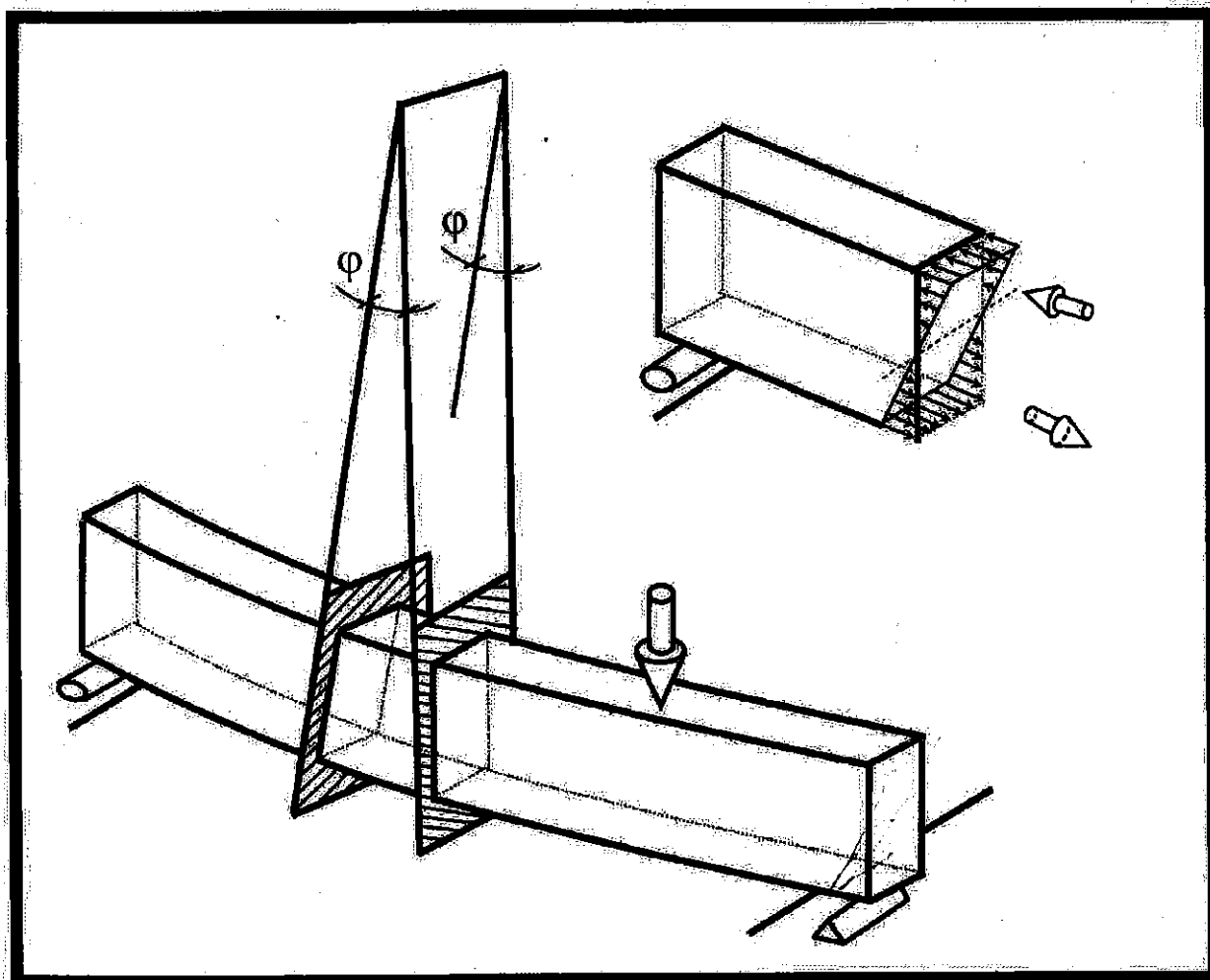




Elasticidad y Resistencia de Materiales



José L. Alcaraz
Rubén Ansola
Javier Canales
José A. Tárrago
Estrella Veguería

Armando

Bilbao, 2012

PRESENTACION

Este volumen de "Elasticidad y Resistencia de Materiales" se estructura en once capítulos. Los diez primeros corresponden al temario de la asignatura que con este mismo título se imparte en el tercer curso del Grado en Ingeniería en Tecnología Industrial en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao.

Tras unos primeros temas en los que se exponen los conceptos fundamentales de la Teoría de la Elasticidad (tensión, deformación, ley de comportamiento), el programa se centra en el análisis y diseño de elementos estructurales tipo pieza prismática sometidos a distintos esfuerzos de sección. Se comienza con el esfuerzo axial y el análisis de celosías sencillas, estructuras que trabajan exclusivamente con dicho tipo de esfuerzo. A continuación se estudian tensiones y deformaciones originadas tanto en flexión pura como en flexión simple, y se aplican los conocimientos adquiridos a la resolución de estructuras isostáticas. En el último capítulo se hace una introducción al estudio de Recipientes de presión de pared delgada, tema que, junto a los anteriores, está incluido en el programa de la asignatura "Resistencia de Materiales", correspondiente al tercer curso del Grado en Ingeniería Ambiental, que también se imparte en la Escuela.

Al final de cada capítulo se incorpora una colección de problemas para su resolución en clase o por el alumno. Sus soluciones se incluyen al final del volumen. Entre los Anexos destaca el dedicado a la Extensometría, en el que se hace una somera descripción de diversos métodos experimentales para el cálculo de tensiones y deformaciones, complementando los conocimientos adquiridos en el estudio de la Teoría de la Elasticidad.

Sólo nos resta esperar que estos apuntes consigan su objetivo fundamental: facilitar el trabajo tanto de los alumnos como de los profesores encargados de la asignatura.

INDICE

TEMA 1. INTRODUCCION.....	1
1.1. Consideraciones generales. Ámbito de la asignatura	3
1.2. Componentes: Elasticidad y Resistencia de Materiales	4
1.3. Definición y objeto	5
1.4. La Resistencia de Materiales en el proceso de cálculo de una obra de Ingeniería Mecánica.....	6
1.5. Formas de los elementos de las estructuras.....	9
1.6. Hipótesis sobre la naturaleza de los cuerpos objeto de estudio	11
1.7. Etapas básicas en el análisis de una estructura	11
1.8. Hipótesis sobre las deformaciones.....	13
TEMA 2. CONCEPTO DE TENSIÓN	15
2.1. El medio continuo.....	17
2.2. Fuerzas exteriores y fuerzas interiores. Método de las secciones	18
2.3. Concepto de tensión.....	21
2.4. Campo de tensiones	23
2.5. Ecuaciones de equilibrio	27
2.6. Transformación de tensiones: cambio de base	33
2.7. Tensiones principales. Propiedades.....	35
2.8. Tensión tangencial máxima	41
2.9. Tensiones octaédricas.....	44
2.10. Tensión media y tensión de desviación.....	45
2.11. Diagrama de los círculos de Mohr	46
<i>Problemas</i>	49
TEMA 3. TEORÍA GENERAL DE LA DEFORMACIÓN.....	53
3.1. Desplazamientos y deformaciones unitarias.....	55
3.2. Teoría de las pequeñas deformaciones. Sentido físico de las componentes del tensor deformación.....	58
3.3. Análisis de deformaciones. Cambio unitario de volumen	62
3.4. Ecuaciones de compatibilidad	65
<i>Problemas</i>	69

TEMA 4. EL SÓLIDO ELÁSTICO 73

4.1. Ecuaciones constitutivas. Generalidades	75
4.2. El ensayo de tracción.....	76
4.3. El sólido elástico. Energía elástica de deformación.....	82
4.4. Ley de Hooke generalizada.....	91
4.5. Cuerpos elásticos isótropos: relaciones tensión-deformación. Ecuaciones de Lamé	94
4.6. Deformaciones y tensiones de origen térmico	98
4.7. Constantes elásticas.....	100
4.8. Principio de superposición.....	103
<i>Problemas</i>	107

TEMA 5. EL PROBLEMA ELÁSTICO 113

5.1. Planteamiento general del problema. Posibles formulaciones.....	115
5.2. Elasticidad plana. Estado de deformación plana.....	120
5.3. Elasticidad plana. Estado tensional plano. Círculo de Mohr.....	123
<i>Problemas</i>	133

TEMA 6. TEORÍAS DE FALLO.....139

6.1. Introducción.....	141
6.2. Teoría de la tensión principal máxima	148
6.3. Teoría de la deformación longitudinal unitaria máxima.....	150
6.4. Teoría de la tensión tangencial máxima (criterio de Tresca).....	151
6.5. Teoría de la energía de deformación total	154
6.6. Teoría de la energía de distorsión (criterio de Von Mises)	154
6.7. Teoría de Mohr.....	163
6.8. Selección y utilización de las teorías de fallo	167
<i>Problemas</i>	171

**TEMA 7. INTRODUCCION A LA RESISTENCIA DE
MATERIALES. SISTEMAS FORMADOS POR
PIEZAS PRISMÁTICAS177**

7.1. Introducción.....	179
7.2. La pieza prismática. Esfuerzos y tensiones. Hipótesis de Navier	179
7.3. Piezas prismáticas y estructuras según el modo de trabajo.....	183
7.4. Acciones y reacciones. Apoyos	185
7.5. Estructuras isostáticas e hiperestáticas.....	186
7.6. Diagramas de esfuerzos.....	187
7.7. Ecuaciones diferenciales de equilibrio para piezas prismáticas	190

7.8. Principio de Saint-Venant	193
7.9. Coeficiente de seguridad	194
<i>Problemas</i>	197

TEMA 8. ESFUERZO AXIAL SIMPLE 203

8.1. Definición	205
8.2. Estado tensional en tracción o compresión simple	205
8.3. Deformación en tracción o compresión simple	207
8.4. Influencia del peso propio	209
8.5. Sistemas hiperestáticos en tracción-compresión simple	211
8.6. Tensiones iniciales y tensiones térmicas	215
8.7. Deformaciones plásticas en tracción y compresión simple. Tensiones y deformaciones residuales	218
<i>Problemas</i>	227

TEMA 9. TEORIA GENERAL DE LA FLEXION. TENSIONES 243

9.1. Flexión pura, flexión simple y flexión compuesta	245
9.2. Flexión pura en barras prismáticas. Ley de Navier	248
9.3. Vigas cargadas transversalmente: flexión simple. Fórmula de Colignon	259
9.4. Distribución de tensiones cortantes en diversas secciones llenas	263
9.5. Tensiones principales en flexión simple. Líneas isostáticas	272
9.6. Tensiones en vigas compuestas. Vigas armadas. Ballestas.....	276
9.7. Esfuerzo cortante en perfiles delgados abiertos. Centro de flexión.....	283
9.8. Esfuerzo cortante en perfiles cerrados de pared delgada.....	289
<i>Problemas</i>	293

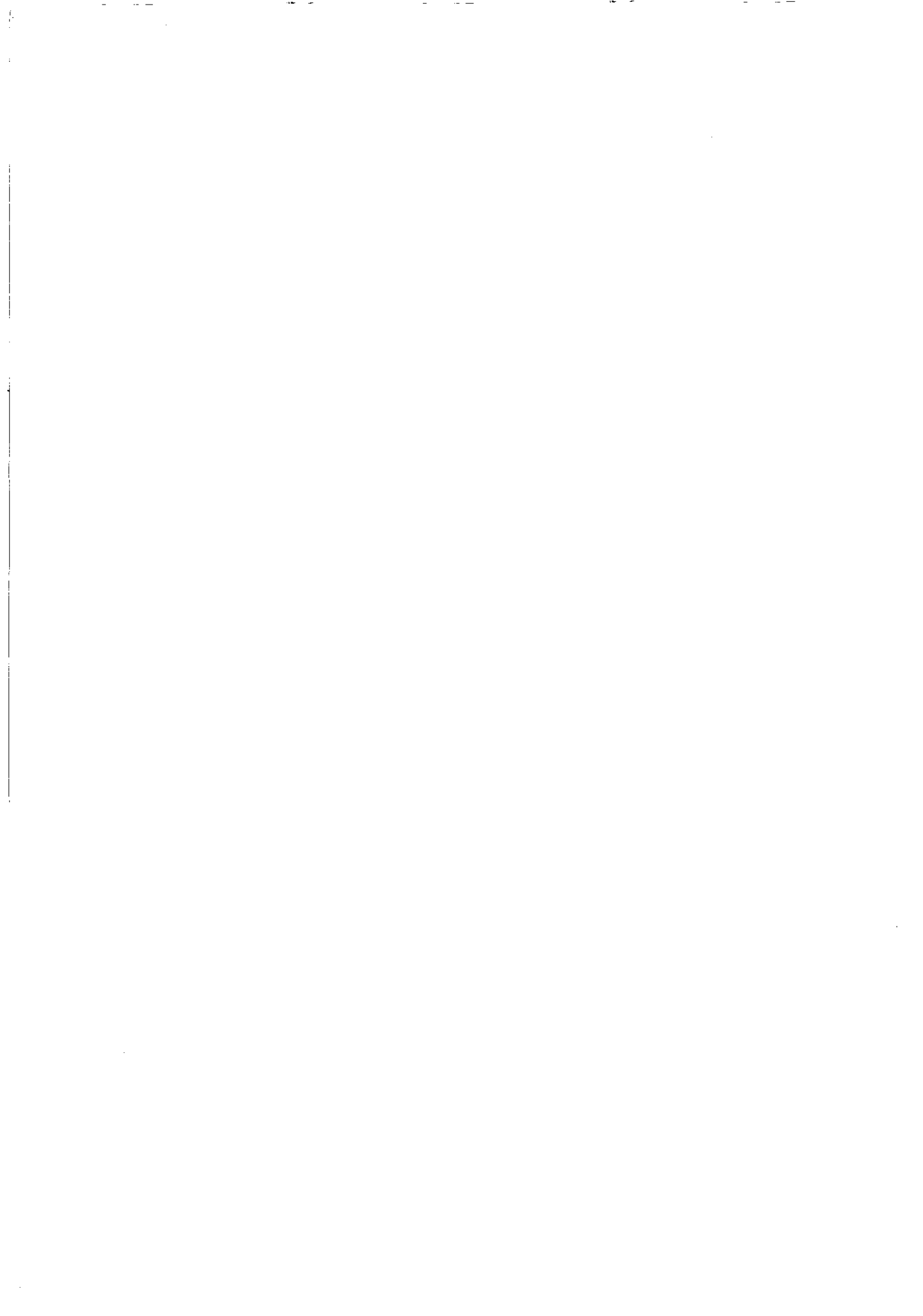
TEMA 10. TEORIA GENERAL DE LA FLEXION. DEFORMACIONES 303

10.1. Introducción	305
10.2. La curva elástica	306
10.3. Método del área de momentos: Teoremas de Mohr.....	310
10.4. Influencia del esfuerzo cortante en la deformación.....	319
10.5. Efecto de una variación no uniforme de temperatura.....	323
10.6. Aplicación del principio de superposición	326
<i>Problemas</i>	329

TEMA 11. RECIPIENTES DE PRESION DE PARED DELGADA	339
11.1. Introducción.....	341
11.2. Equilibrio de una lámina de pared delgada.....	343
11.3. Casos particulares.....	347
<i>Problemas</i>	353
ANEXO I: Métodos experimentales en Elasticidad. Extensometría.....	359
ANEXO II: Tablas de perfiles normalizados.....	371
SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS	385
BIBLIOGRAFIA.....	395

TEMA 1

INTRODUCCIÓN



1.1. CONSIDERACIONES GENERALES. ÁMBITO DE LA ASIGNATURA

El objetivo de esta introducción es tratar de delimitar, con la mayor precisión posible, el ámbito científico de la disciplina que nos ocupa.

La **Elasticidad y Resistencia de Materiales** se sitúa dentro del contexto propio de la Mecánica, ciencia que se basa en el estudio de las fuerzas y los movimientos, y cuyo objeto es la explicación racional -en forma de categorías matemáticas- del movimiento local de los cuerpos. De la aplicación práctica de los principios y teoremas de la Mecánica surge la Mecánica Aplicada. Se puede definir, por tanto, la Mecánica Aplicada como la ciencia que aplica los principios de la Mecánica a sistemas de interés práctico para interpretar su comportamiento y desarrollar reglas racionales de diseño.

La Mecánica Aplicada a los sistemas materiales abarca un gran número de disciplinas, más o menos interrelacionadas. El principal factor diferenciador de estas disciplinas es la distinta naturaleza de los cuerpos objeto de estudio, que pueden variar desde un fluido perfecto hasta un cuerpo sólido. En el primer caso resultaría la Mecánica de Fluidos, y en el segundo, la Mecánica de los Sólidos. Dentro de esta última se sitúa la "Elasticidad y Resistencia de Materiales".

Al considerar los sólidos debe distinguirse entre sólido rígido y **sólido deformable**. Por contraposición a sólido rígido, se entiende por **sólido deformable** aquél que es susceptible de experimentar cambios de forma como consecuencia de las diversas acciones exteriores a que puede estar sometido. A estos cambios de forma se les denomina propiamente **deformaciones**.

Estrictamente hablando, *todos los sólidos son deformables*. De hecho, cuando un cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas puede experimentar dos tipos de movimientos: a) cambios generales de posición (movimientos de sólido rígido), y b) cambios locales de forma (deformaciones).

Aun cuando en realidad todos los cuerpos son deformables, para algunos propósitos es posible analizar con suficiente precisión algunos aspectos determinados del comportamiento de los sólidos sometidos a fuerzas, suponiendo que el sólido mantiene su forma bajo la acción de las fuerzas que sobre él actúan o, lo que es lo mismo, suponiéndole perfectamente rígido. Es el ámbito propio de la Mecánica del

Sólido Rígido, cuyos principios y teoremas ya han sido estudiados en cursos anteriores, y que se caracteriza por considerar los sólidos como indeformables.

En cambio, *característica principal de la Elasticidad y Resistencia de Materiales es precisamente considerar los sólidos como deformables*. Es una disciplina que se encuadra por ello en la Mecánica de los Sólidos Deformables. Aquí lo esencial es el comportamiento *local* del sólido. Las leyes del movimiento del sólido considerado como un cuerpo rígido no sólo pasan a segundo plano, sino que en muchos casos carecen de importancia. De hecho, gran parte de los sistemas materiales que se estudian en la asignatura son sistemas en reposo, sin movimientos globales de sólido rígido.

En algunas referencias bibliográficas, se denomina a la Resistencia de Materiales como Mecánica de las Estructuras, entendiéndose por **estructura** un conjunto de cuerpos ordenados e interconectados entre sí de forma tal que puedan resistir y transmitir cargas. La definición es amplia y abarca multitud de sistemas con los que estamos habitualmente familiarizados: desde sillas y mesas hasta estructuras de edificios, de todo tipo de máquinas, etc.

1.2. COMPONENTES: ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

En la materia que se está considerando cabe distinguir dos partes bien diferenciadas: la Elasticidad y la Resistencia de Materiales. La primera de ellas, la **Elasticidad**, se relaciona con el denominado **comportamiento elástico** de los materiales (*propiedad consistente en que los materiales recuperan su forma y tamaño al retirar las cargas que habían producido en ellos una deformación*). Analiza y formula matemáticamente la relación existente entre la acción exterior (cargas y/o desplazamientos impuestos) y la respuesta del material (tensiones y deformaciones) *en cada punto* del sólido, dando lugar a unas formulaciones que, por lo general, tienen un gran rigor matemático.

La **Resistencia de Materiales**, por su parte, centra su estudio en los elementos más típicos de las estructuras (barras prismáticas, láminas, etc.), introduciendo **hipótesis simplificativas** de cálculo que permiten obtener su respuesta ante las sollicitaciones a las que están sometidas de un modo sencillo y rápido. Esta solución así obtenida es, evidentemente, menos rigurosa que la proporcionada por la Teoría de la Elasticidad.

Por lo tanto, una diferencia notable entre las dos partes que constituyen esta disciplina radica en las distintas hipótesis de partida que consideran en sus planteamientos y la consiguiente profundidad con que realizan el estudio de los problemas prácticos.

Una segunda diferencia se encuentra en el ámbito de los problemas que analizan. La Resistencia de Materiales no se reduce únicamente a la consideración de materiales con comportamiento elástico, sino que amplía su campo de estudio al comportamiento plástico de los materiales, proporcionando los fundamentos del método plástico de cálculo, método que ha experimentado un gran auge y desarrollo desde las últimas décadas del siglo pasado.

Pese a la complejidad de sus formulaciones, el estudio de la Teoría de la Elasticidad, presenta un gran interés ya que, entre otras cosas, permite comprobar el grado de aproximación de los métodos de cálculo propios de la Resistencia de Materiales. Además, debido a la generalización del ordenador y los métodos computacionales de cálculo, es posible abordar con estas herramientas la resolución de problemas complejos formulados según la Teoría de la Elasticidad. De esta forma, se abre un nuevo horizonte para el desarrollo y aplicación de esta Teoría, acercándola al diseño y proporcionando en definitiva una convergencia creciente con la Resistencia de Materiales.

1.3. DEFINICIÓN Y OBJETO

Puesto que la Resistencia de Materiales ocupará la mayor parte de la asignatura, en este epígrafe se va a proceder a su **definición** - una de entre las distintas definiciones que es susceptible de recibir - y a delimitar claramente su objeto.

Cabe definir la Resistencia de Materiales como *"la ciencia que trata del cálculo de la resistencia mecánica, de la rigidez y de la estabilidad de los elementos de las estructuras"*.

Por **resistencia mecánica** de un elemento se entiende su capacidad de oponerse a la rotura, al ser sometido a una sollicitación exterior. Por **rigidez**, la capacidad que tiene de oponerse a las deformaciones.

Considérese un ejemplo sencillo para poner de manifiesto estas dos propiedades. Sean dos cuerpos de la misma forma y dimensiones, pero de distinto material -por ejemplo, uno de escayola y otro de acero- sometidos a un mismo sistema de fuerzas exteriores que vamos aumentando paulatinamente hasta la rotura. Se puede observar que se produce primero la rotura en el cuerpo de escayola. Decimos entonces que el acero presenta una mayor resistencia mecánica. Además, ambos experimentan, para un mismo valor de la carga, deformaciones distintas. Y en este sentido decimos que poseen distinta rigidez (mayor en el acero en condiciones normales).

Por **estabilidad** de un elemento estructural se entiende la capacidad de oposición del elemento a grandes desplazamientos como consecuencia de pequeñas variaciones de la sollicitación exterior.

Como ejemplo, considérense dos alambres del mismo material y sección, pero de muy diferente longitud (5 y 50 cms) sometidos a una fuerza de compresión creciente. Como fácilmente puede constatarse el alambre de mayor longitud presentará un comportamiento menos estable ante dicha carga.

Respecto al **objeto** de la Resistencia de Materiales, consiste en proporcionar un cuerpo de doctrina (un conjunto de conocimientos y métodos de cálculo) que permitan la resolución de los dos problemas fundamentales siguientes:

a) **Problema de dimensionamiento**: conocidas las sollicitaciones que van a actuar sobre los elementos de una estructura o una maquinaria en general, determinar el material más conveniente, así como la forma y dimensiones más adecuadas, para que puedan resistirse esas sollicitaciones y, además, para conseguirlo de la forma más económica posible.

b) **Problema de comprobación**: conocidas las sollicitaciones exteriores y realizado el dimensionamiento de la pieza, comprobar que efectivamente ésta cumple las condiciones de resistencia, rigidez y estabilidad.

1.4. LA RESISTENCIA DE MATERIALES EN EL PROCESO DE CÁLCULO DE UNA OBRA DE INGENIERÍA MECÁNICA

Dentro del cálculo de una obra de Ingeniería Mecánica, la Resistencia de Materiales desempeña un papel fundamental. El proceso general de dicho cálculo se puede sintetizar en el diagrama de la fig. 1.1, que comprende los siguientes pasos:

1º. Selección del sistema a estudiar. Un sistema físico se presenta como un objeto de análisis en el caso de que ya exista (problema de comprobación), o de diseño (problema de dimensionamiento). El diagrama de la fig. 1.1 se refiere a este segundo tipo de problemas. Esta fase puede abarcar desde un sistema completo, como un vehículo o un puente, hasta un simple subsistema, como una viga, un pasador, etc.

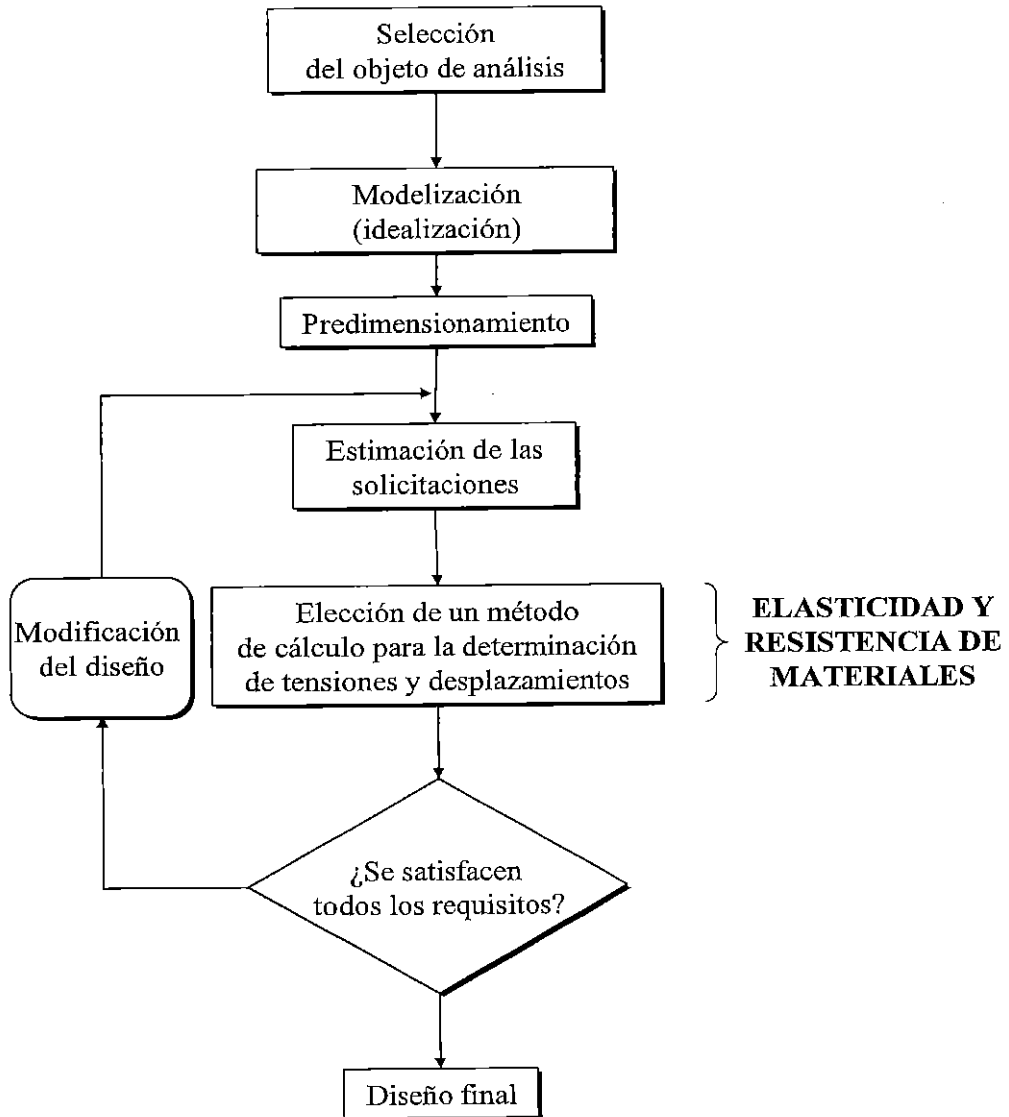


Figura 1.1. Diagrama de flujo para el cálculo general de una obra de Ingeniería Mecánica

2º. Realización de un modelo, representativo del problema a estudiar. Ésta suele ser la etapa clave del proceso, pues supone la transición de la forma física de razonamiento a la forma matemática. En general, cualquier sistema, por sencillo que pueda parecer, es tan complejo que resulta prácticamente imposible representar de forma exhaustiva todas sus características en un simple modelo. Por esta razón, la labor más difícil suele ser la de introducir aquellas hipótesis simplificadoras que permitan confeccionar un modelo que describa de modo razonablemente completo la situación real. Como regla general, en la modelización del sistema hay que compaginar la simplicidad que facilite la resolución posterior con la necesaria precisión que permita obtener una solución que se aproxime a la real.

Por ejemplo, si se trata de calcular el cable de un ascensor (la sección del cable), habrá que considerar ante todo el peso de la cabina y su carga (fig. 1.2). Como lo que interesa es la resistencia del cable, ambas pueden sustituirse por una fuerza aplicada en el extremo del cable. También habría que considerar la aceleración (fuerzas de inercia) y, en el caso de que se eleve a gran altura, el peso del cable. Al mismo tiempo se debe prescindir de otros factores de poca importancia, como la resistencia aerodinámica que ofrece el ascensor, la presión barométrica a distintas alturas, la variación de la temperatura con la altura y otros factores semejantes que, afectando muy secundariamente al cálculo de la resistencia del cable, complicarían enormemente el análisis.

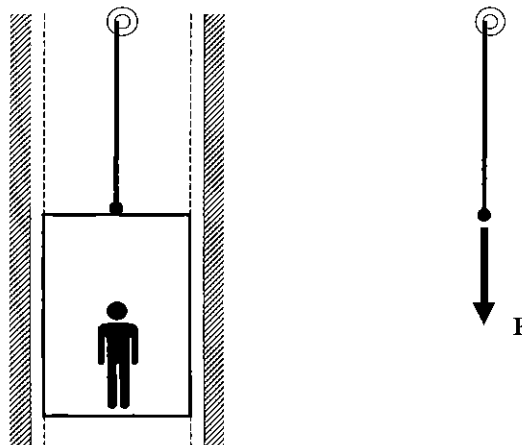


Figura 1.2. Idealización en el cálculo del cable de un ascensor

En definitiva, en esta fase del proceso se deben destacar aquellas particularidades más esenciales del problema y se debe prescindir de aquellos factores que no influyen apreciablemente en el comportamiento del sistema. En el caso de un proyecto, también deberán tenerse en cuenta otros condicionantes diferentes de la propia resistencia: la funcionalidad, la economía, la estética, la facilidad de fabricación, etc.

3º. Análisis de la estructura. Fijado el modelo, se procede a lo que es propiamente el análisis de la estructura. Este proceso suele ser iterativo y comienza con un *predimensionamiento* y con la determinación de las acciones que van a actuar sobre la misma (*solicitaciones*). A continuación se aplica uno de los posibles *métodos de cálculo*, lo que conduce a un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento del modelo, que de esta manera se ha transformado en un modelo matemático.

Es en este momento del análisis cuando la disciplina que nos ocupa desempeña su papel, ya que los métodos de cálculo son precisamente los suministrados por la Teoría de la Elasticidad o por la Resistencia de Materiales. Es más, su función no se limita a facilitar dichos métodos, sino también a proporcionar el conocimiento del comportamiento resistente de los materiales utilizados. De aquí el carácter básico e imprescindible de esta disciplina en el área de la construcción o de cualquier rama especializada de la Ingeniería Mecánica. Sea cual sea el sistema mecánico que se analice, será necesario conocer cómo y en qué magnitud varían los esfuerzos internos al ser sometido dicho sistema a solicitaciones exteriores, y cómo y en qué magnitud se desplazan sus puntos constitutivos.

Elegido el método de cálculo, se resuelve el modelo matemático resultante y se comprueba si los resultados obtenidos (esfuerzos internos y deformaciones) son o no aceptables. Las Normas de los distintos países suelen establecer límites superiores para los valores que pueden alcanzar las variables de tensión o deformación en los diversos materiales y estructuras. Si los valores obtenidos no son aceptables, se redefine el modelo o se modifican las dimensiones, dando lugar de esta forma a un proceso iterativo hasta la obtención del diseño final.

