.



**Figura 7.5. Tipos de piezas prismáticas según la forma de trabajar: a) columnas, b) vigas, c) árboles y ejes, d) arcos**

Por otra parte, se denomina **estructura** o **sistema de piezas prismáticas** al conjunto de piezas prismáticas ordenadas e interconectadas entre sí y con algún sistema exterior, de forma tal que es capaz de soportar y transmitir cargas exteriores.

Atendiendo a su geometría y a la disposición con respecto a ésta de las cargas que soportan, las estructuras pueden clasificarse en celosías (planas y espaciales), pórticos planos, emparrillados y pórticos tridimensionales (fig. 7.6).



**Figura 7.6. Tipos de estructuras según la geometría y tipo de cargas: a) celosías, b) pórticos planos, c) emparrillados**

Las **celosías** están formadas por barras rectas biarticuladas sometidas a cargas aplicadas en los nudos, de tal forma que los esfuerzos en cada una de las barras se



reducen a un esfuerzo axial  $N_x$ . Si estructura y cargas están en un mismo plano la celosía se denomina plana; en caso contrario, espacial. Los **pórticos planos** son estructuras planas de barras prismáticas unidas, generalmente, mediante nudos rígidos, capaces de transmitir momentos flectores. Como las cargas se aplican en el mismo plano de la estructura, no aparecen momentos torsores. Los **emparrillados** presentan la misma tipología que el pórtico plano, pero las cargas pueden estar fuera del plano de la estructura y dar lugar, por consiguiente, a momentos torsores. En los **pórticos tridimensionales**, las cargas pueden estar aplicadas en cualquier dirección respecto a la estructura, que en general no es plana.

#### **7.4. ACCIONES Y REACCIONES. APOYOS**

Una estructura puede estar sometida a diversos tipos de **acciones** que, por lo general, pertenecerán a uno de estos dos grupos básicos: fuerzas o cargas impuestas y desplazamientos impuestos (asentamientos, etc.).

Dentro de las cargas o fuerzas, se distingue entre *fuerzas de volumen* (gravitatorias, inerciales, etc.) y *fuerzas de superficie* (las aplicadas en puntos de la superficie). Estas últimas pueden ser, a su vez, *concentradas* o *distribuidas*.

En cuanto a su permanencia en la estructura, las acciones en general pueden ser *permanentes* o *accidentales*. Si se considera su dependencia con el tiempo, se dividen en *estáticas* y *dinámicas*. Finalmente, si las cargas se deben a efectos térmicos se denominan *cargas térmicas*.

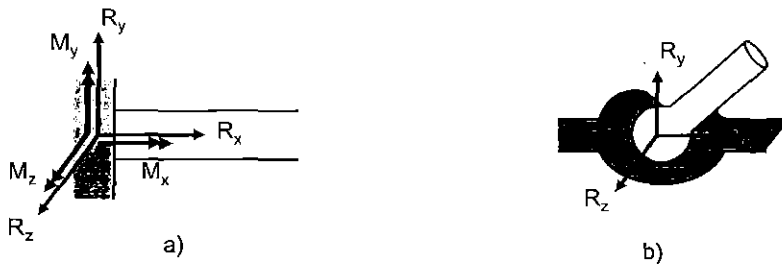
Las cargas aplicadas a una estructura se transmiten, a través de sus diversos elementos, a un determinado número de soportes o apoyos, que vinculan la estructura a otra independiente o al propio suelo. Las fuerzas que se desarrollan en dichos soportes o apoyos se denominan **reacciones**.

Por cada grado de libertad impedido, aparece una componente de reacción. Así, las restricciones en los desplazamientos en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ó en los giros  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  dan lugar a reacciones  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  ó momentos  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , respectivamente. Según qué grados de libertad resulten impedidos, los *apoyos* se clasifican en los siguientes tipos básicos:

- **Articulación:** impide desplazamientos, pero permite giros. En el espacio habría tres componentes de fuerza de reacción, y en el caso plano sólo dos.
- **Empotramiento:** impide tanto desplazamientos como giros. En el espacio habría seis reacciones: tres componentes de fuerza y tres de momento, y en el caso plano sólo tres: dos de fuerza y una de momento.

En la fig. 7.7 se representan esquemáticamente los casos espacial y plano. Cada uno de los tipos básicos admite variantes. Por ejemplo, el apoyo articulado puede ser fijo o móvil. En este segundo caso, se libera alguno de los tres desplazamientos. De la misma forma, pueden encontrarse empotramientos fijos o móviles.

I) Espacio



II) Plano

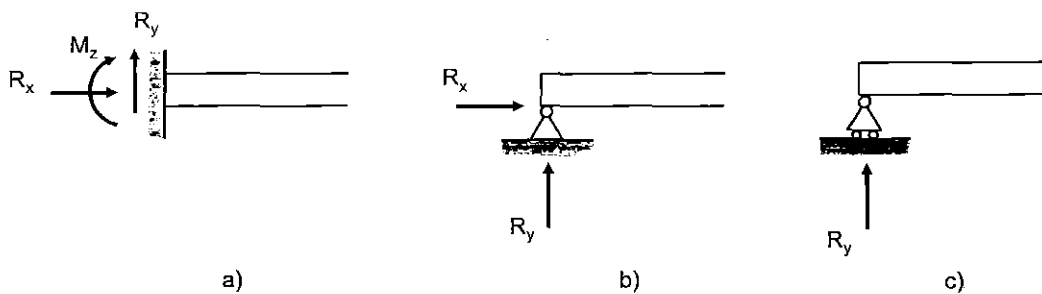


Figura 7.7. Tipos de apoyos: I) Espacio: a) empotramiento, b) articulación, II) Plano: a) empotramiento, b) articulación fija, c) articulación móvil o deslizante

## 7.5. ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS

En el análisis de una estructura cargada interesará conocer los valores de las reacciones que se generan en los apoyos como consecuencia de las cargas aplicadas. Su cálculo reviste gran importancia entre otras cosas porque, por lo

general, su conocimiento es necesario para obtener los esfuerzos en cualquier sección de la estructura.

Para la determinación de las reacciones habrá que plantear el equilibrio de la estructura y resolver el sistema de ecuaciones resultantes de este planteamiento. Para algunas estructuras las ecuaciones así formuladas serán suficiente para obtener los valores de las reacciones, pero en otras ocasiones no serán suficientes y se hará necesario añadir algunas condiciones de deformación que la estructura debe cumplir.

Quando la mera aplicación de las ecuaciones de equilibrio permite determinar todas las reacciones, la estructura se denomina **isostática**: la estructura tiene el número de enlaces estrictamente necesario para garantizar su equilibrio. En cambio, si el número de incógnitas (reacciones) supera al de ecuaciones de equilibrio, la estructura se denomina **hiperestática**: el número de enlaces supera a los estrictamente necesarios para garantizar el equilibrio, y se suele decir que tiene ligaduras superabundantes o superfluas. A la diferencia entre reacciones y ecuaciones de equilibrio se le denomina **grado de hiperestaticidad**. Es un indicador del número de condiciones de deformación que es necesario añadir a las ecuaciones de equilibrio para calcular las reacciones. En la figura 7.8, se incluyen algunos ejemplos.

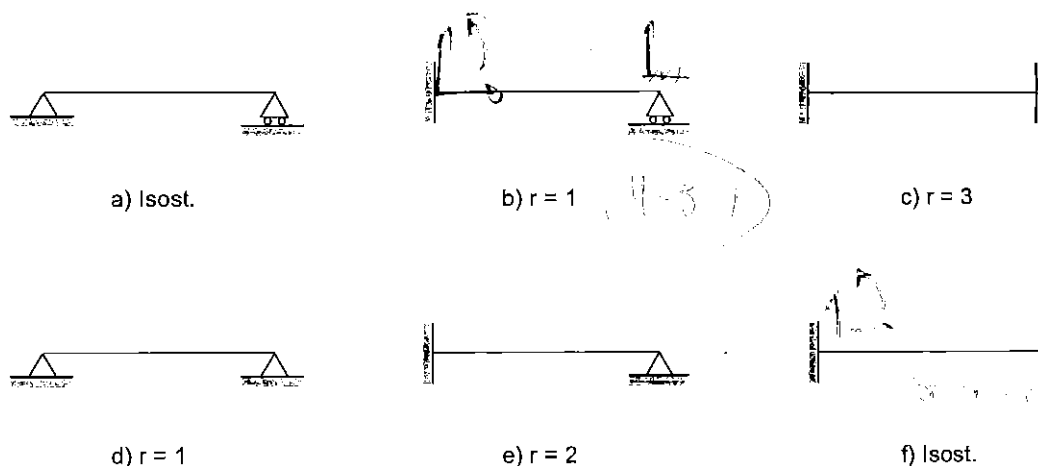


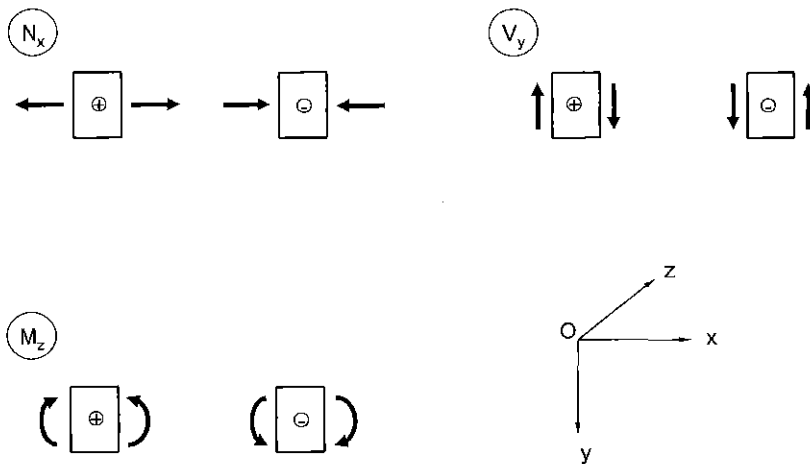
Figura 7.8. Ejemplos de estructuras isostáticas e hiperestáticas.

## 7.6. DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

Aun cuando, por lo general, el objetivo final del análisis de una estructura es determinar los estados de tensiones y deformaciones originados por las cargas que

está soportando, **las incógnitas primarias del problema en el caso de estructuras de piezas prismáticas son los esfuerzos de sección** ya que, como posteriormente se verá, tanto tensiones como deformaciones pueden calcularse con relativa sencillez una vez conocidos dichos esfuerzos. Y así, por ejemplo, para localizar los puntos más comprometidos de la estructura habrá que comenzar por determinar en qué secciones se encuentran esos puntos, para lo que resultará particularmente útil conocer cómo son los esfuerzos de sección en toda la estructura.

De ahí la gran utilidad que tienen en el análisis de estructuras los denominados **diagramas de esfuerzos de sección**, que no son sino representaciones gráficas planas de los distintos esfuerzos a lo largo del eje de cada una de las piezas de la estructura. Para hacer esta representación de un esfuerzo cualquiera habrá que comenzar determinando su expresión analítica en función de la longitud medida a lo largo del eje de la pieza, para lo que resulta especialmente apropiado utilizar el principio del corte. Como paso previo habitualmente será necesario calcular las reacciones en los apoyos de la estructura. En la fig. 7.9 se indica el *criterio de signos* usual para los esfuerzos originados por un sistema de cargas en el plano  $xy$ .



**Figura 7.9. Convenio usual de signos para los esfuerzos de sección**

**Ejemplo.** Dibujarlos diagramas de los esfuerzos de sección para la viga biapoyada de la fig. 7.10, sometida a la carga indicada de 50 kN.

Mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio se obtienen para las reacciones los siguientes valores:

$$H_A = 30 \text{ kN} \quad V_A = 16 \text{ kN} \quad V_B = 24 \text{ kN}$$

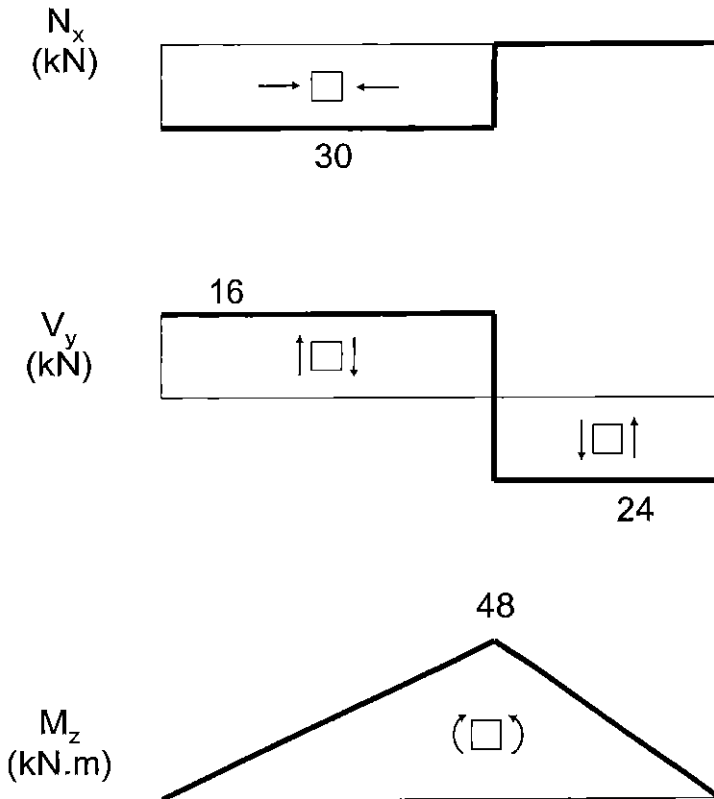
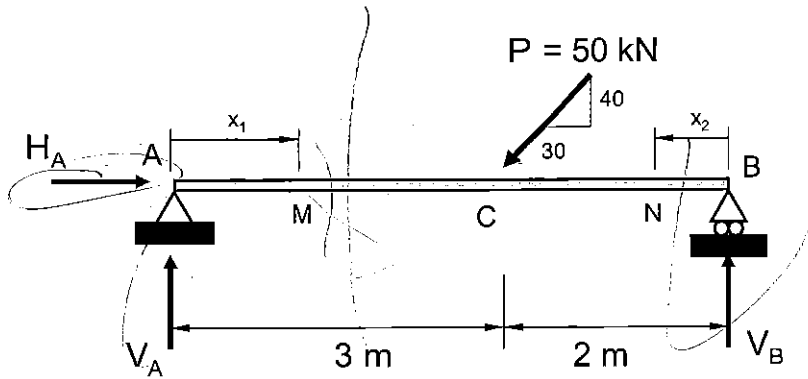


Figura 7.10. Ejemplo de obtención de los diagramas de esfuerzos.

Para calcular los esfuerzos en una sección intermedia genérica  $M$  situada entre  $A$  y  $C$  e identificada por su distancia  $x_1$  al apoyo  $A$ , se hace en  $M$  un corte transversal al eje de la pieza y se estudia el equilibrio de cualquiera de las dos partes en que ésta

queda dividida. En este equilibrio intervienen las reacciones en los apoyos previamente calculadas. Y así, del equilibrio del tramo AM se obtienen las siguientes expresiones para los esfuerzos en esa sección M, supuestos todos ellos positivos:

$$N_x = -30 \quad V_y = -16 \quad M_z = 16 \cdot x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq 3)$$

Estos valores son válidos para todo el tramo AC. Sus representaciones gráficas se indican en la misma figura 7.10. Las unidades utilizadas han sido m y kN.

Para obtener las representaciones correspondientes al tramo CB de la viga, puede hacerse un planteamiento totalmente similar. Se hace un corte por una sección genérica N de ese tramo, identificada, por ejemplo, por su distancia  $x_2$  al apoyo B, y se estudia el equilibrio de cualquiera de las dos mitades en que la viga queda dividida, por ejemplo la NB. Suponiendo de nuevo esfuerzos positivos se obtienen para los mismos las siguientes expresiones:

$$N_x = 0 \quad V_y = -24 \quad M_z = 24 \cdot x_2 \quad (0 \leq x_2 \leq 2)$$

Su representación gráfica completa los diagramas representados en la figura.

### **7.7. ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO PARA PIEZAS PRISMÁTICAS**

En la fig. 7.11 se representa el equilibrio de un elemento de longitud diferencial  $dx$ , de una viga sometida a una carga vertical distribuida  $q(x)$  que varía de una forma arbitraria. Por ser este elemento de longitud indefinidamente pequeña puede considerarse uniforme la carga que actúa sobre su longitud  $dx$ .

Las ecuaciones de equilibrio aplicadas a ese elemento proporcionan las siguientes relaciones entre los esfuerzos y la carga aplicada:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_y - (V_y + dV_y) - q(x)dx = 0 \Rightarrow \frac{dV_y}{dx} = -q \quad (7.3)$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_z + V_y dx - q(x)dx \frac{dx}{2} - (M_z + dM_z) = 0 \Rightarrow \frac{dM_z}{dx} = V_y \quad (7.4)$$

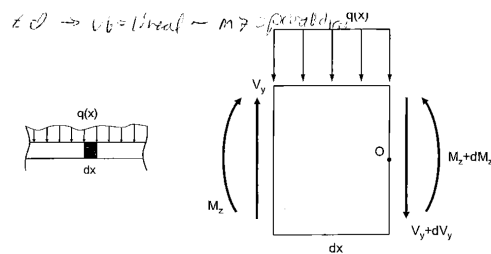
## 7. ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO PARA VIGAS PRISMÁTICAS

En la fig. se representa el equilibrio de un elemento de longitud diferencial  $dx$ , de una viga sometida a una carga vertical distribuida  $q(x)$  que varía de una forma arbitraria. Por ser este elemento de longitud indefinidamente pequeña puede considerarse uniforme la carga que actúa sobre su longitud  $dx$ .

Las ecuaciones de equilibrio aplicadas a ese elemento proporcionan las siguientes relaciones entre los esfuerzos y la carga aplicada:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_y - (V_y + dV_y) - q(x)dx = 0 \Rightarrow \frac{dV_y}{dx} = -q \quad (7.3)$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_z + V_y dx - q(x)dx \frac{dx}{2} - (M_z + dM_z) = 0 \Rightarrow \frac{dM_z}{dx} = V_y \quad (7.4)$$



Son las Ecuaciones diferenciales de equilibrio y permiten formular algunas conclusiones generales sobre la forma de los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores

La pendiente del diagrama de esfuerzos cortantes es igual y de signo contrario a la carga  $q(x)$ , suponiendo que  $q$  es positiva si actúa en el sentido positivo del eje  $y$  (es decir, hacia abajo).

Los máximos y mínimos de los diagramas  $V_y$  y  $M_z$ , se corresponden con los puntos nulos de los diagramas  $q$  y  $V_y$ , respectivamente.

Como casos particulares, se deduce:

Si  $q = \text{cte}$  en un tramo de la viga, en él el diagrama de cortantes  $V_y$  será lineal y el de flectores  $M_z$ , cuadrático.

Si  $q = 0$  (no existe carga distribuida) en un tramo, el cortante  $V_y$  será constante y el momento  $M_z$ , lineal en dicho tramo.

En las secciones en que estén aplicadas cargas puntuales (sean acciones o reacciones), el diagrama de  $V_y$  sufrirá un salto brusco de magnitud igual a dicha carga y en el de  $M_z$  aparecerá el vértice correspondiente (discontinuidad en la derivada).

$q=0 \rightarrow V_y = cte \Rightarrow M_z = \text{lineal}$

$q=cte \neq 0 \rightarrow V_y = \text{lineal} - M_z = \text{parabólica}$

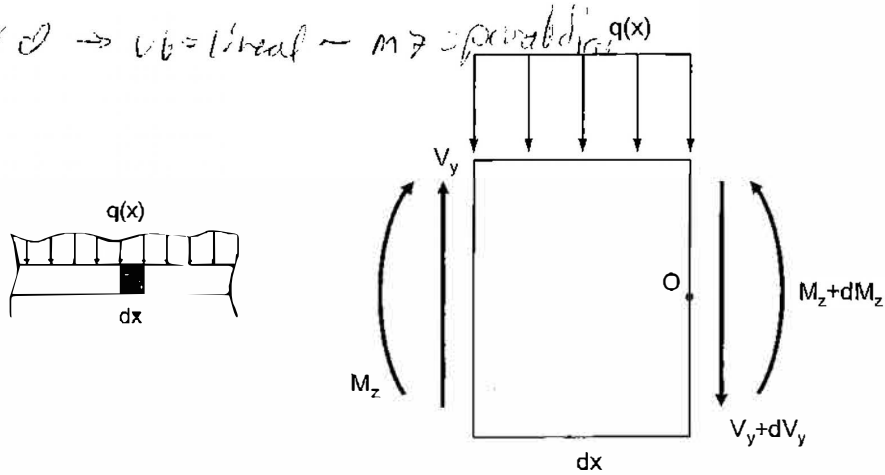


Figura 7.11. Equilibrio de un elemento diferencial en una pieza prismática

Estas dos expresiones se conocen con el nombre de **ecuaciones diferenciales de equilibrio** y permiten formular algunas conclusiones generales sobre la forma de los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores. Según ellas, la pendiente del diagrama de esfuerzos cortantes es igual y de signo contrario a la carga  $q(x)$ , suponiendo que  $q$  es positiva si actúa en el sentido positivo del eje  $y$  (es decir, hacia abajo). Y, además, la pendiente del diagrama de momentos flectores coincide con el valor del cortante  $V_y$  en cada sección de la viga.

Las ecuaciones (7.3) y (7.4) también ponen de manifiesto que los máximos y mínimos de los diagramas  $V_y$  y  $M_z$  se corresponden respectivamente con los puntos nulos de los diagramas  $q$  y  $V_y$ , respectivamente.

Como **casos particulares**, se deduce asimismo que:

- Si  $q = cte$  en un tramo de la viga, en él el diagrama de cortantes  $V_y$  será lineal y el de flectores  $M_z$  cuadrático.
- Si  $q = 0$  (no existe carga distribuida) en un tramo, el cortante  $V_y$  será constante y el momento  $M_z$  lineal en dicho tramo.
- En las secciones en que estén aplicadas **cargas puntuales** (sean acciones o reacciones), el diagrama de  $V_y$  sufrirá un salto brusco de magnitud igual a



dicha carga y en el de  $M_z$  aparecerá el vértice correspondiente (discontinuidad en la derivada).

Entre otras aplicaciones, las ecuaciones diferenciales de equilibrio pueden utilizarse para obtener los diagramas de esfuerzo cortantes y momentos flectores de una viga.

**Ejemplo.** Obtener los diagramas de esfuerzos de la viga de la fig. 7.12 empleando las ecuaciones diferenciales de equilibrio. Se trata de una viga biapoyada de longitud  $L$  sometida a una carga uniformemente distribuida de intensidad  $q$ .

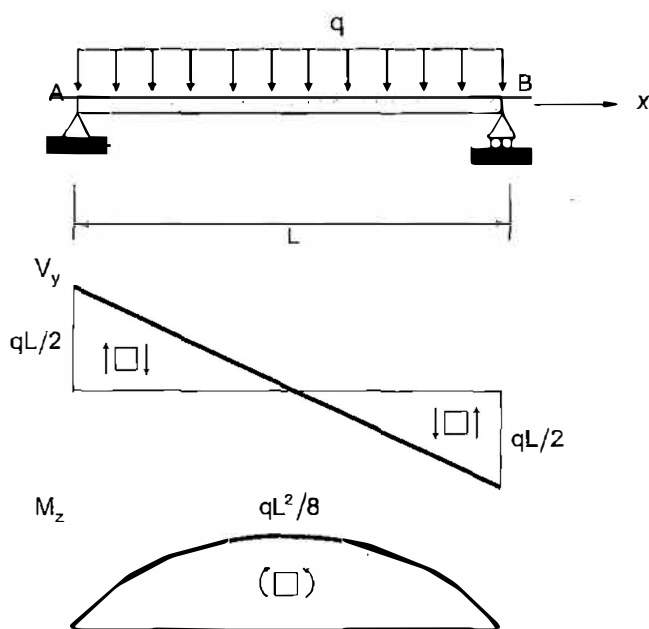


Figura 7.12. Ejemplo de aplicación de las ecuaciones diferenciales de equilibrio.

Integrando la ecuación (7.3) resulta:

$$V_y = -q \cdot x + C_1$$

donde  $C_1$  es una constante de integración, que podría determinarse si se conociera el esfuerzo cortante para un valor particular de  $x$ . Así sucede en las secciones de apoyo, en las que el esfuerzo cortante tiene la misma magnitud que las reacciones. A pesar de ello, como después se justificará, el cálculo de estas últimas no se hace preciso en

este caso. Sustituyendo este valor de  $V_y$  en (7.3) e integrando la expresión resultante se obtiene:

$$M_z = -q \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2$$

Para el cálculo de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , se dispone de dos condiciones de contorno: en los apoyos de la viga el momento flector es nulo, es decir:  $M_z = 0$ , en  $x=0$  y  $x=L$ . Al introducir estas condiciones, se obtienen los valores:  $C_1=qL/2$  y  $C_2=0$ , resultando para los esfuerzos las siguientes expresiones:

$$V_y = q \left( \frac{L}{2} - x \right) \quad M_z = q \frac{x}{2} (L - x)$$

La representación gráfica de estas dos ecuaciones no son sino los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores y se incluyen en la fig. 7.12. Como puede observarse, las relaciones (7.3) y (7.4) se satisfacen en todas las secciones de la viga.

## 7.8. PRINCIPIO DE SAINT-VENANT

La metodología seguida en los procedimientos de análisis típicos de la Resistencia de Materiales puede lugar a ciertos errores a la hora de determinar la distribución real de tensiones en una pieza sometida a cargas. Ocurre, por ejemplo, cuando se obtiene dicha distribución a partir de los esfuerzos de sección, en puntos cercanos a los de aplicación de las cargas. No obstante, esos errores suelen ser poco significativos y se confinan en pequeñas regiones cerca del contorno, no afectando al comportamiento global de la pieza.

Este hecho se recoge en un principio fundamental en la mecánica de sólidos conocido como **Principio de Saint-Venant**, que puede enunciarse del siguiente modo:

*"Si se reemplaza una carga que actúa sobre una pequeña zona de la superficie de un cuerpo elástico por otra carga estáticamente equivalente, el cambio en la distribución de tensiones se apreciará sólo en las zonas próximas a la de aplicación de la carga, siendo la distribución en puntos suficientemente alejados prácticamente invariable."*

## .8. PRINCIPIO DE SAINT ENANT

La metodología seguida en los procedimientos de análisis típicos de la Resistencia de Materiales puede lugar a ciertos errores a la hora de determinar la distribución real de tensiones en una pieza sometida a cargas. No obstante, esos errores suelen ser poco significativos y se confinan en pequeñas regiones cerca del contorno, no afectando al comportamiento global de la pieza.

Este hecho se recoge el Principio de Saint- enant, que puede enunciarse del siguiente modo:

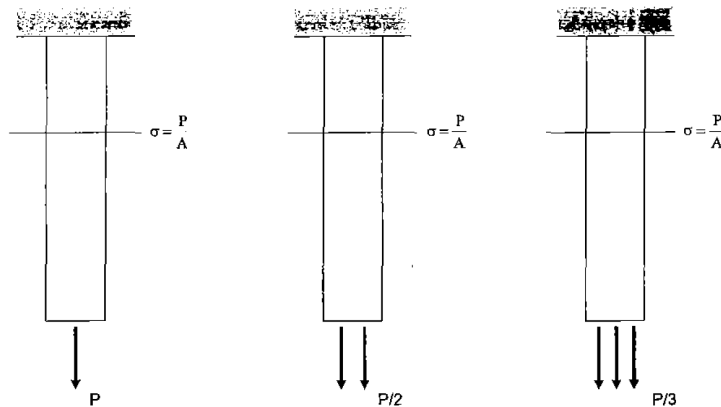
"Si se reemplaza una carga que actúa sobre una pequeña zona de la superficie de un cuerpo elástico por otra carga estáticamente equivalente, el cambio en la distribución de tensiones se apreciará sólo en las zonas próximas a la de aplicación de la carga, siendo la distribución en puntos suficientemente alejados prácticamente invariable."

En la fig se ejemplifica este principio para el caso particular de una barra de sección A sometida a tracción. Como puede observarse los tres sistemas son estáticamente equivalentes. En los tres casos el esfuerzo normal es constante,  $N_x=P$ ,

lo que llevaría a pensar que, también en los tres casos, la tensión normal en todos los puntos de la barra es idéntica, de valor  $P/A$ .

Un análisis más detallado, con los métodos propios de la Teoría de la Elasticidad, permite concluir que esto es cierto únicamente en puntos alejados de los de aplicación de las cargas, mientras que en puntos próximos cada sistema de cargas da lugar a una distribución de tensiones diferente.

El principio deja de ser válido en secciones donde se presenten entallas, orificios o cuando se produzca un cambio brusco de la sección transversal.



**Figura 7.13. Principio de Saint-Venant**

En la fig. 7.13 se ejemplifica este principio para el caso particular de una barra de sección  $A$  sometida a tracción bajo esos tres sistemas de cargas diferentes. Como puede observarse los tres sistemas son estáticamente equivalentes. En los tres casos el esfuerzo normal es constante a lo largo de la barra, de valor  $N_x=P$ , lo que llevaría a pensar que, también en los tres casos, la tensión normal en todos los puntos de la barra es idéntica, de valor  $P/A$ .

Un análisis más detallado, por ejemplo con los métodos propios de la Teoría de la Elasticidad, permite concluir que esto es cierto únicamente en puntos alejados de los de aplicación de las cargas, mientras que en puntos próximos cada sistema de cargas da lugar a una distribución de tensiones diferente.

El principio deja de ser válido en secciones donde se presenten entallas, orificios o cuando se produzca un cambio brusco de la sección transversal.

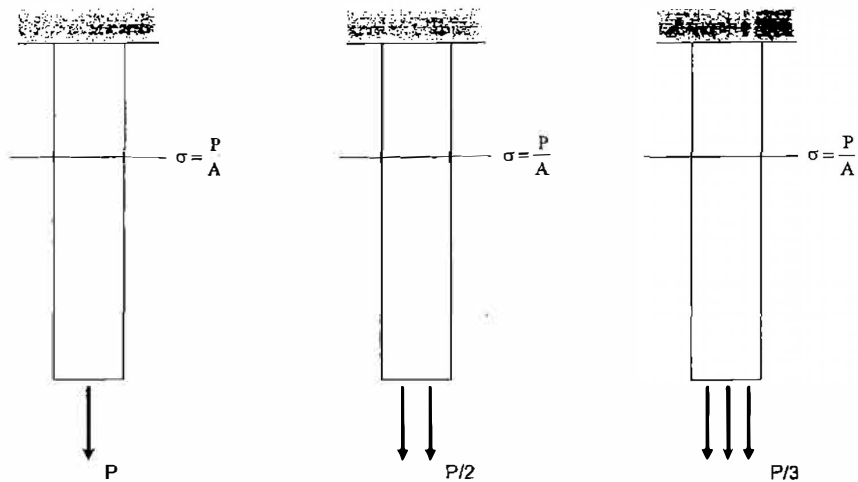


Figura 7.13. Principio de Saint-Venant

## 7.9. COEFICIENTE DE SEGURIDAD

En el diseño de una estructura han de tenerse en cuenta todos los factores que, de una manera u otra, afectan al cálculo mecánico de sus elementos. Entre estos factores, deben destacarse posibles imprevistos (sobrecargas, acciones sísmicas, etc), así como los derivados de las simplificaciones efectuadas en los cálculos.

Respecto a estos últimos, debe considerarse, en primer lugar, que realmente el sólido no es perfectamente homogéneo, continuo e isótropo como se le supone; después, que la Resistencia de Materiales formula sus métodos de cálculo en base a una serie de hipótesis simplificadoras, definidas para sus elementos más característicos, que no se cumplen estrictamente en la realidad; y además, que el modelo de la estructura es un modelo limitado, en cuanto prescinde de la consideración de un cierto número de variables que pueden afectar a la solución del problema.

Por estas y otras razones, la tensión máxima prevista por los métodos de cálculo de la Resistencia de Materiales puede diferir apreciablemente de la tensión máxima real en la estructura. Para tener en cuenta esta particularidad y garantizar un margen de seguridad, se introduce el llamado **coeficiente o factor de seguridad  $n$** , coeficiente superior a la unidad que permite definir una tensión admisible en la forma:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{lim}}{n} \quad (7.8)$$

donde  $\sigma_{lim}$  es la tensión límite del material (tensión de fluencia en materiales dúctiles o de rotura en materiales frágiles).

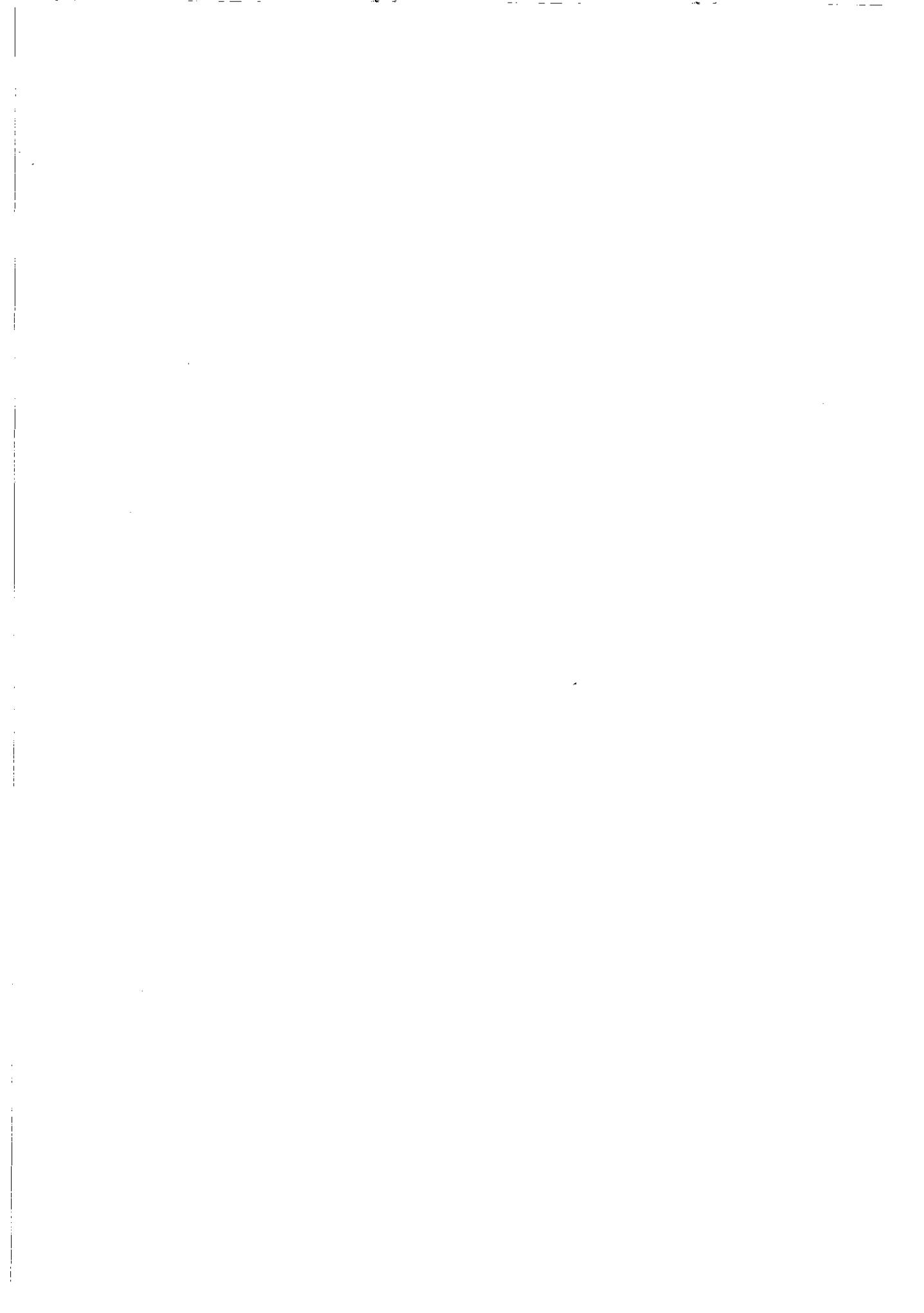
En la magnitud de  $n$  debe incluirse el efecto negativo de todos los factores imprevistos en el cálculo: sobrecargas, posibles defectos del material (poros, etc.) o que aparezcan con el uso (corrosión, golpes, etc.), errores de ejecución de obra, etc.

Por consiguiente, para una elección adecuada de  $n$ , resulta de importancia decisiva ponderar, entre otros, los siguientes factores:

- el grado de incertidumbre de las cargas,
- el tipo de carga (estática, dinámica, fatiga),
- las inexactitudes de construcción (in situ, en taller),
- las consecuencias del fallo,
- el deterioro por elementos ambientales (erosión, corrosión).

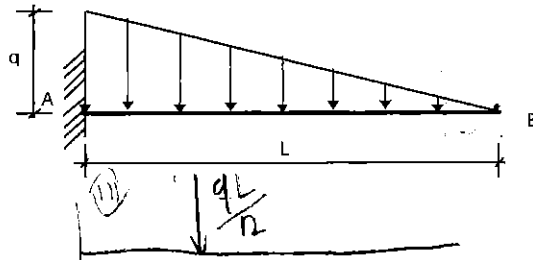
Suele ser habitual asignar valores  $n_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) a cada uno de estos factores y determinar el coeficiente de seguridad global mediante el producto:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k \quad (7.9)$$

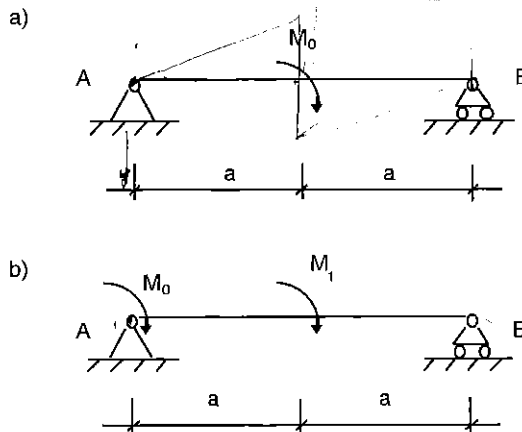


## PROBLEMAS

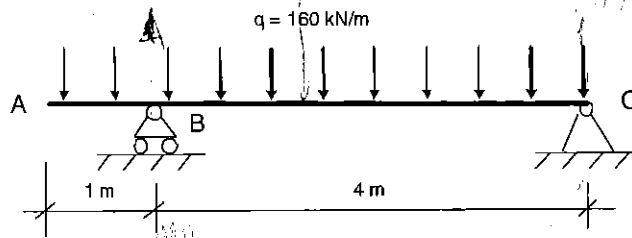
7.1. Determinar las reacciones y los diagramas de momento flector y esfuerzo cortante en el voladizo de la figura, que se encuentra sometido a una carga triangular, siendo  $q$  N/m la carga que actúa en el empotramiento.



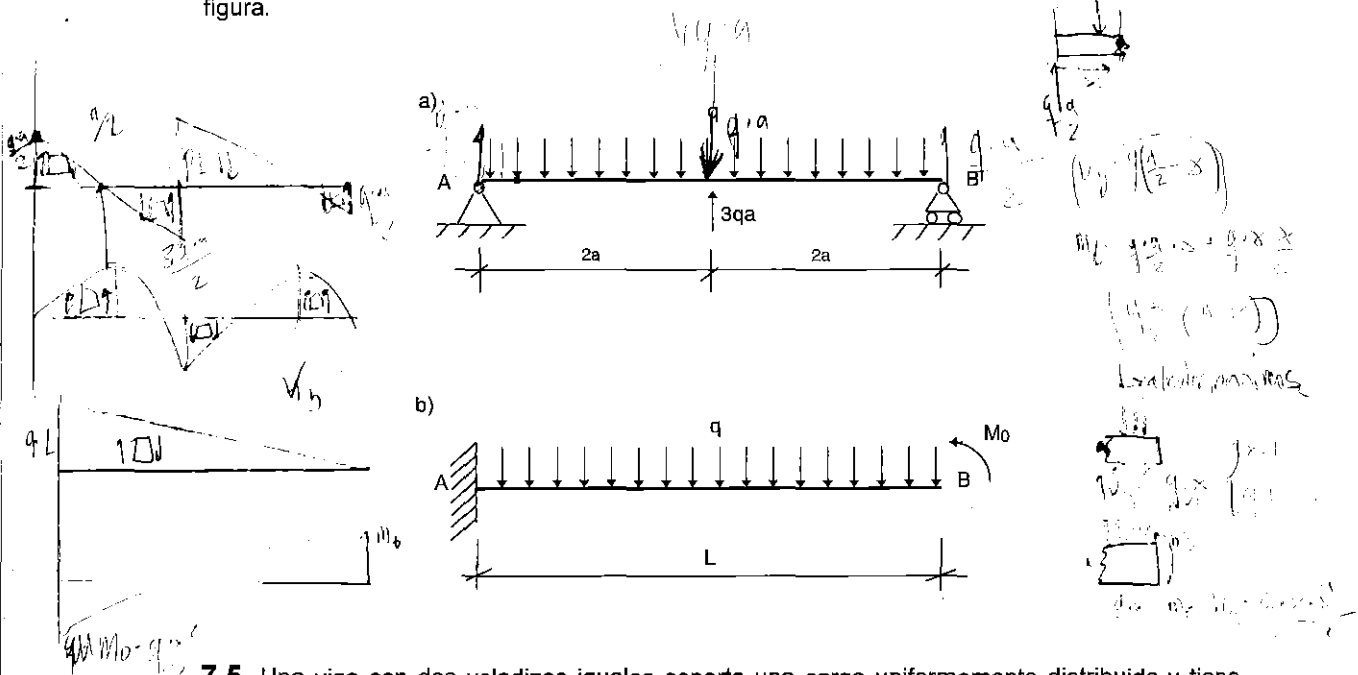
7.2. Para los casos de la figura, dibujar los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes. Los momentos  $M_0$  y  $M_1$  tienen su eje normal al plano del dibujo.



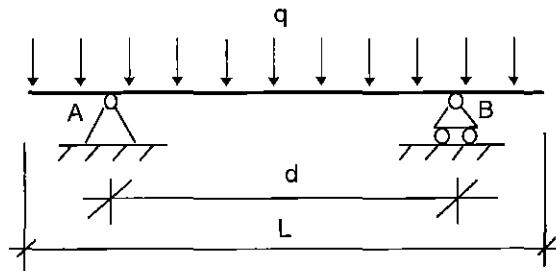
7.3. La viga ABC, simplemente apoyada en B y articulada en C, con un voladizo AB, soporta una carga uniformemente repartida de 160 kN/m lineal de viga. Dibujar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector.



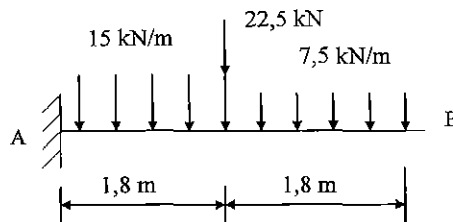
7.4. Obtener los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores, para las vigas de la figura.



7.5. Una viga con dos voladizos iguales soporta una carga uniformemente distribuida y tiene una longitud  $L$ . Hallar la distancia  $d$  entre apoyos para que el momento flector en el centro de la viga, sea numéricamente igual a los momentos en las secciones sobre los apoyos. Dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores.

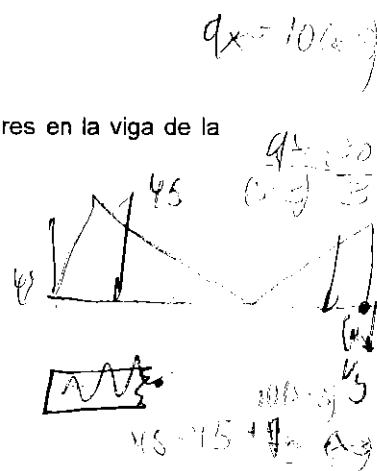
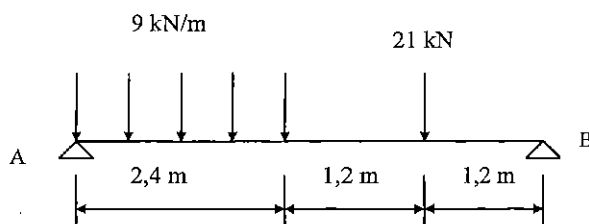


7.6. Dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga de la figura.

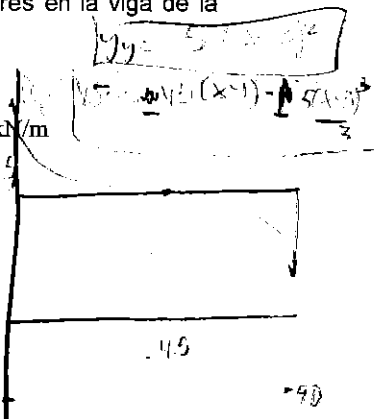
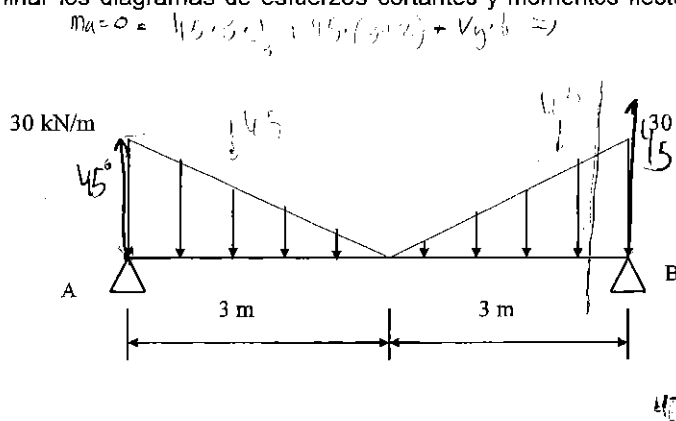




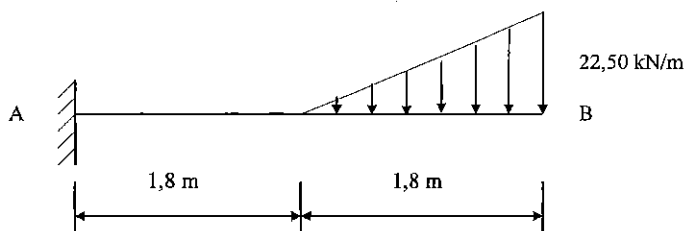
7.7. Determinar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga de la figura.



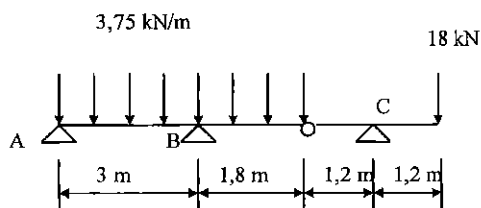
7.8. Determinar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga de la figura.

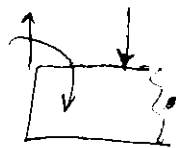


7.9. Determinar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga de la figura.



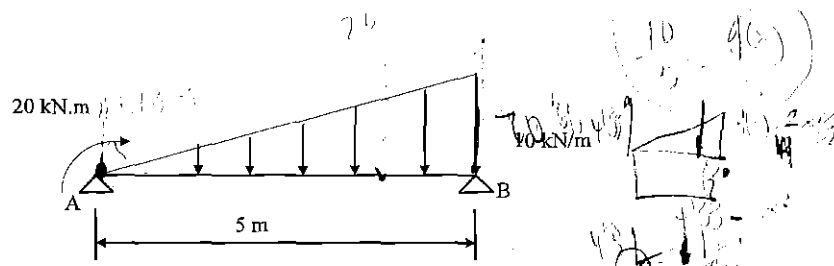
7.10. Determinar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga de la figura.



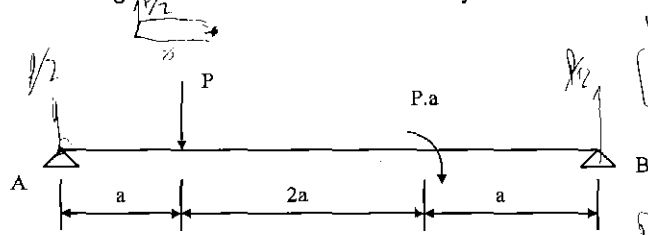
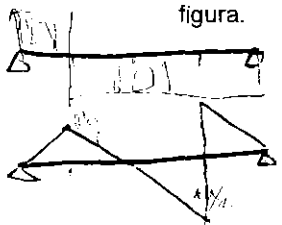


*Problemas Propuestos*

7.11. Determinar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga de la figura.

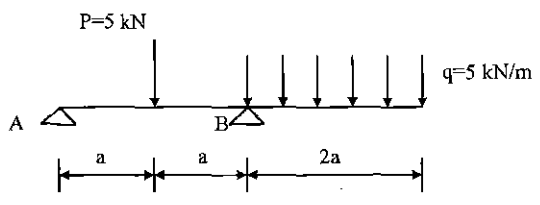


7.12. Determinar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga de la figura.

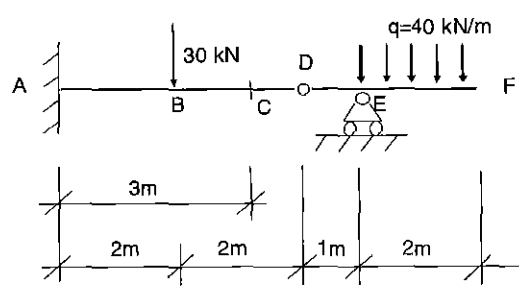


Handwritten calculations for problem 7.12:  
 $M_0 + 8a = 4.37 \times 10^3 \text{ Nm}$   
 $M_0 = M_0 + 8a = 4.37 \times 10^3 \text{ Nm}$   
 $M_0 = 4.37 \times 10^3 \text{ Nm}$   
 $P \cdot a = 10 \cdot 10^3 \text{ Nm}$

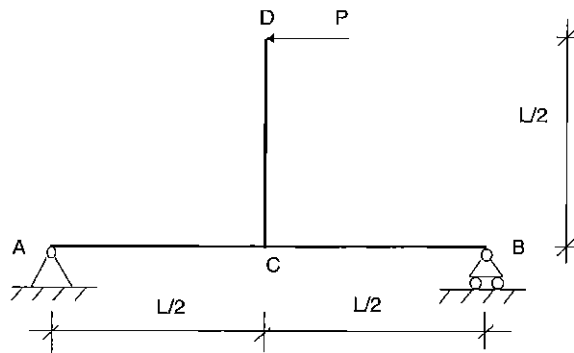
7.13. Determinar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga de la figura.



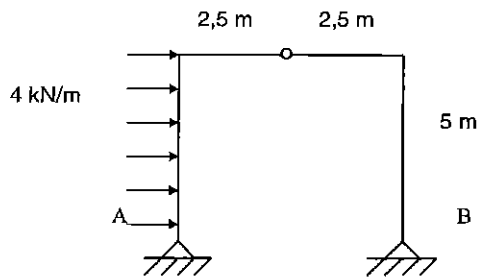
7.14. Calcular las reacciones en los apoyos y los esfuerzos en la sección C. Dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores, así como una representación aproximada de la deformada.



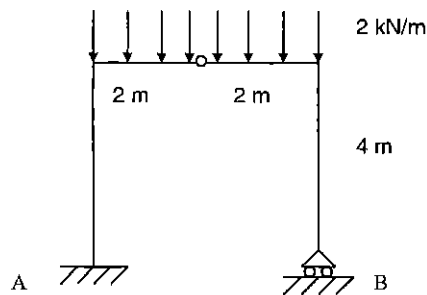
7.15. Representar los diagramas de esfuerzos normales, esfuerzos cortantes y momentos flectores de la estructura de la figura.



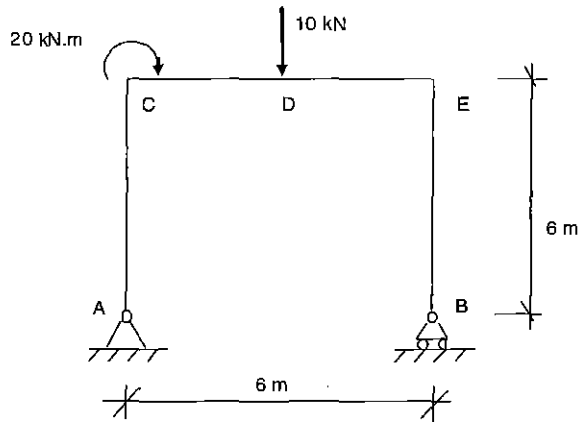
7.16. Representar los diagramas de esfuerzos normales, esfuerzos cortantes y momentos flectores de la estructura de la figura.



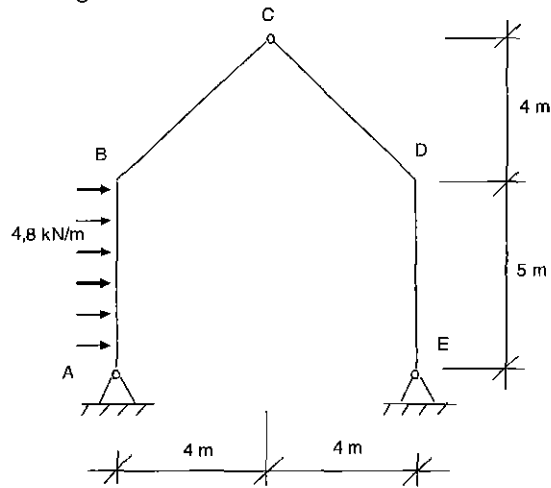
7.17. Representar los diagramas de esfuerzos normales, esfuerzos cortantes y momentos flectores de la estructura de la figura.



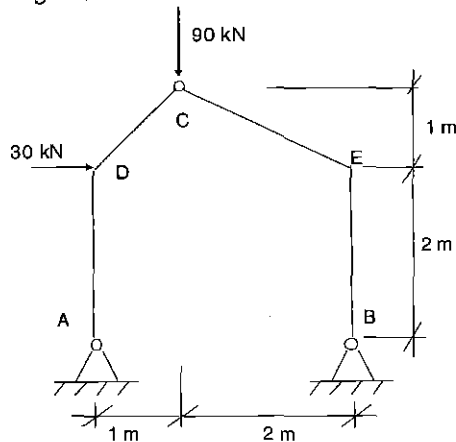
7.18. Representar los diagramas de esfuerzos normales, esfuerzos cortantes y momentos flectores en el pórtico de la figura.



7.19. Representar los diagramas de esfuerzos normales, esfuerzos cortantes y momentos flectores en el pórtico de la figura.



7.20. Representar los diagramas de esfuerzos normales, esfuerzos cortantes y momentos flectores en el pórtico de la figura.

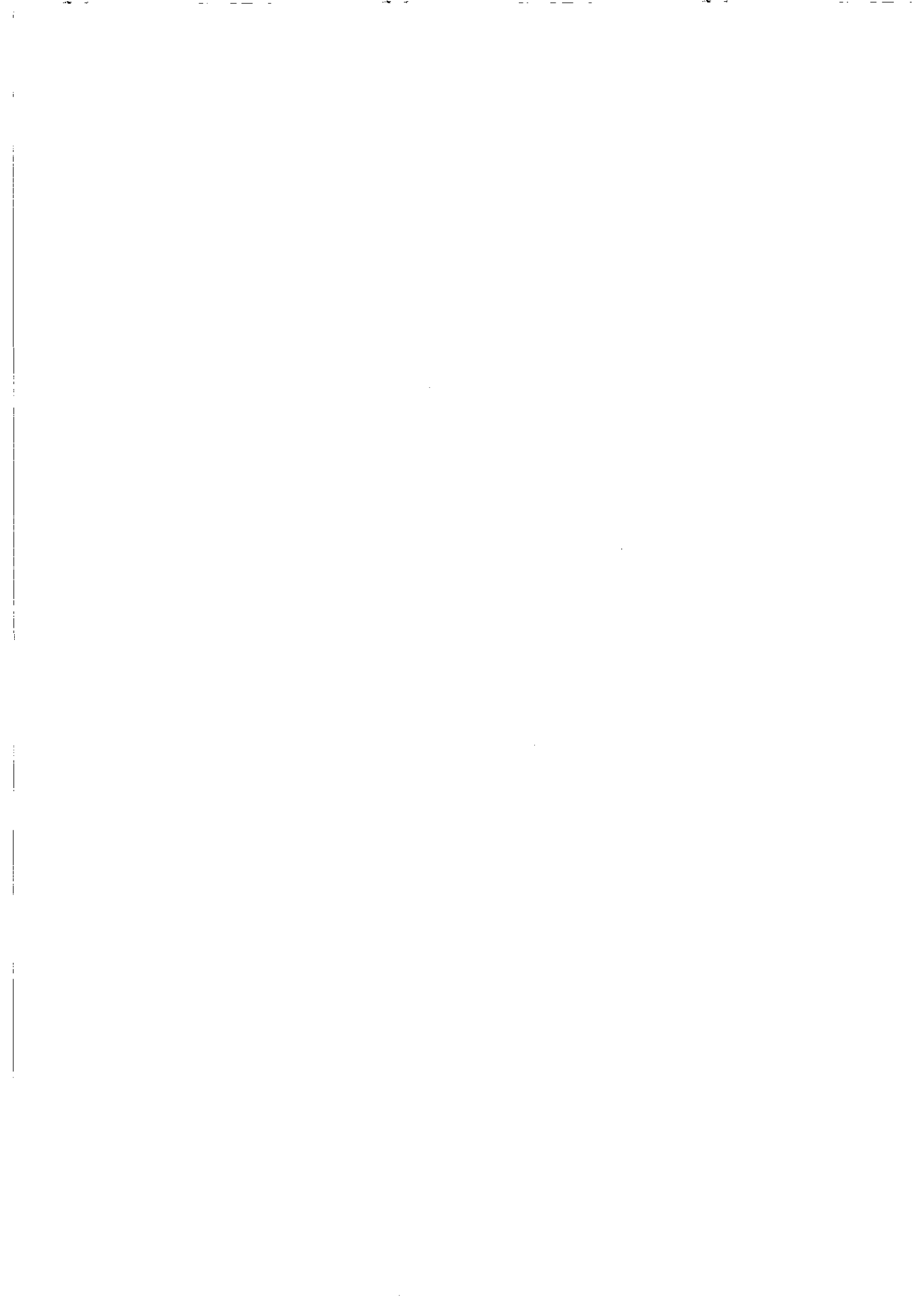


# TEMA 8

---

## **ESFUERZO AXIAL SIMPLE**

---



### 8.1. DEFINICIÓN

Se dice que una pieza prismática está sometida a **tracción o compresión simple** cuando los esfuerzos resultantes en cualquier sección transversal se reducen exclusivamente a un esfuerzo normal  $N_x$ . Son nulos, por tanto, los restantes esfuerzos de sección.

Este tipo de comportamiento se presenta en piezas prismáticas de directriz recta sometidas a cargas aplicadas en los centros de gravedad de las secciones y cuya dirección es la del eje de la pieza. Es el caso de la fig. 8.1a, en la que también se representa el diagrama de esfuerzos normales a lo largo de la pieza. Por convenio se tomará el esfuerzo normal positivo cuando la sección trabaja a tracción y negativo cuando lo haga a compresión. Éste es también es el comportamiento típico de las barras de las celosías, como la de la fig. 8.1b.

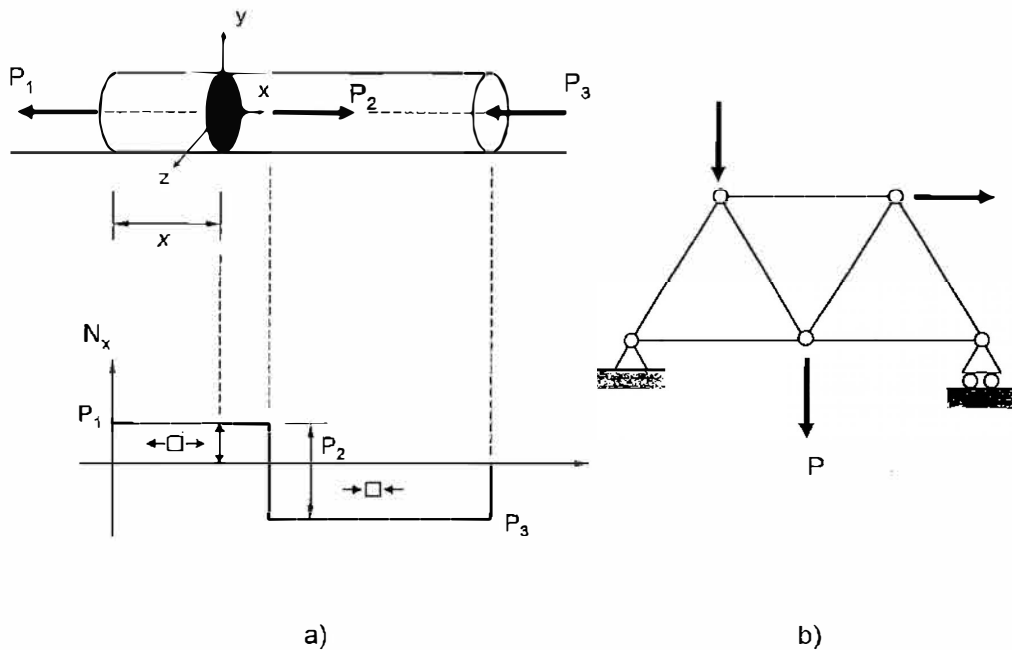


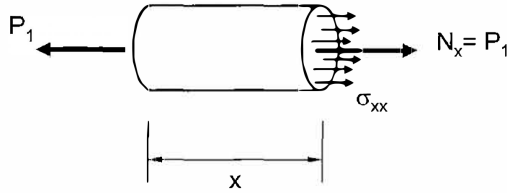
Figura 8.1. Ejemplos de estructuras sometidas a esfuerzo axial simple

### 8.2. ESTADO TENSIONAL EN TRACCIÓN O COMPRESIÓN SIMPLE

Para la misma pieza de la fig. 8.1a considérese una sección intermedia cualquiera definida, por ejemplo, mediante la coordenada  $x$ . En ella el esfuerzo normal es  $N_x=P_1$ ,

## 8.2. ESTADO TENSIONAL EN TRACCIÓN O COMPRESIÓN SIMPLE

Para una pieza cualesquiera considérese una sección intermedia cualquiera definida. En ella el esfuerzo normal es  $N_x=P$ , tal como se indica en el diagrama de esfuerzos normales y como puede obtenerse al aplicar el principio del corte.



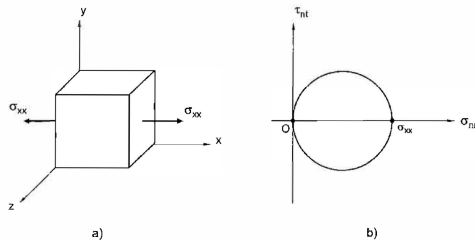
Para un punto cualquiera de la misma, de las tres componentes de tensión  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  asociadas al plano de la sección, las dos componentes tangenciales son nulas por serlo también todos los esfuerzos de sección salvo el normal  $N_x$ . A su vez, este esfuerzo normal es la resultante de la distribución de tensiones normales en dicha sección, es decir:

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} \cdot dA = P_1$$

Esta ecuación, proporcionada por la estática, permite conocer la resultante de la distribución de tensiones normales  $\sigma_{xx}$  en la sección, pero no cómo están distribuidas en ella, por eso aplicamos la hipótesis de Navier. Para que se cumpla en el caso de esfuerzo axial simple que se está considerando, cada sección se debe trasladar paralelamente a sí misma a lo largo del eje. De esta forma, la pieza prismática podría asimilarse a un conjunto de fibras longitudinales iguales que experimentan la misma variación de longitud, es preciso que el esfuerzo se reparta uniformemente en la sección, dando lugar a una distribución uniforme de tensiones  $\sigma_{xx}$ , Por consiguiente:

$$N_x = \sigma_{xx} \cdot A = P \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx} = \frac{P}{A}$$

Del estado tensional resultante para cualquier punto de la pieza es el representado la única componente no nula de la matriz de tensiones es " $\sigma_{xx}$ "

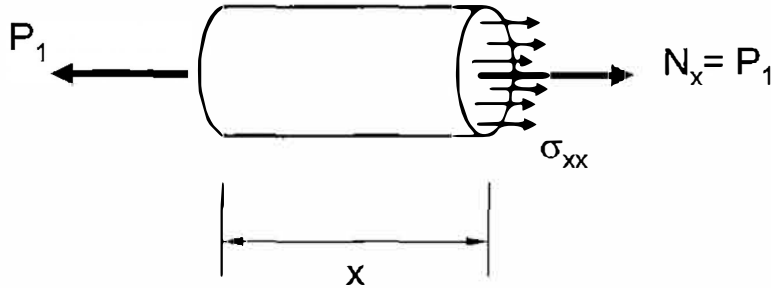


Cualquier punto de la pieza tiene la tensión tangencial en el plano de la sección recta es nula eso indica que el eje de la pieza es dirección principal. Las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = \sigma_{xx} = \frac{N_x}{A}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$



tal como se indica en el diagrama de esfuerzos normales y como puede obtenerse al aplicar el principio del corte (fig. 8.2). *Interesa determinar ahora cómo es la distribución de tensiones en los puntos de esa sección.*



**Figura 8.2. Principio del corte en tracción simple**

Para un punto cualquiera de la misma, de las tres componentes de tensión  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  asociadas al plano de la sección, las dos componentes tangenciales son nulas por serlo también todos los esfuerzos de sección salvo el normal  $N_x$  [cfr. (7.1)]. A su vez, este esfuerzo normal no es sino la resultante de la distribución de tensiones normales en dicha sección, es decir:

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} \cdot dA = P_1 \quad (8.1)$$

Esta ecuación, proporcionada por la estática, permite conocer la resultante de la distribución de tensiones normales  $\sigma_{xx}$  en la sección, pero no cómo están distribuidas en ella. *Para conocer cómo es esta distribución es preciso recurrir a la naturaleza de las deformaciones, aplicando la hipótesis de Navier introducida en el tema anterior.* Según postuló Navier, las secciones originalmente planas y normales al eje de la pieza se conservan planas y normales al eje en la deformación. Para que esto sea así en el caso de esfuerzo axial simple que se está considerando, cada sección se debe trasladar paralelamente a sí misma a lo largo del eje. De esta forma, la pieza prismática podría asimilarse a un conjunto de fibras longitudinales iguales que experimentan la misma variación de longitud. Esto a su vez requiere que todas ellas estén solicitadas exactamente por la misma fuerza; es decir, es preciso que el esfuerzo se reparta uniformemente en la sección, dando lugar a una distribución uniforme de tensiones  $\sigma_{xx}$ . Por consiguiente:

$$N_x = \sigma_{xx} \cdot A = P \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx} = \frac{P}{A} \quad (8.2)$$

El estado tensional resultante para cualquier punto de la pieza es el representado en la fig. 8.3a. Por tanto, la única componente no nula de la matriz de tensiones es  $\sigma_{xx}$ . En la fig. 8.3b se indica el correspondiente diagrama de los círculos de Mohr. Ambas son representaciones características del estado de tensiones correspondiente a un esfuerzo axial simple de tracción.