1.5. FORMAS DE LOS ELEMENTOS DE LAS ESTRUCTURAS

Siendo muy variada la tipología de los elementos que se encuentran tanto en las

estructuras de ingeniería civil como en las máquinas, la mayoría de ellos puede reducirse a un número relativamente pequeño de formas fundamentales, las cuales se definen en función de sus proporciones geométricas. Son las denominadas piezas prismáticas, placas y láminas (fig. 1.3).

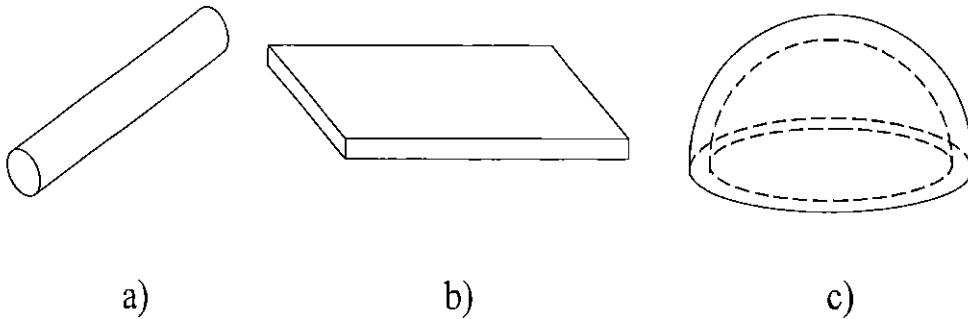


Figura 1.3. Elementos típicos: a) Piezas prismáticas, b) placas, c) láminas

La **pieza prismática** es un cuerpo en el que las dimensiones de la sección transversal son pequeñas comparadas con su longitud. Es el tipo de elementos más abundante en las estructuras: vigas, columnas, ejes, ganchos, etc.

La **placa** es un cuerpo plano cuyo espesor es pequeño comparado con las otras dos dimensiones. Como ejemplo, se pueden citar las tapas de depósitos, los fondos planos de depósitos subterráneos, las placas utilizadas como forjados en edificaciones, etc.

Las **láminas** pueden considerarse como placas curvadas y, por tanto, son cuerpos no planos de espesor relativamente pequeño. Ejemplo de láminas son casi todos los depósitos, tanques de agua, cúpulas de edificios, revestimientos de fuselajes y alas de aviones, casco de los barcos, etc.

Para esta serie de elementos típicos, es posible elaborar métodos sencillos de cálculo, aceptables desde el punto de vista práctico, basados en una serie de hipótesis simplificadoras perfectamente definidas para cada uno de ellos. A lo largo de la asignatura, se estudiará casi exclusivamente la pieza prismática y estructuras sencillas formadas por piezas prismáticas. También se considerará una teoría elemental de láminas para el cálculo de algunos recipientes sometidos a presión.

Cuando un elemento no se corresponda con uno de estos tipos, es decir, ante un elemento tridimensional cualquiera, deberán aplicarse directamente los resultados de la Teoría de la Elasticidad.

1.6. HIPÓTESIS SOBRE LA NATURALEZA DE LOS CUERPOS OBJETO DE ESTUDIO

A los cuerpos objeto de estudio de esta disciplina se les aplicará las siguientes hipótesis referentes a su naturaleza: continuidad, homogeneidad e isotropía.

La **continuidad** supone que la materia ocupa plenamente el volumen atribuido al sólido, despreciando, por consiguiente, su estructura atómica y posibles agrietamientos. Esta suposición permite aplicar al sólido el cálculo infinitesimal.

La **homogeneidad** del material implica que cualquier parte de él presenta las mismas propiedades, independientemente del volumen o posición.

Finalmente, la **isotropía** conlleva que las propiedades del material son idénticas en cualquier dirección.

Obviamente, ningún material estructural es realmente homogéneo e isótropo. Al observar un acero dúctil a través de un microscopio, se contempla una masa no homogénea de granos, diferentemente orientados. Por tanto, a nivel microscópico se está lejos de cumplir las condiciones ideales de homogeneidad e isotropía. Sin embargo, dado que el tamaño de estos granos es tan pequeño y la distribución de sus orientaciones es aleatoria, cuando se opera a nivel macroscópico se pueden adoptar propiedades medias. Los resultados obtenidos son suficientemente precisos y están confirmados experimentalmente.

1.7. ETAPAS BÁSICAS EN EL ANÁLISIS DE UNA ESTRUCTURA

La respuesta de una estructura ante unos estímulos externos, a los que se suele dar el nombre genérico de **solicitaciones**, (cargas directamente aplicadas, variaciones de temperatura, asentamiento de los apoyos, etc.) se caracteriza de dos maneras: en primer lugar, por *la distribución de tensiones y esfuerzos resultantes* desarrollados en las distintas partes de la estructura, y en segundo lugar, por *el campo de deformaciones y desplazamientos* en todos los puntos de la misma. Cuando ante unas solicitaciones dadas se determinan estas dos características de la respuesta, el comportamiento de la estructura está perfectamente definido.

Con independencia de la causa que origine estas tensiones y deformaciones, el análisis completo de una estructura supone siempre la consideración de tres condiciones básicas:

1º.- Condiciones de equilibrio. Las reacciones en los apoyos, los esfuerzos internos y las cargas exteriores deben satisfacer todas las condiciones de equilibrio de forma tal que, tanto la estructura en su conjunto, como cada uno de sus elementos, permanezca en equilibrio. Generalmente, estas condiciones serán estáticas, aunque ocasionalmente se presentarán problemas en los que será preciso considerar en el equilibrio las fuerzas de inercia, que permiten transformar el problema dinámico en estático (principio de D'Alambert).

2º.- Condiciones de compatibilidad de las deformaciones. Debe existir una continuidad y compatibilidad de las deformaciones a lo largo de la estructura. En particular, los miembros de la estructura deben continuar adecuadamente ensamblados, de manera que las deformaciones que experimenten sean geoméricamente compatibles, independientemente de la causa de la deformación.

Así por ejemplo en la estructura de la fig. 1.4, los alargamientos o acortamientos de las dos barras no son independientes, sino que están relacionados para garantizar la compatibilidad en la deformación (el punto A donde se articulan es común).

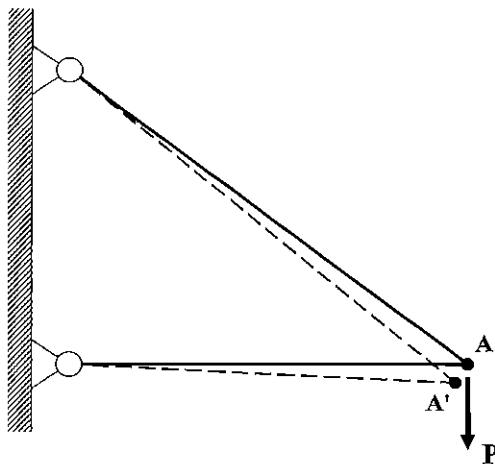


Figura 1.4. Sistema articulado de dos barras. Compatibilidad de deformaciones

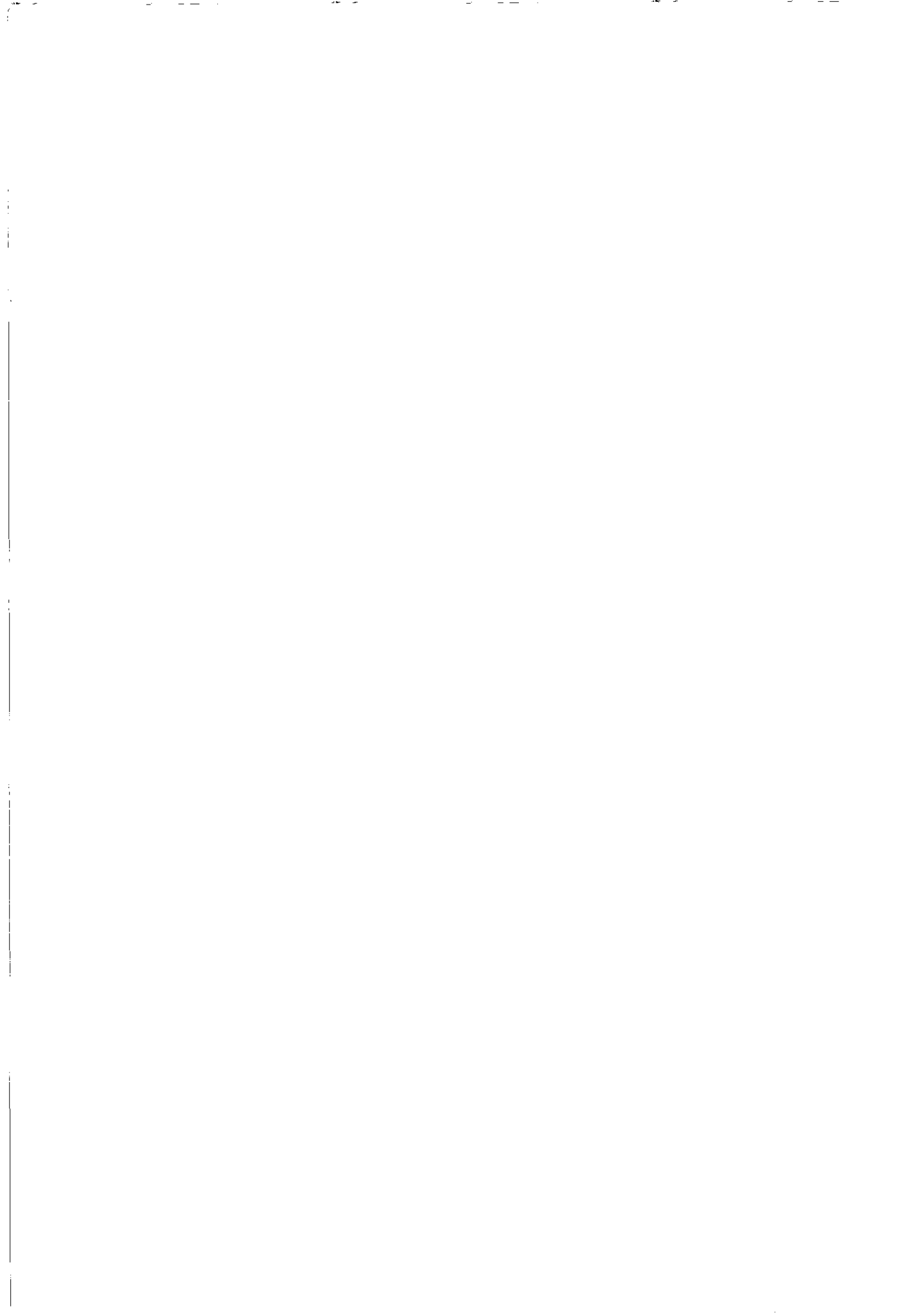
3º.- Leyes de Comportamiento. El análisis completo de la estructura requiere utilizar las relaciones constitutivas entre las deformaciones y las diversas causas que las originan. Estas relaciones se conocen con el nombre de leyes de comportamiento del material. Suelen basarse en investigaciones experimentales.

En resumen, el análisis estructural se centra en dos condiciones básicas: equilibrio y compatibilidad. Las deformaciones deben ser compatibles, y los esfuerzos internos deben satisfacer las exigencias de equilibrio con las cargas aplicadas. Ambas características, deformaciones y esfuerzos interiores, se relacionan, para cada elemento de la estructura, a través de una ley de comportamiento.

1.8. HIPÓTESIS SOBRE LAS DEFORMACIONES

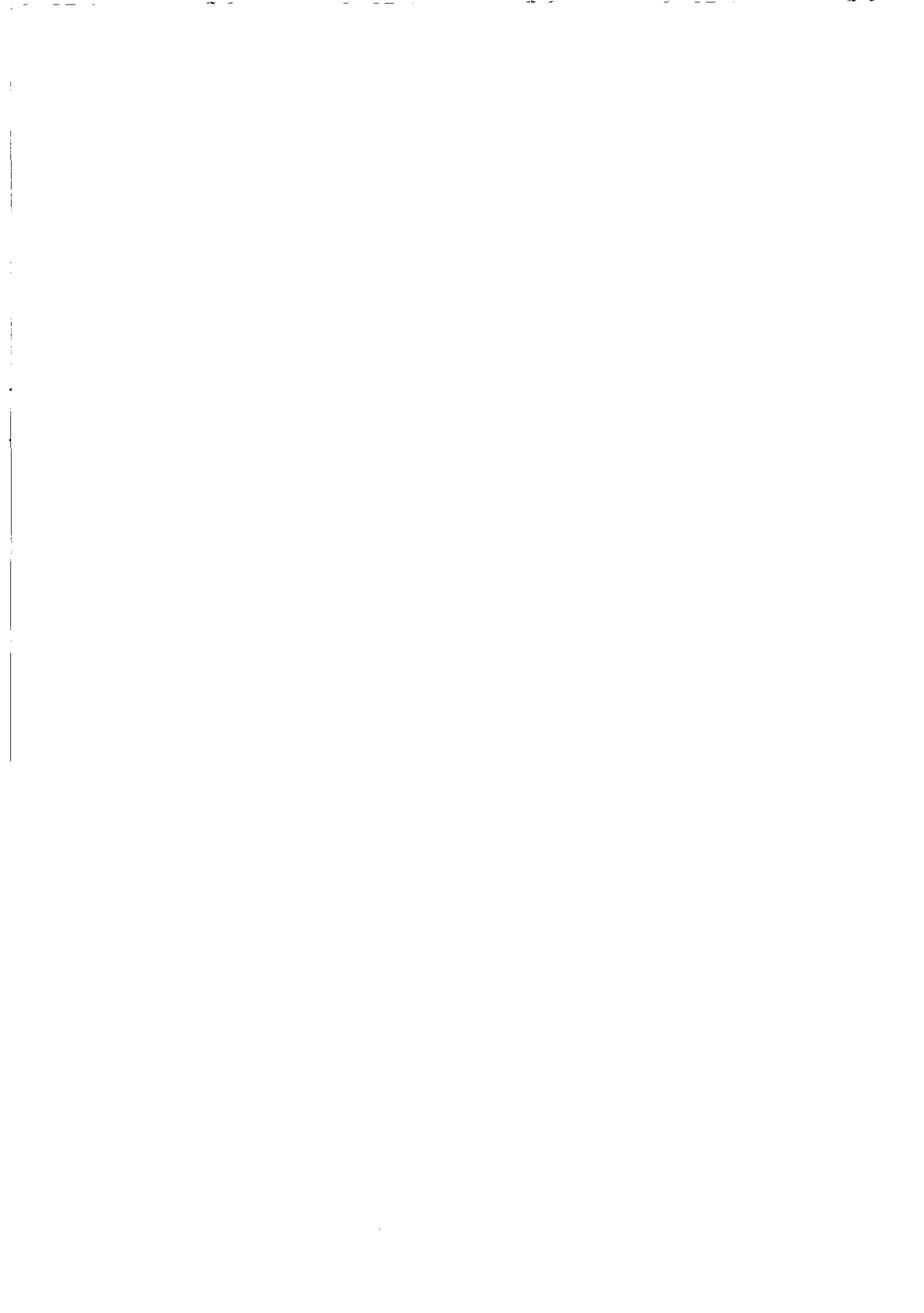
En general, se supondrá que las deformaciones que se producen en una estructura como consecuencia de la aplicación de las cargas son *instantáneas*, es decir, se producen sin intervención de la variable tiempo. Además se supondrá también que se trata de **pequeñas deformaciones**, en el sentido de que la geometría de la estructura no resulta sensiblemente afectada por la deformación. Esta hipótesis implica dos consecuencias importantes:

- a) *Las condiciones de equilibrio pueden establecerse en la estructura no deformada, sin pérdida apreciable de precisión.*
- b) *Las condiciones de compatibilidad pueden también formularse con referencia a la configuración no deformada de la estructura.*



TEMA 2

CONCEPTO DE TENSIÓN



2.1. EL MEDIO CONTINUO

Como se ha mencionado en el tema introductorio, el campo de estudio de esta disciplina es la mecánica de los sólidos deformables, materia que junto con la mecánica de fluidos, forma parte de la llamada mecánica del medio continuo. Lo que la distingue de la mecánica del sólido rígido es que considera la deformabilidad del sólido, y en su estudio interesa considerar cómo se produce la transición de la configuración inicial a la configuración deformada como consecuencia de la aplicación de las cargas, así como la forma en que se transmiten éstas a través del sólido.

La hipótesis de partida en la mecánica del sólido deformable es la continuidad de sus propiedades en todo el dominio material, es decir, se considera que el sólido es un **medio continuo**. De acuerdo con esta hipótesis, una propiedad como la densidad másica en un punto P se definiría como:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (2.1)$$

donde Δm es la masa de una porción de volumen ΔV , alrededor de P . Se supone que este límite existe y es una función continua de la posición del punto.

Por tanto, el cuerpo se sustituye por un modelo matemático continuo cuyos puntos geométricos se identifican con los correspondientes puntos materiales del cuerpo. Dicho de otra forma, no existe solución de continuidad entre dichos puntos materiales.

Es evidente que, definido de este modo, el medio continuo parece contradecir la concepción atómica de la materia. Sin embargo, en una consideración macroscópica, los resultados obtenidos con esa hipótesis han sido contrastados por la experiencia.

Dentro de la **mecánica de los medios continuos** se incluyen todo tipo de medios, desde los fluidos perfectos hasta los sólidos deformables. Por eso, la teoría de esta disciplina inicia su desarrollo haciendo abstracción del medio, basándose tan sólo en aquello que es común para todos ellos: la continuidad de las propiedades en el dominio material. Con este supuesto se desarrollan sus tres partes fundamentales:

1. La *cinemática* del continuo, que analiza cómo puede moverse el medio.
2. El *análisis tensional*, que estudia las fuerzas interiores originadas en el continuo.

3. La *dinámica* del continuo, que suministra las ecuaciones fundamentales del movimiento del medio continuo al ser sometido a un sistema de fuerzas exteriores.

La naturaleza específica del medio se considera en las llamadas *ecuaciones constitutivas*, que definen su ley de comportamiento (elástico, plástico, viscoso).

Para el estudio y desarrollo de esta materia, la herramienta matemática más adecuada es el *cálculo tensorial*, ya que determinadas propiedades del medio continuo, como después se verá, son función no solamente del punto sino también de la dirección en que se consideren. Resulta también perfectamente válido el uso del álgebra matricial, que será la herramienta preferentemente utilizada a lo largo de estas páginas. Como sistema de referencia se empleará uno trirrectangular cartesiano que se supondrá fijo en el espacio -sistema de referencia absoluto-.

En la cinemática del continuo, en la que se analiza el cambio de una posición a otra, existen dos tratamientos alternativos: el de *Lagrange* y el de *Euler*. En el primero, partiendo de una configuración inicial, se sigue a las partículas materiales, a las que se identifica por la posición que ocupan en el instante inicial. La posición genérica de un punto material cualquiera en un instante t será función de la posición en el instante inicial ($t=0$) y del tiempo t transcurrido. Por esta razón, se dice que se trata de un *modelo material*. En cambio, en la cinemática de Euler las propiedades se asocian a cada punto del espacio y no a los puntos materiales. Así por ejemplo, se formula la velocidad en un punto P del espacio y en un tiempo t cualquiera. El foco de atención es el punto por el que pasarán sucesivas partículas materiales del medio continuo. Es por ello un *modelo espacial*.

El planteamiento de *Lagrange* es conveniente ante *grandes deformaciones* (plasticidad en materiales sólidos) y el de *Euler* ante *grandes desplazamientos* (fluidos). *Cuando las deformaciones son pequeñas, ambos resultan equivalentes*. En el desarrollo de esta asignatura no influirá, por tanto, adoptar uno u otro planteamiento.

2.2. FUERZAS EXTERIORES Y FUERZAS INTERIORES. MÉTODO LAS SECCIONES

El análisis de un medio continuo conlleva la consideración de las fuerzas que actúan sobre el medio, para poder establecer posteriormente las condiciones de equilibrio. A

continuación se expondrán los tipos de fuerzas que cabe considerar en el estudio del comportamiento de los sólidos deformables.

2.2.1. Fuerzas exteriores

Pueden subdividirse en fuerzas másicas o de volumen y fuerzas de superficie.

a) *Fuerzas másicas o de volumen*

Las fuerzas de volumen se deben a la interacción entre las partículas del medio y los sistemas materiales exteriores. Si $\vec{\phi}$ representa la fuerza por unidad de volumen, la fuerza originada en un volumen elemental dV será:

$$d\vec{\phi} = \vec{\phi} \cdot dV \quad (2.2)$$

De modo alternativo, si $\vec{\theta}$ expresa la fuerza por unidad de masa, la fuerza elemental sería:

$$d\vec{\theta} = \vec{\theta} \cdot \rho \cdot dV \quad (2.3)$$

Estas fuerzas de volumen se encuentran distribuidas en todo el volumen del medio y se aplican por tanto a cada una de las partículas materiales. Algunos ejemplos son el peso propio, las fuerzas de inercia y las fuerzas magnéticas.

b) *Fuerzas de superficie*

Se denominan fuerzas de superficie a las que actúan directamente sobre la superficie circundante del medio continuo. Por ejemplo, las cargas directamente aplicadas y las reacciones en los soportes de una estructura. Pueden ser *fuerzas distribuidas* (cuando actúan sobre una porción finita de esa superficie), o *fuerzas puntuales o concentradas* (cuando actúan sobre una porción infinitesimal de la superficie).

Siguiendo un razonamiento similar al utilizado para expresar las fuerzas de volumen, se designará por \vec{T} a la fuerza por unidad de superficie. Es decir, si dA es un elemento infinitesimal de la superficie que circunda el medio continuo, la fuerza que actúa sobre él será:

$$d\vec{T} = \vec{T} \cdot dA \quad (2.4)$$

2.2.2. Fuerzas interiores

A la aplicación de las fuerzas exteriores el medio responde deformándose, al mismo tiempo que se generan unas fuerzas en su interior.

En efecto, entre las partículas vecinas de cualquier cuerpo no cargado siempre existen unas fuerzas de interacción que tienden a conservar la configuración del cuerpo, oponiéndose a todo cambio en la disposición mutua de las partículas. Al aplicar unas fuerzas exteriores y, en consecuencia, deformar el cuerpo, se modifica la posición mutua de las partículas, apareciendo fuerzas de interacción adicionales, que se denominan fuerzas interiores.

Su existencia también se pone de manifiesto mediante el *artificio de las secciones imaginarias*, también llamado **método de las secciones o principio del corte**, debido a Cauchy. Sea V el volumen material constituido por las partículas del medio y S la superficie que lo circunda (fig. 2.1a). El medio está en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores, que genéricamente se pueden representar por \vec{P}_i y \vec{q}_j . Como es sabido, el equilibrio exige que este sistema de fuerzas cumpla las condiciones de la estática, es decir, deberán ser nulas la resultante de las fuerzas así como el momento de las mismas respecto a un punto cualquiera.

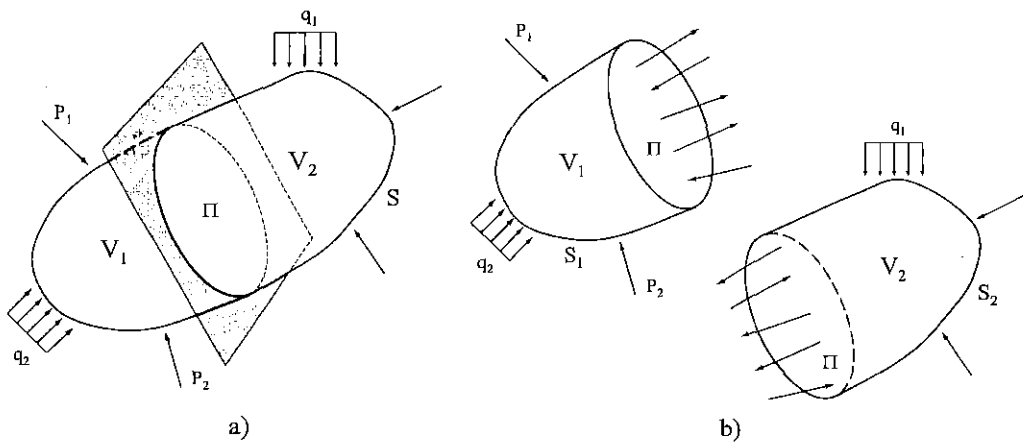


Figura 2.1. Método de las secciones o principio del corte

Se divide ficticiamente este volumen material V en dos complementarios V_1 y V_2 mediante una superficie plana Π que sirve de frontera para ambos. Sean S_1 y S_2 las partes de S pertenecientes a V_1 y V_2 , respectivamente (fig. 2.1b).

Para poder segregar la porción V_1 sin alterar su estado de equilibrio, será necesario afectarla de las acciones que sobre ella ejerce la parte V_2 que, evidentemente, constituirán un conjunto de fuerzas que actúan sobre la superficie Π y que habrán de equilibrar a las fuerzas exteriores aplicadas sobre la parte segregada V_1 . Se trata de las fuerzas de interacción entre V_1 y V_2 , es decir, de las fuerzas interiores.

Las fuerzas interiores que actúan en la sección Π de V_2 son, de acuerdo con la tercera ley de Newton, iguales en magnitud y de sentido contrario a las que actúan en la sección Π de V_1 .

2.3. CONCEPTO DE TENSIÓN

Sea un punto P de la superficie Π de V_1 , y sea ΔA un área elemental en el entorno de P , contenida en el plano Π , y con vector unitario normal dirigido hacia el exterior de V_1 (fig. 2.2). La fuerza interior que se transmite a través de dicha superficie elemental es $\vec{\Delta F}$ y el cociente $\vec{\Delta F} / \Delta A$ será un promedio de la fuerza que por unidad de área se transmite a través de esa área elemental.

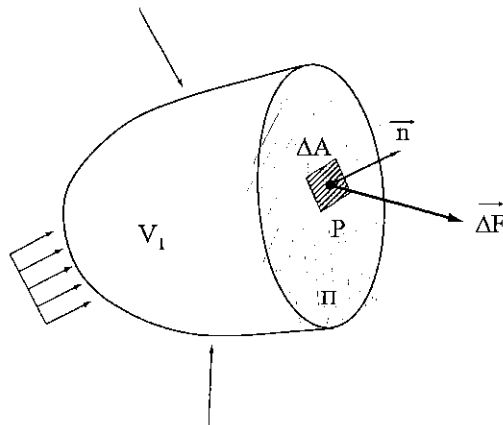


Figura 2.2. Concepto de tensión

Se define entonces la **tensión en el punto P a través de la superficie Π** como:

$$\vec{\sigma}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta A} \quad (2.5)$$

es decir, la fuerza por unidad de área que se ejerce en dicho punto a través de una superficie paralela a la superficie Π . Mediante el subíndice n de $\vec{\sigma}_n$, se quiere indicar

que se trata de la tensión asociada a la superficie plana que tiene por vector unitario normal el vector \vec{n} . Las dimensiones de la tensión son las de fuerza por unidad de superficie.

El vector $\vec{\sigma}_n$, que por lo general no será perpendicular a la superficie elemental ΔA , podrá descomponerse según las direcciones normal y tangencial a dicha superficie (fig. 2.3). Y así, si \vec{n} se dirige hacia el exterior, se define la componente normal de la tensión o **tensión normal**, a la proyección de $\vec{\sigma}_n$ sobre \vec{n} , es decir:

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} \quad (2.6)$$

Si σ_{nn} es positiva se llama tensión de tracción, y si es negativa tensión de compresión.

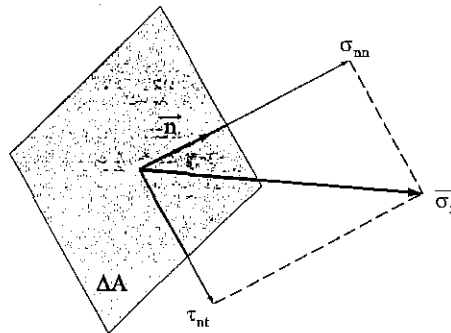


Figura 2.3. Componentes intrínsecas del vector tensión

A la proyección de $\vec{\sigma}_n$ sobre el plano que contiene a ΔA se le denomina **tensión tangencial o cortante** τ_{nt} , nombre que le viene del hecho de que tiende a producir un deslizamiento relativo entre dos elementos superficiales contiguos.

A las componentes normal y tangencial del vector tensión se les suele denominar **componentes intrínsecas de la tensión**, porque no dependen del sistema de referencia. Son magnitudes escalares ligadas al plano considerado por el punto P.

El artificio de las secciones imaginarias pone claramente de manifiesto que la tensión no solamente es función del punto P, sino de la orientación de la superficie II, de tal forma que para cada punto del cuerpo, son infinitas las tensiones, una para cada orientación posible de esa superficie. Por tanto:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}(P, \vec{n}) \quad (2.7)$$

Además debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con la tercera ley de Newton:

$$\vec{\sigma}(P, -\vec{n}) = -\vec{\sigma}(P, \vec{n}) = -\vec{\sigma}_n \quad (2.8)$$

es decir, la fuerza elemental ejercida por la porción V_2 sobre la porción V_1 es igual y de sentido contrario a la ejercida por V_1 sobre V_2 a través de la misma superficie elemental.

También se puede demostrar la unicidad del vector tensión, es decir, a todo par de elementos P y \vec{n} corresponde un único vector $\vec{\sigma}_n$.

2.4. CAMPO DE TENSIONES

En este apartado, se determinará cómo varía $\vec{\sigma}_n$ al mantener P y hacer que \vec{n} vaya tomando las distintas orientaciones posibles.

Supóngase un medio continuo en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas, y sea P un punto situado en dicho medio. Con origen en P se fija un sistema de ejes xyz , y en el entorno del punto se segrega un tetraedro elemental $ABCP$ de caras paralelas a los planos coordenados -excepto la cara ABC -. Sea \vec{n} el vector unitario normal a dicha cara ABC y n_x, n_y, n_z sus cosenos directores (fig. 2.4).

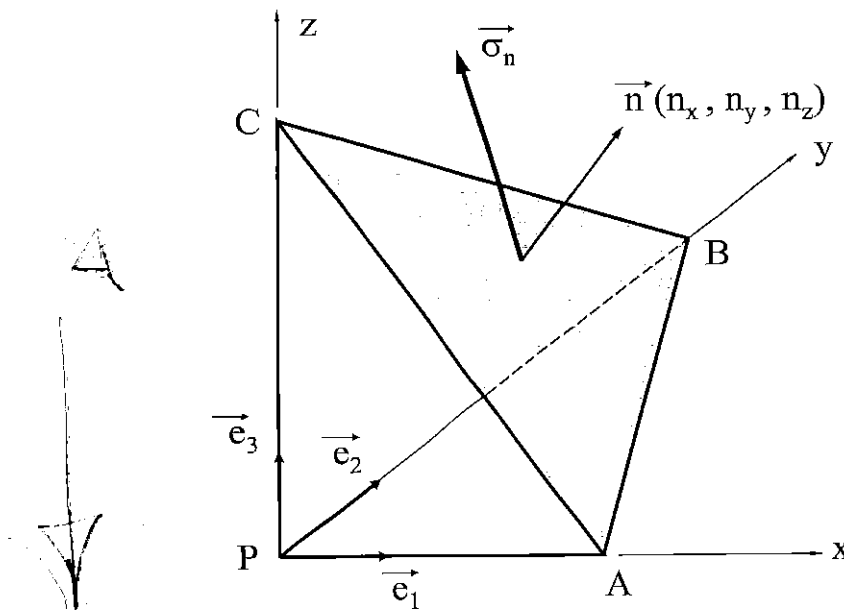


Figura 2.4. Campo de tensiones

El equilibrio de ese tetraedro elemental exige que las fuerzas de volumen y las fuerzas que actúan sobre sus cuatro caras elementales formen un sistema nulo, es decir:

$$d\vec{\phi} + d\vec{T} = \vec{0} \quad (2.9)$$

donde $\vec{\phi}$ y \vec{T} representan, respectivamente, las fuerzas de volumen por unidad de volumen y las fuerzas de superficie por unidad de superficie.