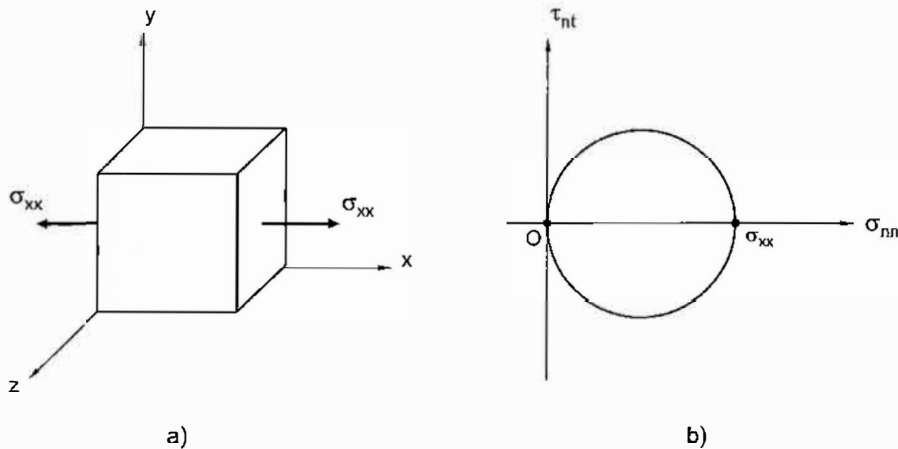


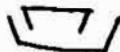
Figura 8.3. Círculo de Mohr en tracción simple

El hecho de que en cualquier punto de la pieza sea nula la tensión tangencial en el plano de la sección recta indica que el eje de la pieza es dirección principal. Las tensiones principales son, por tanto:

$$\sigma_1 = \sigma_{xx} = \frac{N_x}{A}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (8.3)$$

### 8.3. DEFORMACIÓN EN TRACCIÓN O COMPRESIÓN SIMPLE

Conocida la matriz de tensiones la matriz de deformaciones se obtiene de forma inmediata aplicando la ley de Hooke generalizada (4.48). Para el caso de tracción o compresión simple que se está considerando, las componentes de deformación que se obtienen son las siguientes:



### 8.3. DEFORMACIÓN EN TRACCIÓN O COMPRESIÓN SIMPLE

Conocida la matriz de tensiones la matriz de deformaciones se obtiene de forma inmediata aplicando la ley de Hooke generalizada. Para el caso de tracción o compresión simple que se está considerando, las componentes de deformación que se obtienen son las siguientes:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{E}{\alpha_{xx}}; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{E}{\alpha_{xx}}; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$$

Considérese dos secciones rectas separadas una distancia  $dx$  en una pieza prismática sometida a esfuerzo axial simple.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d\delta}{dx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{N_x}{E \cdot A} \quad \Rightarrow \quad d\delta = \frac{N_x}{E \cdot A} \cdot dx \quad \delta = \int_0^L \frac{N_x}{E \cdot A} \cdot dx$$

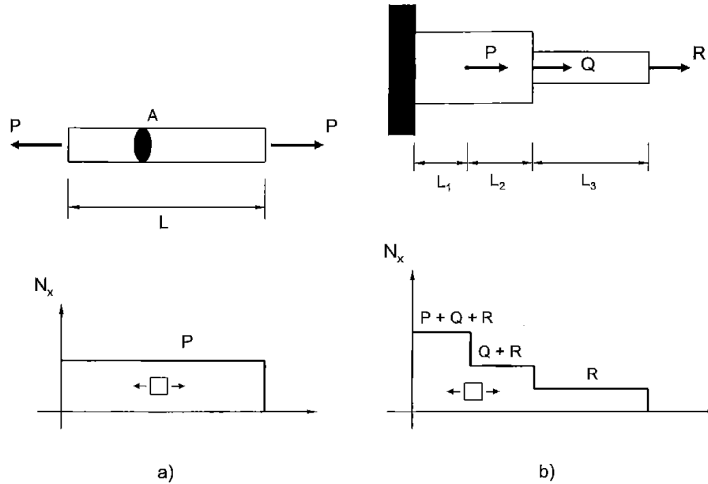
Particularizando a una pieza como la dibujada

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

De esta expresión se deduce que la rigidez  $k$  de la barra es  $k=EA/L$  y la flexibilidad  $f$  es  $f=L/EA$ .

Para barras en las que existan variaciones discretas de los valores del área de la sección, o del módulo de elasticidad del material, o del esfuerzo normal la fórmula a aplicar para el cálculo del alargamiento absoluto será:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot A_i}$$



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (8.4)$$

Considérese dos secciones rectas separadas una distancia  $dx$  en una pieza prismática sometida a esfuerzo axial simple. El alargamiento o acortamiento  $d\delta$  de esta barra de longitud elemental  $dx$  será:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d\delta}{dx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{N_x}{E \cdot A} \quad \Rightarrow \quad d\delta = \frac{N_x}{E \cdot A} \cdot dx \quad (8.5)$$

El alargamiento (o acortamiento) total de la pieza se obtendrá integrando esta expresión a lo largo de la longitud de la barra:

$$\delta = \int_0^L \frac{N_x}{E \cdot A} \cdot dx \quad (8.6)$$

Particularizando a una pieza como la de la fig. 8.4a, en la que  $N_x=P$  y además  $E$  y  $A$  son también constantes:

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} \quad (8.7)$$

expresión que proporciona el *alargamiento total experimentado por la pieza*.

De esta expresión se deduce que la *rigidez*  $k$  de la barra (valor de la fuerza necesaria para producir un alargamiento unidad) es  $k=EA/L$  y la *flexibilidad*  $f$  (desplazamiento originado por una carga unidad) es  $f=L/EA$ . Evidentemente,  $f = 1/k$ .

Para barras en las que existan variaciones discretas de los valores del área de la sección, o del módulo de elasticidad del material, o del esfuerzo normal (fig. 8.4b), la fórmula a aplicar para el cálculo del alargamiento absoluto será:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot A_i} \quad (8.8)$$

siendo  $L_i$  la porción de barra en la que son constantes los valores de  $N_i$ ,  $L_i$  y  $E_i$ .

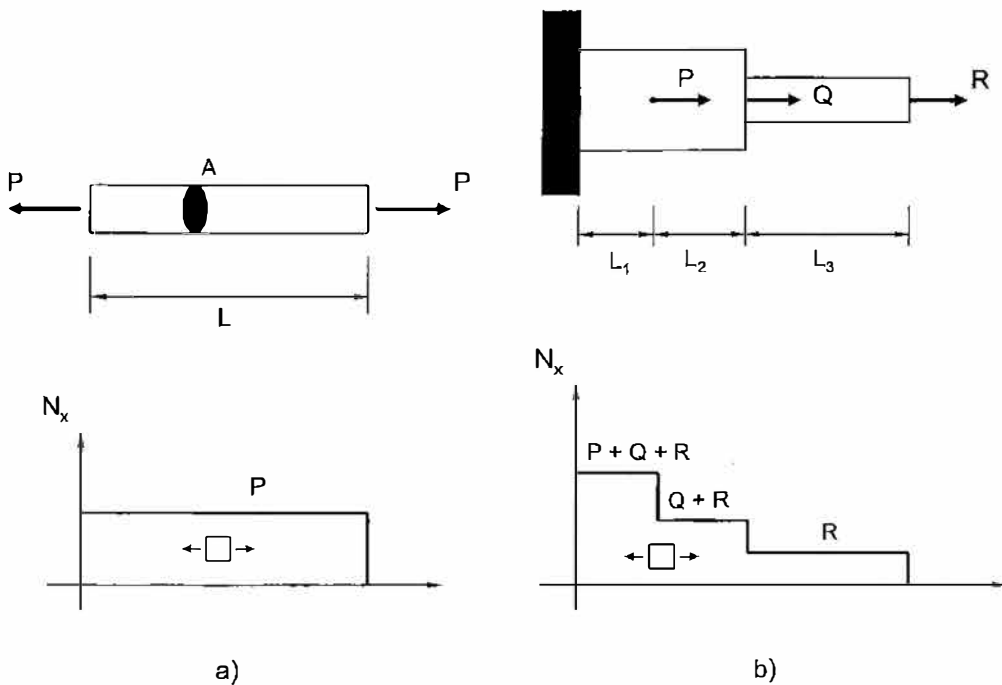


Figura 8.4. Ejemplos de tracción simple

#### 8.4. INFLUENCIA DEL PESO PROPIO

En algunas ocasiones las cargas que actúan sobre la pieza son de una magnitud tal que frente a ellas el peso propio de la misma puede considerarse despreciable. Pero en otras no es así, ya que el propio peso puede producir por sí mismo unas tensiones que pudieran ser de un orden de magnitud similar, o incluso superior, a las debidas a las cargas. Es evidente que, en estas ocasiones, el peso propio habrá que tenerlo en cuenta.

Supóngase, por ejemplo, una columna de longitud  $L$ , sección recta de área constante  $A$ , material de módulo de elasticidad  $E$  y peso específico  $\rho$ , sometida a una carga  $P$  de compresión, tal como se indica en la fig. 8.5, en la que también se indica el correspondiente diagrama de esfuerzos normales.

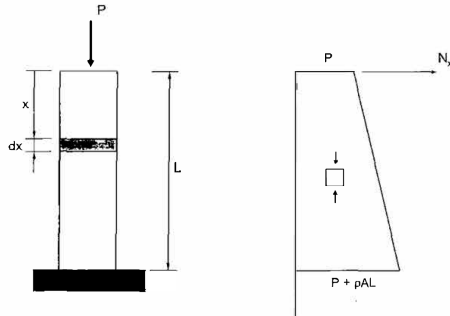
El valor de la tensión  $\sigma_{xx}$  en una sección intermedia definida por su distancia  $x$  al extremo libre es:

## 8.4. INFLUENCIA DEL PESO PROPIO

En algunas ocasiones las cargas que actúan sobre la pieza son de una magnitud tal que frente a ellas el peso propio de la misma puede considerarse despreciable. Pero en otras no es así y el peso propio habrá que tenerlo en cuenta.

Supóngase, por ejemplo, una columna de longitud  $L$ , sección recta de área constante  $A$ , material de módulo de elasticidad  $E$  y peso específico  $\rho$ , sometida a una carga  $P$  de compresión, tal como se indica en el dibujo. El valor de la tensión (normal  $xx$ )  $T_{xx}$  en una sección intermedia definida por su distancia  $x$  al extremo libre es:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} = \frac{P}{A} + \rho \cdot x$$



Por tanto, la tensión normal no es uniforme sino que crece linealmente con la distancia  $x$ . El acortamiento de un elemento de columna de longitud  $dx$  será:

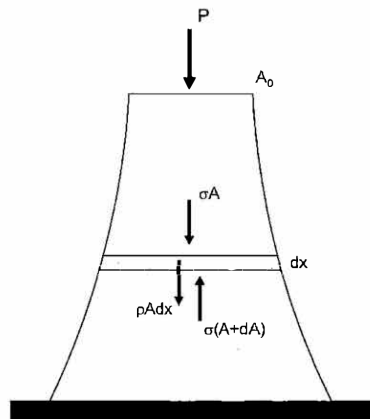
$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{P}{A \cdot E} + \frac{\rho}{E} \cdot x = \frac{d\delta}{dx} \quad \Rightarrow \quad d\delta = \left( \frac{P}{A \cdot E} + \frac{\rho}{E} \cdot x \right) \cdot dx \quad \delta = \int_0^L \left( \frac{P}{E \cdot A} + \frac{\rho}{E} \cdot x \right) \cdot dx = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} + \frac{\rho \cdot L^2}{2 \cdot E}$$

La sección más desfavorable de la columna es el empotramiento, Ésta será la sección que condicionará los cálculos. Para un óptimo aprovechamiento se podría realizar el diseño de forma que la tensión  $u$  en cualquier sección recta fuera la misma e igual a la admisible del material.

Así se obtendría el denominado sólido de igual resistencia, cuyo perfil se puede determinar planteando el equilibrio a un elemento diferencial de columna

$$\sigma \cdot (A + dA) = \sigma \cdot A + \rho \cdot A \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \sigma \cdot dA = \rho \cdot A \cdot dx$$

el área de la columna de igual resistencia tendría una variación exponencial.



$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} = \frac{P}{A} + \rho \cdot x \quad (8.9)$$

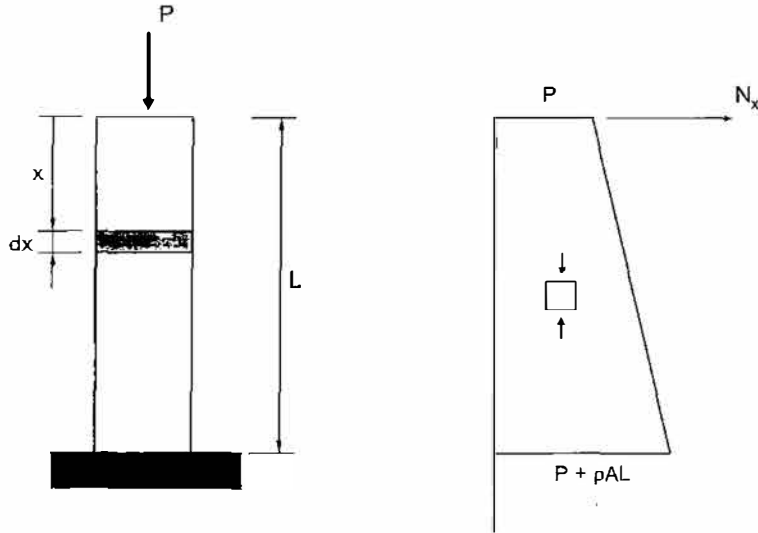


Figura 8.5. Columna sometida a compresión y a su peso propio

Por tanto, la tensión normal no es uniforme sino que crece linealmente con la distancia  $x$ . El acortamiento de un elemento de columna de longitud  $dx$  será:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{P}{A \cdot E} + \frac{\rho}{E} \cdot x = \frac{d\delta}{dx} \quad \Rightarrow \quad d\delta = \left( \frac{P}{A \cdot E} + \frac{\rho}{E} \cdot x \right) \cdot dx \quad (8.10)$$

y el acortamiento total de la columna de la fig. 8.5:

$$\delta = \int_0^L \left( \frac{P}{E \cdot A} + \frac{\rho}{E} \cdot x \right) \cdot dx = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} + \frac{\rho \cdot L^2}{2 \cdot E} \quad (8.11)$$

donde el primer sumando representa la variación de longitud debida a la acción de  $P$  y el segundo la debida al peso propio.

La sección más desfavorable de la columna es el empotramiento, por aparecer ahí el máximo valor de  $\sigma_{xx}$ . Ésta será la sección que condicionará los cálculos. Las demás secciones trabajarán por debajo de su límite, con el consiguiente desperdicio de material. *Para un óptimo aprovechamiento se podría realizar el diseño de forma que la tensión  $\sigma$  en cualquier sección recta fuera la misma e igual a la admisible del material.*

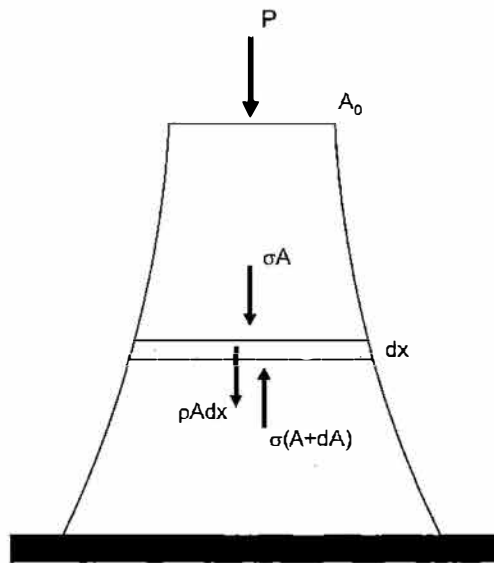
Así se obtendría el denominado *sólido de igual resistencia*, cuyo perfil se puede determinar planteando el equilibrio a un elemento diferencial de columna (cfr. fig. 8.6):

$$\sigma \cdot (A + dA) = \sigma \cdot A + \rho \cdot A \cdot dx \Rightarrow \sigma \cdot dA = \rho \cdot A \cdot dx \quad (8.12)$$

donde  $\sigma$  podría ser la  $\sigma_{adm}$  del material. Integrando (8.12), resulta:

$$A(x) = \frac{P}{\sigma} \cdot e^{\frac{\rho x}{\sigma}} \quad (8.13)$$

es decir, el área de la columna de igual resistencia tendría una variación exponencial.



**Figura 8.6. Columna de igual resistencia**

### **8.5. SISTEMAS HIPERESTÁTICOS EN TRACCIÓN-COMPRESIÓN SIMPLE**

Como se ha dicho anteriormente, si la estructura que está trabajando a tracción y/o compresión simple es hiperestática, las condiciones de equilibrio no son suficientes y deben establecerse, además, otras condiciones basadas en la compatibilidad de deformaciones.



En general, *puede sistematizarse el análisis de las estructuras hiperestáticas mediante los siguientes pasos:*

1) *Aplicación de las ecuaciones de equilibrio.* Estas condiciones, lógicamente, no serán suficientes para determinar los esfuerzos en cada uno de los elementos de la estructura.

2) *Planteamiento de las condiciones de compatibilidad de la deformación.* Son las condiciones supletorias para la resolución del problema. Para su formulación se aplica la hipótesis de pequeñas deformaciones. Por tratarse de condiciones que se expresan en términos de deformaciones o desplazamientos y no de esfuerzos o tensiones, aún no será posible resolver el problema.

3) *Aplicación de las ecuaciones o leyes de comportamiento* para cada uno de los elementos de la estructura. Estas ecuaciones relacionan las deformaciones (o los desplazamientos) con las tensiones (o los esfuerzos).

Puesto que la resolución de una estructura hiperestática implica necesariamente la utilización de las leyes de comportamiento, *los esfuerzos en los elementos de una estructura de este tipo dependerán tanto de la geometría como del material*, a diferencia de lo que ocurre en una estructura isostática, en la que los esfuerzos sólo dependen de la geometría, pero no del material.

A continuación se ilustra el procedimiento descrito mediante dos ejemplos sencillos.

***Ejemplo.*** *Determinar las reacciones y dibujar el diagrama de esfuerzos normales en la barra biarticulada de la fig. 8.7, sometida a una carga axial  $P$  en la sección  $C$ . La barra es de sección constante  $A$  y material de módulo de elasticidad  $E$ .*

1) Ecuación de equilibrio:

$$\sum F_x = 0: \quad P - R_A - R_B = 0 \quad (8.14)$$

2) Compatibilidad de deformaciones:

$$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{AC} + \delta_{CB} = 0 \quad (8.15)$$

3) Ley de comportamiento:

$$\delta_{AC} = \frac{R_A \cdot a}{E \cdot A}; \quad \delta_{CB} = -\frac{R_B \cdot b}{E \cdot A} \quad (8.16)$$

donde el signo negativo implica que el tramo CB experimenta un acortamiento.

Resolviendo se obtiene:

$$R_A = \frac{P \cdot b}{L}; \quad R_B = \frac{P \cdot a}{L} \quad (8.17)$$

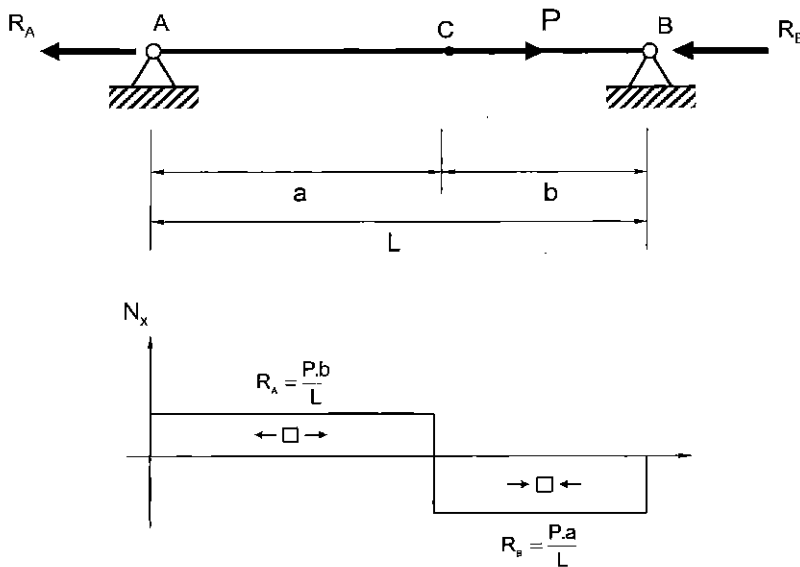


Figura 8.7. Barra biarticulada trabajando a esfuerzo axial simple

**Ejemplo.** La estructura de la fig. 8.8, situada en un plano vertical, está formada por tres barras rectas articuladas en sus extremos. Está sometida a una carga vertical  $P$  aplicada en la articulación común D. Determinar los esfuerzos en las barras.

Llamando  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  a los esfuerzos en las barras, la aplicación de la metodología de análisis descrita conduce a las siguientes ecuaciones:

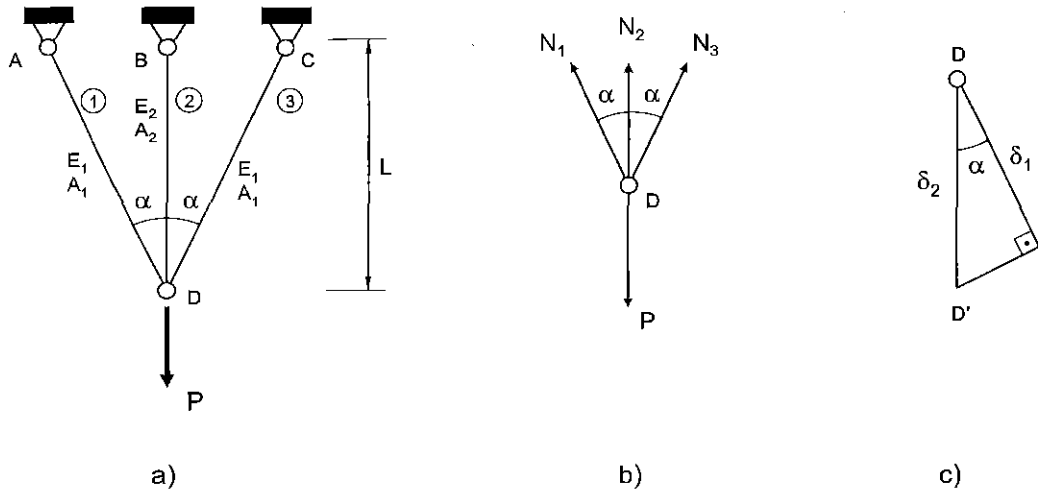


Figura 8.8. a) Estructura; b) Equilibrio; c) Compatibilidad en D

1) Ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_3 \\ 2N_1 \cos \alpha + N_2 &= P \end{aligned} \quad (8.18)$$

2) Compatibilidad de deformaciones en D:

$$\delta_1 = \delta_2 \cos \alpha \quad (8.19)$$

3) Ley de comportamiento:

$$\delta_1 = \frac{N_1 L / \cos \alpha}{E_1 A_1}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 L}{E_2 A_2} \quad (8.20)$$

Resolviendo, se obtiene:

$$N_2 = \frac{P}{1 + 2 \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \cos^3 \alpha}; \quad N_1 = \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \cos^2 \alpha \cdot N_2 = N_3 \quad (8.21)$$

Comparando las expresiones de  $N_1$  y  $N_2$ , se puede concluir que, en general, la barra más rígida (mayor  $EA/L$ ) absorbe más esfuerzo, y que cuando crece el ángulo  $\alpha$ , las barras laterales, respecto a la central, absorben menos esfuerzo.

## **8.6. TENSIONES INICIALES Y TENSIONES TÉRMICAS**

### **8.6.1. Tensiones iniciales**

Las **tensiones iniciales** son aquellas que aparecen en algunos o todos los elementos de la estructura antes de aplicar las cargas. Pueden deberse a múltiples causas: errores de montaje, errores de fabricación, etc.

En algunos casos, como es el del hormigón pretensado, se trata de un efecto buscado por resultar beneficioso para la resistencia del material. El hormigón resiste muy mal los esfuerzos de tracción por lo que para aumentar el límite de carga a tracción de una pieza de este material sin que aparezcan en ella fisuras peligrosas, se le produce un estado tensional inicial de compresión: este estado se crea al liberar unas barras de acero con las que se fragua el hormigón y que han sido previamente traccionadas.

En otras ocasiones, cuando estas tensiones aparecen sin haberlas previsto, por ejemplo, por un error de fabricación o de montaje, pueden resultar peligrosas para la estructura, ya que se superponen a las originadas por las propias cargas que la estructura soporta, resultando unas tensiones totales superiores a las que se había estimado en el proyecto de la misma.

**Ejemplo.** *En la estructura representada en la fig. 8.9, todas las barras son de la misma sección  $A$  y del mismo material de módulo de elasticidad  $E$ . Por un error de fabricación la barra 2 es más larga de lo deseable en una cantidad  $\Delta$ . Calcular los esfuerzos en cada una de las barras como consecuencia del montaje.*

Puesto que la barra 2 tiene una longitud  $L+\Delta$  en lugar de  $L$ , es necesario forzar las barras para realizar el montaje y, como consecuencia, las barras laterales sufrirán un alargamiento (trabajan a tracción con unos esfuerzos  $N_1$  y  $N_3$ ) y la central un acortamiento (trabaja a compresión con un esfuerzo  $N_2$ ).

## 8.6. TENSIONES INICIALES Y TENSIONES TÉRMICAS

### 8.6.1. Tensiones iniciales

Las tensiones iniciales son aquellas que aparecen en algunos o todos los elementos de la estructura antes de aplicar las cargas. Pueden deberse a múltiples causas: errores de montaje, errores de fabricación, etc. pueden resultar peligrosas para la estructura, ya que se superponen a las originadas por las propias cargas que la estructura soporta, resultando unas tensiones totales superiores a las que se había estimado en el proyecto de la misma.

En algunos casos, como es el del hormigón pretensado, se trata de un efecto buscado por resultar beneficioso para la resistencia del material. El hormigón resiste muy mal los esfuerzos de tracción por lo que para aumentar el límite de carga a tracción de una pieza de este material sin que aparezcan en ella fisuras peligrosas, se le produce un estado tensional inicial de compresión

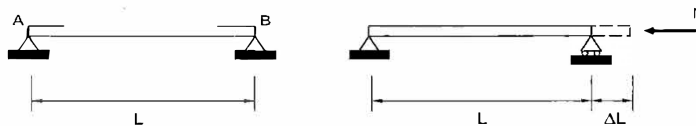
### 8.6.2. Tensiones térmicas

Cuando la temperatura en una pieza prismática varía de modo uniforme en una cantidad  $\Delta T$ , la longitud  $L$  de cualquiera de sus dimensiones experimenta una variación  $\Delta L$  dada por:

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación lineal, que es constante para cada material. Esta variación en la dimensión de la pieza no dará lugar a tensión alguna si no hay ninguna causa que impida la libre dilatación. Pero si se pueden producir tensiones en la pieza si esa deformación se ve impedida total o parcialmente como ocurre, generalmente, en las estructuras hiperestáticas. Estas tensiones que tienen su origen en una variación de temperatura se llaman tensiones térmicas.

### 8.6.2

Ejemplo. Calcular las tensiones originadas por un incremento de temperatura uniforme  $\Delta T$



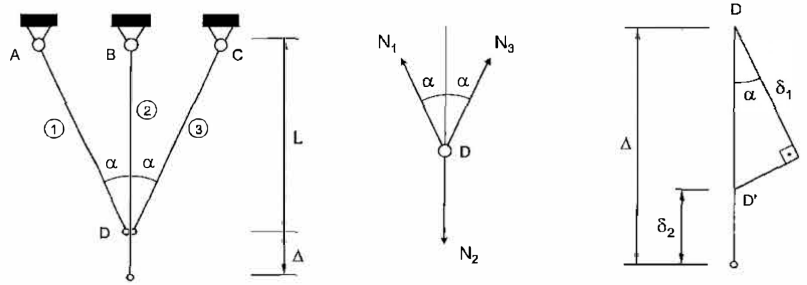
si ambos apoyos son fijos aparecen tensiones de origen térmico cuyo valor puede deducirse fácilmente igualando las expresiones de  $\Delta L$ , o lo que es lo mismo, imponiendo la condición de que sea nulo el alargamiento total de la barra bajo la acción de ambas solicitaciones, incremento de temperatura  $\Delta T$  y esfuerzo axial de compresión  $N$ . Ésta es la condición de compatibilidad que permite obtener la reacción hiperestática  $N$  y calcular así las tensiones térmicas en la barra.

$$\delta_B = 0 \Rightarrow \alpha \cdot L \cdot \Delta T - \frac{N \cdot L}{E \cdot A} = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

A la luz de este sencillo ejemplo, puede concluirse que /as estructuras hiperestáticas no sólo son sensibles a las tensiones iniciales sino también a los cambios de temperatura que experimenten.

Para evitar sus consecuencias en las edificaciones y en las construcciones en general se suelen colocar juntas de dilatación.

8.6.1 Ejemplo todas las barras son de la misma sección A y del mismo material de módulo de elasticidad E. Por un error de fabricación la barra 2 es más larga de lo deseable en una cantidad  $Ll$ . Calcular los esfuerzos en cada una de las barras como consecuencia del montaje. o



1) Ecuaciones de equilibrio  $N_1 = N_3$

$$2N_1 \cos \alpha - N_2 = 0$$

a)

b)

c)

2) Condición de compatibilidad de las deformaciones:  $\Delta = \delta_2 + \frac{\delta_1}{\cos \alpha}$

3) Ley de comportamiento:  $\delta_1 = \frac{N_1 L / \cos \alpha}{EA}$ ;  $\delta_2 = \frac{N_2 L}{EA}$

$$N_1 = N_3 = \frac{E \cdot A \cdot \Delta \cdot \cos^2 \alpha}{L \cdot (1 + 2 \cos^3 \alpha)} \quad N_2 = \frac{2E \cdot A \cdot \Delta \cdot \cos^3 \alpha}{L \cdot (1 + 2 \cos^3 \alpha)}$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}$$

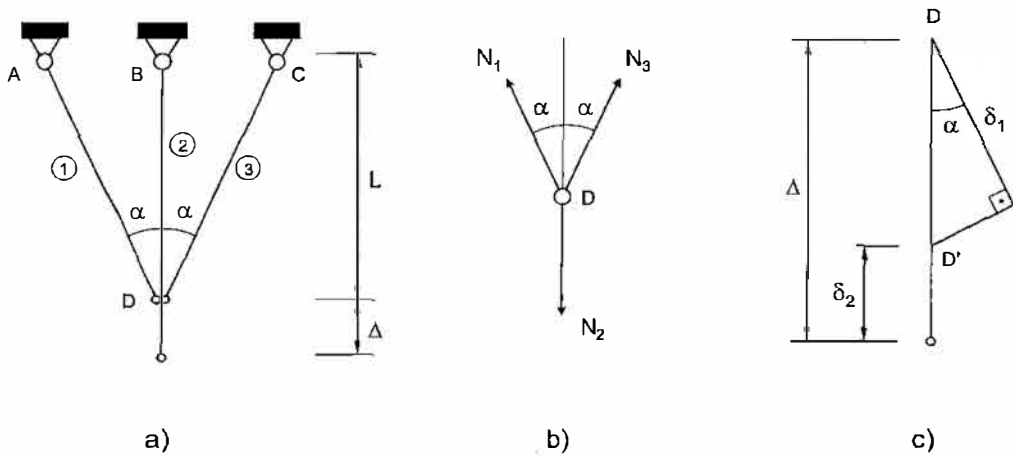


Figura 8.9. Tensiones iniciales: a) Estructura; b) Equilibrio; c) Compatibilidad en D

1) Ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_3 \\ 2N_1 \cos \alpha - N_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8.22)$$

2) Condición de compatibilidad de las deformaciones:

$$\Delta = \delta_2 + \frac{\delta_1}{\cos \alpha} \quad (8.23)$$

3) Ley de comportamiento:

$$\delta_1 = \frac{N_1 L / \cos \alpha}{EA}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 L}{EA} \quad (8.24)$$

donde se ha considerado que  $\Delta \ll L$ .

Resolviendo se obtienen los esfuerzos en las barras:

$$N_1 = N_3 = \frac{E \cdot A \cdot \Delta \cdot \cos^2 \alpha}{L \cdot (1 + 2 \cos^3 \alpha)} \quad N_2 = \frac{2E \cdot A \cdot \Delta \cdot \cos^3 \alpha}{L \cdot (1 + 2 \cos^3 \alpha)} \quad (8.25)$$

que proporcionan las siguientes tensiones iniciales en cada una de ellas:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \quad (8.26)$$

### 8.6.2. Tensiones térmicas

Como se expuso en el epígrafe 4.6, cuando la temperatura en una pieza prismática varía de modo uniforme en una cantidad  $\Delta T$  (por ejemplo, mediante un calentamiento o un enfriamiento uniforme), la longitud  $L$  de cualquiera de sus dimensiones experimenta una variación  $\Delta L$  dada por:

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T \quad (8.27)$$

donde  $\alpha$  es el *coeficiente de dilatación lineal*, que es constante para cada material. Esta variación en la dimensión de la pieza no dará lugar a tensión alguna si no hay ninguna causa que impida la libre dilatación. Pero sí se pueden producir tensiones en la pieza si esa deformación se ve impedida total o parcialmente como ocurre, generalmente, en las estructuras hiperestáticas. Estas tensiones que tienen su origen en una variación de temperatura se llaman **tensiones térmicas**.

**Ejemplo.** Calcular las tensiones originadas por un incremento de temperatura uniforme  $\Delta T$  en la barra de la fig. 8.10. Se suponen conocidas las dimensiones y las características mecánicas del material.

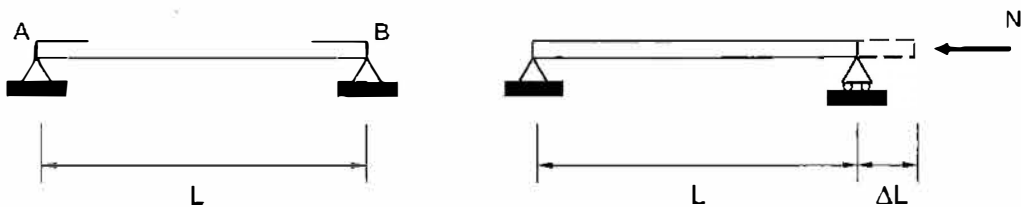


Figura 8.10. Tensiones térmicas

Si uno de los apoyos, por ejemplo el  $B$ , fuera móvil, no estaría restringida la libre dilatación y la barra experimentaría el alargamiento dado por (8.27), sin que aparecieran tensiones.



Por el contrario, si ambos apoyos son fijos, como es el caso que se está considerando, la dilatación ya no es libre. La barra queda en una situación equivalente a la de haber dejado libre la dilatación  $\Delta L$  y haber aplicado a continuación una fuerza  $N$  de compresión de valor tal que la deformación producida sea precisamente  $\Delta L$ .

Ahora sí aparecen tensiones de origen térmico cuyo valor puede deducirse fácilmente igualando las expresiones de  $\Delta L$ , o lo que es lo mismo, imponiendo la condición de que sea nulo el alargamiento total de la barra bajo la acción de ambas sollicitaciones, incremento de temperatura  $\Delta T$  y esfuerzo axial de compresión  $N$ . Ésta es la condición de compatibilidad que permite obtener la reacción hiperestática  $N$  y calcular así las tensiones térmicas en la barra.

Por consiguiente:

$$\delta_B = 0 \Rightarrow \alpha \cdot L \cdot \Delta T - \frac{N \cdot L}{E \cdot A} = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (8.28)$$

A la luz de este sencillo ejemplo, puede concluirse que *las estructuras hiperestáticas no sólo son sensibles a las tensiones iniciales sino también a los cambios de temperatura que experimenten.*

Las tensiones de origen térmico pueden llegar a alcanzar valores muy considerables. Para evitar sus consecuencias en las edificaciones y en las construcciones en general se suelen colocar *juntas de dilatación.*

## **8.7. DEFORMACIONES PLÁSTICAS EN TRACCIÓN Y COMPRESIÓN SIMPLE. TENSIONES Y DEFORMACIONES RESIDUALES**

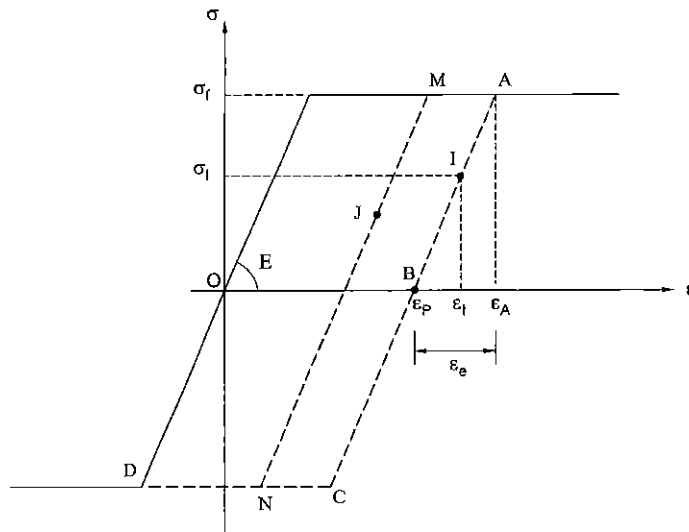
Hasta ahora siempre se ha supuesto que los materiales siguen un comportamiento elástico al estar sometidos a un esfuerzo axial simple. Pero puede suceder que las tensiones originadas en el material alcancen el límite elástico, y entonces se inicie la fluencia (si el material es dúctil) o se produzca la rotura (si es frágil). En este apartado se considerarán exclusivamente materiales dúctiles, materiales en los que tras la zona de comportamiento elástico se producen deformaciones plásticas (fluencia plástica). Para estos materiales se supondrá un comportamiento elastoplástico perfecto cuyo diagrama tensión-deformación es el representado en la fig. 4.6a.

**8.7.1. Carga y descarga en un material elastoplástico perfecto**

Supóngase una pieza prismática de un material elastoplástico perfecto sometida a un proceso de carga que da lugar a un esfuerzo de tracción creciente. Si la carga aplicada es tal que la tensión originada es inferior al límite elástico y se descarga a continuación, es sabido que el material quedará al final sin tensiones ni deformaciones. Pero si la tensión de carga alcanza el límite elástico  $\sigma_f$  y se mantiene aplicada la carga hasta conseguir una deformación  $\epsilon_A$  (fig. 8.11), entonces al realizar la descarga posterior la pieza no recupera toda la deformación. Como también se sabe, la descarga ocurre elásticamente, y la deformación permanente en la pieza es precisamente la deformación plástica sufrida, de tal forma que:

$$\epsilon_A = \epsilon_e + \epsilon_p = \frac{\sigma_f}{E} + \epsilon_p \tag{8.29}$$

donde  $\epsilon_e$  y  $\epsilon_p$  representan respectivamente la deformación elástica y plástica. Además, la tensión resultante es nula.



**Figura 8.11. Proceso de carga y descarga en tracción simple**

Si en el momento final de la descarga (punto B) se vuelve a cargar de nuevo, el correspondiente proceso de carga y deformación es de nuevo elástico con la misma

pendiente  $E$ , de forma que la deformación correspondiente a una tensión intermedia  $\sigma_I$  será:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_p + \frac{\sigma_I}{E} \quad (8.30)$$

En esta expresión se pone claramente de manifiesto que *ya no existe proporcionalidad entre la tensión aplicada y la deformación resultante*.

Para que la pieza quede sin deformación permanente, se la podría someter a un esfuerzo axial de compresión desde  $B$  hasta  $C$ , punto en que se alcanza el límite elástico de compresión, y a continuación mantener esa tensión compresiva hasta llegar a  $D$ , momento en el que se procedería a una nueva descarga, llegando finalmente al punto origen del diagrama. De esta forma, el material queda como antes de la deformación (aunque el ciclo tracción-descarga-compresión-descarga pueda dar lugar al fenómeno de fatiga).

A diferencia del comportamiento elástico, en el que cada valor de la tensión se le asocia con único valor de la deformación y viceversa, *cuando se considera un comportamiento elastoplástico perfecto, no existe dicha correspondencia biunívoca*. A un valor determinado de la tensión pueden corresponder infinitas deformaciones y viceversa. Cualquier punto del plano del diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$  representa un posible estado del material.

Otra particularidad de los fenómenos de carga y descarga es que un punto cualquiera  $J$  del diagrama (fig. 8.11) puede alcanzarse de infinitas maneras (por ejemplo,  $OMJ$  y  $OACNJ$ ). Por esta razón, en las teorías más completas de plasticidad, donde la tensión equivalente aumenta (*endurecimiento*) en función del trabajo de deformación o de la deformación total sufridos, no basta indicar el estado actual de tensión y deformación en que se encuentra un material, sino que debe especificarse el *camino o historia* seguido en su proceso de deformación.

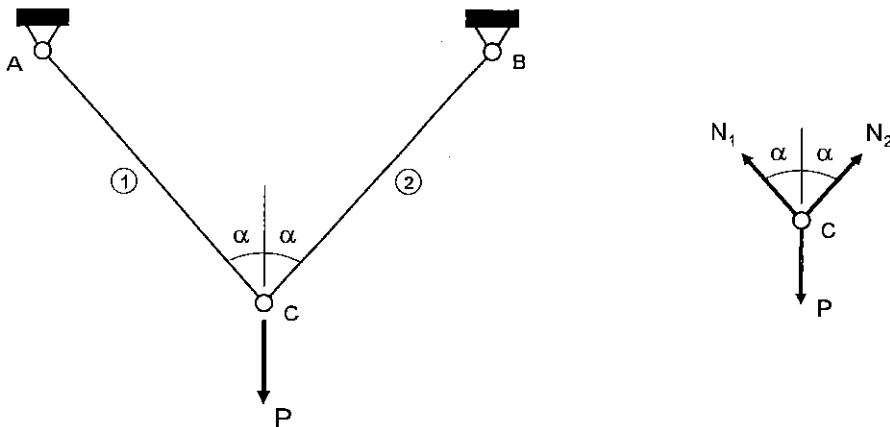
### **8.7.2. Aplicación a estructuras isostáticas e hiperestáticas**

En la aplicación del comportamiento elastoplástico perfecto a estructuras de barras articuladas, conviene diferenciar los casos isostático e hiperestático, como más

adelante se justificará. Para cada uno de los casos se estudiará el comportamiento con la ayuda de un ejemplo ilustrativo.

**a) Caso isostático:**

Sea la estructura de la fig. 8.12 formada por dos barras articuladas en sus extremos y unidas entre sí, del mismo material y diferente sección ( $A_1 > A_2$ ). En el nudo C se aplica una carga vertical creciente  $P$ .



**Figura 8.12. a) Estructura isostática; b) Equilibrio en C**

Por tratarse de una estructura isostática, se pueden obtener los esfuerzos en cada barra mediante la simple aplicación de las ecuaciones de la estática:

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2 \cos \alpha} \quad (8.31)$$

Las correspondientes tensiones serán:

$$\sigma_1 = \frac{P}{2A_1 \cos \alpha}; \quad \sigma_2 = \frac{P}{2A_2 \cos \alpha} \quad (8.32)$$

Como es  $A_1 > A_2$ , entonces será  $\sigma_2 > \sigma_1$ . Si  $P$  aumenta, puede ocurrir que  $\sigma_2$  alcance la tensión de fluencia  $\sigma_f$ . En este caso:

$$N_1 = N_2 = \sigma_f A_2 \quad (8.33)$$

y el valor de la carga aplicada es:

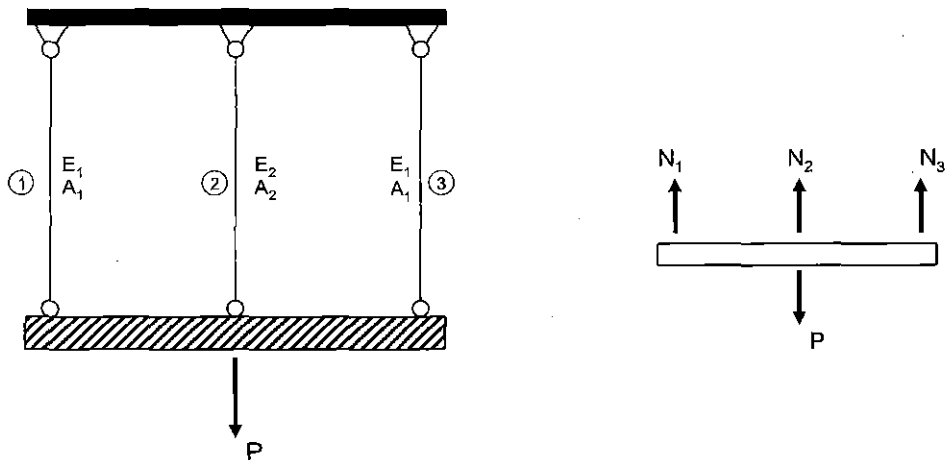
$$P_f = 2\sigma_f A_2 \cos \alpha \quad (8.34)$$

La estructura colapsa al llegar a este punto, ya que la deformación en la barra 2 comienza a crecer indefinidamente. La barra 1 giraría alrededor de la articulación A.

A la luz del ejemplo propuesto, se puede concluir que *en un sistema isostático se produce el colapso plástico cuando alguno de sus elementos entra en fluencia*.

**b) Caso hiperestático:**

En la fig. 8.13 se representa una estructura hiperestática formada por una barra rígida sustentada por tres tirantes articulados. El conjunto está sometido a una carga vertical creciente  $P$  aplicada tal como se indica. Los tirantes 1 y 3, dispuestos simétricamente, son del mismo material y sección. Supóngase, además, que  $E_1 < E_2$ .



**Figura 8.13. a) Estructura hiperestática; b) Equilibrio de la barra**

De modo análogo al caso isostático, se aumenta progresivamente el valor de la carga  $P$ . En primer lugar, el equilibrio impone la condición:

$$P = 2\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 \quad (8.35)$$

La compatibilidad de las deformaciones exige:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (8.36)$$

Si el valor de la carga es tal que las tres barras se comportan de forma elástica, entonces se cumple:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (8.37)$$

Resolviendo se obtienen las siguientes tensiones:

$$\sigma_1 = \frac{PE_1}{2E_1A_1 + E_2A_2}; \quad \sigma_2 = \frac{PE_2}{2E_1A_1 + E_2A_2} \quad (8.38)$$

Como  $E_2 > E_1$ , si aumenta suficientemente  $P$ , la barra 2 es la primera que alcanza la tensión de fluencia. En el momento en que  $\sigma_2 = \sigma_f$  el correspondiente valor de la carga aplicada será:

$$P_f = \sigma_f \left( A_2 + 2 \frac{E_1}{E_2} A_1 \right) \quad (8.39)$$

A este valor de la carga que da lugar a la aparición de la fluencia en la estructura se le llama **carga de fluencia**.

Recuérdese que para una estructura isostática ésta sería la carga de colapso. La estructura hiperestática, en cambio, admite valores de la carga por encima de  $P_f$ . La ecuación de equilibrio (8.35) y la ecuación de compatibilidad (8.36) se pueden satisfacer también mientras se desarrollan deformaciones plásticas en la barra 2. Por tanto, la tensión en las barras 1 y 3 puede aumentar hasta la fluencia, sin violar ninguna condición. Esta circunstancia está asociada al hecho de que la estructura es hiperestática: las tensiones no quedan determinadas sólo con las ecuaciones de equilibrio. Obsérvese que aunque la barra 2 desarrolle deformaciones plásticas, éstas serán pequeñas por las condiciones de compatibilidad que las igualan con las deformaciones elásticas presentes en las barras 1 y 3.

De esta forma, cuando al seguir creciendo  $P$  se alcance finalmente la fluencia en las barras 1 y 3, el valor correspondiente de la carga será:

$$P_p = \sigma_f (2A_1 + A_2) \quad (8.40)$$

que es la denominada **carga de colapso o de agotamiento plástico** de la estructura. Evidentemente,  $P_p > P_f$ .

Conviene notar que para valores intermedios entre  $P_f$  y  $P_p$ , el material de 1 y 3 sigue comportándose elásticamente, y el material de 2 se deforma plásticamente (a lo largo del tramo horizontal del diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$ ).

### 8.7.3. Tensiones y deformaciones residuales

Las tensiones y deformaciones que permanecen en los diferentes elementos de una estructura al retirar las cargas se denominan, respectivamente, **tensiones y deformaciones residuales**. Las tensiones residuales son características de las estructuras hiperestáticas a tracción o compresión simples, en las que se han producido deformaciones plásticas en algunos de sus elementos.

En la descarga (total o parcial) de una estructura, el comportamiento del material se supone siempre elástico y con la misma pendiente  $E$  de la parte elástica del diagrama, según se ha recordado ya en otras ocasiones. En la situación final de descarga, deben satisfacerse el equilibrio y la condición de compatibilidad. Estas condiciones, junto con la ley de comportamiento elástico en la descarga, proporcionarán los valores de las tensiones y deformaciones residuales.

Se ilustrará el proceso de cálculo con el ejemplo anterior de la fig. 8.13. Supóngase que una vez llegado el material de las barras 1 y 3 al punto de fluencia (y antes de que se produzca el colapso), se retira la carga  $P$ . Antes de la descarga, los materiales de las tres barras se encuentran en el punto A del diagrama de la fig. 8.14. Con la descarga, el material de la barra 2 se desplaza en el diagrama con pendiente  $E_2$  hasta C y el de las barras 1 y 3, con pendiente  $E_1$ , hasta B. Los dos puntos B y C se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\sigma_1^r A_1 + \sigma_2^r A_2 \\ \varepsilon_1^r &= \varepsilon_2^r \end{aligned} \tag{8.41}$$

donde el superíndice r denota "residual". Además, según la ley de comportamiento:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^r &= \varepsilon_A - \frac{\sigma_f - \sigma_1^r}{E_1} \\ \varepsilon_2^r &= \varepsilon_A - \frac{\sigma_f - \sigma_2^r}{E_2} \end{aligned} \tag{8.42}$$

Resolviendo (8.41) y (8.42), se obtienen los valores de  $\sigma_1^r$  y  $\sigma_2^r$ :

$$\sigma_1^r = \frac{\sigma_f(E_2 - E_1)A_2}{2E_1A_1 + E_2A_2}; \sigma_2^r = -\frac{2\sigma_f(E_2 - E_1)A_1}{2E_1A_1 + E_2A_2} \tag{8.43}$$

así como los de  $\varepsilon_1^r$  y  $\varepsilon_2^r$  sin más que sustituir esos valores en (8.42).

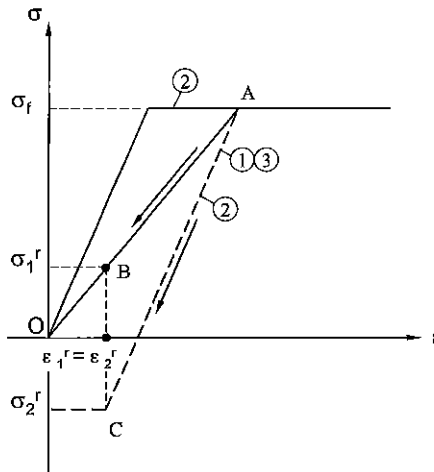


Figura 8.14. Tensiones y deformaciones residuales

Un método alternativo y más simple para obtener las tensiones y deformaciones residuales se basa en la aplicación del principio de superposición en la forma siguiente: a la solución de carga elasto-plástica  $P$  hasta el punto  $A$  se le suma la solución de un problema elástico, consistente en aplicar las cargas iniciales en sentido opuesto (es decir,  $-P$ ). De esta forma, la carga total equivalente será  $P-P=0$



(descarga) y se habrán efectuado las dos operaciones: carga elastoplástica y descarga elástica. La solución suma corresponderá a la situación final de la estructura descargada.

A continuación se aplica este proceso al ejemplo que se está considerando. La situación de carga elástica  $-P$  proporciona las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -P_p &= 2\sigma_1^e A_1 + \sigma_2^e A_2 \\ \frac{\sigma_1^e}{E_1} &= \frac{\sigma_2^e}{E_2} \end{aligned} \quad (8.44)$$

de las que se obtienen  $\sigma_1^e$  y  $\sigma_2^e$ . Nótese que las ecuaciones (8.44) son las mismas empleadas para obtener (8.38), con la única diferencia de que ahora se sustituye  $P$  por  $-P_p$ . Por eso (8.44) no necesita resolverse de nuevo. Para obtener las tensiones  $\sigma_1^e$  y  $\sigma_2^e$  basta sustituir en (8.38)  $P$  por  $-P_p$ . Sumando estos valores a la solución de carga elastoplástica (punto A), donde  $\sigma_1^A = \sigma_2^A = \sigma_f$ , se obtendrán las tensiones residuales finales:

$$\begin{aligned} \sigma_1^r &= \sigma_f + \sigma_1^e = \sigma_f + \frac{-P_p E_1}{2E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{\sigma_f (E_2 - E_1) A_2}{2E_1 A_1 + E_2 A_2} \\ \sigma_2^r &= \sigma_f + \sigma_2^e = \sigma_f + \frac{-P_p E_2}{2E_1 A_1 + E_2 A_2} = -\frac{2\sigma_f (E_2 - E_1) A_1}{2E_1 A_1 + E_2 A_2} \end{aligned} \quad (8.45)$$

que coinciden con (8.43).

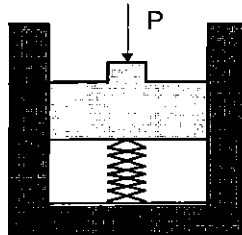
Las deformaciones residuales se obtienen de la misma forma, es decir, por superposición:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^r &= \varepsilon_A + \frac{\sigma_1^e}{E_1} \\ \varepsilon_2^r &= \varepsilon_A + \frac{\sigma_2^e}{E_2} \end{aligned} \quad (8.46)$$

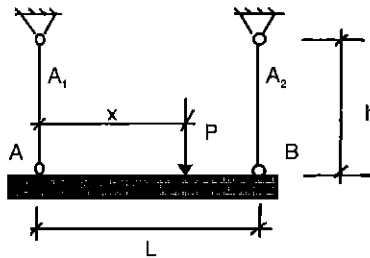
ecuaciones que, junto con (8.45), permiten obtener las mismas expresiones (8.42).

## PROBLEMAS

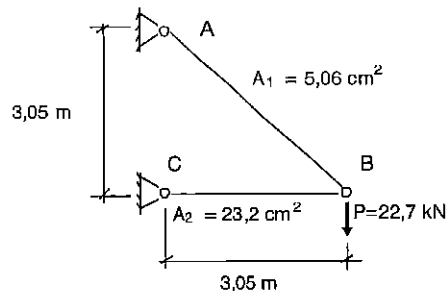
**8.1.** Un elemento de una máquina soporta una fuerza  $P$  y termina en un pistón que ajusta en una cavidad, tal como se muestra en la figura. En el interior de la cavidad están colocados dos muelles lineales coaxiales de constantes  $k_1$  y  $k_2$ . Cuando los muelles están sin cargar, tienen la misma longitud  $L$ . Calcular el esfuerzo que soporta cada uno de los muelles.



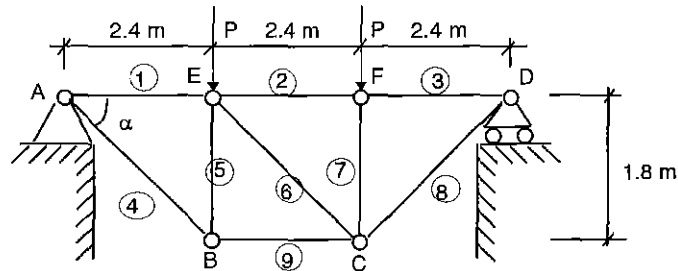
**8.2.** Una barra  $AB$  de rigidez infinita cuelga de una pared horizontal mediante dos cables del mismo material pero de secciones  $A_1$  y  $A_2$  distintas. Sobre la viga  $AB$  actúa una carga vertical  $P$  a una distancia  $x$  del extremo  $A$ . Si la longitud inicial de los cables es  $h$ , determinar el valor de  $x$  para que la viga permanezca horizontal, suponiendo despreciables los pesos propios.



**8.3.** La figura muestra un entramado de barras rectas, articuladas en los extremos, que soporta una carga de  $22,7$  kN. Se desea calcular el desplazamiento del nudo  $B$ . Las dos barras son de acero de módulo de elasticidad:  $E = 210$  GPa.



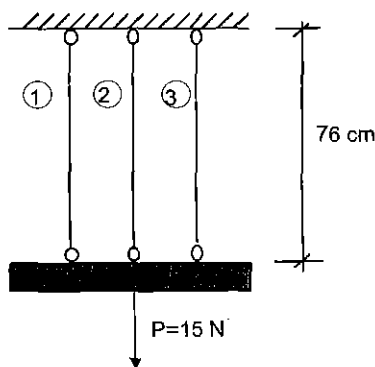
**8.4.** La estructura de la figura está formada por 9 barras rectas articuladas en los extremos, siendo la tensión admisible para todas ellas  $\sigma_{adm} = 100$  MPa. Sobre ella actúan dos fuerzas verticales  $P$  de 120 kN cada una. Determinar, para esa  $\sigma_{adm}$ , las secciones de las barras AB, BC y EC.



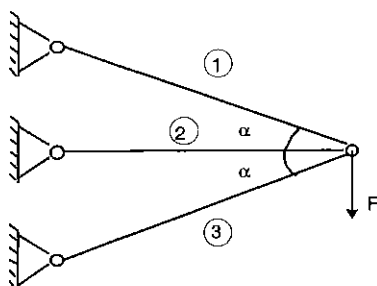
**8.5.** La figura muestra un péndulo rígido de 15 N de peso, que cuelga de 3 redondos separados la misma distancia, estando el central en la vertical del centro de gravedad del péndulo. Los extremos son de bronce, de sección circular de 2,50 mm de diámetro (sección de 4,908 mm<sup>2</sup>), y el central de acero de 1,25 mm de diámetro (sección de 1,227 mm<sup>2</sup>). Los redondos son elástico-lineales de 76 cm de longitud, y módulos de elasticidad respectivos:

$$E_b = 105 \text{ GPa} \text{ y } E_a = 210 \text{ GPa.}$$

- 1º) Calcular cómo se reparte la carga del péndulo entre los distintos redondos.
- 2º) Se supone que en una reparación el relojero se confunde y coloca el redondo de acero en la posición lateral, quedando situado un redondo de bronce en la posición central. Calcular en este caso la carga que soporta cada redondo y el desplazamiento que experimenta.



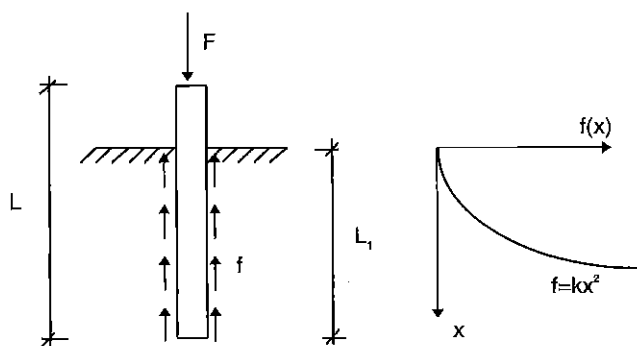
**8.6.** La estructura de la figura está formada por tres barras articuladas en sus extremos, siendo todas ellas de la misma sección  $A$  y del mismo material de módulo de elasticidad  $E$ . Calcular los esfuerzos en cada barra.



**8.7.** Una estaca de madera, de módulo de elasticidad longitudinal  $E$ , sección constante de área  $A$  y longitud  $L$ , ha sido introducida verticalmente en un terreno arcilloso hasta la profundidad  $L_1$ , soportando una carga  $F$  en su extremo superior. Esta carga  $F$  es equilibrada en su totalidad por las fuerzas de rozamiento engendradas sobre la superficie de la estaca por el terreno que la circunda. Dichas fuerzas de rozamiento, por unidad de longitud de la estaca, varían según la ley parabólica indicada en la figura. Se pide:

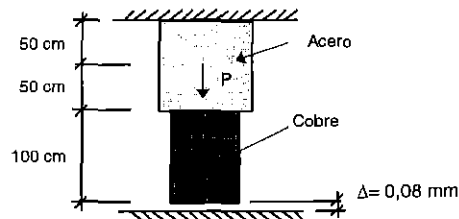
- 1º) Determinar la expresión analítica de los esfuerzos axiales a lo largo de la altura de la estaca, dibujando, de forma aproximada, el correspondiente diagrama.
- 2º) Valor del acortamiento de la estaca.

Se despreciarán las tensiones normales perpendiculares al eje de la estaca.



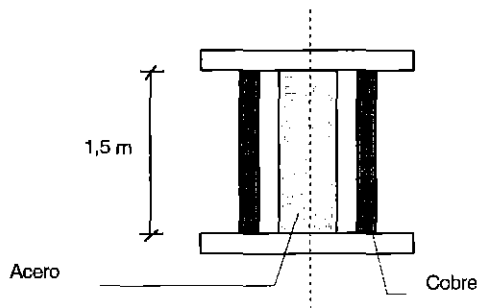
**8.8.** La parte superior de la barra que se indica en la figura es de acero, con una sección transversal de  $200 \text{ cm}^2$ ; la parte inferior es de cobre, con una sección transversal de  $100 \text{ cm}^2$ . El huelgo  $\Delta$  es de  $0,08 \text{ mm}$ . Las paredes son fijas e infinitamente rígidas. Determinar las tensiones en las distintas partes de la barra, debidas a la acción de una fuerza  $P$  de  $1,5 \text{ MN}$ , que actúa simultáneamente con una elevación de temperatura de  $20^\circ\text{C}$ .

<u>Características de los materiales.</u>	<u>acero</u>	<u>cobre</u>
$A \text{ (cm}^2\text{)}$	200	100
$E \text{ (GPa)}$	210	105
$\alpha \text{ (}^\circ\text{C}^{-1}\text{)}$	$10 \times 10^{-6}$	$16 \times 10^{-6}$



**8.9.** Una barra de acero de  $1,5 \text{ m}$  de longitud y  $10 \text{ cm}^2$  de sección recta se dispone en el interior de un tubo de cobre de  $12 \text{ cm}^2$  de sección recta. Los extremos de la barra y del tubo están rígidamente unidos. Calcular las tensiones originadas en ambos materiales cuando la temperatura aumenta  $70^\circ\text{C}$ . Determinar el alargamiento del conjunto.

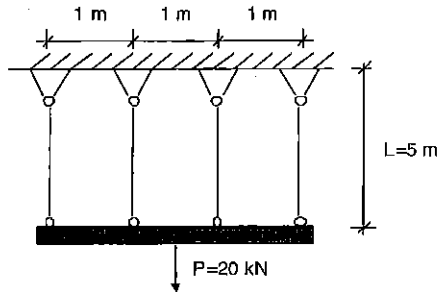
<u>Características de los materiales:</u>	<u>acero</u>	<u>cobre</u>
$E \text{ (GPa)}$	210	120
$\alpha \text{ (}^\circ\text{C}^{-1}\text{)}$	$12,5 \times 10^{-6}$	$17 \times 10^{-6}$



**8.10.** Una viga rígida e indeformable de 20 kN de peso está suspendida por 4 barras verticales situadas en un mismo plano, de igual longitud  $L = 5\text{ m}$  y de la misma sección  $A = 5\text{ cm}^2$ , siendo las dos barras exteriores de cobre y las dos interiores de acero. Determinar los esfuerzos en las barras, teniendo en cuenta que la temperatura se incrementa en  $20^\circ\text{C}$ . Calcular el alargamiento de las barras.

Características de los materiales:

	<u>acero</u>	<u>cobre</u>
E (GPa)	210	120
$\alpha$ ( $^\circ\text{C}^{-1}$ )	$12 \times 10^{-6}$	$17 \times 10^{-6}$

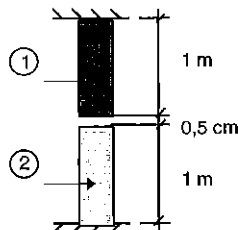


**8.11.** Las barras (1) y (2) representadas en la figura son de dos materiales diferentes, ambos con comportamiento elasto-plástico perfecto, y cuyas dimensiones y características se indican. Calcular:

- 1º) El incremento de temperatura necesario para producir el contacto, sin presión, entre las barras.
- 2º) El incremento de temperatura necesario para que se alcance la tensión de fluencia en una de las barras, indicando en cuál de ellas se produce.

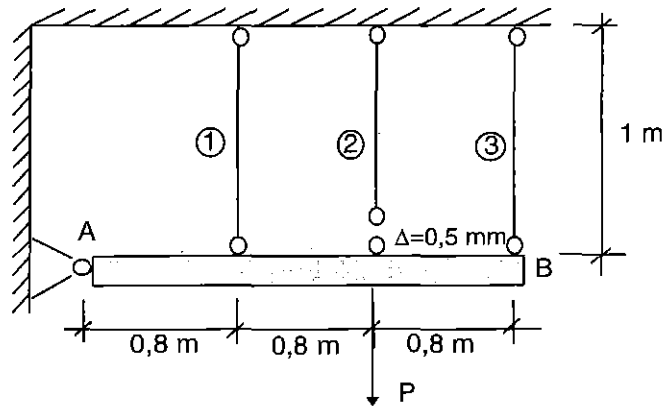
Características de los materiales:

	<u>Material 1</u>	<u>Material 2</u>
A ( $\text{cm}^2$ )	20	20
E (GPa)	10	200
$\sigma_f$ (MPa)	200	300
$\alpha$ ( $^\circ\text{C}^{-1}$ )	$175 \times 10^{-7}$	$125 \times 10^{-7}$



**8.12.** Se quiere suspender la barra infinitamente rígida AB, articulada en A, mediante tres barras de acero de igual módulo de elasticidad ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) e idéntica sección ( $A = 20 \text{ cm}^2$ ). Por un error de fabricación la barra intermedia es  $0,5 \text{ mm}$  más corta que las otras dos. Una vez realizado el ensamblaje de la estructura, se aplica a la misma una carga  $P$  de  $700 \text{ kN}$ , tal como se indica en la figura. Determinar:

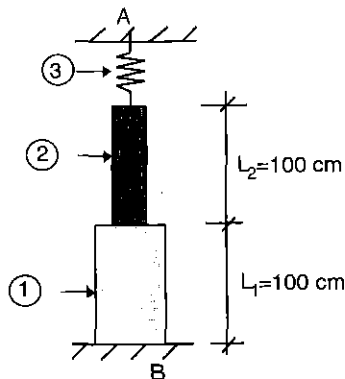
- 1º) Tensiones en cada una de las barras como consecuencia del montaje.
- 2º) Tensiones finales en cada una de las barras tras la aplicación de la carga  $P$ .



**8.13.** Las barras (1) y (2) y el muelle (3) se encuentran alineados longitudinalmente y sin huelgo entre las paredes A y B. Las características elásticas y físicas son las siguientes:

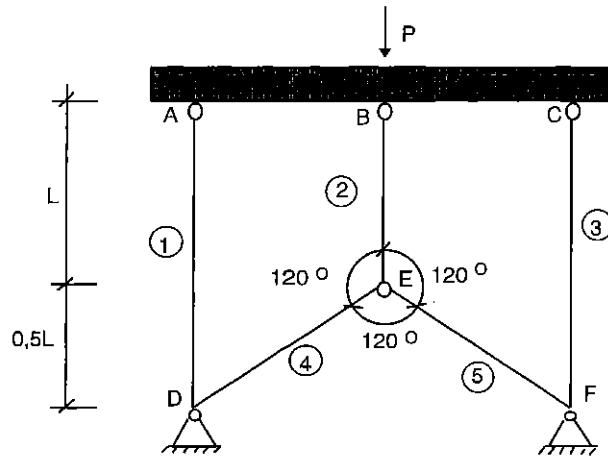
$$\begin{array}{lll}
 A_1 = 60 \text{ cm}^2 & E_1 = 10 \text{ GPa} & \alpha_1 = 2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\
 A_2 = 20 \text{ cm}^2 & E_2 = 20 \text{ GPa} & k_3 = 50 \text{ kN/mm}
 \end{array}$$

La pared A se considera infinitamente rígida, pero la B es elástica, de manera que se deforma  $0,05 \text{ mm}$  por cada  $\text{kN}$  aplicado. Se somete a la barra (1) a un aumento de temperatura de  $100^\circ\text{C}$ . Obtener las tensiones en las barras y dibujar el diagrama de desplazamientos relativos a la pared inmóvil A.



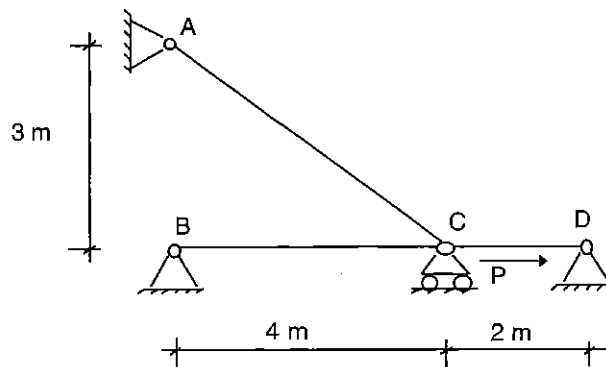
**8.14.** La estructura de la figura está formada por una barra rígida ABC y cinco barras articuladas de acero de la misma sección transversal  $A = 2 \text{ cm}^2$ . Las articulaciones D y F son fijas. Se somete al conjunto a la acción simultánea de la carga vertical de valor  $P = 100 \text{ kN}$ , y a una elevación de temperatura de la barra BE de  $120^\circ\text{C}$ . Determinar las tensiones en las barras articuladas, así como el desplazamiento del nudo E.

Datos del problema.  $L = 2 \text{ m}$ .  
 Módulo de elasticidad del acero:  $E = 200 \text{ GPa}$ .  
 Coeficiente de dilatación lineal:  $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .



**8.15.** En la estructura articulada de la figura, todas las barras son de la misma sección ( $A=12 \text{ cm}^2$ ) y del mismo material (acero). A, B y D son apoyos fijos, y C es un apoyo móvil. Sobre el apoyo móvil C se ejerce una fuerza horizontal de valor  $P = 200 \text{ kN}$  en la dirección de C a D. Simultáneamente se eleva la temperatura de la barra CD en  $25^\circ\text{C}$ . Determinar las tensiones en las distintas barras, así como la reacción y el desplazamiento en el apoyo móvil C.

Módulo de elasticidad del acero:  $E = 200 \text{ GPa}$ .  
 Coeficiente de dilatación lineal del acero:  $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .



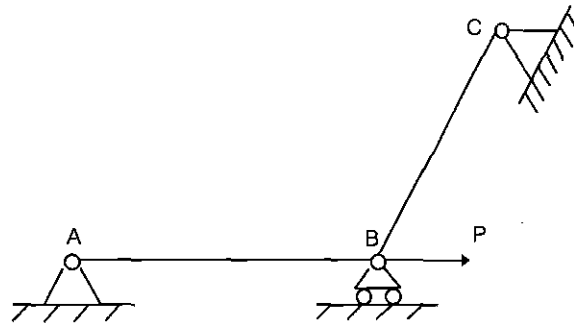


**8.16.** En la estructura articulada de la figura, las barras son del mismo material, sección ( $A = 2 \text{ cm}^2$ ) y longitud ( $L = 600 \text{ cm}$ ). Forman entre sí un ángulo de  $120^\circ$ . A y C son apoyos fijos y B es un apoyo móvil.

Sobre el apoyo móvil B se ejerce una fuerza horizontal de valor  $P = 80 \text{ kN}$  en la dirección de A a B, y simultáneamente se eleva la temperatura de la barra AB en  $\Delta T = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Calcular las reacciones en los apoyos y el desplazamiento del apoyo móvil B.

Características mecánicas del material: Módulo de elasticidad lineal:  $E = 200 \text{ GPa}$ .  
 Coeficiente de dilatación lineal:  $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

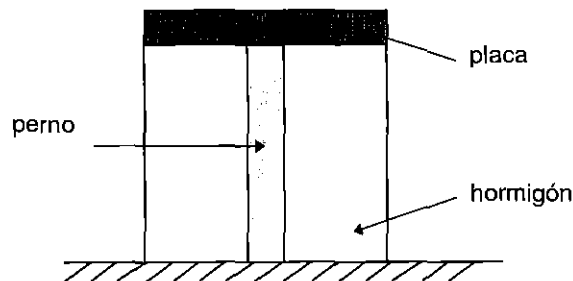


**8.17.** Un bloque de hormigón está limitado por el suelo y por una placa rígida anclada al suelo mediante un perno de acero. Determinar las tensiones en el hormigón y en el perno en los siguientes casos:

1º) Cuando se eleva la temperatura del hormigón  $20^\circ\text{C}$ .

2º) Cuando disminuye la temperatura del perno  $20^\circ\text{C}$ .

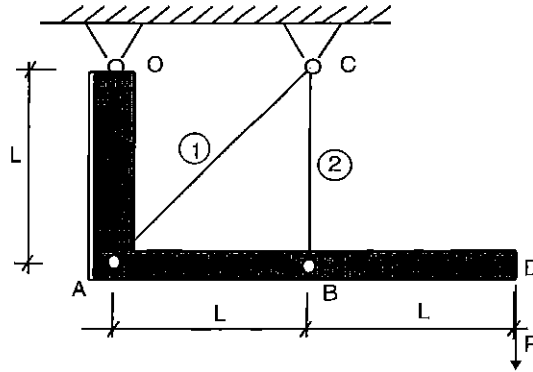
<u>Características mecánicas de los materiales:</u>	Area ( $\text{cm}^2$ )	E (GPa)	$\alpha$ ( $^\circ\text{C}^{-1}$ )
Hormigón:	200	20	$10^{-5}$
Acero:	8	200	$10^{-5}$



**8.18.** La barra OABD, que se supone infinitamente rígida, está articulada al techo en O y sustentada por dos tirantes CA y CB articulados en sus extremos. Las dimensiones son las indicadas en la figura siendo  $L = 200$  cm. El material de los tirantes es acero ( $E = 200$  GPa).

Si en el extremo D se aplica una carga vertical  $P$  de 15 kN y las secciones de los tirantes CA y CB son, respectivamente,  $A_1 = 2$  cm<sup>2</sup> y  $A_2 = 2\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>, calcular:

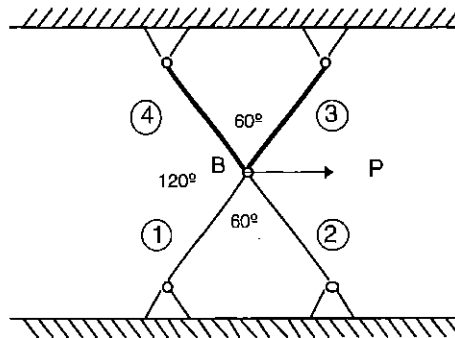
- 1º) Los esfuerzos  $N_1$  y  $N_2$  en los dos tirantes.
- 2º) Descenso del extremo D.



**8.19.** La estructura de la figura, situada en un plano vertical, está formada por cuatro barras metálicas de la misma longitud  $L$ , idéntico material de módulo de elasticidad  $E$ , y secciones respectivas  $A_i$  ( $i = 1,2,3,4$ ). Soporta una fuerza horizontal  $P$  aplicada en el nudo B en el que concurren las barras. Calcular:

- 1º) Esfuerzos en las barras.
- 2º) Desplazamiento del nudo B.

Datos:  $L = 63$  cm       $E = 210$  GPa       $P = 300$  kN  
 $A_1 = A_2 = 15$  cm<sup>2</sup>       $A_3 = A_4 = 30$  cm<sup>2</sup>

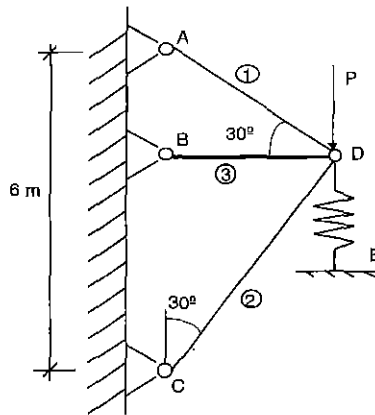


**8.20.** El entramado vertical de la figura está formado por tres barras biarticuladas y un muelle. La barra (1) es de acero, la (2) de aluminio y la (3) puede considerarse como una barra indeformable. El muelle tiene de constante característica  $k = 300 \text{ kN/m}$ . Si se aplica en D una carga vertical de valor  $P = 10 \text{ kN}$ , determinar:

- 1º) Tensiones en las barras (1) y (2).
- 2º) Desplazamiento de la sección D.

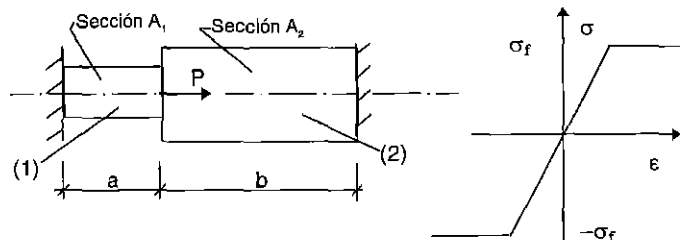
Características de los materiales:

	Acero	Aluminio
Módulo de Elasticidad (GPa)	210	70
Sección ( $\text{cm}^2$ )	1	2



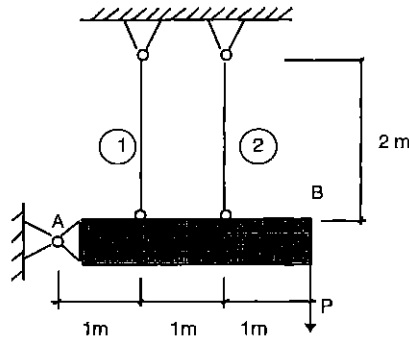
**8.21.** La pieza de la figura, de material de módulo de elasticidad  $E$ , está sometida a la carga axial  $P$  tal como se indica. Se pide:

- 1º) La relación que debe existir entre  $a$  y  $b$ , para que el comportamiento de la pieza sea elástico hasta su agotamiento en todas las secciones.
- 2º) Siendo  $b = 2a$  y la gráfica  $\sigma$ - $\epsilon$  la indicada en la figura, calcular el valor de la carga  $P$  que determina:
  - a) El comienzo de la fase elasto-plástica; es decir, valor máximo  $P_f$  para el cual toda la pieza trabaja en la zona elástica.
  - b) El agotamiento de la pieza; es decir, valor  $P_p$  para el cual la pieza no sea capaz de ofrecer resistencia a nuevos incrementos de carga.
- 3º) Supuesta de nuevo la relación  $b = 2a$ , determinar un diagrama que relacione las tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  en los tramos respectivos (1) y (2), con la carga  $P$ .



**8.22.** La estructura de la figura está formada por una barra rígida horizontal AB, articulada en A y suspendida por dos tirantes verticales, tal y como se indica. Los tirantes tienen la misma sección,  $5 \text{ cm}^2$ , y son del mismo material elasto-plástico perfecto de límite de fluencia  $240 \text{ MPa}$  y módulo de elasticidad lineal  $200 \text{ GPa}$ . En el extremo B de la barra actúa una fuerza vertical creciente P. Se pide:

- 1º) Razonar cómo se comporta la estructura, hasta llegar al agotamiento total, conforme se va incrementando el valor de la carga P.
- 2º) Dibujar un diagrama que relacione los valores de P y  $\delta$ , siendo  $\delta$  el desplazamiento vertical de B.
- 3º) Si tras alcanzar la carga última comienza inmediatamente el proceso de descarga, calcular al finalizar éste el valor de las tensiones residuales y el desplazamiento vertical de B.

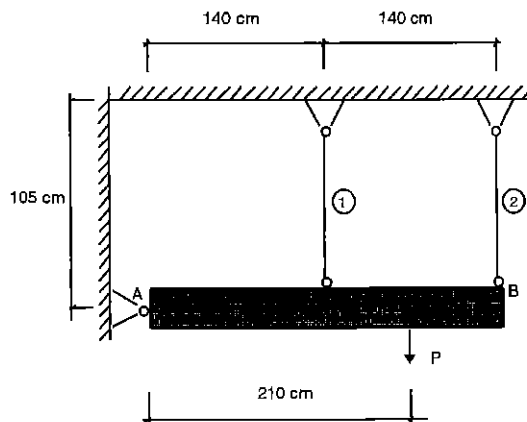


**8.23.** Una barra horizontal infinitamente rígida AB, está apoyada en una articulación fija en A y suspendida por dos barras de acero de  $105 \text{ cm}$  de longitud y  $2,5 \text{ cm}^2$  de sección cada una, tal como se indica en la figura. Se considera el acero como material elasto-plástico perfecto y equirresistente de características:

Módulo de elasticidad lineal:  $E = 210 \text{ GPa}$   
 Tensión de fluencia:  $\sigma_f = 300 \text{ MPa}$

Calcular:

- 1º) Cómo se reparte la carga P entre las dos barras, cuando ambas trabajan en régimen elástico.
- 2º) Carga mínima P para que las dos barras entren en régimen plástico.
- 3º) Si en el momento en el que se alcanza esta carga mínima P, se descarga totalmente el sistema, valores de las tensiones residuales en las dos barras.

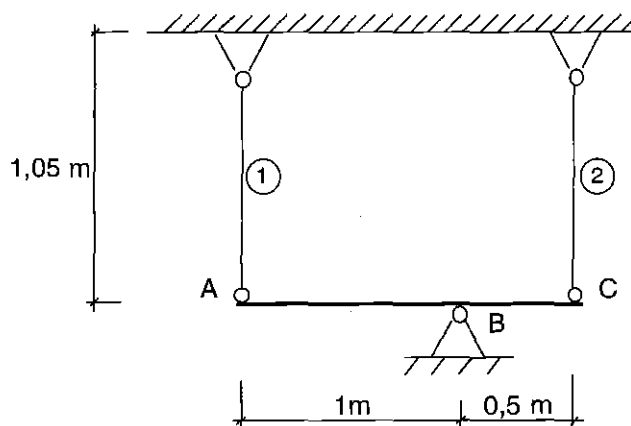


**8.24.** La viga infinitamente rígida de la figura se apoya en una articulación fija en B y en sus extremos está unida a dos tirantes de acero de  $40 \text{ cm}^2$  de sección cada uno. Se desea:

- 1º) Tensiones en los tirantes si la temperatura de ambos se eleva en  $20^\circ\text{C}$  a partir del momento inicial en que se colocan sin tensión.
- 2º) Hasta qué valor puede elevarse la temperatura en ambos tirantes sin que se sobrepase el límite de fluencia en ninguno de ellos.
- 3º) Desplazamientos verticales de A y C, cuando ambos tirantes sufren una elevación de temperatura de  $200^\circ\text{C}$  a partir del momento inicial.
- 4º) Tensiones residuales si después de la fase 3) desciende la temperatura en ambos tirantes hasta alcanzar la del momento inicial en que se colocaron sin tensión.

El material de los tirantes es equirresistente y elasto-plástico perfecto de características:

- tensión de fluencia:  $\sigma_f = 378 \text{ MPa}$
- módulo de elasticidad:  $E = 210 \text{ GPa}$
- coeficiente de dilatación lineal:  $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

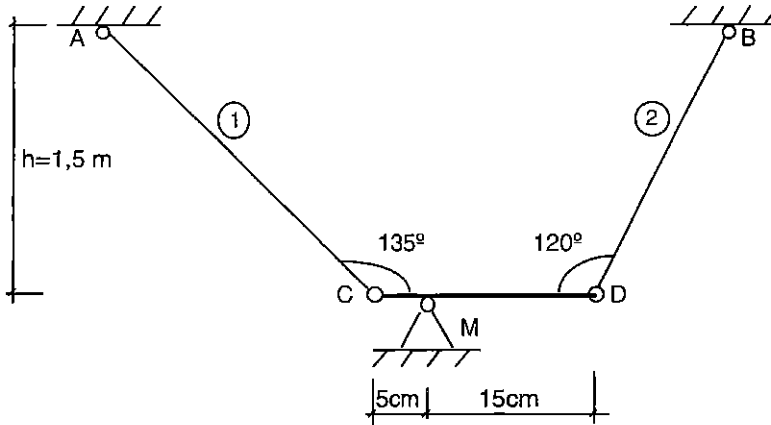


**8.25.** La estructura de la figura está formada por tres barras articuladas en los extremos. La barra CD es infinitamente rígida y puede pivotar alrededor del apoyo M sin rozamiento alguno. Inicialmente no existe tensión en las barras AC y BD. Se pide:

- 1º) Relación entre las secciones de las barras AC y BD, suponiendo que ambas trabajan en régimen elástico, para que la barra CD permanezca horizontal, cuando se eleva la temperatura del conjunto.
- 2º) Si la relación entre las secciones de AC y BD es  $A_1 = 3A_2$ , ¿para qué valor del incremento de temperatura se alcanza la tensión de fluencia en una de las barras?
- 3º) Para esa misma relación entre las secciones, ¿qué ángulo formará con la horizontal la barra CD cuando el incremento de temperatura sea de  $150^\circ\text{C}$ ?

Los materiales de las barras AC y BD son elasto-plástico perfectos de características:

	Barra AC (1)	Barra BD (2)
E (GPa)	100	200
$\sigma_f$ (MPa)	160	240
$\alpha$ ( $^{\circ} C^{-1}$ )	$15 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$



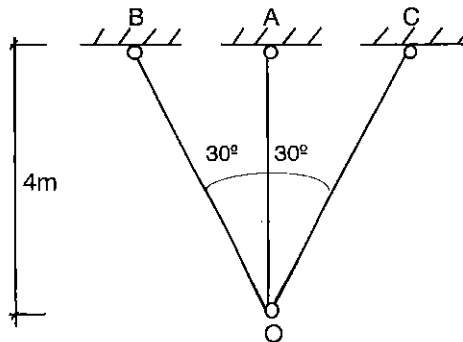
**8.26.** En la estructura de la figura, las tres barras están articuladas en ambos extremos. Se eleva la temperatura de la barra OA. Se pregunta:

- 1º) ¿Para qué incremento de temperatura se produce la plastificación de alguna barra?
- 2º) ¿Para qué incremento de temperatura se produce el agotamiento en régimen plástico de la estructura?

No se considerará la posibilidad de pandeo.

Datos del problema:

Secciones de las barras:  $A_{OA} = 4 \text{ cm}^2$ ;  $A_{OB} = A_{OC} = 6 \text{ cm}^2$   
 Módulo de elasticidad del material:  $E = 200 \text{ GPa}$   
 Tensión de fluencia por tracción o compresión del material:  $\sigma_f = 300 \text{ MPa}$   
 Coeficiente de dilatación del material:  $\alpha = 10^{-5} / ^{\circ}C$ .

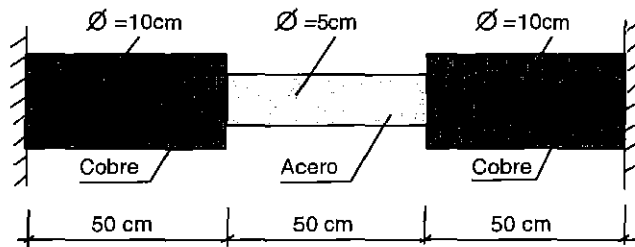


**8.27.** Una barra de 150 cm de longitud está sujeta a dos paredes rígidas extremas. Se compone de una parte central de acero de 50 cm de longitud y sección circular de 5 cm de diámetro, y de dos partes extremas de cobre de 50 cm de longitud y sección también circular de 10 cm de diámetro. Se supone que en el momento inicial la barra se encuentra sin tensión. Calcular las tensiones del cobre y del acero en los siguientes casos:

- 1º) Cuando el conjunto se somete a una elevación de temperatura de 50 °C.
- 2º) Cuando la temperatura del conjunto se vuelve a elevar 50 °C con relación al estado final anterior.
- 3º) Cuando se enfría 100 °C y la barra vuelve a su temperatura inicial.

Se considera que el acero y el cobre se comportan como materiales elasto-plástico perfectos de características:

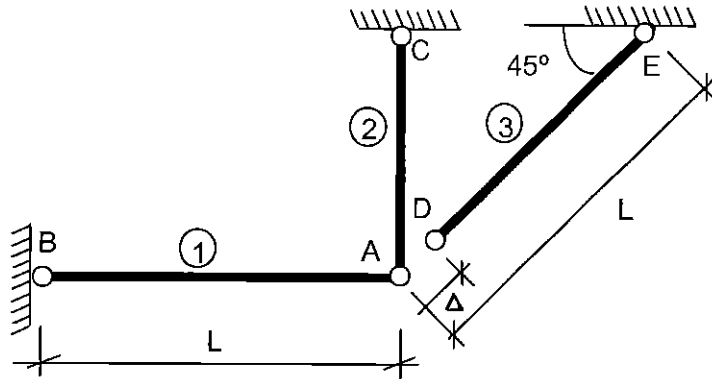
	<u>Acero</u>	<u>Cobre</u>
E (GPa)	210	105
$\alpha$ ( ° C <sup>-1</sup> )	$12,5 \times 10^{-6}$	$16,5 \times 10^{-6}$
$\sigma_f$ (MPa)	300	200



**8.28.** La estructura de la figura está formada por tres barras de acero de módulo de elasticidad  $E = 200$  GPa, siendo  $L = 1$  m. Las barras AB y DE tienen una sección  $A_1 = A_3 = 4$  cm<sup>2</sup> y la barra AC tiene una sección  $A_2 = 8$  cm<sup>2</sup>.

Los extremos A y D se encuentran inicialmente separados una distancia  $\Delta = 1$  mm. Tras hacer coincidir A y D en la operación de ensamblaje, determinar las fuerzas que transmiten cada una de las barras, indicando su sentido.

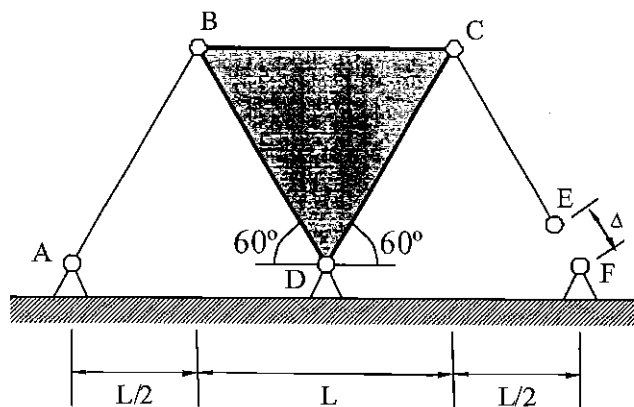
Despréciense el efecto de pandeo.



**8.29.** La estructura de la figura está formada por un triángulo equilátero infinitamente rígido BCD de lado  $L = 1 \text{ m}$  cuyo vértice D descansa sobre un apoyo fijo. Dicho triángulo se encuentra sustentado por medio de dos tirantes biarticulados AB y CE.

El tirante AB posee una sección  $A = 10 \text{ cm}^2$  y una longitud  $L = 1 \text{ m}$ , y está construido de un acero de módulo de elasticidad  $E = 200 \text{ GPa}$  y tensión de fluencia  $\sigma_f = 240 \text{ MPa}$ . El tirante CE presenta las mismas características que el anterior, pero por un error de fabricación su longitud es menor en una cantidad  $\Delta = 0,5 \text{ mm}$ . Tras realizar el montaje de la estructura uniendo el extremo E del tirante CE al apoyo F, se pide:

- 1º) Tensiones que se originan en los tirantes.
- 2º) Alargamientos o acortamientos experimentados por los tirantes.
- 3º) Giro que sufre el triángulo BCD.



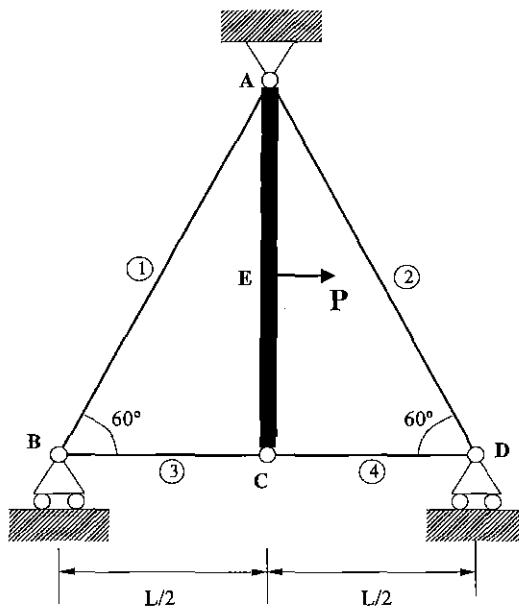


**8.30.** La estructura de la figura está formada por una barra infinitamente rígida AC suspendida del techo en A y conectada mediante cuatro tirantes biarticulados AB, BC, CD y AD a los apoyos deslizantes B y D. Los tirantes están contruidos de acero de módulo de elasticidad  $E = 200 \text{ GPa}$ , tensión de fluencia  $\sigma_f = 240 \text{ MPa}$ , y tienen una sección  $A = 5 \text{ cm}^2$ , siendo  $L = 1 \text{ m}$ . En el punto medio E de la barra AC se aplica una fuerza horizontal P, tal y como se indica en la figura. Se pide:

1º) Para  $P = 200 \text{ kN}$ :

- a) Tensiones en los tirantes.
- b) Alargamientos o acortamientos sufridos por las barras.
- c) Giro de la barra AC.

2º) Determinar la carga  $P_p$  de agotamiento plástico de la estructura.

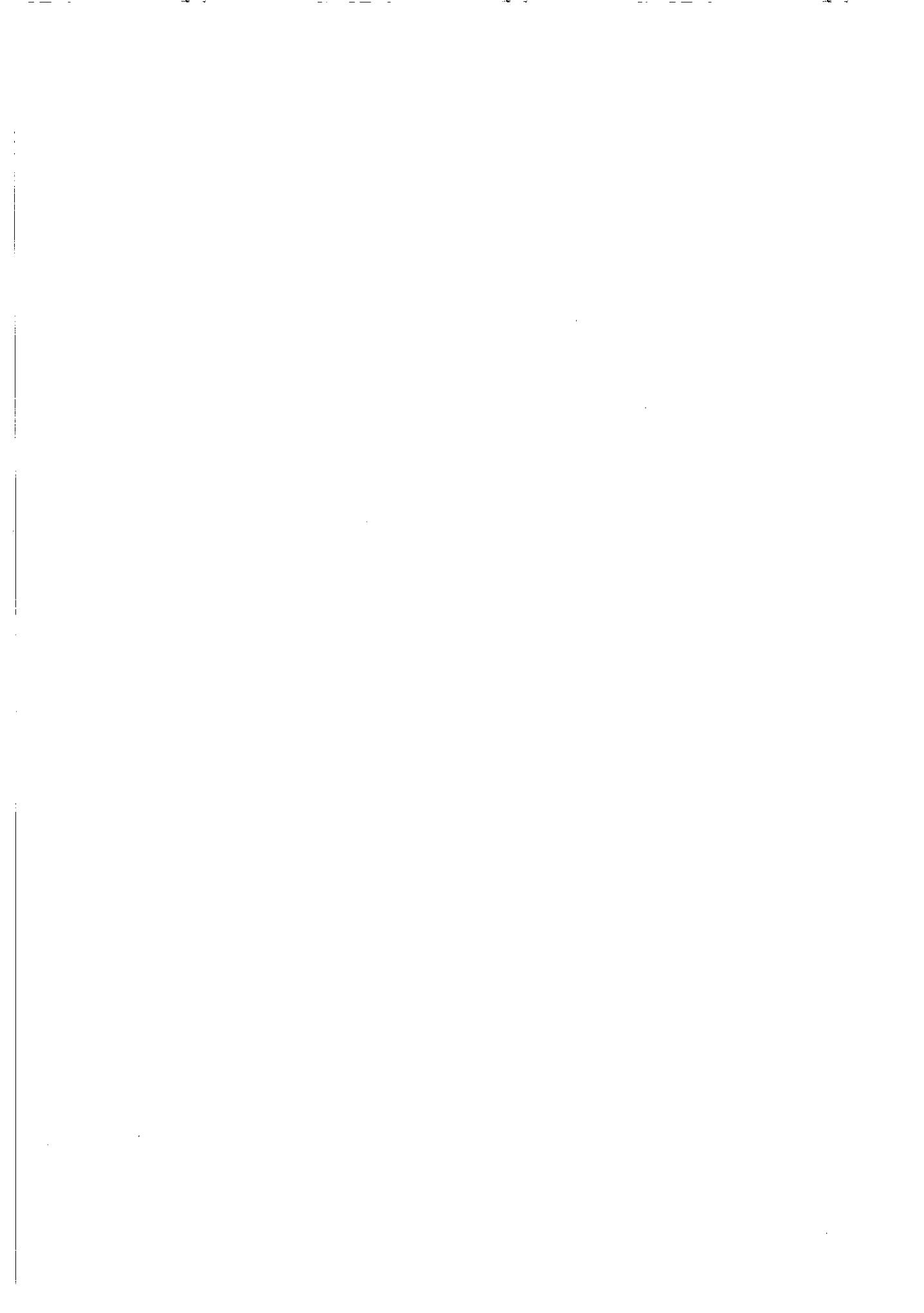


# TEMA 9

---

## ***TEORÍA GENERAL DE LA FLEXIÓN. TENSIONES***

---



## 9.1. FLEXIÓN PURA, FLEXIÓN SIMPLE Y FLEXIÓN COMPUESTA

### 9.1.1. Flexión pura

Considérese la viga biarticulada de la fig. 9.1 sometida a las cargas  $P$  indicadas. Si se representan los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga, se observa que en el tramo  $CD$  el momento flector es constante y el esfuerzo cortante es nulo. Además, no existen esfuerzos normales en toda la viga.

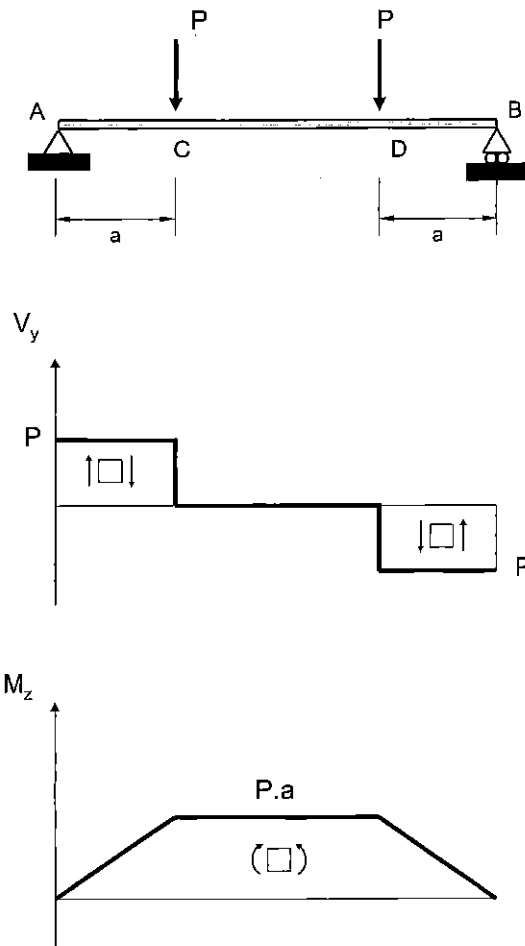


Figura 9.1. Ejemplo de flexión pura (tramo CD)

Una sección en la que los esfuerzos interiores se reducen al momento flector, siendo nulos el esfuerzo cortante y el esfuerzo normal, se dice que se encuentra sometida a **flexión pura**. Es la forma de trabajo de cualquiera de las secciones del tramo  $CD$ .

### 9.1.2. Flexión simple

Sea la viga biarticulada de la fig. 9.2 sobre la que actúa una carga uniformemente repartida de intensidad  $q$ . En cualquier sección de la viga (salvo la central) los esfuerzos que se originan son únicamente un cortante y un flexor.

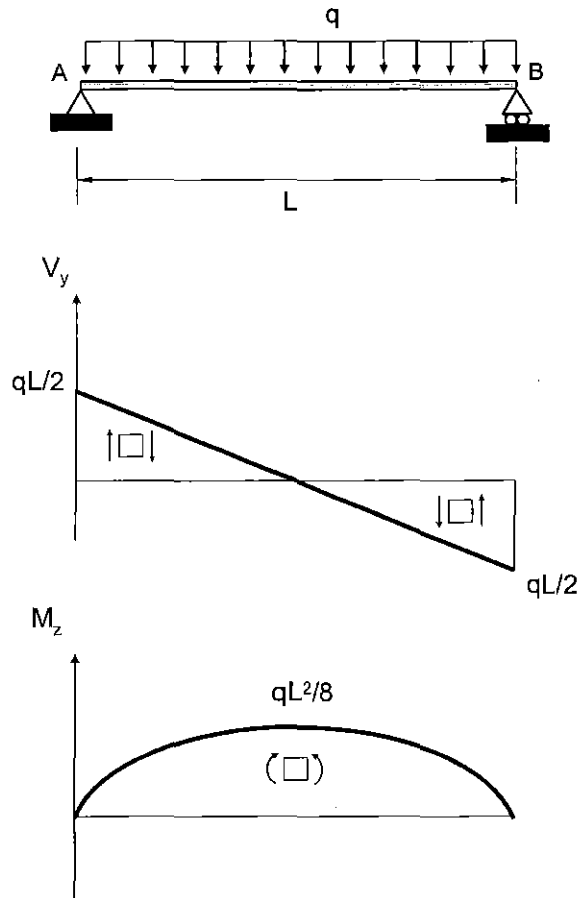


Figura 9.2. Ejemplo de flexión simple

Una sección tal en la que existe momento flexor y esfuerzo cortante, siendo nulo el esfuerzo normal, se dice que se encuentra sometida a **flexión simple**.

En el ejemplo de la figura, se pueden verificar las relaciones de equilibrio (7.3) y (7.4):

$$\frac{dV_y}{dx} = -q ; \quad \frac{dM_z}{dx} = V_y$$

### 9.1.3. Flexión compuesta

Sea la viga biarticulada de la fig. 9.3 sometida a la acción de una fuerza  $F$ , aplicada en  $C$  e inclinada un ángulo  $\alpha$  respecto al eje de la viga. Como se expresa en los diagramas de esfuerzos de sección, en el tramo  $AC$  se origina, además de esfuerzo cortante y momento flector, un esfuerzo normal.

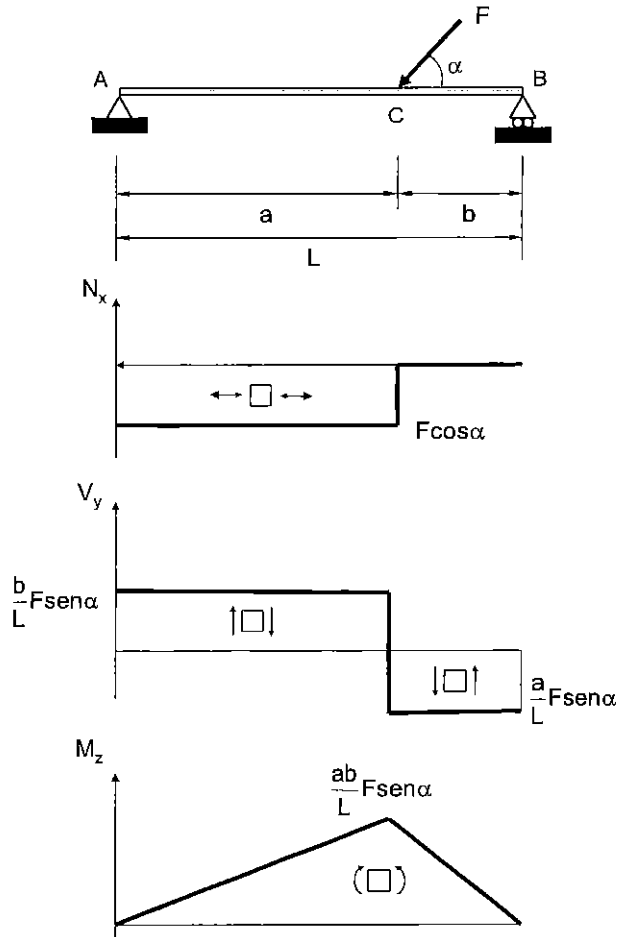


Figura 9.3. Ejemplo de flexión compuesta

Una sección sometida simultáneamente a esfuerzo normal, esfuerzo cortante y momento flector se dice que trabaja a **flexión compuesta**.

La flexión compuesta se presenta con frecuencia en columnas que soportan cargas excéntricas (no aplicadas en el centro de gravedad de la sección), por medio de ménsulas u otras disposiciones estructurales (fig. 9.4).

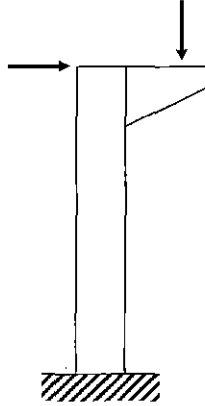


Figura 9.4. Columna sometida a flexión compuesta

Este tema se centrará en el estudio de los casos de flexión pura y flexión simple.

## **9.2. FLEXIÓN PURA EN BARRAS PRISMÁTICAS. LEY DE NAVIER**

Según se ha visto en el epígrafe anterior, en flexión pura no existe esfuerzo cortante y, por tanto, el momento flector es constante [cfr. (7.4)]. Por ello, puede decirse que *una viga o un tramo de la misma trabaja a flexión pura cuando está sometida a un momento flector constante*.

La flexión pura es un caso poco habitual en el análisis estructural, pues con frecuencia se originan también esfuerzos cortantes y normales en los sistemas cargados. No obstante, su estudio interesa porque por un lado es más sencillo que el de los otros casos de flexión y, por otra parte, porque las conclusiones que de él se deducen pueden aplicarse, dentro de ciertos límites, a esos otros casos más generales.

### **9.2.1. Hipótesis de cálculo**

En lo que sigue se considerarán válidas las siguientes hipótesis:

a) *Viga recta simétrica*: La sección transversal se supone constante a lo largo del eje de la pieza, con un eje de simetría al menos (eje Oy), y las fuerzas exteriores actúan en el plano de simetría definido por la directriz y el eje de simetría.

b) *Material homogéneo, isótropo y elástico lineal* (cumple ley de Hooke), con igual módulo de elasticidad a tracción y compresión.

c) *Hipótesis de Navier-Bernoulli* de las secciones planas: las secciones transversales de la barra permanecen planas y perpendiculares a la directriz y a todas las fibras longitudinales en la viga deformada.

Esta hipótesis se puede comprobar experimentalmente, ya que los planos que contienen a las secciones en flexión pura pasan por el centro de curvatura de la directriz, siendo la deformada de la viga un arco de circunferencia.

d) *Pequeñas deformaciones*: se supone que las deformaciones son lo suficientemente pequeñas para que la acción de las fuerzas exteriores no se vea modificada, en primera aproximación, por la deformación.

### **9.2.2. Tensiones y deformaciones longitudinales en una viga sometida a flexión pura**

En este apartado se pretende determinar la distribución de tensiones y deformaciones en la sección de una viga sometida a flexión pura, siendo  $M_f$  el valor del momento flector. Considérense dos secciones infinitamente próximas de esa viga, tales como las secciones 1 y 2 de la fig. 9.5a. En esta figura  $M_1P_1$  y  $M_2P_2$  son las trazas de los planos que contienen ambas secciones rectas con el plano de simetría de la viga (plano xy).

En virtud de las hipótesis anteriores, las secciones  $M_1P_1$  y  $M_2P_2$  giran alrededor de un eje perpendicular al plano de simetría. La viga se deforma según se indica en la fig. 9.5b, donde la fibra  $M_1M_2$  sufre un acortamiento y la fibra  $P_1P_2$  un alargamiento. La primera estará necesariamente sometida a una tensión de compresión en tanto que la segunda lo estará a una tensión de tracción. Debido a la continuidad de las deformaciones, entre ambas fibras existirá otra  $N_1N_2$  que no experimentará variación de longitud alguna, es decir,  $\overline{N_1N_2} = dx$ , y que, por tanto, no estará sometida a



ninguna tensión. A esta fibra se la denomina *fibra neutra*. La superficie, perpendicular al plano  $xy$ , constituida por las fibras neutras se denomina *superficie neutra*. La intersección de la superficie neutra con cualquier sección transversal es el denominado *eje neutro o línea neutra* (véase fig. 9.6).

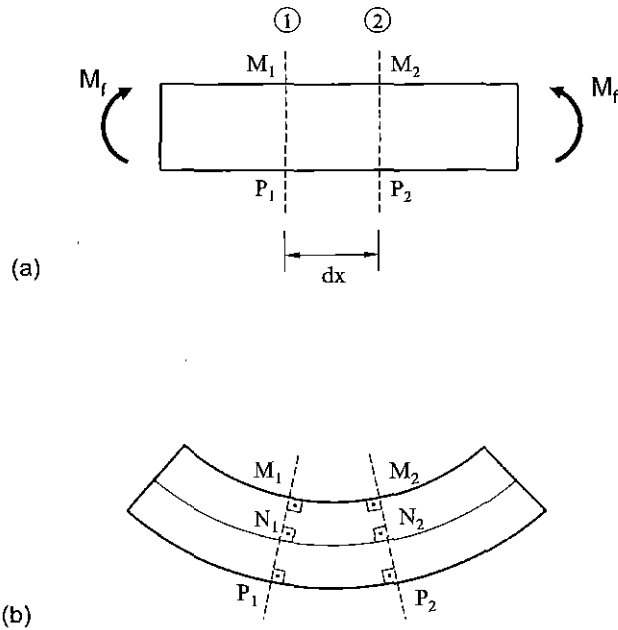


Figura 9.5. Tramo elemental de viga en flexión pura

Aunque aún no se conoce la situación precisa de la fibra neutra, en el sistema de coordenadas que se adoptará de ahora en adelante se hará coincidir el eje  $x$  con la fibra neutra  $N_1N_2$ . El eje  $y$  será el de simetría de la sección, dirigido hacia abajo, y el eje  $z$  el perpendicular a ambos.

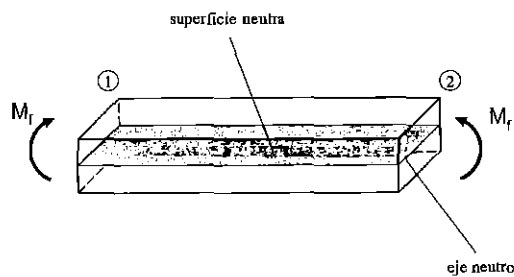


Figura 9.6. Superficie neutra y eje neutro

A continuación se determinará el alargamiento de una fibra cualquiera  $S_1S_2$  situada a una distancia  $y$  de la fibra neutra (fig. 9.7). Sea  $\rho$  el radio de curvatura de la fibra neutra. Este radio será el mismo para cualquier sección, ya que todas están sometidas al mismo momento  $M_f$  (y por tanto, todas las fibras longitudinales se convierten en arcos de circunferencia).

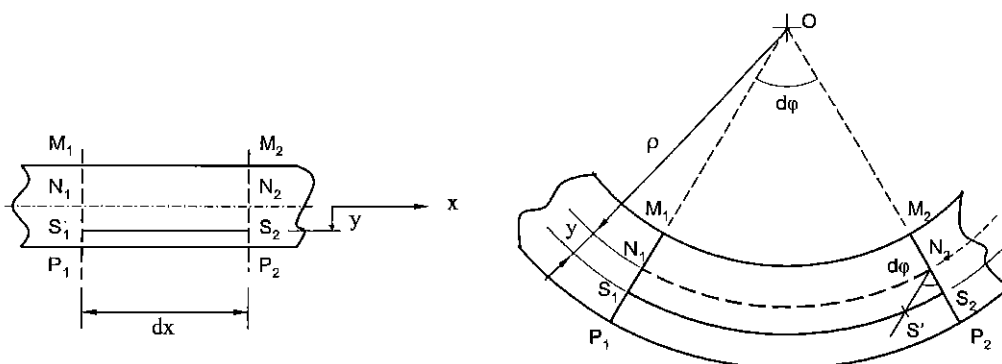


Figura 9.7. Geometría de la flexión pura

Por  $N_2$  se traza una paralela a  $M_1P_1$  hasta cortar en  $S'$  a la fibra  $S_1S_2$  obteniendo el segmento  $N_2S'$ . El ángulo formado por  $N_2S'$  y  $N_2S_2$  es  $d\varphi$ . Entonces:

$$\overline{S_1S'} = \overline{N_1N_2} = dx \quad (9.1)$$

ya que la fibra neutra no experimenta variación de longitud. Además:

$$\begin{aligned} \overline{S'S_2} &= y \cdot d\varphi \\ \overline{N_1N_2} &= \rho \cdot d\varphi = dx \end{aligned} \quad (9.2)$$

Luego:

$$\overline{S'S_2} = \frac{y}{\rho} \cdot dx \quad (9.3)$$

Por consiguiente, el alargamiento unitario de esa fibra será:

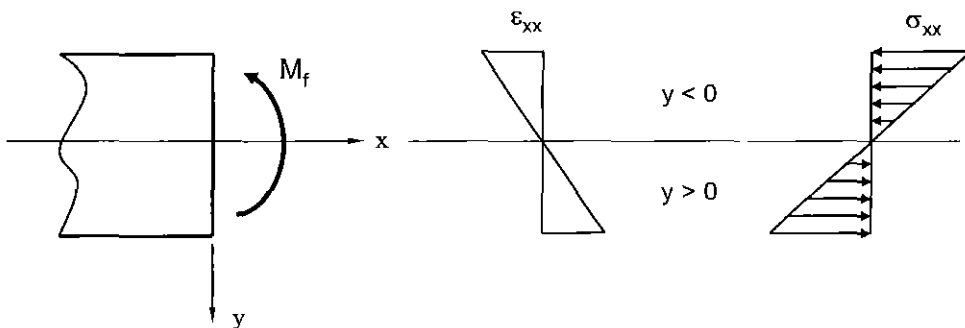
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\overline{S'S_2}}{dx} = \frac{y}{\rho} \equiv k \cdot y \quad (9.4)$$

donde  $k=1/\rho$  es la **curvatura**. Este resultado pone de manifiesto que la deformación unitaria longitudinal de una fibra es directamente proporcional a su distancia a la fibra neutra e inversamente proporcional al radio de curvatura (constante en flexión pura) de la fibra neutra.

Teniendo en cuenta que se cumple la ley de Hooke, si  $E$  es el módulo de Young se obtiene la siguiente expresión para la tensión longitudinal:

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} = \frac{E \cdot y}{\rho} \quad (9.5)$$

Es habitual representar gráficamente tanto la distribución de tensiones como la de deformaciones tal como se indica en la fig. 9.8.



**Figura 9.8. Tensiones y deformaciones en la sección en flexión pura**

En esta representación se puede observar cómo las fibras inferiores ( $y>0$ ) se alargan y en ellas la tensión es de tracción, en tanto que las superiores ( $y<0$ ) se acortan y en ellas la tensión es de compresión.

### **9.2.3. Determinación de la posición de la línea neutra y del radio de curvatura en flexión pura. Ley de Navier**

La distribución de tensiones en la sección recta de la viga debe ser estáticamente equivalente al momento flector, que es el único esfuerzo que actúa en dicha sección. Por consiguiente, al ser nulo el esfuerzo axial:

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0 \Rightarrow \int_A y \cdot dA = 0 \quad (9.6)$$

Por tanto, se concluye que el momento estático del área de la sección recta con relación al eje neutro (eje z) es nulo, lo que únicamente es cierto cuando dicho eje contiene el centro de gravedad de la sección. Esto indica que *el eje neutro N-N pasa por el centro de gravedad de la sección* (véase fig. 9.9). Las secciones planas giran alrededor de este eje neutro bajo la acción del momento flector, al que de ahora en adelante se designará por  $M_z$ .

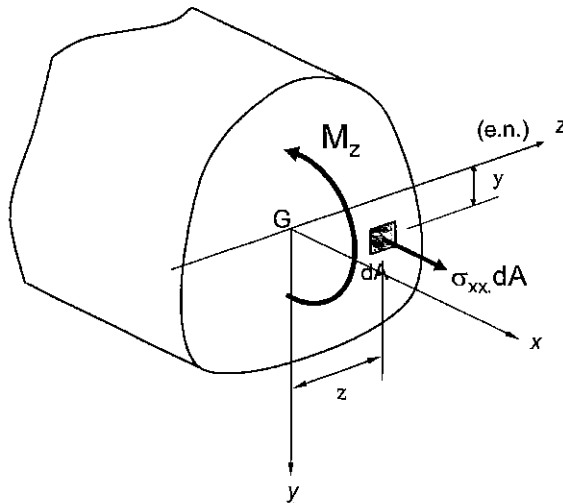


Figura 9.9. Posición del eje neutro en flexión pura

Para determinar el valor del radio de curvatura  $\rho$  basta aplicar la condición de equilibrio de momentos alrededor del eje z. En efecto:

$$M_z = \int_A \sigma_{xx} \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E \cdot I_z}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \quad (9.7)$$

donde  $I_z$  es el *momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro z*. Como puede comprobarse, la curvatura ( $1/\rho$ ) es inversamente proporcional al producto  $E I_z$ . Este producto se denomina **rigidez a la flexión**. Para un mismo momento flector  $M_z$ , a mayor rigidez, menor será la curvatura y, por tanto, menor la deformación.

Combinando (9.5) y (9.7), se obtiene:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (9.8)$$

expresión conocida como **ley de Navier** de la flexión, la cual indica que la tensión  $\sigma_{xx}$  en un punto de la sección es directamente proporcional al momento flector y a la distancia de ese punto al eje neutro, e inversamente proporcional al momento de inercia de la sección.

Es interesante observar que la demostración que se ha presentado de la ley de Navier es de carácter fundamentalmente geométrico, basada en la forma que adquiere la deformada (arcos de circunferencia). A continuación se obtendrá la misma formulación mediante un procedimiento analítico.

#### **Demostración de la ley de Navier mediante un procedimiento analítico**

Por la hipótesis de Navier, para que la sección permanezca plana tras la deformación, el desplazamiento  $u$  (y, en consecuencia, la deformación  $\varepsilon_{xx}$ ) obedecerá a la ecuación de un plano (en las variables  $y, z$ ). Por la relación elástica entre tensiones y deformaciones, la distribución de tensiones normales puede escribirse en la forma general:

$$\sigma_{xx} = a + by + cz \quad (A.1)$$

donde  $a, b, c$  son constantes.

Por la equivalencia estática:

$$\int \sigma_{xx} dydz = 0 \quad (A.2)$$

$$\int \sigma_{xx} y dydz = M_z \quad (A.3)$$

$$\int \sigma_{xx} z dydz = 0 \quad (A.4)$$

Sustituyendo (A.1) en (A.2):

$$a \int dydz + b \int y dydz + c \int z dydz = 0 \Rightarrow a = 0 \quad (A.5)$$

puesto que las dos últimas integrales se anulan al ser momentos estáticos respecto de ejes que contienen el centro de gravedad.

Sustituyendo ahora (A.1) en (A.3):

$$b \int y^2 dydz + c \int yz dydz = M_z \Rightarrow b = \frac{M_z}{I_z} \quad (\text{A.6})$$

ya que la segunda integral, que representa el producto de inercia respecto al plano yz, es nula por tener la sección un eje de simetría (y ó z) o, al menos, ser los ejes y y z principales de inercia.

Finalmente, sustituyendo (A.1) en (A.4):

$$b \int yz dydz + c \int z^2 dydz = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (\text{A.7})$$

ya que la primera integral se anula, y la segunda representa  $I_y$ , cantidad no nula.

Por consiguiente:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (\text{A.8})$$

cómo se quería demostrar.

#### 9.2.4. Flexión pura de una viga de sección recta sin eje de simetría

A continuación se verá qué condiciones deben cumplirse para que sean válidos los resultados anteriores en el caso de una sección recta sin eje de simetría.

Como  $M_z$  es el único esfuerzo de sección, aplicando la ecuación de equilibrio de que el momento resultante respecto al eje y debe ser nulo, se obtiene:

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} \cdot z \cdot dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot z \cdot dA = 0 \Rightarrow I_{yz} = 0 \quad (\text{9.9})$$

donde  $I_{yz}$  es el *producto de inercia de la sección respecto a los ejes y,z*. Por tanto, el equilibrio exige que este producto se anule. Esta condición se cumple de forma automática siempre que uno de los ejes (y ó z) sea de simetría (como sucedía en el caso de la sección recta simétrica de los apartados anteriores). Pero el producto de inercia  $I_{yz}$  es también nulo cuando los ejes y,z son los ejes principales de inercia que pasan por el centro de gravedad de la sección.

Si un eje es de simetría, por definición es eje principal de inercia de la sección, y el otro eje, por ser perpendicular a él, también será también principal de inercia. Los planos que contienen ejes principales se denominan **planos principales de la flexión**.

En consecuencia, los resultados de la teoría de la flexión pura son también válidos cuando el eje  $y$  es principal de inercia de la sección, aunque no sea eje de simetría.

### 9.2.5. Tensión máxima y módulo resistente de la sección

Según la ley de Navier (9.8), las tensiones máximas en flexión pura se producen en los puntos de la sección más distantes del eje neutro:

$$\sigma_{xx\max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{M_z}{W_z} \quad (9.10)$$

donde  $W_z = I_z / y_{\max}$  es el denominado **módulo resistente** de la sección, el cual depende exclusivamente de las propiedades geométricas de la misma. Cuanto mayor sea, más resistente será la sección.

A continuación se calculan los módulos resistentes de las secciones rectangular y circular (fig. 9.10).

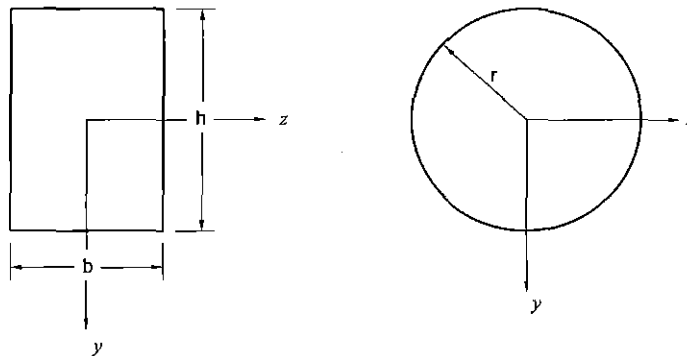


Figura 9.10. Secciones rectangular y circular

a) Sección rectangular:

$$I_z = \frac{1}{12}bh^3 ; \quad y_{\max} = \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad W_z = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{A \cdot h}{6} \quad (9.11)$$

b) Sección circular:

$$I_z = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}; \quad y_{\max} = r \quad \Rightarrow \quad W_z = \frac{\pi \cdot r^3}{4} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{A \cdot d}{8} \quad (9.12)$$

Entre los diferentes valores que se proporcionan en las tablas de perfiles laminados (en T, doble T, etc.), figuran los valores tanto de  $I_z$  como de  $W_z$ .

Suponiendo un valor determinado  $A$  del área y una  $y_{\max}$  dada (por ejemplo,  $h/2$  para sección simétrica), el máximo módulo resistente se obtendrá para aquella sección que maximice el momento de inercia  $I_z$ . Esta circunstancia se producirá cuando ese área  $A$  se encuentre a la máxima distancia posible del centro de gravedad de la sección. El caso límite sería situar  $A/2$  a una distancia  $h/2$  del centro de gravedad. En este caso:

$$I_z = 2 \frac{A}{2} \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{A \cdot h^2}{4}; \quad W_z = \frac{A \cdot h}{2} \quad (9.13)$$

Esta última expresión indica el límite del módulo resistente para un área  $A$  y un canto  $h$  dado. Según las expresiones (9.11) y (9.12), la sección rectangular soporta tres veces menos que esta sección ideal, y la circular cuatro veces menos. De las secciones más utilizadas, la de mayor rendimiento geométrico es la doble T.

Tras las consideraciones que se acaban de hacer, es decir, desde el punto de vista de la flexión pura, cabría pensar que interesa que estas secciones en doble T tengan un alma muy delgada. Esto no es estrictamente así ya que hay que tener en cuenta que la sección además deberá soportar esfuerzos cortantes (en flexión simple) y normales (en flexión compuesta), y evitar el fenómeno de inestabilidad (pandeo).

### 9.2.6. Deformaciones transversales: anticlástica

Como es sabido, a una deformación axial producida por una tensión de tracción acompañan unas contracciones laterales dadas por:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_y y = -\nu \cdot \varepsilon_{xx} \quad (9.14)$$



Por tanto, en una viga sometida a flexión, además de la deformación longitudinal se producen deformaciones en el plano de la sección transversal, cuyo valor es:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy} = -v \cdot \frac{y}{\rho} \quad (9.15)$$

Los desplazamientos asociados a estas deformaciones suelen despreciarse en el estudio de la flexión porque las deformaciones en el plano de la sección transversal son mucho menores que las deformaciones longitudinales.

A continuación se indica cómo se deformaría una sección rectangular considerando estas deformaciones transversales. Sea una línea genérica  $PP'$  contenida en la sección e inicialmente paralela al eje  $z$  (fig. 9.11a). Según (9.15), al encontrarse en la parte inferior ( $y > 0$ ) experimentará un acortamiento.

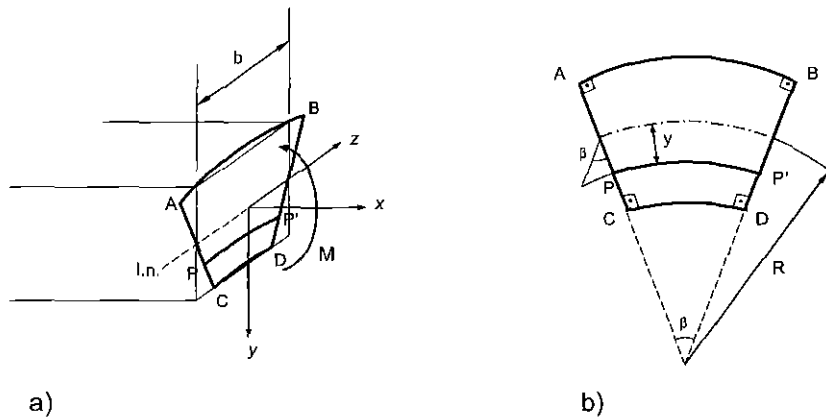


Figura 9.11. Deformaciones transversales en flexión

Como no hay distorsión ( $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ), los ángulos rectos se conservan. La arista  $AB$  será entonces perpendicular a  $AC$ . Esto implica que las fibras transversales se deforman según un arco de circunferencia. Esta curvatura transversal de la viga se denomina *anticlástica*<sup>1</sup>, y se puede apreciar doblando una goma larga (los lados verticales de la sección recta se inclinan).

<sup>1</sup> Llamada así por corresponder a una superficie con curvaturas de signos opuestos, como en el caso de una silla de montar (cuando son del mismo signo se denomina *sinclástica*).

Sea  $R$  el radio de curvatura del eje neutro en la sección deformada, y sea  $\beta$  la variación angular entre  $AC$  y  $BD$  (fig. 9.11b). Entonces:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= -\frac{y \cdot \beta}{b} \\ b &= R \cdot \beta\end{aligned}\tag{9.16}$$

de donde se concluye:

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \cdot \frac{y}{\rho} = -\frac{y}{R} \Rightarrow R = \frac{\rho}{\nu}\tag{9.17}$$

expresión que indica que la curvatura en la sección transversal ( $1/R$ ) es menor que en la dirección longitudinal de la viga ( $1/\rho$ ).

### **9.3. VIGAS CARGADAS TRANSVERSALMENTE: FLEXIÓN SIMPLE. FÓRMULA DE COLIGNON**

Una viga se encuentra cargada transversalmente cuando todas las fuerzas aplicadas actúan en sentido perpendicular a su eje longitudinal. En este tipo de vigas no existen, por tanto, esfuerzos normales.

La distribución de tensiones existente en la sección habrá de equilibrar al momento flector y al esfuerzo cortante originados en ella. Como ya se ha visto, el momento flector da lugar a tensiones normales. Por su parte, el esfuerzo cortante, al estar contenido en el plano de la sección, produce tensiones que actúan en dicho plano, es decir, tensiones tangenciales o cortantes.

El cálculo de las tensiones y deformaciones totales se hace habitualmente aplicando superposición, sumando las tensiones y deformaciones debidas a cada esfuerzo por separado.

#### **9.3.1. Tensiones normales originadas por el momento flector**

*En flexión simple las secciones no permanecen planas después de la deformación sino que experimentan un cierto alabeo producido por el esfuerzo cortante, como*

posteriormente se justificará. Sin embargo, dado que los resultados obtenidos en base al mantenimiento de la hipótesis de Navier son suficientemente aproximados, *en flexión simple se admite la hipótesis de Navier de las secciones planas.*

Suponiendo que se cumplen las restantes hipótesis de flexión pura, *la distribución de tensiones normales debidas al momento flector  $M_z$  en flexión simple también estará regida por la ley de Navier anteriormente obtenida:*

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (9.18)$$

si bien la dirección del eje de la viga ahora no es dirección principal.

### 9.3.2. Tensión cortante en flexión

Para completar el estudio del estado tensional en flexión simple es necesario conocer cómo es la distribución de tensiones asociada al esfuerzo cortante. Es decir, para un determinado esfuerzo cortante  $V_y$ , contenido en el plano de la sección, se trata de determinar la correspondiente distribución de tensiones cortantes sobre la superficie de la sección transversal de la viga.

Para ello nos basaremos en el teorema de reciprocidad de las tensiones tangenciales. Concretamente, la existencia de una tensión tangencial  $\tau_{xy}$  en un punto de la sección recta exige la presencia de otra tensión también tangencial  $\tau_{yx}$  del mismo valor, sobre la superficie de la fibra longitudinal que pasa por ese punto.

Consideremos una viga de sección arbitraria, de la que en la fig. 9.12a se representa un elemento situado entre dos secciones infinitamente próximas, separadas por una distancia  $dx$ . Como es habitual,  $x$  representa el eje de la viga e  $y$  y  $z$  son los ejes principales de la sección. Finalmente, sea  $QR$  una línea contenida en el plano de la sección y paralela a su eje neutro  $z$  a una distancia  $y_1$  del mismo. Denominaremos  $b$  a la anchura de esta línea. *El objetivo es determinar cuál es el valor de la tensión tangencial en los puntos de dicha línea debida a la acción de un esfuerzo cortante  $V_y$  contenido en el plano de la sección.*

Por existir cortante habrá variación de momento flector [cfr. (7.4)]. Luego los momentos flectores en las secciones extremas de ese elemento de viga de longitud  $dx$  serán diferentes, y también lo serán, por lo tanto, las correspondientes distribuciones de tensiones normales  $\sigma_{xx}$  (fig. 9.12b).

Para llevar a cabo nuestro estudio consideremos el equilibrio en la dirección del eje  $x$  de la viga de un nuevo elemento, obtenido a partir del anterior al cortarlo por un plano paralelo al  $xz$  que pase por esa línea  $QR$  (fig. 9.12c). Se denominará  $A_1$  el área de las secciones extremas de este nuevo elemento (área sombreada).

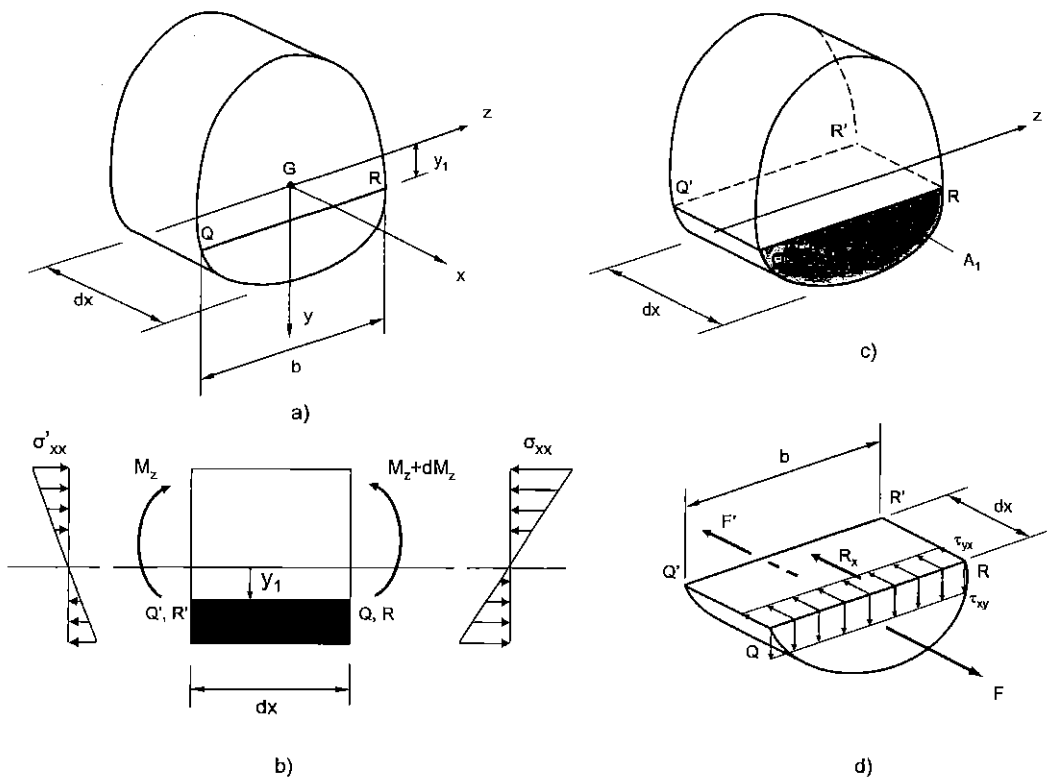


Figura 9.12. Elemento infinitesimal de viga. Equilibrio

Sean  $F'$  y  $F$  las resultantes de las distribuciones de tensiones normales en dichas caras extremas. Puesto que estas fuerzas no son iguales por proceder de distribuciones de tensiones normales diferentes, el equilibrio longitudinal exige la aparición de una fuerza  $R_x$  actuando en la cara  $QRR'Q'$ , tal que:

$$F' + R_x = F \quad (9.19)$$

Ahora bien,  $F$  y  $F'$  pueden expresarse en función de los correspondientes momentos flectores:

$$F' = \int_{A_1} \sigma_{xx}' dA = \frac{M_z}{I_z} \cdot \int_{A_1} y dA = \frac{M_z \cdot Q_z}{I_z} \quad (9.20)$$

donde  $Q_z$  no es sino el momento estático de  $A_1$  con relación al eje neutro.

De forma similar:

$$F = \int_{A_1} \sigma_{xx} dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} \cdot \int_{A_1} y dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} \cdot Q_z \quad (9.21)$$

Del equilibrio (9.19):

$$R_x = F - F' = \frac{dM_z}{I_z} \cdot Q_z \quad (9.22)$$

Puede suponerse que la fuerza  $R_x$  se distribuye uniformemente en el área elemental  $QRR'Q'$  en que actúa, dando lugar a una tensión tangencial:

$$\tau_{yx} = \frac{R_x}{b \cdot dx} \quad (9.23)$$

Eliminando  $R_x$  entre (9.22) y (9.23) y teniendo en cuenta la expresión (7.4) y la ley de reciprocidad de las tensiones tangenciales por la que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  (fig. 9.12d), se obtiene finalmente para la distribución de tensiones tangenciales en el plano de la sección:

$$\tau_{xy} = \frac{dM_z / dx}{b \cdot I_z} \cdot Q_z = \frac{V_y \cdot Q_z}{b \cdot I_z} \quad (9.24)$$

expresión conocida como **fórmula de Colignon o de Jourawski**, que nos permite calcular la distribución de tensiones tangenciales en las secciones rectas.

A la fuerza  $R_x$  que actúa en un plano longitudinal, paralelo por tanto a la superficie neutra, se la denomina *fuerza de desgarramiento* y a la tensión correspondiente  $\tau_{yx}$  se le llama *tensión de desgarramiento o tensión rasante*.

Una primera consecuencia que se deduce de la fórmula de Colignon es que las tensiones cortantes son nulas en los puntos superior e inferior de la sección, ya que para ambos se verifica  $Q_z=0$ : en el punto inferior por ser nula  $A_1$ , y en el superior por ser  $Q_z$  el momento estático de toda la sección, que es nulo al ser el eje  $z$  principal de inercia.