Si se designa por $\vec{\sigma}_x = \vec{\sigma}(P, \vec{e}_1)$ a la tensión correspondiente a un plano perpendicular al eje x (paralelo al plano yz) que pasa por P y cuyo vector unitario normal es \vec{e}_1 , el vector tensión correspondiente a la cara PBC , cara cuya normal exterior es $-\vec{e}_1$, será:

$$\vec{\sigma}_{PBC} = \vec{\sigma}(P, -\vec{e}_1) = -\vec{\sigma}(P, \vec{e}_1) = -\vec{\sigma}_x$$

y, por consiguiente, la fuerza total que actúa sobre dicha cara es: $-\vec{\sigma}_x \cdot dA_x$ siendo dA_x el área del triángulo elemental PBC .

Definiendo de forma análoga los vectores tensión $\vec{\sigma}_y = \vec{\sigma}(P, \vec{e}_2)$ y $\vec{\sigma}_z = \vec{\sigma}(P, \vec{e}_3)$, resultará que $-\vec{\sigma}_y \cdot dA_y$ y $-\vec{\sigma}_z \cdot dA_z$ serán las fuerzas que actúan sobre las caras PAC y PAB , respectivamente. Finalmente $\vec{\sigma}_n \cdot dA$ será la fuerza sobre la cara ABC .

Por consiguiente, la ecuación de equilibrio (2.9) puede expresarse como:

$$\vec{\phi} \cdot dV + \vec{\sigma}_n \cdot dA - \vec{\sigma}_x \cdot dA_x - \vec{\sigma}_y \cdot dA_y - \vec{\sigma}_z \cdot dA_z = \vec{0} \quad (2.10)$$

Por otra parte, al ser \vec{n} el vector unitario normal a la superficie ABC , se verifica:

$$dA_x = n_x \cdot dA; \quad dA_y = n_y \cdot dA; \quad dA_z = n_z \cdot dA \quad (2.11)$$

Luego:

$$\vec{\phi} \cdot dV + \vec{\sigma}_n \cdot dA - (\vec{\sigma}_x \cdot n_x + \vec{\sigma}_y \cdot n_y + \vec{\sigma}_z \cdot n_z) \cdot dA = \vec{0} \quad (2.12)$$

El primer sumando de esta ecuación es proporcional a dV y en consecuencia es un infinitésimo de un orden superior respecto a los otros dos (que son proporcionales a dA). Por esta razón en el límite puede despreciarse (y el paso al límite equivale a aproximar infinitamente la cara ABC al punto P). Por lo tanto:

$$\vec{\sigma}_n \cdot dA = (\vec{\sigma}_x \cdot n_x + \vec{\sigma}_y \cdot n_y + \vec{\sigma}_z \cdot n_z) \cdot dA \quad (2.13)$$

es decir,

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x \cdot n_x + \vec{\sigma}_y \cdot n_y + \vec{\sigma}_z \cdot n_z \quad (2.14)$$

Esta ecuación vectorial, a la que se conoce con el nombre de **ecuación o fórmula de Cauchy**, indica que el estado de tensiones en un punto queda perfectamente definido cuando se conocen en él las tensiones correspondientes a los planos normales a las direcciones cartesianas del sistema de referencia elegido.

La ecuación (2.14) puede expresarse en forma matricial. En efecto, denominando $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}$ a las componentes del vector $\vec{\sigma}_n$, según las direcciones x, y, z, se verifica:

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_{nx} \vec{e}_1 + \sigma_{ny} \vec{e}_2 + \sigma_{nz} \vec{e}_3 \quad (2.15)$$

Por otra parte, $\vec{\sigma}_x$ -tensión asociada a un plano perpendicular al eje x cuya normal exterior coincide con \vec{e}_1 - tendrá dos componentes intrínsecas: una normal a dicho plano, que se designará por σ_{xx} , y otra tangencial, contenida en el plano, que a su vez podrá descomponerse en dos componentes según las direcciones y y z, que se llamarán, respectivamente, τ_{xy} y τ_{xz} .

Por tanto:

$$\vec{\sigma}_x = \sigma_{xx} \vec{e}_1 + \tau_{xy} \vec{e}_2 + \tau_{xz} \vec{e}_3 \quad (2.16)$$

Obsérvese que con esta notación el primer subíndice hace referencia al plano al que está asociada la tensión y el segundo a la dirección de la componente de la tensión según cada uno de los tres ejes coordenados.

Análogamente $\vec{\sigma}_y$, que es la tensión asociada a un plano perpendicular al eje y, plano cuya normal exterior coincide con \vec{e}_2 , tendrá también en el caso más general tres componentes según las tres direcciones cartesianas, y podrá expresarse como:

$$\vec{\sigma}_y = \tau_{yx} \vec{e}_1 + \sigma_{yy} \vec{e}_2 + \tau_{yz} \vec{e}_3 \quad (2.17)$$

De la misma forma, para $\vec{\sigma}_z$, asociada a un plano perpendicular al eje z:

$$\vec{\sigma}_z = \tau_{zx} \vec{e}_1 + \tau_{zy} \vec{e}_2 + \sigma_{zz} \vec{e}_3 \quad (2.18)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.15) a (2.18) en (2.14) resulta:

$$\sigma_{nx}\vec{e}_1 + \sigma_{ny}\vec{e}_2 + \sigma_{nz}\vec{e}_3 = (\sigma_{xx}\vec{e}_1 + \tau_{xy}\vec{e}_2 + \tau_{xz}\vec{e}_3) \cdot n_x + (\sigma_{yy}\vec{e}_2 + \tau_{yx}\vec{e}_1 + \tau_{yz}\vec{e}_3) \cdot n_y + (\sigma_{zz}\vec{e}_3 + \tau_{zx}\vec{e}_1 + \tau_{zy}\vec{e}_2) \cdot n_z \quad (2.19)$$

y agrupando términos e igualando componente a componente:

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{xx} \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot n_y + \tau_{zx} \cdot n_z \\ \sigma_{ny} &= \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y + \tau_{zy} \cdot n_z \\ \sigma_{nz} &= \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_{zz} \cdot n_z \end{aligned} \quad (2.20)$$

sistema que puede expresarse matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

o en notación compacta

$$\{\sigma_n\} = [T_{ij}] \cdot \{n\} \quad (2.22)$$

donde $[T_{ij}]$ se denomina **matriz de tensiones**.

Esta ecuación es la **expresión matricial de la fórmula de Cauchy**. Claramente pone de manifiesto la correspondencia biunívoca entre los vectores $\vec{\sigma}_n$ y \vec{n} , para un punto dado P . Esta correspondencia se establece a través de nueve componentes de tensión: las componentes de las tensiones asociadas a los tres planos coordenados.

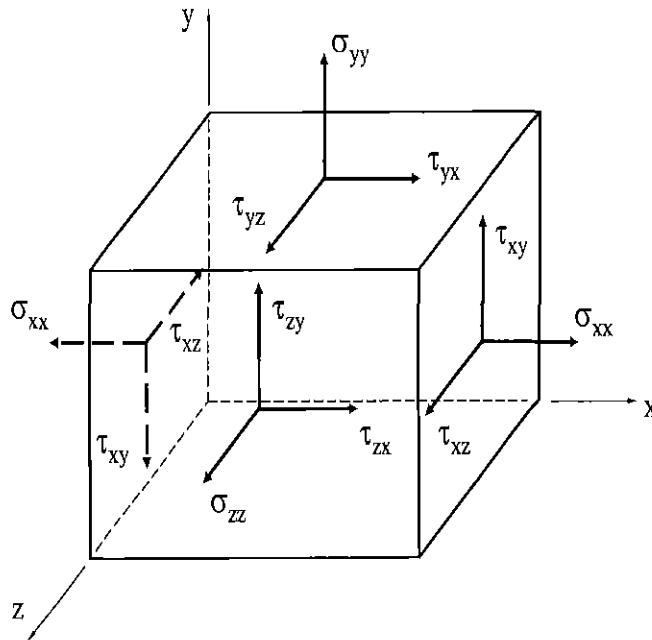


Figura 2.5. Estado general de tensiones

Otra conclusión importante que puede deducirse de la ecuación de Cauchy es que, puesto que $\vec{\sigma}_n$ es un vector y dicha ecuación es válida para cualquier vector arbitrario \vec{n} , aplicando las propiedades del análisis tensorial se puede afirmar que $[T_{ij}]$ es un tensor. Recibe el nombre de *tensor de tensiones* y especifica, por tanto, el estado de tensión en un punto. Evidentemente, sus componentes serán función de la posición del punto material considerado. Se admitirá que son funciones continuas de las coordenadas del punto en que actúan.

Para un sistema cartesiano de referencia, el estado tensional en un punto suele representarse tal como se indica en la fig. 2.5, mediante un cubo sin dimensiones cuyas caras son paralelas a los planos coordenados, y en las que se indican las componentes del vector tensión asociadas a cada una de ellas. En las caras opuestas de este cubo las componentes de tensión son iguales y de sentido contrario.

2.5. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

En el apartado anterior se demostró cómo varía el vector tensión con la dirección \vec{n} . En éste se tratará de determinar la variación con el punto P.

2.5.1. Equilibrio en el contorno

En el caso de que el punto P esté situado en la superficie del contorno del sólido y dA y \vec{n} sean, respectivamente, una porción elemental de dicha superficie en el entorno de P y el vector unitario normal a la misma, entonces el vector tensión $\vec{\sigma}_n$ coincidirá con las fuerzas de superficie (por unidad de superficie) \vec{T}_n aplicadas a dicha superficie elemental.

Al analizar el equilibrio en el punto del contorno P siguiendo un razonamiento similar al utilizado en el apartado anterior, se llegaría a la fórmula de Cauchy representativa del estado tensional en ese punto del contorno:

$$\{T_n\} = [T_{ij}] \cdot \{n\} \quad (2.23)$$

o bien, en términos de las correspondientes ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned}
 T_{nx} &= \sigma_{xx} \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot n_y + \tau_{zx} \cdot n_z \\
 T_{ny} &= \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y + \tau_{zy} \cdot n_z \\
 T_{nz} &= \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_{zz} \cdot n_z
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Estas ecuaciones se conocen con el nombre de **ecuaciones de equilibrio en el contorno**, y establecen que en los puntos de la superficie circundante del medio las tensiones han de ser iguales a las fuerzas superficiales aplicadas por unidad de superficie.

2.5.2. Equilibrio interno

Como se ha dicho, el estado tensional en un punto cualquiera de un cuerpo deformable está perfectamente definido por la matriz de tensiones $[T_{ij}]$. En general, las tensiones varían de forma continua de un punto a otro del cuerpo. A continuación, se obtendrán las ecuaciones de equilibrio que gobiernan esta variación de tensiones.

Para ello considérese un cuerpo deformado en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas (fig. 2.6). Se segrega de este volumen material V , otro interior V' cuya superficie frontera S' sea lo suficientemente regular como para que se pueda aplicar el teorema de la divergencia de Gauss¹.

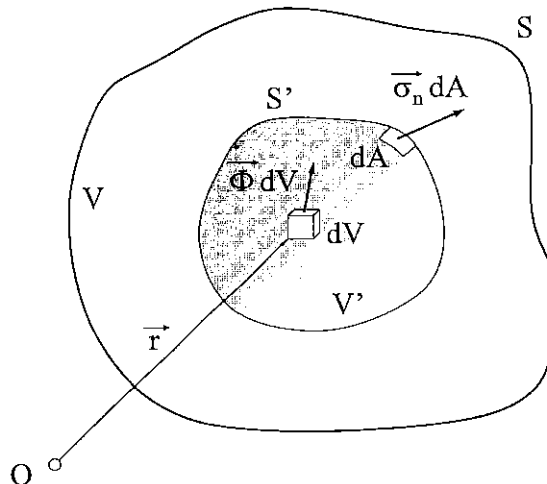


Figura 2.6. Equilibrio interno

¹ Teorema de la divergencia de Gauss: Sea un volumen V limitado por una superficie S , y sea \vec{F} un campo vectorial continuo y con primeras derivadas continuas en el interior de V .

Entonces:

$$\iiint \text{div} \vec{F} dV = \iint \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Este dominio V' se encuentra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas de volumen $\vec{\phi}$ y las tensiones $\vec{\sigma}_n$ sobre su superficie circundante S' . Por tanto, el vector resultante de la suma de todas las fuerzas que sobre él actúan, así como el de la suma de todos los momentos de dichas fuerzas con respecto a un punto arbitrario O , deberán ser nulos. Considerando este punto arbitrario como origen de coordenadas y denominando \vec{r} al vector de posición de un elemento diferencial de volumen dV o de uno de superficie dA , la anulación de fuerzas da lugar a la ecuación:

$$\int_{s'} \vec{\sigma}_n \cdot dA + \int_{v'} \vec{\phi} \cdot dV = \vec{0} \quad (2.25)$$

y la de momentos a:

$$\int_{s'} \vec{r} \times \vec{\sigma}_n \cdot dA + \int_{v'} \vec{r} \times \vec{\phi} \cdot dV = \vec{0} \quad (2.26)$$

Se demostrará seguidamente cómo a partir de la ecuación (2.25) se obtiene la ecuación de equilibrio expresada en función de las tensiones, y a partir de la (2.26) la denominada ley de reciprocidad de las tensiones tangenciales.

En efecto, sustituyendo (2.14) en (2.25), resulta:

$$\int_{s'} (\vec{\sigma}_x \cdot n_x + \vec{\sigma}_y \cdot n_y + \vec{\sigma}_z \cdot n_z) \cdot dA + \int_{v'} \vec{\phi} \cdot dV = \vec{0} \quad (2.27)$$

y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss del cálculo vectorial (supuestas continuas las primeras derivadas de $\vec{\sigma}_n$), se obtiene:

$$\int_{v'} \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{\phi} \right) \cdot dV = \vec{0} \quad (2.28)$$

ecuación que ha de cumplirse para cualquier volumen V' que se considere, ya que este volumen es arbitrario. En consecuencia, al ser el integrando una función continua de la posición, debe cumplirse:

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{\phi} = \vec{0} \quad (2.29)$$

que es la llamada *ecuación vectorial de equilibrio interno*.

Finalmente, sustituyendo las expresiones (2.16) a (2.18) en esta ecuación vectorial, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \phi_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \phi_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \phi_z &= 0\end{aligned}\quad (2.30)$$

donde:

$$\vec{\phi} = \phi_x \vec{e}_1 + \phi_y \vec{e}_2 + \phi_z \vec{e}_3 \quad (2.31)$$

El conjunto de ecuaciones (2.30) se conoce con el nombre de **ecuaciones de equilibrio interno**, y deben satisfacerse en cualquier punto interior del medio considerado, cualesquiera que sean los ejes elegidos.

Por otra parte, sustituyendo (2.14) en (2.26) se obtiene:

$$\int_{s'} \vec{r} \times (\vec{\sigma}_x \cdot n_x + \vec{\sigma}_y \cdot n_y + \vec{\sigma}_z \cdot n_z) \cdot dA + \int_{V'} \vec{r} \times \vec{\phi} \cdot dV = \vec{0} \quad (2.32)$$

Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss a la primera integral y agrupando los integrandos, resulta:

$$\int_{V'} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\vec{r} \times \vec{\sigma}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{r} \times \vec{\sigma}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{r} \times \vec{\sigma}_z) + \vec{r} \times \vec{\phi} \right] \cdot dV = \vec{0} \quad (2.33)$$

Derivando se obtiene:

$$\int_{V'} \vec{r} \times \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{\phi} \right) dV + \int_{V'} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \vec{\sigma}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \vec{\sigma}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \vec{\sigma}_z \right) \cdot dV = \vec{0} \quad (2.34)$$

Ahora bien, de acuerdo con (2.29), se anula el integrando de la primera integral. Como (2.34) debe cumplirse para cualquier volumen arbitrario V' , también debe ser nulo el segundo integrando, es decir:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \vec{\sigma}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \vec{\sigma}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \vec{\sigma}_z = \vec{0} \quad (2.35)$$

y como:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{e}_1; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{e}_2; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{e}_3 \quad (2.36)$$

la ecuación anterior se reduce a:

$$\vec{e}_1 \times \vec{\sigma}_x + \vec{e}_2 \times \vec{\sigma}_y + \vec{e}_3 \times \vec{\sigma}_z = \vec{0} \quad (2.37)$$

Sustituyendo en esta ecuación las expresiones (2.16) a (2.18):

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times (\sigma_{xx} \vec{e}_1 + \tau_{xy} \vec{e}_2 + \tau_{xz} \vec{e}_3) + \vec{e}_2 \times (\tau_{yx} \vec{e}_1 + \sigma_{yy} \vec{e}_2 + \tau_{yz} \vec{e}_3) + \\ + \vec{e}_3 \times (\tau_{zx} \vec{e}_1 + \tau_{zy} \vec{e}_2 + \sigma_{zz} \vec{e}_3) = \vec{0} \end{aligned} \quad (2.38)$$

e igualando a cero cada componente según los ejes coordenados, resultará:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} - \tau_{zy} &= 0 \\ -\tau_{xz} + \tau_{zx} &= 0 \\ \tau_{xy} - \tau_{yx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

es decir:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.40)$$

ecuaciones que expresan la **reciprocidad de las tensiones tangenciales**: en un punto cualquiera del medio, las componentes de las tensiones tangenciales asociadas a dos planos perpendiculares y de dirección normal a la arista común de su diedro, son iguales.

Por consiguiente, el estado de tensiones en un punto P está definido por sólo seis componentes independientes de tensión, y el tensor o matriz de tensiones resulta simétrico, expresándose en la forma:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Demostración alternativa del equilibrio interno

Puede llegarse a los mismos resultados expresados en (2.30) y (2.40), planteando el equilibrio en un paralelepípedo diferencial de lados dx , dy , dz , al que se permiten variaciones diferenciales en las componentes de tensión (fig. 2.7). Del equilibrio de

fuerzas en las direcciones coordenadas x, y, z resultan las ecuaciones (2.30), como se comprueba fácilmente, por ejemplo, en la dirección x:

$$\sum F_x = 0: \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + \Phi_x dx dy dz = 0$$

Del equilibrio de momentos en las direcciones x (plano de flexión yz), y (plano xz), z (plano xy), se obtiene (2.40). Por ejemplo, con M_z (plano xy) resulta:

$$\sum M_z = 0: (\tau_{yx} dx) dy dz - (\tau_{xy} dy) dx dz = 0 \Rightarrow \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

donde se han despreciado infinitésimos de orden superior.

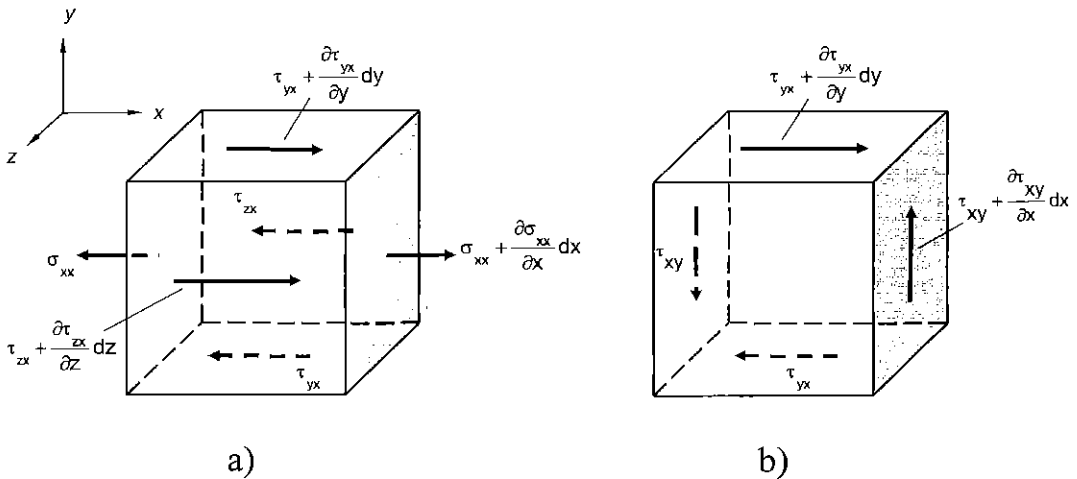


Figura 2.7. Equilibrio de un paralelepípedo diferencial: a) Componentes tensionales en la dirección X; b) Componentes tensionales que originan M_z

Es importante señalar que las condiciones de equilibrio no proporcionan en general información suficiente para determinar de forma completa el estado de tensiones en un punto. Basta considerar que en la matriz de tensiones intervienen seis magnitudes, mientras que se dispone de tres ecuaciones de equilibrio interno (más posibles condiciones de equilibrio en el contorno). Aquellas estructuras para las que no es posible determinar de forma unívoca la distribución de tensiones resultante mediante la simple aplicación de las ecuaciones de la estática, se dice que son *estáticamente indeterminadas*. Para su resolución es necesario completar las ecuaciones de equilibrio con otras que no procedan de consideraciones estáticas, sino del estudio de la deformación. Al número mínimo de condiciones de deformación adicionales

necesarias para determinar el estado tensional se le llama *grado de indeterminación estática* del cuerpo.

De estas consideraciones se concluye de forma natural la necesidad de tener en cuenta las denominadas *ecuaciones constitutivas*, que relacionan las tensiones con las deformaciones y en las que se refleja la propia naturaleza del medio, como ya se comentó anteriormente.

2.6. TRANSFORMACIÓN DE TENSIONES: CAMBIO DE BASE

En el apartado precedente se demostró cómo el estado general de tensiones en un punto queda perfectamente determinado en función de las seis componentes independientes de la matriz de tensiones $[T_{ij}]$. Ésta se obtuvo para un sistema cartesiano rectangular xyz . Se estudiará a continuación la transformación experimentada por las componentes de la matriz de tensiones cuando se adopta un nuevo sistema cartesiano rectangular $x'y'z'$ obtenido a partir del primero mediante rotaciones de sus ejes alrededor del origen (fig. 2.8).

Con la notación $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ y $(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$ se representan, respectivamente, los vectores unitarios del primitivo y del nuevo sistema de referencia. En la tabla 2.1 se define la orientación relativa de ambos sistemas mediante los respectivos cosenos directores.

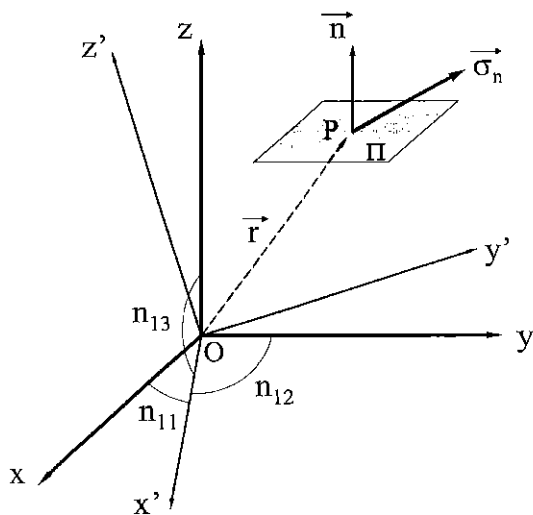


Figura 2.8. Cambio de base

	x	y	z
x'	n_{11}	n_{12}	n_{13}
y'	n_{21}	n_{22}	n_{23}
z'	n_{31}	n_{32}	n_{33}

Tabla 2.1. Cosenos directores

Los vectores unitarios de la nueva base podrán expresarse en función de los de la antigua mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= n_{11}\vec{e}_1 + n_{12}\vec{e}_2 + n_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= n_{21}\vec{e}_1 + n_{22}\vec{e}_2 + n_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= n_{31}\vec{e}_1 + n_{32}\vec{e}_2 + n_{33}\vec{e}_3\end{aligned}\tag{2.42}$$

puesto que cada coeficiente n_{ij} representa la componente de \vec{e}'_i según \vec{e}_j .

Expresando en forma matricial la ecuación anterior:

$$\{\vec{e}'\} = [N]\{\vec{e}\}\tag{2.43}$$

donde:

$$\{\vec{e}'\} = \begin{Bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{Bmatrix}; \quad \{\vec{e}\} = \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix}; \quad [N] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}\tag{2.44}$$

Sean (x, y, z) y (x', y', z') las coordenadas cartesianas de un determinado vector \vec{OP} referidas a cada uno de los dos sistemas de referencia (fig. 2.8), y sea \vec{r} el vector de posición del punto P , es decir:

$$\vec{r} = \{r\} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3\tag{2.45}$$

o bien:

$$\{r\} = \{x\}^T \cdot \{\vec{e}\} = \{x'\}^T \cdot \{\vec{e}'\}\tag{2.46}$$

donde $\{x\}$ y $\{x'\}$ son los vectores columna formados por las componentes de \vec{r} en los dos sistemas de coordenadas, y el símbolo T (de transpuesta) generará vectores fila.

Teniendo en cuenta (2.43), la segunda igualdad en (2.46) puede expresarse como:

$$\{x\}^T \cdot \{\vec{e}\} = \{x'\}^T \cdot [N] \cdot \{\vec{e}\}\tag{2.47}$$

y, como $\{\vec{e}\}$ es arbitrario, resulta:

$$\{x\}^T = \{x'\}^T \cdot [N]\tag{2.48}$$

o bien, transponiendo ambos miembros:

$$\{x\} = [N]^T \cdot \{x'\}\tag{2.49}$$

ecuación que expresa cómo se transforman las componentes de un vector en el cambio de base que se está considerando.

Por otra parte, aplicando (2.49) a los vectores $\{\sigma_n\}$ y $\{n\}$, la fórmula de Cauchy (2.22) se expresa en la forma:

$$[N]^T \{\sigma'_n\} = [T_{ij}] [N]^T \{n'\} \quad (2.50)$$

Premultiplicando por $[N]$ y teniendo en cuenta que $[N][N]^T = [I]$, por tratarse de una base ortonormal:

$$\{\sigma'_n\} = [N][T_{ij}][N]^T \{n'\} \quad (2.51)$$

Por tanto, en el nuevo sistema de referencia:

$$\{\sigma'_n\} = [T'_{ij}] \{n'\} \quad (2.52)$$

donde:

$$[T'_{ij}] = [N][T_{ij}][N]^T \quad (2.53)$$

expresión que indica cómo se transforman las componentes de un tensor (o de una matriz) en el citado cambio de base.

2.7. TENSIONES PRINCIPALES. PROPIEDADES

2.7.1. Tensiones principales

Como se ha dicho anteriormente la tensión $\vec{\sigma}_n$ se define en un punto P y según un plano determinado caracterizado por el vector unitario normal \vec{n} , es decir, es función tanto del punto como del plano:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}(P, \vec{n}) \quad (2.54)$$

Además, este vector tendrá, en general, dos componentes, normal y tangencial al plano (fig. 2.9a) a las que se denominaba componentes intrínsecas del mismo.

A continuación se va a estudiar *si entre los infinitos planos que pasan por el punto P existe alguno para el cual el vector tensión correspondiente tenga únicamente componente normal*, es decir, sea perpendicular a ese plano (fig. 2.9b).

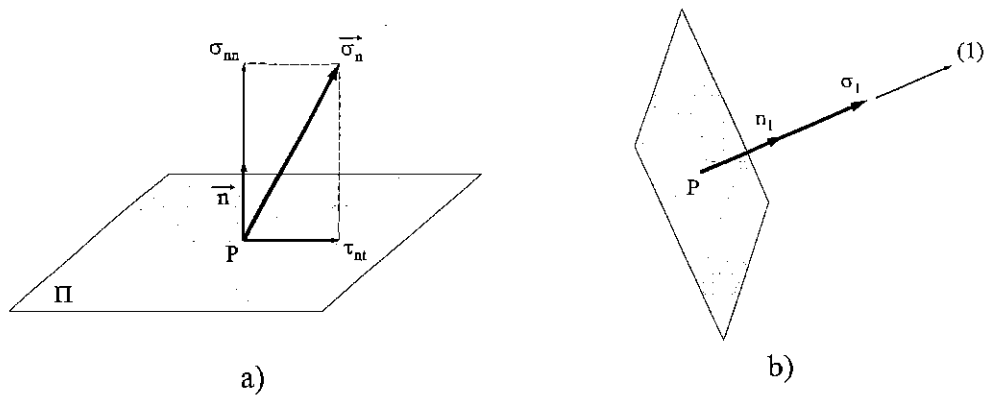


Figura 2.9. Componentes intrínsecas del vector tensión: a) Plano no principal; b) Plano principal

El vector tensión asociado a un plano \bar{n} que pasa por P viene dado por [cfr. (2.22)]:

$$\{\sigma_n\} = [T_{ij}] \cdot \{n\} \quad (2.55)$$

De entre los infinitos planos posibles, interesa determinar aquellos para los que el vector tensión es precisamente perpendicular al plano, es decir:

$$\{\sigma_n\} = \sigma \{n\} \quad (2.56)$$

siendo σ el módulo de dicho vector.

Igualando (2.55) y (2.56):

$$[T_{ij}] \cdot \{n\} = \sigma \{n\} = \sigma [I] \cdot \{n\} \quad (2.57)$$

donde $[I]$ es la matriz identidad 3×3 .

Agrupando términos:

$$([T_{ij}] - \sigma [I]) \cdot \{n\} = \{0\} \quad (2.58)$$

Esta expresión coincide con la formulación matemática de la determinación de los valores y vectores propios asociados a la transformación definida por la matriz $[T_{ij}]$. Dicha formulación aparece en numerosos problemas de ingeniería, como en la teoría de vibraciones para determinar las frecuencias naturales y los modos de vibración.

Para que el sistema homogéneo (2.58) presente solución $\{n\}$ distinta de la trivial, el determinante de los coeficientes debe anularse, es decir:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.59)$$

ecuación que se conoce con el nombre de *ecuación indicial* o *característica* de la transformación definida por $[T_{ij}]$.

Las raíces de esta ecuación (los valores propios) son las denominadas **tensiones principales** en el punto P , que en lo sucesivo se designarán por $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. El álgebra lineal demuestra que cuando $[T_{ij}]$ es una matriz real y simétrica, como en el caso que se está considerando, los valores y vectores propios son siempre reales. Los vectores asociados a cada una de estas tensiones (vectores propios) se denominan **direcciones principales** de tensión en P . Se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$([T_{ij}] - \sigma_k [I]) \cdot \{n_k\} = \{0\} \quad (k=1,2,3) \quad (2.60)$$

Las ecuaciones (2.60) proporcionan sólo dos ecuaciones escalares independientes, pues el determinante de los coeficientes del sistema es nulo. La tercera condición entre las componentes del vector propio es la que relaciona los cosenos directores:

$$n_{kx}^2 + n_{ky}^2 + n_{kz}^2 = 1 \quad (k=1,2,3) \quad (2.61)$$

Para cada valor de σ_k se obtiene un vector unitario $\{n_k\}$ que define la dirección principal asociada a σ_k . Los planos perpendiculares a las direcciones principales se llaman **planos principales** (fig. 2.10).