#### **9.4. DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES CORTANTES EN DIVERSAS SECCIONES LLENAS**

En este apartado se aplicará la expresión (9.24) al cálculo de la distribución de tensiones tangenciales en algunas de las secciones más típicas.

##### **9.4.1. Sección rectangular**

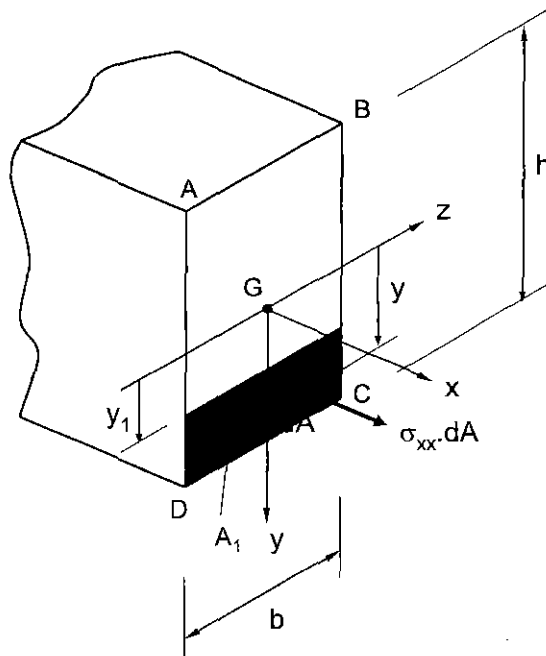
Además de suponer que la distribución de tensiones cortantes es uniforme en el ancho  $b$  de la sección (hipótesis en la que se basa la obtención de la fórmula de Colignon), para la sección rectangular se supone también que en cualquier punto de la sección la tensión cortante es paralela al esfuerzo cortante.

Sea la sección rectangular de área  $A=b \cdot h$  de la fig. 9.13. Se pretende calcular el valor de la tensión tangencial debida a un esfuerzo cortante  $V_y$  en los puntos de una línea paralela al eje neutro de la sección, situada a una distancia  $y_1$  del mismo. El momento estático del área sombreada  $A_1$  será:

$$Q_z = \int_{A_1} y dA = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y \cdot (b \cdot dy) = \frac{b \cdot h^2}{8} \left[ 1 - \left( \frac{2y_1}{h} \right)^2 \right] \quad (9.25)$$

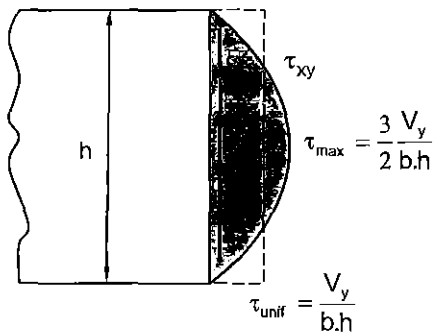
Como  $I_z = bh^3/12$ , resulta la siguiente distribución de tensiones tangenciales:

$$\tau_{xy} = \frac{3V_y}{2A} \left[ 1 - \left( \frac{2y_1}{h} \right)^2 \right] \quad (9.26)$$



**Figura 9.13. Sección rectangular**

que no es sino la ecuación de una parábola simétrica respecto al eje neutro, con mínimos en  $y_1 = \pm h/2$ , donde  $\tau_{xy} = 0$ , y valor máximo en  $y_1 = 0$ , donde  $\tau_{xy} = 3V_y/2A$ . Por tanto, la tensión tangencial máxima es un 50% superior a la que se hubiera obtenido en el supuesto de que el esfuerzo cortante se repartiera uniformemente en el plano de la sección (fig. 9.14).



**Figura 9.14. Distribución de tensiones tangenciales en una sección rectangular**

Se comprueba que en los extremos de la sección la tensión tangencial es nula, como era de esperar, ya que en las superficies libres (superior o inferior) no pueden aparecer tensiones.

La tensión tangencial  $\tau_{xy}$  da lugar a una deformación angular  $\gamma_{xy}$ . Como  $\tau_{xy}$  varía a lo largo del canto de la sección, también varía  $\gamma_{xy}$ , siendo su valor nulo en los extremos superior e inferior, y máximo en la línea neutra. Por esta razón, las secciones inicialmente planas dejan de serlo, experimentando un pequeño alabeo (fig. 9.15). Este alabeamiento tiene lógicamente un efecto sobre la distribución de tensiones normales debidas a la flexión. Pero si  $V_y = \text{cte}$  en la viga, el alabeamiento será el mismo para todas las secciones, y cualquier fibra longitudinal  $IJ$  (cfr. fig. 9.15) no cambia de longitud al pasar a  $I_1J_1$ . Por eso, puede utilizarse la expresión de Navier (9.8), obtenida para el caso de flexión pura. Se comprueba además que esta expresión es suficientemente aproximada cuando el esfuerzo cortante  $V_y$  varía de modo continuo a lo largo de la viga, y el error será tanto más pequeño cuanto más esbelta sea ésta. A lo largo de la asignatura se despreciará siempre este efecto y se admitirá la hipótesis de Navier de las secciones planas para el caso de flexión simple.

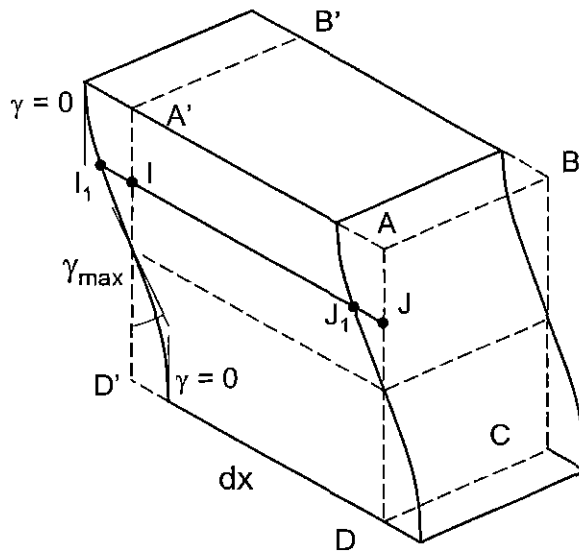


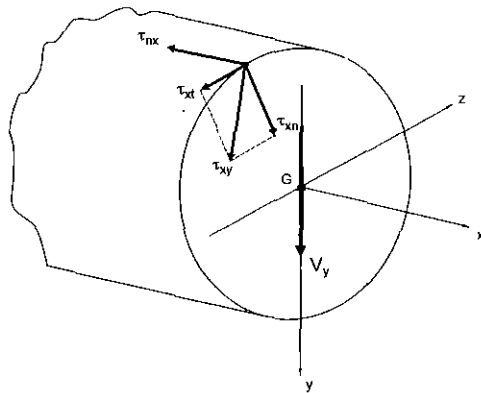
Figura 9.15. Deformación debida al cortante en una sección rectangular

#### 9.4.2. Sección circular

La sección circular constituye un caso especial en el que no puede aceptarse la hipótesis de que las tensiones cortantes sean paralelas al esfuerzo cortante  $V_y$ .



Para demostrarlo considérese un punto A situado en el contorno de la sección, y supóngase que en él la tensión tangencial debida al esfuerzo cortante es  $\tau_{xy}$ , por consiguiente, paralela al eje y (fig. 9.16). En este supuesto, esa tensión se podrá descomponer según las direcciones tangente ( $\tau_{xt}$ ) y la normal ( $\tau_{xn}$ ) a la circunferencia en ese punto A. Por la reciprocidad de las tensiones tangenciales, a  $\tau_{xn}$  debe corresponder una tensión tangencial igual y perpendicular a ella  $\tau_{nx}$  actuando sobre la superficie libre. Pero como sobre esta superficie no hay aplicadas fuerzas exteriores que justifiquen la existencia de esta tensión tangencial, necesariamente ha de ser  $\tau_{nx} = \tau_{xn} = 0$ . Por consiguiente, *la tensión cortante en los puntos de la periferia de la sección circular es tangente a la circunferencia.*



**Figura 9.16. Tensiones tangenciales en puntos del contorno de una sección circular**

La sección circular presenta otra característica. En los puntos de corte de la circunferencia del contorno con el eje y la tensión cortante es nula. Esta propiedad se deduce del hecho de que, por la simetría, en esos puntos la tensión debería ser paralela al eje y, lo que es incompatible con el hecho que se acaba de demostrar de ser tangente al contorno.

Para calcular la distribución de tensiones cortantes en un punto genérico de la sección circular, se establecen las siguientes hipótesis:

- a) La dirección de la tensión tangencial en un punto cualquiera A perteneciente a una línea PQ contenida en la sección y paralela a la línea neutra (fig. 9.17) viene definida por la recta que une el punto A con el punto O (punto del eje y intersección con él de las tangentes a la circunferencia del contorno por P y Q).

b) Las componentes  $\tau_{xy}$  paralelas al eje  $y$  y de las tensiones tangenciales de los puntos de la línea  $PQ$  son iguales y se pueden calcular por la fórmula de Colignon.

La segunda hipótesis permite obtener  $\tau_{xy}$  directamente de la expresión de Colignon (9.24). La tensión tangencial total se determina a partir de la dirección indicada por la primera hipótesis:

$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{\cos \varphi} \quad (9.27)$$

siendo  $\varphi$  el ángulo formado por el eje  $y$  y la recta  $AO$  (fig. 9.17a).

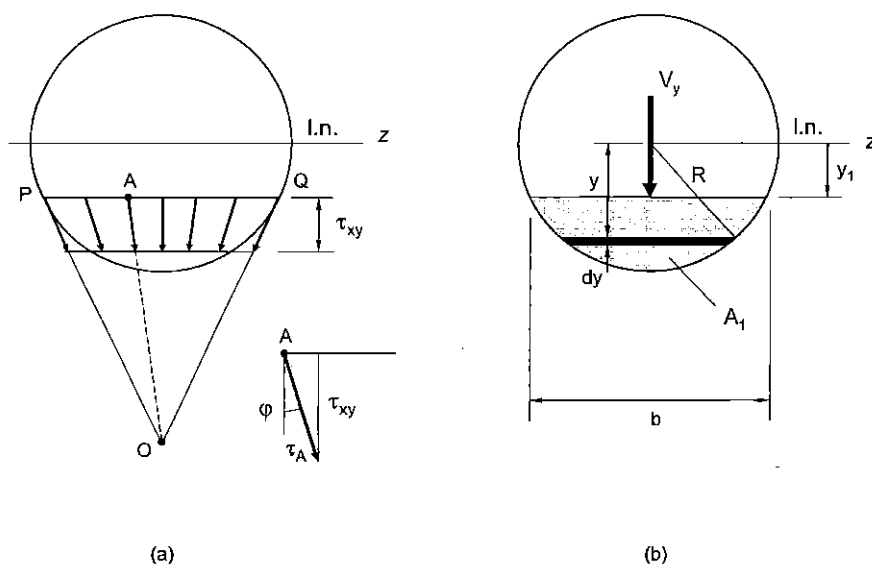


Figura 9.17. Distribución de tensiones cortantes en secciones circulares

Siguiendo los pasos mencionados, para calcular la tensión en un punto genérico a una distancia  $y_1$  del eje neutro, se comenzará calculando  $\tau_{xy}$ , lo que requiere el cálculo previo del momento estático del área sombreada  $A_1$  (fig. 9.17b):

$$Q_z = \int_{A_1} y dA = \int_{y_1}^R y \cdot (b \cdot dy) = \int_{y_1}^R 2y \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{2}{3} (R^2 - y_1^2)^{3/2} \quad (9.28)$$

Sustituyendo a continuación en (9.24):

$$\tau_{xy} = \frac{V_y (R^2 - y_1^2)}{3I_z} \quad (9.29)$$

ya que  $b = 2\sqrt{R^2 - y_1^2}$ .

Por tanto, la tensión total será:

$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{\cos \varphi} = \frac{V_y (R^2 - y_1^2)}{3I_z \cos \varphi} \quad (9.30)$$

De todos los puntos de la línea  $PQ$ , la tensión máxima se produce en los puntos del contorno de la sección, ya que en ellos  $\cos \varphi$  es mínimo. En  $P$  (ó  $Q$ ), resulta:

$$\tau_P = \frac{V_y R \sqrt{R^2 - y_1^2}}{3I_z} \quad (9.31)$$

donde se ha aplicado que  $\cos \varphi_P = \sqrt{R^2 - y_1^2} / R$ .

El valor mínimo se obtiene en el punto de corte con el eje  $y$ :  $T_{min} = T_{xy}$ .

La tensión máxima absoluta en la sección se encuentra para  $y_1 = 0$ , que corresponde al eje neutro. Su valor, en todos los puntos de dicho eje, será:

$$\tau_{max} = \frac{V_y R^2}{3I_z} = \frac{4V_y}{3\pi R^2} \approx 1,33 \frac{V_y}{A} \quad (9.32)$$

donde  $A$  es el área de la sección. Esta expresión indica que *la tensión tangencial máxima es un 33% mayor de la que se obtiene suponiendo una distribución uniforme.*

### 9.4.3. Sección en doble T

En el caso de una sección en doble T, se mantendrán las mismas hipótesis que las establecidas para las vigas de sección rectangular:

- a) En cualquier punto de la sección la tensión tangencial es paralela al esfuerzo cortante.
- b) Su valor es constante para todos los puntos de cualquier línea paralela a la línea neutra.

Como se ha hecho anteriormente, para calcular la distribución de tensiones tangenciales debida a un esfuerzo cortante  $V_y$  habrá que comenzar calculando el momento estático  $Q_z$  para aplicar posteriormente la expresión (9.24).

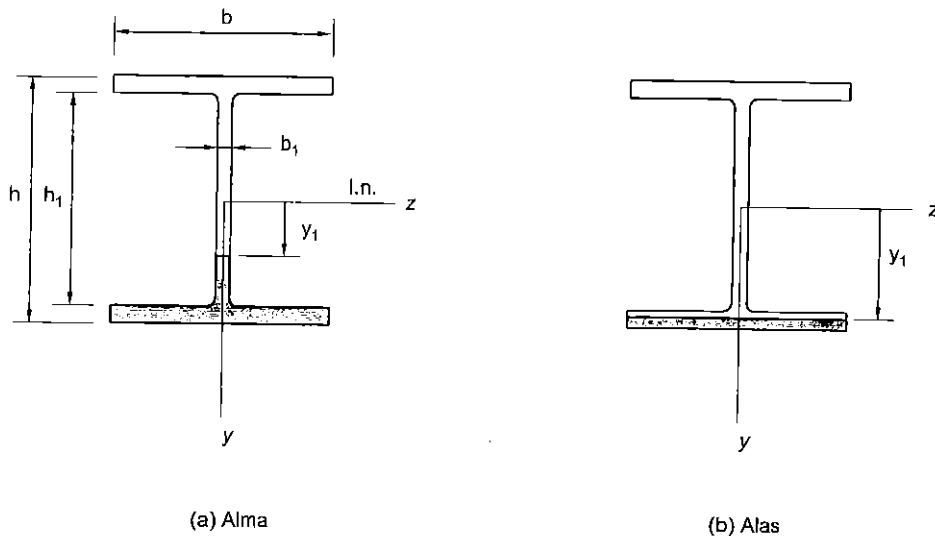


Figura 9.18. Perfil en doble T

Considérense en el *alma* de la sección los puntos situados a una distancia  $y_1$  del eje neutro. El valor del momento estático correspondiente será (Fig. 9.18a):

$$Q_z = \int_{y_1}^{h/2} b_1 y dy + \int_{h/2}^h b y dy = \frac{b_1}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) + \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) \quad (9.33)$$

Por tanto la tensión tangencial:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{b_1 I_z} \quad (9.34)$$

es una variación parabólica, poco acentuada, con mínimos en  $y_1 = \pm h_1/2$  y máximo en  $y_1 = 0$  (Fig. 9.19).

En las *alas* de la sección (fig. 9.18b), el momento estático del área de la misma comprendida entre la superficie libre y una línea paralela a la neutra a una distancia  $y_1$  será:

$$Q_z = \int_{y_1}^{h/2} by dy = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (9.35)$$

Por tanto:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y}{2I_z} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (9.36)$$

que es también una distribución parabólica, que parte de un valor nulo en  $y_1 = \pm h/2$  y adquiere su valor máximo en  $y_1 = \pm h/2$ .

La representación total de la distribución de tensiones cortantes se muestra en la fig. 9.19. Se observa que se produce un salto brusco de tensión al pasar del ala al alma (el salto es precisamente de razón  $b/b_1$ ). Las áreas encerradas por la distribución en las alas son considerablemente inferiores a la del alma. Se concluye entonces que el esfuerzo cortante se soporta principalmente en el alma de la viga.

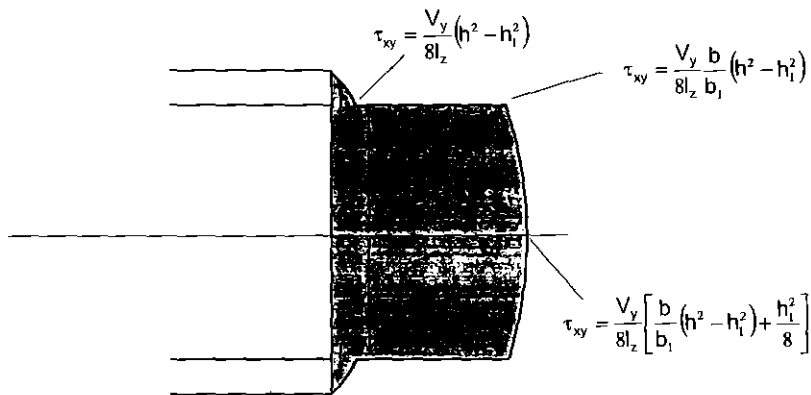


Figura 9.19. Perfil de tensiones cortantes en secciones en doble T

En el caso, bastante general, de que  $b_1 \ll b$ , las tensiones en las alas se pueden despreciar frente a las del alma, y en ésta se puede considerar una distribución uniforme. En consecuencia, una estimación de la distribución de tensiones cortantes proporcionaría para el alma:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y}{b_1 h_1} \quad (9.37)$$

expresión que se aproxima más a la realidad cuanto menor sea el espesor del alma.

En las alas la distribución de tensiones cortantes presenta una incongruencia: en los puntos de las líneas  $AE$  y  $A'E'$  (fig. 9.20) no puede existir tensión tangencial  $\tau_{xy}$ , por pertenecer a la superficie libre de la viga. Si el espesor del ala es pequeño, la distribución de  $\tau_{xy}$  no es significativa, pues variaría en un espacio pequeño entre dos valores nulos. Es una justificación más al hecho de despreciar  $\tau_{xy}$  en las alas.

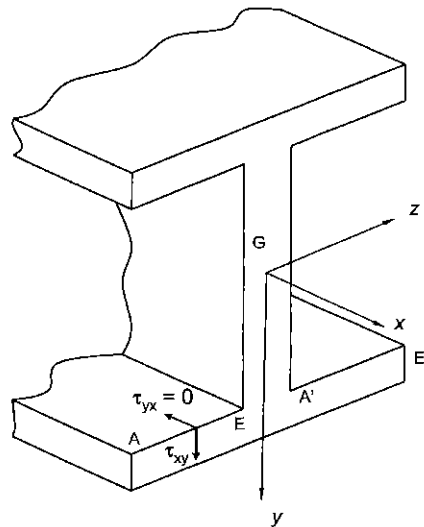


Figura 9.20. Superficie libre inferior de las alas en un perfil en doble T

Finalmente, en los puntos del ala existe también una componente  $\tau_{xz}$ . Para su obtención considérese el equilibrio en la dirección  $x$  del paralelepípedo rayado mostrado en la fig. 9.21, formado al seccionar el ala según un plano  $z = z_1$ .

El análisis conduciría a la fórmula de Colignon, demostrada en §9.3.2 para cortes paralelos a la línea neutra. En este caso:

$$Q_z = \frac{h-h_1}{2} s \frac{h+h_1}{4} = \frac{s}{8} (h^2 - h_1^2) \quad (9.38)$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_y Q_z}{e_1 I_z} = \frac{V_y s (h+h_1)}{4 I_z}$$

donde  $e_1$  es el espesor del ala:  $e_1 = (h-h_1)/2$ .

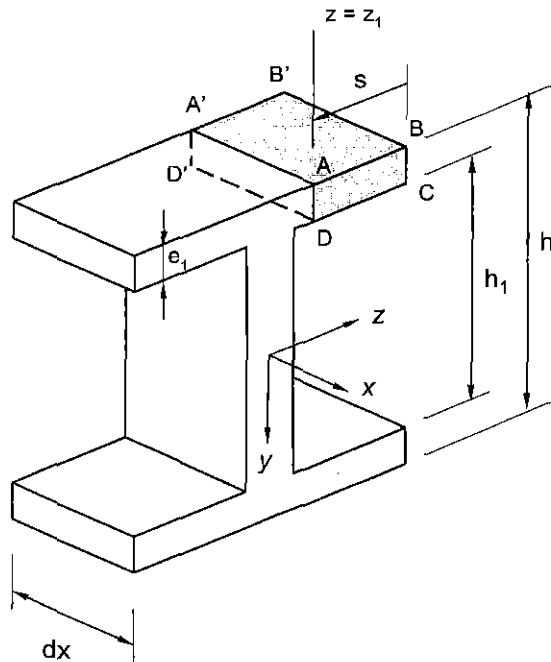


Figura 9.21. Distribución de tensiones cortantes en el ala de un perfil en doble T

## 9.5. TENSIONES PRINCIPALES EN FLEXIÓN SIMPLE. LÍNEAS ISOSTÁTICAS

### 9.5.1. Tensiones principales

En flexión simple se genera un estado de tensiones biaxial y, como se ha visto, las tensiones normal y cortante en el plano de la sección se pueden calcular por medio de las expresiones:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z y}{I_z} \quad \tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{b_x I_z} \quad (9.39)$$

La tensión normal es máxima en los bordes superior e inferior de la sección y nula en el eje neutro. En cambio, la tensión cortante es nula en esos bordes exteriores y generalmente alcanza un máximo en el eje neutro o en puntos muy próximos al mismo, dependiendo de la forma de la sección.

En el diseño de vigas, es frecuente considerar independientemente estas dos tensiones máximas, comprobando que no superan las tensiones admisibles. Es decir, comprobando que se cumple:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx\max} &\leq \sigma_{adm} \\ \tau_{xy\max} &\leq \tau_{adm} \end{aligned} \quad (9.40)$$

Sin embargo, un análisis tensional más completo requiere considerar los efectos combinados de las tensiones normales y cortantes, calculando los valores de las tensiones principales, lo que permitirá conocer el estado real de tensiones en el punto y, en su caso, la aplicación de alguna de las teorías de fallo.

Considérese una viga de sección rectangular sometida a flexión simple y en una sección cualquiera los puntos A, B y C (fig. 9.22), siendo B un punto intermedio cualquiera entre A y C.

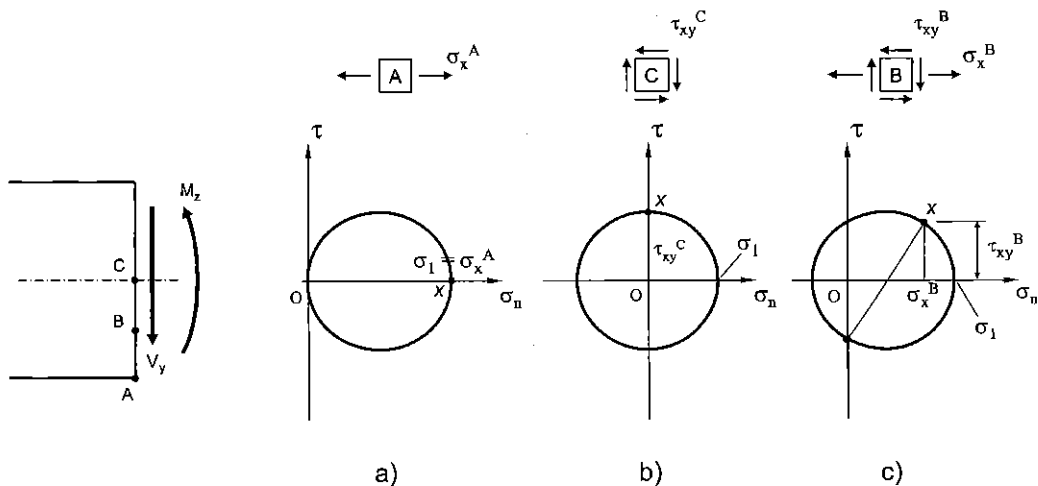


Figura 9.22. Análisis tensional de una sección rectangular en flexión simple



En el punto  $A$ ,  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx} \text{ máx}$ ,  $\tau_{xy} = 0$ , y su representación de Mohr es la indicada en la fig. 9.22a. En el punto  $C$ ,  $\sigma_{xx} = 0$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xy} \text{ máx}$ , y el círculo de Mohr de mayor diámetro correspondiente a este estado de tensiones se muestra en la fig. 9.22b. Finalmente, en el punto  $B$  y según el plano normal al eje  $x$ , existe una combinación de normal y cortante; en la fig. 9.22c se representa también el círculo de mayor diámetro. Las direcciones principales y la tensión tangencial máxima pueden calcularse en la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{xx}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} > 0; & \sigma_2 &= \frac{\sigma_{xx}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} < 0 \\ \tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (9.41)$$

Obsérvese que la tensión principal máxima  $\sigma_1$  en un punto intermedio tal como el  $B$  podría ser mayor que la tensión normal máxima en un punto extremo como es el  $A$ . Si se plantea obtener el valor máximo de  $\sigma_1$  en términos de la coordenada  $y$ , se obtiene una posición muy próxima a  $y = \pm h/2$  (es decir, cercana al máximo de tensiones debido a flexión). Por esta razón, para el caso de secciones macizas en la práctica se supone  $y = \pm h/2$  como posición más desfavorable.

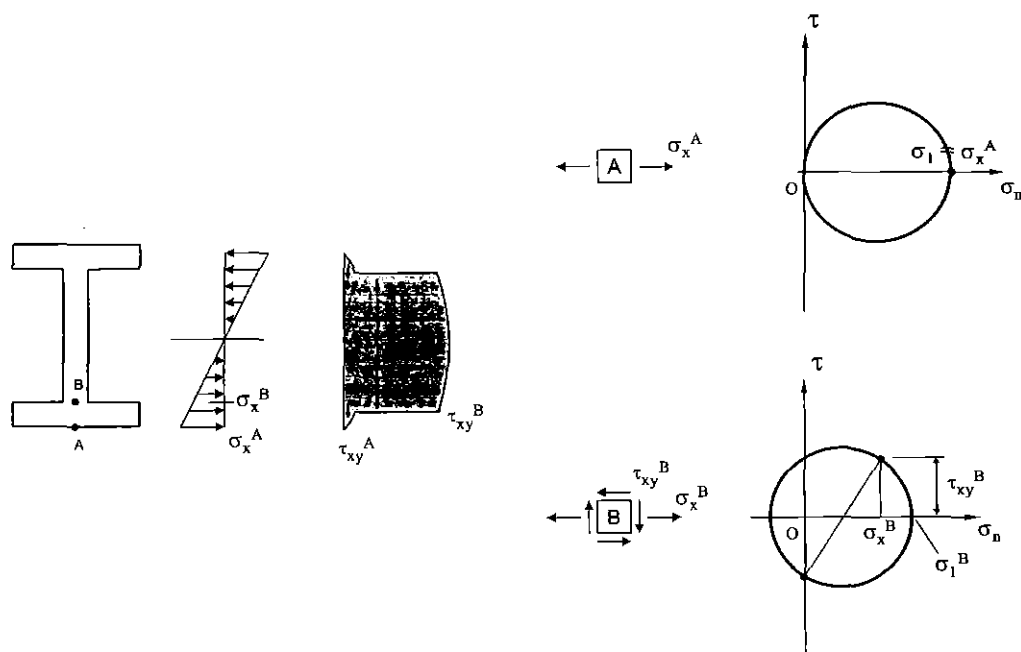


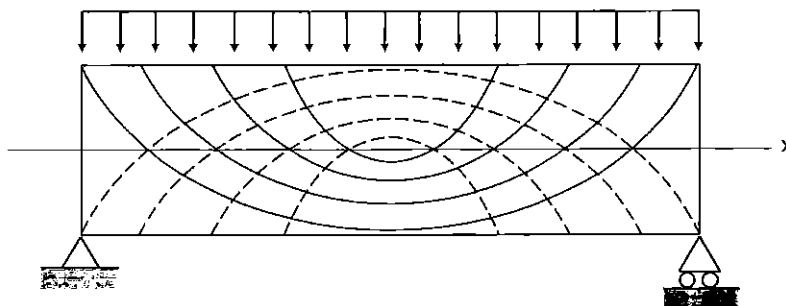
Figura 9.23. Análisis tensional en una sección en doble T en flexión simple

El caso de la *doble T* es diferente. Para la zona del ala, en la que se desprecia  $\tau_{xy}$ , se considera que el estado tensional en el punto A (fig. 9.23), punto en el que son máximas las tensiones normales, es el más desfavorable. Y dado que en el alma la distribución de tensiones tangenciales debidas al cortante es bastante uniforme, se considera el punto B como el más desfavorable, ya que en él las tensiones normales debidas al flector son máximas.

Aunque siempre será  $\sigma_{xx}^B < \sigma_{xx}^A$ , si  $\tau_{xy}^B$  es grande (por corresponder a un valor elevado del cortante  $V_y$ ), puede suceder que  $\sigma_1^B > \sigma_1^A$ . Por eso, en ocasiones, no es riguroso tomar como criterio de cálculo  $\sigma_{xx \text{ máx}}$ . Lo más correcto es elegir de entre ambos puntos, A y B, el que se considere más desfavorable tras aplicar la teoría de fallo que se haya elegido.

### 9.5.2. Líneas isostáticas

Se denominan *líneas isostáticas de una viga* a las envolventes de las direcciones principales de los puntos de la viga. En el plano  $xy$ , las líneas isostáticas constituyen dos familias de curvas (una para cada dirección principal), ortogonales entre sí, cuyas tangentes en cada punto coinciden con las direcciones principales.



**Figura 9.24. Líneas isostáticas en una viga biapoyada sometida a carga uniforme**

Suponiendo secciones en las que la tensión tangencial máxima se presenta en el eje neutro, las líneas isostáticas poseen las siguientes propiedades:

- 1) cortan a la superficie neutra a  $45^\circ$  (pues  $\sigma_{xx}=0$  y  $\tau_{xy}=\tau_{máx}$ , y las direcciones principales forman  $45^\circ$  con las de  $\tau_{máx}$ , es decir con los ejes  $x$  e  $y$ ),

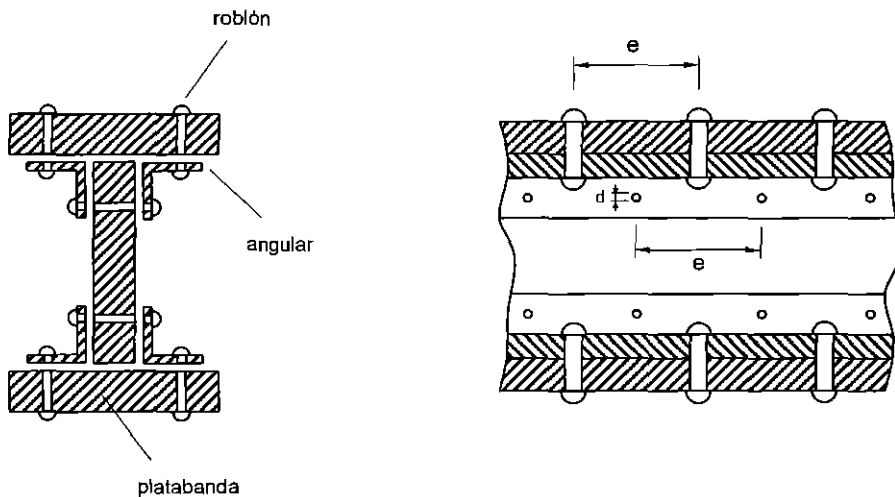
2) su tangente en los puntos de la superficie libre es horizontal o vertical (pues  $r_{xy}=0$  y las direcciones principales son los ejes  $x$  e  $y$ ).

Su trazado presenta interés en el diseño de vigas de hormigón armado. En el ejemplo de la fig. 9.24, se muestran las líneas isostáticas para una viga empotrada sometida a una carga concentrada en el extremo.

### **9.6. TENSIONES EN VIGAS COMPUESTAS. VIGAS ARMADAS. BALLESTAS**

Por circunstancias diversas (estructurales, económicas, etc.) muchas veces se hace necesario, o al menos aconsejable, la utilización de vigas compuestas o vigas armadas, formadas por ensamblaje de diversos perfiles. Por ejemplo, en las vigas en doble T de grandes dimensiones es corriente emplear para el alma y para las alas grandes placas unidas entre sí por medio de soldaduras o elementos de ensamblaje.

En este epígrafe se estudiarán únicamente las vigas unidas por medio de angulares y roblones o remaches (fig. 9.25).



**Figura 9.25. Viga armada. Sección en doble T**

El cálculo de este tipo de vigas parte del supuesto de que las piezas están tan firmemente conectadas que la viga se comporta como maciza o de una sola pieza (no hay, pues, deslizamientos relativos entre sus partes constitutivas). Se procede del siguiente modo:

a) *Cálculo de la sección como si fuera maciza.* La sección que se considera es la que resulta de restar a la total la correspondiente a los roblones.

Para el cálculo de las tensiones tangenciales, el criterio general es disminuir la anchura del alma en la proporción  $(e-d)/e$ , siendo  $e$  la distancia entre roblones y  $d$  su diámetro.

b) *Diseño de los elementos de ensamble* (pernos, soldadura, etc.) de modo que aseguren que la viga se comporta como de una sola pieza.

### 9.6.1. Cálculo de los roblones

El cálculo de los roblones incluye determinar su diámetro  $d$  y la distancia  $e$  de separación entre ellos. Se distinguirá entre los roblones que unen las platabandas con los angulares y los de unión entre angulares y alma.

a) Roblones que unen las platabandas con los angulares

Estos elementos han de soportar la fuerza longitudinal de desgarramiento correspondiente a la platabanda. Sea un roblón situado entre dos secciones separadas una distancia  $e$  (fig. 9.26).

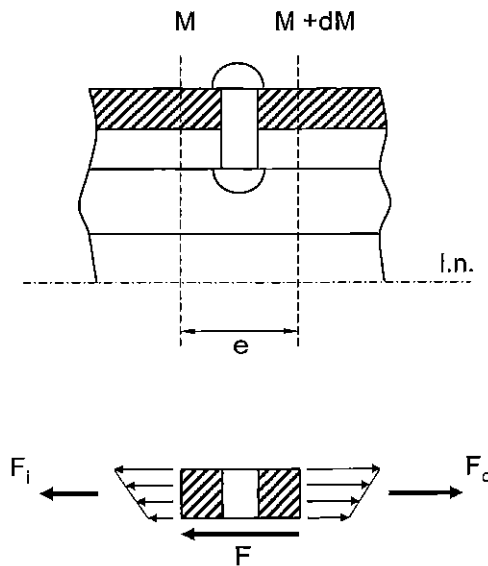


Figura 9.26. Cálculo de roblones de unión platabanda-angulares

Como la distribución de tensiones normales es diferente en las dos secciones, aparece una fuerza que tiende a hacer deslizar la platabanda sobre el alma y los angulares. Este deslizamiento se evita por el rozamiento, que se desprecia en el cálculo, y por la presencia del roblón.

Aislado el tramo de platabanda entre las dos secciones, resulta la siguiente fuerza de desgarramiento:

$$F = F_d - F_i = \frac{\Delta M_z}{I_z} Q_z^p \quad (9.42)$$

donde  $Q_z^p$  es el momento estático de la platabanda.

Por otra parte:

$$dM_z = V_y \cdot dx \Rightarrow \Delta M_z = V_y \cdot e \quad (9.43)$$

Por tanto:

$$F = \frac{V_y \cdot e}{I_z} Q_z^p \quad (9.44)$$

fuerza que será soportada por dos roblones (uno a cada lado del alma). La fuerza de desgarramiento por roblón será, en consecuencia:

$$F_r = \frac{V_y \cdot e}{2I_z} Q_z^p \quad (9.45)$$

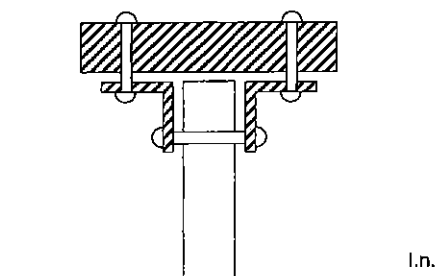
Suponiendo un roblón de diámetro  $d$  y que la fuerza  $F_r$  se distribuye uniformemente en toda su sección, la tensión tangencial en el roblón será:

$$\tau = \frac{2V_y \cdot e}{\pi d^2 I_z} Q_z^p \leq \tau_{adm} \quad (9.46)$$

expresión en la que aparecen las dos variables a determinar:  $d$  y  $e$ .

**b) Roblones de unión alma-angulares**

En el caso de roblones de unión entre el alma y los angulares, éstos *deben soportar la fuerza de desgarramiento correspondiente a la superficie sombreada* en la fig. 9.27.



**Figura 9.27. Roblones de unión alma-angulares**

Si no existieran estos roblones, el alma se deformaría con independencia del conjunto platabanda-angulares, ya unidos.

La fuerza de desgarramiento será:

$$F = \frac{\Delta M_z}{I_z} Q_z^a = \frac{V_y \cdot e}{I_z} Q_z^a \quad (9.47)$$

siendo  $Q_z^a$  el momento estático del área sombreada.

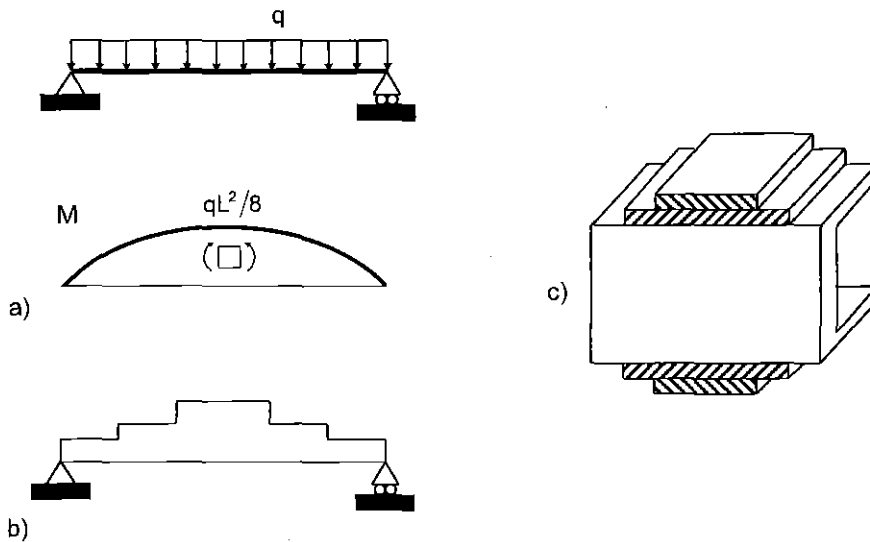
En este caso, esta fuerza es soportada por las dos superficies de un único roblón. Por tanto, cada superficie soporta:  $F_r = F/2$ , y la tensión tangencial de diseño sería:

$$\tau = \frac{2V_y \cdot e}{\pi d^2 I_z} Q_z^a \leq \tau_{adm} \quad (9.48)$$

supuesta la misma distancia  $e$  entre roblones.

**9.6.2. Vigas armadas de sección variable**

Supóngase que se pretende dimensionar una viga, simplemente apoyada, que soporta una carga uniformemente distribuida  $q$  (fig. 9.28a).



**Figura 9.28. Ejemplo de vigas armadas de sección variable**

Es necesario elegir un tipo de perfil capaz de resistir el momento máximo, el cual se presenta en el centro del vano. Pero si el perfil es de sección constante, estará desaprovechado en todas las secciones de la viga salvo la sección central. Una solución más económica sería elegir un perfil de menor sección y añadirle las platabandas precisas para conseguir que en cada sección resista el momento actuante (fig. 9.28b,c). En definitiva, se recurre a una viga armada de sección variable, es decir, una viga en la que a la sección uniforme se adosan platabandas en ciertos tramos. (A veces esta solución se utiliza porque no existen perfiles de las dimensiones requeridas por el momento máximo).

### 9.6.3. Resortes de flexión o ballestas

*Los resortes de flexión o ballestas son vigas rectas o de pequeña curvatura, compuestas de varias láminas superpuestas, llamadas hojas.*

Para comprender su comportamiento, supónganse dos vigas en voladizo, de la misma longitud y sección rectangular, una de ellas formada por  $n$  láminas superpuestas y la segunda por una pieza compacta (fig. 9.29, donde  $n=4$ ). Ambas se someten a una carga puntual  $P$  aplicada en el extremo.

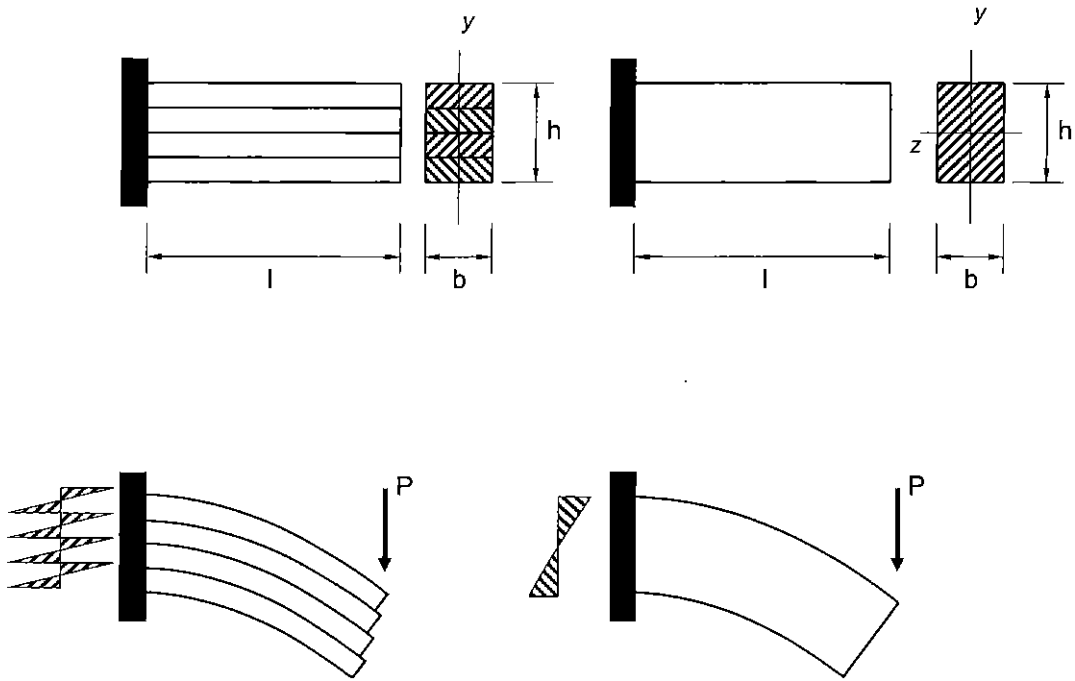


Figura 9.29. Comparación de dos vigas en voladizo

En la viga formada por  $n$  láminas, cada una de éstas flexiona independientemente, absorbiendo en la sección del empotramiento un momento flector  $Pl/n$ . La tensión normal máxima en cada lámina es:

$$\sigma_{xy\max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{Pl/n}{1/12 \cdot b(h/n)^3} \cdot \frac{h}{2n} = \frac{6Pl}{bh^2} n \quad (9.49)$$

La curvatura será:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} = \frac{12Pl}{Ebh^3} n^2 \quad (9.50)$$

Por otra parte, en la viga de una sola pieza, los valores de la tensión normal máxima y la curvatura son:



$$\sigma_{xy \max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{Pl}{1/12 \cdot bh^3} \frac{h}{2} = \frac{6Pl}{bh^2} \quad (9.51)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} = \frac{12Pl}{Ebh^3} \quad (9.52)$$

es decir, la tensión normal máxima es  $n$  veces menor y la curvatura  $n^2$  más pequeña que en la viga formada por  $n$  láminas.

De aquí se concluye que la viga formada por  $n$  láminas es  $n^2$  veces más flexible y  $n$  veces menos resistente que la viga de una pieza de las mismas dimensiones. Precisamente, por su mayor deformabilidad, las ballestas se destinan a absorber el máximo posible de energía de deformación. Se utilizan en los sistemas de suspensión de vehículos, cuya misión principal es amortiguar las percusiones por irregularidades en el firme o por la inercia del propio vehículo. Suelen fabricarse de acero de elevado límite elástico, con el fin de acumular el máximo de energía de deformación.

La fijación de la ballesta al bastidor se realiza por los extremos de la hoja más larga. Las longitudes de las diferentes hojas se determinan de modo que resulte una viga de igual resistencia a la flexión. Generalmente, las hojas presentan una curvatura creciente a medida que son más cortas. En la fig. 9.30 se muestran dos tipos de muelles de ballesta: a) semielíptica, b) recta.

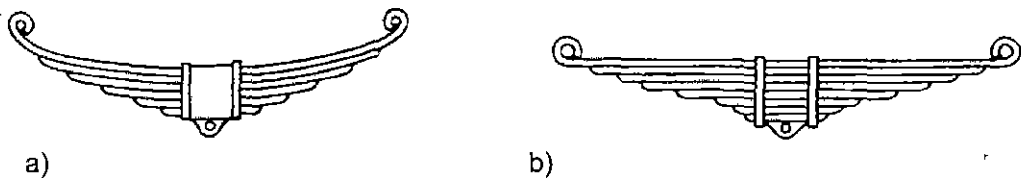


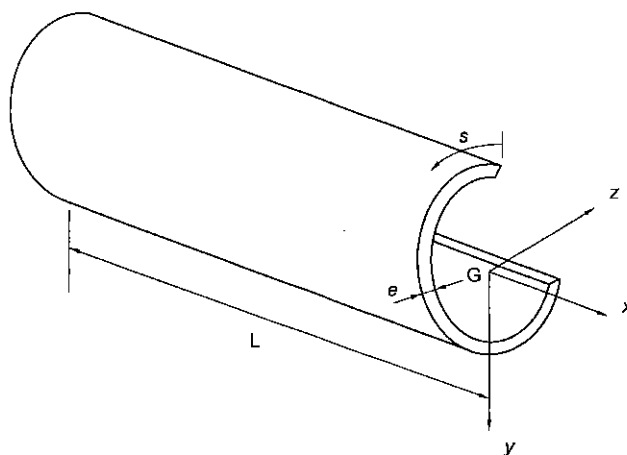
Figura 9.30. Resortes de flexión o ballestas: a) semielíptica, b) recta

## 9.7. **ESFUERZO CORTANTE EN PERFILES DELGADOS ABIERTOS. CENTRO DE FLEXIÓN**

### 9.7.1. **Consideraciones generales**

En la construcción de máquinas y estructuras, se emplean con frecuencia **elementos de pared delgada**, cuya propiedad fundamental es garantizar simultáneamente una resistencia y rigidez elevadas y un peso relativo pequeño.

En estos elementos, como sucedía con las láminas y placas, el espesor  $e$  de su sección transversal es mucho menor que la otra dimensión (longitud  $s$  del contorno). Esta, a su vez, es mucho menor que la longitud  $L$  de la barra (cfr. Fig. 9.31).



**Figura 9.31. Geometría de las barras de pared delgada**

Los *perfiles de pared delgada* se dividen en **perfiles abiertos** y **perfiles cerrados**. Se definen los *perfiles abiertos* como aquellos en los que la línea media entre los contornos interior y exterior de la pared es una curva abierta (por ejemplo, la sección en doble T, la sección en C, en T, etc.). Si se trata de una curva cerrada, el *perfil* se denomina *cerrado*.

En los perfiles de pared delgada sigue siendo válida la expresión de la distribución de tensiones normales obtenida para secciones llenas sometidas a flexión simple. Sin embargo, se ha de tener en cuenta una particularidad. En el caso de secciones llenas, las tensiones normales debidas al momento flector eran prácticamente las que decidían el diseño (las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante tenían

poca importancia). Por el contrario, en los perfiles delgados las tensiones tangenciales pueden adquirir un valor considerable y, por consiguiente, deben tenerse siempre en cuenta al calcular la resistencia de la barra.

### 9.7.2. Distribución de tensiones tangenciales

Las tensiones tangenciales en secciones transversales de barras de pared delgada se obtienen según el mismo principio que en las barras de sección llena. Se considerará un tramo de longitud  $dx$  en el perfil de pared delgada de la fig. 9.32 y se planteará el equilibrio al realizar un corte  $mn$  normal a la línea media del contorno (y por tanto no paralelo en general a la superficie neutra).

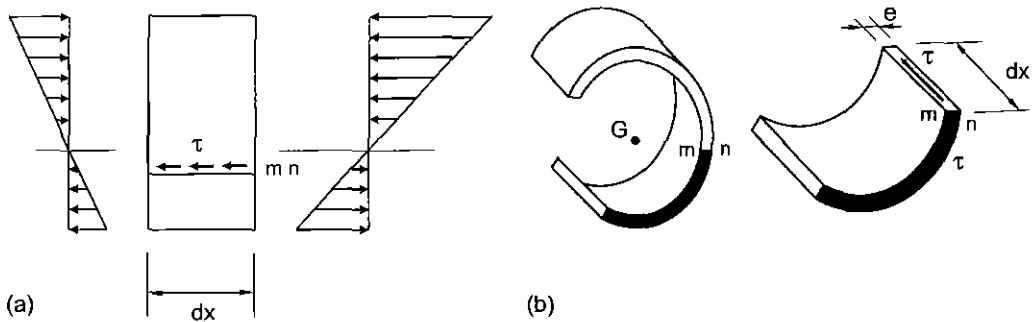


Figura 9.32. Tensiones cortantes en barras de pared delgada abierta

La distribución de tensiones normales se regirá por la ley de Navier. Esta distribución será diferente para las dos secciones separadas esa distancia  $dx$  (fig. 9.32a). Por ello, al realizar el corte  $mn$ , aparece una tensión rasante en el plano paralelo al eje del perfil, que coincide por el equilibrio con la tensión cortante  $\tau$  en  $mn$ . El proceso de cálculo de esta tensión es idéntico al seguido para la obtención de la fórmula de Colignon. Por tanto, la expresión de la tensión tangencial en los puntos de la traza del plano  $mn$  será:

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{e I_z} \quad (9.53)$$

donde  $e$  es el espesor del perfil en el corte y  $Q_z$  el momento estático del área rayada respecto al eje  $z$ . Dado el pequeño espesor de la pared, se supone que las tensiones cortantes son paralelas a la línea media del contorno y constantes en el espesor. Por

otra parte, la reciprocidad de las tensiones tangenciales permite determinar el sentido de éstas.

Es habitual introducir una nueva variable  $q$  definida en la forma:

$$q = \tau \cdot e \tag{9.54}$$

que se denomina **flujo de cortadura**. Este nombre refleja la semejanza entre las propiedades de  $q$  y las características del flujo de un fluido.

Si el esfuerzo cortante en la sección tiene dos componentes  $V_y$  y  $V_z$ , el valor de la tensión cortante vendrá dado por:

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{e I_z} + \frac{V_z Q_y}{e I_y} \tag{9.55}$$

**Ejemplo:** Calcular la distribución de tensiones tangenciales en el perfil en C de la fig. 9.33, debidas a un esfuerzo cortante  $V_y$ , que actúa en su centro de gravedad.

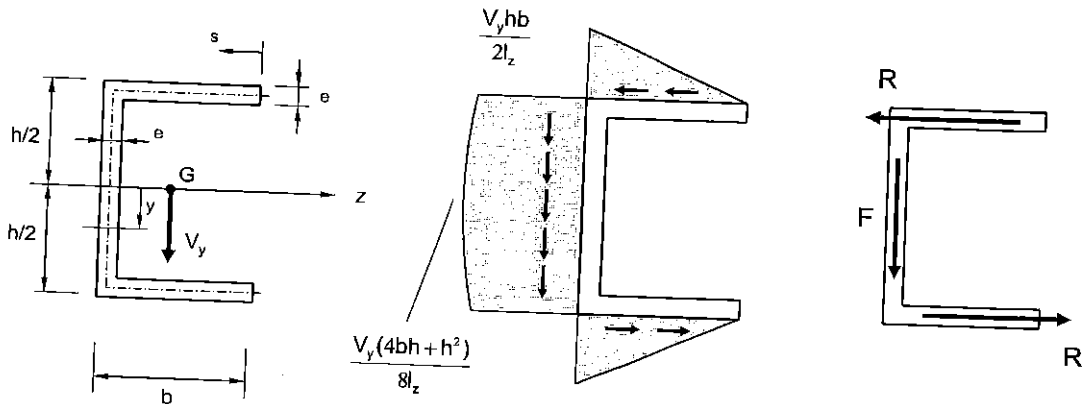
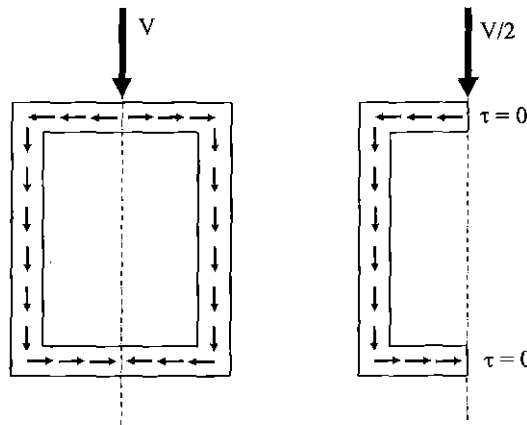


Figura 9.33. Tensiones tangenciales en un perfil en C

En las alas, a una distancia  $s$  del extremo se obtiene:

Existe un caso especial de perfiles cerrados, bastante habitual por otra parte, en que resulta fácil identificar algún punto donde la tensión tangencial es nula. Se trata de los perfiles cerrados de sección simétrica, cuando las cargas están contenidas en el plano de simetría. En este caso, puede deducirse fácilmente por razones de simetría que los puntos de intersección de la línea media con el plano de simetría son puntos de tensión tangencial nula.

En la fig. 9.37 se muestra un perfil de este tipo. Su análisis se puede reducir al de una sección abierta en C (de área igual a la mitad de la sección inicial), sometida a un cortante  $V/2$ .



**Figura 9.37. Perfil de pared delgada cerrado y simétrico**

En general, si el perfil no es simétrico, el análisis de la distribución de tensiones cortantes a lo largo del espesor supone la determinación del valor del cortante en un punto arbitrario 1 de la línea media (cfr. fig. 9.38). Conocido  $q_1$ , el flujo de cortadura en otro punto genérico 2 vendrá dado por:

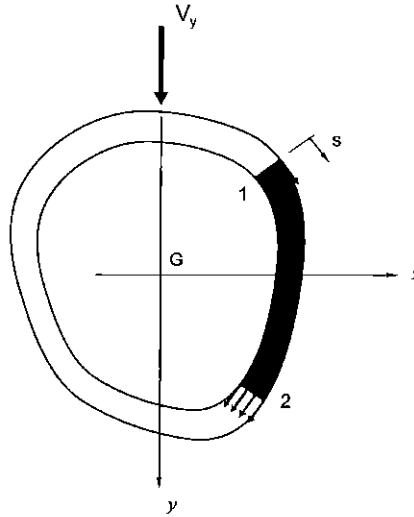
$$q \equiv q_2 = q_1 + \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z} \tag{9.63}$$

donde  $Q_z$  es el momento estático del área rayada en la figura.

El flujo  $q_1$  se determina de la siguiente forma. Sea el rectángulo ABCD de la fig. 9.39, situado sobre la superficie libre del perfil y limitado por dos generatrices y dos arcos

de longitud infinitesimal. En la deformación,  $AB$  y  $CD$  no giran, sino que se mueven en la dirección  $x$  (componente  $u$  de desplazamiento). Por tanto se puede expresar:

$$\overline{CC'} = du = \gamma \cdot ds = \frac{\tau}{G} \cdot ds \quad (9.64)$$



**Figura 9.38. Distribución de cortantes en una sección no simétrica**

El flujo  $q$ , se determina de la siguiente forma. Sea el rectángulo  $ABCD$  de la fig. 9.39, situado sobre la superficie libre del perfil y limitado por dos generatrices y dos arcos de longitud infinitesimal. En la deformación,  $AB$  y  $CD$  no giran, sino que se mueven en la dirección  $x$  (componente  $u$  de desplazamiento). Por tanto se puede expresar:

$$\overline{CC'} = du = \gamma \cdot ds = \frac{\tau}{G} \cdot ds \quad (9.64)$$

Integrando a lo largo de todo el contorno, se obtiene:

$$\oint du = \oint \frac{\tau}{G} \cdot ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \tau \cdot ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \frac{q}{e} \cdot ds = 0 \quad (9.65)$$

ya que la primera integral es la integral de una diferencial exacta ( $du$ ) a lo largo de un contorno cerrado.

Por tanto, teniendo en cuenta (9.63), resulta:

$$q_1 \oint \frac{ds}{e} + \frac{V_y}{I_z} \oint \frac{Q_z}{e} \cdot ds = 0 \quad (9.66)$$

expresión de la que se puede obtener  $q_1$ .

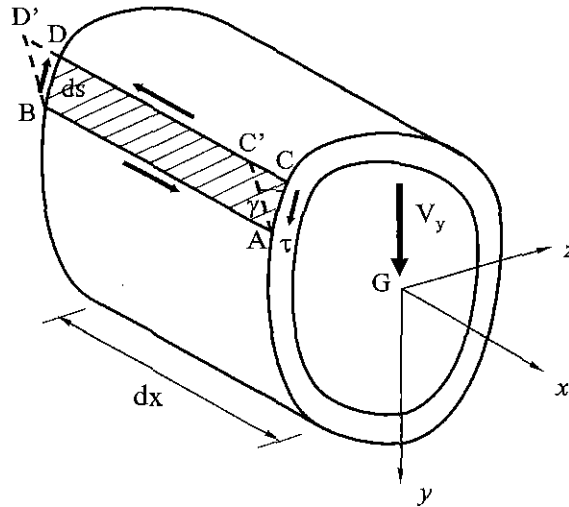
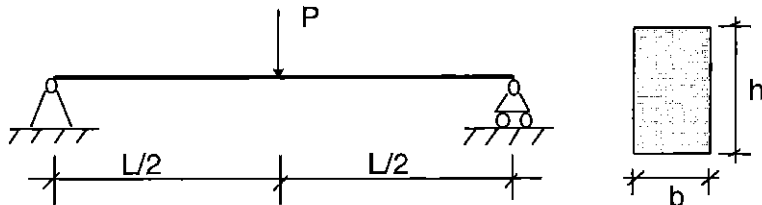


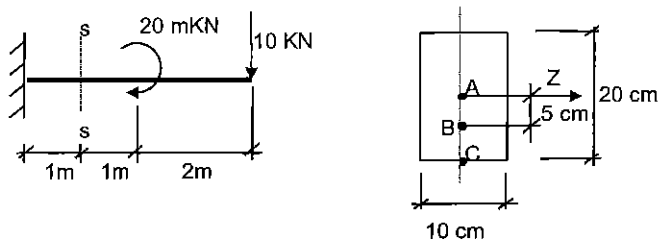
Figura 9.39. Deformación en el perfil delgado no simétrico debida al cortante

## PROBLEMAS

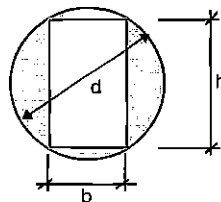
**9.1.** Una viga rectangular, está simplemente apoyada y sometida a una carga en su sección central, como se indica en la figura. Determinar la relación existente entre la tensión máxima de flexión y la tensión máxima de cortadura.



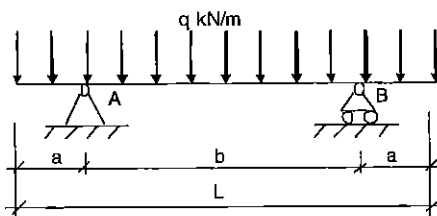
**9.2.** Calcular los estados tensionales en los puntos A, B y C de la sección s-s de la viga de la figura y representar sus círculos de Mohr.



**9.3.** Se tiene una sección cilíndrica de un eje de acero y se desea, partiendo de ella, obtener una sección rectangular de lados  $b$  y  $h$ , cuyo módulo resistente sea el máximo posible. Calcular, con estas condiciones, la relación  $h/b$ .



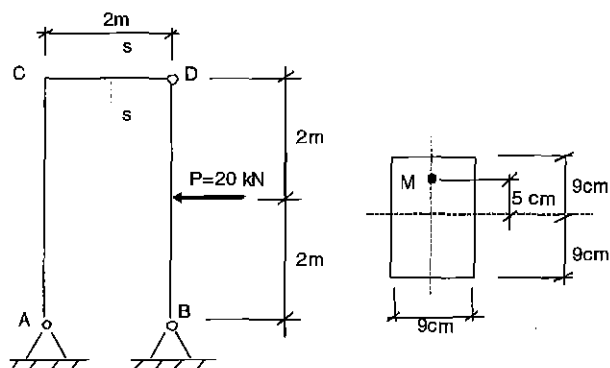
**9.4.** En la viga de la figura, de longitud  $L$  y sección cuadrada, sometida a una carga distribuida  $q$  (kN/m), se desea obtener la posición relativa entre los apoyos A y B (es decir, la relación entre  $a$  y  $b$ ) para que el máximo momento flector en la viga sea mínimo. Determinar el lado mínimo de la sección, para que la tensión de flexión no sobrepase la tensión de fluencia  $\sigma_f$  del material.





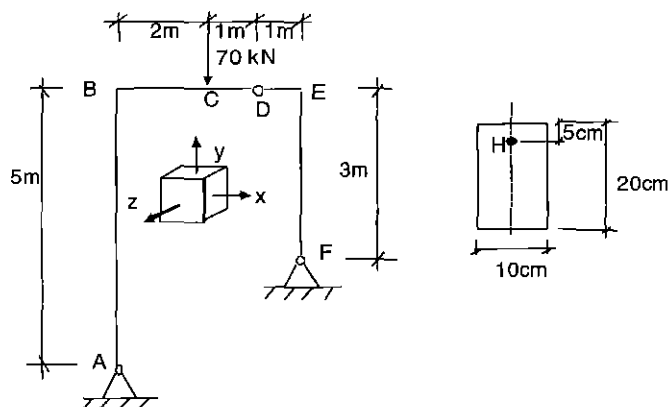
9.5. El pórtico de la figura tiene unos apoyos articulados fijos en A y B y una rótula en D. Se pide:

- 1º) Reacciones en los apoyos.
- 2º) Diagramas de esfuerzos de sección.
- 3º) Dibujo aproximado de la deformada.
- 4º) Representar el estado tensional en el punto M, situado en la sección media del dintel, en un cubo elemental en el entorno de M.



9.6. En el pórtico de la figura, A y F son apoyos articulados fijos y D una rótula. El lado menor de la sección recta es perpendicular al plano del dibujo. Se pide:

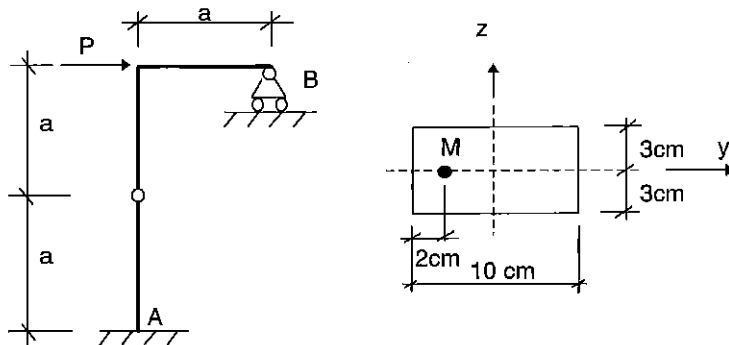
- 1º) Reacciones en los apoyos.
- 2º) Diagrama de esfuerzos normales, esfuerzos cortantes y momentos flectores.
- 3º) Se considera la sección C y en ella el punto H. Se toma en el entorno de H un paralelepípedo infinitesimal orientado según la figura (ejes x e y en el plano del pórtico y eje z normal al mismo). Representar el estado tensional en ese punto y dibujar el diagrama de los círculos de Mohr. No se despreciará ninguna sollicitación.



9.7. Para la estructura de la figura:

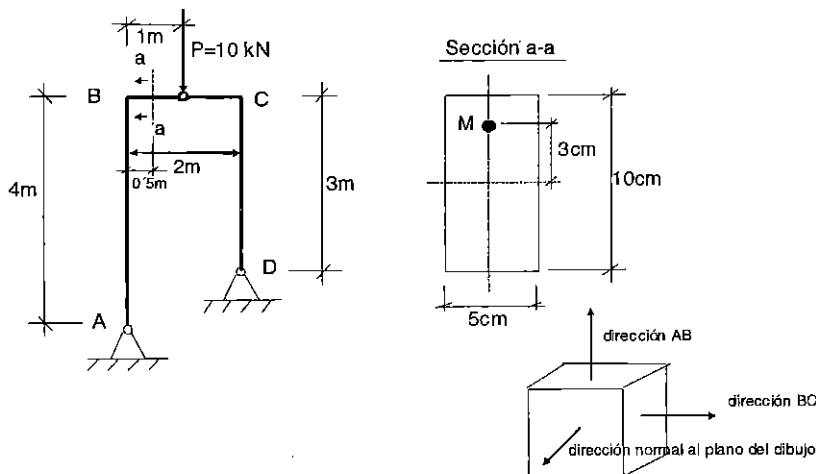
- 1º) Representar los diagramas de esfuerzos de sección y la deformada.
- 2º) Representación gráfica de Mohr para el punto M de la sección de empotramiento.

Datos:  $P = 10 \text{ kN}$   $a = 1 \text{ m}$ .

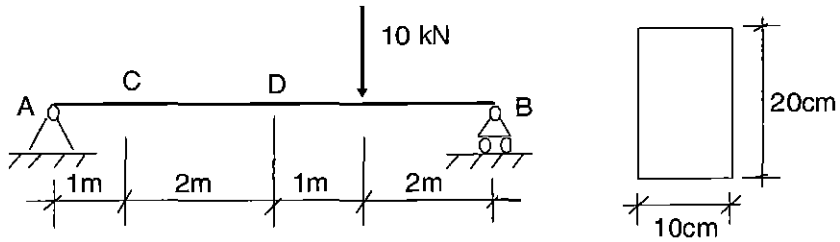


9.8. El pórtico triarticulado de la figura soporta una carga vertical  $P = 10 \text{ kN}$  en el centro del dintel, donde está situada una de las rótulas. Las otras dos se encuentran en los apoyos A y D. Las longitudes de las barras del pórtico se muestran en la figura. La sección recta de columnas y dintel es de  $5 \times 10 \text{ cm}^2$ . Se pide:

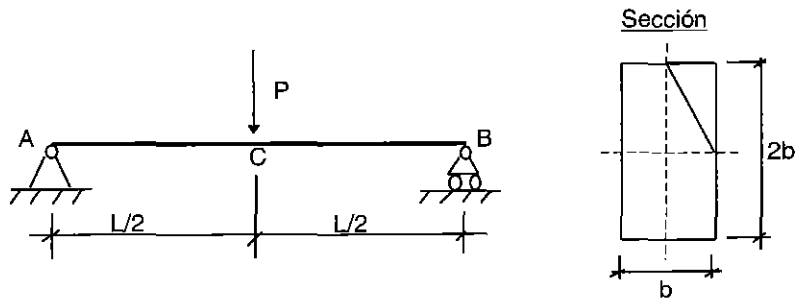
- 1º) Determinar las reacciones en los apoyos.
- 2º) Representar, acotándolos convenientemente, los diagramas de esfuerzos de sección.
- 3º) Representar el estado tensional del punto M de la sección a-a, en un cubo elemental en el entorno de dicho punto, con las caras orientadas según se indica en la figura.