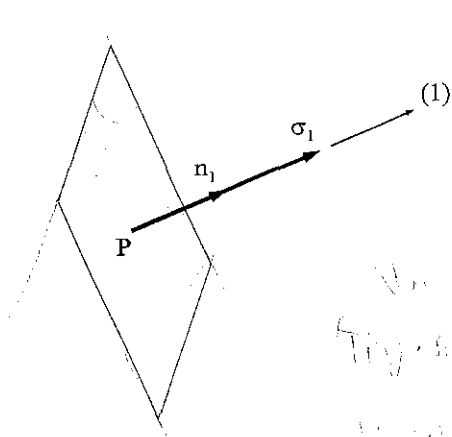


Figura 2.10. Plano principal

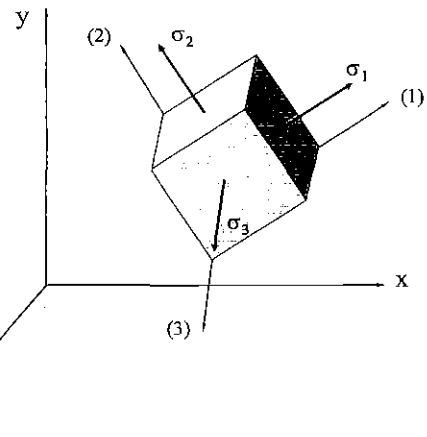


Figura 2.11. Estado general de tensiones

El Álgebra demuestra que cuando los valores propios, en este caso las tensiones principales, son distintos entre sí, existen tres y sólo tres direcciones principales, que son ortogonales entre sí.

Cuando para la representación gráfica del estado de tensiones en un punto se utiliza un cubo sin dimensiones cuyas caras coincidan con los planos principales en ese punto, esta representación gráfica resulta muy sencilla: sobre las caras actúan sólo las tensiones principales, que por definición, son normales a las mismas (fig. 2.11). Por lo tanto, *si como sistema cartesiano de referencia se elige el definido por las direcciones principales, la matriz de tensiones se reduce a la forma diagonal y sus componentes son, precisamente, las tensiones principales:*

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

*Cuando una de las raíces de la ecuación característica es una raíz doble -esto es, dos tensiones principales son iguales-, dicha raíz, en lugar de una dirección única, genera un plano que será perpendicular al vector propio de la tercera raíz. Cualquier dirección que pase por P y esté contenida en dicho plano es también principal, existiendo así una infinidad de vectores propios. Dos cualesquiera de ellos mutuamente ortogonales y normalizados pueden utilizarse para construir la terna de direcciones principales. En este caso, el estado de tensiones en P presenta una simetría de revolución respecto a la tercera dirección (*simetría cilíndrica*) y se denomina *estado meridiano* de tensiones.*

Por último, *cuando los tres valores propios coinciden, es decir $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, dicha raíz triple será generadora de todo el espacio. El estado de tensiones se dice entonces que es **hidrostático** (*simetría esférica*). No existirá tensión tangencial en ninguna dirección del espacio. Por tanto, cualquier terna trirrectangular con origen en P podrá tomarse como sistema de direcciones principales.*

2.7.2. Valores estacionarios de la tensión normal

A continuación se estudiará otra particularidad importante de las tensiones principales, y es que corresponden siempre a valores extremos (máximos y mínimos) de las tensiones normales en un punto. Matemáticamente el problema puede formularse en los siguientes términos: *determinar para qué valores de \bar{n} la componente normal σ_{nn} tiene un valor estacionario.*

Para encontrar estas direcciones, será preciso comenzar expresando la tensión normal en función de \vec{n} , utilizando para ello la fórmula de Cauchy (2.22):

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = \{\sigma_n\}^T \cdot \{n\} = \{n\}^T [T_{ij}] \{n\} \quad (2.63)$$

donde se ha tenido en cuenta que $[T_{ij}]$ es simétrica.

Por otra parte, los cosenos directores no son independientes, ya que debe cumplirse:

$$\{n\}^T \cdot \{n\} = 1 \quad (2.64)$$

Se trata, por lo tanto, de encontrar valores de \vec{n} que hacen estacionaria la función σ_{nn} , sometida a la restricción (2.64). El problema puede resolverse mediante la técnica de los multiplicadores λ de Lagrange, haciendo estacionario el valor de la función lagrangiana Ψ definida como:

$$\Psi = \{n\}^T [T_{ij}] \{n\} + \lambda (1 - \{n\}^T \cdot \{n\}) \quad (2.65)$$

Derivando respecto de $\{n\}$ y agrupando términos:

$$2[T_{ij}] \{n\} - 2\lambda \{n\} = \{0\} \quad (2.66)$$

o bien:

$$([T_{ij}] - \lambda[I]) \cdot \{n\} = \{0\} \quad (2.67)$$

formulación que coincide con (2.58), en la que los valores de λ se identifican con los de σ y, por consiguiente, con las tensiones principales. A cada solución de λ , por tanto, se asocia la correspondiente dirección principal.

Resumiendo, *las tensiones principales en un punto, que son únicas e independientes del sistema de referencia, se corresponden con los valores máximos y mínimos de las tensiones normales en el punto en cuestión. Su determinación es de gran interés en numerosas aplicaciones prácticas, entre otras, para establecer los criterios de fallo de los materiales, como posteriormente se verá.*

2.7.3. Invariantes del tensor de tensiones

Desarrollando la ecuación característica (2.59) de la transformación definida por el matriz de tensiones $[T_{ij}]$, se obtiene una ecuación cúbica en σ que puede expresarse como:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2.68)$$

donde:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (2.69)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} \quad (2.70)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.71)$$

Por ser las tensiones principales únicas e independientes del sistema de referencia, tanto la ecuación (2.68) como los coeficientes I_1, I_2, I_3 son invariantes en la transformación de coordenadas definida por una rotación de ejes. Estos coeficientes, I_1, I_2, I_3 se denominan, respectivamente, **primer, segundo y tercer invariante** de la matriz de tensiones.

Los invariantes se pueden expresar también en función de las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3 . Una forma de hacerlo es partiendo de la ecuación característica formulada de modo factorial:

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0 \quad (2.72)$$

Desarrollando esta ecuación y comparándola con (2.68) se obtiene:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Otra forma de llegar a las mismas expresiones es a partir de (2.62), es decir, de la matriz de tensiones referida a los ejes principales. Es evidente que resultan las ecuaciones (2.73) si se aplican las definiciones de los invariantes (2.69)-(2.71) a esta matriz.

Como se desprende de lo anterior, los invariantes caracterizan a la matriz de tensiones. Además, desempeñan un importante papel en el análisis de los cuerpos deformables.

En algunos casos, pueden ser iguales a cero. Por ejemplo, si $I_3 = 0$, entonces una de las raíces de la ecuación (2.68) ó (2.72) también será igual a cero. En este caso se dice que el estado tensional es **biaxial o plano**. Veremos que éste es el estado característico de las piezas trabajando a flexión simple, o de los recipientes de presión de pared delgada.

Si se anulan simultáneamente los invariantes segundo y tercero, es decir $I_2 = I_3 = 0$, entonces la ecuación (2.68) tendrá dos raíces nulas, resultando que solamente una de las tensiones principales será diferente de cero. Este estado tensional se denomina **uniaxial**. Se encontrará al estudiar el comportamiento de piezas trabajando a tracción, compresión y flexión pura, entre otros.

2.8. TENSIÓN TANGENCIAL MÁXIMA

De forma análoga a como se ha hecho con la componente normal, también es posible determinar para qué dirección \bar{n} la componente tangencial de la tensión τ_{nn} alcanza un valor máximo en un determinado punto P . No se habla de valor extremo en este caso, porque por convenio se considera siempre $\tau_{nn} \geq 0$; su valor mínimo es cero y se presenta en las direcciones principales.

La resolución del problema se facilita cuando se elige como sistema de referencia el constituido por las direcciones principales en P . Para este sistema, la matriz de tensiones tiene la forma diagonal indicada en (2.62). Si n_1, n_2 y n_3 designan las componentes de \bar{n} en dicho sistema, el vector tensión se expresará por:

$$\{\sigma_n\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

Las componentes normal y tangencial vendrán dadas, respectivamente, por:

$$\sigma_{nn} = \{\sigma_n\}^T \{n\} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \tau_{nn}^2 &= \|\{\sigma_n\}\|^2 - \sigma_{nn}^2 = \{\sigma_n\}^T \cdot \{\sigma_n\} - \sigma_{nn}^2 = \\ &= (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Obsérvese que (2.76) implica que sobre los planos principales no actúan tensiones cortantes. En efecto, si \bar{n} tuviera la dirección de algún eje principal, por ejemplo \bar{e}_1 , los cosenos directores serían $n_1 = 1$ y $n_2 = n_3 = 0$. De (2.76), se obtiene $\tau_{nn} = 0$. Análogo razonamiento puede hacerse para los restantes ejes principales. Por tanto, el valor mínimo de τ_{nn} , valor nulo, está asociado a las direcciones principales.

Para determinar las direcciones asociadas a los valores máximos de τ_{nn} , deberán calcularse los máximos de la función (2.76), con la restricción:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.77)$$

Aplicando de nuevo la técnica de los multiplicadores de Lagrange, deberá calcularse el valor estacionario de la función no restringida:

$$\psi = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 + \lambda(1 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2) \quad (2.78)$$

Anulando las derivadas parciales respecto de las variables independientes n_1, n_2, n_3 , se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\sigma_1^2 n_1 - 4\sigma_1(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \cdot n_1 - 2\lambda n_1 &= 0 \\ 2\sigma_2^2 n_2 - 4\sigma_2(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \cdot n_2 - 2\lambda n_2 &= 0 \\ 2\sigma_3^2 n_3 - 4\sigma_3(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \cdot n_3 - 2\lambda n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

que junto con (2.77) permite resolver el problema. Puesto que λ es arbitrario, este sistema implica que al menos uno de los cosenos directores es nulo.

Una posible solución que satisface las dos primeras ecuaciones es $n_1 = n_2 = 0$, con lo que $n_3 = 1$ y, por tanto, \bar{n} coincide con una dirección principal. Se trata de un resultado ya conocido (según las direcciones principales el valor de la tensión cortante es un mínimo) y que no interesa ahora. Por consiguiente, si $n_1 = 0$, se debe considerar no nulos los otros dos cosenos directores n_2 y n_3 . De este modo se llega al sistema:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 \\ \sigma_2^2 - 2\sigma_2(\sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) - 2\lambda &= 0 \\ \sigma_3^2 - 2\sigma_3(\sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) - 2\lambda &= 0 \\ n_2^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.80)$$

Eliminando λ y operando se obtiene:

$$\sigma_2^2 - \sigma_3^2 = 2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \quad (2.81)$$

o bien:

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 2(\sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \quad (2.82)$$

(salvo si $\sigma_2 = \sigma_3$). Sustituyendo en esta ecuación $n_3^2 = 1 - n_2^2$, resulta:

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 2(\sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 - \sigma_3 n_2^2) = 2n_2^2(\sigma_2 - \sigma_3) + 2\sigma_3 \quad (2.83)$$

es decir:

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 2n_2^2(\sigma_2 - \sigma_3) \quad (2.84)$$

de donde:

$$n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.85)$$

Luego una solución es:

$$n_1 = 0; \quad n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.86)$$

y sustituyendo en (2.76) se obtiene el correspondiente valor de la tensión tangencial:

$$\tau_{nt} = \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| \quad (2.87)$$

Operando similarmente se obtienen las soluciones:

$$n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n_2 = 0; \quad n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \tau_{nt} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| \quad (2.88)$$

$$n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n_3 = 0; \quad \tau_{nt} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| \quad (2.89)$$

Puede concluirse, por lo tanto, que *las direcciones para las que la tensión cortante es máxima coinciden con las bisectrices de los ángulos rectos que forman los ejes principales dos a dos*. Así, en la fig. 2.12 se indican los planos de máxima tensión cortante $n_1 = 0; n_2 = n_3 = \pm \sqrt{2}/2$.

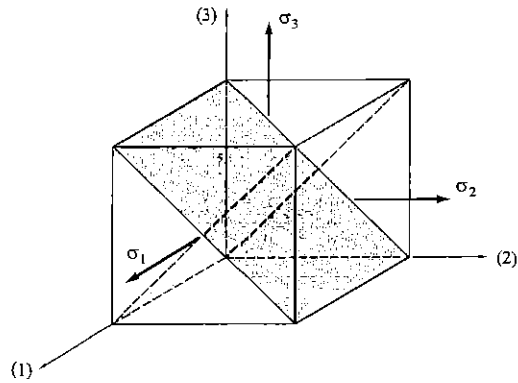


Figura 2.12. Planos de máxima tensión cortante

La máxima tensión cortante absoluta tiene lugar en un plano cuya normal es bisectriz de las direcciones principales asociadas a las tensiones principales mayor y menor en valor algebraico. Su valor sería:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{|\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}|}{2} \quad (2.90)$$

2.9. TENSIONES OCTAÉDRICAS

Referidos a los ejes principales de tensiones, se denominan **planos octaédricos** a todos aquellos que pasan por el origen y su vector normal forma el mismo ángulo con los tres ejes. Los cosenos directores de sus vectores normales unitarios cumplirán en dicho sistema de referencia:

$$n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{3} \quad (2.91)$$

Habrán por tanto ocho planos octaédricos diferentes. Las componentes normal y cortante de los vectores tensión asociados a estos planos se denominan **tensión normal octaédrica** y **tensión cortante octaédrica**, respectivamente.

El valor de la *tensión normal octaédrica* será, de acuerdo con (2.73) y (2.75):

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3} \quad (2.92)$$

y el de la *tensión tangencial octaédrica*, según (2.76), puede expresarse en la forma:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.93)$$

o bien, en función de los invariantes de la matriz de tensiones:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{2I_1^2 - 6I_2} \quad (2.94)$$

Por ser invariantes, es posible referir las tensiones normal y tangencial octaédricas a un sistema arbitrario de ejes xyz , sin más que sustituir los valores de I_1 e I_2 por sus expresiones generales (2.69) y (2.70). Se obtiene así:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (2.95)$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2} \quad (2.96)$$

2.10. TENSION MEDIA Y TENSION DE DESVIACION

Se define la *matriz desviadora* de tensiones en un punto como:

$$[T_{ij}]_d = [T_{ij}] - \sigma_m [I] \quad (2.97)$$

donde σ_m es la *tensión media o tensión hidrostática*, de valor:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (2.98)$$

que coincide con el de la tensión normal octaédrica (2.92). La matriz definida por $\sigma_m \cdot [I]$ se denomina *matriz hidrostática* (denominada así por ser característica del estado tensional en el seno de un líquido, donde $\sigma = \sigma_m = -p$ en cualquier dirección).

De la propia definición se concluye que $[T_{ij}]_d$ especifica la desviación del estado de tensiones respecto de la tensión media. De ahí su nombre. Se caracteriza además por ser una matriz de traza nula, ya que, de (2.97) y (2.98):

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} - 3\sigma_m = 0 \quad (2.99)$$

es decir, el primer invariante (suma de las componentes de la diagonal) de la matriz desviadora es cero.

En el capítulo destinado a las teorías de fallo se podrá valorar el interés de esta descomposición matricial, en el sentido de que el fallo por deformación plástica -en las teorías más aceptadas- es función únicamente de las componentes desviadoras de tensiones y no depende de la componente de tensión hidrostática.

2.11. DIAGRAMA DE LOS CÍRCULOS DE MOHR

Los vectores tensión correspondientes a los infinitos planos que pasan por un punto P son susceptibles de una representación gráfica plana por medio de sus componentes intrínsecas, es decir, en un sistema de ejes coordenados (σ_{nn}, τ_{nt}) .

Sean $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ las tensiones principales en el punto. Se supondrá, sin pérdida de generalidad, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$. Se sitúan sobre el eje de abscisas estos tres valores, obteniéndose los puntos (1), (2) y (3) de la fig. 2.13, y a continuación se trazan tres circunferencias cuyos centros son precisamente los puntos medios de los segmentos que resultan de unir cada pareja de puntos, siendo, por tanto, los diámetros respectivos $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_1 - \sigma_3$ y $\sigma_2 - \sigma_3$. Estas circunferencias así trazadas se denominan **círculos de Mohr**.

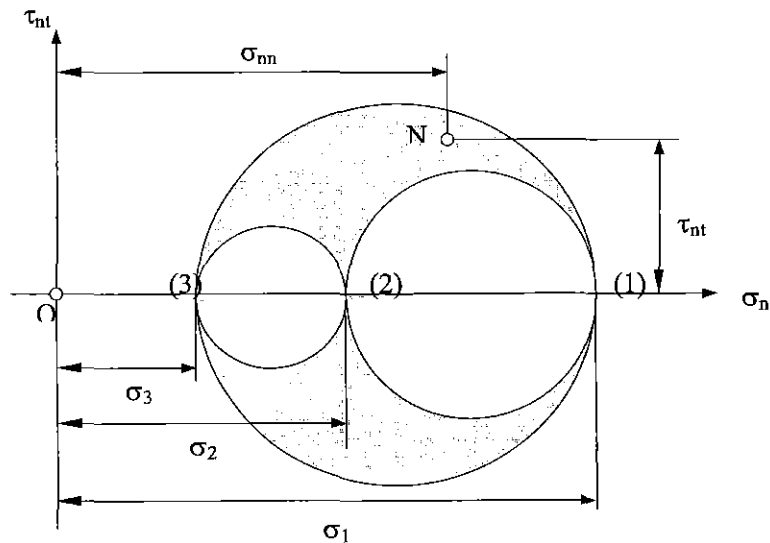


Figura 2.13. Círculos de Mohr

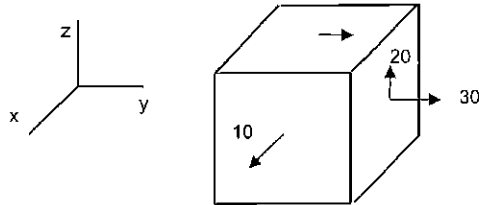
Puede demostrarse que a todo plano que pasa por P le corresponde un punto del área comprendida entre los tres círculos. Las coordenadas de ese punto son, respectivamente, las componentes normal y tangencial del vector tensión asociado a ese plano (fig. 2.13). Y además se comprueba que esta correspondencia es biunívoca.

A la componente tangencial, que como tal es la componente contenida en el plano, se la suele definir únicamente por su valor absoluto, es decir, se considera $\tau_{nt} \geq 0$. No obstante, en problemas planos, como más adelante se verá, se introduce un criterio de signos para esta componente. Sólo en estos casos planos se hará la deducción de la representación gráfica de Mohr (cfr. §5.3).



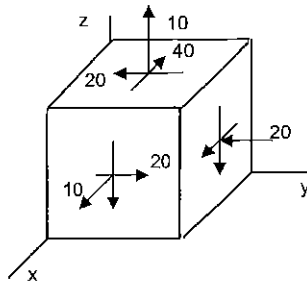
PROBLEMAS

2.1. En la figura se indica, con la representación habitual, el estado tensional en un punto P de un sólido elástico. Las componentes de las tensiones se expresan en MPa. Se pide calcular los planos cuyos vectores tensión son ortogonales a ellos, así como los valores de las tensiones correspondientes.



2.2. En la figura se indica, con la representación habitual, el estado tensional en un punto P de un sólido elástico. Las componentes de las tensiones se expresan en MPa. Se pide:

- 1º) Obtener las tensiones y direcciones principales.
- 2º) Componentes intrínsecas del vector tensión correspondientes a un plano cuya normal forma ángulos iguales con los ejes cartesianos.



2.3. La matriz de tensiones en un punto de un sólido elástico es:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Se pide:

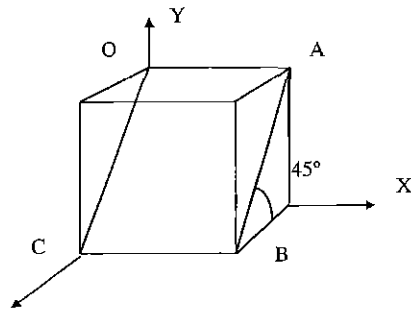
- 1º) Tensiones principales.
- 2º) ~~Tensión tangencial octaédrica.~~
- 3º) ~~Tensión tangencial máxima.~~
- 4º) ~~Cosenos directores de un plano en el que se presente la tensión tangencial máxima.~~

$$z = 1,5 + 2$$

2.4. Dos piezas iguales, de un mismo material, se disponen tal como señala la figura, uniéndolas por medio de una cola adhesiva según el plano OABC. El conjunto así formado se somete a un estado de tensiones definido por la matriz:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma & \sigma/2 \\ -\sigma & 2\sigma & 3\sigma \\ \sigma/2 & 3\sigma & \sigma \end{bmatrix}$$

Determinar el máximo valor admisible de σ para que no se separen las piezas, sabiendo que el adhesivo es capaz de soportar una tensión normal máxima de 100.000 N/m^2 y una tensión tangencial de 75.000 N/m^2 .



2.5. En un punto de un material y según un plano oblicuo perpendicular a la trisectriz del primer octante, actúa una tensión resultante de 150 MN/m^2 cuya dirección forma 60° y 45° con los ejes coordenados X e Y, respectivamente, siendo positivos los cosenos directores.

Se pide:

- 1º) Hallar las tensiones normal y tangencial a dicho plano.
- 2º) Si $\tau_{xy} = 40 \text{ MN/m}^2$, $\tau_{yz} = -20 \text{ MN/m}^2$, $\tau_{xz} = 15 \text{ MN/m}^2$, hallar las tensiones σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , y los cosenos directores de la tensión tangencial en el plano oblicuo.

2.6. El estado de tensión en un punto de un material está definido por las componentes: $\sigma_{xx} = 109$, $\sigma_{yy} = -54$, $\sigma_{zz} = 83$, $\tau_{xy} = -22$, $\tau_{yz} = 63$, $\tau_{xz} = 47$, expresadas en MN/m^2 .

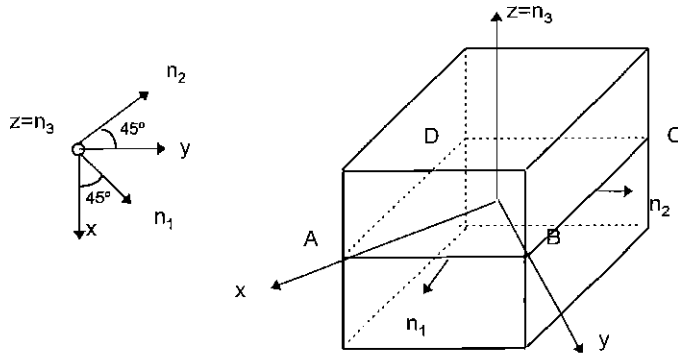
Se pide:

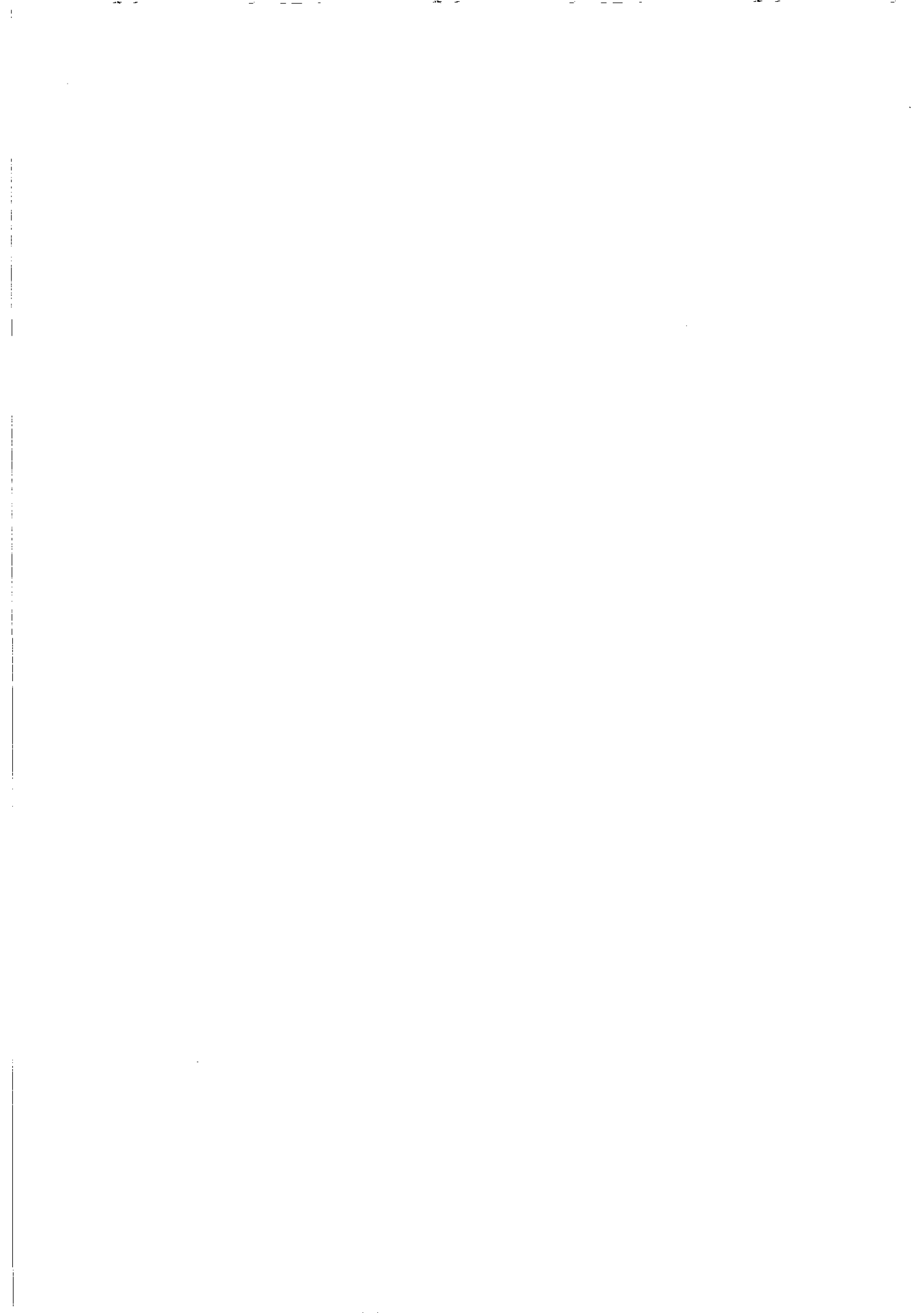
- 1º) Hallar las tensiones normal y tangencial: a) en un plano que está igualmente inclinado respecto a los tres ejes coordenados; b) en el plano paralelo al eje Z e igualmente inclinado respecto a los ejes X e Y.
- 2º) Determinar las magnitudes y cosenos directores de las tensiones principales.
- 3º) Determinar las magnitudes de los invariantes de tensión: a) a partir de las componentes cartesianas; b) a partir de las tensiones principales.
- 4º) Hallar la tensión media, las tensiones principales desviadoras y los invariantes del tensor desviador.
- 5º) Calcular las tensiones tangenciales máximas y la tensión tangencial octaédrica.

2.7. El estado de tensiones en todos los puntos de un sólido elástico, viene dado por:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 400 \text{ MPa}; & \sigma_{yy} &= 200 \text{ MPa}; & \sigma_{zz} &= 0 \\ \tau_{xy} &= 100 \text{ MPa}; & \tau_{xz} &= \tau_{yz} &= 0\end{aligned}$$

- 1º) Hallar las tensiones que actúan sobre el elemento representado en la figura e indicar sus direcciones en las distintas caras.
- 2º) Hallar la magnitud y dirección de las tensiones principales.





TEMA 3

TEORÍA GENERAL DE LA DEFORMACIÓN

3.1. DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES UNITARIAS

La teoría de la deformación tiene por objeto el estudio de la variación de las distancias entre los puntos de un medio continuo, cuando éste pasa de una configuración inicial a otra diferente cualquiera.

Cuando la configuración inicial es el *estado neutro* -sin influencia exterior-, la distancia entre puntos del medio se denomina *natural*. En el análisis no se considerarán los estados intermedios y se supondrá que en la deformación no se produce variación de masa y que el medio es continuo.

Un cuerpo deformable puede experimentar dos tipos de movimientos bajo la acción de un sistema de fuerzas:

a) *Movimiento de sólido rígido*, que en el caso más general sería el resultado de una traslación y una rotación, y para el cual cualquier segmento lineal del cuerpo no cambia de longitud, ni tampoco el ángulo relativo entre dos elementos lineales del mismo.

b) *Deformación*, que supone en general una variación de la distancia entre dos puntos del sólido, y de los ángulos formados por rectas que unen puntos del mismo.

En este tema, y en la asignatura en general, la atención se centrará en el estudio del segundo tipo de movimiento, es decir, la deformación. Como posteriormente se verá es posible relacionar estas deformaciones con las tensiones originadas en el interior del cuerpo como consecuencia de las sollicitaciones que sobre él actúan.

Considérese un sistema (fijo) de coordenadas cartesianas trirrectangular xyz en el que la posición de un punto P del cuerpo queda especificada en cualquier instante mediante sus coordenadas (x, y, z) en la configuración inicial (fig. 3.1), y sea Q un punto infinitamente próximo a él, de coordenadas $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Se designará por dr la longitud del elemento lineal infinitesimal que une ambos puntos en la configuración inicial.

Al deformarse el cuerpo, las partículas en P y Q se desplazan desde sus posiciones originales a los puntos P' y Q' cuyas coordenadas son, respectivamente, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ y

$(\bar{x} + d\bar{x}, \bar{y} + d\bar{y}, \bar{z} + d\bar{z})$. Por consiguiente, el elemento lineal dr que unía los puntos P y Q se transforma en $d\bar{r}$, elemento lineal que une los correspondientes puntos P' y Q' en el cuerpo deformado.

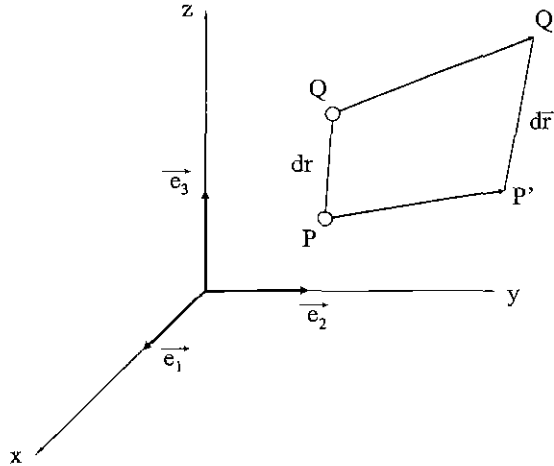


Figura 3.1. Campo de desplazamientos

Los vectores $\vec{PP'}$ y $\vec{QQ'}$ reciben el nombre de **vectores desplazamiento** de los puntos P y Q , respectivamente. Vectores análogos podrían definirse para todos los puntos del cuerpo. Las componentes del vector desplazamiento en P se denominarán:

$$u = \bar{x} - x \quad v = \bar{y} - y \quad \omega = \bar{z} - z \quad (3.1)$$

Se supone que estas funciones son continuas en las coordenadas x, y, z . Dado que la descripción de la variación de la distancia entre dos puntos cualesquiera del cuerpo es la clave del análisis de la deformación, se determinará, por simple aplicación del teorema de Pitágoras, los cuadrados de la distancia entre las dos partículas en las dos configuraciones (inicial y deformada) consideradas:

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.2)$$

$$d\bar{r}^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 \quad (3.3)$$

Despejando $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ de (3.1) y sustituyendo en (3.3), se obtiene:

$$d\bar{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dudx + 2dvdy + 2d\omega dz + du^2 + dv^2 + d\omega^2 \quad (3.4)$$

y teniendo en cuenta (3.2):

$$d\bar{r}^2 - dr^2 = 2(dudx + dvdy + d\omega dz) + du^2 + dv^2 + d\omega^2 \quad (3.5)$$

Por otra parte, como u, v, w son continuas en x, y, z :

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = u_x dx + u_y dy + u_z dz \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = v_x dx + v_y dy + v_z dz \\ d\omega &= \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sustituyendo (3.6) en (3.5) y agrupando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} d\bar{r}^2 - dr^2 &= 2\left[u_x + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2 + \omega_x^2)\right]dx^2 + 2\left[v_y + \frac{1}{2}(u_y^2 + v_y^2 + \omega_y^2)\right]dy^2 + \\ &+ 2\left[\omega_z + \frac{1}{2}(u_z^2 + v_z^2 + \omega_z^2)\right]dz^2 + 2(u_y + v_x + u_x u_y + v_x v_y + \omega_x \omega_y)dx dy + \\ &+ 2(u_z + \omega_x + u_x u_z + v_x v_z + \omega_x \omega_z)dx dz + 2(v_z + \omega_y + u_y u_z + v_y v_z + \omega_y \omega_z)dy dz \end{aligned} \quad (3.7)$$

La magnitud $(d\bar{r}^2 - dr^2)$ proporciona un medio adecuado y natural para describir la deformación del cuerpo. En el caso de que:

$$d\bar{r}^2 - dr^2 = 0 \quad (3.8)$$

no hay desplazamiento relativo entre las partículas situadas originalmente en P y Q . A este resultado se llegaría si todas las primeras derivadas de los desplazamientos fueran nulas. Entonces se dice que el cuerpo ha experimentado un movimiento de sólido rígido.