9.9. Calcular el esfuerzo de desgarramiento máximo que se produce en el tramo CD de la viga cuya sección recta es la indicada. Señalar en qué sección longitudinal se produce.

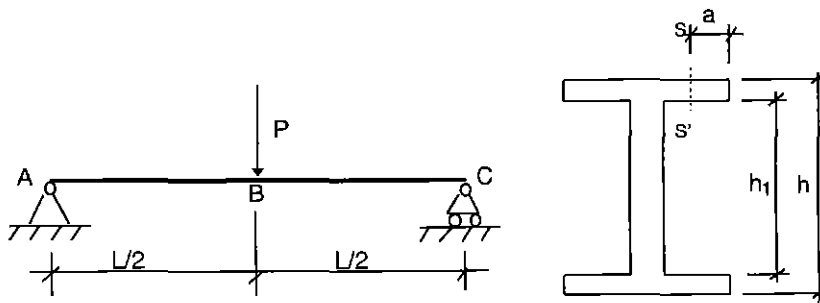


9.10. Calcular el esfuerzo de desgarramiento a lo largo del plano indicado en la figura entre el apoyo izquierdo de la viga y su sección central.



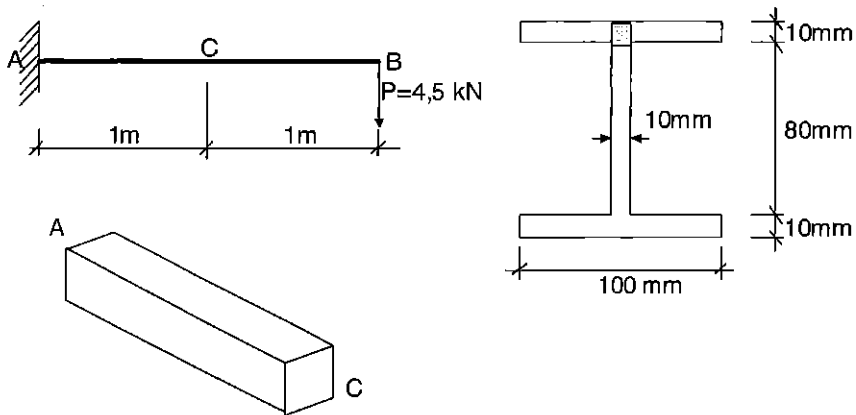
9.11. Determinar el esfuerzo de desgarramiento que existe en la superficie SS' entre las secciones A y B para la viga de la figura.

Datos:  $P, I_z, L, a, h_1, h$ .



**9.12.** En la viga de la figura, de momento de inercia  $I_z = 450 \text{ cm}^4$ , se considera un bloque prismático cuya sección recta es el cuadrado de  $10 \times 10 \text{ mm}^2$  definido por la intersección del alma y ala del perfil. Dicho bloque está limitado por las secciones A y C y tiene, por tanto, 1 m de longitud. Se pide determinar los esfuerzos rasantes o de desgarramiento que aparecen en las caras del bloque paralelas al eje de la viga, así como los esfuerzos normales en las secciones rectas extremas del bloque.

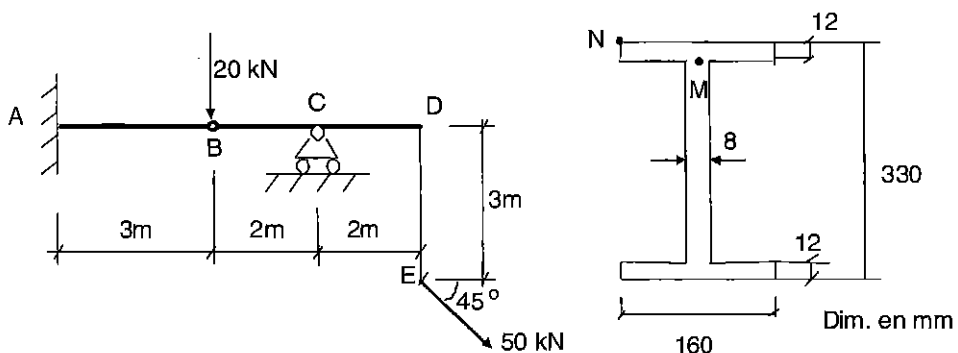
Representar estos esfuerzos sobre el bloque dibujado en perspectiva y comprobar el equilibrio de dicho elemento.



**9.13.** La estructura resistente de la figura está sustentada en un empotramiento perfecto en la sección A y en un apoyo articulado y deslizable en la sección C, y presenta una rótula en la sección B.

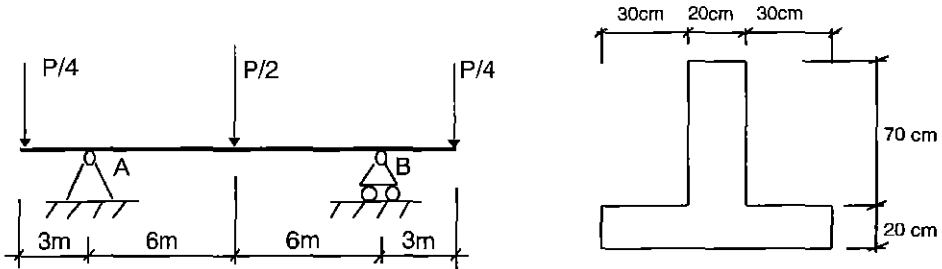
El perfil de la estructura es el representado en la figura, donde las dimensiones se dan en milímetros. Se pide:

- 1º) Diagramas de sollicitaciones.
- 2º) Círculos de Mohr representativos de los estados tensionales en los puntos M y N de las secciones B y C.
- 3º) Máximo esfuerzo de desgarramiento por unidad de longitud en la unión alma-ala del perfil.



**9.14.** La viga de la figura tiene un apoyo fijo en A y un apoyo deslizable en B. Las tensiones máximas admisibles del material son de 2 MPa (tracción) y 15 MPa (compresión).

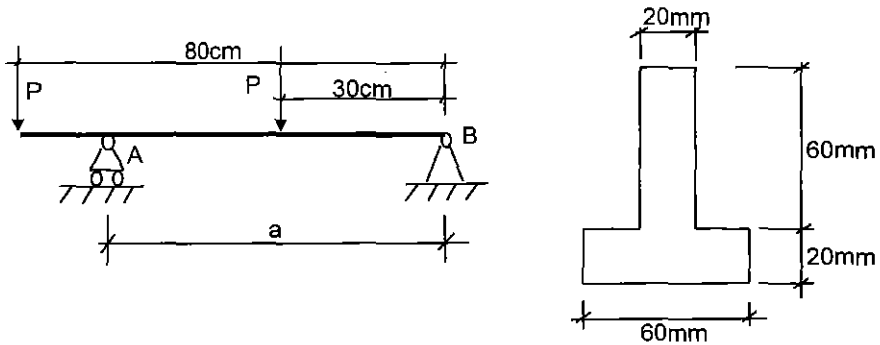
Calcular el máximo valor admisible de P en el proyecto de la viga.



**9.15.** La figura representa una viga de 80 cm de longitud que recibe dos cargas iguales P en secciones situadas a 80 cm y 30 cm de la articulación fija B. A es un simple apoyo situado a una distancia a de B.

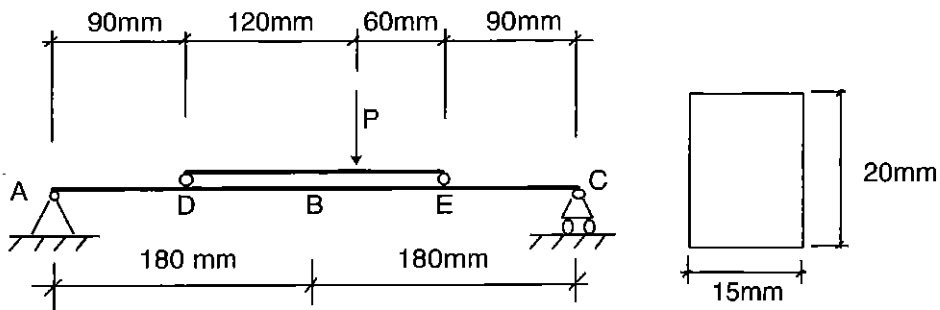
La sección de la viga es la representada en el esquema. El material es fundición y las tensiones admisibles son 100 MPa a tracción y 300 MPa a compresión.

Determinar la distancia a que permite el valor máximo de P y el valor de dicha carga máxima.

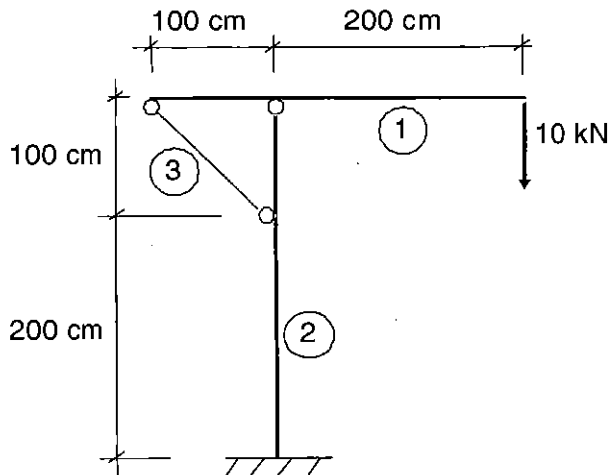


**9.16.** Una viga de sección rectangular de 15 mm de ancho y 20 mm de alto está apoyada en sus extremos y posee una luz de 360 mm. La viga está compuesta de dos mitades soldadas de distinto material. El tramo AB tiene un límite de fluencia de  $250 \text{ N/mm}^2$  y el tramo BC de  $375 \text{ N/mm}^2$ . Recibe una carga  $P$  a través del carretón DE de la figura. Se pide:

- 1º) Carga máxima  $P$  que puede soportar la viga sin que se inicie la fluencia en ningún momento.
- 2º) Si se coloca un gato hidráulico en B, que transmite un esfuerzo vertical ascendente de 10 kN, y se supone  $P = 15 \text{ kN}$ , dibujar el diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores.
- 3º) Para  $P = 15 \text{ kN}$ , determinar el valor máximo y mínimo transmitido por el gato hidráulico para que no se produzca la fluencia en ningún punto de la viga.



**9.17.** Obtener los diagramas de esfuerzos normales, momentos flectores y esfuerzos cortantes para cada barra de la estructura de la figura, y dibujar la deformada aproximada. Suponiendo que todas las barras son de sección cuadrada, con dos de los lados de la sección paralelos al plano de la estructura, dimensionar las barras, sabiendo que la tensión normal admisible es  $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$ . Para las barras que trabajan a flexión, se despreciarán las tensiones debidas a otros esfuerzos.



**9.18.** Una viga simplemente apoyada de 10 m de luz, recibe una carga uniformemente distribuida de 80 kN/m.

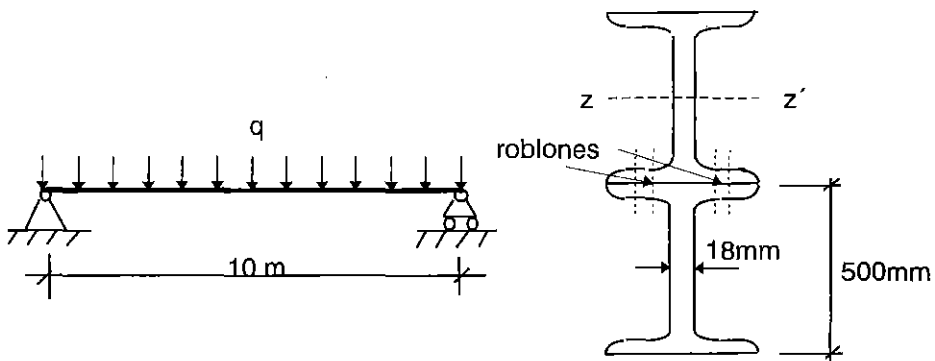
La sección recta está constituida por dos perfiles en doble T unidos por parejas de roblones, tal como indica la figura. La separación longitudinal  $a$  entre parejas de roblones es variable y la resistencia a cortadura de cada roblón es de 48 kN.

Cada perfil tiene las siguientes características:

Altura total : 500 mm.	Sección: $180 \text{ cm}^2$
Espesor del alma: 18 mm.	$I_{zz'} = 68.750 \text{ cm}^4$

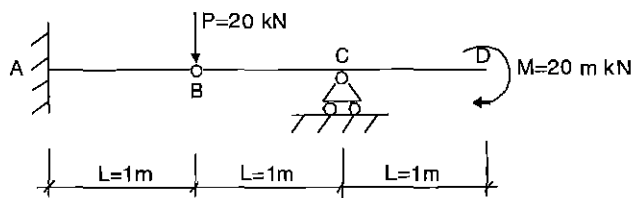
Se desea:

- 1º) Separación máxima  $a$  en las secciones de apoyo y en los cuartos de luz para que no se sobrepase la resistencia de los roblones.
- 2º) Valor aproximado de la tensión tangencial media en las secciones de apoyo.

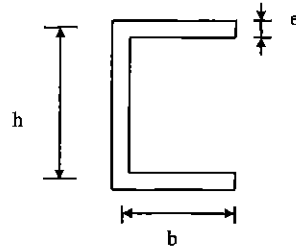


**9.19.** Para la viga de la figura:

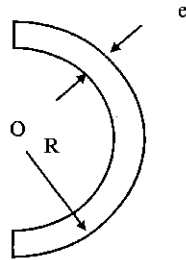
- 1º) Obtener los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes.
- 2º) Dibujar aproximadamente la deformada.
- 3º) Sabiendo que la viga es de sección cuadrada, calcular el lado de la sección, sabiendo que la tensión admisible para la flexión es de 100 MPa.
- 4º) Calcular el máximo valor de la tensión cortante que se produce en la sección transversal de la viga.



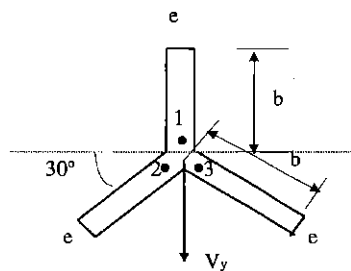
9.20. En el perfil de pared delgada de la figura, sometido a un cortante  $V$ , determinar el punto de aplicación de dicho cortante para evitar el fenómeno de torsión en la sección transversal.



9.21. Determinar la distribución de tensiones tangenciales y la máxima tensión tangencial originadas en el perfil de la figura, sometido a un cortante vertical  $V$ . Hallar asimismo la posición del centro de cortantes del perfil.

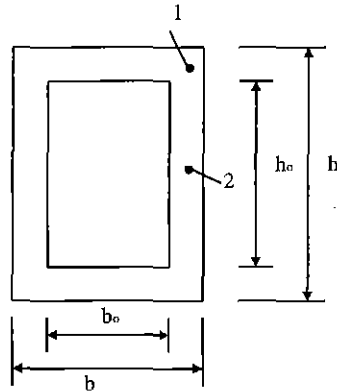


9.22. Determinar el diagrama de tensiones cortantes para el perfil de pared delgada de la figura, sometido a un esfuerzo cortante vertical  $V_y$  en  $G$ . Calcular los valores en los puntos 1, 2 y 3 indicados.

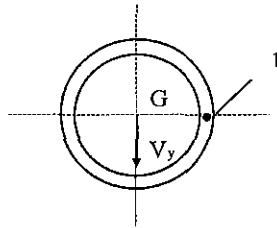




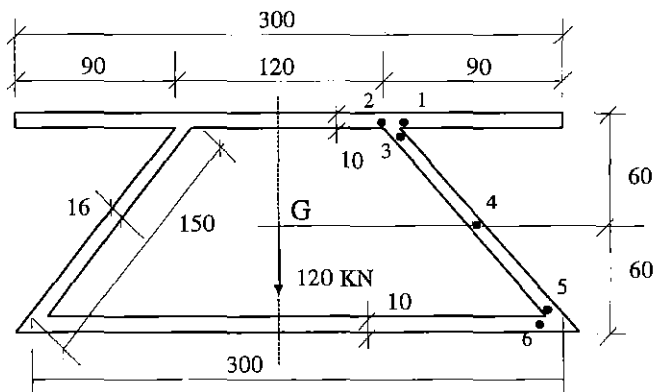
9.23. La figura representa la sección recta de una viga sometida a flexión simple. Sabiendo que el esfuerzo cortante es  $V$ , calcular la distribución de tensiones tangenciales en el supuesto de que  $h-h_0 \ll h$ ,  $b-b_0 \ll b$ . Calcular los valores en los puntos 1 y 2 indicados en la figura.



9.24. Determinar el diagrama de tensiones cortantes para el perfil de pared delgada tubular de la figura, sometido a un esfuerzo cortante vertical  $V_y$  en  $G$ . Indicar el valor de la tensión en el punto 1.



9.25. Determinar el diagrama de tensiones cortantes para el perfil de pared delgada de la figura, sometido a un esfuerzo cortante vertical de 120 kN en  $G$ , señalando los valores de la tensión en los puntos 1 a 6 indicados. Las dimensiones son en mm.

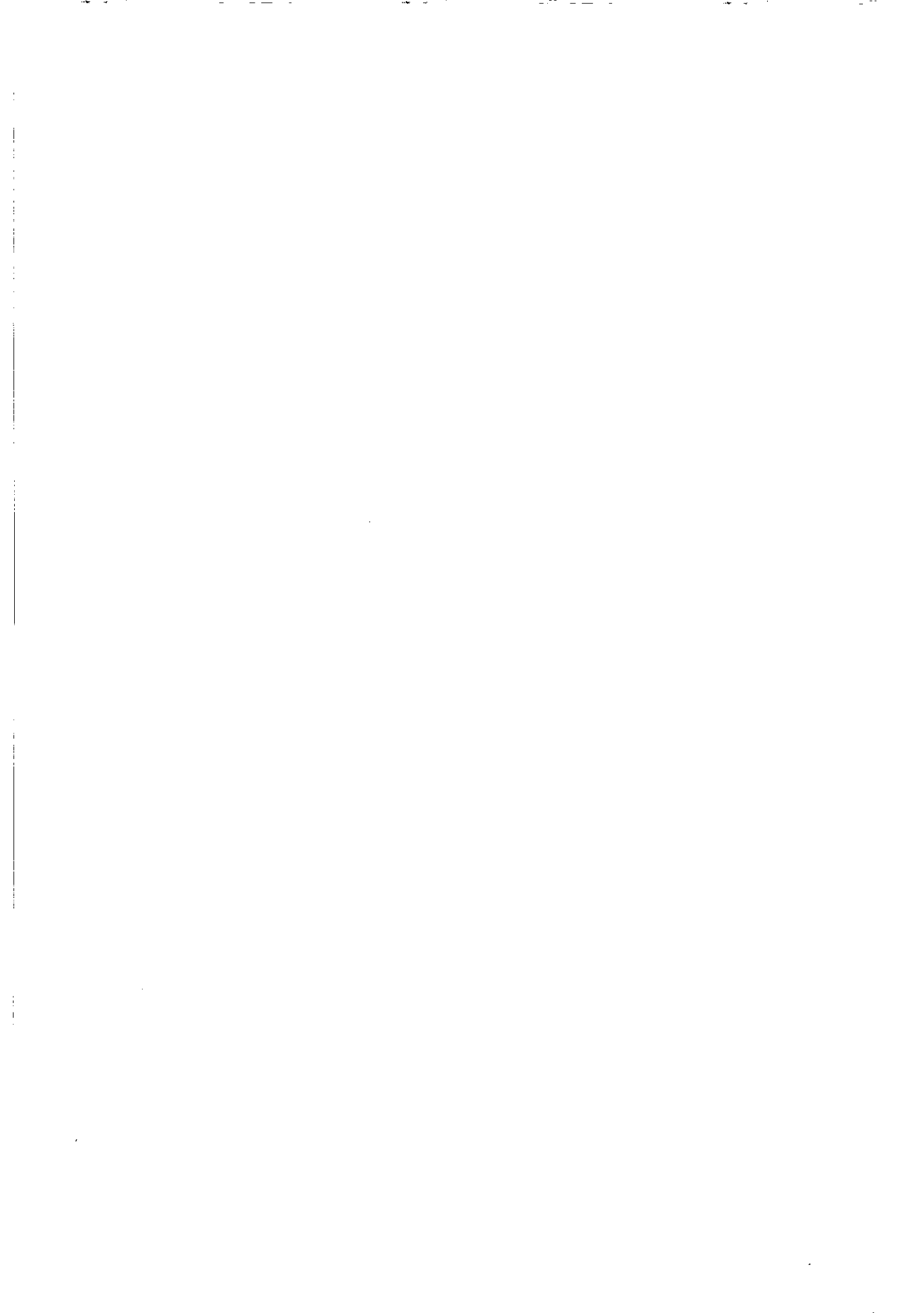


# TEMA 10

---

## **TEORÍA GENERAL DE LA FLEXIÓN. DEFORMACIONES**

---





## **10.1. INTRODUCCIÓN**

En este tema se estudiarán las deformaciones originadas en flexión, y se expondrán algunos métodos particularmente útiles para su cálculo. Se comienza con las definiciones de algunos términos importantes en este contexto.

*La curva que representa el eje de la pieza prismática en la configuración deformada se denomina **curva elástica** o simplemente **elástica**. Se trata, por tanto, del lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones de la pieza tras la deformación (en lo que sigue y mientras no se diga lo contrario se supondrá que la flexión tiene lugar en el plano  $xy$ , por lo que la curva elástica será una curva contenida en dicho plano).*

*En una sección se pueden definir dos valores que caracterizan su deformación: flecha y pendiente. Se conoce con el nombre de **flecha** al desplazamiento transversal del centro de gravedad de la sección: se trata, por tanto, de un desplazamiento contenido en el plano en que tiene lugar la flexión y en dirección perpendicular al eje  $x$  de la pieza. Puesto que se está suponiendo que la flexión tiene lugar en el plano  $xy$ , la flecha será el desplazamiento del centro de gravedad en la dirección coordenada  $y$ .*

Y si en ese punto de la elástica, que como se ha dicho coincide con la posición que ocupa el centro de gravedad de la sección en la configuración deformada, se traza la tangente a la curva, al ángulo formado por esta tangente y el eje  $x$  se le llama **pendiente** o **giro** de la elástica en dicho punto: como las secciones permanecen planas y perpendiculares al eje, este ángulo es el giro que experimenta la sección en la deformación.

Por lo tanto, flecha y pendiente son dos parámetros que caracterizan adecuadamente a la elástica. Su cálculo es importante por diversas razones. Entre otras:

- Con frecuencia, las especificaciones en las estructuras hacen referencia a límites máximos de dichos parámetros (por ej., valor máximo de la flecha en una viga, en un puente, etc.).
- Permite la resolución de estructuras hiperestáticas en flexión, para las cuales deben imponerse condiciones de compatibilidad en la deformación y, por tanto, determinar desplazamientos o giros en determinadas secciones de la pieza.

## 10.2. LA CURVA ELÁSTICA

Se trata de determinar la ecuación de la curva elástica de una viga inicialmente recta cargada transversalmente. Se suponen conocidas las características mecánicas del material de la viga (módulo de elasticidad  $E$ , etc.), la forma de sus secciones rectas, y el diagrama de momentos flectores. Como se ha dicho, la deformación tiene lugar en el plano  $xy$ , coincidiendo el eje  $x$  con el eje de la pieza y siendo su sentido positivo de izquierda a derecha, y el del eje  $y$  de arriba hacia abajo. El origen de coordenadas se ubica en la sección situada más a la izquierda de la pieza (fig. 10.1).

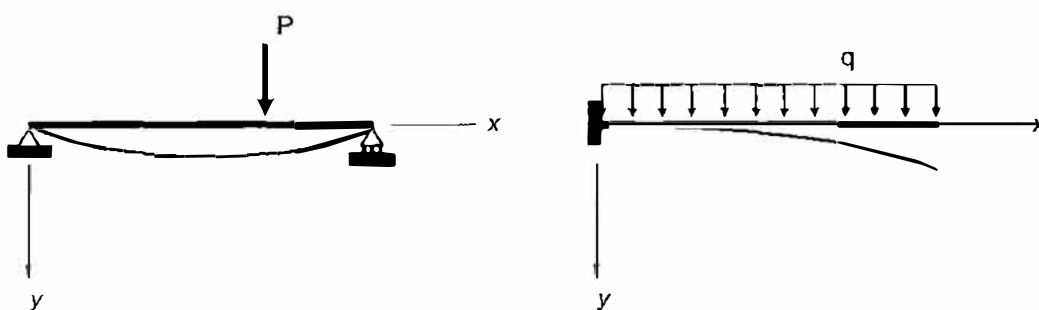


Figura 10.1. Curva elástica: ejes coordenados

Como hipótesis de cálculo se considerarán las mismas que se establecieron para la deducción de la ley de Navier de las tensiones en flexión pura (comportamiento elástico-lineal, pequeñas deformaciones, secciones planas, ...), y además se desprecia el efecto del esfuerzo cortante en la deformación: se considera, por tanto, únicamente el efecto del momento flector.

Se considerarán positivos los momentos flectores que producen compresión en los puntos situados por encima del eje neutro y tracción en los puntos situados por debajo, y momentos flectores negativos en caso contrario (fig. 10.2).

Con las hipótesis establecidas, el valor de la curvatura en una sección de momento de inercia  $I_z$  en la que actúa un momento flector  $M_z$ , será el obtenido al estudiar la distribución de tensiones en flexión pura (9.7), es decir:

## 10.2. LA CURVA ELÁSTICA

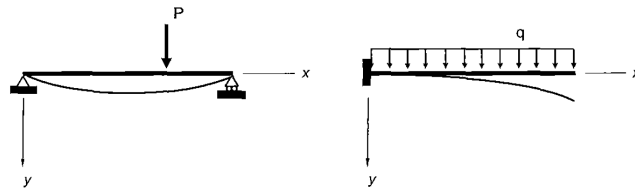
Se trata de determinar la ecuación de la curva elástica de una viga inicialmente recta cargada transversalmente.

Se suponen conocidas las características mecánicas del material de la viga,

La forma de sus secciones rectas, y el diagrama de momentos flectores.

La deformación tiene lugar en el plano xy, coincidiendo el eje x con el eje de la pieza y siendo su sentido positivo de izquierda a derecha, y el del eje y de arriba hacia abajo.

El origen de coordenadas se ubica en la sección situada más a la izquierda de la pieza



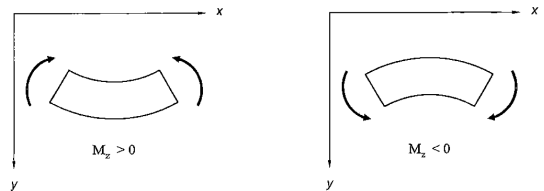
Como hipótesis de cálculo se considerarán: comportamiento elástico-lineal, pequeñas deformaciones, secciones planas, las mismas que se hacen para la ley de Navier

además se desprecia el efecto del esfuerzo cortante en la deformación

Se considerarán positivos los momentos flectores que producen compresión en los puntos situados por encima del eje neutro y tracción en los puntos situados por debajo, y momentos flectores negativos en caso contrario.

$$\kappa = \frac{d^2 y / dx^2}{\left[1 + (dy / dx)^2\right]^{3/2}}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$$



Se concluye que para pequeñas deformaciones, es decir, cuando  $dy/dx$  es una magnitud pequeña y por tanto su cuadrado se puede despreciar frente a la unidad, la curvatura coincide con la derivada segunda de la función,

$$\kappa = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}$$

Queda por verificar cómo afecta a esta ecuación el convenio de signos que se ha definido para el momento flector M, en relación al sistema de coordenadas adoptado.

Para un momento flector positivo la elástica adopta una curvatura que se corresponde con un máximo en el sistema de coordenadas elegido, y un máximo se caracteriza porque su derivada segunda es negativa; y, mediante un razonamiento análogo, para un momento flector negativo. En otras palabras, derivada segunda y momento flector son de signo contrario, por lo que la relación correcta entre ambos será:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z}$$

Ésta es la denominada ecuación diferencial de la curva elástica. Se insiste en que es válida para los convenios de signos que se han adoptado.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (10.1)$$

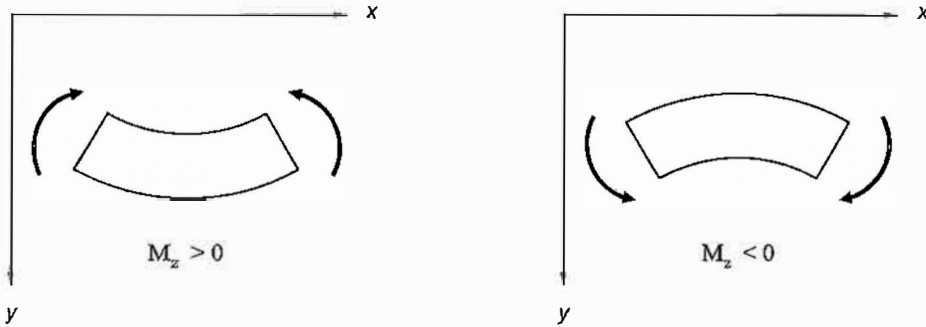


Figura 10.2. Curva elástica: convenio de signos

Por otra parte, recordando la definición matemática de curvatura  $\kappa$  de una curva plana  $y=y(x)$ , continua y diferenciable:

$$\kappa = \frac{d^2 y / dx^2}{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}} \quad (10.2)$$

se concluye que para pequeñas deformaciones, es decir, cuando  $dy/dx$  es una magnitud pequeña y por tanto su cuadrado se puede despreciar frente a la unidad, la curvatura coincide con la derivada segunda de la función, es decir:

$$\kappa = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (10.3)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (10.1) y (10.3) cabe concluir que la ecuación diferencial de la curva elástica es:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (10.4)$$



Queda por verificar cómo afecta a esta ecuación el convenio de signos que se ha definido para el momento flector  $M_z$  en relación al sistema de coordenadas adoptado.

Como puede observarse en la fig. 10.2, para un momento flector positivo la elástica adopta una curvatura que se corresponde con un máximo en el sistema de coordenadas elegido, y un máximo se caracteriza porque su derivada segunda es negativa; y, mediante un razonamiento análogo, para un momento flector negativo la elástica adopta una curvatura que se corresponde con un mínimo en ese sistema de coordenadas, y un mínimo se caracteriza porque su derivada segunda es positiva. En otras palabras, derivada segunda y momento flector son de signo contrario, por lo que la relación correcta entre ambos será:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (10.5)$$

Ésta es la denominada **ecuación diferencial de la curva elástica**. Se insiste en que es válida para los convenios de signos que se han adoptado. Una doble integración permite obtener la ecuación de la elástica  $y=y(x)$ , que permite el cálculo de la flecha en cualquier sección de la pieza. La primera integración proporciona los valores de las pendientes  $dy/dx$ . Al realizar la integración aparecerán unas constantes arbitrarias que deberán determinarse imponiendo las condiciones de contorno del problema considerado.

**Ejemplo.** La viga en voladizo AB de la fig. 10.3, de longitud  $L$  y rigidez a flexión  $EI_z$ , está sometida a una carga vertical  $P$  en su extremo libre B. Determinar la ecuación de la elástica así como la flecha y la pendiente en B.

Teniendo en cuenta que el momento en una sección a una distancia  $x$  del empotramiento es:  $M_z(x) = -P(L-x)$ , la ecuación diferencial de la elástica será:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(L-x)}{EI_z} \quad (10.6)$$

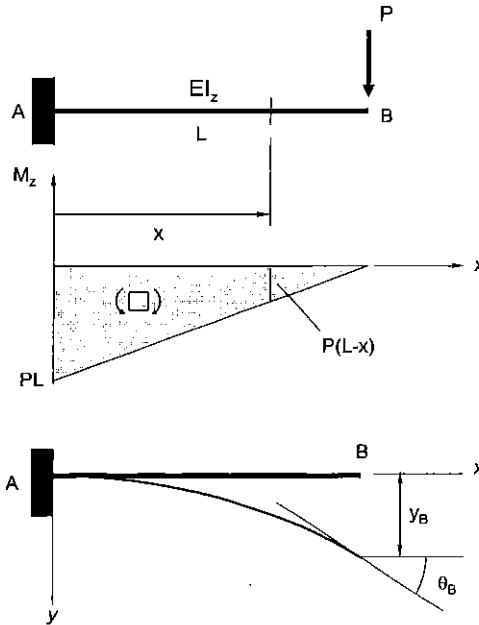


Figura 10.3. Voladizo con carga en su extremo libre

Integrando dos veces de forma sucesiva se obtienen para el giro y la flecha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI_z} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \quad (10.7)$$

$$y = \frac{P}{EI_z} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + C_2 \quad (10.8)$$

donde las constantes de integración se determinan aplicando las condiciones de contorno: en el empotramiento A ( $x=0$ ) se ha de cumplir:  $y=0$ ,  $dy/dx=0$ . Resolviendo se obtienen los valores:  $C_1=0$ ,  $C_2=0$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{P}{EI_z} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) \\ y &= \frac{P}{EI_z} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \end{aligned} \quad (10.9)$$

Los valores correspondientes al extremo libre  $B$  ( $x=L$ ) son:

$$y_B = \frac{PL^3}{3EI_z} \quad (10.10)$$

$$\theta_B = \left( \frac{dy}{dx} \right)_B = \frac{PL^2}{2EI_z}$$

resultando ambos valores positivos, que se corresponden con el sentido positivo del eje  $y$  y giro en sentido horario.

### **10.3. MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS: TEOREMAS DE MOHR**

En este apartado se expone un procedimiento alternativo para determinar los valores de la pendiente y la flecha de la curva elástica en una sección cualquiera de la viga. Se basa en ciertas propiedades geométricas de la elástica.

El método se conoce con el nombre del **método del área de momentos**, porque *consiste en evaluar áreas y momentos de áreas en el diagrama de momentos flectores de la pieza*. Como se verá, es de gran utilidad ya que permite hallar la pendiente y la flecha en determinadas secciones de la viga, sin necesidad de obtener la ecuación completa de la curva elástica.

Sea un tramo cualquiera de la elástica entre dos secciones  $A$  y  $B$  de la viga (fig. 10.4), cuyo diagrama de momentos flectores, dividido por  $EI_z$ , se supone conocido y se representa en la parte inferior de la figura.

Sean  $M$  y  $N$  dos puntos de ese tramo de la elástica indefinidamente próximos, separados inicialmente  $dx$ , cuyas tangentes (y normales) forman un ángulo  $d\theta$ , y sea  $\rho$  el radio de curvatura. De la propia figura y teniendo en cuenta (10.1) se deduce:

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} ds \quad (10.11)$$

### 10.3. MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS: TEOREMAS DE MOHR

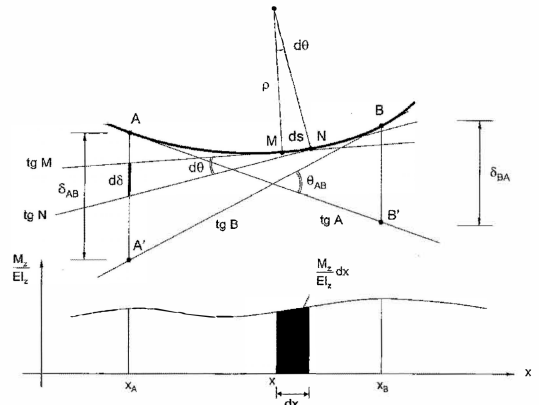
En este apartado se expone un procedimiento para determinar los valores de la pendiente y la flecha de la curva elástica en una sección cualquiera de la viga. Se basa en ciertas propiedades geométricas de la elástica.

Consiste en evaluar áreas y momentos de áreas en el diagrama de momentos flectores de la pieza.

Permite hallar la pendiente y la flecha en determinadas secciones de la viga, sin necesidad de obtener la ecuación completa de la curva elástica.

Sean M y N dos puntos de ese tramo de la elástica indefinidamente próximos, separados inicialmente  $dx$ , cuyas tangentes (y normales) forman un ángulo  $d\theta$ , y sea  $\rho$  el radio de curvatura.

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} ds$$



Para pequeñas deformaciones

$$d\theta = \frac{M_z}{EI_z} dx$$

lo que indica que el ángulo elemental de formado por las tangentes en dos puntos infinitamente próximos de la elástica es igual al área elemental que resulta de dividir el diagrama de momentos flectores por la rigidez a flexión. El ángulo  $\theta$  que forman las tangentes a la elástica en dos puntos.

$$\theta_{AB} = \int_A^B d\theta = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_z}{EI_z} dx$$

expresión del denominado Primer Teorema de Mohr: el ángulo  $\theta$  formado por las tangentes trazadas en dos puntos de la línea elástica de una viga de rigidez a flexión constante es igual al área del diagrama de momentos flectores interceptada por las verticales trazadas por aquellos puntos, dividida por la rigidez a flexión.

Las tangentes a la elástica en los puntos M y N delimitan un segmento de longitud  $d\delta$  sobre la vertical trazada por el punto A, de forma que:

$$d\delta = (x - x_A) d\theta = (x - x_A) \frac{M_z}{EI_z} dx$$

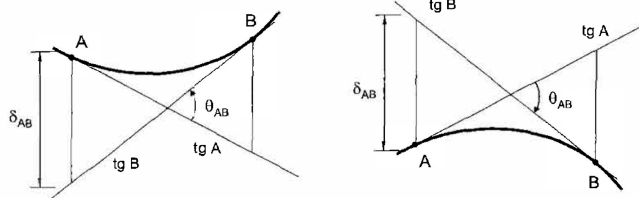
Al integrar la ecuación entre A y B, la intersección de las sucesivas tangentes de la elástica sobre la vertical por A recorre el segmento AA', de forma que:

$$\delta_{AB} = \int_A^B d\delta = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_z}{EI_z} (x - x_A) dx = \overline{AA'}$$

que es la formulación del llamado Segundo Teorema de Mohr: Trazada la vertical por un punto de la elástica de abscisas  $x_A$ , el segmento delimitado sobre la misma por ese punto y el de su intersección con la tangente trazada a la elástica por otro punto de abscisa  $x_B$ , es igual al momento estático del área del diagrama de momentos flectores comprendido entre las verticales de abscisas  $x_A$  y  $x_B$ , respecto de esa vertical.

De estos teoremas se debe tener en Cuenta

Proporcionan valores relativos: ángulo entre dos tangentes y distancia de un punto de la elástica a la tangente en otro. No pueden aplicarse estos teoremas entre dos puntos de la elástica si entre ambos hay una rótula intermedia, puesto que no habría continuidad en la tangente.



Al operar con el diagrama de momentos cada parte del diagrama debe ir afectado con su signo correspondiente

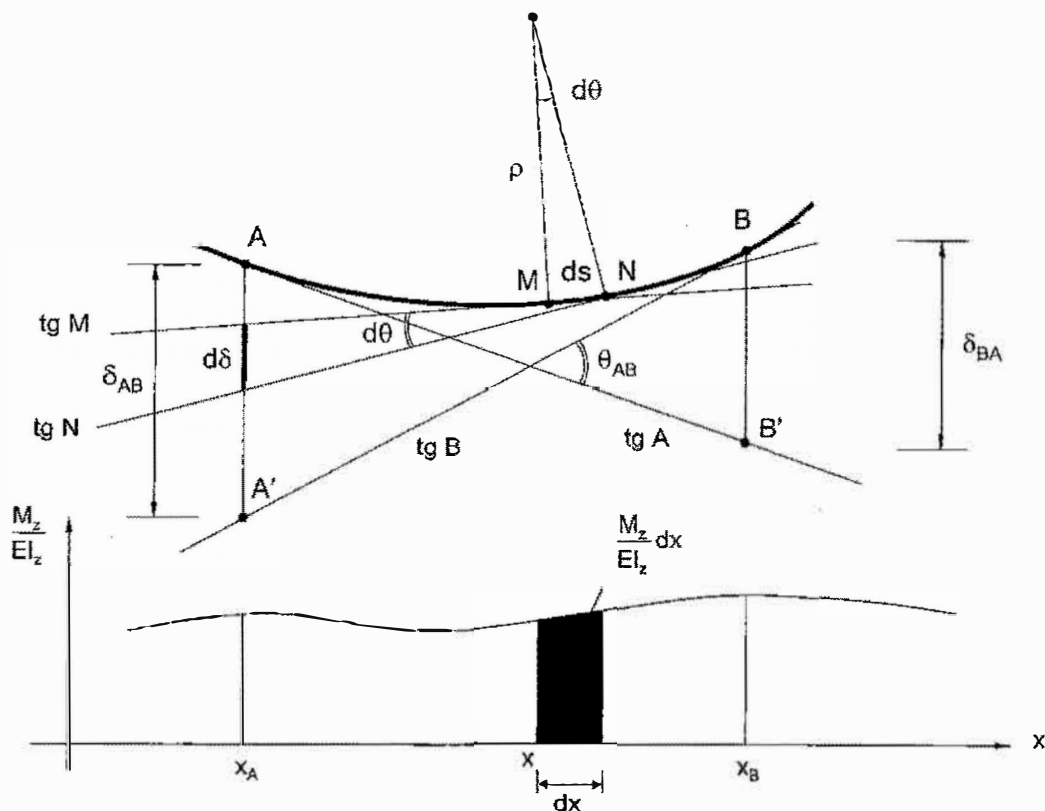


Figura 10.4. Método del área de momentos

Para pequeñas deformaciones  $ds \approx dx$ , y por consiguiente se puede expresar:

$$d\theta = \frac{M_z}{EI_z} dx \quad (10.12)$$

lo que indica que el ángulo elemental  $d\theta$  formado por las tangentes en dos puntos infinitamente próximos de la elástica es igual al área elemental que resulta de dividir el diagrama de momentos flectores por la rigidez a flexión  $EI_z$ , comprendido entre las abscisas correspondientes a dichas secciones.

El ángulo  $\theta$  que forman las tangentes a la elástica en dos puntos de abscisas  $x_A$  y  $x_B$ , se obtendrá integrando (10.12), es decir:

$$\theta_{AB} = \int_A^B d\theta = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_z}{EI_z} dx \quad (10.13)$$

expresión del denominado **Primer Teorema de Mohr**.

Si, como suele ocurrir frecuentemente, la rigidez a flexión de la viga es constante, esta ecuación se puede poner en la forma:

$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI_z} \int_{x_A}^{x_B} M_z dx \quad (10.14)$$

y operar directamente con el diagrama de momentos flectores. En este caso la expresión admite una sencilla interpretación y el Primer Teorema de Mohr se puede enunciar así: *el ángulo  $\theta$  formado por las tangentes trazadas en dos puntos de la línea elástica de una viga de rigidez a flexión constante es igual al área del diagrama de momentos flectores interceptada por las verticales trazadas por aquellos puntos, dividida por la rigidez a flexión  $EI_z$ .*

Obsérvese que este teorema proporciona una variación angular (o de la pendiente) entre dos secciones de la viga y no el valor de la pendiente en una sección concreta. Para determinar esto último será preciso conocer el valor de la pendiente en algún punto de la elástica.

Volviendo a la fig. 10.4, las tangentes a la elástica en los puntos  $M$  y  $N$  delimitan un segmento de longitud  $d\delta$  sobre la vertical trazada por el punto  $A$ , de forma que:

$$d\delta = (x - x_A) d\theta = (x - x_A) \frac{M_z}{EI_z} dx \quad (10.15)$$

es decir, la longitud del segmento delimitado por las tangentes en dos puntos infinitamente próximos de la elástica, sobre la vertical trazada por una sección  $A$ , es igual al momento estático respecto de  $A$  del área  $M_z/EI_z$  comprendida entre dichos puntos.

Al integrar la ecuación (10.15) entre A y B, la intersección de las sucesivas tangentes de la elástica sobre la vertical por A recorre el segmento AA', de forma que:

$$\delta_{AB} = \int_A^B d\delta = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_z}{EI_z} (x - x_A) dx = \overline{AA'} \quad (10.16)$$

que es la formulación del llamado **Segundo Teorema de Mohr**.

De nuevo si la rigidez a flexión de la viga es constante la expresión anterior se simplifica y queda en la forma:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{EI_z} \int_{x_A}^{x_B} M_z (x - x_A) dx \quad (10.17)$$

lo que permite de nuevo operar directamente con el diagrama de momentos flectores, y cuya interpretación es la siguiente: *trazada la vertical por un punto de la elástica de abscisas  $x_A$ , el segmento delimitado sobre la misma por ese punto y el de su intersección con la tangente trazada a la elástica por otro punto de abscisa  $x_B$ , es igual al momento estático del área del diagrama de momentos flectores comprendido entre las verticales de abscisas  $x_A$  y  $x_B$ , respecto de esa vertical.*

Téngase en cuenta el significado de la notación subindicial: el primer subíndice indica la sección por la que se traza la vertical y el segundo la sección desde la que se traza la tangente. Los momentos se toman respecto de la vertical (primer subíndice). Por esta razón,  $\delta_{AB}$  es diferente, en general, de  $\delta_{BA}$ . Este último sería el tramo de la vertical trazada por B entre el punto B de la elástica y el corte de la tangente desde A. Evidentemente, no tiene por qué coincidir con el valor  $\delta_{AB}$ , como fácilmente se puede deducir de la propia fig. 10.4.

En cuanto a la aplicación de estos dos teoremas, deben tenerse en cuenta lo siguiente:

- *Proporcionan valores relativos:* ángulo entre dos tangentes y distancia (en dirección perpendicular al eje de la pieza en su configuración indeformada) de un punto de la elástica a la tangente en otro. Se pueden obtener con relativa facilidad

valores absolutos si se conoce la posición de la tangente a la elástica en una sección concreta.

- No pueden aplicarse estos teoremas entre dos puntos de la elástica si entre ambos hay una rótula intermedia, puesto que no habría continuidad en la tangente.

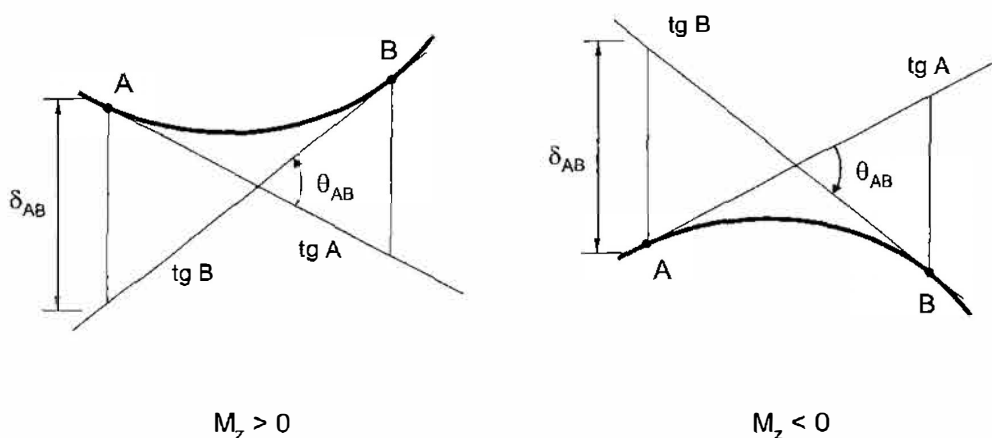


Figura 10.5. Teoremas de Mohr: criterio de signos

- Al operar con el diagrama de momentos cada parte del diagrama debe ir afectado con su signo correspondiente. Si al realizar la operación correspondiente a cada teorema entre dos puntos A y B el valor obtenido para  $\theta_{AB}$  es positivo, significa que la tangente en B está girada respecto de la tangente en A en sentido antihorario. Y si el valor obtenido para  $\delta_{AB}$  es positivo, significa que el punto A está por encima de la tangente en B. Las proposiciones contrarias son también ciertas (fig. 10.5).

A continuación se resuelven algunos ejemplos de aplicación de los dos teoremas a casos sencillos de flexión simple en vigas.

**Ejemplo 1.** Para la viga en voladizo AB de la fig. 10.6, de longitud L y rigidez a flexión  $EI_z$ , sometida a una carga vertical P en su extremo libre, calcular la flecha y la pendiente en B.

El punto de partida es el diagrama de momentos flectores, diagrama de forma triangular representado en la misma figura, del que se conoce la posición del centro de gravedad G.



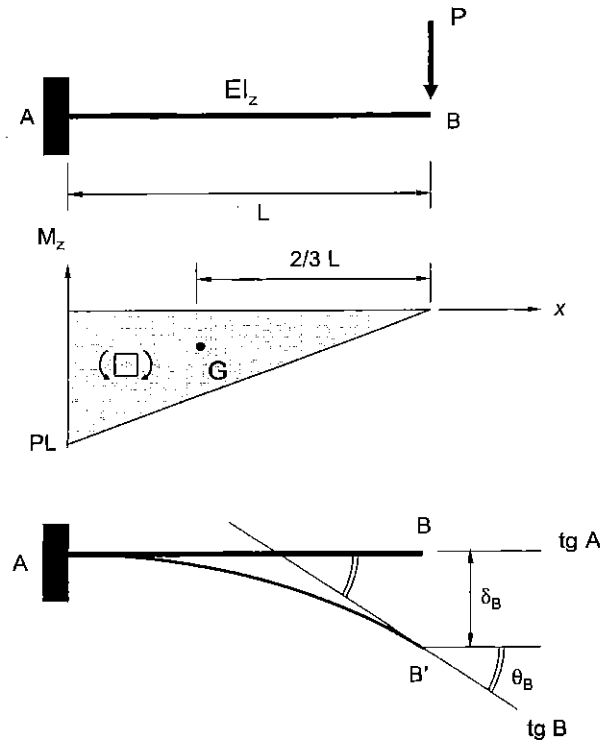


Figura 10.6. Viga en voladizo

En este caso se conoce, además, la tangente en una sección determinada de la elástica, concretamente, en la sección de empotramiento A. Como este enlace se caracteriza por impedir totalmente el giro, la tangente no varía y coincide con el eje de la viga en la configuración indeformada.

Aplicando el primer teorema de Mohr entre A y otra sección cualquiera de la viga, se puede hallar el valor de la pendiente en esta sección, y mediante la aplicación del segundo teorema de Mohr se podrá obtener el valor de la flecha en esa sección elegida.

Particularizando para el extremo B, resulta:

$$\begin{aligned} \theta_B = \theta_{BA} &= \frac{1}{EI_z} \left( -\frac{1}{2} PL \cdot L \right) = -\frac{PL^2}{2EI_z} \\ \delta_B = \delta_{BA} &= \frac{1}{EI_z} \left( -\frac{1}{2} PL \cdot L \cdot \frac{2}{3} L \right) = -\frac{PL^3}{3EI_z} \end{aligned} \tag{10.18}$$

donde los signos negativos dentro de los paréntesis proceden de que el área del diagrama de momentos flectores entre los puntos considerados es negativo. Por tanto, la tangente en  $B$  está girada en sentido horario respecto de la tangente trazada en  $A$ , y además el punto  $B$  queda por debajo de la tangente en  $A$ .

En bastantes ocasiones el sentido de los giros o de las flechas será obvio (por ejemplo, lo es en este caso de la viga en voladizo), por lo que la única incógnita será su valor absoluto. Para estos casos, con el fin de ganar en agilidad en la aplicación de los teoremas de Mohr y siempre que no haya lugar a dudas, se prescindirá del signo en la formulación.

**Ejemplo 2.** Para la viga simplemente apoyada  $AB$  de la fig. 10.7, de longitud  $L$  y rigidez a flexión  $EI_z$ , sometida a una carga puntual  $P$  en la sección central  $C$ , calcular los giros en los apoyos y la flecha en  $C$ .

En la figura se representa el diagrama de momentos flectores que, como siempre, es el punto de partida. Asimismo se dibuja la elástica  $AC'B$ , que es la única configuración posible compatible con el diagrama de momentos y los apoyos  $A$  y  $B$  de la viga. Por tanto, están totalmente claros los sentidos de los giros en los apoyos y el de la flecha en  $C$ .

Además, en este caso también se conoce una tangente que puede servir de referencia, pues por la simetría del problema la tangente a la elástica en la sección central  $C$  tiene que ser horizontal. Este hecho será de gran utilidad para determinar la pendiente y la flecha en otra sección cualquiera de la viga. En particular, el giro en  $B$  será:

$$\theta_B = \theta_{BC} = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{1}{2} \frac{PL}{4} \frac{L}{2} \right) = \frac{PL^2}{16EI_z} \quad (10.19)$$

y en sentido antihorario. El giro en  $A$  será, por la simetría, igual y de sentido contrario.

La flecha en  $C$ , que será la máxima de la elástica, se puede determinar aplicando el segundo teorema de Mohr entre las secciones  $C$  y  $B$ :

$$\delta_C = \delta_{BC} = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{1}{2} \frac{PL}{4} \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{3} \right) = \frac{PL^3}{48EI_z} \quad (10.20)$$

Evidentemente, el sentido es descendente.

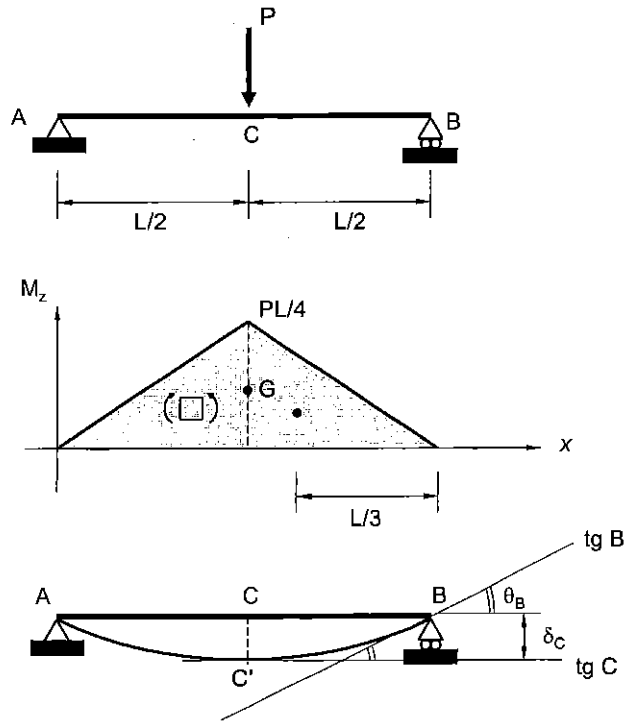


Figura 10.7. Viga simplemente apoyada con carga puntual en el centro

**Ejemplo 3.** Para la viga simplemente apoyada de la fig. 10.8, de rigidez a flexión  $EI_z$ , sometida a una carga puntual  $P$  aplicada en el extremo  $C$  del tramo en voladizo, calcular el valor del giro y la flecha en dicha sección  $C$ .

En la figura se indican el diagrama de momentos y un dibujo aproximado de la deformada: los sentidos del giro y la flecha en  $C$  están perfectamente definidos. Para su cálculo será preciso conocer el valor de la pendiente en  $B$ , para lo que se puede recurrir al tramo  $AB$  de la viga.

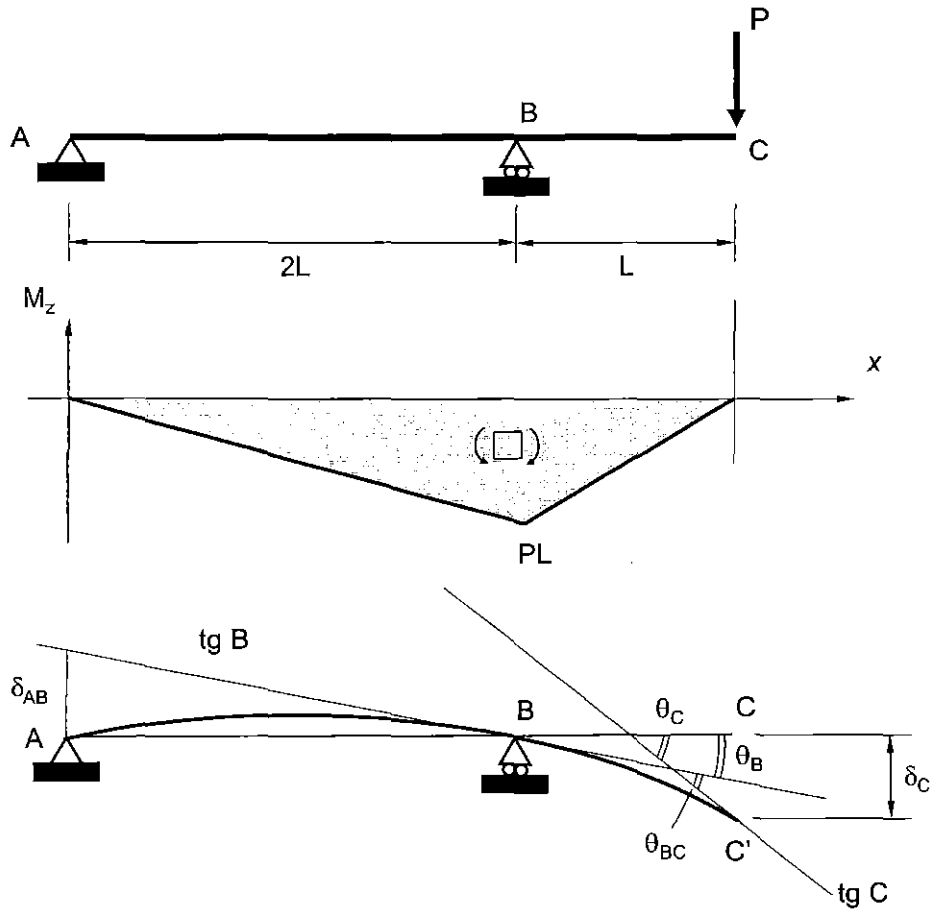


Figura 10.8. Viga simplemente apoyada con carga puntual fuera de su vano

Aplicando ambos teoremas de Mohr se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{\delta_{AB}}{2L} = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{1}{2} PL \cdot 2L \cdot \frac{2}{3} 2L \right) \cdot \frac{1}{2L} = \frac{2PL^2}{3EI_z} \\ \theta_C &= \theta_B + \theta_{BC} = \frac{2PL^2}{3EI_z} + \frac{1}{EI_z} \left( \frac{1}{2} PL \cdot L \right) = \frac{7PL^2}{6EI_z} \\ \delta_C &= \theta_B \cdot L + \delta_{CB} = \frac{2PL^3}{3EI_z} + \frac{1}{EI_z} \left( \frac{1}{2} PL \cdot L \cdot \frac{2}{3} L \right) = \frac{PL^3}{EI_z} \end{aligned} \quad (10.21)$$

#### 10.4. INFLUENCIA DEL ESFUERZO CORTANTE EN LA DEFORMACIÓN

En los desarrollos anteriores implícitamente se ha supuesto que las deformaciones transversales de la viga se producen únicamente por acción de los momentos flectores en cada sección. No se ha considerado el hecho de que los esfuerzos cortantes originan una distorsión del elemento, que da lugar a una flecha adicional.

Y así, para el caso de una viga de sección recta rectangular, los esfuerzos cortantes hacen que un elemento de longitud  $dx$  se deforme como se indica en la fig. 10.9.

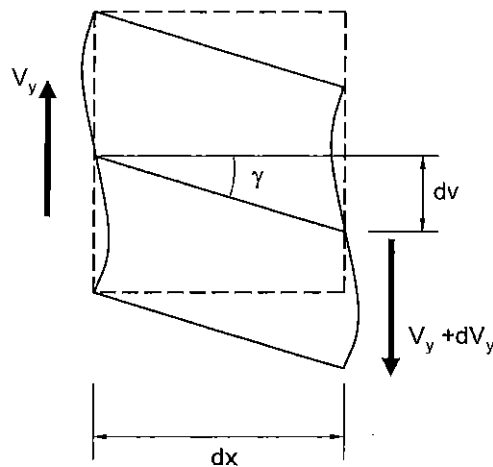


Figura 10.9. Deformación debida al cortante en una sección rectangular

Recuérdese que como las tensiones cortantes varían a lo largo del canto de la barra, la distorsión angular también es variable en el canto. En consecuencia, las secciones planas no se mantienen planas tras la deformación, sino que experimentan un cierto alabeo (cfr. fig. 9.15).

Las flechas debidas al cortante son, por lo general, muy pequeñas comparadas con las de flexión. Sin embargo, en casos tales como piezas con una elevada relación canto/longitud y sometidas a grandes esfuerzos cortantes, es preciso considerarlas.

Supóngase una pieza prismática recta, simétrica, con ejes principales  $y,z$ , cargada en el

plano  $xy$ . La tensión cortante en un punto cualquiera viene dada por la fórmula de Colignon (9.24), expresión que no es sino una aproximación obtenida a partir de consideraciones puramente estáticas y en el supuesto de que se cumple la hipótesis de Navier. La deformación angular correspondiente será:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{V_y Q_z}{GbI} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10.22)$$

Designando por  $v_f$  la deformación transversal debida a la flexión y aplicando la geometría de la elástica (cfr. fig. 9.7 y ec. (9.2)), se puede expresar:

$$u = y\theta = -y \frac{dv_f}{dx} \quad (10.23)$$

Sustituyendo en (10.22) resulta:

$$\frac{V_y Q_z}{GbI} = -y \frac{\partial^2 v_f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v_f}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10.24)$$

donde el primer término del segundo miembro representa el efecto del alabeo producido por el cortante. Se supondrá que este efecto es despreciable, es decir, que la sección permanece plana después de la deformación. Esta circunstancia obliga a considerar que la deformación transversal sea función exclusiva de  $x$ .

En (10.24), el primer miembro depende tanto de  $x$  como de  $y$ , lo cual no es coherente con la suposición de que las secciones permanecen planas. Para soslayar esta circunstancia, es práctica habitual sustituir  $\tau_{xy}$  por una distribución uniforme en la sección y considerar su variación con  $y$  introduciendo un factor de corrección  $\kappa$ . De esta forma, (10.24) se convierte en:

$$\frac{\kappa V_y}{AG} = - \frac{dv_f}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad (10.25)$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal de la viga. Obsérvese que  $V_y/A$  es la tensión cortante media y que  $V_y/AG$  es la deformación cortante media. Por consiguiente, el factor  $k$  es la constante por la que debe multiplicarse la deformación cortante media para obtener una deformación equivalente a la de la distribución de cortante variable.

Con la anterior definición, puede calcularse el valor de  $k$  para distintas secciones. Así, para secciones rectangulares,  $k$  es del orden de 1,2 y para secciones en doble  $T$ , toma valores próximos a la unidad.

La ecuación (10.25) también puede escribirse como:

$$\frac{\kappa V_y}{AG} = \frac{dv_c}{dx} = -\theta_c = \gamma_c \quad (10.26)$$

donde  $v_c$  ( $=v-v_f$ ) y  $\theta_c$  son respectivamente la deformación transversal y el giro debidos al cortante.

Si se deriva en (10.25), resulta:

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{d^2v_f}{dx^2} = \frac{\kappa}{AG} \frac{dV_y}{dx} \quad (10.27)$$

y, teniendo en cuenta (7.3) y (7.4), se obtiene:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\left( \frac{M_z}{EI} + \frac{\kappa q}{AG} \right) \quad (10.28)$$

donde el segundo sumando en el interior del paréntesis denota el efecto del cortante en la deformación transversal.

La doble integración de (10.28) proporciona la ecuación de la elástica resultante. Dicha integración se realiza por los métodos habituales, teniendo en cuenta las condiciones de contorno del problema. Por ejemplo, para la viga biapoyada de la fig. 10.10a, sometida a una distribución uniforme  $q = q_0$  constante, se aplicaría que  $v=0$  en  $x=0$  y  $x=L$ . Resulta:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \left( \frac{qx^2}{2} - \frac{qxL}{2} \right) \frac{1}{EI_z} - \frac{\kappa q_0}{AG}$$

$$v = \left( \frac{qx^4}{24} - \frac{qx^3L}{12} + \frac{qxL^3}{24} \right) \frac{1}{EI_z} + \frac{\kappa q_0}{AG} \left( \frac{Lx}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \quad (10.29)$$

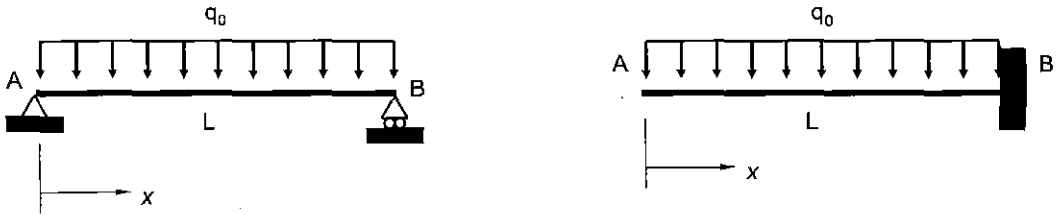


Figura 10.10. Efecto del cortante. Ejemplos

Si alguno de los apoyos es un empotramiento, la integración de (10.28) se realiza independientemente para  $v_f$  y  $v_c$ . Así, por ejemplo, para una viga en voladizo sometida a una distribución uniforme  $q = q_0$  constante (véase fig. 10.10b), resultaría:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q_0 x^2}{2EI_z} - \frac{\kappa q_0}{AG}$$

$$v = \frac{q_0}{24EI_z} (x^4 - 4L^3x + 3L^4) + \frac{\kappa q_0}{2AG} (L^2 - x^2) \quad (10.30)$$

donde se han aplicado las condiciones:  $v_f(L) = v_f'(L) = 0$  y  $v_c(L) = 0$ ,  $v_c'(L) = \kappa V_y(L)/AG = -\kappa q_0 L/AG$ , según (10.26). Obsérvese que por el efecto del cortante no puede garantizarse la pendiente nula en todas las fibras en la sección del empotramiento (existe alabeo).

La flecha en el extremo libre A en este segundo ejemplo, suponiendo una sección rectangular, sería:

$$\delta_A = v(0) = \frac{q_0 L^4}{8EI_z} \left[ 1 + \frac{4}{5} \left( \frac{h}{L} \right)^2 (1 + \nu) \right] = \frac{q_0 L^4}{8EI_z} + \frac{q_0 L^2 h^2 (1 + \nu)}{10EI_z} \quad (10.31)$$



donde el primer sumando se corresponde con el efecto de la flexión y el segundo indica la influencia del cortante. Incluso para una viga relativamente corta, de relación canto/longitud:  $h/L=1/5$ , la deformación debida al cortante contribuye muy poco: para  $\nu=0,25$ , resulta sólo un 4% del valor de la flecha por flexión de la viga. Por esta razón, se suele despreciar en los cálculos de deformaciones.

### **10.5. EFECTO DE UNA VARIACIÓN NO UNIFORME DE TEMPERATURA**

En una estructura isostática sometida a una variación uniforme de temperatura no se generan tensiones ni deformaciones transversales por flexión. Todos los elementos de que se compone la estructura experimentan la misma deformación longitudinal sin restricciones.

En cambio, cuando la variación no es uniforme, la situación es bien diferente. Las fibras longitudinales no sufrirán todas ellas el mismo alargamiento, sino que dependerá de su correspondiente incremento de temperatura.

En este apartado se estudiará este comportamiento, analizando un caso sencillo: el de una pieza prismática recta sometida a una variación lineal de temperatura a lo largo del canto de la viga (entre la cara superior y la inferior). De esta manera se podrá seguir manteniendo la hipótesis de Navier, evitando el alabeo de la sección.

Sea  $T_0$  la temperatura inicial uniforme de la viga y sean  $T_s$  y  $T_i$  las temperaturas finales en la cara superior e inferior, respectivamente. Como la variación supuesta es lineal, la temperatura a la mitad de la altura será:  $T_m=(T_s+T_i)/2$ .

El gradiente de temperatura originará una curvatura en la viga (consecuencia de la hipótesis de Navier). Para evaluar esta curvatura, considérese un elemento de longitud  $dx$ , y supóngase  $T_i > T_s$  (fig. 10.11).