Por otra parte, si $(d\bar{r}^2 - dr^2)$ es distinto de cero, los elementos lineales originales dx, dy, dz modifican en general tanto su longitud como su orientación relativa durante el movimiento del cuerpo. En este caso, se dice que el cuerpo se encuentra *deformado*.

Puesto que el carácter de este estado deformado está indicado por los coeficientes adimensionales de los términos $dx^2, dy^2, dz^2, dxdy, dxdz, dydz$ del segundo miembro de (3.7), es lógico considerar dichos coeficientes como medidas de la deformación. Adoptando la notación estándar utilizada en la Elasticidad, la ecuación (3.7) puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} d\bar{r}^2 - dr^2 = & 2\varepsilon_{xx}dx^2 + 2\varepsilon_{yy}dy^2 + 2\varepsilon_{zz}dz^2 + \\ & + 4\varepsilon_{xy}dxdy + 4\varepsilon_{xz}dxdz + 4\varepsilon_{yz}dydz \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_x + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2 + \omega_x^2) \\ \varepsilon_{yy} &= v_y + \frac{1}{2}(u_y^2 + v_y^2 + \omega_y^2) \\ \varepsilon_{zz} &= \omega_z + \frac{1}{2}(u_z^2 + v_z^2 + \omega_z^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2}(u_y + v_x + u_x u_y + v_x v_y + \omega_x \omega_y) \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2}(u_z + \omega_x + u_x u_z + v_x v_z + \omega_x \omega_z) \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2}(v_z + \omega_y + u_y u_z + v_y v_z + \omega_y \omega_z) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Las magnitudes adimensionales $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ se denominan **componentes unitarias de la deformación o deformaciones unitarias**, y definen completamente el estado de deformación en un cuerpo. Las ecuaciones (3.10)-(3.11) son las llamadas **relaciones desplazamiento-deformación unitaria**.

3.2. TEORÍA DE LAS PEQUEÑAS DEFORMACIONES. SENTIDO FÍSICO DE LAS COMPONENTES DEL TENSOR DEFORMACIÓN

Hasta ahora no se ha impuesto ninguna restricción sobre la magnitud de las deformaciones. Por esta razón, los resultados obtenidos en el apartado anterior son aplicables a cualquier estado de deformación finita.

En este epígrafe, se considerará el caso de las denominadas deformaciones infinitesimales o **pequeñas deformaciones**, es decir, deformaciones muy pequeñas en comparación con las dimensiones del cuerpo. Este es el caso más habitual de los problemas reales del análisis de estructuras.

Con esta hipótesis, las derivadas de las componentes del desplazamiento serán también pequeñas comparadas con la unidad y los términos cuadráticos de dichas derivadas pueden despreciarse frente a los términos lineales en las ecuaciones (3.10)-(3.11), simplificándose considerablemente el análisis.

Así pues, las fórmulas desplazamiento-deformación unitaria (3.11) se reducen a las relaciones lineales siguientes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= v_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= w_z = \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_y + v_x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(u_z + w_x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(v_z + w_y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{yz}\end{aligned}\tag{3.13}$$

Conviene notar que se han introducido las funciones γ_{xy} , γ_{xz} y γ_{yz} , más habituales en ingeniería, definidas en la forma:

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (i, j = x, y, z)\tag{3.14}$$

Para comprender el significado físico de cada una de las deformaciones unitarias expresadas en (3.12)-(3.13), conviene recordar, en primer lugar, la definición matemática de *deformación longitudinal unitaria* ε de un elemento lineal de longitud dr , dada por:

$$\varepsilon = \frac{d\bar{r} - dr}{dr} \quad (3.15)$$

es decir, es el cociente entre la variación de distancia entre dos puntos infinitamente próximos antes y después de la deformación, y la distancia entre ambos antes de la deformación.

Supóngase que el elemento lineal considerado es paralelo al eje x . Se verificará:

$$dr = dx; \quad dy = dz = 0 \quad (3.16)$$

Sustituyendo en (3.9) se obtiene:

$$d\bar{r}^2 - dr^2 = 2\varepsilon_{xx} dr^2 \quad (3.17)$$

que también puede expresarse en la forma:

$$(d\bar{r} + dr)(d\bar{r} - dr) = 2\varepsilon_{xx} dr^2 \quad (3.18)$$

y, teniendo en cuenta (3.15):

$$\varepsilon = \frac{d\bar{r} - dr}{dr} = 2\varepsilon_{xx} \frac{dr}{d\bar{r} + dr} \quad (3.19)$$

Ahora bien, para el caso de deformaciones pequeñas, el cociente del segundo miembro se aproxima a $1/2$. En consecuencia:

$$\varepsilon = \frac{d\bar{r} - dr}{dr} = \varepsilon_{xx} \quad (3.20)$$

que indica que la *deformación unitaria* ε_{xx} representa el cambio unitario de longitud de un elemento lineal originalmente paralelo al eje x . Análogo significado físico tienen ε_{yy} y ε_{zz} . Por esta razón, estas tres componentes se denominan **deformaciones longitudinales unitarias (o extensiones)**.

Las restantes componentes de la deformación γ_{xy} , γ_{xz} y γ_{yz} se conocen con el nombre de **deformaciones angulares (o cortantes)**. Representan, como se verá a continuación, las variaciones que experimentan ángulos originalmente rectos formados por elementos lineales dx , dy y dz .

Para comprobarlo, considérese la distorsión en el plano xy de los elementos lineales infinitesimales, inicialmente ortogonales en el punto P , y paralelos a los ejes x e y . Sus longitudes respectivas son dx y dy (fig. 3.2). Tras la deformación, estos elementos lineales habrán experimentado unas rotaciones α y β respecto a su posición original.

Con la hipótesis de pequeñas deformaciones, se puede escribir:

$$\text{sen}\alpha \cong \alpha = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \text{sen}\beta \cong \beta = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.21)$$

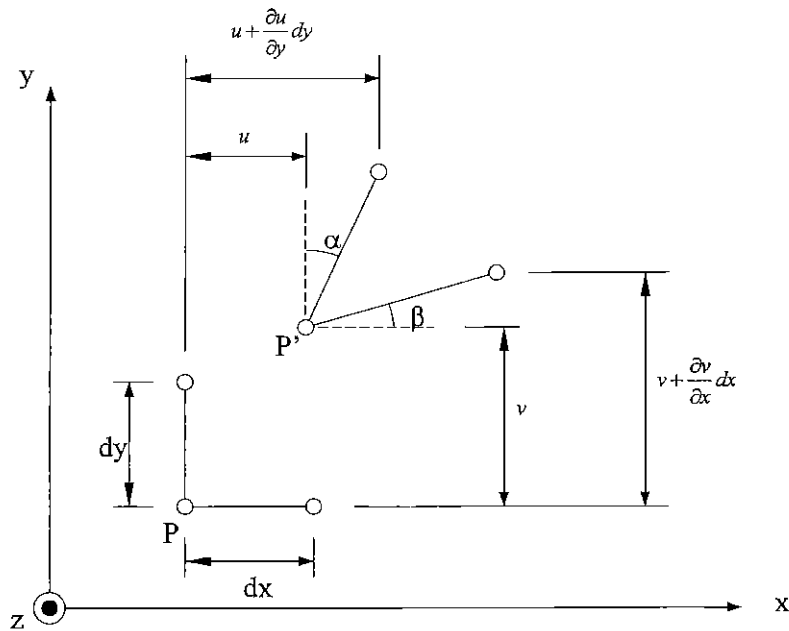


Figura 3.2. Deformaciones angulares

y teniendo en cuenta (3.13), resulta para γ_{xy} :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha + \beta \quad (3.22)$$

Por consiguiente, γ_{xy} representa el acortamiento angular experimentado por un ángulo inicialmente recto de lados paralelos a los ejes coordenados x e y . Análogo significado tienen las componentes γ_{xz} y γ_{yz} . Esta interpretación física justifica el frecuente empleo de estas funciones γ_{ij} , en lugar de las correspondientes ε_{ij} .

Los efectos de la deformación pueden ilustrarse sobre un paralelepípedo infinitesimal que en la configuración inicial (sin deformar) es rectangular. Si las deformaciones angulares son nulas, las caras permanecerán ortogonales, aun cuando varíe la posición y orientación del elemento, así como la longitud de sus aristas. El paralelepípedo sólo varía de tamaño y no se distorsiona. Por otra parte, cuando sólo existe deformación angular, los lados pierden su mutua perpendicularidad, convirtiéndose las caras del paralelepípedo en paralelogramos. En este caso, las longitudes de las aristas se mantienen y el paralelepípedo no varía de tamaño, sino únicamente de forma.

En otras palabras, puede afirmarse que la variación del tamaño del paralelepípedo rectangular se debe a las componentes normales de la deformación, en tanto que las componentes cortantes son causantes de la distorsión.

3.3. ANÁLISIS DE DEFORMACIONES. CAMBIO UNITARIO DE VOLUMEN

En el análisis de deformaciones, pueden seguirse exactamente los mismos pasos que en el análisis tensional, por la analogía existente entre las componentes de tensión y deformación.

Así para un punto P del cuerpo y una dirección definida por un vector unitario \vec{n} normal a un plano II que pasa por el punto (fig. 3.3) se define la deformación unitaria en P en la dirección de \vec{n} y se representa por $\vec{\varepsilon}_n$. Este vector, que en general no será perpendicular al plano considerado, podrá descomponerse en dos componentes: sobre la dirección definida por \vec{n} y sobre el plano II perpendicular a dicha dirección. A la primera de estas componentes se la denomina **deformación longitudinal unitaria**, ε_{nn} , y a la segunda, que se denotará por ε_{nt} , **deformación angular o transversal unitaria**. Constituyen las **componentes intrínsecas de la deformación**.

Dada la analogía entre estas componentes y las correspondientes del vector tensión, se mantiene el mismo convenio de signos. En este caso, si ε_m es positiva se dice que se ha producido un alargamiento, y en caso contrario un acortamiento. Habitualmente el término *deformación angular* suele asignarse, como se ha indicado anteriormente, a la magnitud $\gamma_m = 2\varepsilon_m$.

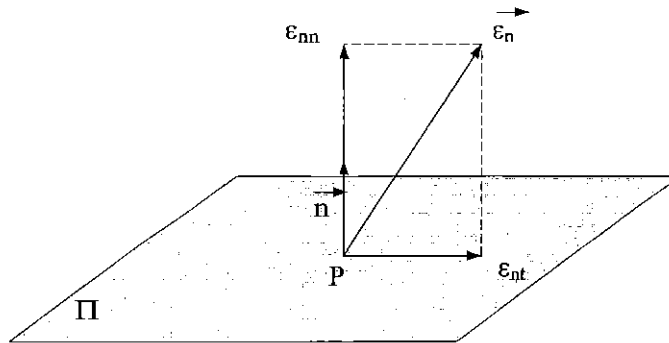


Figura 3.3. Componentes intrínsecas de la deformación

El vector deformación unitaria en un punto es función de las coordenadas del punto, pero también de la dirección que se considere, como ocurría con el vector tensión en un punto. En un punto arbitrario del cuerpo deformado, $\vec{\varepsilon}_n$ se relaciona con una orientación cualquiera \vec{n} a través de la ecuación:

$$\{\varepsilon_n\} = [D_{ij}] \cdot \{n\} \quad (3.23)$$

donde $[D_{ij}]$ es la denominada **matriz o tensor de deformación**, matriz simétrica cuyas componentes son precisamente los valores unitarios de la deformación. Su expresión es:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

De (3.23) se concluye que la matriz de deformación caracteriza completamente el estado de deformación en un punto. De igual modo a como se hacía con la matriz de tensiones, se puede analizar la de deformaciones determinando su transformación

ante un cambio de base, las deformaciones principales, los invariantes, los diagramas de los círculos de Mohr, etc. Sin embargo, dado que los conceptos son trasladables de una matriz a otra, no serán tratados de un modo específico, y nos limitaremos a resaltar algunos aspectos de interés.

De la matriz de deformaciones pueden obtenerse los valores y vectores propios que, por ser la matriz $[D_{ij}]$ real y simétrica, serán reales. Se denominan, respectivamente, **deformaciones longitudinales unitarias principales** y **direcciones principales de deformación**. En los planos perpendiculares a estas direcciones, las deformaciones angulares son nulas. Los alargamientos unitarios principales suelen representarse con la notación $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3 . Si se considera en el punto P un sistema de ejes coincidentes con las direcciones principales de deformación, la matriz de deformación se reduce a su forma diagonal:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

El **primer, segundo y tercer invariante** de la matriz de deformaciones se expresan respectivamente, por:

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ J_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 \\ J_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{aligned} \quad (3.26)$$

El primer invariante J_1 tiene una sencilla interpretación geométrica en el caso de deformaciones infinitesimales. Supóngase un volumen elemental consistente en un paralelepípedo rectangular cuyas aristas (de longitudes a, b y c en la configuración inicial) sean paralelas a las direcciones principales de deformación. Una vez deformado el cuerpo, estas aristas permanecen perpendiculares entre sí, por existir sólo deformación longitudinal. Sus longitudes respectivas serán $a(1 + \varepsilon_1), b(1 + \varepsilon_2)$ y $c(1 + \varepsilon_3)$. El *cambio unitario de volumen*, representado por e , vendrá dado por:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{abc(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - abc}{abc} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \quad (3.27)$$

Como para pequeñas deformaciones pueden despreciarse los términos de segundo y tercer orden frente a los lineales, resulta entonces:

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = J_1 \quad (3.28)$$

Es decir, en la teoría de pequeñas deformaciones, el primer invariante de la matriz de deformaciones representa el cambio unitario de volumen, y recibe el nombre de **dilatación cúbica o deformación volumétrica**.

Como más adelante se demostrará, en *materiales isótropos coinciden las direcciones principales de tensión y deformación*, por lo que se hará referencia a ellas denominándolas, simplemente, direcciones principales.

Finalmente, la matriz de deformaciones admite la descomposición en la matriz desviadora y la matriz esférica de deformaciones, según la expresión:

$$[D_{ij}] = [D_{ij}]_d + [D_{ij}]_e \quad (3.29)$$

La matriz desviadora sólo produce distorsión, mientras que la esférica sólo variación de tamaño (dilatación o contracción).

3.4. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Así como las componentes de tensión debían satisfacer unas condiciones de equilibrio, las componentes unitarias de la deformación y las componentes de los desplazamientos también deben satisfacer ciertas condiciones en todos los puntos del cuerpo. Quizá la condición más obvia es que los desplazamientos deben ser compatibles con las restricciones impuestas en el contorno. Por ejemplo, en un punto fijo del contorno, las funciones u , v , w deben ser nulas.

Como la descripción del movimiento y deformación de un cuerpo no requiere necesariamente la consideración de fuerzas, sino que puede basarse exclusivamente en consideraciones cinemáticas, se denominan *condiciones cinemáticas de contorno*, a las condiciones impuestas a los desplazamientos en puntos pertenecientes al contorno. Por analogía con las condiciones estáticas expuestas en el tema anterior, cuando no es posible una determinación completa de los desplazamientos mediante exclusivas consideraciones cinemáticas, se dice que el cuerpo es *cinemáticamente indeterminado*, y entonces es preciso añadir a las ecuaciones de deformación un número de condiciones de equilibrio igual al grado de indeterminación cinemática del cuerpo.

En el interior del cuerpo, la deformación de una porción elemental debe ser compatible con la de los elementos adyacentes, es decir, tal que no aparezcan grietas ni discontinuidades al deformarse el cuerpo. Por consiguiente, las componentes del desplazamiento u, v, w deben satisfacer ciertas *condiciones de continuidad* en todo el dominio material y poseer en cada punto *un valor único*, que será función de las coordenadas del punto.

Conocidos los desplazamientos, podrán obtenerse las componentes de la matriz de deformaciones en cada punto mediante las relaciones desplazamiento-deformación unitaria (3.12)-(3.13).

El problema inverso, es decir, la determinación del campo de desplazamientos u, v, w a partir de las componentes de la matriz de deformación $[D_{ij}]$ no es tan simple. Obsérvese que las tres funciones de desplazamiento incógnitas deben ser determinadas mediante la integración de seis ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Es evidente que las componentes de la matriz de deformación no pueden ser arbitrarias, sino que deben satisfacer las *condiciones de integrabilidad* o *condiciones de Cauchy-Schwartz* de igualdad de derivadas cruzadas. Imponiendo estas condiciones, se determinan las denominadas **ecuaciones de compatibilidad** de las componentes de la matriz de deformación $[D_{ij}]$. Eliminando u, v y w en el sistema de seis ecuaciones diferenciales, resulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

En resumen, así como las componentes de tensión debían satisfacer las condiciones de equilibrio interno en los puntos del interior del cuerpo y las condiciones estáticas de contorno, las componentes de deformación deben satisfacer las condiciones de compatibilidad o continuidad, así como las condiciones cinemáticas de contorno.

PROBLEMAS

3.1. Las medidas de deformación en un punto de un cuerpo elástico han proporcionado los valores: $\epsilon_{xx} = 0,002$; $\epsilon_{yy} = 0,002$; $\epsilon_{zz} = -0,002$, y la deformación longitudinal en la dirección

- $(2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5})$ es 0,004
- $(3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}, 0)$ es 0,003
- $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ es 0,001

Calcular las componentes ϵ_{xy} , ϵ_{xz} , ϵ_{yz} .

3.2. Las componentes de desplazamiento en un punto de un cuerpo elástico son:

$$u=2x, \quad v=3y+z, \quad w=z-y$$

*Derivar $\rightarrow [D_{ij}] \rightarrow \vec{u}$
 2) $\epsilon = [D_{ij}] \cdot \vec{n} \rightarrow \vec{e}_n$*

Calcular la deformación en la dirección $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ y la deformación tangencial total entre esta dirección y $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

$$\epsilon_{n_1 n_2} = \frac{1}{2} (\epsilon_{n_1} - \epsilon_{n_2}) \cdot \cos \theta$$

3.3. El desplazamiento de un punto P de un medio continuo elástico tiene las siguientes componentes, referidas a un sistema cartesiano ortogonal:

$$u = 4ax^2 \qquad v = 8az^2 \qquad w = -2ay^2$$

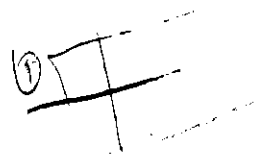
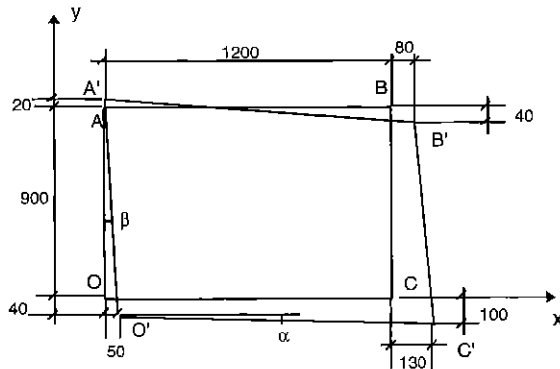
estando las coordenadas expresadas en metros y siendo $a = 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Se pide:

- 1º) Calcular la matriz de deformación. *Derivar*
- 2º) Alargamientos y direcciones principales de deformación en el punto $P(1/2, 1, 1)$.

*[D_{ij}] w/f.
 [a, a, a] $\rightarrow \epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$
 Se piden $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ según el punto.*

3.4. Una placa OABC de gran espesor se deforma, siendo su deformada O'A'B'C' según se indica en la figura (dimensiones en mm). Sabiendo que en la placa se crea un estado de deformación plana y uniforme, se pide:

- 1º) Calcular la matriz de deformaciones en los puntos de la placa.
- 2º) Hallar las deformaciones y direcciones principales.



3.5. Dado un tetraedro cuyos vértices son los puntos $O(0,0,0)$, $A(100,0,0)$, $B(0,100,0)$ y $C(0,0,100)$ donde las coordenadas vienen dadas en cm, se somete a un estado de deformación definido por las siguientes componentes de la matriz de deformación:

$$\begin{array}{lll} \epsilon_{xx} = 2kx & \epsilon_{yy} = 2ky & \epsilon_{zz} = 2kz \\ \epsilon_{xy} = k & \epsilon_{xz} = 0 & \epsilon_{yz} = 0 \end{array}$$

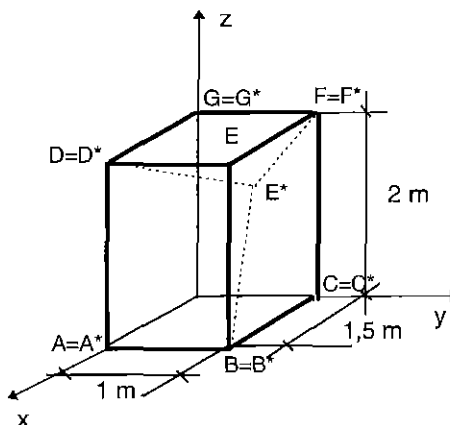
donde las coordenadas x, y, z vienen expresadas en cm y k es una constante de valor $k = 10^{-6}$. Se pide:

- 1º) Calcular el vector de deformación unitaria en los puntos de la arista AC y en dirección de la misma.
- 2º) Hallar la variación del ángulo formado por las aristas OB y OC.
- 3º) La deformación transversal máxima en el punto $P(10,10,10)$ utilizando la representación gráfica de Mohr.
- 4º) La deformación longitudinal unitaria en el punto P en la dirección definida por el vector $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

3.6. El paralelepípedo de la figura se deforma en la forma señalada por líneas de trazos. Los desplazamientos, vienen dados por las siguientes relaciones:

$$u = Axyz \qquad v = Bxyz \qquad w = Cxyz$$

- 1º) Determinar la matriz de deformaciones en el punto E si las coordenadas de dicho punto en la configuración deformada son $E^*(1'504, 1'002, 1'996)$.
- 2º) Determinar la deformación longitudinal unitaria en E en la dirección de la línea EA.
- 3º) Determinar la deformación transversal unitaria en E, para las líneas ortogonales EA y EF.



3.7. Las componentes cartesianas del vector desplazamiento en un punto P de un sólido elástico vienen dadas por las expresiones:

$$u = ax + 4ay; \quad v = 2az^2 - ay^2; \quad w = ay^2 - 2ax^2 - (a/3)z^2;$$

siendo a una constante. Se pide:

- 1º) Obtener la matriz de deformaciones unitarias en el punto P(2,1,-3/2).
- 2º) Valores de las deformaciones unitarias principales así como las direcciones principales de deformación en el punto P.

3.8. Los desplazamientos en un punto de un cuerpo deformable son:

$$u=2x-y, \quad v=y-2x, \quad w=z$$

- 1º) Hallar las deformaciones principales.
- 2º) Determinar la dirección de la deformación principal máxima.
- 3º) Cosenos directores de la normal a un plano en el que se presente la máxima deformación tangencial.

3.9. Sean las componentes de desplazamiento en un punto M de un sólido elástico:

$$u=C(2x+y^2), \quad v= C(x^2-3y^2), \quad w=0$$

donde $C=10^{-2}$

- 1º) Representar la forma distorsionada de un elemento de superficie de lados dx y dy , inicialmente paralelos a los ejes coordenados. Los dos lados se encuentran en el punto M (2,1,0).
- 2º) Determinar las coordenadas de M después de la deformación.
- 3º) Determinar la deformación de un elemento unitario MN de cosenos directores $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.
- 4º) Deformaciones y direcciones principales.

3.10. El estado de deformación en un punto de un material está definido por las siguientes componentes:

$$\epsilon_{xx}=1,51 \cdot 10^{-3} \quad \epsilon_{yy}=0,63 \cdot 10^{-3} \quad \epsilon_{zz}=-0,54 \cdot 10^{-3} \quad \gamma_{xy}=-0,95 \cdot 10^{-3} \quad \gamma_{yz}=0,42 \cdot 10^{-3} \quad \gamma_{xz}=0,31 \cdot 10^{-3}$$

- 1º) Hallar las deformaciones longitudinales unitarias en las direcciones: a) igualmente inclinada respecto a los tres ejes coordenados; b) que forma ángulos de 60° , 75° y $-34,26^\circ$ con las direcciones X, Y, Z, respectivamente.
- 2º) Determinar las deformaciones principales.
- 3º) Invariantes de la matriz de deformación.
- 4º) Dilatación cúbica unitaria.
- 5º) Deformaciones tangenciales totales máximas y correspondientes deformaciones

longitudinales unitarias.

3.11. El estado de deformación en un punto de un material está definido por:

$$\epsilon_{xx}=1,73 \cdot 10^{-3} \quad \epsilon_{yy}=0,59 \cdot 10^{-3} \quad \gamma_{xy}=-0,35 \cdot 10^{-3}$$

- 1º) Calcular las deformaciones normal y tangencial (total) en el plano cuya normal forma 30° con el eje X (y es paralelo al eje Z).
- 2º) Deformaciones principales.
- 3º) Invariantes de la matriz de deformación.
- 4º) Deformaciones tangenciales (totales) máximas en el punto considerado.

TEMA 4

EL SÓLIDO ELÁSTICO



4.1. ECUACIONES CONSTITUTIVAS. GENERALIDADES

Como se ha visto, el estudio del comportamiento de un medio continuo implica la consideración, al menos, de dos tipos independientes de condiciones: las *condiciones estáticas*, cuyas variables son exclusivamente cinéticas (fuerzas, tensiones), y las *condiciones cinemáticas*, cuyas variables son exclusivamente cinemáticas (desplazamientos, deformaciones unitarias). Es evidente que tanto las condiciones cinéticas, sean estáticas o dinámicas, como las cinemáticas, son independientes de las características del material que constituye el medio. Son aplicables tanto a sólidos como a líquidos o gases, siempre que puedan representarse como medios continuos.

Y puesto que estos dos tipos de condiciones pueden formularse independientemente, por sí mismas no determinan de forma unívoca la solución de un problema concreto. Es necesario establecer relaciones entre las variables cinéticas y cinemáticas. Dichas relaciones dependen de la constitución del material que se considere, y se conocen como **ecuaciones o leyes constitutivas**.

La necesidad física de introducir estas ecuaciones es fácil de entender: tensiones y deformaciones no son independientes, sino que están relacionadas como causa y efecto. La experiencia cotidiana nos demuestra que para unas mismas cargas, las deformaciones de dos piezas iguales de materiales distintos (por ejemplo, acero y goma) son bien diferentes.

Supuesta constante la densidad del medio y que no existen transferencias mecánico-térmicas, el problema a resolver tiene quince incógnitas (seis componentes de la matriz de tensiones, seis de la matriz de deformaciones, más tres componentes de desplazamiento) y, en cambio, se dispone únicamente de nueve ecuaciones: tres de equilibrio y seis de relaciones deformaciones unitarias-desplazamientos. Para completar la formulación del problema son necesarias seis nuevas ecuaciones. Estas relaciones adicionales son proporcionadas por las **leyes constitutivas o relaciones tensión-deformación del material**.

En la fig. 4.1 se muestra esquemáticamente la interrelación entre las variables presentes en la formulación general, en el caso de análisis estático. Como puede verse, las fuerzas de volumen Φ_i y de superficie T_i se relacionan con las tensiones a través de las condiciones de equilibrio; los desplazamientos u_i con las deformaciones

unitarias ε_{ij} a través de las relaciones deformaciones unitarias-desplazamientos; y las tensiones σ_{ij} con las deformaciones ε_{ij} mediante las ecuaciones constitutivas.

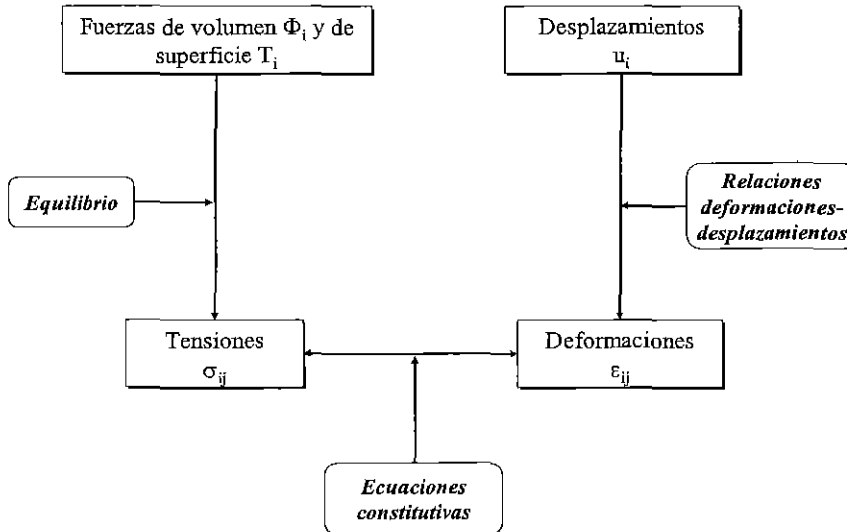


Figura 4.1. Relación entre las variables de un problema elástico

4.2. EL ENSAYO DE TRACCIÓN

Uno de los posibles métodos para determinar las leyes de comportamiento de los materiales es el experimental. De los resultados obtenidos en los ensayos se formulan las leyes generales que los caracterizan.

Entre estos ensayos, destaca uno de relativa sencillez y útil para obtener características físicas del sólido: el **ensayo de tracción simple**¹. Como se verá posteriormente, una de las conclusiones del ensayo de tracción es la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones que se presenta en muchos materiales, mientras no se sobrepase un cierto límite. Robert Hooke formuló por primera vez en 1678 la ley de proporcionalidad entre fuerzas y desplazamientos, tras experimentar con muelles de reloj: "*ut tensio sic vis*", que puede traducirse libremente "la deformación es

¹ Pese a su sencillez, este ensayo pone de manifiesto la complejidad del fenómeno de la deformación. Como decía Orowan ya en 1944: "El ensayo de tracción se realiza con facilidad y rapidez, pero sin embargo, no puede deducirse mucho de sus resultados, porque no se sabe lo que realmente quieren decir. No son sino el desenlace de un número de procesos físicos muy complicados..."

proporcional a la fuerza". Sus conclusiones para muelles pueden adaptarse al estudio de piezas prismáticas en régimen elástico, imaginando el material formado por fibras longitudinales que, frente a tracciones en su misma dirección, se comportan como muelles. La sollicitación más sencilla para este esquema sería imponer en todas las fibras tracciones iguales, para que el fenómeno macroscópico resultante sea homogéneo. Menabrea llamó a este modelo "sólido semirrígido", pues en él se prescindía de la contracción lateral que acompaña al alargamiento de la pieza prismática.

Básicamente, el ensayo consiste en someter a una pieza recta normalizada, llamada *probeta* (fig. 4.2), a una carga de tracción P que se aumenta gradualmente hasta la rotura. En la probeta se realizan previamente dos marcas, separadas en el momento inicial una distancia L_0 cuya variación se mide por medio de un extensómetro. La carga se hace crecer lentamente² desde su valor nulo inicial, y se supone que está perfectamente alineada con el eje x de la probeta.