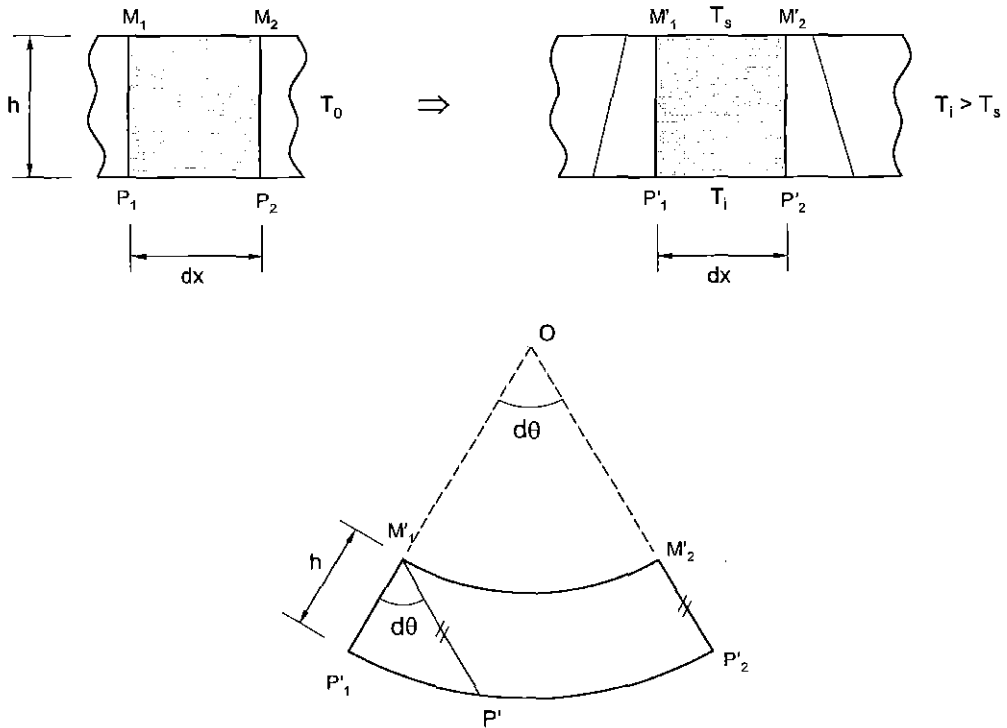


Figura 10.11. Elemento de viga sometido a una variación lineal de temperatura

De la construcción geométrica de la fig. 10.11, se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{M'_1M'_2} &= \alpha(T_s - T_0) dx \\ \overline{P'_1P'_2} &= \alpha(T_i - T_0) dx \\ \overline{P'_1P'} &= \overline{P'_1P'_2} - \overline{M'_1M'_2} = \alpha(T_i - T_s) dx = hd\theta \end{aligned} \quad (10.32)$$

de donde se deduce:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha(T_i - T_s)}{h} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_i - T_s)}{h} \quad (10.33)$$

ecuación que proporciona la curvatura de la viga. Obsérvese que el efecto (en cuanto a la deformación) de la variación lineal de temperatura es similar a la aplicación de un

momento de flexión pura de valor:

$$M_z^{eq} = \frac{\alpha EI_z (T_i - T_s)}{h} \quad (10.34)$$

que se deduce fácilmente comparando (10.33) con (10.4).

**Ejemplo.** Determinar la flecha y el giro en el extremo libre de la viga en voladizo de la fig. 10.12, sometida a una variación lineal de temperatura entre  $T_s$  y  $T_i$ , siendo  $T_i > T_s$ .

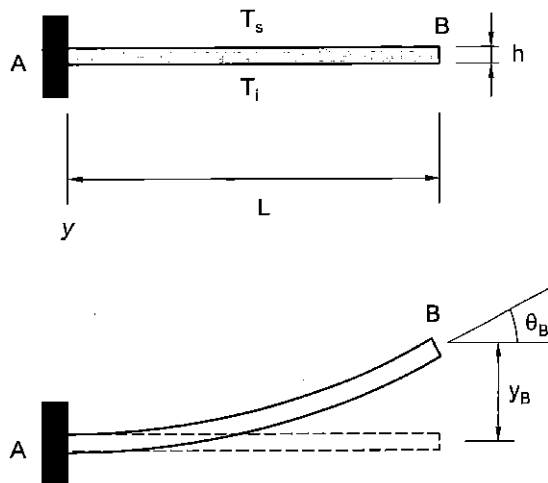


Figura 10.12. Viga en voladizo sometida a una variación lineal de temperaturas

Las condiciones de contorno a aplicar para la integración de (10.33) son las del empotramiento:  $y=0$ ,  $dy/dx=0$  en  $x=0$ . De esta forma, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\alpha(T_i - T_s)}{h} x \\ y &= -\frac{\alpha(T_i - T_s)}{2h} x^2 \end{aligned} \quad (10.35)$$

La flecha y el giro en la sección libre B serán por tanto:

$$\begin{aligned}y_B &= -\frac{\alpha(T_i - T_s)L^2}{2h} \\ \theta_B &= \frac{\alpha(T_i - T_s)L}{h}\end{aligned}\tag{10.36}$$

Los mismos resultados (sólo en cuanto a la deformación a flexión) se podían haber obtenido suponiendo la viga sometida al momento de flexión pura (10.34) y utilizando, por ejemplo, los teoremas de Mohr.

## 10.6. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Se han estudiado dos procedimientos clásicos que permiten obtener las deformaciones originadas en piezas prismáticas sometidas a carga transversal. Antes de dar por finalizado este tema, conviene hacer una referencia al **principio de superposición**, mencionado en el tema 4. Recuérdese que este principio es válido en el supuesto de que el material presente un comportamiento elástico lineal y que bajo la acción de las cargas aplicadas experimente pequeñas deformaciones.

El principio resulta muy útil para la obtención de deformaciones en piezas prismáticas. Obsérvese que *las ecuaciones diferenciales que gobiernan dichas deformaciones son lineales y, en consecuencia, pueden superponerse las soluciones para diversas condiciones de carga.*

La aplicación resulta particularmente ventajosa cuando estas condiciones de carga son complejas, pues entonces el problema puede considerarse como combinación de una serie de casos simples, ya resueltos y tabulados en los distintos manuales.

Como ejemplo ilustrativo, considérese el problema de determinación de la flecha en la sección central C de la viga simplemente apoyada de la fig. 10.13.

Se calcula la flecha total determinando independientemente la flecha producida por la carga de distribución triangular y la debida a los dos momentos extremos  $M_0$ , flechas a las

que se llamará  $\delta_{c1}$  y  $\delta_{c2}$ , respectivamente. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\delta_c &= \delta_{c1} + \delta_{c2} \\ \delta_{c1} &= \frac{q_0 L^4}{120EI_z} \\ \delta_{c2} &= \frac{M_0 L^2}{8EI_z}\end{aligned}\tag{10.37}$$

resultados que pueden ser extraídos de las tablas recogidas en manuales, o bien obtenidos rápidamente mediante alguno de los métodos desarrollados en este tema.

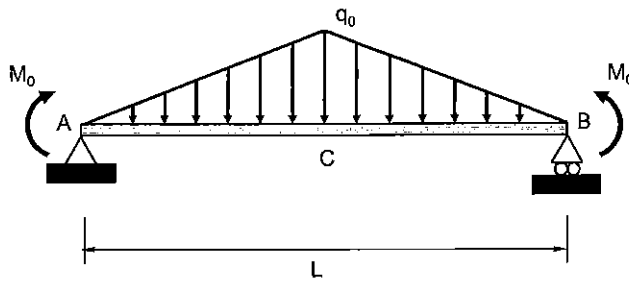
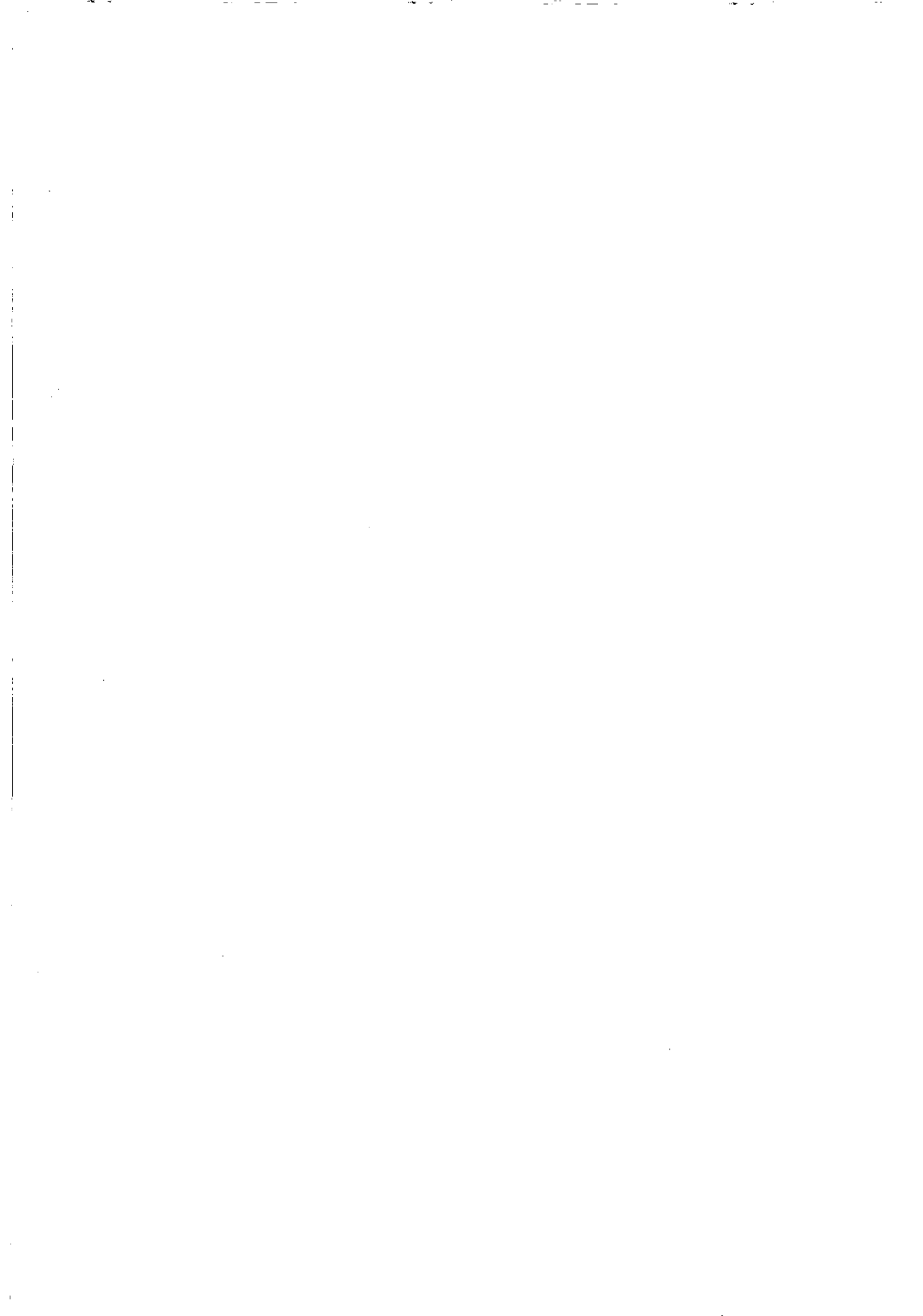


Figura 10.13. Ejemplo de aplicación del principio de superposición

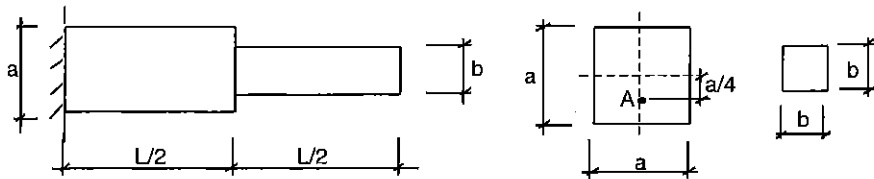


## PROBLEMAS

**10.1.** Para el voladizo de sección variable de la figura, sometido a su propio peso:

- 1º) Calcular el giro y la flecha en el extremo libre.
- 2º) Dibujar el diagrama de los círculos de Mohr en el punto A de la sección de empotramiento.

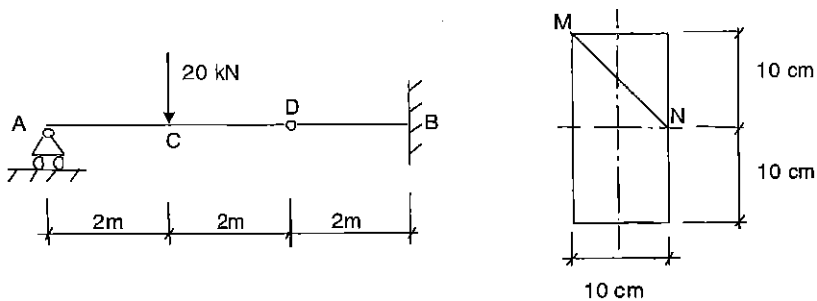
Datos:  $a = 12 \text{ cm}$      $b = 8 \text{ cm}$      $L = 600 \text{ cm}$      $\gamma = 80 \text{ kN/m}^3$      $E = 200 \text{ GPa}$



**10.2.** Para la viga de la figura, se pide:

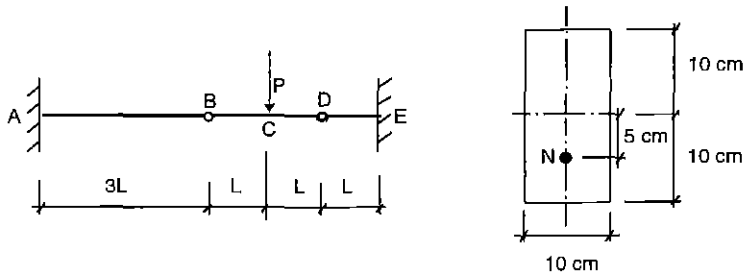
- 1º) Determinar las reacciones, representar el diagrama de momentos flectores y dibujar en forma aproximada la deformada.
- 2º) Valor de la flecha y pendiente en la sección C.
- 3º) Esfuerzo de desgarramiento en el plano MN correspondiente al tramo AC de la viga.

Módulo de elasticidad longitudinal:  $E = 200 \text{ GPa}$ .

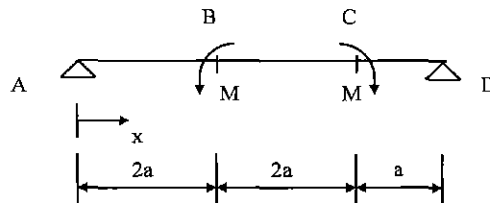


**10.3.** En la viga de la figura, de rigidez a flexión constante  $EI$ , determinar:

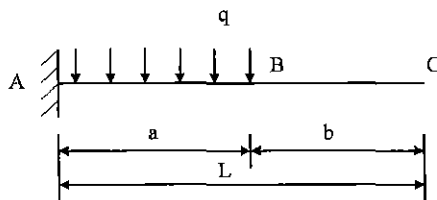
- 1º) Diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes.
- 2º) Flecha en la sección de aplicación de la carga.
- 3º) Dibujo aproximado de la deformada.
- 4º) Para valores  $P = 40 \text{ kN}$ ,  $L = 2 \text{ m}$  y viga de sección recta rectangular de dimensiones las indicadas en la figura, dibujar el diagrama de los círculos de Mohr en el punto N de la sección de máximo momento flector, calculando los valores de las tensiones principales en ese punto.



**10.4.** En la viga de la figura, determinar la flecha máxima e indicar en qué sección se produce. Sólo se tendrá en cuenta el efecto de flexión sobre la deformación.



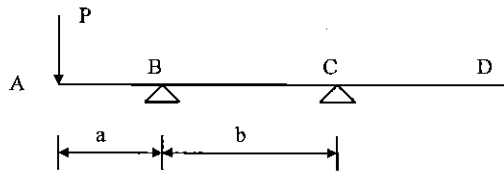
**10.5.** Calcular la flecha en el extremo C en la viga empotrada de la figura.



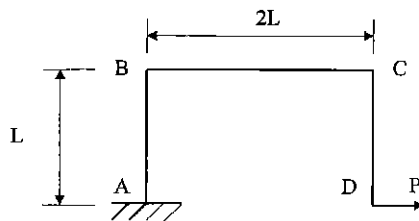


**10.6.** Determinar en la viga de la figura:

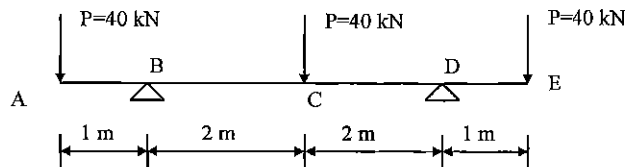
- a) los giros en las secciones de los apoyos B y C,
- b) el giro y la flecha en el extremo A.



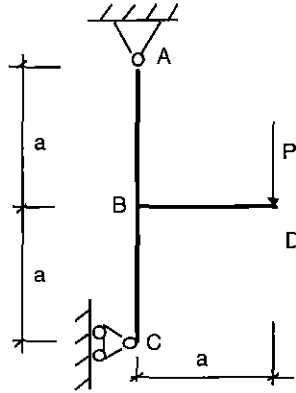
**10.7.** La barra elástica de la figura se encuentra empotrada en el extremo A y sometida en el extremo libre D a una carga horizontal P. La rigidez a flexión de la barra es EI constante. Hallar el giro en los nudos B, C y D, así como el desplazamiento en la sección D. Se despreciará el efecto producido por el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante en la deformación.



**10.8.** Dimensionar la viga de la figura para un perfil IPN, sabiendo que la tensión admisible es  $\sigma_{adm} = 100 \text{ MPa}$  y el módulo de elasticidad  $E = 200 \text{ GPa}$ . Una vez determinado el perfil, calcular la deformación en el punto medio del vano y en los extremos de los voladizos.



**10.9.** Calcular el desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga  $P$ , considerando únicamente los efectos de flexión y esfuerzo normal. La sección recta de todas las barras es  $A$  y la rigidez a flexión  $EI$ .

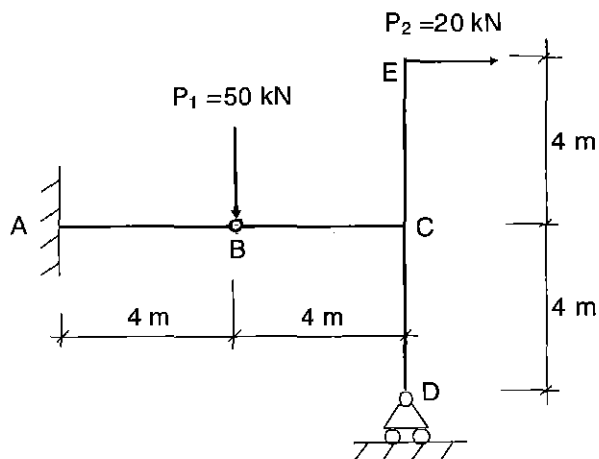


**10.10.** La estructura de la figura está sustentada en un apoyo perfectamente empotrado en A, y en uno articulado D que permite deslizamiento en el plano horizontal. Se pide:

- 1º) Diagramas de solicitaciones.
- 2º) Desplazamiento horizontal del punto E.

Se tendrán en cuenta únicamente los efectos de flexión.

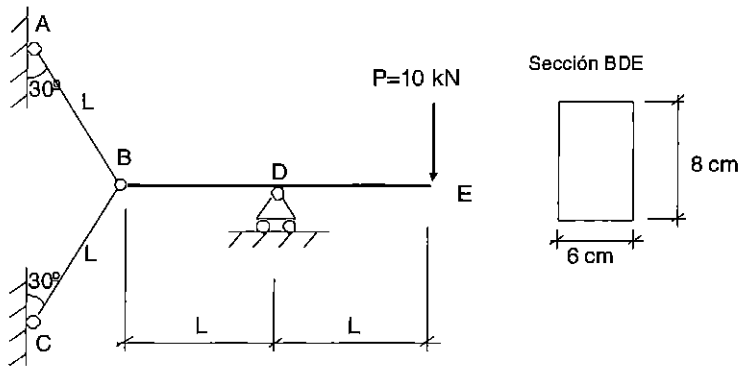
Características del material:  $E = 200 \text{ GPa}$  ;  $I = 25.000 \text{ cm}^4$ .



**10.11.** En la estructura de la figura, AB y BC son dos tirantes de igual longitud y sección, de valores respectivos  $L = 1\text{ m}$  y  $A_t = 20\text{ mm}^2$ , y del mismo material, de módulo de elasticidad  $E_t = 75\text{ GPa}$ . Ambos están articulados en B a la barra BDE de sección rectangular  $6 \times 8\text{ cm}^2$  y módulo de elasticidad  $E_b = 200\text{ GPa}$ . Dicha barra se encuentra apoyada en D y recibe en su extremo E una carga vertical de  $10\text{ kN}$ , tal como se indica en la figura. Calcular:

- 1º) Tensión normal máxima en tirantes y barra, y tensión cortante máxima en la barra.
- 2º) Flechas en B y en E, y giro en D.
- 3º) Dibujar los diagramas de esfuerzos normales, cortantes y momentos flectores, así como la deformada.

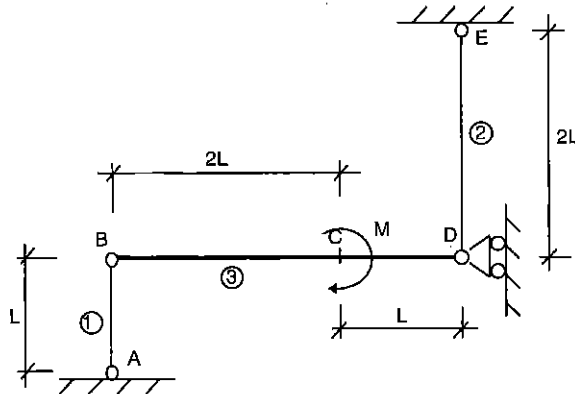
Se despreciarán únicamente las deformaciones debidas al esfuerzo cortante.



**10.12.** En la estructura de la figura, las barras AB y DE están articuladas en ambos extremos siendo  $E_1$  y  $E_2$  sus módulos de elasticidad longitudinal y  $A_1$  y  $A_2$  las áreas de la sección recta de cada barra. La barra BCD articulada en sus dos extremos B y D tiene por módulo de elasticidad  $E_3$  y el momento de inercia a flexión es  $I_3$ . Además se impide la traslación horizontal del extremo D por medio del apoyo de rodillos representado. En el punto C se aplica un momento exterior que provoca la flexión de la barra BCD.

Obtener la traslación vertical del punto C, despreciando únicamente las deformaciones originadas por el esfuerzo cortante.

Datos:  $L = 1\text{ m}$   $E_1 = E_2 = 10\text{ GPa}$   $E_3 = 100\text{ GPa}$   
 $M = 9000\text{ m x N}$   $A_1 = A_2 = 10\text{ mm}^2$   $I_3 = 200\text{ cm}^4$



**10.13.** La estructura de la figura está formada por una viga ABCD, apoyada en A y B en sentidos resortes elásticos de constantes respectivas  $k_A$  y  $k_B$ , y sustentada en D por el tirante articulado DF. En C hay una rótula intermedia. La sección de la viga es un perfil IPN-180, cuyas dimensiones en mm están indicadas en la figura. A efectos de cálculo puede aproximarse  $I_z$  por  $1.460 \text{ cm}^4$ . El material de la viga y del tirante es un acero de módulo de elasticidad  $E$  y tensión de fluencia  $\sigma_f$ .

El conjunto soporta una carga concentrada  $P$  aplicada en la rótula C, y una carga uniformemente distribuida  $q$  en el tramo CD, tal como se indica. Determinar:

1º) Diagrama de los círculos de Mohr, debidamente acotado, para el punto M correspondiente a la sección más desfavorable del tramo ABC de la viga. Para este punto, determinar el coeficiente de seguridad con el que trabaja según el criterio de Von-Mises.

2º) Flecha en C y pendiente en B.

Para el cálculo de las deformaciones se considerarán únicamente los efectos de flexión.

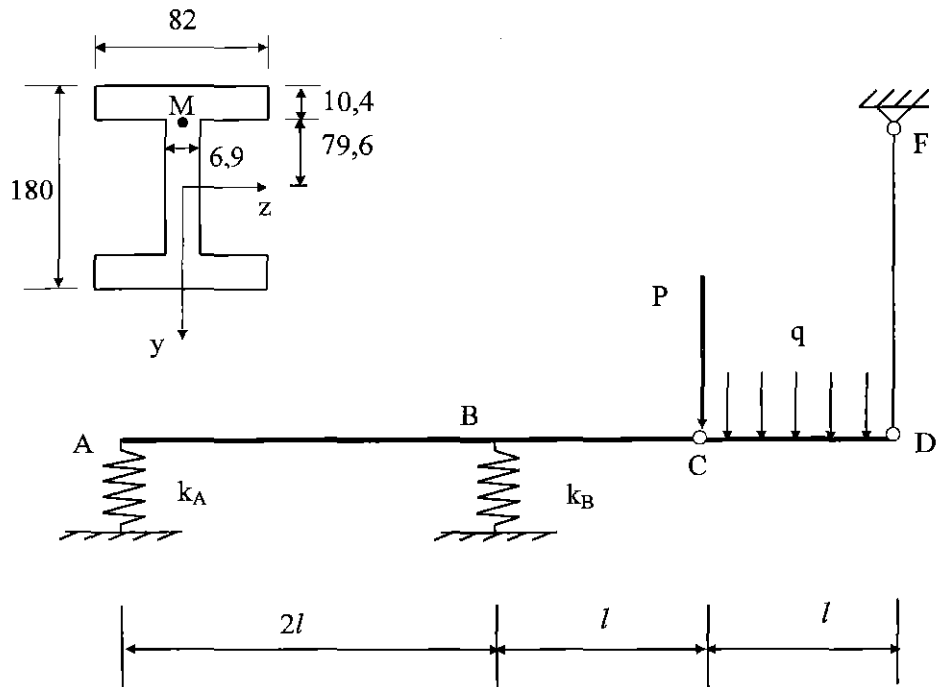
Datos:

$P=15 \text{ kN}$   
 $\sigma_f=240 \text{ MPa}$

$q=40 \text{ kN/m}$   
 $k_A=1.250 \text{ kN/m}$

$l=1 \text{ m}$   
 $k_B=2.100 \text{ kN/m}$

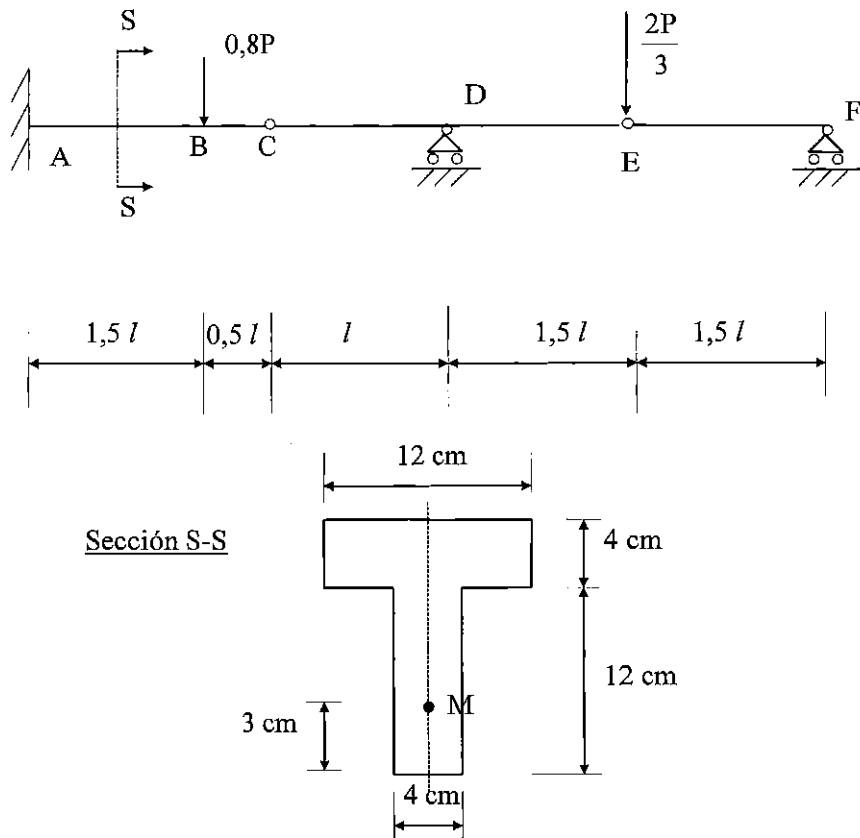
$E=200 \text{ GPa}$



**10.14.** En la viga de sección constante de la figura, A es un empotramiento perfecto, D y F articulaciones deslizantes, y C y E dos rótulas intermedias. Las dimensiones de su sección S-S son las indicadas, y está hecha de un material equirresistente de módulo de elasticidad lineal  $E = 200 \text{ GPa}$  y tensión de fluencia  $\sigma_f = 300 \text{ MPa}$ . Se decide trabajar con un coeficiente de seguridad  $n=1,2$ . Está sometida a las cargas verticales  $0,8P$  y  $2P/3$ , que actúan en las secciones B y E, respectivamente. Calcular:

- 1º) Diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores (acotados en función de  $P$  y  $l$ ), así como dibujo aproximado de la deformada.
- 2º) Para  $l = 1 \text{ m}$ , valor máximo de  $P$  que es capaz de soportar la viga.
- 3º) Para unos valores de  $P = 50 \text{ kN}$  y  $l = 1 \text{ m}$ , dibujar el diagrama de los círculos de Mohr en el punto M correspondiente a la sección D (del tramo CD). Calcular las tensiones principales en ese punto.
- 4º) Para esos mismos valores de  $P$  y  $l$ , obtener las flechas en las dos rótulas.

Para los apartados 2) y 4) se despreciará el efecto del esfuerzo cortante.



**10.15.** El nuevo Citroen Picasso presenta una tableta en los asientos posteriores, similar a la utilizada en aviones comerciales (véase fig. 1). Dicha tableta se puede simplificar por el sistema representado en la fig. 2, donde CE es la tableta, el soporte rayado se considera infinitamente rígido, A es una articulación fija y en D la tableta está simplemente apoyada. En B se supone un apoyo elástico simulado por un muelle de constante  $K=100 \text{ kN/m}$ . La tableta CE presenta una sección de  $15 \times 0,5 \text{ cm}^2$ , según muestra la fig. 3. Y sus características materiales son:  $E=50 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_r= 100 \text{ MPa}$ . Se pide:

- 1º) Reacciones en los apoyos A, B, C y D, en función de P.
- 2º) Descenso de E, si se aplica una carga  $P=100 \text{ N}$ .
- 3º) Diagramas de esfuerzos y máxima tensión en la tableta CE, para  $P=100 \text{ N}$ .

Nota: No se tendrá en cuenta el efecto del cortante en el cálculo de tensiones y deformaciones. Se supondrán válidas las hipótesis habituales de cálculo de piezas prismáticas para CE.

Figura 1

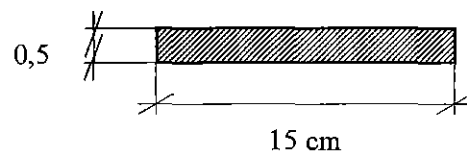


Figura 3

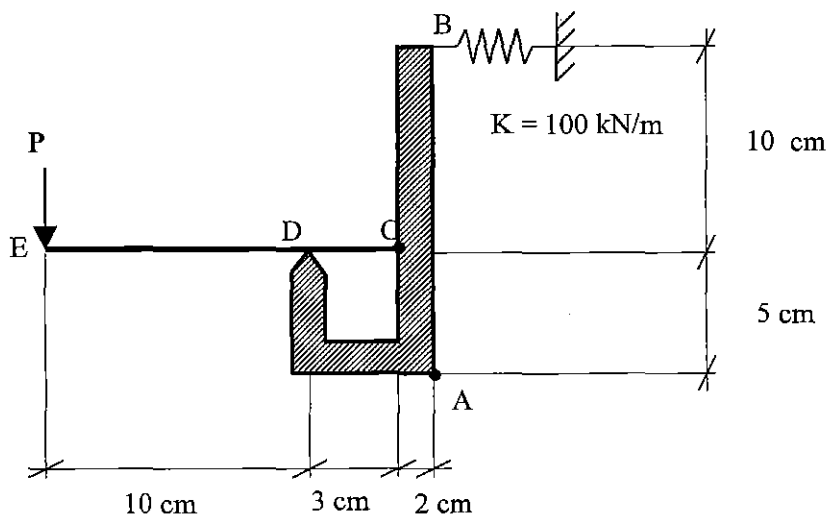
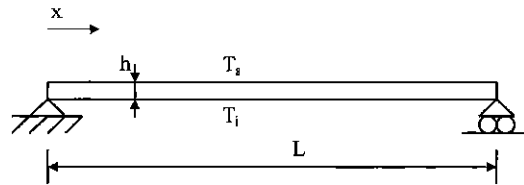
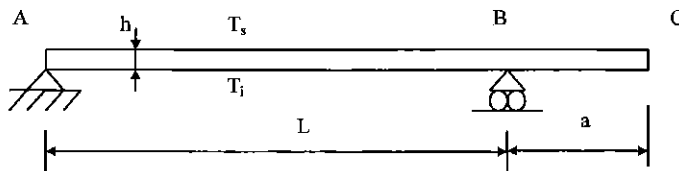


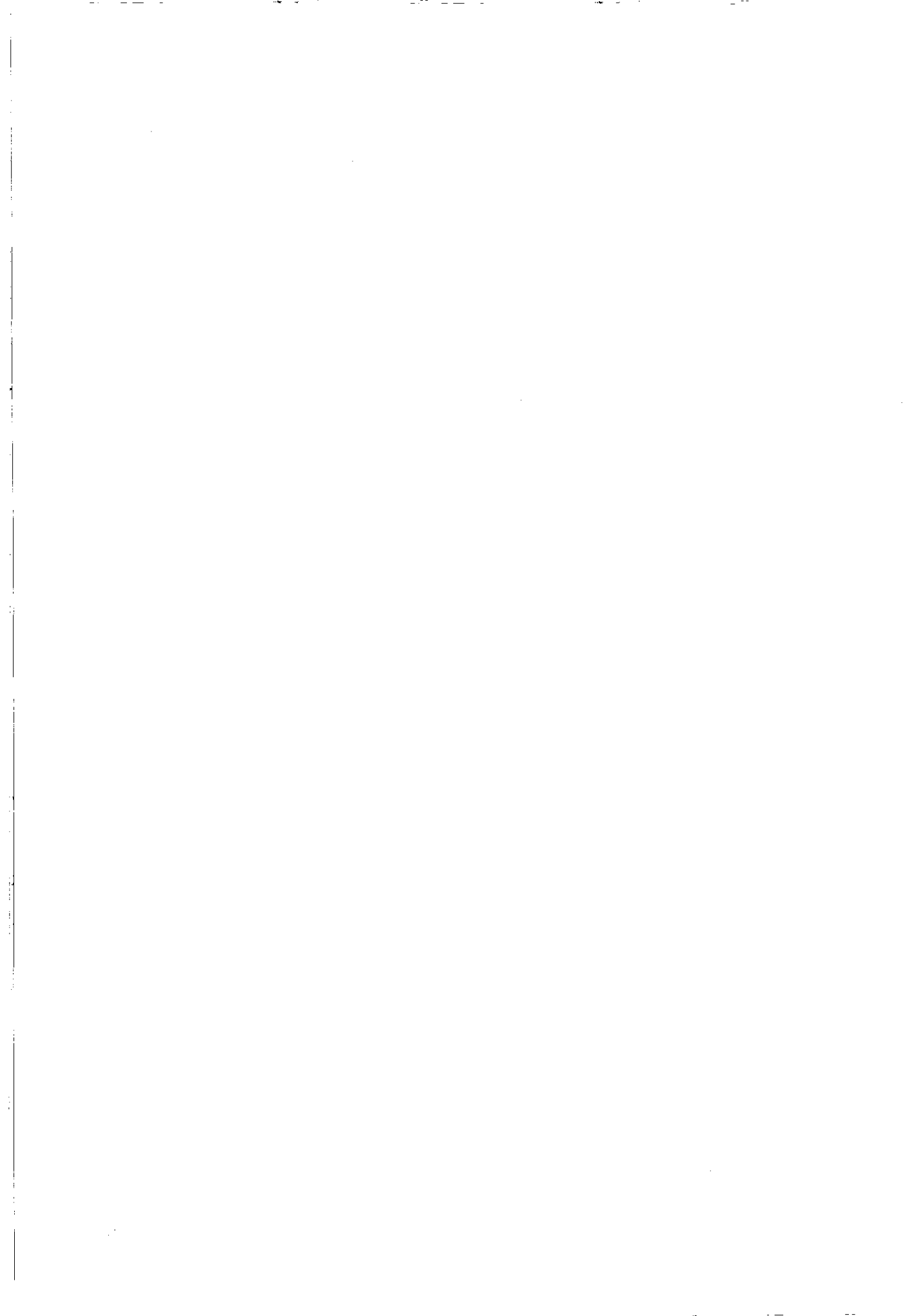
Figura 2

**10.16.** Una viga de longitud  $L$  y altura  $h$  se calienta de forma no uniforme de modo que  $T_s - T_i = T_0 x$ , donde  $T_s$ ,  $T_i$  representan las temperaturas en la fibra superior e inferior de la viga, respectivamente,  $T_0$  es una constante y  $x$  es la longitud a lo largo de la viga. Determinar la flecha máxima.



**10.17.** Una viga de altura  $h$ , con un voladizo  $BC$ , se calienta de forma que la fibra superior se encuentra a una temperatura  $T_s$  y la inferior a  $T_i$ , siendo  $T_i > T_s$ . Determinar el desplazamiento en la sección  $C$ .





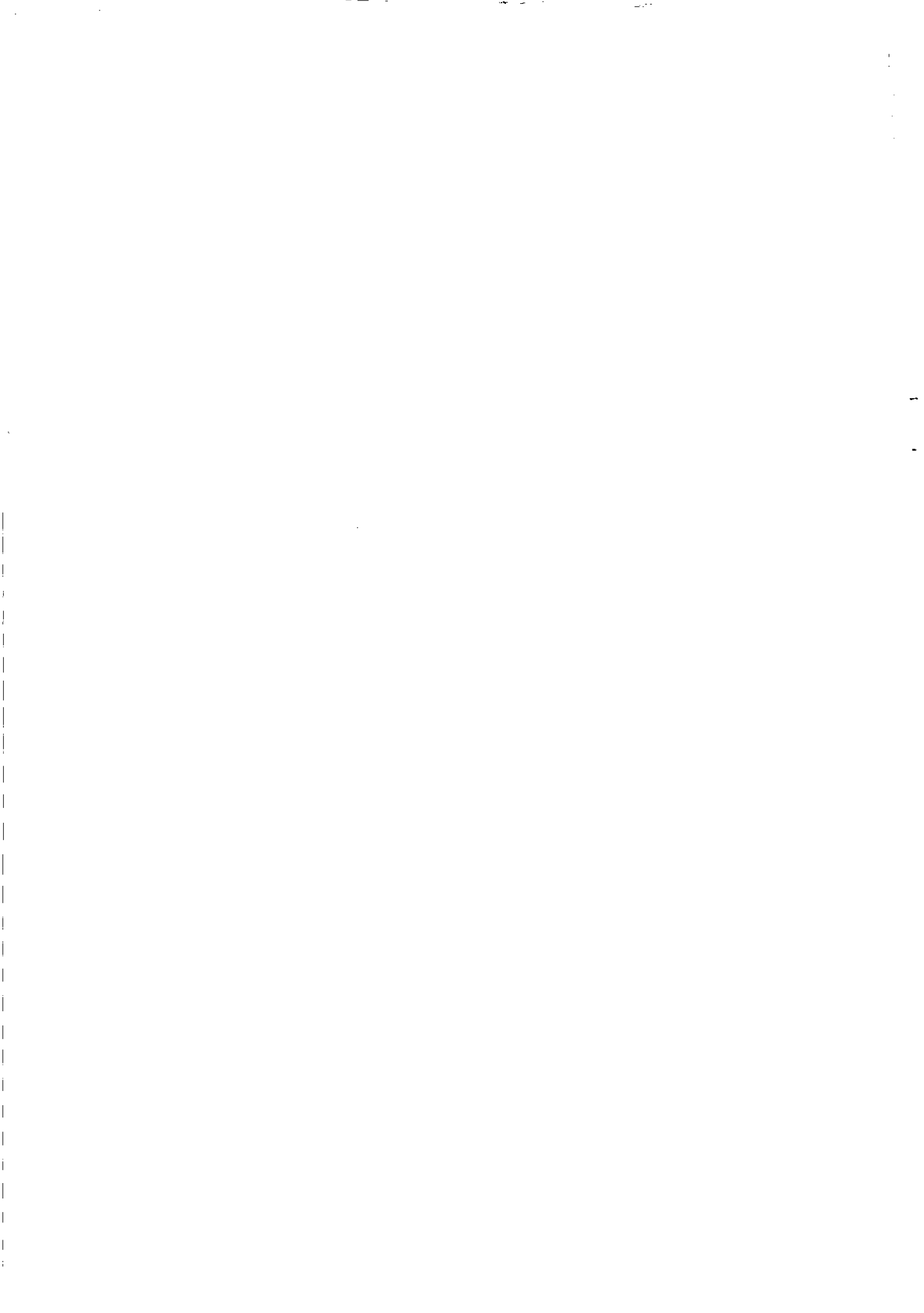


# **TEMA 11**

---

## **RECIPIENTES DE PRESIÓN DE PARED DELGADA**

---



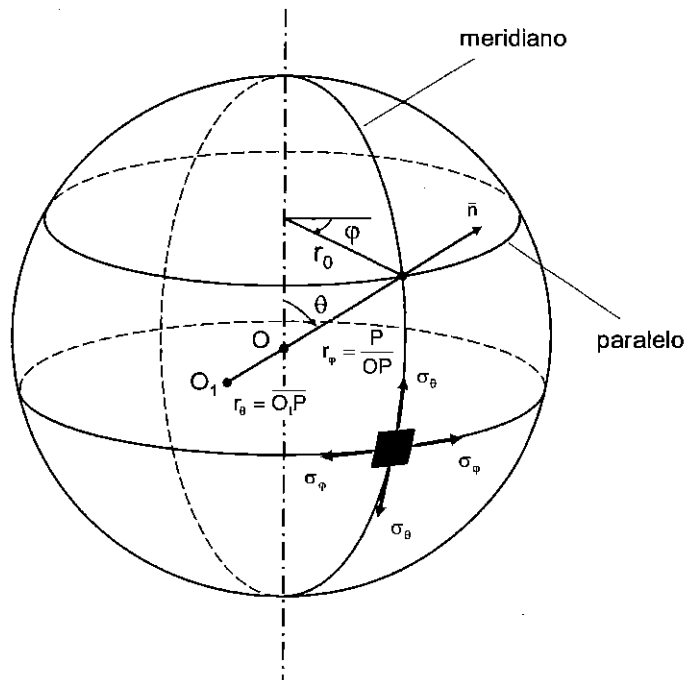


Figura 11.2. Geometría de una lámina

Por analogía con la denominación utilizada para el globo terrestre, se llaman **planos meridianos** los que contienen al eje de la lámina, y **planos paralelos** los perpendiculares a dicho eje.

Para un punto cualquiera  $P$  de la superficie media se definen:  $r_\theta$ , *radio de curvatura del meridiano que pasa por  $P$* ;  $r_\phi$ , *longitud de la normal a la superficie media desde  $P$  al eje de la lámina*, y  $r_o$ , *radio de curvatura del paralelo que pasa por  $P$* .

La posición del punto  $P$  viene expresada en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , siendo  $\theta$  el ángulo entre el eje de la lámina y la normal a la misma en  $P$ , y  $\phi$  el ángulo entre el radio  $r_o$  correspondiente a  $P$  y una dirección de referencia, que habrá que elegir en cada caso.

De la fig. 11.2 se deduce la relación existente entre  $r_o$  y  $r_\phi$ :

$$r_o = r_\phi \text{sen} \theta \quad (11.1)$$

### 11.1. INTRODUCCIÓN

En el tema introductorio de la asignatura se definían las láminas como unos elementos estructurales, no planos, que geoméricamente se caracterizan porque una de sus dimensiones, el espesor, es pequeña comparada con las otras dos.

En los últimos decenios, este tipo de elementos se han utilizado cada vez con más frecuencia en estructuras superficiales, gracias al aprovechamiento del material tan favorable que permiten. Entre sus múltiples aplicaciones pueden citarse los recipientes a presión, los depósitos de líquidos, las calderas de vapor, las grandes tuberías, las cúpulas de techos y, más recientemente, las aplicaciones aeronáuticas, como las alas de avión, los cuerpos de cohete, etc.

Así como en las piezas prismáticas el punto de partida para definir su configuración geométrica era el eje, en las láminas el punto de partida es la *superficie media* (fig. 11.1), entendiéndose por tal la que divide en cada punto el espesor  $t$  de la lámina en dos partes iguales. Se mide dicho espesor perpendicularmente a la superficie media.

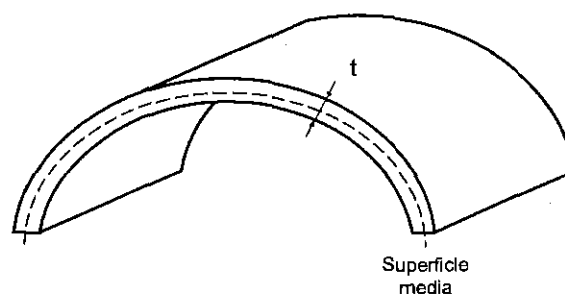


Figura 11.1. Lámina

El estudio de las láminas que se presenta en este tema se restringirá a un caso muy concreto: el de **recipientes de presión**, cuya configuración geométrica generalmente se corresponde con las denominadas **láminas de revolución**. En éstas, la superficie media se genera por rotación de una curva plana, llamada meridiano, en torno a un eje situado en el plano de la curva (fig. 11.2). La carga es también simétrica respecto al eje (*axisimetría*). Casos típicos de este tipo de geometría son los recipientes cilíndricos y esféricos.

En el análisis se supondrá que el espesor  $t$  es pequeño comparado con los radios de curvatura definidos (**láminas de pared delgada**) y que la deformación experimentada por la lámina por efecto de una presión uniformemente repartida  $p$  es uniforme. En estas condiciones puede admitirse que las únicas tensiones que aparecen en el espesor de la pared son unas tensiones de tracción ( $\sigma_\varphi, \sigma_\theta$ ) uniformemente distribuidas en dicho espesor y tangentes a la superficie media (cfr. fig. 11.2).

En cuanto a las tensiones tangenciales,  $\tau_{r\theta}$  y  $\tau_{r\varphi}$  son despreciables por ser delgado el espesor del recipiente y anularse dichas tensiones en las superficies interior y exterior. Por otra parte,  $\tau_{\varphi\theta}$  es nula por simetría. Finalmente  $\sigma_{r_r}$ , como después se verá, puede despreciarse frente a las otras dos tensiones normales.

La teoría de láminas delgadas basada en estos presupuestos se conoce con el nombre de **Teoría del Estado de Membrana**, nombre que se debe a que *en una membrana no se desarrollan momentos flectores ni esfuerzos cortantes transversales de magnitud significativa*. Por consiguiente, según esta teoría no se consideran posibles efectos de flexión o cortante, por ser despreciables frente a las tensiones de tracción uniformemente distribuidas en el espesor de la pared. Esta hipótesis es perfectamente válida en regiones del recipiente suficientemente alejadas de restricciones externas, y se aplica en numerosos casos prácticos.

## **11.2. EQUILIBRIO DE UNA LÁMINA DE PARED DELGADA**

Para determinar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de recipientes de pared delgada sometidos a presión interior  $p$  uniformemente distribuida, se considera el equilibrio de un elemento diferencial de la lámina, segregado de la misma mediante dos planos meridianos ( $AB$  y  $DC$ ) y dos planos paralelos ( $AD$  y  $BC$ ) infinitamente próximos (fig. 11.3).

Las longitudes de los lados de este elemento infinitesimal  $ABCD$  son  $r_\theta d\theta$  y  $r_\varphi d\varphi$ . Se aplicará la condición de equilibrio de fuerzas en la dirección de la normal exterior  $\vec{n}$  al elemento. Para ello habrá que determinar, separadamente, la resultante en dicha dirección de cada una de las fuerzas que actúan sobre el elemento. Dichas fuerzas son debidas a:

- a)  $\sigma_\varphi$ , **tensión circunferencial**, distribuida uniformemente sobre la superficie  $r_\theta t d\theta$ ;
- b)  $\sigma_\theta$ , **tensión meridiana**, distribuida uniformemente sobre la superficie  $r_\theta t d\varphi$ ;
- c)  $p$ , **presión interior**, distribuida uniformemente sobre la superficie  $r_\theta r_\theta d\varphi d\theta$ .

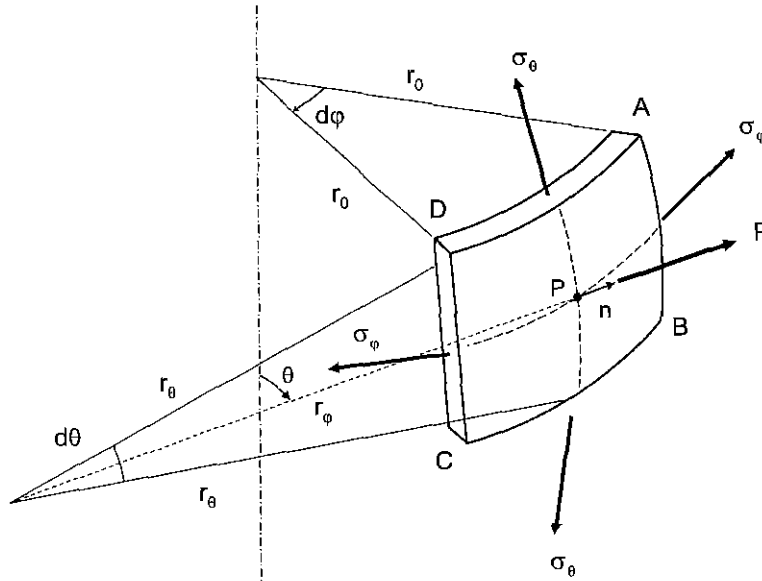


Figura 11.3. Equilibrio de un elemento diferencial de lámina

**a) Resultante de las fuerzas debidas a las tensiones circunferenciales  $\sigma_\varphi$**

En la fig. 11.4a se representa la sección paralela AD del elemento de la lámina, y en ella se indican las fuerzas normales ( $\sigma_\varphi r_\theta t d\theta$ ) que actúan sobre los lados AB y DC. Estas dos fuerzas forman entre sí un ángulo  $d\varphi$  y darán una resultante contenida en el plano del paralelo y dirigida hacia el eje de la lámina, de valor:

$$R_\varphi = 2\sigma_\varphi \cdot r_\theta \cdot t \cdot d\theta \cdot \text{sen} \frac{d\varphi}{2} \approx \sigma_\varphi \cdot r_\theta \cdot t \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad (11.2)$$

ya que para ángulos muy pequeños el seno se confunde con el ángulo. A su vez, esta resultante tendrá una componente en la dirección de  $\vec{n}$ , cuyo valor puede deducirse de la fig. 11.4b, en la que se representa una sección meridiana de la lámina:

$$-R_{\varphi} \cdot s \operatorname{sen} \theta = -\sigma_{\varphi} \cdot r_{\theta} \cdot t \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \operatorname{sen} \theta \quad (11.3)$$

donde el signo negativo indica que su sentido es contrario a la normal  $\vec{n}$ .

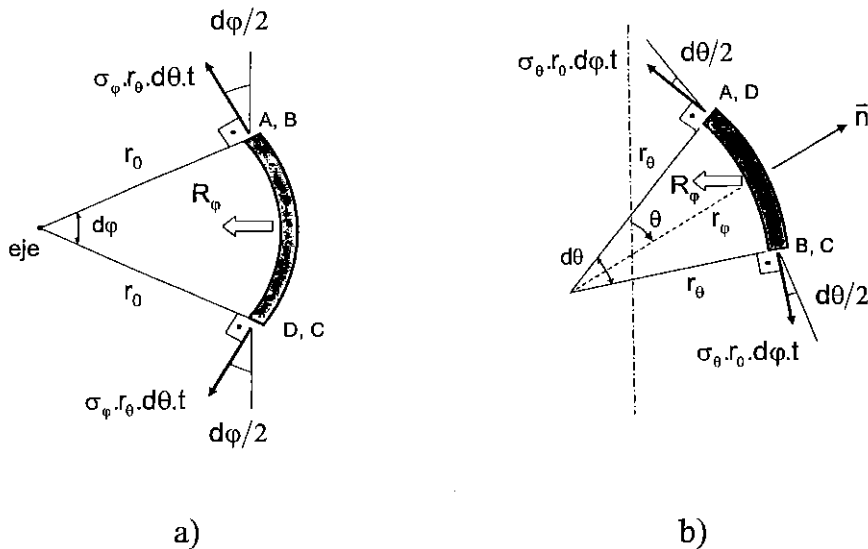


Figura 11.4. a) Sección paralela; b) Sección meridiana

**b) Resultante de las tensiones meridianas  $\sigma_{\theta}$**

En la sección meridiana  $DC$  representada en la fig. 11.4b se indican también las fuerzas normales  $\sigma_{\theta} r_{\theta} t d\varphi$  que actúan sobre los lados  $AD$  y  $BC$ . Estas fuerzas forman entre sí un ángulo  $d\theta$  y dan lugar a una resultante en la dirección  $\vec{n}$  de valor:

$$-2\sigma_{\theta} \cdot r_{\theta} \cdot t \cdot d\varphi \cdot \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} \approx -\sigma_{\theta} \cdot r_{\theta} \cdot t \cdot d\varphi \cdot d\theta \quad (11.4)$$

**c) Resultante de la presión uniforme interior  $p$**

El efecto de la presión  $p$  será una fuerza normal a la superficie de la lámina, es decir, según  $\vec{n}$ , de valor:

$$p \cdot r_{\theta} \cdot d\theta \cdot r_{\theta} \cdot d\varphi \quad (11.5)$$

En resumen, el equilibrio en la dirección  $\vec{n}$  proporciona:

$$-\sigma_{\varphi} \cdot r_{\theta} \cdot t \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \text{sen}\theta - \sigma_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot t \cdot d\theta \cdot d\varphi + p \cdot r_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot d\theta \cdot d\varphi = 0 \quad (11.6)$$

Si en esta ecuación se sustituye la expresión de  $r_{\theta}$  dada en (11.1), y a continuación se divide por  $d\theta d\varphi$ , resulta:

$$-\sigma_{\varphi} \cdot r_{\theta} \cdot t \cdot \text{sen}\theta - \sigma_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot t \cdot \text{sen}\theta + p \cdot r_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot \text{sen}\theta = 0 \quad (11.7)$$

y, dividiendo por  $r_{\theta} r_{\varphi} t$ , se obtiene finalmente:

$$\frac{\sigma_{\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{\sigma_{\theta}}{r_{\theta}} = \frac{p}{t} \quad (11.8)$$

ecuación que se conoce con el nombre de **Ecuación de Laplace**.

Las dos tensiones  $\sigma_{\varphi}$  y  $\sigma_{\theta}$  son tensiones principales, ya que actúan sobre planos en los que no existen tensiones tangenciales y cuyas normales son perpendiculares. La tercera tensión principal es la *tensión radial*  $\sigma_r$ , normal a la superficie de la lámina, cuyo valor varía desde  $-p$  (superficie interior) hasta  $0$  (superficie exterior). Por tanto, es del orden de  $p$ , es decir, de  $\sigma_{\varphi} t / r_{\varphi}$  ó  $\sigma_{\theta} t / r_{\theta}$ , según (11.8), y despreciable por consiguiente frente a las tensiones normales  $\sigma_{\varphi}$  y  $\sigma_{\theta}$ . Se puede decir entonces que el estado tensional en un elemento de un recipiente de presión de pared delgada es un estado biaxial.

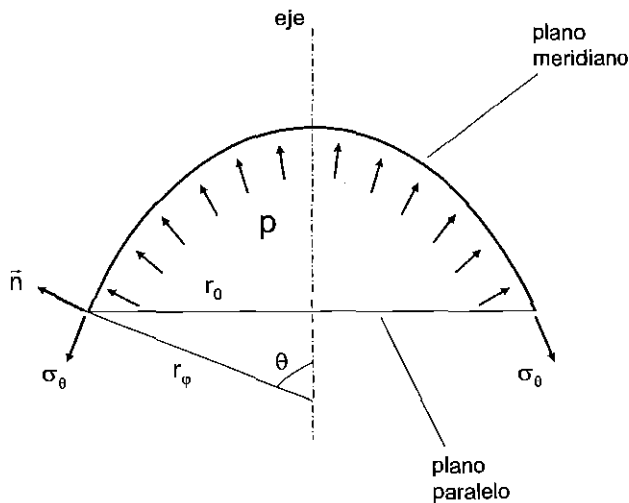


Figura 11.5. Sección meridiana de la parte superior del recipiente



Para determinar las dos tensiones desconocidas  $\sigma_\phi$  y  $\sigma_\theta$ , la ecuación (11.8) resulta insuficiente, por lo que es preciso suministrar una ecuación adicional. Esta ecuación se obtiene considerando el equilibrio según el eje de la lámina de una de las dos porciones que resultan de cortar el recipiente por un plano paralelo (fig. 11.5).

La presión interior dará lugar a una fuerza resultante en la dirección del eje y dirigida hacia arriba, de valor el producto de la presión por el área proyectada de la superficie sobre el plano de corte, es decir:

$$R_p = p \cdot (\pi \cdot r_o^2) = p \cdot \pi \cdot r_\phi^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \quad (11.9)$$

Dicha fuerza se equilibrará con la componente vertical resultante de las tensiones meridianas que actúan en el espesor de la pared. Esta componente será:

$$R_\theta = \sigma_\theta \cdot (2\pi \cdot r_o \cdot t) \cdot \text{sen} \theta = 2\pi \cdot t \cdot \sigma_\theta \cdot r_\phi \cdot \text{sen}^2 \theta \quad (11.10)$$

Igualando (11.9) y (11.10), resulta:

$$\sigma_\theta = \frac{p \cdot r_\phi}{2t} \quad (11.11)$$

expresión que junto con (11.8) permite calcular las tensiones de membrana.

### **11.3. CASOS PARTICULARES**

Los recipientes de presión de forma esférica y cilíndrica, así como los anillos de pared delgada constituyen casos particulares relativamente usuales y de sencillo cálculo.

#### **11.3.1. Recipiente esférico sometido a presión interior $p$**

Por la simetría total del problema (fig. 11.6):  $r_\theta = r_\phi = r$ , siendo  $r$  el radio de la esfera. De (11.11), resulta:

$$\sigma_{\theta} = \frac{P \cdot r}{2t} \quad (11.12)$$

y de (11.8):

$$\sigma_{\varphi} = \frac{P \cdot r}{2t} \quad (11.13)$$

Así pues,  $\sigma_{\varphi} = \sigma_{\theta} = \bar{\sigma}$ .

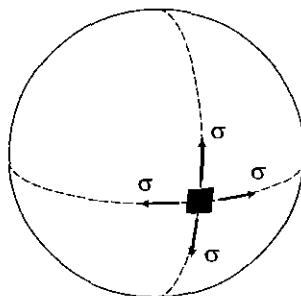


Figura 11.6. Recipiente esférico

Se puede comprobar que la geometría esférica es la ideal para resistir una presión interna, en cuanto que minimiza el valor de las tensiones. Es la forma natural de las pompas de jabón.

### 11.3.2. Recipiente cilíndrico sometido a presión interior $p$

En este caso los meridianos son las generatrices del cilindro y los paralelos las circunferencias normales al eje (fig. 11.7).

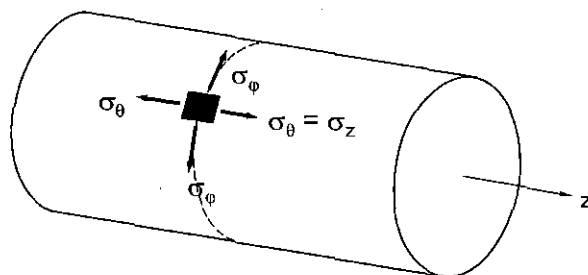


Figura 11.7. Recipiente cilíndrico

Por tanto, si  $r$  es el radio del cilindro:  $r_\theta = \infty$ ,  $r_\varphi = r$ . De (11.8) se obtiene:

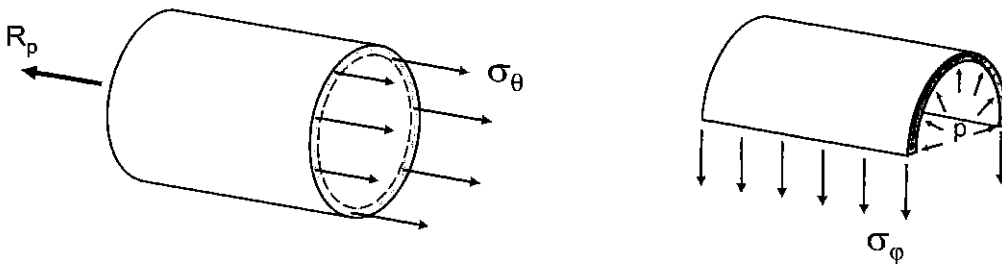
$$\sigma_\varphi = \frac{p \cdot r}{t} \quad (11.14)$$

y de (11.11):

$$\sigma_\theta = \sigma_z = \frac{p \cdot r}{2t} \quad (11.15)$$

Obsérvese que esta segunda ecuación proviene de considerar el equilibrio, según la dirección del eje, de una de las partes del cilindro que resulta de cortarlo por un plano paralelo, es decir, perpendicular al eje (fig. 11.8). Sin hacer uso de (11.11), la expresión (11.15) se puede obtener directamente de la forma siguiente:

$$\sigma_\theta \cdot (2\pi \cdot r \cdot t) = p \cdot \pi \cdot r^2 = R_p \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{p \cdot r}{2t} \quad (11.16)$$



**Figura 11.8. a) Equilibrio de un recipiente cilíndrico según corte normal al eje; b) Equilibrio de un tramo de recipiente cilíndrico según corte que contiene al eje**

Este procedimiento es el mismo que anteriormente se utilizó para obtener la ecuación suplementaria a la de Laplace. También se puede comprobar la expresión de  $\sigma_\varphi$  planteando el equilibrio de la porción semicilíndrica de la fig.11.8b. En este caso, el equilibrio de fuerzas implica:

$$2\sigma_\varphi \cdot 2t = p \cdot 2r \Rightarrow \sigma_\varphi = \frac{p \cdot r}{t} \quad (11.17)$$

### 11.3.3. Anillos de pared delgada sometidos a presión uniforme

Los anillos de pared delgada pueden considerarse como un caso particular de recipientes cilíndricos, en donde sólo existe la componente de tensión  $\sigma_\phi$ . Puede deducirse que  $\sigma_\theta = 0$  planteando el equilibrio en la dirección del eje.

Sustituyendo  $r_\theta = r$ ,  $\sigma_\theta = 0$  en (11.8), resulta:

$$\sigma_\phi = \frac{p \cdot r}{t} \quad (11.18)$$

Esta expresión también se puede obtener directamente cortando el anillo en dos y planteando el equilibrio (por unidad de longitud) a una de las dos mitades (fig. 11.9):

$$\sigma_\phi \cdot 2t = p \cdot 2r \Rightarrow \sigma_\phi = \frac{p \cdot r}{t} \quad (11.19)$$

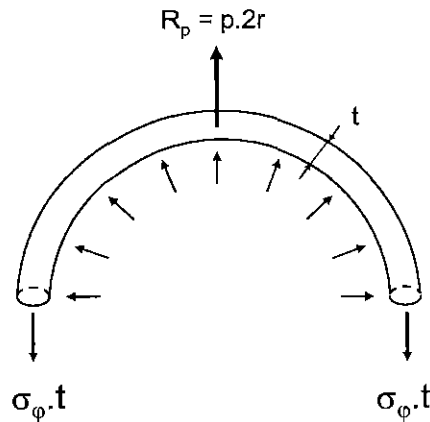


Figura 11.9. Equilibrio de un anillo según corte que contiene al eje

Se trata por tanto de un estado uniaxial de tensiones. La deformación circunferencial para el anillo sería:

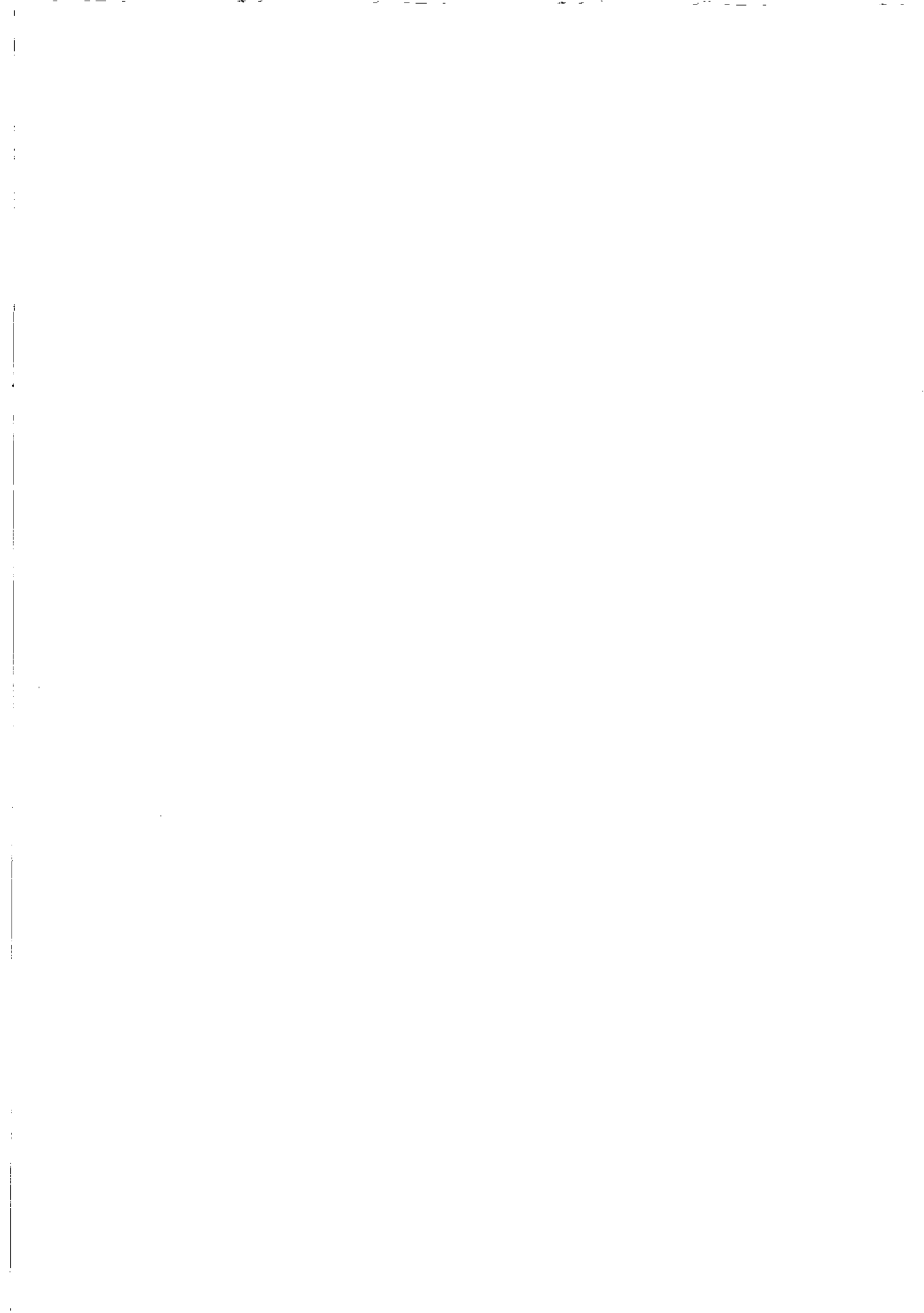
$$\varepsilon_\phi = \frac{2\pi \cdot \Delta r}{2\pi \cdot r} = \frac{\Delta r}{r} \quad (11.20)$$

Y por la ley de Hooke:

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi}}{E} = \frac{p \cdot r}{E \cdot t} \quad (11.21)$$

Igualando (11.20) y (11.21) permite obtener la variación radial en el anillo:

$$\Delta r = \frac{p \cdot r^2}{E \cdot t} \quad (11.22)$$



## PROBLEMAS

**11.1.** Un cilindro macizo y rígido de 50 cm de diámetro se halla rodeado por un anillo de sección transversal circular de  $2 \text{ cm}^2$ , que se ajusta sin holgura. Se somete al anillo a un descenso de temperatura de  $100^\circ\text{C}$ . Calcular la tensión normal en el anillo y la fuerza por unidad de longitud ejercida por el anillo sobre el cilindro.

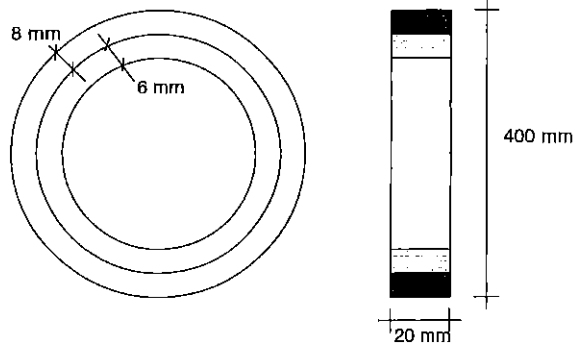
Datos de los materiales:

Módulo de Elasticidad:  $E = 200 \text{ GPa}$   
 Coeficiente de dilatación:  $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

**11.2.** Un anillo compuesto está constituido por uno interior de cobre y otro exterior de acero, perfectamente ajustados, cuyas dimensiones son las indicadas en la figura. Calcular las tensiones normales en ambos anillos, así como la presión ejercida entre los dos, cuando el conjunto experimenta un aumento de temperatura de  $100^\circ\text{C}$ .

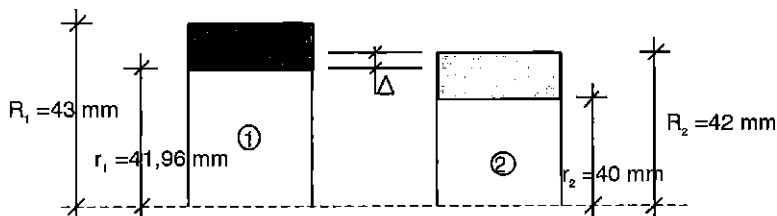
Características de los materiales:

	<u>acero</u>	<u>cobre</u>
E (GPa)	200	100
$\alpha$ ( $^\circ\text{C}^{-1}$ )	$12,5 \times 10^{-6}$	$16,5 \times 10^{-6}$



**11.3.** Un anillo cilíndrico (1) de radio interior  $r_1 = 41,96 \text{ mm}$  y radio exterior  $R_1 = 43 \text{ mm}$ , se ha colocado, tras un previo calentamiento, sobre otro anillo cilíndrico (2) de la misma anchura, de radio interior  $r_2 = 40 \text{ mm}$  y radio exterior  $R_2 = 42 \text{ mm}$ . Calcular las tensiones que aparecen en las paredes de ambos anillos al enfriarse el anillo exterior.

Se supone contacto sin rozamiento. El módulo de elasticidad longitudinal de ambos materiales es:  $E = 200 \text{ GPa}$ .

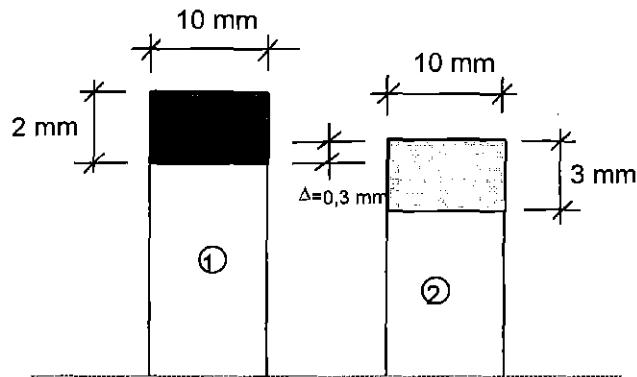


**11.4.** Se tienen dos anillos de pared delgada de 10 mm de anchura, tales que el radio interior del anillo (1) es inferior en 0,3 mm al radio exterior del anillo (2). Se somete al anillo (1) a una elevación de temperatura suficiente para permitir encajar el anillo (2) en el interior del (1). Una vez encajados, se dejan enfriar. Se pide:

- 1º) Obtener las tensiones en ambos anillos después del enfriamiento.
- 2º) Posteriormente se somete al conjunto a una presión interior de 0,6 MPa. Calcular las tensiones finales en ambos anillos.

El contacto entre ambos anillos es sin rozamiento. El diámetro de cálculo para ambos anillos es de 40 cm.

Módulos de elasticidad:  $E_1 = 200 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 100 \text{ GPa}$



**11.5.** Dos casquillos, uno exterior de acero (1) y otro interior de cobre (2), ambos de diámetro nominal 100 mm, tienen un ajuste de aprieto de 0,05 mm, es decir, el diámetro exterior de (2) mide a la temperatura ambiente 0,05 mm más que el diámetro interior de (1). Se calienta el casquillo exterior hasta conseguir el ajuste y se deja enfriar el conjunto.

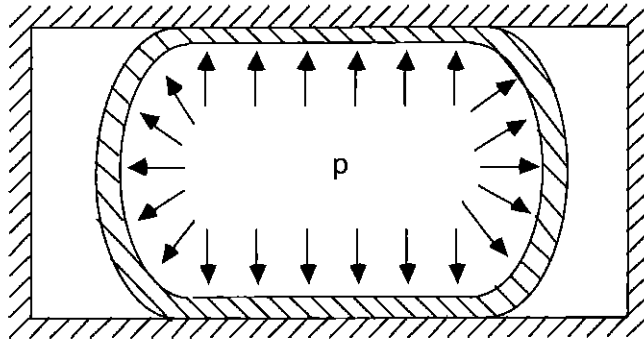
- 1º) Calcular las tensiones en cada casquillo.
- 2º) A continuación se introduce un fluido a presión de 2 MPa. Determinar las tensiones finales en cada casquillo.

<u>Características geométricas y elásticas:</u>	<u>acero</u>	<u>cobre</u>
Espesor (mm)	3	2
E (GPa)	200	100

**11.6.** Un depósito cilíndrico de pared delgada y 1 m de diámetro está cerrado por sus extremos y soporta una presión interna de 2 MPa. El material es de características  $\sigma_r = 250 \text{ MPa}$  y  $\nu = 0,3$ . Dimensionar su espesor según los criterios de fallo de Rankine, Tresca y Saint-Venant.



**11.7.** Un depósito cilíndrico largo y cerrado, de pared delgada, encaja exactamente en una cavidad cilíndrica indeformable, como se indica en la figura. Calcular la tensión circunferencial que habrá en las paredes laterales del depósito al estar sometido a una presión interna  $p$ . El material del depósito tiene un comportamiento elástico-lineal y se suponen conocidas sus características  $E$  y  $\nu$  así como el radio  $r$  y el espesor  $t$  de la pared del depósito.



**11.8.** Determinar con un coeficiente de seguridad  $n = 2$  el espesor de un depósito cilíndrico de pared delgada que está cerrado por ambos extremos y sometido a una presión interior  $p = 2$  MPa, según las siguientes teorías de fallo: Rankine, Saint-Venant, Tresca y Von-Mises. El depósito tiene un diámetro de 1 m. Comprobar gráficamente el orden de los valores obtenidos para los tres espesores.

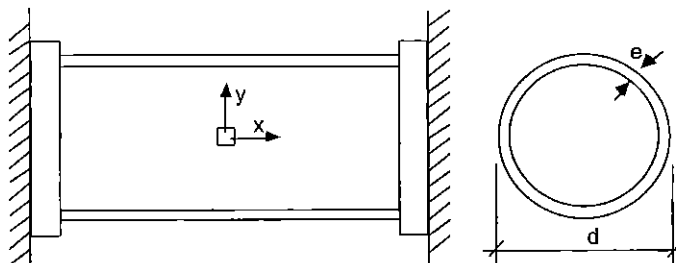
Características del material:  $E = 200$  GPa;  $\sigma_f = 200$  MPa;  $\nu = 0,3$ .

**11.9.** Un recipiente cilíndrico de diámetro medio  $d = 40$  cm está sometido a una presión interior  $p = 3$  MPa. Los fondos del recipiente son rígidos. Se impiden las deformaciones longitudinales del recipiente por medio de dos paredes rígidas que no pueden separarse entre sí. Para la parte del recipiente suficientemente alejada de los extremos, se pide obtener:

1º) Espesor  $e$  necesario para prevenir el agotamiento, con un coeficiente de seguridad de 1,5 de acuerdo con la teoría de Tresca.

2º) Dibujo de los círculos de Mohr y cálculo de los valores de las tensiones principales.

El material del recipiente es elasto-plástico perfecto de características:  $\sigma_f = 240$  MPa;  $\nu = 0,3$ .

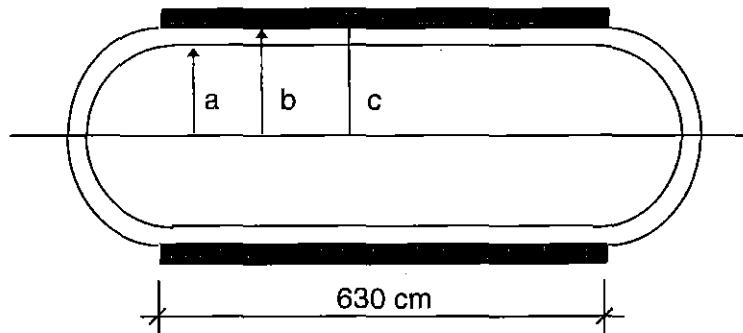


**11.10.** Un depósito cilíndrico cerrado en sus extremos tiene una longitud de 630 cm, un diámetro exterior de 211 cm y un diámetro interior de 209 cm.

Para aumentar su resistencia se zuncha con un tubo del mismo material que no está cerrado por sus extremos y tiene un diámetro interior de 211 cm y un diámetro exterior de 214 cm. Depósito y zuncho encajan exactamente sin presión ni separación mutua cuando el depósito está vacío. Están fabricados con un acero de 210 GPa de coeficiente de elasticidad, 0,3 de módulo de Poisson y 420 MPa de límite de fluencia.

Supuesto nulo el rozamiento entre depósito y zuncho, se desea calcular utilizando el criterio de Tresca:

- 1º) Coeficiente de seguridad del depósito, supuesto sin zunchar, cuando se somete a una presión interior  $p = 2$  MPa.
- 2º) Coeficiente de seguridad del depósito zunchado, si se somete a una presión interior de 4 MPa.



**11.11.** Un recipiente cilíndrico cerrado de pared delgada, de 10 mm de espesor y 200 mm de diámetro interior, está sometido a una presión interior de 15 MPa.

Determinar cuál es el máximo esfuerzo longitudinal de tracción y el máximo esfuerzo longitudinal de compresión que pueden aplicarse al recipiente antes de que se produzca el agotamiento del mismo según la teoría de la tensión cortante máxima (Tresca).

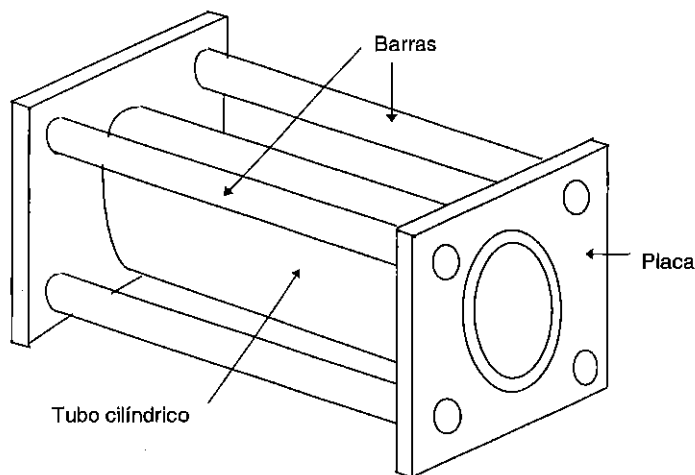
Dibujar el gráfico que representa la situación de los distintos estados planos de tensión según esta teoría y señalar los dos puntos correspondientes a los casos arriba citados.

La tensión de fluencia del material es de 240 MPa, tanto en tracción como en compresión.

**11.12.** Un dispositivo hidráulico está formado por un tubo cilíndrico de pared delgada de 80 mm de diámetro interior y 4 mm de espesor, soldado en sus extremos a dos placas infinitamente rígidas, tal como se muestra en la figura. Estas placas están unidas entre sí mediante cuatro barras iguales de sección circular de 8 mm de diámetro, dispuestas simétricamente en torno al tubo, y del mismo material que éste. En el interior del cilindro actúa una presión de 20 MPa.

Dibujar el diagrama de los círculos de Mohr debidamente acotado, para dos puntos cualesquiera, uno perteneciente a una de las barras y otro de la pared del tubo cilíndrico, y calcular el coeficiente de seguridad con que trabaja este último utilizando la Teoría de Tresca. Se desprecian los efectos locales originados en las zonas próximas a las de soldadura de barras y cilindro con las placas.

Características mecánicas del material: Tensión de fluencia: 260 MPa, Módulo de Poisson: 0,3.



**11.13.** Un tubo de aluminio de 32 cm de radio exterior y 1 cm de espesor se encaja, sin presión ni holgura, en otro tubo de acero de 32 cm de radio interior y 2 cm de espesor. La longitud de ambos tubos es la misma y se encajan entre dos paredes rígidas e indeformables, paralelas entre sí y perpendiculares al eje de los tubos. Se eleva la temperatura de los tubos 80°C. Determinar:

- 1º) Presión mutua entre los tubos.
- 2º) Para ambos tubos, representar el estado tensional en puntos cualesquiera de sus paredes (suficientemente alejados de los extremos), mediante cubos en el entorno de dichos puntos cuyas aristas estén orientadas paralelamente a las direcciones radial ( $r$ ), axial ( $x$ ) y tangencial ( $\theta$ ).
- 3º) Coeficiente de seguridad en ambos tubos aplicando el criterio de Von Mises.

Se considera que los dos tubos son de pared delgada y puede operarse con un radio nominal de 32 cm.

<u>Características mecánicas de los materiales:</u>	<u>aluminio</u>	<u>acero</u>
E (GPa)	70	210
$\sigma_f$ (MPa)	200	350
$\alpha$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$25 \times 10^{-6}$	$12 \times 10^{-6}$
$\nu$	0,3	0,3

**11.14.** Un recipiente metálico sometido a presión interior de 5 MPa, está constituido por dos esferas concéntricas en contacto, de diferentes materiales que se mantienen elásticos y lineales hasta la rotura.

Calcular:

- 1º) Coeficiente de seguridad frente a la rotura según la teoría de la tensión normal máxima.
- 2º) Presión en la superficie de contacto entre las dos esferas.
- 3º) Aumento de la capacidad volumétrica del recipiente.

Como diámetro de cálculo para ambas esferas se puede tomar  $D = 100$  cm.

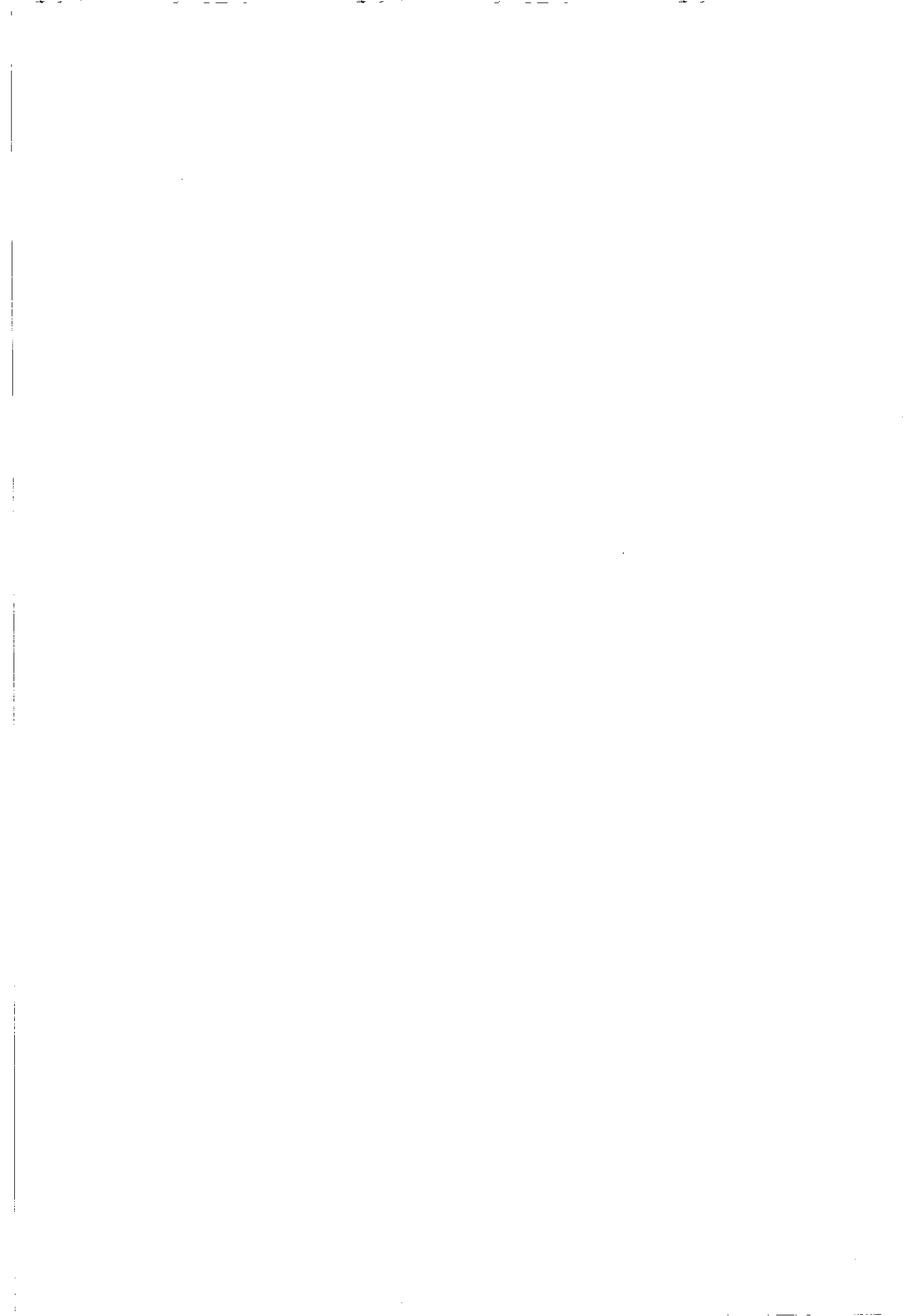
<u>Datos:</u>	<u>Esfera interior</u>	<u>Esfera exterior</u>
Módulo de elasticidad (GPa)	$E_i = 100$	$E_e = 200$
Coefficiente de Poisson	$\nu_i = 0,4$	$\nu_e = 0,3$
Espesor (mm)	$t_i = 1$	$t_e = 1$
Tensión de rotura (MPa)	$\sigma_{ri} = 600$	$\sigma_{re} = 1000$

# **ANEXO I**

---

## **MÉTODOS EXPERIMENTALES EN ELASTICIDAD. EXTENSOMETRÍA**

---



## I.1. INTRODUCCION

El objeto de la Elasticidad y Resistencia de Materiales es la determinación de los campos de desplazamiento, tensión y deformación para un determinado sólido sometido a ciertas condiciones de carga o desplazamiento. Aunque la Teoría de la Elasticidad establece el conjunto de ecuaciones que definen el problema, no siempre es posible su resolución explícita, y sólo ante determinados estados (sencillos) de geometría y carga se alcanza el objetivo anteriormente enunciado.

De ahí la importancia que adquieren los métodos experimentales, como método alternativo de resolución del problema elástico en casos complejos. Además, es frecuente que los especialistas en la materia se vean forzados al uso de métodos híbridos que conjuguen las capacidades de los métodos analíticos o numéricos con técnicas experimentales complementarias.

Los métodos experimentales usados en la Teoría de la Elasticidad tienen como objeto determinar algún valor característico del sólido deformable (desplazamiento, deformaciones o tensiones), relacionando este valor, a través de algún principio físico, con alguna magnitud no directamente asociada al problema y que es la que se mide.

Los diferentes métodos experimentales se distinguen por el principio físico en que se apoyan. A continuación, para aclarar estos conceptos, se hace una somera explicación de dos de los métodos más usados: *la extensometría y la fotoelasticidad*.

- Extensometría.

En la extensometría óhmica se relaciona la variación de resistencia de un cable adosado al sólido, con la deformación que está soportando dicho sólido.

Dado que este procedimiento produce sólo una información del punto, su aplicación ha de ser selectiva. Así, se utiliza para conocer estados tensionales en puntos de elementos de geometría compleja, que pueden considerarse a priori como los más desfavorables. También se emplea para la validación de modelos de cálculo, con ensayos de laboratorio y pruebas reales de carga sobre estructuras construidas, así como para la medición de tensiones residuales en elementos que se van a extraer de la estructura. En ensayos de caracterización de materiales (ensayo de tracción), la extensometría puede servir también para obtener valores de ciertas variables no directamente proporcionadas por la máquina de ensayo (acortamientos transversales para calcular el coeficiente de Poisson, por ejemplo).

A la vista de estas posibilidades se comprende que la extensometría sea el método experimental más ampliamente usado en la Ingeniería para la determinación de variables asociadas al sólido deformable. Su ventaja radica en que las mediciones se pueden realizar sobre la estructura real, sin que se requiera preparar modelos en el laboratorio (como sucede por ejemplo en la fotoelasticidad de transmisión) y usando un equipo razonablemente sencillo y económico. Su principal limitación estriba en que sólo puede obtenerse información del contorno del sólido deformable y que dicha información es local del punto.

- Fotoelasticidad.

En la Fotoelasticidad plana, las variables que se determinan son las tensiones principales (más exactamente su diferencia) mediante el principio físico de la birrefringencia temporal al paso de la luz, fenómeno que se produce en algunos materiales (fotoelásticos) cuando están sometidos a un estado tensional. Explicamos brevemente su base física.

La lámina fotoelástica cargada polariza el rayo luminoso incidente en dos planos mutuamente perpendiculares que coinciden con las direcciones de las tensiones principales. Estos dos rayos polarizados planos se propagan con diferentes velocidades y por eso salen de la placa con cierta diferencia de fase, que depende de la magnitud de las tensiones principales. A este fenómeno se llama *doble refracción* y al material *birrefringente*.

Las dos ondas llegan a un polariscopio, y posteriormente se produce la interferencia óptica en una placa fotográfica. Si el desfase es un múltiplo entero de la longitud de onda  $\lambda$ , las ondas se refuerzan entre sí y el efecto combinado es una mayor intensidad luminosa. Si es un múltiplo impar de  $\lambda/2$ , la intensidad resultante se anula. Para valores intermedios del desfase, se obtienen intensidades intermedias. Sobre la placa se obtiene un dibujo fotoelástico con bandas oscuras y luminosas.

A diferencia de lo que sucede en la Extensometría, la Fotoelasticidad plana da directamente información de todo el dominio. Ahora bien, dado que la propiedad requerida de birrefringencia temporal no la poseen los materiales usados habitualmente en Ingeniería, es preciso construir una réplica del dominio en estudio con un material apropiado, relacionando las variables de ambos problemas. En términos generales, éste es el mayor inconveniente de los métodos fotoelásticos: la necesidad de construir un modelo.

El uso de los Métodos Fotoelásticos conlleva un equipo de medida que incluya necesariamente un polariscopio (de transmisión o de reflexión), para producir el principio físico base del método. Un laboratorio completo debe permitir la elaboración del material fotoelástico a partir de sus componentes, la preparación de la probeta a partir de una lámina del material y el laboratorio fotográfico adecuado para efectuar las mediciones oportunas. Estos requerimientos dan idea de que la Fotoelasticidad presenta una menor aplicación industrial que otros métodos experimentales como la extensometría.

En lo que sigue se hace una breve exposición de los métodos extensométricos, sin pretender abordar más que una introducción al tema.

## **I.2. FUNDAMENTOS DE LAS BANDAS EXTENSOMETRICAS**

Como ya se ha indicado, en los métodos experimentales y, en particular, en la Extensometría se busca una relación entre una magnitud ajena al problema del sólido deformable y la deformación del sólido, a través de un principio físico. Atendiendo a la naturaleza de dicho principio los sistemas usados se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Sistemas mecánicos
- Sistemas acústicos
- Sistemas ópticos
- Sistemas eléctricos
  - de capacitancia
  - de inductancia
  - de resistencia

Los de más amplio uso, y sobre los que versará el resto del tema, son los sistemas eléctricos de resistencia. En cualquier caso, hay aspectos comunes a todos los sistemas, ya que están asociados a la naturaleza local de la variable que se desea medir y al carácter finito del instrumento de medida (galga o banda extensométrica). En este sentido es instructivo analizar la precisión de una medida realizada con una banda extensométrica.

Las bandas se adosan sobre la superficie de manera que se hacen solidarias con ella, experimentando las mismas deformaciones. Evidentemente, el tamaño y rigidez de las bandas debe ser lo suficientemente pequeño para que no afecte al comportamiento del sólido.



Supongamos, como indica la Figura I.1, que una banda de longitud  $L$  se adosa sobre una superficie de un sólido, sometido a un sistema de cargas que provoca un cierto campo de deformaciones que, a efectos de cálculo, supondremos cuadrático.

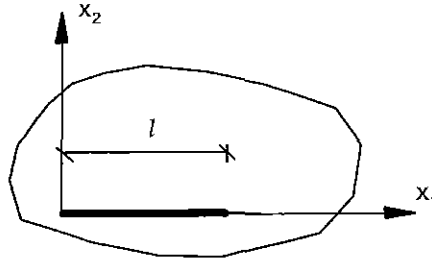


Figura I.1. Sistema de referencia del campo de deformaciones

Con el sistema de referencia indicado en la Figura I.1, la expresión del campo de deformaciones es:

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = ax_1^2 + bx_1 + c \quad (I.1)$$

Dado que la banda, a través del principio físico de que se trate, producirá un solo valor de la deformación, éste necesariamente tiene que ser un promedio de los valores asociados a los infinitos puntos existentes en el segmento de longitud  $L$ . Dicho promedio se puede calcular de la siguiente forma:

$$\epsilon_1|_{\text{promedio}} = \frac{\int_0^L \epsilon_1 dx_1}{L} = \frac{aL^2}{3} + \frac{bL}{2} + c \quad (I.2)$$

Este valor se asignará al punto medio del segmento sobre el que se ha adosado la banda extensométrica. En este punto existirá un valor real de la deformación, que se obtiene de particularizar el campo de deformaciones (I.1) a dicho punto medio:

$$\epsilon_1|_{x_1=L/2} = \frac{aL^2}{4} + \frac{bL}{2} + c \quad (I.3)$$

El error cometido al asignar al punto medio el valor anteriormente calculado es:

$$\text{Error} = \epsilon_1|_{x_1=L/2} - \epsilon_1|_{\text{promedio}} = \frac{aL^2}{12}$$

En este caso dicho error depende exclusivamente de dos factores,  $a$  y  $L$ , que representan respectivamente la naturaleza del campo de deformaciones y el tamaño finito de la banda. En el caso de que el campo de deformaciones fuera de un orden superior, aparecerían, además del término anterior, términos de mayor grado dependientes de la longitud.

Dado que el campo de deformaciones es una característica del problema, para disminuir el error sólo puede actuarse sobre el tamaño de la banda extensométrica, que debe ser lo más pequeño posible. Su influencia crece con el grado del campo de deformaciones. Por esta razón, en casos de variación brusca de la deformación (por ejemplo, en el entorno de una fisura) la extensometría es de escasa utilidad.

### I.3. BANDAS DE RESISTENCIA

El fundamento de las bandas de resistencia es la variación de la resistencia eléctrica de un conductor cuando cambia su longitud. Así, supongamos el hilo de sección circular indicado en la Figura I.2, adosado a la superficie de un sólido elástico lineal. Dicho sólido se somete posteriormente a un estado de cargas tal que provoca un campo de tensiones, representado por  $\sigma$  en la figura.

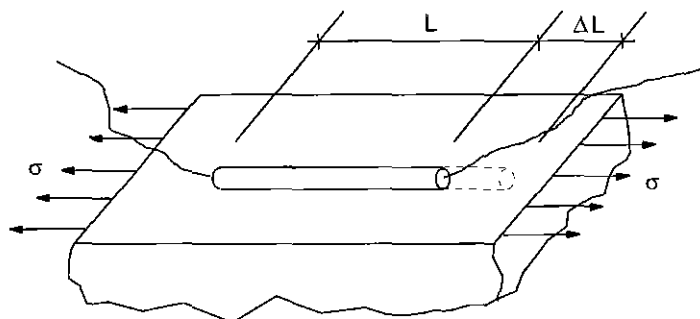


Figura I.2. Hilo conductor adosado a la superficie de un sólido deformable.

La expresión de la resistencia del cable antes de aplicar las cargas es:

$$R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{\pi r^2} \quad (I.4)$$

donde la resistividad  $\rho$  es una propiedad del material de que está fabricado el cable.

Si el hilo y el sólido son solidarios, aquél experimentará un cambio en su longitud al aparecer el estado tensional, pudiendo también variar la sección transversal y la resistividad. La nueva resistencia del cable será:

$$R + \Delta R = (\rho + \Delta\rho) \frac{L + \Delta L}{S + \Delta S} \quad (I.5)$$

Tomando logaritmos en (I.5) y considerando sólo los términos lineales en el desarrollo en serie, obtenemos:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta S}{S} \quad (I.6)$$

o bien:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta L}{L} - 2 \frac{\Delta r}{r} \quad (I.7)$$

teniendo en cuenta que:

$$\Delta S = 2\pi r \Delta r \quad (I.8)$$

Admitiremos que el alargamiento unitario y la contracción transversal unitaria están relacionados a través del coeficiente de Poisson (como si se tratara de un estado monodimensional de tensiones):

$$-v \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta r}{r} \quad (I.9)$$

donde  $v$  es el coeficiente de Poisson del hilo.

Por otro lado, tal como Bridgman puso de manifiesto, el cambio unitario de resistividad puede considerarse proporcional al cambio de volumen del conductor, siendo la constante de proporcionalidad,  $c$ , una característica del material:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = c \frac{\Delta V}{V} \quad (I.10)$$

Dado que la variación unitaria de volumen es el primer invariante del tensor de deformaciones, podemos expresar:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = c \epsilon_{ii} = c \left[ \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta r}{r} \right] = c(1-2v) \frac{\Delta L}{L} \quad (I.11)$$

Por tanto, la variación unitaria de resistencia, sustituyendo (I.9) y (I.11) en (I.8), sería:

$$\frac{\Delta R}{R} = (1-2v)c \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} + 2v \frac{\Delta L}{L} = [c(1-2v) + (1+2v)] \frac{\Delta L}{L} \quad (I.12)$$

o bien:

$$\frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta L}{L} = K \epsilon \quad [K = c(1-2v) + (1+2v)] \quad (I.13)$$

La variación unitaria de resistencia está por tanto ligada con la de longitud. La constante que las relaciona es una característica del material ( $K$ ), que recibe el nombre de *constante de sensibilidad a la deformación*. Para el material más usado en bandas de resistencia (45% Ni, 55% Cu), esta constante vale 2.1 en un amplio rango de deformación, incluyendo régimen plástico.

Algunas de las variables asociadas al problema tienen limitados sus valores, por lo que la representación anterior tan sencilla no es de aplicación industrial. En efecto, la resistencia a emplear debe ser lo suficientemente grande para que sus pequeñas variaciones sean significativas frente a la resistencia del resto del circuito (cables y conexiones), debiendo ser al mismo tiempo medibles sin requerir un equipo de alta precisión. El circuito debe también estar diseñado para que al paso de la corriente no se genere calor, que provocaría variaciones de temperatura que afectarían al valor de la resistividad, de tal manera que no se podría saber si la variación de la resistencia es debida a la deformación o a la variación de la temperatura. Las resistencias comúnmente usadas son superiores a los 100  $\Omega$ . Si se utilizara un cable de 0,025 mm de diámetro con una resistencia de 25  $\Omega$ /m, habría que usar como banda extensométrica un cable de 10 cm de longitud. Teniendo presente la influencia de la longitud de las bandas extensométricas sobre el error de medida, la información suministrada por un cable de esas características carecería de utilidad.

El problema de la longitud del conductor se resolvió a mitad de la década de los treinta, gracias a los trabajos de Ruge y Simmons, quienes independientemente desarrollaron bandas en

las que la longitud requerida por el cable se conseguía formando una malla con él o arrollándolo sobre una bobina.

Estos dispositivos se utilizaron hasta los años cincuenta, fijándolos directamente al sólido con un adhesivo adecuado. En la actualidad ya no se usan, en parte debido a que la conexión entre el sólido y el cable a través de una línea, tal como sucede en el hilo redondo, no es la más adecuada ni para la transmisión de carga ni para la fabricación. En su lugar, se emplean bandas de láminas metálicas, fabricadas por primera vez en 1952 por Saunders y Roe, algunas de las cuales se muestran en la Figura I.3. La configuración a) corresponde a una banda para medir en una dirección, la b) para medir en dos direcciones y la indicada en c) representa una roseta para medir en tres direcciones, que se utiliza cuando se desconocen las direcciones principales de deformación y se desean conocer las deformaciones superficiales.

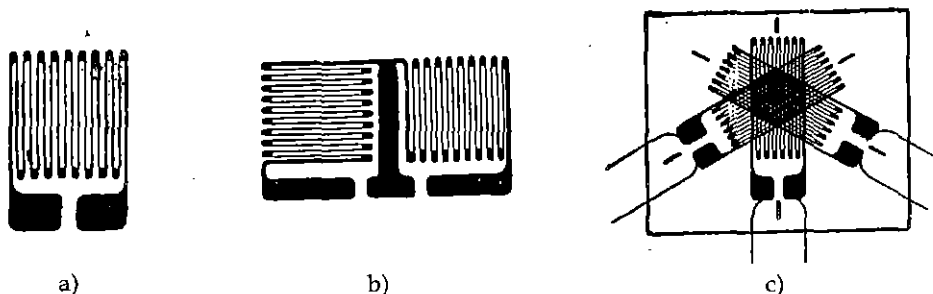


Figura I.3. Bandas de láminas de metal.

Estas bandas se fabrican por un procedimiento de ataque químico, depositándose el metal sobre una superficie. La versatilidad del procedimiento de fabricación permite una gran variedad de bandas. Dada la fragilidad de la película metálica, ésta suele ir adherida a una lámina de poliamida, plástico flexible y tenaz, de muy pequeño espesor (0,025 mm).

El hilo utilizado en las bandas de láminas de metal es de una sección tal que las hace también sensibles a las deformaciones transversales y, por tanto, la relación entre la variación unitaria de resistencia con la de longitud es algo más compleja que la indicada en la expresión (I.12).

De cualquier forma, en las bandas figura un único valor de sensibilidad  $K$ , al que se denomina *factor de galga*. El fabricante lo determina a través de un ensayo en el que conoce de antemano el estado de tensiones y deformaciones del material. Un ensayo típico es el de una barra sometida a tracción. Los valores de  $K$  para la mayoría de las bandas varían en un rango típico entre 2 y 4, circunstancia que facilita la lectura directa de la deformación. Para cumplir este requisito, se utilizan aleaciones, ya que los valores de  $K$  para los metales puros caen fuera del intervalo citado.

#### I.4. APARATOS DE MEDIDA. EL PUENTE DE WHEATSTONE.

Para convertir la variación unitaria de resistencia que se produce en la banda en una señal de voltaje medible, se pueden utilizar dos circuitos eléctricos: el potenciómetro y el puente de Wheatstone. En lo que sigue se describe el segundo, que es de aplicación tanto para medidas estáticas como dinámicas de deformación.

El puente de Wheatstone consta de cuatro resistencias y una fuente de tensión, con la disposición que se indica en la Figura I.4.

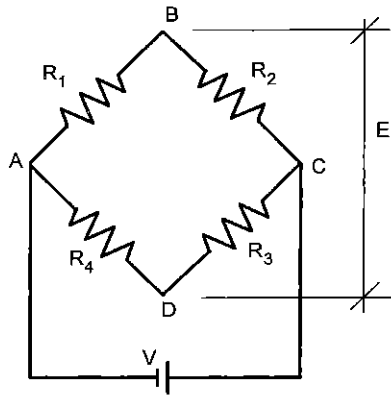


Figura I.4. El puente de Wheatstone.

El valor de la diferencia de potencial entre los puntos B y D es:

$$E = V \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (I.14)$$

El puente está equilibrado, es decir  $E = 0$ , si:

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad (I.15)$$

Dado que al menos una de las resistencias del puente corresponderá a una banda extensométrica, cuya resistencia inicial puede ser variable (aunque fuera siempre la misma, la resistencia del circuito de conexión siempre variará de un montaje a otro), el puente va dotado de un dispositivo para el equilibrado inicial (que normalmente consiste en una resistencia variable en paralelo con AD y DC).

Si, una vez equilibrado, las resistencias del puente experimentan una variación, pasando a valer  $R_1 + \Delta R_1$ ,  $R_2 + \Delta R_2$ ,  $R_3 + \Delta R_3$ ,  $R_4 + \Delta R_4$ , puede comprobarse que la diferencia de potencial entre los puntos B y D será ahora:

$$\Delta E = V \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (I.16)$$

Por consiguiente, cualquier variación en las resistencias afecta a la diferencia de potencial, que se puede medir fácilmente. Las disposiciones más frecuentes son aquellas en que se utilizan una (*montaje en cuarto de puente*) o dos (*montaje en medio puente*) de las resistencias del puente.

En el montaje de cuarto de puente, si hacemos  $R_1 = R_2$  y en lugar de  $R_3$  colocamos una banda, al aplicar las fuerzas sobre el sólido deformable solamente variará la resistencia  $R_3$ , por lo que la expresión (I.16) se reducirá a:

$$\Delta E = V \frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R} = \frac{V}{4} K \epsilon \quad (I.17)$$

Entonces, la deformación de la banda será:

$$\epsilon = \frac{4 \Delta E}{V K} \quad (I.18)$$

El montaje en medio puente (que utiliza dos resistencias) se suele aplicar para eliminar los efectos de la temperatura. En efecto, durante la actuación de las cargas, el sistema, y por ende la banda, puede estar sometido a una variación de temperatura, cuyo efecto recoge el aparato de medida, enmascarando el valor de la deformación asociado a las cargas aplicadas. El puente de Wheatstone puede servir para eliminar este efecto siempre y cuando el sólido se pueda deformar libremente. Si la resistencia 4 se asocia a una banda colocada sobre un sólido libre de tensiones y desplazamientos, sometido a la misma variación de temperatura que el sólido bajo estudio, las variaciones de las resistencias 3 (activa) y 4 (pasiva) se pueden expresar en la forma:

$$\Delta R_3 = \Delta R_3^F + \Delta R_3^T; \Delta R_4 = \Delta R_4^T \quad (I.19)$$

donde los superíndices F y T representan variaciones asociadas a cargas y a temperatura, respectivamente. Con las condiciones anteriormente enunciadas ( $\Delta R_3^T = \Delta R_4^T$ ), la variación de la diferencia de potencial que medirá el puente será:

$$\Delta E = V \frac{1}{4} \left[ \frac{\Delta R_3^F}{R_3} + \frac{\Delta R_3^T}{R_3} - \frac{\Delta R_4^T}{R_4} \right] = \frac{V}{4} \frac{\Delta R_3^F}{R_3} \quad (I.20)$$

eliminándose así el efecto de la temperatura. A este dispositivo se llama compensación por temperatura.

## I.5. ANALISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS CON GALGAS EXTENSOMETRICAS.

Las galgas eléctricas se adhieren normalmente a la superficie libre de un sólido elástico (donde el estado es de *tensión plana*), sobre el punto en el que queremos calcular su estado tensional. Consideremos un sistema de ejes x e y con origen en dicho punto (Figura I.5). Como las galgas miden deformaciones longitudinales unitarias y la expresión de  $\epsilon_m$  para una determinada dirección en el plano, definida por  $\vec{n}(\alpha, \beta)$ , viene dada por:

$$\epsilon_m = \{n\}^T [D] \{n\} = \epsilon_{xx} \alpha^2 + \epsilon_{yy} \beta^2 + 2\epsilon_{xy} \alpha\beta \quad (I.21)$$

es evidente que para determinar  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  y  $\epsilon_{xy}$  tendremos que hacer tres medidas, es decir, colocar tres galgas.

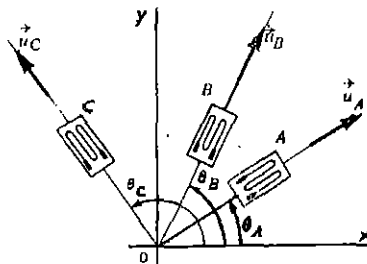


Figura I.5. Disposición de tres galgas en el entorno de un punto.

Si  $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$  son las lecturas de las galgas A, B y C, respectivamente, obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \epsilon_A = \epsilon_x \cos^2 \theta_A + \epsilon_y \sin^2 \theta_A + 2\epsilon_{xy} \cos \theta_A \sin \theta_A \\ \epsilon_B = \epsilon_x \cos^2 \theta_B + \epsilon_y \sin^2 \theta_B + 2\epsilon_{xy} \cos \theta_B \sin \theta_B \\ \epsilon_C = \epsilon_x \cos^2 \theta_C + \epsilon_y \sin^2 \theta_C + 2\epsilon_{xy} \cos \theta_C \sin \theta_C \end{cases} \quad (I.22)$$

cuyas soluciones son las componentes de la matriz de deformación en el punto considerado. Conocida ésta, queda perfectamente determinado el estado de deformación en dicho punto.

Las tres galgas suelen venir montadas en rosetas (cfr. Figura I.3b,c). En casos particulares, es posible la determinación de las tensiones mediante rosetas de menos de tres elementos, como ocurre en una pieza sometida a tracción o compresión axial, donde bastaría colocar una sola galga; o un sólido bajo un estado meridiano de tensiones ( $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_1 = \sigma_2$  y  $\tau_{xy} = 0$ ), en donde la lectura  $\epsilon$  de una sola galga en una dirección cualquiera nos proporcionaría la tensión en cualquier dirección:

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu} \epsilon \quad (I.23)$$

Cuando son necesarias dos galgas, pueden disponerse en direcciones ortogonales, tal como en la Figura I.3(b).

A partir de las componentes de la matriz de deformación, se pueden calcular las deformaciones principales mediante el círculo de Mohr, como se indica en la Figura I.6.

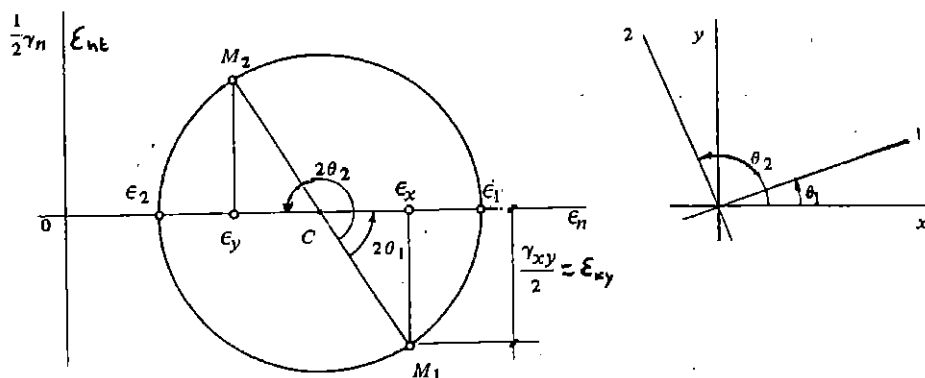


Figura I.6. Obtención de las deformaciones principales en el círculo de Mohr.

Los valores de dichas deformaciones principales son:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2} \\ \epsilon_2 &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2} \end{aligned} \quad (I.24)$$

y las direcciones principales están definidas por los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$  donde:

$$\operatorname{tg}(2\theta_1) = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (I.25)$$

Las tensiones principales se pueden obtener fácilmente aplicando la ley de Hooke:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \end{cases} \quad (I.26)$$



# **ANEXO II**

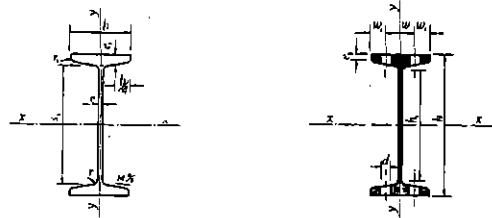
---

## **TABLAS DE PERFILES NORMALIZADOS**

---



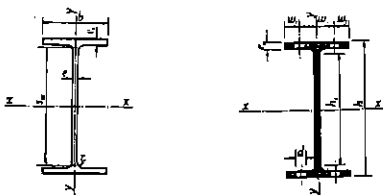
## DOBLE T PERFIL NORMAL (IPN)



- $A$  = Área de la sección
- $I$  = Momento de inercia
- $W$  = Módulo resistente
- $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  = Radio de giro
- $S_x$  = Momento estático de media sección
- $s_x = \frac{I_x}{S_x}$  = Distancia entre los centros de compresión y tracción
- $\eta$  = Rendimiento
- $u$  = Superficie lateral por metro lineal

IPN	Dimensiones (mm)						Sección $A$ cm <sup>2</sup>	Peso $P$ kg/m	Referido al eje x-x			Referido al eje y-y			$w$ mm	$w_1$ mm	$\phi$ d mm	$e_1$ mm	$S_x$ cm <sup>3</sup>	$s_x$ cm	$\eta =$ $W_x/P$	$u$ m <sup>2</sup> /m	IPN								
	$h$	$b$	$e=r$	$e_1$	$r_1$	$h_1$			$I_x$ cm <sup>4</sup>	$W_x$ cm <sup>3</sup>	$i_x$ cm	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$i_y=i$ cm										$w$ mm	$w_1$ mm	$\phi$ d mm	$e_1$ mm	$S_x$ cm <sup>3</sup>	$s_x$ cm	$\eta =$ $W_x/P$	$u$ m <sup>2</sup> /m
80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	22	10	—	4,43	11,4	6,84	3,28	0,304	80								
100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	28	12	—	5,05	19,9	8,57	4,11	0,370	100								
120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	14,2	11,1	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	32	14	—	5,67	31,8	10,3	4,91	0,439	120								
140	140	66	5,7	8,6	3,4	109	18,3	14,4	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	34	16	11	6,29	47,7	12,0	5,70	0,502	140								
160	160	74	6,3	9,5	3,8	125	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	40	18	11	6,91	68,0	13,7	6,54	0,575	160								
180	180	82	6,9	10,4	4,1	142	27,9	21,9	1.450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	44	19	13	7,53	93,4	15,5	7,35	0,640	180								
200	200	90	7,5	11,3	4,5	159	33,5	26,3	2.140	214	8,00	117	26,0	1,87	48	22	13	8,15	125	17,2	8,14	0,709	200								
220	220	98	8,1	12,2	4,9	175	39,6	31,1	3.060	278	8,80	162	33,1	2,02	52	23	13	8,77	162	18,9	8,94	0,775	220								
240	240	106	8,7	13,1	5,2	192	46,1	36,2	4.250	354	9,59	221	41,7	2,20	56	25	17	9,39	206	20,6	9,78	0,844	240								
260	260	113	9,4	14,1	5,6	208	53,4	41,9	5.740	442	10,4	288	51,0	2,32	60	27,5	17	10,15	257	22,3	10,5	0,906	260								
280	280	119	10,1	15,2	6,1	225	61,1	48,0	7.590	542	11,1	364	61,2	2,45	62	28,5	17	11,04	316	24,0	11,3	0,966	280								
300	300	125	10,8	16,2	6,5	241	69,1	54,2	9.800	653	11,9	451	72,2	2,56	64	30,5	21	11,83	381	25,7	12,0	1,030	300								
320	320	131	11,5	17,3	6,9	257	77,8	61,1	12.510	782	12,7	555	84,7	2,67	70	30,5	21	12,72	457	27,4	12,8	1,091	320								
340	340	137	12,2	18,3	7,3	274	86,8	68,1	15.700	923	13,5	674	98,4	2,80	74	31,5	21	13,51	540	29,1	13,6	1,152	340								
360	360	143	13,0	19,5	7,8	290	97,1	76,2	19.610	1.090	14,2	818	114	2,90	76	34,5	23	14,50	638	30,7	14,3	1,208	360								
380	380	149	13,7	20,5	8,2	306	107	84,0	24.010	1.260	15,0	975	131	3,02	82	34,5	23	15,29	741	32,4	15,1	1,266	380								
400	400	155	14,4	21,6	8,6	323	118	92,6	29.210	1.460	15,7	1.160	149	3,13	86	35,5	23	16,18	857	34,1	15,8	1,330	400								
450	450	170	16,2	24,3	9,7	363	147	115	45.850	2.040	17,7	1.730	203	3,43	94	39	25	18,35	1.200	38,3	17,7	1,478	450								
500	500	185	18,0	27,0	10,8	404	180	141	68.740	2.750	19,6	2.480	268	3,72	100	42,5	28	20,53	1.620	42,4	19,5	1,626	500								
550	550	200	19,0	30,0	11,9	444	213	167	99.180	3.610	21,6	3.490	349	4,02	110	45	28	23,00	2.120	46,8	21,6	1,797	550								
600	600	215	21,6	32,4	13,0	485	254	199	139.000	4.630	23,4	4.670	434	4,30	120	47,5	28	24,88	2.730	50,9	23,2	1,924	600								

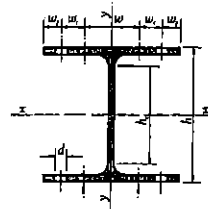
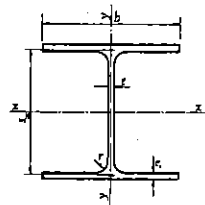
## DOBLE T PERFIL EUROPEO (IPE)



- $A$  = Área de la sección
- $I$  = Momento de inercia
- $W$  = Módulo resistente
- $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  = Radio de giro
- $S_x$  = Momento estático de media sección
- $x_c = \frac{I_x}{S_x}$  = Distancia entre los centros de compresión y tracción
- $\eta$  = Rendimiento
- $u$  = Perímetro

IPE	Dimensiones (mm)						Sección $A$ cm <sup>2</sup>	Peso $P$ kg/m	Referido al eje x-x			Referido al eje y-y			$w$ mm	$w_1$ mm	$\varnothing$ d mm	$S_x$ cm <sup>3</sup>	$x_c$ cm	$\eta = \frac{W_x}{P}$	$u$ m <sup>2</sup> /m	IPE
	$h$	$b$	$e$	$e_1$	$r_1$	$h_1$			$I_x$ cm <sup>4</sup>	$W_x$ cm <sup>3</sup>	$i_x$ cm	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm								
	80	80	46	3,8	5,2	5			59	7,64	6,00	80,1	20,0	3,24								
100	100	55	4,1	5,7	7	74	10,3	8,10	171	34,2	4,07	15,9	5,79	1,24	30	12,5	8,4	19,7	8,68	4,22	0,400	100
120	120	64	4,4	6,3	7	93	13,2	10,4	318	53,0	4,90	27,7	8,65	1,45	35	14,5	8,4	30,4	10,5	5,11	0,475	120
140	140	73	4,7	6,9	7	112	16,4	12,9	541	77,3	5,74	44,9	12,3	1,65	40	16,5	11	44,2	12,3	6,00	0,551	140
160	160	82	5,0	7,4	9	127	20,1	15,8	869	109	6,58	68,3	16,7	1,84	44	19	13	61,9	14,0	6,89	0,623	160
180	180	91	5,3	8,0	9	146	23,9	18,8	1.320	146	7,42	101	22,2	2,05	48	21,5	13	83,2	15,8	7,78	0,698	180
200	200	100	5,6	8,5	12	159	28,5	22,4	1.940	194	8,26	142	28,5	2,24	52	24	13	110	17,6	8,69	0,768	200
220	220	110	5,9	9,2	12	177	33,4	26,2	2.770	252	9,11	205	37,3	2,48	58	26	17	143	19,4	9,62	0,848	220
240	240	120	6,2	9,8	15	190	39,1	30,7	3.890	324	9,97	284	47,3	2,69	65	27,5	17	183	21,2	10,6	0,922	240
270	270	135	6,6	10,2	15	219	45,9	36,1	5.790	429	11,2	420	62,2	3,02	72	31,5	21	242	23,9	11,9	1,041	270
300	300	150	7,1	10,7	15	248	53,8	42,2	8.360	557	12,5	604	80,5	3,35	80	35	23	314	26,6	13,2	1,159	300
330	330	160	7,5	11,5	18	271	62,6	49,1	11.770	713	13,7	788	98,5	3,55	85	37,5	25	402	29,3	14,5	1,254	330
360	360	170	8,0	12,7	18	298	72,7	57,1	16.270	904	15,0	1.040	123	3,79	90	40	25	510	31,9	15,8	1,353	360
400	400	180	8,6	13,5	21	331	84,5	66,3	23.130	1.160	16,5	1.320	146	3,95	95	42,5	28	654	35,4	17,4	1,467	400
450	450	190	9,4	14,6	21	378	98,8	77,6	33.740	1.500	18,5	1.680	176	4,12	100	45	28	851	39,7	19,3	1,605	450
500	500	200	10,2	16,0	21	426	116	90,7	48.200	1.930	20,4	2.140	214	4,31	110	45	28	1.100	43,9	21,3	1,744	500
550	550	210	11,1	17,2	24	467	134	106	67.120	2.440	22,3	2.670	254	4,45	115	47,5	28	1.390	48,2	23,1	1,877	550
600	600	220	12,0	19,0	24	514	156	122	92.080	3.070	24,1	3.390	308	4,66	120	50	28	1.760	52,4	25,1	2,015	600

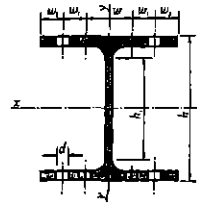
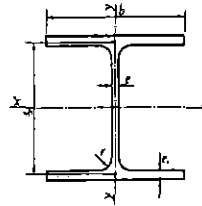
## DOBLE T ALA ANCHA. SERIE LIGERA (HEA)



- A = Área de la sección
- I = Momento de inercia
- W = Módulo resistente
- $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  = Radio de giro
- $S_x$  = Momento estático de media sección
- $s_x = \frac{I_x}{S_x}$  = Distancia entre los centros de compresión y tracción
- $\eta$  = Rendimiento
- u = Perímetro

HEA	Dimensiones (mm)						Sección A cm <sup>2</sup>	Peso P kg/m	Referido al eje x-x			Referido al eje y-y			w	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	∅ d mm	S <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	s <sub>x</sub> cm	η = W <sub>x</sub> /P	u m <sup>2</sup> /m	HEA			
	h	b	e	e <sub>1</sub>	r	h <sub>1</sub>			I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm										w	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>
100	96	100	5	8	12	56	21,2	16,7	349	72,8	4,06	134	26,8	2,51	55	—	22,5	13	41,5	8,41	4,36	0,561	100			
120	114	120	5	8	12	74	25,3	19,9	606	106	4,89	231	38,5	3,02	65	—	27,5	17	59,7	10,1	5,33	0,677	120			
140	133	140	5,5	8,5	12	92	31,4	24,7	1.030	155	5,73	389	55,6	3,52	75	—	32,5	21	86,7	11,9	6,28	0,794	140			
160	152	160	6	9	15	104	38,8	30,4	1.670	220	6,57	616	76,9	3,98	85	—	37,5	23	123	13,6	7,24	0,906	160			
180	171	180	6	9,5	15	122	45,3	35,5	2.510	294	7,45	925	103	4,52	100	—	40	25	162	15,5	8,28	1,02	180			
200	190	200	6,5	10	18	134	53,8	42,3	3.690	389	8,28	1.340	134	4,98	110	—	45	25	215	17,2	9,20	1,14	200			
220	210	220	7	11	18	152	64,3	50,5	5.410	515	9,17	1.950	178	5,51	120	—	50	25	284	19,0	10,2	1,26	220			
240	230	240	7,5	12	21	164	76,8	60,3	7.760	675	10,11	2.770	231	6,00	90	35	40	25	372	20,9	11,2	1,37	240			
260	250	260	7,5	12,5	24	177	86,8	68,2	10.450	836	11,0	3.670	282	6,50	100	40	40	25	460	22,7	12,3	1,48	260			
280	270	280	8	13	24	196	97,3	76,4	13.670	1.010	11,9	4.760	340	7,00	110	45	40	25	556	24,6	13,2	1,60	280			
300	290	300	8,5	14	27	208	113	88,3	18.260	1.260	12,7	6.310	421	7,47	120	50	40	25	692	26,4	14,3	1,72	300			
320	310	300	9	15,5	27	225	124	97,6	22.930	1.480	13,6	6.990	466	7,51	120	50	40	25	814	28,2	15,2	1,76	320			
340	330	300	9,5	16,5	27	243	133	105	27.690	1.680	14,4	7.440	495	7,46	120	50	40	25	925	29,9	16,0	1,79	340			
360	350	300	10	17,5	27	261	143	112	33.090	1.890	15,2	7.890	525	7,43	120	50	40	25	1.040	31,7	16,9	1,83	360			
400	390	300	11	19	27	298	159	125	45.070	2.310	16,8	8.560	571	7,34	120	50	40	25	1.280	35,2	18,5	1,91	400			
450	440	300	11,5	21	27	344	178	140	63.720	2.900	18,9	9.470	631	7,29	120	50	45	25	1.610	39,6	20,7	2,01	450			
500	490	300	12	23	27	390	198	155	86.970	3.550	21,0	10.370	691	7,24	120	45	45	28	1.970	44,1	22,9	2,11	500			
550	540	300	12,5	24	27	438	212	166	111.900	4.150	23,0	10.820	721	7,15	120	45	45	28	2.310	48,4	25,0	2,21	550			
600	590	300	13	25	27	486	226	178	141.200	4.790	25,0	11.270	751	7,05	120	45	45	28	2.680	52,8	26,9	2,31	600			

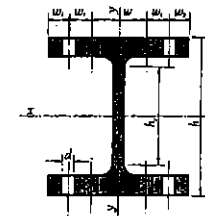
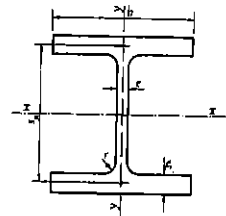
## DOBLE T ALA ANCHA. SERIE MEDIA (HEB)



- A = Área de la sección
- I = Momento de inercia
- W = Módulo resistente
- $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  = Radio de giro
- $S_x$  = Momento estático de media sección
- $s_x = \frac{I_x}{S_x}$  = Distancia entre los centros de compresión y tracción
- $\eta$  = Rendimiento
- w = Perímetro

HEB	Dimensiones (mm)						Sección A cm <sup>2</sup>	Peso P kg/m	Referido al eje x-x			Referido al eje y-y			w	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	Ø d mm	S <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	s <sub>x</sub> cm	η = W <sub>x</sub> /P	u m <sup>2</sup> /m	HEB
	h	b	e	a <sub>1</sub>	r	h <sub>1</sub>			I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm									
	100	100	100	6	10	12			56	26,0	20,4	450	89,9	4,16									
120	120	120	6,5	11	12	74	34,0	26,7	864	144	5,04	318	52,9	3,06	65	—	27,5	17	82,6	10,5	5,39	0,686	120
140	140	140	7	12	12	92	43,0	33,7	1.510	216	5,93	550	78,5	3,58	75	—	32,5	21	123	12,3	6,41	0,805	140
160	160	160	8	13	15	104	54,3	42,6	2.490	311	6,78	889	111	4,05	85	—	37,5	23	177	14,1	7,30	0,918	160
180	180	180	8,5	14	15	122	65,3	51,2	3.830	426	7,66	1.360	151	4,57	100	—	40	25	241	15,9	8,32	1,04	180
200	200	200	9	15	18	134	78,1	61,3	5.700	570	8,54	2.000	209	5,07	110	—	45	25	321	17,7	9,30	1,15	200
220	220	220	9,5	16	18	152	91,0	71,5	8.090	736	9,43	2.840	258	5,59	120	—	50	25	414	19,6	10,3	1,27	220
240	240	240	10	17	21	164	106	83,2	11.260	938	10,3	3.920	327	6,08	90	35	40	25	527	21,4	11,3	1,38	240
260	260	260	10	17,5	24	177	118	93,0	14.920	1.150	11,2	5.130	395	6,58	100	40	40	25	641	23,3	12,4	1,50	260
280	280	280	10,5	18	24	196	131	103	19.270	1.380	12,1	6.590	471	7,09	110	45	40	25	767	25,1	13,4	1,62	280
300	300	300	11	19	27	208	149	117	25.170	1.680	13,0	8.560	571	7,58	120	50	40	25	934	26,9	14,4	1,73	300
320	320	300	11,5	20,5	27	225	161	127	30.820	1.930	13,8	9.240	616	7,57	120	50	40	25	1.070	28,7	15,2	1,77	320
340	340	300	12	21,5	27	243	171	134	36.660	2.160	14,6	9.690	646	7,53	120	50	40	25	1.200	30,4	16,1	1,81	340
360	360	300	12,5	22,5	27	261	181	142	43.190	2.400	15,5	10.140	676	7,49	120	50	40	25	1.340	32,2	16,9	1,85	360
400	400	300	13,5	24	27	298	198	155	57.680	2.880	17,1	10.820	721	7,40	120	50	40	25	1.620	35,7	18,6	1,93	400
450	450	300	14	26	27	344	218	171	79.890	3.550	19,1	11.720	781	7,33	120	50	40	25	1.990	40,1	20,8	2,03	450
500	500	300	14,5	28	27	390	239	187	107.200	4.290	21,2	12.620	842	7,27	120	45	45	28	2.410	44,5	22,9	2,12	500
550	550	300	15	29	27	438	254	199	136.700	4.970	23,2	13.080	872	7,17	120	45	45	28	2.800	48,9	25,0	2,22	550
600	600	300	15,5	30	27	486	270	212	171.000	5.700	25,2	13.530	902	7,08	120	45	45	28	3.210	53,2	26,9	2,32	600

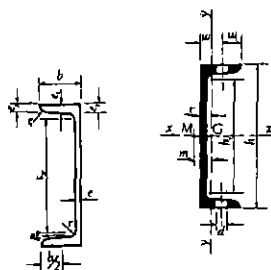
## DOBLE T ALA ANCHA. SERIE PESADA (HEM)



$A$  = Área de la sección  
 $I$  = Momento de inercia  
 $W$  = Módulo resistente  
 $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  = Radio de giro  
 $S_x$  = Momento estático de media sección  
 $i_x = \frac{I_x}{S_x}$  = Distancia entre los centros de compresión y tracción  
 $\eta$  = Rendimiento  
 $u$  = Perímetro

HEM	Dimensiones (mm)						Sección $A$ $cm^2$	Peso $P$ $kg/m$	Referido al eje x-x			Referido al eje y-y			$w$	$w_1$	$w_2$	$\emptyset$ $d$ mm	$S_x$ $cm^3$	$s_x$ cm	$\eta =$ $W_x/P$	$u$ $m^2/m$	HEM
	$h$	$b$	$e$	$e_1$	$r$	$h_1$			$I_x$ $cm^4$	$W_x$ $cm^3$	$i_x$ cm	$I_y$ $cm^4$	$W_y$ $cm^3$	$i_y$ cm									
	100	120	106	12	20	12			56	53,2	41,8	1.140	190	4,63									
120	140	126	12,5	21	12	74	66,4	52,1	2.020	288	5,51	703	112	3,25	65	—	30,5	17	175	11,5	5,53	0,738	120
140	160	146	13	22	12	92	80,6	63,2	3.290	411	6,39	1.140	157	3,77	75	—	35,5	21	247	13,3	6,50	0,857	140
160	180	166	14	23	15	104	97,1	76,2	5.100	566	7,25	1.760	212	4,26	85	—	40,5	23	337	15,1	7,43	0,970	160
180	200	186	14,5	24	15	122	113	88,9	7.480	748	8,13	2.580	277	4,77	95	—	45,5	25	442	16,9	8,41	1,09	180
200	220	206	15	25	18	134	131	103	10.640	967	9,00	3.650	354	5,27	105	—	50,5	25	568	18,7	9,39	1,20	200
220	240	226	15,5	26	18	152	149	117	14.600	1.220	9,89	5.010	444	5,79	115	—	55,5	25	710	20,6	10,4	1,32	220
240	270	248	18	32	21	164	200	157	24.290	1.800	11,0	8.150	657	6,39	90	35	44	25	1.060	22,9	11,5	1,46	240
260	290	268	18	32,5	24	177	220	172	31.310	2.160	11,9	10.450	780	6,90	100	40	44	25	1.260	24,8	12,6	1,57	260
280	310	288	18,5	33	24	196	240	189	39.550	2.550	12,8	13.160	914	7,40	110	45	44	25	1.480	26,7	13,5	1,69	280
300	340	310	21	39	27	208	303	238	59.200	3.480	14	19.400	1.250	8,00	120	50	45	25	2.040	29,0	14,6	1,83	300
320	359	309	21	40	27	225	312	245	68.130	3.800	14,8	19.710	1.280	7,95	120	50	44,5	25	2.220	30,7	15,5	1,87	320
340	377	309	21	40	27	243	316	248	76.370	4.050	15,6	19.710	1.280	7,90	120	50	44,5	25	2.360	32,4	16,3	1,90	340
360	395	308	21	40	27	261	319	250	84.870	4.300	16,3	19.520	1.270	7,83	120	50	44	25	2.490	34,0	17,2	1,93	360
400	432	307	21	40	27	298	326	256	104.100	4.820	17,9	19.340	1.260	7,70	120	50	43,5	25	2.790	37,4	18,8	2,00	400
450	478	307	21	40	27	344	335	263	131.500	5.500	19,8	19.340	1.260	7,59	120	50	43,5	25	3.170	41,5	20,9	2,10	450
500	524	306	21	40	27	390	344	270	161.900	6.180	21,7	19.150	1.250	7,46	120	50	43	28	3.550	45,7	22,9	2,18	500
550	572	306	21	40	27	438	354	278	198.000	6.920	23,6	19.150	1.250	7,35	120	50	43	28	3.970	49,9	24,9	2,28	550
600	620	305	21	40	27	486	364	285	237.400	7.660	25,6	18.980	1.240	7,22	120	50	42,5	28	4.390	54,1	26,9	2,37	600

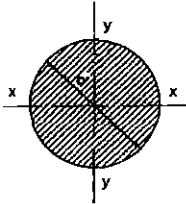
## PERFIL EN U NORMAL (UPN)



- A = Área de la sección
- I = Momento de inercia
- W = Módulo resistente
- $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  = Radio de giro
- $S_x =$  Momento estático de media sección
- $s_x = \frac{I_x}{S_x}$  = Distancia entre los centros de compresión y tracción
- m = Distancia del baricentro G al centro de esfuerzos cortantes M
- $\eta$  = Rendimiento
- u = Superficie lateral por metro lineal