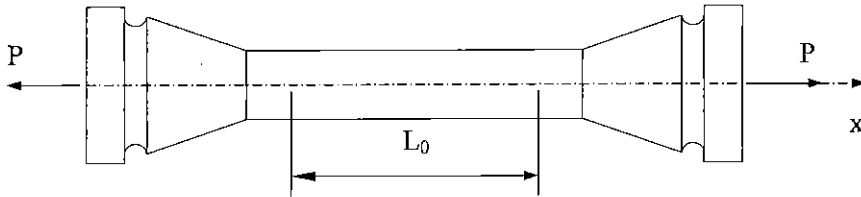


Figura 4.2. Ensayo de tracción

Suponiendo que la fuerza de tracción P se reparte uniformemente en la sección recta del vástago central de longitud L_0 , la tensión normal a la sección en cualquier punto de la misma será:

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A_0} \tag{4.1}$$

donde A_0 es el área de la sección recta.

² Téngase en cuenta que la respuesta del material no depende solamente de la magnitud de la carga sino también de su velocidad de aplicación.

Debido a la fuerza aplicada, la probeta se alarga. Habitualmente, se representa la tensión σ_{xx} en la barra para valores crecientes de P en función de los alargamientos unitarios longitudinales ε_{xx} . Ahora bien, hay que tener en cuenta dos particularidades:

a) El valor de la tensión se refiere siempre a la sección recta inicial. A este valor P/A_0 se denomina *tensión nominal*. En un momento cualquiera del ensayo, la tensión real será P/A , donde A es el área de la sección en ese momento. Cuando se trata de pequeñas deformaciones, la diferencia entre P/A_0 y P/A es prácticamente despreciable.

b) El alargamiento unitario se define también respecto a la longitud inicial L_0 , es decir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (4.2)$$

La deformación así definida se denomina "deformación ingenieril" y constituye una aproximación de la deformación real o logarítmica:

$$\varepsilon_{xx} = \ln \frac{L}{L_0} \quad (4.3)$$

donde L es la separación real que existe entre las dos marcas iniciales en el instante en el que la carga actuante es P . No obstante, la expresión (4.2) es perfectamente adecuada para pequeñas deformaciones.

En la fig. 4.3 se representa el **diagrama tensión-deformación** que se obtiene para el acero estructural, también llamado acero dulce o acero de bajo contenido en carbono (aproximadamente 0,2%).

Al ir aumentando el valor de la carga P , se observa en el diagrama un primer tramo OA en el que la tensión es proporcional a la deformación. El punto A define el llamado **límite de proporcionalidad** σ_p . Para valores mayores de la carga se obtiene un tramo no proporcional, hasta el punto B, que define el **límite elástico** σ_e . El tramo OB se caracteriza porque si se retira la carga aplicada en cualquier punto del mismo, se vuelve al estado descargado inicial.

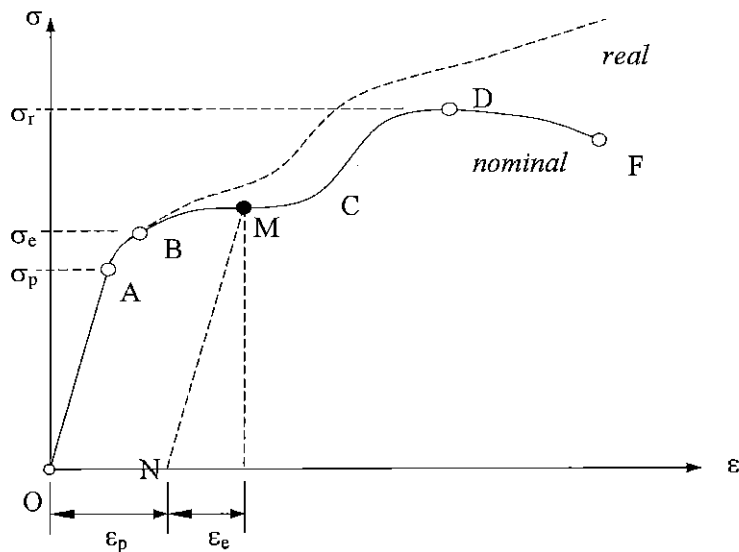
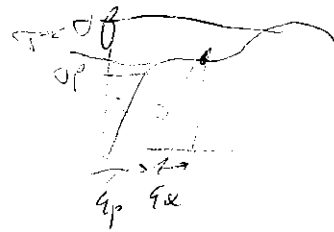


Figura 4.3. Diagrama tensión-deformación del acero

A la propiedad del material de recuperar su forma y tamaño al retirar las cargas se conoce con el nombre de **elasticidad**. Si además la deformación y la carga son proporcionales (tramo OA) se llama **elasticidad lineal**.

Es evidente que tanto el límite de proporcionalidad como el límite elástico son dos puntos del diagrama que tienen particular importancia, al menos desde un punto de vista teórico. Sin embargo, su importancia práctica es bastante menor para algunos materiales, como son, entre otros, determinadas aleaciones de aluminio. La razón es que para estos materiales la zona de transición del comportamiento elástico al plástico, y la del comportamiento lineal al no lineal es tan gradual, que la determinación de estos límites a partir del diagrama tensión-deformación es bastante difícil. En otros materiales, ambos límites se encuentran muy próximos y en la práctica se consideran coincidentes.

Sobrepasado el límite elástico, al seguir incrementando la carga aplicada, se aprecia, por una parte, un tramo en que las deformaciones aumentan sin que prácticamente lo haga la tensión. A partir de C se produce un aumento brusco de la resistencia de la barra, provocado por una readaptación de su estructura interna, hasta el punto D en el que la tensión alcanza su valor máximo σ_r , llamada **tensión última o de rotura**, si

bien la rotura real se produce instantes después (punto F) para una deformación mayor y una aparente disminución de tensión.

Para entender este comportamiento aparentemente anómalo es preciso añadir que, simultáneamente con la deformación longitudinal, se produce una constante disminución de la sección recta de la probeta. Durante el comportamiento elástico del material, la diferencia entre la tensión nominal y la tensión real es despreciable, por ser muy pequeñas las deformaciones originadas en la sección transversal. En cambio, una vez superado el límite elástico, la curva tensión real-deformación (línea discontinua de la figura) llega a diferir notablemente de la obtenida representando la tensión nominal. Además, tras alcanzarse la tensión de rotura se produce una súbita reducción de la sección transversal en una zona de la probeta, que conduce a la formación de un *cuello de estricción* en el que se acaba produciendo la rotura de la misma. De esta forma, la carga total que puede resistir la probeta se ve efectivamente disminuida tras alcanzar la tensión de rotura σ_r , pero esta disminución se debe a esa apreciable reducción en el área de la barra y no a una pérdida de la resistencia del material; de hecho, el material soporta un aumento de tensión, como indica la línea de trazos discontinuos.

Si la carga produce una tensión que sobrepasa el límite elástico hasta llegar, por ejemplo, al punto M de la figura y a continuación se efectúa un proceso de descarga, ésta tiene lugar según una recta paralela a la de proporcionalidad llegando, cuando la carga se ha retirado totalmente, hasta el punto N . Como puede apreciarse, en el proceso de descarga únicamente se ha recuperado parte de la deformación, la llamada deformación elástica ε_e , mientras permanece la deformación plástica ε_p . La deformación total ε es la suma de ambas, es decir:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (4.4)$$

Como ya se ha dicho, el límite elástico resulta a veces difícil de determinar, por lo que en la práctica se asume como tal la tensión a la que corresponde una deformación permanente del 0,2%. Para su determinación bastará trazar en el diagrama por $\varepsilon = 0,002$ una paralela a la tangente en el origen (fig. 4.4). A esta tensión se le conoce con el nombre de **tensión de fluencia o límite de fluencia** σ_f .

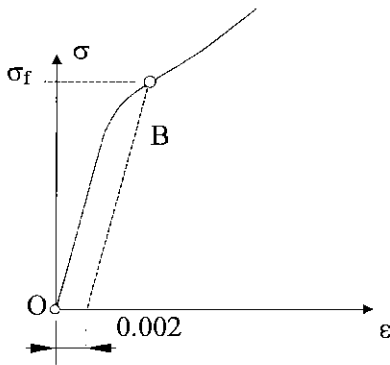


Figura 4.4. Tensión de fluencia

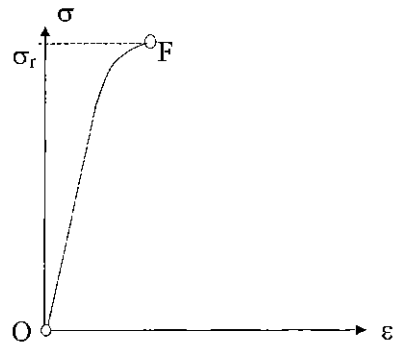


Figura 4.5. Tensión de rotura

Los materiales cuyo diagrama de tracción es similar al del acero dulce se denominan **materiales dúctiles**. La ductilidad se define como la aptitud a sufrir grandes deformaciones antes de la rotura y suele ser una característica de los materiales metálicos. Entre estos materiales podemos citar, además del acero dulce, el latón, el cobre, las aleaciones de aluminio, etc.³

Por otra parte, se llaman **materiales frágiles** los que sufren rotura sin deformaciones plásticas apreciables; es decir, tienen un comportamiento elástico prácticamente hasta la rotura (fig. 4.5). Entre otros se encuentran, por ejemplo, el hierro fundido, el vidrio, la piedra, el hormigón, etc. En muchos de ellos la tensión de rotura a compresión es bastante superior a la de tracción. Conforme aumenta el contenido de carbono en los aceros, éstos se vuelven menos dúctiles, aunque con mayor tensión de fluencia y de rotura.

Puede observarse que la forma de la curva obtenida en el ensayo de tracción no es tan sencilla como el propio ensayo. Para simplificar el estudio matemático, se suelen idealizar estas curvas dependiendo del problema y del grado de aproximación requerido. Y así, en el análisis de estructuras y materiales dúctiles (fig. 4.6a), se considera un diagrama idealizado consistente en dos tramos rectos: el primero representa un comportamiento elástico-lineal desde el origen hasta alcanzar la tensión

³ Por lo general, estos materiales presentan un límite de proporcionalidad más bajo que el acero dulce y, como éste, suelen tener la misma tensión de fluencia a tracción que a compresión. En cambio, los aceros de alta resistencia (con mayor contenido en carbono y otros elementos de aleación) pueden tener límites de proporcionalidad superiores al doble que el acero dulce.

de fluencia σ_f (ϵ_f es la deformación correspondiente), y el segundo es un tramo horizontal, es decir, a tensión constante, donde el comportamiento es plástico y que se prolonga hasta la rotura. Se denomina a este **comportamiento elasto-plástico perfecto**. En el caso de materiales frágiles (fig. 4.6b), se supone comportamiento elástico-lineal hasta la rotura.

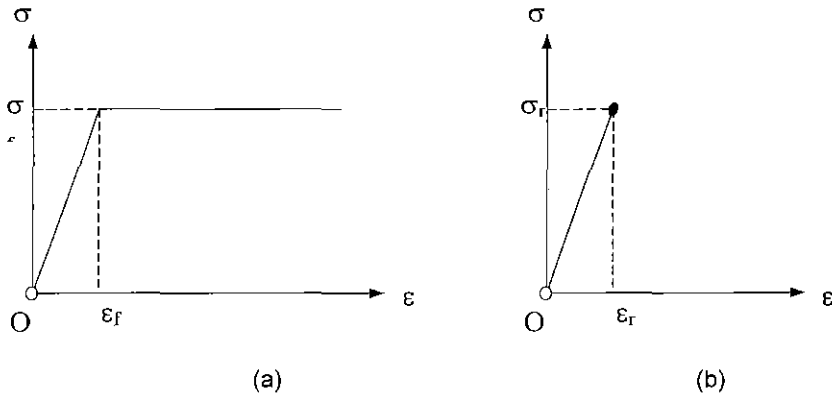


Figura 4.6. Diagramas idealizados de comportamiento: a) Materiales dúctiles, b) Materiales frágiles

4.3. EL SÓLIDO ELÁSTICO. ENERGÍA ELÁSTICA DE DEFORMACIÓN

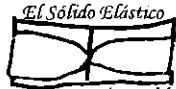
4.3.1. Materiales elásticos. Energía elástica de deformación

Sea un cuerpo sólido deformado bajo la acción de un sistema de cargas exteriores. Si al retirar las fuerzas aplicadas, se observa que el cuerpo recupera su forma y tamaño originales, entonces se dice que el material que lo constituye tiene un **comportamiento elástico** bajo la acción de las cargas aplicadas.

En el comportamiento elástico, el estado actual de tensiones en un punto depende únicamente del estado actual de deformaciones en ese punto. Esto es, existe entre ambos estados una relación biunívoca:

$$\sigma_{ij} = f(\epsilon_{kl}) \quad (4.5)$$

que es la expresión matemática de la ecuación constitutiva de los materiales elásticos,



y donde f es la llamada *función de respuesta elástica*. Al ser esta relación biunívoca, es posible encontrar una formulación inversa que permita obtener la deformación a partir de la tensión. Precisamente por esta biunivocidad, es decir, a cada tensión (o deformación) corresponde una y sólo una deformación (o tensión), el comportamiento elástico es reversible e independiente del camino recorrido. Dicho con otras palabras, no depende de la historia seguida por las tensiones o deformaciones hasta alcanzar el estado actual. (Fácilmente se comprende que no puede decirse lo mismo para un proceso de deformación plástica). Así pues, el proceso de deformación elástica es un proceso reversible, en el que al retirar las cargas el cuerpo retorna a su configuración inicial.

Pero para definir de qué naturaleza es la relación entre el estado de tensiones y el de deformaciones (es decir, la naturaleza de la función f o de su inversa), es preciso recurrir a consideraciones termodinámicas, concretamente a la primera ley de la Termodinámica, que no es sino una manera precisa de formular la ley de conservación de la energía.

⌈ Antes de formular esta ley, conviene introducir el concepto de **energía de deformación de un cuerpo elástico**. Al producirse la deformación en un cuerpo elástico como consecuencia de la aplicación de las cargas exteriores, se almacena en el mismo una energía. Su existencia puede justificarse basándose en una simple comprobación experimental: cuando sobre un cuerpo elástico actúa un sistema de fuerzas, los puntos de aplicación de las fuerzas se desplazan y, en consecuencia, se produce un trabajo que se almacena en forma de energía de deformación, y que puede ser posteriormente restituído al exterior. Al mismo tiempo, y como se ha afirmado en repetidas ocasiones, se generan unas fuerzas interiores o tensiones. ⌋

A esta energía almacenada en el cuerpo deformado se la denomina **energía elástica de deformación**. Entendida la energía como "capacidad para realizar trabajo", seguidamente se demostrará que esta energía almacenada o energía de deformación no es más que la capacidad que poseen las fuerzas internas para realizar un trabajo a partir del estado deformado del cuerpo. Se trata, por tanto, de una forma de energía potencial, siendo únicamente posible medir variaciones de la misma.

Despreciándose posibles efectos electromagnéticos, una posible formulación de la primera ley de la Termodinámica sería la siguiente:

En un sistema mecánico, la suma del trabajo realizado por las fuerzas exteriores más el calor que fluye dentro del sistema desde el exterior, es igual a la suma del incremento de energía interna más el incremento de energía cinética.

Simbólicamente esta ley puede expresarse como:

$$\delta W + \delta Q = \delta U + \delta T \quad = \quad \boxed{\delta W_{ext} = \delta U} \quad (4.6)$$

Handwritten notes: Trabajo o Si... Calor que fluye... Estado Estático.

donde δW es el trabajo realizado por las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, δQ es el calor que fluye al interior del mismo, δT es el incremento de energía cinética, y δU el incremento de energía interna. En un cuerpo elástico sometido a la acción de unas fuerzas exteriores, la energía interna U es precisamente la energía potencial de las fuerzas interiores (se expresará, de hecho, en función de éstas), a la que hemos denominado energía elástica de deformación.

Téngase en cuenta, como se ha comentado, que únicamente son medibles variaciones de energía interna; de ahí que en su formulación, la primera ley de la Termodinámica no considere valores absolutos, sino variaciones de las magnitudes que en ella intervienen. En cuerpos elásticos es habitual medir la variación de la energía de deformación a partir de una configuración inicial, la que corresponde a lo que suele denominarse *estado natural* del sólido, y que es aquella en la que se suponen nulas las tensiones y deformaciones en todos sus puntos.

A continuación se va a aplicar esta ley al caso de un cuerpo elástico en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores de superficie y volumen, \vec{T} y $\vec{\Phi}$, respectivamente. Se supondrá el cuerpo sustentado de tal forma que sea imposible todo movimiento como sólido rígido. Bajo la acción de las cargas aplicadas, el estado de tensiones en un punto está definido por las seis componentes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, y de la misma forma el correspondiente estado de deformaciones se define mediante las seis componentes unitarias $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$, y las tres componentes del desplazamiento u, v, w , supuestas todas ellas referidas a un sistema cartesiano trirrectangular xyz .

A partir de esta configuración se aplica al campo de desplazamientos un *desplazamiento virtual* $\delta \vec{u}$:

$$\delta \vec{u} = \delta u \cdot \vec{e}_1 + \delta v \cdot \vec{e}_2 + \delta w \cdot \vec{e}_3 \quad (4.7)$$

entendiendo por tal, un desplazamiento elemental, ficticio, compatible con las restricciones cinemáticas del cuerpo, y durante el cual permanece invariable el estado tensional en cada punto del mismo. Teniendo en cuenta las relaciones entre desplazamientos y deformaciones unitarias para pequeñas deformaciones, las variaciones de las componentes de la matriz de deformaciones debidas al desplazamiento virtual $(\delta u, \delta v, \delta w)$, serán las indicadas en las ecuaciones (4.8):

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} & \delta \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \right] \\ \delta \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} & \delta \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right] \\ \delta \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial(\delta w)}{\partial z} & \delta \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta v)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} \right] \end{aligned}$$



De este cuerpo deformado en equilibrio estático, que ocupa un volumen material V , se segrega otro interior V' encerrado en una superficie A' . Este dominio V' también se encontrará en equilibrio bajo la acción de las fuerzas de volumen $\vec{\Phi}$ y de las tensiones $\vec{\sigma}_n$ sobre su superficie circundante A' , y se supondrá que permanece en equilibrio durante el desplazamiento virtual $\delta \vec{u}$.

Al estar en equilibrio estático no existe variación de energía cinética $(\delta T = 0)$, y además supondremos que el proceso de deformación se realiza sin intervención del calor (el flujo neto de calor $\delta Q = 0$). Por consiguiente, de (4.6):

$$\delta W = \delta U \quad (4.9)$$

Para introducir el estado tensional en la formulación, se segrega la porción en equilibrio V' , y se calcula la variación de trabajo de las fuerzas exteriores como consecuencia de ese desplazamiento virtual. Teniendo en cuenta (2.14):

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_{A'} \bar{\sigma}_n \cdot \delta \bar{u} \cdot dA + \int_{V'} \bar{\Phi} \cdot \delta \bar{u} \cdot dV = \\
 &= \int_{A'} (\bar{\sigma}_x \cdot n_x + \bar{\sigma}_y \cdot n_y + \bar{\sigma}_z \cdot n_z) \cdot \delta \bar{u} \cdot dA + \int_{V'} \bar{\Phi} \cdot \delta \bar{u} \cdot dV = \\
 &= \int_{V'} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\sigma}_x \cdot \delta \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\sigma}_y \cdot \delta \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\sigma}_z \cdot \delta \bar{u}) + \bar{\Phi} \cdot \delta \bar{u} \right] dV
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde n_x, n_y, n_z son los cosenos directores del vector unitario normal a la superficie, dirigido hacia el exterior de la misma, y se ha supuesto que se cumplen las condiciones de continuidad de todas las componentes y de sus primeras derivadas, lo que permite transformar la integral de superficie en una integral de volumen aplicando el teorema de la divergencia. Haciendo operaciones en (4.10), resulta:

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_{V'} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \bar{\Phi} \right) \cdot \delta \bar{u} \cdot dV + \\
 &+ \int_{V'} \left(\bar{\sigma}_x \cdot \frac{\partial (\delta \bar{u})}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \cdot \frac{\partial (\delta \bar{u})}{\partial y} + \bar{\sigma}_z \cdot \frac{\partial (\delta \bar{u})}{\partial z} \right) \cdot dV
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ahora bien, la primera integral es nula, por la condición (2.29) de equilibrio interno. Por otra parte, teniendo en cuenta la expresión (4.7) para el desplazamiento virtual, así como las expresiones (2.16) a (2.18), se obtiene:

$$\delta W = \int_{V'} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + 2\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + 2\tau_{yz} \delta \varepsilon_{yz}) dV = \delta U \tag{4.12}$$

en donde para la segunda igualdad se ha tenido en cuenta (4.9). De esta expresión puede concluirse que el trabajo de las fuerzas exteriores es propiamente una energía interna almacenada en el medio (*medio conservativo*), a la que se ha denominado *energía elástica de deformación*, y que coincide con el *trabajo de las fuerzas interiores*. Naturalmente, este resultado sólo es válido para pequeñas deformaciones.

En lugar de utilizar directamente como variable la energía interna U , es habitual usar en su lugar la energía interna por unidad de volumen, también llamada **energía elástica específica o densidad de energía de deformación** U_0 . La relación entre ambas será, por tanto:

$$U = \int_V U_0 \cdot dV \quad (4.13)$$

y la variación de energía de deformación vendrá dada entonces por:

$$\delta U = \int_V \delta U_0 \cdot dV \quad (4.14)$$

donde, de acuerdo con (4.12):

$$\delta U_0 = \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + 2\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + 2\tau_{yz} \delta \varepsilon_{yz} \quad (4.15)$$

Además, por la relación biunívoca entre tensiones y deformaciones en los materiales elásticos, la energía de deformación podrá expresarse como una función de las componentes de deformación, es decir:

$$U_0 = U_0(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}) \quad (4.16)$$

Luego al producirse una variación $(\delta u, \delta v, \delta w)$ en el campo de desplazamientos, la variación de la función U_0 será:

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xx}} \delta \varepsilon_{xx} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yy}} \delta \varepsilon_{yy} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{zz}} \delta \varepsilon_{zz} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xy}} \delta \varepsilon_{xy} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xz}} \delta \varepsilon_{xz} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yz}} \delta \varepsilon_{yz} \quad (4.17)$$

Siendo $\delta \varepsilon_{xx}$, $\delta \varepsilon_{yy}$, $\delta \varepsilon_{zz}$, $\delta \varepsilon_{xy}$, $\delta \varepsilon_{xz}$, $\delta \varepsilon_{yz}$ las variaciones de las deformaciones unitarias correspondientes a esa variación en el campo de desplazamientos. Comparando (4.15) y (4.17), se concluye:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xx}} & \tau_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xy}} & \left(\tau_{xy} &= \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yy}} & \tau_{xz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xz}} & \left(\tau_{xz} &= \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xz}} \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{zz}} & \tau_{yz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yz}} & \left(\tau_{yz} &= \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Luego para asegurar que se satisface la primera ley de la Termodinámica, éstas son las relaciones que deben cumplirse entre las componentes de la matriz de tensiones y

las de la matriz de deformaciones en un punto, relaciones que se establecen a través de la variable U_0 , energía elástica específica. Además de reversible, el ciclo carga-descarga de un proceso de deformación elástica es un ciclo cerrado en el que no se genera energía.

Finalmente, un breve comentario sobre las condiciones de existencia de la función U_0 , ya que esta función no siempre existe para un proceso termodinámico general. Puede comprobarse, aplicando el primer y segundo principio de la termodinámica, que en los *procesos reversibles adiabáticos* (sin intercambio de calor entre el sistema y el entorno) y en los *procesos reversibles isotérmicos* (a temperatura constante), puede encontrarse una función escalar U_0 que es función de las componentes de deformación unitaria y verifica las ecuaciones (4.18). En otro tipo de procesos no se puede garantizar la existencia de U_0 . Aunque en la realidad no existen procesos perfectamente adiabáticos o isotérmicos, puede considerarse que cargas aplicadas muy lentamente representan condiciones isotérmicas, y cargas aplicadas muy rápidamente condiciones adiabáticas. Generalmente, en la asignatura suponemos que el proceso de aplicación de las cargas es cuasi-estático, significando con esta expresión que las cargas se aplican de manera que crecen muy lentamente hasta alcanzar su valor final, de tal forma que las deformaciones también van aumentando de forma muy lenta, sin variaciones de temperatura apreciables.

4.3.2. Energía elástica complementaria

Análogamente a (4.16), puede definirse para los sólidos elásticos una nueva función escalar U_0^* que sea función del estado de tensiones, es decir:

$$U_0^* = U_0^*(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \quad (4.19)$$

a la que se denomina **densidad de energía complementaria de deformación**, definida de forma tal que se satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{xx}} & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial U_0^*}{\partial \tau_{xy}} & \left(\gamma_{xy} &= \frac{\partial U_0^*}{\partial \tau_{xy}} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{yy}} & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial U_0^*}{\partial \tau_{xz}} & \left(\gamma_{xz} &= \frac{\partial U_0^*}{\partial \tau_{xz}} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{zz}} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial U_0^*}{\partial \tau_{yz}} & \left(\gamma_{yz} &= \frac{\partial U_0^*}{\partial \tau_{yz}} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

En efecto, supongamos que existe esta función y es tal que:

$$U_0 + U_0^* = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\tau_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz}\varepsilon_{xz} + 2\tau_{yz}\varepsilon_{yz} \quad (4.21)$$

Diferenciando (4.21) con respecto a σ_{xx} y aplicando la regla de la cadena en la diferenciación, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{xx}} = & \varepsilon_{xx} + \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xx}} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \sigma_{xx}} + \left(\sigma_{yy} - \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yy}} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \sigma_{xx}} + \left(\sigma_{zz} - \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{zz}} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \sigma_{xx}} + \\ & + \left(2\tau_{xy} - \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xy}} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial \sigma_{xx}} + \left(2\tau_{xz} - \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xz}} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial \sigma_{xx}} + \left(2\tau_{yz} - \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yz}} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial \sigma_{xx}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde, de acuerdo con (4.18), todos los paréntesis se anulan, obteniéndose finalmente:

$$\frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{xx}} = \varepsilon_{xx} \quad (4.23)$$

que coincide con la primera de las ecuaciones (4.20). De forma similar, derivando la ecuación (4.21) con respecto a cada una de las otras cinco componentes de tensión, se obtiene el resto de ecuaciones (4.20).

La introducción de la función energía de deformación (o bien de la energía complementaria) permite simplificar el problema de determinar las componentes de la matriz de tensiones (o de deformaciones), ya que el número de funciones incógnitas se reduce de seis a uno. Bastaría conocer la expresión de esta función para formular las ecuaciones constitutivas de un material. De hecho, éste es el camino que se seguirá para generalizar la ley de Hooke conocida del ensayo de tracción.

Los conceptos de densidad de energía de deformación U_0 y densidad de energía complementaria de deformación U_0^* pueden ilustrarse gráficamente para un caso particular de carga ya considerado: el de una probeta sometida a una fuerza creciente de tracción P . Esta carga da lugar a una tensión σ_{xx} y a una deformación unitaria longitudinal ε_{xx} cuya relación (en general, no lineal) se representa en la fig. 4.7.

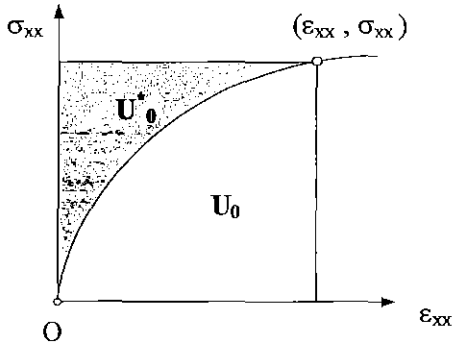


Figura 4.7. Comportamiento no lineal

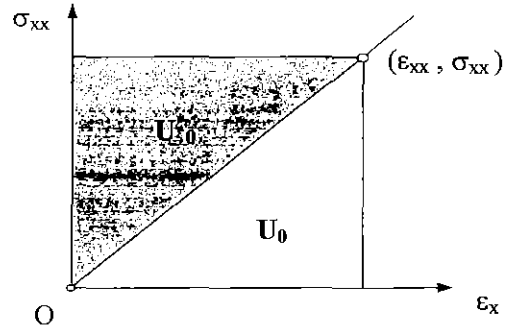


Figura 4.8. Comportamiento lineal

Para este caso particular de carga, según (4.18) se cumplirá:

$$\sigma_{xx} = \frac{dU_0}{d\varepsilon_{xx}} \quad (4.24)$$

y, por consiguiente:

$$U_0 = \int \sigma_{xx} \cdot d\varepsilon_{xx} \quad (4.25)$$

lo que significa que U_0 se corresponde con el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas (deformaciones). Además, de la relación (4.21) entre U_0 y U_0^* , particularizada para el caso de tracción, resulta:

$$U_0 + U_0^* = \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} \quad (4.26)$$

que permite concluir que la energía complementaria de deformación viene dada por el área comprendida entre la curva y el eje de ordenadas (tensiones), expresada matemáticamente por:

$$U_0^* = \int \varepsilon_{xx} \cdot d\sigma_{xx} \quad (4.27)$$

lo que es conforme con (4.20).

Cabe indicar, por último, que si el material tiene un comportamiento elástico lineal, tal como el representado en la figura 4.8, entonces coinciden ambas magnitudes, es decir:

$$U_0 = U_0^* \quad (4.28)$$

y, para el caso de tracción que se está considerando, se verificará:

$$U_0 = U_0^* = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} \quad (4.29)$$

4.4. LEY DE HOOKE GENERALIZADA

Ya se ha mencionado que Hooke había postulado la proporcionalidad entre fuerzas y deformaciones, propiedad que ha quedado verificada al estudiar el ensayo de tracción, siempre que las cargas no sobrepasen determinados límites. Esta relación proporcional se establece a través de una constante característica del material denominada **módulo de Young o módulo de elasticidad lineal E** , en la forma:

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \quad (4.30)$$

donde x es la dirección en que se realiza el ensayo. Esta ecuación se conoce con el nombre de **ley de Hooke** y, como se ha dicho, es válida mientras la tensión no alcance el valor correspondiente al límite de proporcionalidad.

Esta expresión de la ley de Hooke, formulada a partir del ensayo de tracción, sólo tiene en cuenta la deformación axial. Sin embargo y como se comentó al hablar del ensayo, simultáneamente tiene lugar una contracción lateral que provoca la disminución de las dimensiones de la sección recta de la barra, y esa ley no contempla esta deformación transversal. Por otra parte, esa expresión se ha deducido para un estado de tensiones muy particular como es el estado uniaxial característico del ensayo de tracción. Sin embargo, en el comportamiento de estructuras reales lo habitual es encontrarse con que las cargas aplicadas son bastante más complicadas que las del ensayo de tracción, dando lugar a estados tensionales también más complejos que el considerado en tracción simple. El caso más general que, al menos

teóricamente, podría presentarse sería el estado triaxial de tensiones representado en la fig. 2.5.

Partiendo de la ley de Hooke tal como ha sido formulada en el ensayo de tracción, se hace necesario dar un nuevo paso: tratar de establecer una relación entre las componentes de tensión de este estado general de tensiones y las correspondientes componentes de deformación.

Una generalización lógica de la ley de Hooke, debida a Cauchy, consiste en suponer que en cada punto del cuerpo cada una de las componentes de tensión es una función lineal de las componentes de la matriz de deformaciones. La ley resultante se conoce con el nombre de **ley de Hooke generalizada** y, para un estado isoterma, se expresa matemáticamente en la forma:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{14}\varepsilon_{xy} + C_{15}\varepsilon_{xz} + C_{16}\varepsilon_{yz} \\
 \sigma_{yy} &= C_{21}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{23}\varepsilon_{zz} + C_{24}\varepsilon_{xy} + C_{25}\varepsilon_{xz} + C_{26}\varepsilon_{yz} \\
 \tau_{yz} &= C_{61}\varepsilon_{xx} + C_{62}\varepsilon_{yy} + C_{63}\varepsilon_{zz} + C_{64}\varepsilon_{xy} + C_{65}\varepsilon_{xz} + C_{66}\varepsilon_{yz}
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

y en formulación matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}
 \tag{4.32}$$

o, en notación compacta:

$$\{\sigma\} = [C_{ij}]\{\varepsilon\}
 \tag{4.33}$$

Esta generalización es válida para pequeñas deformaciones, y en ella los coeficientes de la matriz C_{ij} se denominan **coeficientes elásticos o módulos elásticos** del

material. En general no son constantes, sino que pueden ser función de la posición y de la temperatura (decreciendo ordinariamente con ésta).

Se demostrará, a continuación, que los 36 coeficientes de la matriz $[C_{ij}]$ no son independientes. En efecto, de acuerdo con (4.18):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{xx}} = C_{11}\epsilon_{xx} + C_{12}\epsilon_{yy} + C_{13}\epsilon_{zz} + C_{14}\epsilon_{xy} + C_{15}\epsilon_{xz} + C_{16}\epsilon_{yz} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{yy}} = C_{21}\epsilon_{xx} + C_{22}\epsilon_{yy} + C_{23}\epsilon_{zz} + C_{24}\epsilon_{xy} + C_{25}\epsilon_{xz} + C_{26}\epsilon_{yz} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}} = C_{61}\epsilon_{xx} + C_{62}\epsilon_{yy} + C_{63}\epsilon_{zz} + C_{64}\epsilon_{xy} + C_{65}\epsilon_{xz} + C_{66}\epsilon_{yz}$$

donde pueden establecerse las siguientes igualdades de derivadas cruzadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_0}{\partial \epsilon_{xx} \partial \epsilon_{yy}} = C_{12} &= \frac{\partial^2 U_0}{\partial \epsilon_{yy} \partial \epsilon_{xx}} = C_{21} \\ \frac{\partial^2 U_0}{\partial \epsilon_{xx} \partial \epsilon_{yz}} = C_{16} &= \frac{\partial^2 U_0}{\partial \epsilon_{yz} \partial \epsilon_{xx}} = C_{61} \end{aligned} \quad (4.35)$$

es decir, se concluye que la matriz de coeficientes elásticos es simétrica y, por consiguiente, solamente hay 21 coeficientes independientes. En otras palabras, el número máximo de coeficientes elásticos que caracterizan un material elástico lineal es 21. En este caso se dice que el material es **anisótropo**. Se verá que ese número se reduce cuando el material posee, además, ciertas propiedades de simetría.

La integración de las ecuaciones (4.34) proporciona la expresión general de la energía de deformación por unidad de volumen para un material anisótropo:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2} [C_{11}\epsilon_{xx}^2 + C_{12}\epsilon_{yy}\epsilon_{xx} + C_{13}\epsilon_{zz}\epsilon_{xx} + \dots + C_{16}\epsilon_{yz}\epsilon_{xx} + \\ &+ C_{12}\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + C_{22}\epsilon_{yy}^2 + C_{23}\epsilon_{zz}\epsilon_{yy} + \dots + C_{26}\epsilon_{yz}\epsilon_{yy} + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ C_{16}\epsilon_{xx}\epsilon_{yz} + C_{26}\epsilon_{yy}\epsilon_{yz} + C_{36}\epsilon_{zz}\epsilon_{yz} + \dots + C_{66}\epsilon_{yz}^2] \end{aligned} \quad (4.36)$$

También puede llegarse a la misma formulación general desarrollando la función U_0 en serie de potencias de las deformaciones. Con objeto de simplificar la demostración se recurrirá a la notación indicial. En notación indicial (convenio de la suma), U_0 se puede expresar como:

$$U_0 = A + B_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C_{klmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \varphi(\varepsilon^3) \quad (4.37)$$

donde $\varphi(\varepsilon^3)$ indica que el error de considerar sólo los tres primeros términos es del orden de ε^3 .

Admitida la existencia de un *estado natural* del cuerpo, estado que se caracteriza porque en él son nulos los estados de tensiones y deformaciones, así como la energía de deformación, entonces se deduce que $A = 0$. Por otra parte, teniendo en cuenta (4.18) y que para deformación nula también se verifica $\sigma_{ij} = 0$, se deduce que $B_{ij} = 0$.

Luego, según (4.37), y despreciando para pequeñas deformaciones los términos de tercer orden o superior, queda definitivamente para U_0 la expresión cuadrática:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_{klmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \quad (4.38)$$

que, en forma desarrollada, es la ecuación (4.36).

4.5. CUERPOS ELÁSTICOS ISÓTROPOS: RELACIONES TENSIÓN-DEFORMACIÓN. ECUACIONES DE LAMÉ

Si el material posee determinadas simetrías en sus propiedades elásticas, el número de constantes elásticas independientes disminuye. Por ejemplo, si presenta simetría con respecto a un plano, el número se reduce a 13, y si existe simetría con respecto a tres planos mutuamente perpendiculares, sólo 9 constantes resultan independientes. Los materiales que poseen esta propiedad se denominan *materiales ortótropos*. Por último, aquellos materiales en los que las propiedades elásticas son independientes de la dirección considerada se denominan *materiales isótropos*, y en ellos el número de constantes se reduce a 2.

La condición de isotropía exige que las constantes elásticas sean invariantes ante cualquier rotación del sistema de referencia. Es decir, la matriz $[C_{ij}]$ debe tener las mismas componentes sea cual sea el sistema de referencia. Precisamente basándose en esta invarianza de las relaciones entre tensiones y deformaciones, se puede demostrar fácilmente que para definir los materiales isótropos bastan dos constantes elásticas. Esta demostración se simplifica cuando se utiliza como sistema de referencia el definido por las direcciones principales de deformación. De acuerdo con (4.38), la expresión de U_0 en este sistema vendrá dada por:

$$U_0 = \frac{1}{2} [C_{11}\varepsilon_1^2 + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2C_{13}\varepsilon_1\varepsilon_3 + C_{22}\varepsilon_2^2 + 2C_{23}\varepsilon_2\varepsilon_3 + C_{33}\varepsilon_3^2] \quad (4.39)$$

Al ser el material isótropo, las constantes elásticas que aparecen en esta expresión son las mismas para todas las direcciones. La denominación de los ejes principales es por eso arbitraria, y resultará: $C_{11} = C_{22} = C_{33} \equiv C_1$ y $C_{12} = C_{23} = C_{13} \equiv C_2$. Estas relaciones se pueden demostrar fácilmente haciendo permutación de ejes. La ecuación (4.39) contiene por tanto sólo dos coeficientes diferentes, y se puede expresar en la forma alternativa:

$$U_0 = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + G (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \quad (4.40)$$

donde:

$$\lambda = C_2, \quad G = \frac{C_1 - C_2}{2} \quad (4.41)$$

son los llamados **coeficientes elásticos de Lamé**. Si el material es homogéneo y la temperatura uniforme, ambos son constantes en todos los puntos. Usando (3.26), la ecuación (4.40) puede expresarse también en función de los invariantes de deformaciones:

$$U_0 = \left(\frac{1}{2} \lambda + G \right) J_1^2 - 2GJ_2 = \frac{1}{2} J_1^2 + G(J_1^2 - 2J_2) \quad (4.42)$$

Introduciendo las definiciones de los dos primeros invariantes J_1 y J_2 en términos de las componentes de deformación referidas a un sistema arbitrario xyz , se obtiene:

$$U_0 = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + G (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2) \quad (4.43)$$

En términos de la dilatación cúbica unitaria e (cfr. (3.28)), y haciendo uso de (4.18), resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda e + 2G\varepsilon_{xx} & \tau_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= \lambda e + 2G\varepsilon_{yy} & \tau_{xz} &= 2G\varepsilon_{xz} \\ \sigma_{zz} &= \lambda e + 2G\varepsilon_{zz} & \tau_{yz} &= 2G\varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (4.44)$$

que constituye una de las posibles formulaciones de la ley de Hooke, para materiales elásticos lineales e isótropos. Esta formulación de tensiones en función de deformaciones se conoce con el nombre de **ecuaciones de Lamé**. En ellas aparecen las dos constantes del mismo nombre.

Es posible también obtener las fórmulas inversas, es decir, las expresiones de las deformaciones en función de las tensiones. Sumando en (4.44) las ecuaciones de σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = I_1 = 3\lambda J_1 + 2GJ_1 \quad (4.45)$$

es decir:

$$I_1 = (3\lambda + 2G)J_1 \quad (4.46)$$

Despejando ε_{xx} en la primera de las ecuaciones (4.44) y teniendo en cuenta (4.46), resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2G} (\sigma_{xx} - \lambda J_1) = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{xx} - \lambda \frac{I_1}{3\lambda + 2G} \right) = \frac{\sigma_{xx} (3\lambda + 2G) - \lambda (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{2G(3\lambda + 2G)} = \\ &= \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \left[\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

o bien:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (4.48)$$

donde:

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad (4.49)$$

son dos coeficientes elásticos, denominados **módulo de Young** (ya introducido anteriormente) y **coeficiente de Poisson**, respectivamente, expresados ambos en función de las **constantes de Lamé** λ y G . Eliminando λ entre ambas ecuaciones se obtiene la siguiente relación entre los restantes coeficientes:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (4.50)$$

Operando de forma análoga se obtendrían ε_{yy} y ε_{zz} , siendo el conjunto final de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{xz} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] & \varepsilon_{yz} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.51)$$

que constituye una nueva formulación de la **Ley de Hooke generalizada**.

De la ley de comportamiento (4.51), o de su equivalente (4.44), se deduce que cuando $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$, entonces $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, y viceversa. Es decir, coinciden las direcciones principales de las matrices de tensión y deformación. Por esta razón, en los materiales isótropos no se hace distinción entre ejes principales de tensión y de deformación. A estos ejes simplemente se los denomina ejes principales.

Finalmente sustituyendo (4.51) en (4.43) se obtiene la expresión de la densidad de energía de deformación en función de las tensiones:

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (4.52)$$

También puede expresarse U_0 en función de tensiones y deformaciones, resultando:

$$U_0 = \frac{1}{2} [\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + 2\tau_{xy}\epsilon_{xy} + 2\tau_{xz}\epsilon_{xz} + 2\tau_{yz}\epsilon_{yz}] \quad (4.53)$$

de la que se hará utilización más adelante.

4.6. DEFORMACIONES Y TENSIONES DE ORIGEN TÉRMICO

Se ha supuesto hasta ahora que la temperatura se mantiene constante durante la deformación y no influye por esta razón en las relaciones constitutivas. En este apartado, se considerará su efecto sobre los estados de deformación y tensión a través de las llamadas cargas de origen térmico.

El efecto de la temperatura sobre la deformación unitaria se manifiesta de dos formas: primero, modificando los valores de las constantes elásticas; y segundo, produciendo directamente una deformación unitaria aunque no haya ninguna tensión. El primer efecto es pequeño para cambios de temperatura de unos pocos cientos de grados centígrados y no se debe tener en cuenta. El segundo efecto se llama **deformación unitaria térmica** y se representará por ϵ^t . Para un material isótropo, por razones de simetría, se demuestra que la deformación unitaria térmica debe ser una expansión pura o una contracción pura, sin que aparezcan componentes cortantes respecto a ningún sistema de ejes, y que puede expresarse linealmente en función de la variación de temperatura ΔT , siempre que ésta no sea excesivamente grande. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^t &= \epsilon_{yy}^t = \epsilon_{zz}^t = \alpha \cdot \Delta T \\ \epsilon_{xy}^t &= \epsilon_{xz}^t = \epsilon_{yz}^t = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde α es una característica física del material, que se denomina **coeficiente de dilatación lineal**.

Y así, para un modelo unidimensional, como es el caso de una barra de longitud L (orientada en x) sometida a un incremento de temperatura ΔT , el alargamiento unitario debido a esta carga térmica será:

$$\varepsilon'_{xx} = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T \quad (4.55)$$

y, por tanto, su aumento de longitud:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T \quad (4.56)$$

La deformación unitaria total en un punto de un cuerpo elástico es la suma de la debida a la tensión más la debida a la temperatura, es decir [cfr. (4.51) y (4.54)]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T & \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T & \varepsilon_{xz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha \Delta T & \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Volviendo al modelo unidimensional que se estaba considerando, si la barra puede deformarse libremente, es evidente que no quedará sometida a tensión alguna. En este caso, a una variación de temperatura corresponderá exclusivamente el cambio de longitud expresado en (4.56). Pero si la libre dilatación está restringida, se originará en la barra una tensión normal σ_{xx} que contrarrestará la deformación de origen térmico, siendo en este caso la deformación total [cfr. (4.57)]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha \cdot \Delta T \quad (4.58)$$

Y si la condición de contorno es tal que $\varepsilon_{xx}=0$, se producirá una tensión:

$$\sigma_{xx} = -E \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (4.59)$$

Tensiones de este tipo, originadas como consecuencia de la restricción a la libre dilatación en un cuerpo que está sometido a una variación de temperatura, se llaman **tensiones termoelásticas**.

4.7. CONSTANTES ELÁSTICAS

El comportamiento mecánico de un material queda caracterizado por una serie de parámetros o constantes elásticas, algunas de las cuales aparecen, como se ha visto anteriormente, en las ecuaciones constitutivas que relacionan las componentes de tensión con las componentes de deformación.

De algunas de las constantes elásticas existe una interpretación física sencilla, basada en los resultados experimentales obtenidos en los ensayos más simples.

4.7.1. Ensayo de Tracción

En el ensayo de tracción, representado esquemáticamente en la fig. 4.9, en un plano perpendicular al eje x de la barra la única componente de tensión distinta de cero es la tensión σ_{xx} paralela a dicho eje. Esta dirección es principal, al igual que dos direcciones cualesquiera perpendiculares a ella. Teniendo en cuenta (4.51), resulta que las únicas deformaciones que se producen son:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} ; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (4.60)$$

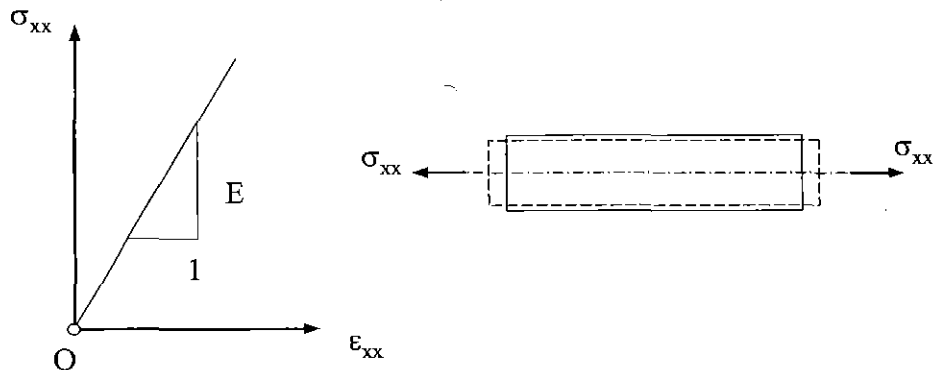


Figura 4.9. Ensayo de tracción

A partir de las formulaciones (4.60) sería posible obtener las constantes E y ν .

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} ; \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \quad (4.61)$$

El sentido físico impone que debe producirse un alargamiento en la dirección de tracción y un acortamiento en las direcciones transversales. De ello se deduce que $E > 0$ y $\nu > 0$.

El módulo de elasticidad E , que tiene unidades de tensión, es relativamente grande para materiales que son bastante rígidos, como son los metales estructurales. Por ejemplo, el del acero es del orden de 200 GPa y el del aluminio 70 GPa. Materiales más flexibles tienen módulos de elasticidad menores. Para muchos materiales, el valor de E en compresión es el mismo que en tracción.

En cuanto al coeficiente de Poisson, en la mayoría de los metales (aceros, etc.) su valor varía entre 0,25 y 0,3. Para el aluminio y el cobre, alcanza valores ligeramente superiores.

4.7.2. Cortadura pura

En un ensayo de torsión (se verá en un tema posterior), se puede originar el llamado estado de cortadura o cizalladura pura. En el estado de cortadura de la fig. 4.10, la única componente de tensión distinta de cero es $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Sustituyendo en (4.51), la única componente no nula de deformación es:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \quad (4.62)$$

De esta expresión puede obtenerse el valor de G , que se denomina **módulo de elasticidad transversal o módulo de rigidez cortante**:

$$G = \frac{\tau_{xy}}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} \quad (4.63)$$

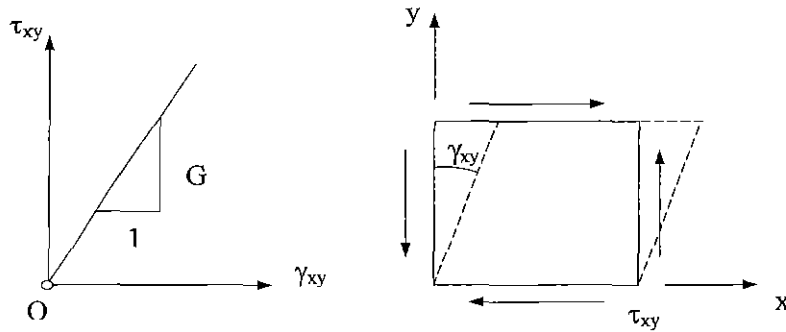


Figura 4.10. Ensayo de cortadura pura

Al igual que E , este coeficiente también tiene unidades de tensión. El del acero es del orden de 80 GPa y el del aluminio 30 GPa.

4.7.3. Estado hidrostático de tensiones

En el estado de compresión hidrostática representado en la fig. 4.11:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= -p \\ \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

y las deformaciones que no se anulan son:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{(1-2\nu)}{E} p \quad (4.65)$$

En este caso, la variación unitaria de volumen resulta:

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = -\frac{3(1-2\nu)}{E} p \quad (4.66)$$

o bien:

$$e = -\frac{p}{K} \quad (4.67)$$

donde:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.68)$$

es un coeficiente más del material al que se denomina **módulo de compresibilidad o módulo de elasticidad volumétrica**.

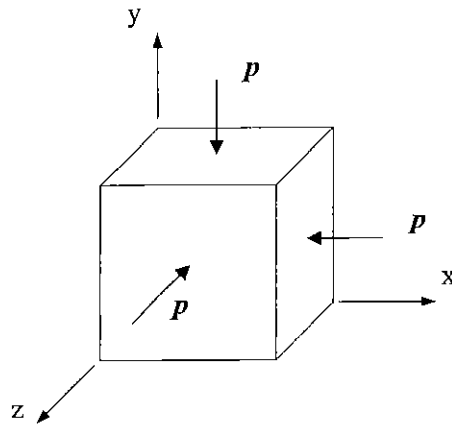


Figura 4.11. Estado hidrostático de compresión

Como físicamente es imposible que aumente el volumen ante un estado de compresión hidrostática, necesariamente $K > 0$, y dado que $E > 0$ se concluye que:

$$\nu \leq 0,5 \tag{4.69}$$

Según se deduce de (4.66), el valor de la dilatación cúbica e será tanto menor cuanto más se aproxime ν al valor límite 0,5. Cuando $\nu = 0,5$ K se hace infinito, lo que corresponde a un material rígido cuyo volumen no cambia. El caucho tiene un coeficiente de Poisson próximo a este valor límite. En el otro extremo, entre los materiales con valores extremadamente bajos del módulo de Poisson se encuentra el corcho, para el cual ν es muy próximo a cero. El del hormigón oscila entre 0,1 y 0,2.

4.8. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

En la Teoría Lineal de la Elasticidad puede aplicarse el principio de superposición, que expresa que el estado de equilibrio debido a varias acciones exteriores es igual a la superposición de las soluciones que corresponden a cada acción exterior actuando independientemente.

Supóngase un cuerpo elástico al que se aplican fuerzas de superficie \bar{T}_n y fuerzas de volumen $\bar{\Phi}$, y sea $[T_{ij}]$ la matriz de tensiones originada en un punto del mismo como consecuencia de la aplicación de estas fuerzas. Y supóngase también el mismo cuerpo elástico descargado al que se aplican otras fuerzas de superficie \bar{T}'_n y otras de volumen $\bar{\Phi}'$, a las que corresponde la matriz de tensiones $[T'_{ij}]$ en ese mismo punto del cuerpo.

El principio de superposición permite afirmar que si se considera que al cuerpo elástico se le aplican simultáneamente los dos sistemas de fuerzas, $(\bar{T}_n + \bar{T}'_n)$ y $(\bar{\Phi} + \bar{\Phi}')$, la matriz de tensiones representativa del estado tensional en el punto que se está considerando será $[T_{ij} + T'_{ij}]$. Es decir, *las tensiones debidas a la acción simultánea de dos sistemas de fuerzas se obtienen sumando las correspondientes a las acciones aisladas de cada uno de ellos. Lo mismo puede afirmarse del estado de deformación.* Una consecuencia inmediata es que el estado final del cuerpo no depende del orden en que se aplican las fuerzas.

Es evidente que para que este principio sea válido las tensiones en el estado superpuesto resultante tienen que verificar las ecuaciones de equilibrio interno, las ecuaciones de equilibrio en el contorno y las ecuaciones de compatibilidad expresadas en términos de tensiones.

Por ejemplo, se va a hacer esta comprobación con la primera de las ecuaciones de equilibrio interno (2.30). Para cada sistema de fuerzas actuando independientemente se verificará:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \Phi_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + \Phi'_x &= 0 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Sumando miembro a miembro:

$$\frac{\partial (\sigma_{xx} + \sigma'_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{xy} + \tau'_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{xz} + \tau'_{xz})}{\partial z} + (\Phi_x + \Phi'_x) = 0 \tag{4.71}$$

que no es sino la primera ecuación de equilibrio interno para el estado final.

Comprobaciones análogas se pueden hacer con las demás ecuaciones. Por ejemplo, la segunda de las ecuaciones (2.24) de equilibrio en el contorno en cada uno de los sistemas de fuerzas proporciona:

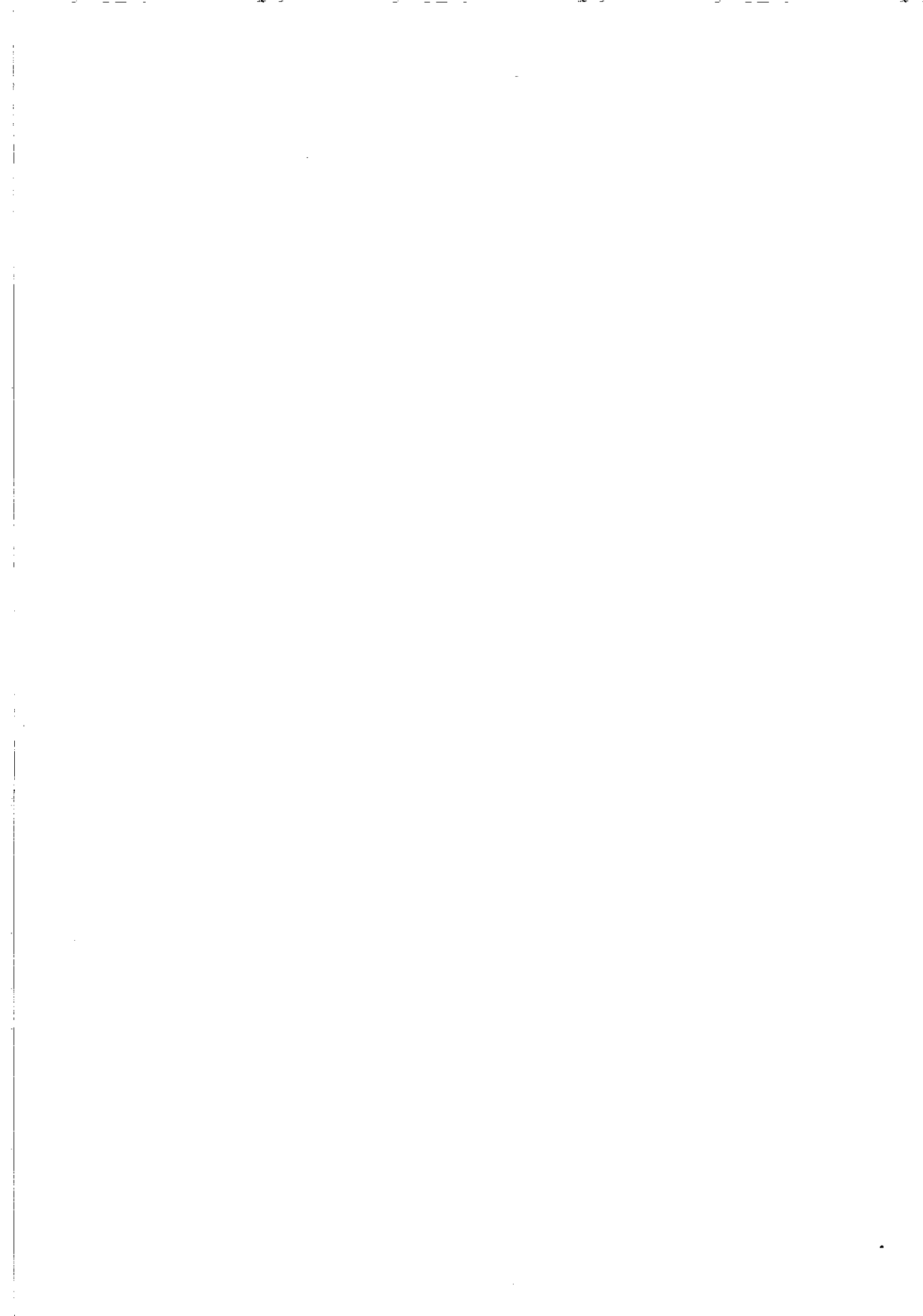
$$\begin{aligned} T_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z \\ T'_{ny} &= \tau'_{xy} n_x + \sigma'_{yy} n_y + \tau'_{yz} n_z \end{aligned} \quad (4.72)$$

de las que se obtiene, sumando miembro a miembro:

$$(T_{ny} + T'_{ny}) = (\tau_{xy} + \tau'_{xy}) n_x + (\sigma_{yy} + \sigma'_{yy}) n_y + (\tau_{yz} + \tau'_{yz}) n_z \quad (4.73)$$

que es la condición de equilibrio en el contorno para el sistema resultante.

Como se observa, *el principio de superposición descansa en el carácter lineal de las ecuaciones que gobiernan el problema*. No se verificará en una teoría no lineal (por ejemplo, cuando las deformaciones dejen de ser infinitesimales). Incluso en la teoría lineal, no se podrá admitir dicho principio cuando los cambios de posición y forma del cuerpo tras aplicar el primer sistema de fuerzas haya que tenerlos en cuenta al aplicar el segundo sistema.





PROBLEMAS

4.1. Una barra de sección rectangular $a \times b = 100 \times 50 \text{ mm}^2$ y longitud $L = 2 \text{ m}$ sometida a una tracción $F = 500 \text{ KN}$ experimenta un alargamiento $\Delta L = 1 \text{ mm}$ y una contracción lateral $\Delta b = -0,007 \text{ mm}$. Se pide:

- 1º) El módulo de elasticidad longitudinal de la barra.
- 2º) Valor del coeficiente de Poisson.
- 3º) La variación de la dimensión de lado $a = 100 \text{ mm}$ de la sección recta.
- 4º) Dimensiones de la sección recta si la barra se somete a una tracción de 400 KN .

4.2. Una placa rectangular $a \times b = 50 \times 25 \text{ cm}^2$ de espesor constante, sometida a un sistema exterior de fuerzas, presenta un estado tensional con las siguientes tensiones principales en todos sus puntos:

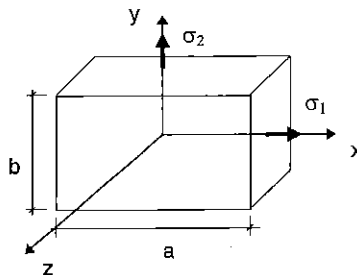
$$\sigma_1 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

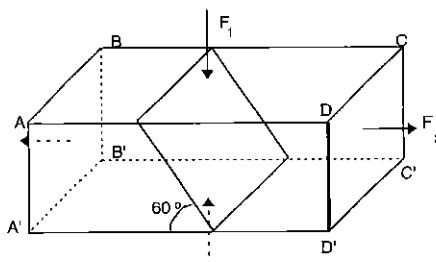
Las direcciones principales son las perpendiculares a los lados de la placa. Conocido el módulo de elasticidad $E = 200 \text{ GPa}$ y el coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, calcular:

- 1º) Variación del área de la placa.
- 2º) Deformación unitaria del espesor.



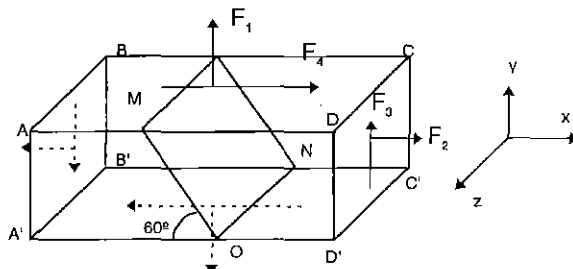
4.3. Sobre el prisma recto de la figura actúan las fuerzas $F_1 = 100 \text{ KN}$ y $F_2 = 20 \text{ KN}$ uniformemente repartidas sobre las caras indicadas. Las longitudes de las aristas del prisma son $AB = 4 \text{ cm}$, $AD = 10/3 \text{ cm}$ y $AA' = 2 \text{ cm}$. Sabiendo que el prisma es de acero ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,25$), calcular:

- 1º) Componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente al plano inclinado 60° que se indica en la figura.
- 2º) Alargamientos principales unitarios.



4.4. Sobre el prisma recto de la figura actúan las fuerzas normales $F_1 = 100$ KN, $F_2 = 20$ KN y las fuerzas de rozamiento $F_3 = 60$ KN y $F_4 = 300$ KN, uniformemente repartidas sobre las caras indicadas. Las longitudes de las aristas del prisma son $AB = 4$ cm, $AD = 10$ cm y $AA' = 2$ cm. Sabiendo que el prisma es de acero ($E = 200$ GPa, $\nu = 0,25$), calcular:

- 1º) Apoyándose en el círculo de Mohr, tensiones principales y dirección correspondiente a la máxima tensión principal de tracción.
- 2º) Deformaciones principales.
- 3º) Deformación angular de los lados perpendiculares OM y ON contenidos en el plano inclinado 60° de la figura.
- 4º) Deformación angular de los lados AA' y AD .



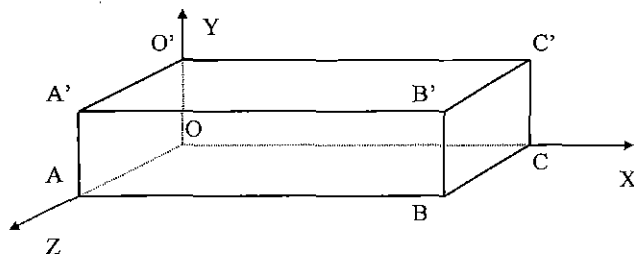
4.5. El paralelepípedo de la figura tiene de longitudes de las aristas: $OC=18$ cm; $OA=9$ cm y $OO'=6$ cm. Sobre las caras del paralelepípedo actúan unos campos de tensión:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{xx} = -4 \text{ MPa}; & \sigma_{yy} = 0 \text{ MPa}; & \sigma_{zz} = 1 \text{ MPa}; \\ \tau_{xy} = 4 \text{ MPa}; & \tau_{xz} = 0 \text{ MPa}; & \tau_{yz} = -2 \text{ MPa}; \end{array}$$

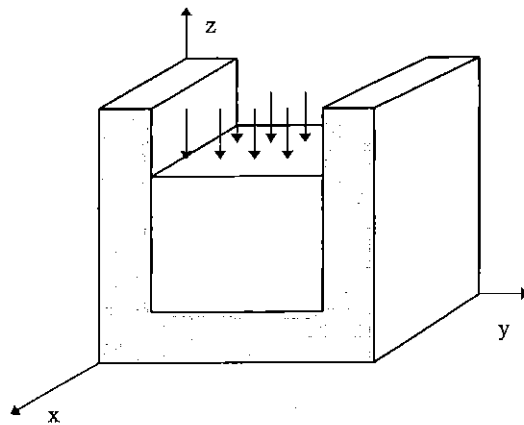
Se pide:

- 1º) Tensiones principales y dirección correspondiente a la máxima tensión principal de tracción.
- 2º) Matriz de deformaciones.
- 3º) Incremento de longitud de la diagonal OB' .