UPN	Dimensiones (mm)						Sec. A cm <sup>2</sup>	Peso P kg/m	Referido al eje x-x				Referido al eje y-y			w mm	w1 mm	d mm	e2 mm	e3 mm	Sx cm <sup>3</sup>	sx cm	c cm	m cm	$\eta = \frac{W_x}{P}$	$\mu$ m <sup>2</sup> /m	UPN
	h	b	e	e1=r	r1	h1			Ix cm <sup>4</sup>	Wx cm <sup>3</sup>	ix cm	Iy cm <sup>4</sup>	Wy cm <sup>3</sup>	iy = i cm													
	80	80	45	6,0	8,0	4,0			46	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4												
100	100	50	6,0	8,5	4,5	64	13,5	10,6	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	30	20	13	10,50	6,50	24,5	8,42	1,55	2,93	3,89	0,372	100	
120	120	55	7,0	9,0	4,5	82	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	30	25	17	11,20	6,80	36,3	10,0	1,60	3,03	4,55	0,434	120	
140	140	60	7,0	10,0	5,0	98	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	35	25	17	12,40	7,60	51,4	11,8	1,75	3,37	5,40	0,489	140	
160	160	65	7,5	10,5	5,5	115	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	35	30	21	13,10	7,90	68,8	13,3	1,84	3,56	6,13	0,546	160	
180	180	70	8,0	11,0	5,5	133	28,0	22,0	1.350	150	6,95	114	22,4	2,02	40	30	21	13,80	8,20	89,6	15,1	1,92	3,75	6,82	0,611	180	
200	200	75	8,5	11,5	6,0	151	32,2	25,3	1.910	191	7,70	148	27,0	2,14	40	35	23	14,50	8,30	114	16,8	2,01	3,94	7,56	0,661	200	
220	220	80	9,0	12,5	6,5	167	37,4	29,4	2.690	245	8,48	197	33,6	2,30	45	35	23	15,70	9,30	146	18,5	2,14	4,20	8,35	0,718	220	
240	240	85	9,5	13,0	6,5	184	42,3	33,2	3.600	300	9,22	248	39,6	2,42	45	40	25	16,40	9,60	179	20,1	2,23	4,39	9,03	0,775	240	
260	260	90	10,0	14,0	7,0	200	48,3	37,9	4.820	371	9,99	317	47,7	2,56	50	40	25	17,60	10,40	221	21,8	2,36	4,66	9,78	0,834	260	
280	280	95	10,0	15,0	7,5	216	53,3	41,8	6.280	448	10,90	399	57,2	2,74	50	45	25	18,30	11,20	266	23,6	2,53	5,02	10,70	0,890	280	
300	300	100	10,0	16,0	8,0	232	58,8	46,2	8.030	535	11,70	495	67,8	2,90	55	45	25	20,00	12,00	316	25,4	2,70	5,41	11,60	0,950	300	
320	320	100	14,0	17,5	8,75	246	75,8	59,5	10.870	679	12,1	597	80,6	2,81	55	45	25	20,35	15,35	413	26,3	2,60	4,82	11,4	0,982	320	
350	350	100	14,0	16,0	8,0	282	77,3	60,6	12.840	734	12,9	570	75,0	2,72	55	45	25	18,85	13,85	459	28,6	2,40	4,45	12,1	1,047	350	
380	380	102	13,5	16,0	8,0	313	80,4	63,1	15.760	829	14,0	615	78,7	2,77	60	42	25	18,89	13,79	507	31,1	2,38	4,58	13,2	1,110	380	
400	400	110	14,0	18,0	9,0	324	91,5	71,8	20.350	1.020	14,9	846	102	3,04	60	50	25	21,10	15,60	618	32,9	2,65	5,11	14,2	1,182	400	



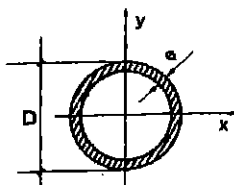


perfiles redondos

d mm	A cm <sup>2</sup>	P kg/m	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm
5	0,196	0,154	0,003	0,012	0,125
6	0,283	0,222	0,008	0,021	0,150
7	0,386	0,302	0,012	0,034	0,175
8	0,503	0,395	0,020	0,050	0,200
9	0,636	0,499	0,032	0,072	0,225
10	0,785	0,617	0,049	0,098	0,250
11	0,950	0,746	0,072	0,131	0,275
12	1,13	0,888	0,102	0,170	0,300
13	1,33	1,04	0,140	0,216	0,325
14	1,54	1,21	0,189	0,269	0,350
16	1,77	1,39	0,249	0,331	0,375
16	2,01	1,58	0,322	0,402	0,400
17	2,27	1,78	0,410	0,482	0,425
18	2,55	2,00	0,515	0,573	0,450
19	2,84	2,23	0,640	0,673	0,475
20	3,14	2,47	0,785	0,785	0,500
21	3,46	2,72	0,955	0,909	0,525
22	3,80	2,98	1,15	1,05	0,550
23	4,15	3,26	1,37	1,19	0,575
24	4,52	3,55	1,63	1,36	0,600
25	4,91	3,85	1,92	1,53	0,625
26	5,31	4,17	2,24	1,73	0,650
27	5,73	4,48	2,61	1,93	0,675
28	6,16	4,83	3,02	2,16	0,700
29	6,61	5,19	3,47	2,39	0,725
30	7,07	5,56	3,98	2,65	0,750
31	7,55	5,92	4,53	2,92	0,775
32	8,04	6,31	5,15	3,22	0,800
33	8,55	6,71	5,82	3,53	0,825
34	9,08	7,13	6,56	3,86	0,850
35	9,62	7,55	7,37	4,21	0,875
36	10,2	7,98	8,24	4,58	0,900
37	10,8	8,44	9,20	4,97	0,925
38	11,3	8,90	10,2	5,39	0,950
39	11,9	9,38	11,4	5,82	0,975
40	12,5	9,86	12,6	6,28	1,00
41	13,2	10,4	13,9	6,77	1,02
42	13,9	10,9	15,3	7,27	1,05
43	14,5	11,4	16,8	7,81	1,07
44	15,2	11,9	18,4	8,36	1,10

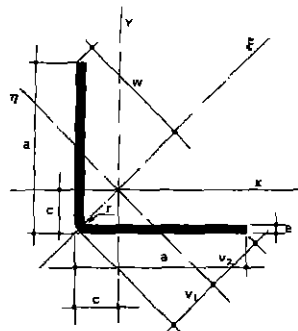
d mm	A cm <sup>2</sup>	P kg/m	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm
45	16,9	12,5	20,2	8,95	1,12
46	16,6	13,0	22,0	9,56	1,15
47	17,3	13,6	24,0	10,2	1,17
48	18,1	14,2	26,1	10,9	1,20
49	18,9	14,8	28,3	11,6	1,22
50	19,6	15,4	30,7	12,3	1,25
55	23,8	18,7	44,9	16,3	1,37
60	28,3	22,2	63,9	21,2	1,50
65	33,2	26,0	87,6	26,9	1,62
70	38,5	30,2	118	33,7	1,75
75	44,2	34,7	155	41,4	1,87
80	50,3	39,5	201	50,3	2,00
85	56,7	44,5	256	60,3	2,12
90	63,6	49,9	322	71,6	2,25
95	70,9	55,6	400	84,2	2,37
100	78,5	61,7	491	98,2	2,50
105	86,6	68,0	597	114	2,62
110	95,0	74,6	719	131	2,75
115	104	81,5	859	149	2,87
120	113	88,8	1020	170	3,00
125	123	96,3	1200	192	3,12
130	133	104	1400	216	3,25
135	143	112	1630	242	3,37
140	154	121	1890	269	3,50
150	177	139	2490	331	3,75
160	201	158	3220	402	4,00
170	227	178	4100	482	4,25
180	255	200	5150	573	4,50
190	284	223	6400	673	4,75
200	314	247	7850	785	5,00
210	348	272	9550	908	5,25
220	380	298	11500	1050	5,50
230	415	326	13740	1190	5,75
240	452	355	16290	1380	6,00
250	491	385	19180	1530	6,25
260	531	417	22440	1730	6,50
270	573	450	26090	1930	6,75
280	616	474	30180	2160	7,00
290	661	519	34730	2390	7,25
300	707	555	39770	2650	7,50

**tubo redondo**



$S_x$  = Momento estático de medio perfil respecto a  $x-x$   
 S = Superficie de pintura exterior  
 K = Módulo de torsión

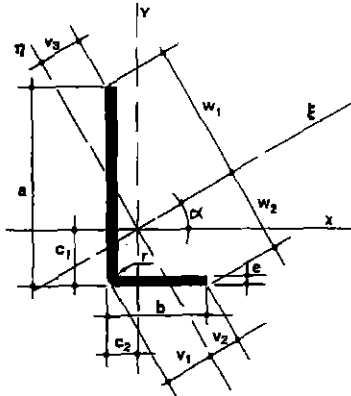
D mm	e mm	P kg/m	A cm <sup>2</sup>	S m <sup>2</sup> /t	I cm <sup>4</sup>	W cm <sup>3</sup>	2S <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	i cm	K cm <sup>4</sup>
50	2,0	2,38	3,01	86,3	8,7	3,48	4,60	1,69	17,4
	3,0	3,47	4,42	45,1	12,2	4,91	6,62	1,66	24,5
	4,0	4,53	5,78	34,8	15,4	6,16	8,46	1,63	30,8
60	2,0	2,88	3,64	85,8	15,3	5,11	6,72	2,06	30,8
	3,0	4,21	5,37	44,6	21,8	7,29	9,74	2,01	43,7
	4,0	5,52	7,03	34,1	27,7	9,24	12,5	1,98	66,4
75	2,0	3,60	4,58	86,4	30,5	8,16	10,6	2,58	81,1
	3,0	5,32	6,78	44,2	44,0	11,7	15,5	2,54	88,0
	4,0	7,00	8,92	33,6	56,3	15,0	20,1	2,51	112
	5,0	8,63	10,99	27,2	67,6	18,0	24,5	2,48	136
90	2,0	4,34	6,62	86,1	53,5	11,9	15,4	3,11	107
	3,0	6,49	8,19	43,9	77	17,2	22,7	3,07	156
	4,0	8,48	10,80	33,3	100	22,2	28,6	3,04	200
	5,0	10,4	13,36	26,9	121	26,8	36,1	3,01	242
	6,0	12,4	15,83	22,7	140	31,1	42,3	2,97	280
94	2,0	4,5	5,78	86,0	61	13,0	16,9	3,25	122
	3,0	6,7	8,57	43,8	89	18,8	24,8	3,21	177
	4,0	8,9	11,30	33,2	114	24,4	32,3	3,18	229
	5,0	11,0	13,98	26,9	138	29,5	39,6	3,15	277
	6,0	13,0	16,68	22,6	161	34,3	46,4	3,11	322
100	2,0	4,8	6,16	84,9	73	14,7	19,2	3,48	147
	3,0	7,2	8,14	43,7	107	21,6	26,2	3,43	215
	4,0	9,6	12,06	33,1	139	27,8	36,8	3,39	278
	5,0	11,7	14,92	26,8	168	33,7	45,1	3,36	337
	6,0	13,9	17,71	22,5	196	39,2	53,0	3,33	392
115	2,0	5,8	7,10	84,8	113	19,7	26,5	3,98	226
	3,0	8,3	10,55	43,6	166	28,8	37,6	3,98	331
	4,0	10,9	13,94	32,9	216	37,4	49,2	3,92	430
	5,0	13,6	17,27	26,6	261	45,5	60,5	3,89	523
	6,0	16,1	20,6	22,4	306	53,2	71,2	3,86	612
	7,0	18,6	23,76	19,3	347	60,4	81,6	3,82	695
126	3,0	9,0	11,49	43,6	214	34,2	44,6	4,31	428
	4,0	11,9	15,20	32,8	278	44,5	56,6	4,28	557
	5,0	14,8	18,84	26,5	339	54,3	72,0	4,24	679
	6,0	17,6	22,43	22,3	398	63,6	84,9	4,21	796
	7,0	20,4	25,94	19,2	463	72,6	97,4	4,17	906



## perfiles conformados L

u = perímetro

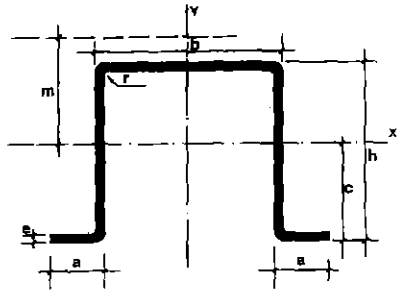
Perfil	Dimensiones				Posición de los ejes				Términos de sección										Peso P kg/m	Suministro	
	a mm	b mm	r mm	u mm	c mm	v <sub>1</sub> cm	v <sub>2</sub> cm	w cm	A cm <sup>2</sup>	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>xy</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>ξ</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>η</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>ξ</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>η</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	i <sub>ξ</sub> cm			i <sub>η</sub> cm
LF 40.2	40	2	2,5	157	1,10	1,36	1,42	2,83	1,53	2,44	1,51	3,96	0,928	0,841	1,40	0,653	1,26	1,61	0,779	1,20	P
LF 40.3	40	3	3	156	1,14	1,36	1,43	2,83	2,25	3,51	2,20	5,71	1,32	1,23	2,02	0,920	1,25	1,59	0,765	1,77	C
LF 40.4	40	4	6	153	1,20	1,28	1,41	2,83	2,90	4,43	2,89	7,32	1,55	1,58	2,59	1,09	1,24	1,59	0,730	2,28	C
LF 50.2	50	2	3	197	1,35	1,70	1,77	3,54	1,93	4,85	3,00	7,85	1,85	1,33	2,22	1,05	1,59	2,02	0,980	1,51	P
LF 50.3	50	3	6	194	1,41	1,62	1,76	3,54	2,81	6,97	4,44	11,4	2,52	1,94	2,23	1,44	1,57	2,01	0,947	2,21	C
LF 50.4	50	4	8	191	1,46	1,57	1,75	3,54	3,67	8,92	5,82	14,7	3,09	2,52	4,17	1,77	1,56	2,01	0,919	2,88	C
LF 60.3	60	3	6	234	1,66	1,97	2,11	4,24	3,41	12,3	7,74	20,0	4,54	2,83	4,72	2,15	1,90	2,42	1,15	2,68	P
LF 60.4	60	4	8	231	1,71	1,92	2,10	4,24	4,47	15,8	10,2	26,0	5,66	3,69	6,13	2,69	1,88	2,41	1,13	3,51	C
LF 60.5	60	5	10	229	1,77	1,88	2,10	4,24	5,48	19,1	12,5	31,7	6,59	4,52	7,47	3,14	1,87	2,40	1,10	4,30	C
LF 80.4	80	4	8	311	2,21	2,63	2,81	5,66	6,07	38,8	24,5	63,3	14,3	6,70	11,2	5,09	2,53	3,23	1,54	4,76	P
LF 80.5	80	5	10	309	2,26	2,58	2,81	5,66	7,48	47,3	30,3	77,6	17,1	8,25	13,7	6,07	2,51	3,22	1,51	5,87	C
LF 80.6	80	6	12	307	2,32	2,53	2,80	5,66	8,85	55,4	35,9	91,3	19,4	9,75	16,1	6,84	2,50	3,21	1,48	6,95	C
LF 100.5	100	5	6	391	2,75	3,35	3,54	7,07	9,52	95,1	59,4	155	35,7	13,1	21,9	10,1	3,16	4,03	1,94	7,48	P
LF 100.6	100	6	10	389	2,80	3,30	3,53	7,07	11,3	112	70,7	183	41,2	15,6	25,8	11,7	3,15	4,02	1,91	8,87	C
LF 100.7	100	7	12	387	2,86	3,25	3,53	7,07	13,0	128	81,8	210	46,2	17,9	29,7	13,1	3,13	4,01	1,88	10,2	C
LF 120.5	120	5	8	471	3,25	4,05	4,25	8,49	11,5	167	104	270	63,4	19,1	31,9	14,9	3,61	4,84	2,35	9,05	P
LF 120.6	120	6	10	469	3,30	4,01	4,24	8,49	13,7	197	123	320	73,8	22,7	37,8	17,4	3,79	4,84	2,32	10,8	C
LF 120.7	120	7	12	467	3,36	3,96	4,24	8,49	15,8	226	143	369	83,4	26,2	43,5	19,7	3,78	4,83	2,29	12,4	C



## perfiles conformados LD

u = perímetro

Perfil	Dimensiones				Posición de los ejes								Términos de sección											Peso P kg/m	Suministro				
	a mm	b mm	e mm	r mm	u mm	c <sub>1</sub> cm	c <sub>2</sub> cm	v <sub>1</sub> cm	v <sub>2</sub> cm	v <sub>3</sub> cm	w <sub>1</sub> cm	w <sub>2</sub> cm	tg α	A cm <sup>2</sup>	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>xy</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>ξ</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>η</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>ξ</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>η</sub> cm <sup>3</sup>			i <sub>x</sub> cm	i <sub>y</sub> cm	i <sub>ξ</sub> cm	i <sub>η</sub> cm
LF 40.20.2	40	20	2	2,5	117	1,45	0,421	0,697	1,18	0,491	2,57	1,83	0,287	1,13	1,90	0,344	0,487	2,05	0,204	0,746	0,218	0,796	0,174	1,30	0,552	1,35	0,425	0,887	P
LF 40.20.3	40	20	3	3	116	1,50	0,462	0,714	1,15	0,531	2,53	1,86	0,288	1,65	2,71	0,480	0,693	2,91	0,282	1,08	0,312	1,15	0,246	1,28	0,539	1,33	0,413	1,30	C
LF 50.25.2	50	25	2	2,5	147	1,78	0,504	0,867	1,49	0,592	3,23	2,26	0,286	1,43	3,81	0,692	0,969	4,09	0,415	1,18	0,347	1,26	0,279	1,63	0,696	1,69	0,559	1,12	P
LF 50.25.3	50	25	3	3	146	1,83	0,545	0,884	1,46	0,632	3,20	2,30	0,285	2,10	5,48	0,980	1,39	5,88	0,583	1,73	0,501	1,84	0,399	1,61	0,683	1,87	0,527	1,65	C
LF 60.30.3	60	30	3	3	176	2,16	0,629	1,05	1,77	0,733	3,86	2,73	0,284	2,55	9,69	1,74	2,46	10,4	1,05	2,53	0,735	2,69	0,590	1,95	0,827	2,02	0,640	2,00	P
LF 60.30.4	60	30	4	6	173	2,24	0,679	1,04	1,71	0,786	3,80	2,80	0,292	3,30	12,3	2,20	3,22	13,2	1,26	3,26	0,948	3,48	0,736	1,93	0,816	2,00	0,617	2,59	C
LF 80.40.4	80	40	4	6	233	2,91	0,845	1,38	2,34	0,988	5,13	3,67	0,289	4,50	30,3	5,49	7,84	32,6	3,22	5,95	1,74	6,36	1,38	2,60	1,10	2,69	0,848	3,53	P
LF 80.40.5	80	40	5	8	231	2,97	0,893	1,38	2,2	1,04	5,07	3,73	0,293	5,52	36,6	6,59	9,62	39,4	3,77	7,29	2,12	7,77	1,65	2,57	1,09	2,67	0,828	4,34	C
LF 100.50.5	100	50	5	8	291	3,64	1,06	1,72	2,91	1,24	6,40	4,59	0,290	7,02	73,9	13,4	19,2	79,5	7,81	11,6	3,39	12,4	2,68	3,24	1,38	3,36	1,06	5,51	P
LF 100.50.6	100	50	6	10	289	3,71	1,11	1,72	2,86	1,29	6,35	4,65	0,293	8,30	86,2	15,6	22,7	92,9	8,90	13,7	3,99	14,6	3,11	3,22	1,37	3,35	1,04	6,52	C
LF 120.60.5	120	60	5	8	351	4,30	1,22	2,06	3,53	1,44	7,73	5,46	0,299	8,52	130	23,7	33,6	140	14,0	16,9	4,97	18,1	3,97	3,91	1,67	4,05	1,28	6,69	P
LF 120.60.6	120	60	6	10	349	4,37	1,27	2,06	3,49	1,49	7,68	5,52	0,291	10,1	153	27,7	39,8	165	16,1	20,0	5,86	21,4	4,63	3,89	1,66	4,04	1,28	7,93	C



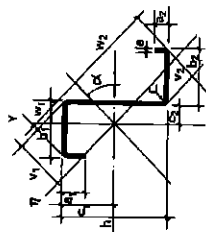
## perfiles conformados omega

u = perímetro

Perfil	Dimensiones						Términos de sección											Peso	
	h mm	b mm	a mm	e mm	r mm	u mm	c cm	m cm	A cm <sup>2</sup>	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>t</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>a</sub> cm <sup>6</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	i <sub>y</sub> cm	P kg/m	Suministro
OF 40.2	40	40	15	2	2,5	272	2,14	3,46	2,72	6,08	9,84	0,0363	10,5	2,84	2,98	1,50	1,90	2,13	P
OF 40.2,5	40	40	15	2,5	2,5	267	2,14	3,42	3,34	7,24	11,7	0,0696	12,0	3,38	3,61	1,47	1,88	2,62	C
OF 40.3	40	40	15	3	3	261	2,14	3,39	3,91	8,17	13,3	0,117	12,9	3,81	4,17	1,45	1,85	3,07	C
OF 50.2	50	50	17	2	2,5	340	2,73	4,38	3,40	12,0	18,9	0,0453	33,2	4,40	4,72	1,88	2,36	2,67	P
OF 50.2,5	50	50	17	2,5	2,5	335	2,73	4,34	4,19	14,4	22,8	0,0873	38,8	5,29	5,76	1,86	2,33	3,29	C
OF 50.3	50	50	17	3	3	329	2,73	4,31	4,93	16,5	26,1	0,1480	42,7	6,04	6,70	1,83	2,30	3,87	C
OF 60.2	60	40	20	2	2,5	372	3,00	5,19	3,72	18,2	15,3	0,0496	43,0	6,08	4,01	2,21	2,03	2,92	P
OF 60.2,5	60	40	20	2,5	2,5	367	3,00	5,15	4,59	22,0	18,3	0,0956	50,6	7,34	4,89	2,19	2,00	3,60	C
OF 60.3	60	40	20	3	3	361	3,00	5,12	5,41	25,3	21,0	0,162	56,1	8,44	5,68	2,16	1,97	4,25	C
OF 80.2,5	80	50	25	2,5	2,5	487	4,00	6,95	6,09	52,6	38,8	0,1268	198	13,1	8,17	2,94	2,52	4,78	P
OF 80.3	80	50	25	3	3	481	4,00	6,92	7,21	61,0	45,0	0,216	225	15,3	9,57	2,91	2,50	5,66	C
OF 100.2,5	100	50	30	2,5	2,5	587	4,83	8,48	7,34	96,9	50,7	0,1529	471	18,8	9,66	3,63	2,63	5,76	P
OF 100.3	100	50	30	3	3	581	4,83	8,45	8,71	113	59,0	0,261	539	21,9	11,3	3,61	2,60	6,94	C

perfiles conformados Z

u = perimetro

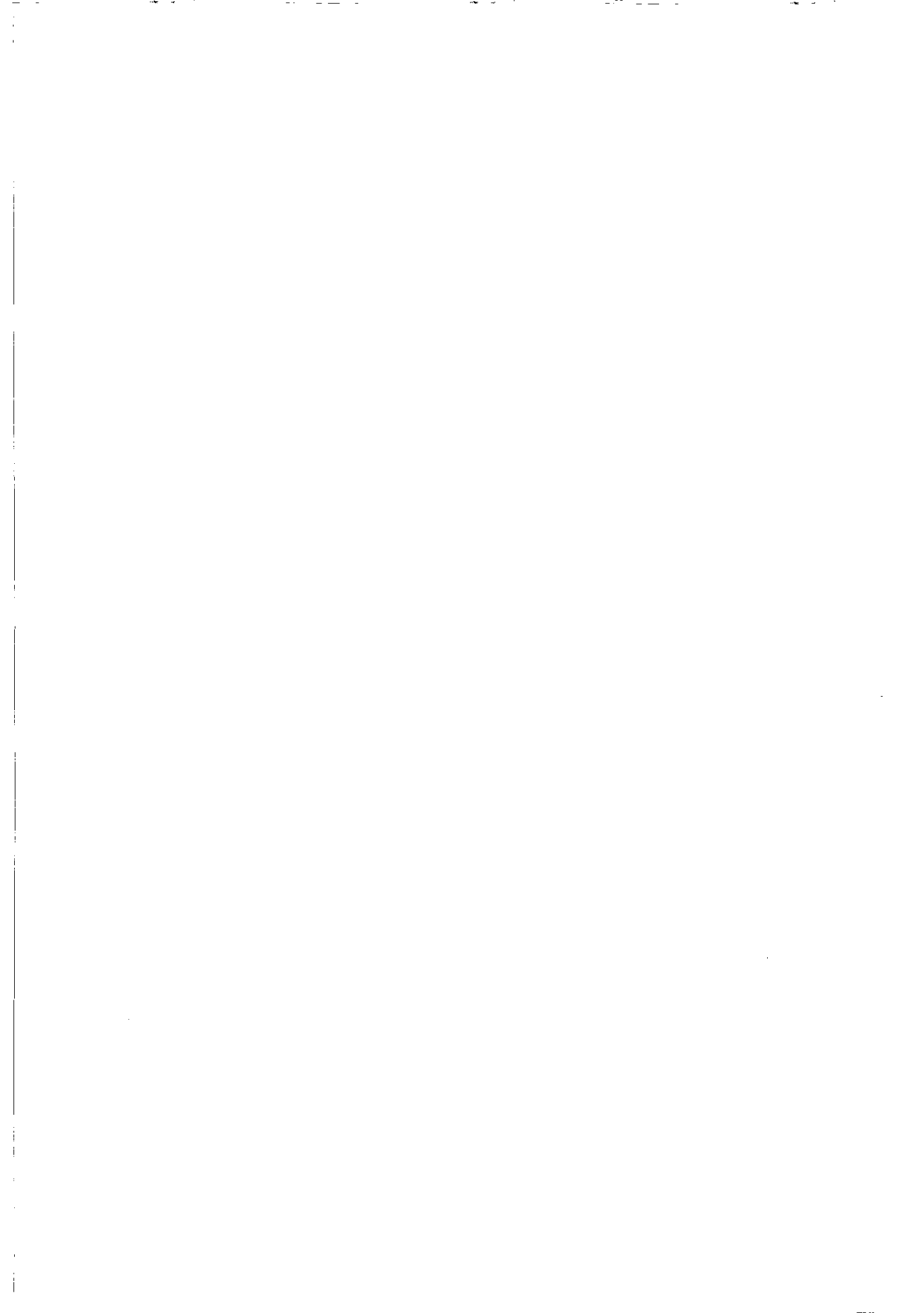


Perfil	Dimensiones										Posición de los ejes										Términos de sección										Peso						
	h	b1	b2	a1	a2	e	f	u	c1	c2	v1	v2	w1	w2	α	A	lx	ly	lxv	lyv	lx	ly	wx	wy	wx	wy	Wx	Wy	Wx	Wy	ix	iy	ix	iy	ix	iy	P
ZF 100.2	100	60	53	20	17	2	2.5	475	4.81	0.18	2.83	2.55	6.95	7.18	0.867	4.72	76.4	40.8	42.8	105	12.3	14.7	7.29	14.8	3.94	4.02	2.94	4.72	1.61	3.70	P	3.70	P				
ZF 100.3	100	60	53	20	17	2.5	4.5	472	4.81	0.15	2.80	2.54	6.91	7.14	0.862	4.64	53.5	49.3	52.0	128	14.9	18.0	8.81	17.8	4.78	4.00	2.91	4.68	1.60	4.38	C	4.38	C				
ZF 100.3	100	60	53	20	17	3	3	467	4.81	0.13	2.77	2.51	6.85	7.09	0.857	3.91	108	56.8	60.3	149	17.2	21.0	10.2	21.0	5.51	3.97	2.87	4.64	1.58	6.42	C						
ZF 120.2	120	80	53	20	17	2	2.5	516	5.78	0.16	2.78	2.53	7.57	7.86	0.910	5.12	117	40.4	42.2	143	14.2	16.8	7.23	16.4	4.29	4.77	3.02	5.28	1.67	4.02	P						
ZF 120.2.5	120	80	53	20	17	2.5	2.5	512	5.78	0.13	2.78	2.51	7.53	7.82	0.906	5.34	143	49.3	53.5	175	17.2	23.0	8.78	22.4	5.21	4.75	2.78	5.25	1.65	4.98	C						
ZF 120.3	120	80	53	20	17	3	3	507	5.79	0.11	2.75	2.48	7.47	7.71	0.901	3.51	167	56.8	63.8	178	19.2	26.9	10.2	26.3	6.01	4.72	2.75	5.21	1.63	5.88	C						
ZF 140.2	140	60	53	20	17	2	2.5	556	6.77	0.14	2.73	2.46	8.27	8.51	0.407	5.52	167	40.8	41.7	192	15.7	23.1	7.31	22.3	4.56	5.50	2.72	5.90	1.69	4.33	P						
ZF 140.2.5	140	60	53	20	17	2.5	2.5	552	6.77	0.11	2.72	2.45	8.23	8.50	0.404	6.84	205	49.4	49.4	215	15.7	23.5	19.1	28.4	8.76	27.4	5.54	5.48	2.69	5.87	1.67	5.37	C				
ZF 140.3	140	60	53	20	17	3	3	547	6.77	0.08	2.68	2.42	8.19	8.34	0.400	8.11	240	58.8	67.2	275	22.1	33.2	10.1	32.2	6.39	5.44	2.69	5.83	1.65	6.36	C						
ZF 160.2	160	60	53	20	17	2	2.5	595	7.75	0.12	2.65	2.39	9.04	9.43	0.368	5.92	229	40.8	40.8	311	25.7	37.7	7.20	26.8	4.78	6.21	2.63	6.53	1.69	4.95	P						
ZF 160.2.5	160	60	53	20	17	2.5	2.5	592	7.75	0.10	2.64	2.38	9.00	9.40	0.333	7.34	231	49.4	46.5	310	20.6	34.0	8.74	22.4	5.80	6.19	2.59	6.50	1.67	5.76	C						
ZF 160.3	160	60	53	20	17	3	3	587	7.75	0.07	2.62	2.36	8.96	9.36	0.328	8.71	330	58.8	101	383	23.6	40.0	10.1	38.8	6.70	6.15	2.56	6.45	1.65	6.84	C						
ZF 180.2	180	60	53	20	17	2	2.5	635	8.73	0.11	2.58	2.32	9.85	10.3	0.364	6.32	302	40.8	40.5	325	18.0	32.5	7.18	31.8	4.95	6.91	2.54	7.17	1.69	4.96	P						
ZF 180.2.5	180	60	53	20	17	2.5	2.5	632	8.73	0.08	2.56	2.31	9.82	10.3	0.281	7.84	371	49.4	49.4	381	21.9	40.1	8.72	38.8	6.01	6.88	2.51	7.13	1.67	6.15	C						
ZF 180.3	180	60	53	20	17	3	3	623	8.73	0.06	2.54	2.29	9.78	10.2	0.278	9.21	436	56.8	114	468	25.3	47.1	10.1	45.8	6.94	6.85	2.47	7.09	1.65	7.31	C						
ZF 200.2	200	80	70	25	22	2	2.5	770	9.68	0.20	3.58	3.23	11.6	12.0	0.368	7.88	473	97.3	199	531	35.1	45.8	12.8	44.3	8.38	7.85	1.56	8.32	2.26	5.01	P						
ZF 200.2.5	200	80	70	25	22	2.5	2.5	766	9.68	0.18	3.57	3.22	11.5	12.0	0.364	8.51	633	119	195	664	47.8	56.5	15.7	54.4	10.3	7.83	1.53	8.29	2.24	7.47	C						
ZF 200.3	200	80	70	25	22	3	3	763	9.68	0.15	3.54	3.18	11.5	12.0	0.351	11.3	688	138	228	770	55.8	68.8	18.3	64.4	12.0	7.80	1.49	8.25	2.22	8.96	C						
ZF 225.2.5	225	80	70	25	22	2.5	2.5	916	10.9	0.16	3.47	3.13	12.5	13.1	0.307	10.1	789	119	220	836	50.9	68.3	15.6	64.1	10.6	8.71	1.43	8.08	2.24	7.96	P						
ZF 225.3	225	80	70	25	22	3	3	911	10.9	0.13	3.44	3.10	12.5	13.0	0.304	12.1	908	138	258	887	68.4	78.3	18.3	75.8	12.4	8.67	1.38	8.04	2.22	9.47	C						
ZF 225.4	225	80	70	25	22	4	4	902	10.9	0.08	3.34	3.00	12.4	12.9	0.299	15.7	1155	169	323	1251	73.0	89.5	22.5	97.8	15.2	8.58	1.29	8.93	2.16	12.3	C						
ZF 250.2.5	250	80	70	25	22	2.5	2.5	1068	12.1	0.14	3.37	3.03	13.6	14.1	0.264	10.8	988	119	246	1051	53.6	76.7	15.6	74.8	11.0	9.57	1.32	8.88	2.23	8.46	P						
ZF 250.3	250	80	70	25	22	3	3	1061	12.1	0.12	3.34	3.01	13.5	14.1	0.262	12.8	1168	138	289	1241	62.8	80.7	18.2	88.8	12.8	9.54	1.28	8.84	2.21	10.1	C						
ZF 250.4	250	80	70	25	22	4	4	1042	12.1	0.05	3.25	2.92	13.4	14.0	0.258	16.7	1486	169	361	1578	75.9	115	22.5	113	15.7	9.44	1.19	8.72	2.19	13.1	C						
ZF 275.2.5	275	80	70	25	22	2.5	2.5	1215	13.4	0.13	3.27	2.95	14.7	15.3	0.230	11.4	1237	119	272	1300	56.0	87.6	15.6	85.7	11.2	10.4	1.23	10.2	2.22	8.94	P						
ZF 275.3	275	80	70	25	22	3	3	1211	13.4	0.10	3.25	2.93	14.6	15.2	0.228	13.8	1464	138	319	1535	65.0	104	16.2	101	13.1	10.4	1.19	10.5	2.20	10.7	C						
ZF 275.4	275	80	70	25	22	4	4	1192	13.4	0.05	3.16	2.84	14.5	15.1	0.223	17.7	1869	170	399	1958	80.4	122	22.5	129	16.1	10.3	1.10	10.5	2.13	13.9	C						
ZF 300.2.5	300	80	70	25	22	2.5	2.5	1368	14.6	0.11	3.18	2.86	15.8	16.4	0.209	12.0	1574	119	298	1595	62.7	99.0	15.5	96.8	11.5	11.3	1.14	11.5	2.20	9.49	P						
ZF 300.3	300	80	70	25	22	3	3	1363	14.6	0.09	3.16	2.84	15.7	16.4	0.207	14.3	1804	138	349	1874	67.8	117	18.2	114	13.4	11.2	1.11	11.4	2.18	11.2	C						
ZF 300.4	300	80	70	25	22	4	4	1342	14.6	0.04	3.07	2.78	15.6	16.3	0.197	18.2	2305	170	437	2384	85.9	150	22.4	147	18.4	11.1	1.01	11.3	2.12	14.7	C						

---

**SOLUCIONES DE LOS  
PROBLEMAS**

---





## Tema 2

- 2.1.  $\pi_1: 2y + z = 0$ ;  $\sigma_1 = 40$  MPa;  $\pi_2: x = 0$ ;  $\sigma_2 = 10$  MPa;  $\pi_3: y - 2z = 0$ ;  $\sigma_3 = -10$  MPa
- 2.2. 1º)  $\sigma_1 = 60$  MPa;  $\sigma_2 = \sigma_3 = -30$  MPa;  $n_1 = (2/3, 1/3, -2/3)$ ;  $n_2$  y  $n_3$  contenidas en el plano:  
 $2x + y - 2z = 0$ ; 2º)  $\sigma_{nn} = -26,67$  MPa;  $\tau_{nt} = 17,00$  MPa
- 2.3. 1º) 6; 2; -14 MPa; 2º) 8,64 MPa; 3º) 10 MPa; 4º) (0,316, 0, 0,949)
- 2.4. 22.222,22 N/m<sup>2</sup>
- 2.5. 1º) 147,8; 25,4 MN/m<sup>2</sup>; 2º) 74,9; 163,7; 134,9 MN/m<sup>2</sup>; (-1, 2, -1)/√6.
- 2.6. 1º) a) 104,7; 86,6 b) 5,5; 112,7 MN/m<sup>2</sup>; 2º) 147,4 (0,7382, 0,1266, 0,6625); 76,6 (-0,6456, 0,4172, 0,6397); -86,1 (-0,1954, -0,9, 0,3897); 3º) 138; -7983; -972329; 4º) 46; 101,4, 30,6, 132,1; 0, -14331, -410439; 5º) 35,4, 116,7, 81,4; 97,7 MN/m<sup>2</sup>.
- 2.7. 1º) (400; 100) MPa en  $n_1$  y (200; 100) MPa en  $n_2$ , con  $\tau$  divergente en la arista que pasa por B; 2º) 441,42; 158,58 MPa; 0; (0,924, 0,383, 0); (-0,383, 0,924, 0); (0,0,1), respectivamente.

## Tema 3

- 3.1.  $\varepsilon_{xy} = -0,00167$ ,  $\varepsilon_{xz} = 0,0035$ ,  $\varepsilon_{yz} = -0,00133$
- 3.2.  $(2, 3, 1)/\sqrt{3}$ ;  $2/\sqrt{6}$
- 3.3. 1º)  $\varepsilon_{xx} = 8ax$ ,  $\varepsilon_{yz} = 2a(4z - y)$ , resto nulas; 2º) 6a (0,  $\sqrt{2}/2$ ,  $\sqrt{2}/2$ ); 4a (1,0,0); -6a (0,  $\sqrt{2}/2$ ,  $-\sqrt{2}/2$ ).
- 3.4. 1º)  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1/15$ ,  $\varepsilon_{xy} = -19/360$ ; 2º)  $\varepsilon_1 = 11,94 \times 10^{-2}$ ;  $n_1 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ ;  $\varepsilon_2 = 1,39 \times 10^{-2}$ ;  $n_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
- 3.5. 1º)  $\sqrt{2}k (-x, -1/2, (100-x))$ ; 2º) 0; 3º) k; 4º) 21k
- 3.6. 1º)  $\varepsilon_{xx} = 0,008/3$ ,  $\varepsilon_{xy} = 0,008/3$ ,  $\varepsilon_{xz} = -0,001/3$ ,  $\varepsilon_{yy} = 0,002$ ,  $\varepsilon_{yz} = -0,0015$ ,  $\varepsilon_{zz} = -0,002$ ; 2º)  $\varepsilon_{EA} = -2,44 \times 10^{-3}$ ; 3º)  $\varepsilon_{EA,EF} = 0,002/\sqrt{5}$ .
- 3.7. 1º)  $\varepsilon_{xx} = a$ ,  $\varepsilon_{xy} = 2a$ ,  $\varepsilon_{xz} = -4a$ ,  $\varepsilon_{yy} = -2a$ ,  $\varepsilon_{yz} = -2a$ ,  $\varepsilon_{zz} = a$ ; 2º) 6a; -3a; -3a; (2/3, 1/3, -2/3) y dos cualesquiera normales a esta dirección.
- 3.8. 1º) 3,0811; 1; -0,0811; 2º)  $n_1$  (0,81, -0,58, 0); 3º) (0,987, 0,160, 0) y (0,160, -0,987, 0).
- 3.9. 1º) Despl. relativos a M: (0,02dx, 0,04dx); (-0,06dy, 0,02dy); 2º) (2,05, 1,01, 0); 3º) (0,05, -0,03, 0)/√3; 4º)  $3 \cdot 10^{-2}$  (3,1,0)/√10; 0 (0,0,1);  $-7 \cdot 10^{-2}$  (1,-3,0)/√10
- 3.10. 1º) a)  $0,46 \cdot 10^{-3}$ ; b)  $0,146 \cdot 10^{-3}$ ; 2º)  $1,719 \cdot 10^{-3}$ ;  $0,486 \cdot 10^{-3}$ ;  $-0,604 \cdot 10^{-3}$ ; 3º)  $1,6 \cdot 10^{-3}$ ;  $-0,498 \cdot 10^{-6}$ ;  $-0,505 \cdot 10^{-9}$ ; 4º)  $1,6 \cdot 10^{-3}$ ; 5º)  $2,323 \cdot 10^{-3}$ ,  $0,557 \cdot 10^{-3}$ ,  $1,233 \cdot 10^{-3}$ ,  $1,102 \cdot 10^{-3}$ ,  $1,090 \cdot 10^{-3}$ ,  $-0,059 \cdot 10^{-3}$ .
- 3.11. 1º)  $1,29 \cdot 10^{-3}$ ;  $1,16 \cdot 10^{-3}$ ; 2º)  $1,756 \cdot 10^{-3}$ ;  $0,564 \cdot 10^{-3}$ ; 0; 3º)  $2,32 \cdot 10^{-3}$ ;  $0,99 \cdot 10^{-6}$ ; 0; 4º)  $1,756 \cdot 10^{-3}$ ;  $1,192 \cdot 10^{-3}$ ;  $0,564 \cdot 10^{-3}$ .

## Tema 4

- 4.1. 1º) 200 GPa; 2º) 0,28; 3º) -0,014 mm; 4º) 99,9888 x 49,9944 mm
- 4.2. 1º) 43,75 mm<sup>2</sup>; 2º) -1,5 x 10<sup>-4</sup>;
- 4.3. 1º)  $\sigma_{nn} = 0$ ;  $\tau_{nt} = 25\sqrt{3}$  (MPa); 2º) 2,083 x 10<sup>-4</sup>; 0,595 x 10<sup>-4</sup>; -3,869 x 10<sup>-4</sup>.
- 4.4. 1º) 100; -50; 0 (MPa);  $n_1 (1, 1, 0)/\sqrt{2}$ ; 2º) 5,625.10<sup>-4</sup>; -3,75.10<sup>-4</sup>; -6,25.10<sup>-5</sup>; 3º) 0; 4º) -9,375.10<sup>-4</sup>
- 4.5. 1º) 0; 3,62; -6,62 (MPa); (-0,385, -0,734, 0,560); 2º)  $\epsilon_{xx} = -21.10^{-6}$ ,  $\epsilon_{xy} = 24.10^{-6}$ ,  $\epsilon_{xz}=0$ ,  $\epsilon_{yy} = 3.10^{-6}$ ,  $\epsilon_{yz} = -12.10^{-6}$ ,  $\epsilon_{zz} = 9.10^{-6}$ ; 3º) -99 x 10<sup>-6</sup> cm
- 4.6.  $\tau_{m\acute{a}x} = 50$  MPa;  $(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$  y  $(\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)$ .
- 4.7.  $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=-v\sigma/(1-v)$ ;  $\epsilon_{zz}=-\sigma(1-v-2v^2)/E(1-v)$
- 4.8. Tensiones: -vF; -F; 0. Deformaciones: 0; -F(1-v<sup>2</sup>)/E; Fv(1+v)/E
- 4.9. En 1: Tensiones: -3vF/2; -F; 0. Deformaciones: -vF/2E; (3v<sup>2</sup>/2-1)F/E; (3v/2+1)vF/E.  
En 2: Tensiones: -3vF/2; -2F; 0. Deformaciones: vF/2E; (3v<sup>2</sup>/2-2)F/E; (3v/2+2)vF/E.
- 4.10. 1º) 0,76 x 10<sup>-3</sup> cm; 2º) 0,857 x 10<sup>-3</sup> cm
- 4.11. 1º) 50 MPa; 2º) 0; -75; -0,5 (MPa); 3º) -86,29 cm<sup>3</sup>.

## Tema 5

- 5.1. T. ppls.: A)  $\sigma_0$ ; 0, B) 0; - $\sigma_0$ , C)  $\sigma_0$ ;  $\sigma_0$ , D) - $\sigma_0$ ; - $\sigma_0$ , E)  $\sigma_0$ ; - $\sigma_0$ , F)  $\sigma_0$ ; - $\sigma_0$ , G)  $\sigma_0$ ; - $\sigma_0$ .
- 5.2.  $\sigma/4$ ;  $\sigma\sqrt{3}/4$  (hacia arriba por AA)
- 5.3. En AB y DC:  $\sigma_{nn}=97,5$ ,  $\tau_{nt}=56,29$ ; en AD y CB:  $\sigma_{nn}=32,5$ ,  $\tau_{nt}=56,29$  (MPa). Las tensiones tangenciales convergen en B y D.
- 5.4.  $\tau = 50$  MPa;  $\sigma_{m\acute{a}x} = 100$  MPa;  $(1,1)/\sqrt{2}$  y  $(1,-1)/\sqrt{2}$ .
- 5.5. 1º) 7,091 (0,469, -0,699, 0,535); 2,812 (0,192, -0,509, -0,835); -0,903 (0,861, 0,495, -0,107) MPa; 2º) X(1; $\sqrt{11}$ ), Y(4; $\sqrt{11}$ ), Z(4;2) MPa; 3º) (0,940, -0,144, 0,303) y (-0,277, -0,844, 0,454).
- 5.6. 1º)  $(3\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2})$  MPa; 2º) 3,91 (0,212, 0,405, 0,889); 2,13 (0,951, 0,123, -0,283); -2,04 (-0,224, 0,906, -0,359) MPa; 3º) 3/2;  $\sqrt{17}/2$  MPa; 4º) a) X(2;1), Y(-1; $\sqrt{5}$ ), Z(3;2), b) 2,871; 2,036 MPa, 5º) 4/3 MPa.
- 5.7. 1º)  $(4,7,0)/\sqrt{2}$ ; 2º) 5,5; 1,5; 3º) 6 (1, 2, 0)/ $\sqrt{5}$ ; 1 (-2, 1, 0)/ $\sqrt{5}$ ; 4º) X(2;2), Y(5;2); 5º) 7; 6; 0; 6º) T.p. 11/3; -4/3; -7/3; 7º) 3, en planos  $(1,2, \sqrt{5})/\sqrt{10}$  y  $(1,2, -\sqrt{5})/\sqrt{10}$  (en MPa).
- 5.8. 1º)  $(8,-1,0)/\sqrt{10}$ ; 2º) 0,5; 2,5; 3º) 3 (2, 1, 0)/ $\sqrt{5}$ ; -2 (-1, 2, 0)/ $\sqrt{5}$ ; 4º) X(2;2), Y(-1;2); 5º) 1; -6; 0; 6º) T.p. 8/3; -7/3; -1/3; 7º) 2,5, en planos  $(1,3,0)/\sqrt{10}$  y  $(3,-1,0)/\sqrt{10}$ . Unidades: MPa.
- 5.9. 1º) 61; 49 MPa; 2º) 129,9 (0,9861, -0,1662, 0); 26,1 (0,1662, 0,9861, 0); 0 (0,0,1) MPa, 3º) 156; 3394; 0, 4º) 64,9; 51,9; 13,1 MPa.

- 5.10. 1º) 42,36 (0,973, -0,230, 0); -2,36 (0,230, 0,973, 0); 0 (0,0,1) (MPa); 2º)  $\sigma = 31,18$  MPa;  $\tau = 19,36$  MPa; 3º)  $2,148 \times 10^{-4}$ ;  $-0,6476 \times 10^{-4}$ ;  $-0,5 \times 10^{-4}$ ; 4º)  $2,796 \times 10^{-4}$ , (0,851, 0,525) ó (0,525, -0,851).
- 5.11. 0,005
- 5.12.  $\epsilon_1 = 2,04 \cdot 10^{-3}$  a  $-25,1^\circ$ ;  $\epsilon_2 = 0,48 \cdot 10^{-3}$  a  $64,9^\circ$ ;  $\sigma_1 = 166,8$  y  $\sigma_2 = 84,8$  MN/m<sup>2</sup>.
- 5.13.  $\sigma_{xx} = E\epsilon_a/(1-\nu)$ ;  $\sigma_{yy} = E\epsilon_b/(1-\nu)$ .
- 5.14.  $\epsilon_{xx} = \epsilon_a$ ,  $\epsilon_{yy} = (\epsilon_b + \epsilon_c - 0,72\epsilon_a)/1,28$ ;  $\epsilon_{xy} = (\epsilon_c - \epsilon_b)/1,92$ .
- 5.15. 0,003 ( $\sqrt{3}/2$ ,  $-1/2$ ); -0,001 ( $1/2$ ,  $\sqrt{3}/2$ ).
- 5.16.  $2,0147 \cdot 10^{-3}$  a  $\varphi - 6,6962^\circ$ ;  $0,9353 \cdot 10^{-3}$  a  $\varphi + 83,3038$ .
- 5.17. 1º) 0,01325; 2º) 0,00914 (0,733, 0,680); -0,00414 (-0,680, 0,733); 3º) a(0,003, 0,006625), b(0,002, 0,006625), c(-0,004, 0,0014); 4º) 0,009125; 5º) (-0,155, 0,988) y (0,974, -0,228); 6º) 0,01328.

## Tema 6

- 6.1.  $P/\sigma_f = 1$ ; 1,0989; 1; 1,125 (respectivamente).
- 6.2. R:  $n=2$ ; S-V:  $n=1,67$ ; T:  $n=1,2$ ; V-M:  $n=1,38$
- 6.3. Tracc.: 5; 3,57; 1. Compr.: 5; 4,88; 4 (respectivamente).
- 6.4. 1º)  $\alpha$  y  $\beta$  en (-21,43, 0) MPa; 2º) R:  $n=4$ ; S-V:  $n=5,385$ ; T:  $n=7$ ; V-M:  $n=7$
- 6.5. 1º) 100 (1,0,0); 50 (0,1,1)/ $\sqrt{2}$ ; -50 (0,-1,1)/ $\sqrt{2}$  (MPa); 2º) 75 MPa; 3º) R:  $n=2$ ; S-V:  $n=2$ ; T:  $n=1,33$ ; V-M:  $n=1,51$
- 6.6. 1º)  $\sigma_1 = 45$  MPa; 2º) 25 MPa; 3º) 1,78; 2,42; 2; 2,22 (respectivamente).
- 6.7. 1º) Bloque A: -80; -80; -96 (MPa); Bloque B: -80; 0; -72 (MPa); 2º)  $n_A = 15$ ;  $n_B = 3$ .
- 6.8. 1º)  $\sigma_{xx} = -193,47$ ;  $\sigma_{yy} = -4,90$ ;  $\sigma_{zz} = 0$  (MPa); 2º)  $\sigma_{nn} = -66,125$ ;  $\tau_{nt} = 90,07$  (MPa); 3º)  $n = 1,24$ .
- 6.9. 1º)  $\sigma_{xxA} = \sigma_{xxB} = \sigma_{xxC} = 0$ ;  $\sigma_{yyA} = 0$ ,  $\sigma_{yyB} = \sigma_{yyC} = -30$  MPa;  $\sigma_{zzA} = -180$  MPa;  $\sigma_{zzB} = \sigma_{zzC} = -90$  MPa; 2º)  $260^\circ\text{C}$

## Tema 7

- 7.1.  $R_A = qL/2$ ,  $M_A = qL^2/6$
- 7.2. a)  $R_A = R_B = M_0/2a$ , b)  $R_A = R_B = (M_0 + M_1)/2a$
- 7.3.  $R_B = 500$  kN,  $R_C = 300$  kN;  $M_{\text{máx}} = 281,25$  kN.m a 1,875 m de C.
- 7.4. a)  $R_A = R_B = qa/2$ ,  $M_{x=a/2} = qa^2/8$ ,  $M_{x=2a} = qa^2$ , b)  $R_A = qL$ ,  $M_A = qL^2/2 - M_0$
- 7.5.  $d = 0,586$  L;  $V_A = V_B = 0,207qL$ ;  $M_A = M_B = 0,0214qL^2$ .
- 7.6.  $R_A = 63$  kN,  $M_A = 101,25$  kN.m
- 7.7.  $R_A = 21,45$  kN,  $R_B = 21,15$  kN;  $M_{\text{máx}} = 25,56$  kN.m a 2,383 m de A.

- 7.8.  $R_A=45$  kN,  $R_B=45$  kN;  $M_{\text{máx}}=45$  kN.m a  $x=3$  m.  
 7.9.  $R_A=20,25$  kN,  $M_A=60,75$  kN.m  
 7.10.  $R_A=14,4$  kN,  $R_B=14,4$  kN,  $R_C=36$  kN;  $M_B=26,325$  kN.m,  $M_C=21,6$  kN.m  
 7.11.  $R_A=13/3$  kN,  $R_B=62/3$  kN;  $M_{\text{máx}}=26,014$  kN.m a 2,08 m de A.  
 7.12.  $R_A=R_B=P/2$ ;  $M_{\text{máx}}=Pa/2$ .  
 7.13.  $R_A=2,5-5a$ ,  $R_B=2,5+15a$ ;  $M_B=10a^2$ ;  $M=2,5a-5a^2$  en  $x=a$  de A.  
 7.14.  $R_A=50$  kN;  $M_A=260$  mkN;  $R_E=160$  kN;  $R_C=80$  kN;  $M_C=80$  mkN  
 7.15.  $Y_A=P/2$ ,  $X_A=P$ ,  $Y_B=P/2$   
 7.16.  $X_A=15$  kN,  $Y_A=Y_B=10$  kN,  $X_B=5$  kN.  
 7.17.  $R_A=6$  kN,  $M_A=8$  kN.m,  $R_B=2$  kN  
 7.18.  $R_A=10/6$ ,  $R_B=50/6$  (kN);  $M_D=25$  kN.m  
 7.19.  $X_A=62/3$ ,  $Y_A=7,5$ ,  $X_B=10/3$ ,  $Y_B=7,5$  (kN);  $M_B=130/3$ ,  $M_D=50/3$  kN.m  
 7.20.  $X_A=10/3$ ,  $Y_A=40$ ,  $X_B=100/3$ ,  $Y_B=50$  (kN);  $M_D=20/3$ ,  $M_E=200/3$  (kN.m)

## Tema 8

- 8.1.  $F_1=k_1F/(k_1+k_2)$ ;  $F_2=k_2F/(k_1+k_2)$   
 8.2.  $x = [A_2/(A_1+A_2)] L$   
 8.3. (0,014 cm; 0,198 cm)  
 8.4.  $A_4 = 20$  cm<sup>2</sup>;  $A_9 = 16$  cm<sup>2</sup>; la barra 6 no trabaja.  
 8.5. 1º) 6; 3; 6 N, 2º) 4,29; 6,43; 4,29 N;  $\delta_{br}=0,63 \cdot 10^{-3}$  cm;  $\delta_{br}(\text{centro})= 0,948 \cdot 10^{-3}$  cm;  $\delta_{ac}=1,26 \cdot 10^{-3}$  cm.  
 8.6.  $F_1 = F_3 = P/(2\text{sen}\alpha)$ ,  $F_2 = 0$   
 8.7. 1º)  $N_x=-F$  (fuera);  $N_x(x) = -F(1-x^3/L_1^3)$  (dentro), 2º)  $\Delta L=F(L-L_1/4)/EA$   
 8.8. 49 MPa y -26 MPa (acero); -52 MPa (cobre).  
 8.9.  $\sigma_c=-22,42$  MPa;  $\sigma_a=26,91$  MPa; 0,15 cm  
 8.10.  $F_{ac}=10,182$  kN,  $F_{cu}=-0,182$  kN; 0,17 cm  
 8.11. 1º) 166,67 °C; 2º) 866,67 °C  
 8.12. 1º) -14,286 MPa; 71,428 MPa; -42,857 MPa; 2º) 35,714; 171,428; 107,143 (MPa)  
 8.13.  $\sigma_1=-2,985$ ,  $\sigma_2=-8,955$  (MPa);  $\delta_1=0,17$  cm,  $\delta_B=0,0896$  cm;  $\delta_2=-0,045$  cm;  $\delta_3=-0,036$  cm.  
 8.14.  $\sigma_1 = \sigma_3 = -168$  MPa;  $\sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_5 = -164$  MPa;  $\delta_E = 0,328$  cm  
 8.15. (AC) 21,26; (BC) 33,219; (CD) -116,439 (MPa),  $R_C = 15,3075$  kN;  $\delta_C = 0,066$  cm  
 8.16.  $R_A=61,6$  kN;  $R_B=31,87$  kN;  $R_C=36,8$  kN;  $\delta_B = 1,104$  cm  
 8.17. 1º) (horm.) -1,143; (perno) 28,571 (MPa) 2º) Iguales al apartado 1º).  
 8.18. 1º) 8485,3 N; 24000 N 2º) 0,17 cm  
 8.19. 1º)  $N_1=100$ ;  $N_2=-100$ ;  $N_3=-200$ ;  $N_4=200$  kN, 2º) (0,04; 0) cm  
 8.20. 1º) 85,96; -28,65 (MPa), 2º) 0,246 cm

- 8.21. 1º)  $a=b$ , 2º) a)  $P_f = \sigma_f(A_1 + A_2/2)$ ; b)  $P_p = \sigma_f(A_1 + A_2)$
- 8.22. 1º)  $P_f = 100$  KN,  $\delta_B = 0,36$  cm;  $P_p = 120$  KN,  $\delta_{Bp} = 0,72$  cm, 3º)  $\sigma_{1r} = 96$ ;  $\sigma_{2r} = -48$  (MPa);  
 $\delta_r = 0,288$  cm.
- 8.23. 1º)  $N_1 = 0,3P$ ;  $N_2 = 0,6P$  2º) 150 kN 3º)  $\sigma_{1r} = 120$ ;  $\sigma_{2r} = -60$  (MPa)
- 8.24. 1º) -30,24; -60,48 (MPa), 2º) 125 °C, 3º) A:  $157,5 \times 10^{-3}$  cm; C:  $78,75 \times 10^{-3}$  cm,  
 4º)  $\sigma_{1r} = 113,4$ ;  $\sigma_{2r} = 226,8$  (MPa)
- 8.25. 1º)  $A_1/A_2 = 2,45$  2º) 111 °C 3º)  $3,872 \times 10^{-3}$  rad
- 8.26. 1º) 227 °C, 2º) Ninguno.
- 8.27. 1º)  $\sigma_c = -59,72$ ;  $\sigma_a = -238,875$  (MPa), 2º)  $\sigma_c = -75$ ;  $\sigma_a = -300$  (MPa), 3º)  $\sigma_c = 44,44$ ;  
 $\sigma_a = 177,75$  (MPa)
- 8.28.  $F_1 = 33,737$  kN ;  $F_2 = -33,737$  kN;  $F_3 = 47,711$  kN
- 8.29. 1º)  $\sigma_{AB} = \sigma_{CE} = 50$  MPa, 2º)  $\delta_{AB} = \delta_{CE} = 0,25$  mm (+), 3º)  $2,887 \cdot 10^{-4}$  rad (hor.).
- 8.30. 1º) a)  $\sigma_1 = \sigma_2 = 200$  MPa,  $\sigma_3 = \sigma_4 = 100$  MPa; b)  $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$  cm,  $\delta_3 = \delta_4 = 0,025$  cm;  
 c)  $2,598 \cdot 10^{-3}$  rad. 2º) 240 kN.

## Tema 9

- 9.1. 2(L/h)
- 9.2.  $(\sigma_{xx}; \tau_{xy})$ : A (0; 750), B (-37500; 562,5), C (-75000; 0) (kN/m<sup>2</sup>).
- 9.3.  $\sqrt{2}$
- 9.4.  $b/a = 2\sqrt{2}$ ;  $(0,1287 \text{ qL}^2/\sigma_f)^{1/3}$
- 9.5. 1º)  $X_A = 10$ ,  $Y_A = 20$ ,  $X_B = 10$ ,  $Y_B = 20$  (kN), 4º) (22,243; 1,28) MN/m<sup>2</sup>
- 9.6. 1º)  $Y_A = 40$ ,  $X_A = 10$ ,  $Y_F = 30$ ,  $X_F = 10$  (kN), 2º)  $M_B = 50$ ,  $M_C = 30$ ,  $M_E = 30$  kN.m,  
 3º)  $H^{dcha} (-23; 1,69)$ ,  $H^{izda} (-23; 2,25)$  (MPa)
- 9.7. 1º)  $X_A = 10$  kN,  $Y_A = 10$  kN,  $M_A = 10$  kN.m,  $Y_B = 10$  kN, 2º)  $(\sigma_{xx}; \tau_{xy})$ : M (61,67; 1,6) MPa
- 9.8. 1º)  $X_A = X_D = 10/7$ ,  $Y_A = 40/7$ ,  $Y_D = 30/7$  (kN); 3º) 20,284; 1,097 (MPa)
- 9.9. 50 kN (sección plano XZ).
- 9.10. PL/16b
- 9.11.  $PLa(h^2 - h_1^2)/32I_z$
- 9.12. Rasantes: 20,25; 45; 20,25; 0 kN. Normales: 4,5 kN en C y 9 kN en A.  
 Equilibrio:  $45 + 4,5 - 20,25 - 20,25 - 9 = 0$
- 9.13. 1º)  $M_A = 113,03$  kN.m,  $R_C = 17,68$  kN,  $R_A = 37,68$  kN, 2º) Secc. B: M (5,623; 15,391),  
 N (5,623; 0). Secc. C: M (-40,92; 14,443), N (-44,57; 0) MPa, 3º) 98,96 kN/m
- 9.14. 96,588 kN
- 9.15.  $a = 71,6$  cm;  $P = 32,53$  kN
- 9.16. 1º) 5,55 kN; 2º)  $R_A = 1,25$  kN,  $R_C = 3,75$  kN,  $M_D = 112,5$  N.m,  $M_E = 337,5$  N.m,  $M_B = 225$  N.m,  
 3º) 9,17 kN; 10,28 kN.
- 9.17. Barras (1) y (2):  $9,5 \times 9,5$  cm<sup>2</sup>; Barra (3):  $1,42 \times 1,42$  cm<sup>2</sup>

- 9.18. 1°) 19,33 cm; 38,67 cm 2°) 22,22 MPa  
 9.19. 1°)  $R_A=0$ ,  $R_C=20$  kN,  $M_A=0$ ,  $M_C=20$  kN. m, 3°) 10,63 cm, 4°) 2,655 MPa  
 9.20.  $d=3b^2/(h+6b)$  a la izquierda del alma  
 9.21.  $\tau_{\max}=2V/e\pi R$ ;  $d=4R/\pi$  (del centro O del semicírculo)  
 9.22.  $\tau_1=V_y b^2/2I_z$ ,  $\tau_2=\tau_3=V_y b^2/4I_z$   
 9.23.  $\tau_1=Vhb/4I_z$ ;  $\tau_2=V(2bh+h^2)/8I_z$  donde  $I_z \approx (b-b_0)h^3/12+(h-h_0)bh^2/4$   
 9.24.  $\tau_1=V_y/e\pi R$   
 9.25.  $\tau_1=23,684$ ,  $\tau_2=15,789$ ,  $\tau_3=\tau_5=24,671$ ,  $\tau_4=34,539$ ,  $\tau_6=39,474$  (MPa)

## Tema 10

- 10.1. 1°)  $8,875 \times 10^{-3}$  rad; 3,45 cm, 2°)  $(\sigma_{xx}, \tau_{xy})=(-21; 0,39)$  MPa.  
 10.2. 1°)  $R_E=10$  kN,  $M_E=20$  kN.m,  $R_A=10$  kN, 2°) 0,3 cm;  $5 \times 10^{-4}$  rad 3°) 100 kN  
 10.3. 1°)  $R_E=P/2$ ,  $M_E=PL/2$ ,  $R_A=P/2$ ,  $M_A=3PL/2$ , 2°)  $(5PL^3)/(2EI)$  4°) 14; -90014; 0 kN/m<sup>2</sup>  
 10.4.  $x=2,8a$ ;  $\delta_{\max}=1,92Ma^2/EI$   
 10.5.  $\delta=qa^3(L-a/4)/6EI$   
 10.6. a)  $\theta_B=Pab/3EI$ ;  $\theta_C=Pab/6EI$ , b)  $\theta_A=Pa(2b+3a)/6EI$ ;  $\delta_A=Pa^2(a+b)/3EI$   
 10.7.  $\theta_B=PL^2/2EI$ ;  $\theta_C=5P L^2/2EI$ ;  $\theta_D=3P L^2/EI$ ;  $\delta_{Dx}=5P L^3/2EI$ ;  $\delta_{Dy}=3P L^3/EI$ .  
 10.8. IPN 260;  $\delta_A=\delta_E=0,46$  cm;  $\delta_C=0,23$  cm  
 10.9.  $\delta=Pa/EA+Pa^3/2EI$   
 10.10. 1°)  $Y_D=20$  kN,  $Y_A=30$  kN,  $X_A=20$  kN,  $M_A=120$  kN.m, 2°) 0,43 cm  
 10.11. 1°) Tirantes: (AB) -288,675; (BC) 288,675. Barra: (norm.) 156,25; (cort.) 3,125 (MPa),  
 2°)  $\delta_B = 0,44$  cm;  $\delta_E = 1,75$  cm;  $\theta_D = 0,011$  rad, 3°)  $R_D=20$ ,  $R_{AB}=-5,77$ ,  $R_{BC}=5,77$  kN.  
 10.12. 2 cm  
 10.13. 1°)  $\sigma_{xx}=190,822$  MPa,  $\tau_{xy}=25,125$  MPa,  $n=1,23$ , 2°)  $\delta_C=5,65$  cm,  $\theta_B=0,0275$  rad (hor.)  
 10.14. 1°)  $R_D=5P/3$ ,  $M_A=0,8P$ ; 2°) 54,4 kN; 3°)  $(\sigma_{xx}, \tau_{xy})=(160,846; 5,859)$  MPa,  $\sigma_1=0,213$ ,  $\sigma_2=0$ ,  
 $\sigma_3=-161,059$  MPa; 4°)  $\delta_C=1,513$  cm,  $\delta_E=3,705$  cm  
 10.15. 1°)  $X_A=Y_A=P$ ;  $X_B=P$ ;  $Y_C=10P/3$ ;  $Y_D=13P/3$ ;  $Y_E=P$ , 2°) 0,155 cm, 3°)  $M_{zD}=10$  N.m;  
 $\sigma_{xx\max}=16$  MPa  
 10.16.  $\delta_{\max}=\alpha T_0 L^3/9\sqrt{3}h$   
 10.17.  $\delta_C=\alpha a(L+a)(T_1-T_s)/2h$

## Tema 11

- 11.1. 200 MPa; 160 kN/m  
 11.2.  $\sigma_{\varphi Cu}=29,09$  MPa,  $\sigma_{\varphi ac}=21,82$  MPa,  $q=909$  kPa  
 11.3.  $\sigma_1=125,3$ ;  $\sigma_2=-65,2$  MPa

- 11.4. 1º)  $\sigma_1 = 128,57$ ;  $\sigma_2 = -85,71$  MPa, 2º)  $\sigma_1 = 162,86$ ;  $\sigma_2 = -68,57$  MPa
- 11.5. 1º)  $\sigma_1 = 25$ ;  $\sigma_2 = -37,5$  MPa; 2º)  $\sigma_1 = 50$ ;  $\sigma_2 = -25$  MPa
- 11.6. Rankine: 4; Tresca: 4; Saint-Venant: 3,4 (mm)
- 11.7.  $\sigma_\phi = pvr/2t$
- 11.8. Rankine: 1; Saint-Venant: 0,85; Tresca: 1; Von Mises: 0,865 (cm)
- 11.9. 1º) 0,375 cm 2º) 160; 48; 0 MPa
- 11.10. 1º) 2,01, 2º) 2,01
- 11.11. a) Tracción: 1036,726 kN. Tens. princ.: 240; 150; 0 MPa, b) Compresión: 1036,726 kN.  
Tens. princ.: 150; 0; -90 MPa.
- 11.12. Barra: 27,08; 0; 0 (MPa); cilindro: 210; 90,08; 0 (MPa);  $n_c = 1,24$
- 11.13. 1º) 2,786 MPa, 2º) Acero:  $\sigma_x = -188,227$ ,  $\sigma_\phi = 44,576$ ; Aluminio:  $\sigma_x = -166,746$ ,  
 $\sigma_\phi = -89,152$  (MPa), 3º)  $n_{(Al)} = 1,384$   $n_{(Ac)} = 1,635$
- 11.14. 1º)  $n = 1,27$ , 2º)  $p = 3,158$  MPa, 3º)  $4.340,36$  cm<sup>3</sup>