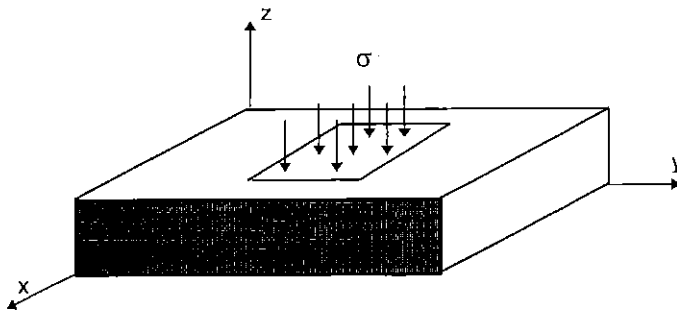
Características del material: $E = 200$ GPa; $\nu = 0,2$



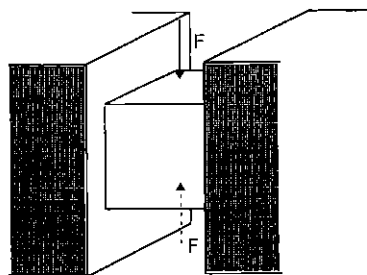
4.6. El cubo de la figura, de material con coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ y encajado en una pieza de material indeformable, se encuentra sometido a una compresión $\sigma_{zz} = 100$ MPa y libre en la dirección x. Determinar la tensión tangencial máxima y el plano en que se produce. El contacto es sin rozamientos.



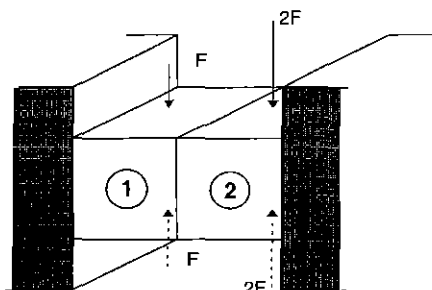
4.7. Un cubo de arista a se encaja en un hueco de paredes rígidas y sobre la cara libre se hace actuar una compresión de valor σ . Calcular las compresiones que las caras del cubo producen sobre las paredes del hueco, así como la deformación unitaria según z . Se desprecian los rozamientos. El material del cubo tiene módulo de elasticidad E y coeficiente de Poisson ν .



4.8. Un cubo de arista unidad, de un material de características E y ν , encaja exactamente en una ranura de paredes rígidas, tal como se indica en la figura. Sobre dos caras opuestas actúan unas fuerzas de compresión F que se suponen uniformemente repartidas en las mismas. Determinar las deformaciones unitarias y tensiones. Se supone el contacto sin rozamiento.



4.9. Dos cubos de arista unidad y material de características E y ν , se apoyan entre sí y encajan en una ranura de paredes rígidas tal como se indica en la figura. Bajo la acción de las fuerzas indicadas, determinar las tensiones y las deformaciones unitarias. El contacto es sin rozamiento.

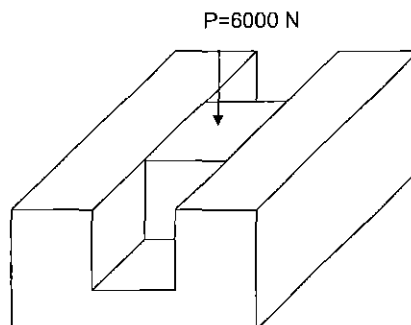


4.10. Un cubo de aluminio de 1 cm de lado está encajado sin huelgo ninguno en una ranura de 1 cm de ancho, de una losa de acero. Suponiendo que la losa es rígida, se desea:

- 1º) Descenso de la cara superior del cubo por la aplicación de una carga P uniformemente distribuida de 6 kN.
- 2º) Calcular ese descenso en el caso de que la ranura tuviera 1,1 cm de ancho y el cubo quedara con un huelgo de 0,5 mm a cada lado.

Se desprecian los rozamientos. Las características mecánicas del material del cubo son:

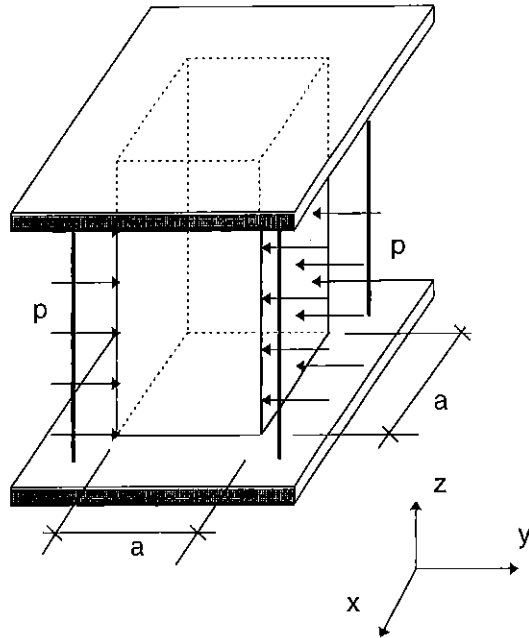
$$E = 70 \text{ GPa}; \quad \nu = 1/3.$$

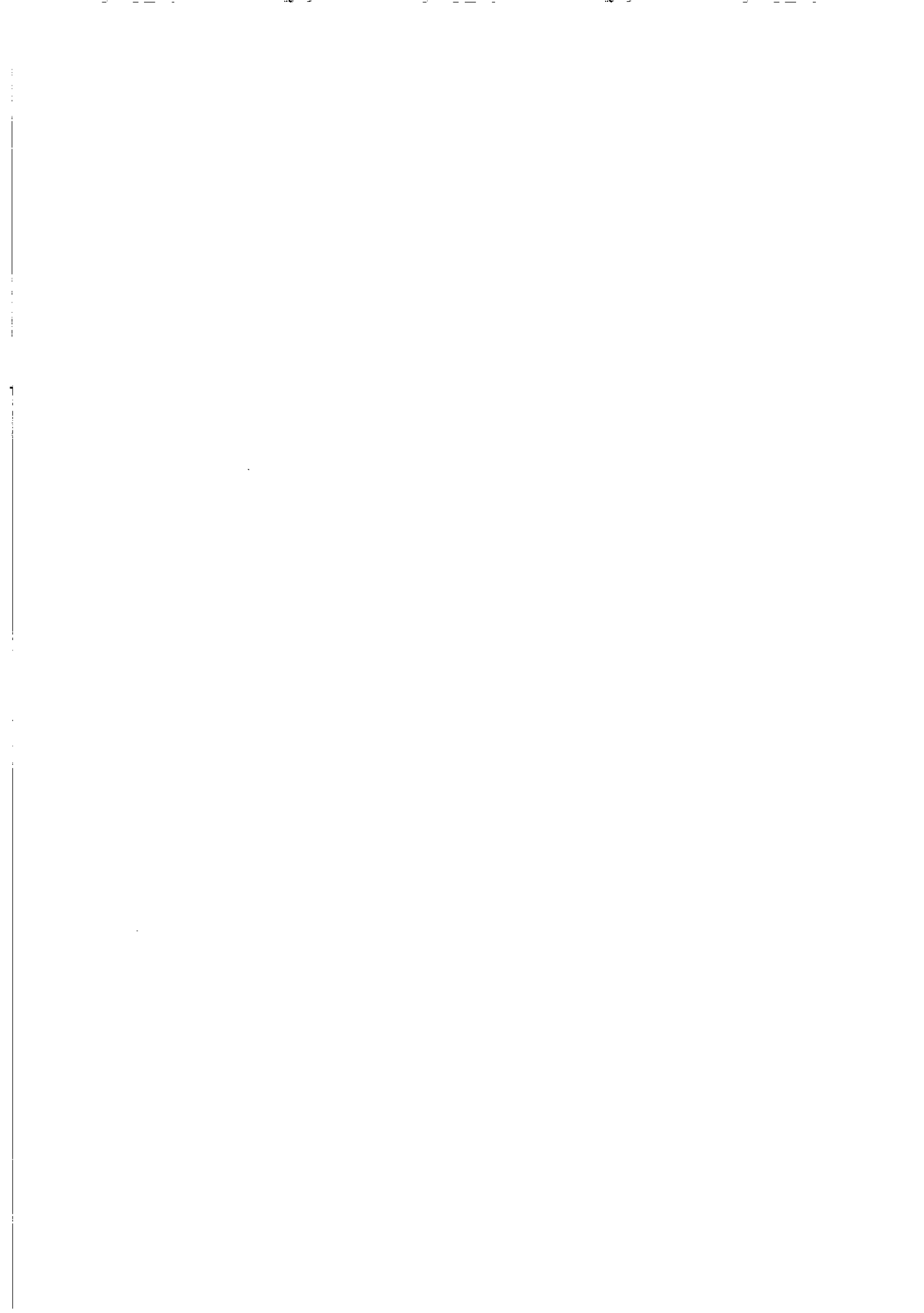


4.11. Se considera un prisma cuadrangular regular cuyo material tiene un módulo de elasticidad $E = 28 \text{ GPa}$, y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,1$. La longitud del lado de la sección recta es $a = 20 \text{ cm}$. En ambas bases del prisma se colocan dos placas perfectamente lisas y rígidas, de peso despreciable, unidas entre sí mediante cuatro cables de sección $A_1 = 1 \text{ cm}^2$ y módulo de elasticidad $E_1 = 200 \text{ GPa}$, de longitudes iguales a la altura del prisma $L = 1 \text{ m}$, simétricamente dispuestos, tal como se indica en la figura.

Sobre dos caras laterales opuestas del prisma se aplica una fuerza de compresión uniforme $p = 75 \text{ MPa}$. Calcular:

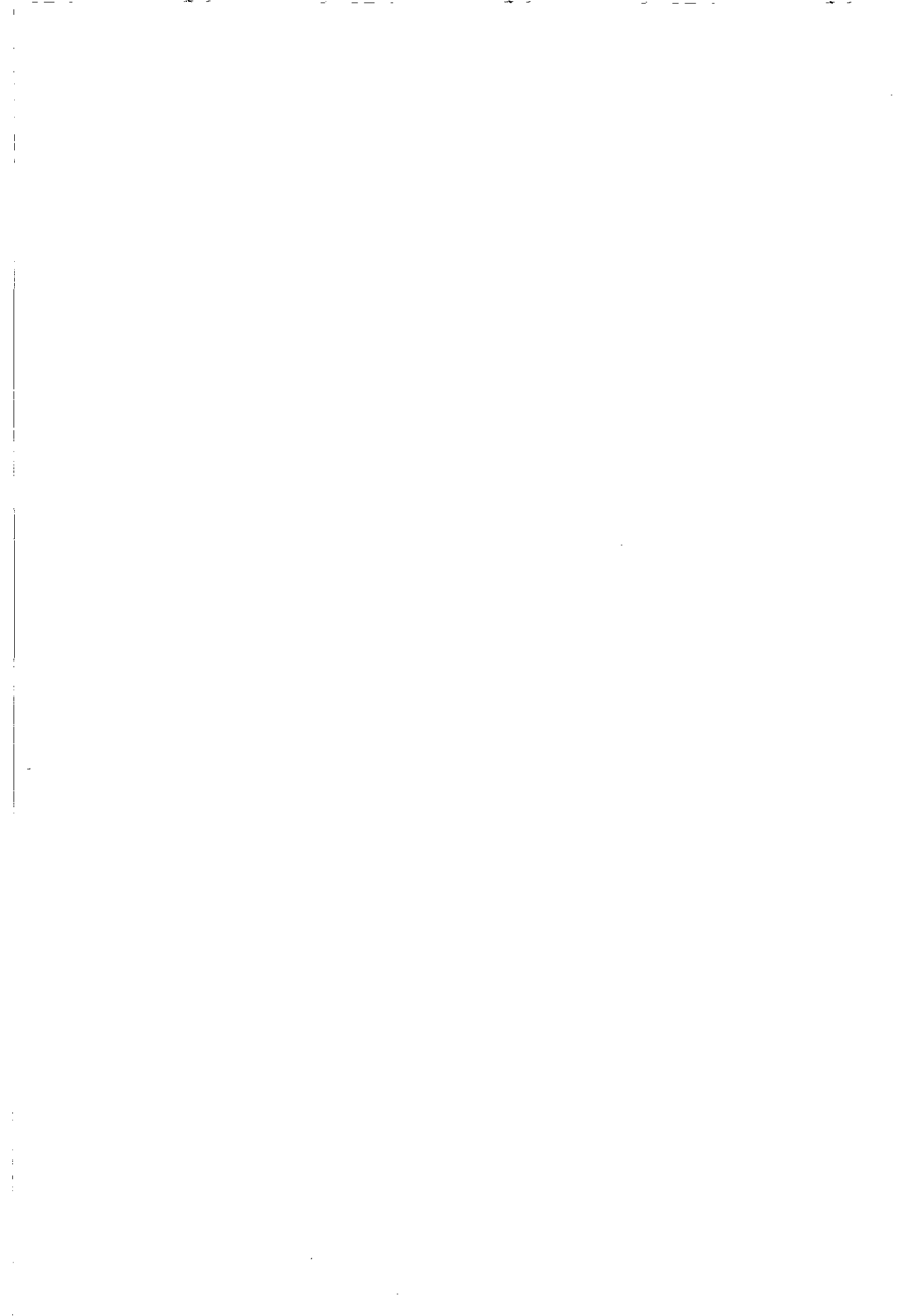
- 1º) Tensión en los cables.
- 2º) Tensiones principales en el prisma.
- 3º) Variación de volumen experimentada por el prisma.





TEMA 5

EL PROBLEMA ELÁSTICO



5.1. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA. POSIBLES FORMULACIONES

En capítulos precedentes se ha considerado que un cuerpo elástico sometido a un sistema de cargas exteriores, se deforma de tal modo que se originan en él tensiones que verifican las *ecuaciones de equilibrio interno*:

$$\sigma_{ij,j} + \Phi_i = 0 \quad (5.1)$$

donde Φ_i representa las fuerzas de volumen por unidad de volumen que actúan sobre el cuerpo¹. La relación existente entre las tensiones y las deformaciones viene expresada, para un material isótropo, por medio de la *ley de Hooke generalizada*:

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (5.2)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker (1, si $i=j$; 0, si $i \neq j$), λ y G son las constantes de Lamé, y e representa la dilatación cúbica o cambio de volumen unitario. Los *desplazamientos y las deformaciones unitarias se relacionan* a su vez por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.3)$$

Además, en los puntos de la superficie las tensiones deben cumplir las *condiciones de equilibrio en el contorno*:

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad (5.4)$$

donde n_j son los cosenos directores del vector unitario normal \bar{n} a la superficie S , y T_i representa las fuerzas de superficie.

Finalmente, las deformaciones deben satisfacer las *ecuaciones de compatibilidad*,

¹ En este apartado de recapitulación se adoptará por brevedad la notación indicial, en donde un índice repetido (j en $\sigma_{ij,j}$) indica sumación (desde $j=1$ hasta 3) y una coma seguida de un índice ($,j$) denota derivación. Así pues, la primera ecuación escalar de (5.1) sería:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} - \Phi_1 = 0$$

cuya formulación indicial es:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (5.5)$$

Se puede demostrar que el sistema de ecuaciones (5.1) a (5.4) es un sistema completo, en el sentido de que existe una solución del sistema, y que esta solución es única. Es el denominado **teorema de unicidad de Kirchhoff**.

El planteamiento anterior corresponde a un análisis estático. Si se incluyen consideraciones dinámicas, deberán sustituirse las ecuaciones de equilibrio (5.1) por las ecuaciones del movimiento:

$$\sigma_{ij,j} + \Phi_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5.6a)$$

siendo ρ la densidad del medio. En este caso, el desplazamiento u_i de un punto material será función no solamente de la posición que ocupaba en la configuración inicial, sino también del tiempo. En general, en el estudio de medios en movimiento, basta incluir dentro de las fuerzas de volumen Φ_i , las fuerzas de inercia por unidad de volumen y considerar entonces que tanto las fuerzas de volumen (incluidas las de inercia) como las de superficie, son función de la posición y del tiempo:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \tilde{\Phi}_i &= 0 \\ \tilde{\Phi}_i &\equiv \Phi_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.6b)$$

5.1.1. Condiciones de Contorno

Los problemas elásticos suelen clasificarse en función de cómo sean las condiciones de contorno. Así pueden establecerse los siguientes tipos de problemas:

1) *Problema de primera clase*, en el que se conocen las fuerzas exteriores que actúan sobre la superficie o contorno.

2) *Problema de segunda clase*, en el que se conocen los desplazamientos en el contorno.

3) *Problema mixto*, en el que se imponen fuerzas exteriores sobre una parte de la superficie y desplazamientos sobre el resto.

En los problemas dinámicos deberán especificarse, además, un conjunto de condiciones iniciales para u_i y σ_{ij} , tanto en el interior como en el contorno.

5.1.2. Formulación en Desplazamientos: Ecuaciones de Navier

De lo expuesto hasta el momento, se intuye que uno de los aspectos claves para abordar un problema de Elasticidad es elegir el conjunto de incógnitas básicas más adecuado para su resolución. A continuación, se mencionarán muy sucintamente los dos procedimientos más clásicos de la teoría matemática de la Elasticidad. Sin pérdida de generalidad se considerarán las ecuaciones que resultan en el problema estático.

El primer procedimiento es plantear el problema elástico en términos de los desplazamientos. Las ecuaciones de compatibilidad (5.5) se cumplen entonces automáticamente y sólo habrá que imponer las condiciones de equilibrio en el contorno.

Si en el sistema de ecuaciones (5.1) a (5.3), se eliminan las tensiones σ_{ij} , es posible obtener una *formulación compacta en función de los desplazamientos u_i* . Las ecuaciones resultantes, conocidas con el nombre de **ecuaciones de Navier**, son las siguientes:

$$\begin{aligned} G \cdot \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + \Phi_x &= 0 \\ G \cdot \nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + \Phi_y &= 0 \\ G \cdot \nabla^2 w + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + \Phi_z &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

o bien, en notación indicial:

$$G \cdot \nabla^2 u_i + (\lambda + G) e_{,i} + \Phi_i = 0 \tag{5.8}$$

siendo ∇^2 el operador de Laplace:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.9)$$

y e el cambio unitario de volumen que, de acuerdo con (3.13) y (3.26), puede expresarse como:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.10)$$

Al integrar estas ecuaciones, aparecen unas constantes de integración que se determinan ajustando las condiciones de contorno del problema. Conocido el campo de desplazamientos u_i , las ecuaciones (5.2) y (5.3) permiten obtener las deformaciones unitarias y las tensiones, respectivamente.

Es evidente que este planteamiento resulta particularmente adecuado para problemas de segunda clase, en donde las condiciones de contorno se refieren únicamente a desplazamientos impuestos sobre el mismo.

5.1.3. Formulación en Tensiones: Ecuaciones de Beltrami-Michell

Cuando las condiciones de contorno se expresan mediante fuerzas o tensiones impuestas, resulta preferible *plantear el problema en términos de tensiones*. Esta situación se presenta de hecho en numerosas ocasiones.

La clave del procedimiento es formular las ecuaciones de compatibilidad (5.5) en términos de las tensiones. Despejando ε_{ij} en función de σ_{ij} a partir de (5.2), sustituyendo los valores obtenidos en (5.5) y teniendo en cuenta las ecuaciones de equilibrio (5.1), resultan las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \\
 \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \\
 \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \\
 \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} &= -\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \right) \\
 \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial z} &= -\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial x} \right) \\
 \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde ν es el coeficiente de Poisson y s el primer invariante de tensiones, al que en páginas anteriores se ha designado habitualmente por I_1 . Estas ecuaciones se conocen con el nombre de **ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michell**.

Dado un cierto campo de tensiones, el sistema (5.11) permite determinar si ese campo puede ser o no solución de un problema elástico. Para determinar el estado de tensiones, deberá resolverse el sistema de ecuaciones constituido por (5.1) y (5.11), sometido a las condiciones de contorno (5.4).

5.1.4. Métodos de resolución de los problemas elásticos

La resolución de un problema elástico implica, según se ha comentado en otros apartados, resolver un sistema de 15 ecuaciones con 15 funciones incógnitas, debiendo satisfacer la solución las condiciones de contorno especificadas en cada caso. Se acaba de poner de manifiesto cómo la eliminación sistemática de alguna de las variables incógnitas permite reducir el sistema de ecuaciones, bien a un sistema en términos de desplazamientos (ecuaciones de Navier), o bien en términos de tensiones (ecuaciones de compatibilidad de Beltrami y Michell). En ambos casos, las ecuaciones resultantes eran de nuevo lineales.

En la resolución de dichas ecuaciones pueden emplearse diversos métodos, algunos de los cuales dependen, en buena medida, de la intuición, mientras que otros se basan en una aplicación sistemática de las técnicas de la matemática aplicada.

Entre esos métodos cabe citar los siguientes:

a) *Método inverso*: En él se supone una solución que satisface el equilibrio interno y la compatibilidad, y después se trata de adaptarla a las condiciones de contorno del problema.

b) *Método semi-inverso*: Similar al anterior. Se diferencia en que ahora sólo se supone parte de la solución, y se goza así de mayor libertad para adaptarla al problema en cuestión.

c) *Método de los potenciales*: En él se introducen funciones potenciales (de tensión o de deformación) que verifican de modo automático las ecuaciones de equilibrio o de compatibilidad y permiten obtener, por simple derivación, la solución tensional del problema.

e) *Métodos basados en la utilización de variable compleja*: Son similares a los métodos de los potenciales y resultan especialmente apropiados en problemas bidimensionales.

f) *Métodos variacionales*: Se basan en el hecho de que las ecuaciones que gobiernan la Elasticidad pueden obtenerse minimizando la energía total del sistema. De esta forma, el complejo problema de resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales se transforma en uno de minimización de energía.

g) *Métodos numéricos*: El sistema de ecuaciones que gobierna el problema puede resolverse también numéricamente, con ayuda del ordenador. Uno de los métodos más usados es el de los elementos finitos, donde se discretiza el sólido en elementos y se plantea la solución en cada uno de ellos. Después, estas soluciones locales se acoplan para encontrar la solución global del problema.

5.2. ELASTICIDAD PLANA. ESTADO DE DEFORMACIÓN PLANA

Dada la complejidad de las ecuaciones diferenciales en las que finalmente se formula el problema elástico, es fácilmente comprensible que la resolución de problemas tridimensionales sea muy costosa y muy pocos los casos en los que existe una

solución analítica. En consecuencia, se hace necesario simplificar los problemas para posibilitar una resolución matemática más sencilla.

Entre los tipos de problemas más importantes que admiten un análisis simplificado sin pérdida apreciable de precisión, se encuentran los llamados **problemas planos de la Elasticidad**, que dan origen a la llamada **Elasticidad bidimensional o Elasticidad plana**.

Existen dos tipos de problemas bidimensionales físicamente diferenciados, aun cuando den lugar a una formulación matemática similar. Se conocen con el nombre de **problemas de deformación plana** y **problemas de tensión plana**. En lo que resta del capítulo se hará una exposición sucinta de sus principales características.

La hipótesis de **deformación plana** se aplica a cuerpos de gran longitud en una dirección y cuya geometría y carga no varía significativamente en dicha dirección. Es el caso de las presas (fig. 5.1) y muros de contención.

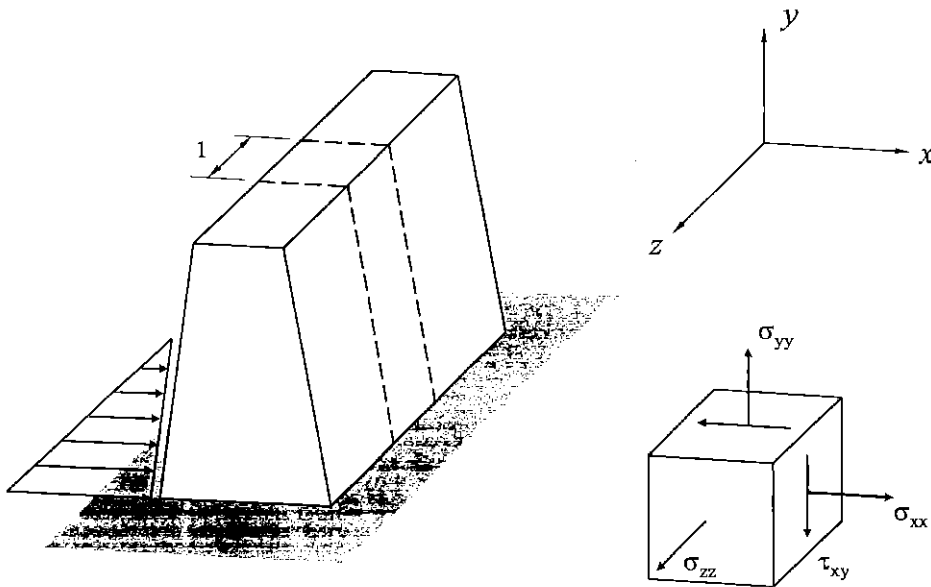


Figura 5.1. Deformación plana

Matemáticamente se define un estado de deformación plana paralela al plano xy cuando las componentes del desplazamiento (u , v , w) verifican las siguientes condiciones:

- a) u y v son independientes de la coordenada z , es decir: $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$.
 b) w es nula: $w=0$.

Si se cumplen estas condiciones, todos los planos paralelos al xy (perpendiculares a la dirección z) experimentarán las mismas deformaciones, y éstas tendrán lugar en los propios planos. Para analizar el problema bastará, por tanto, estudiar uno de dichos planos.

Teniendo en cuenta las relaciones (3.12)-(3.13):

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (5.12)$$

Es decir, la matriz de deformaciones será:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Por otra parte, de la ley de Hooke generalizada (4.50), se concluye que son nulas las componentes τ_{xz} y τ_{yz} de la matriz de tensiones, que se reduce a:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

donde las tensiones σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} no son independientes, ya que:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (5.15)$$

como se deduce de la ley de Hooke aplicada a ε_{zz} . Las tensiones principales serán las soluciones de la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (5.16)$$

o bien:

$$(\sigma_{zz} - \sigma) \cdot \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (5.17)$$

Una de las tensiones principales será, por consiguiente:

$$\sigma_3 = \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (5.18)$$

y las otras dos serán las raíces de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (5.19)$$

es decir:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.20)$$

Como la dirección principal correspondiente a la tensión principal $\sigma_3 = \sigma_{zz}$ es el eje z, las otras dos direcciones principales estarán contenidas en el plano xy.

5.3. ELASTICIDAD PLANA. ESTADO TENSIONAL PLANO. CÍRCULO DE MOHR

Se dice que en un cuerpo se presenta un estado de tensión plana paralelo al plano xy, si son nulas las componentes de tensión:

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (5.21)$$

y se admite la hipótesis de que las restantes componentes son independientes de z , es decir, son funciones exclusivamente de x e y .

La hipótesis de tensión plana es aplicable a cuerpos cuya dimensión en una de las direcciones coordenadas es muy pequeña comparada con las otras dos. Es el caso, por ejemplo, de placas delgadas sometidas a fuerzas paralelas a su plano medio, y el de la flexión en vigas rectas simétricas bajo la acción de cargas contenidas en el plano de simetría (fig. 5.2).

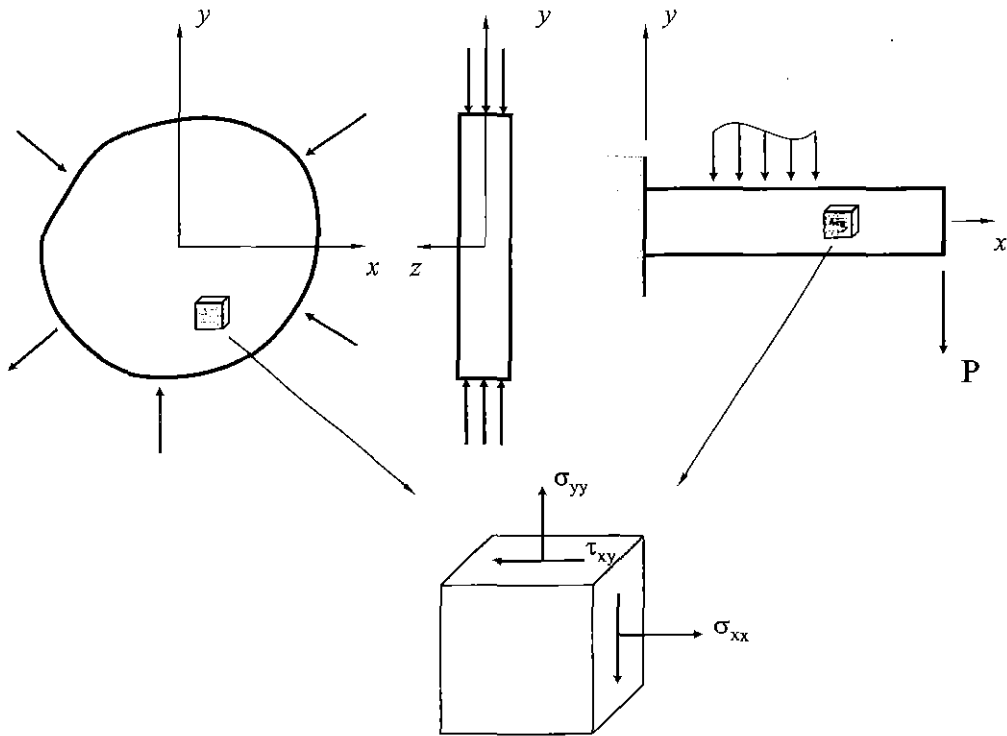


Figura 5.2. Tensión plana

De acuerdo con la definición de estado tensional plano, la matriz de tensiones vendrá dada por:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

y la de deformaciones:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

De la comparación de las expresiones correspondientes a tensión y deformación plana se concluye que los dos no se pueden presentar simultáneamente, excepto en un caso particular: cuando además de tensión plana se verifica que $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy}$.

5.3.1. Tensiones y direcciones principales

De la misma definición de estado tensional plano, se concluye que la dirección del eje z es dirección principal. Las otras dos direcciones principales serán paralelas al plano xy . Las tensiones principales vendrán dadas por las soluciones de la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (5.24)$$

o bien:

$$\sigma \cdot \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (5.25)$$

Una tensión principal es $\sigma_3 = 0$ (asociada a la dirección z), y las otras dos coinciden con los valores (5.20) obtenidos para el caso de deformación plana, es decir:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.26)$$

5.3.2. Componentes intrínsecas del vector tensión

A continuación se calcularán las componentes intrínsecas del vector tensión $\vec{\sigma}_n$ en un punto P , correspondiente a un plano perpendicular al plano xy , cuyo vector unitario normal \vec{n} forme un ángulo φ con la dirección positiva del eje principal 1 (fig. 5.3). Se

supondrán conocidas en ese punto las tensiones y direcciones principales. Se utilizará como sistema de referencia el definido por estas últimas, en el cual la matriz de tensiones en ese punto se puede expresar como:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

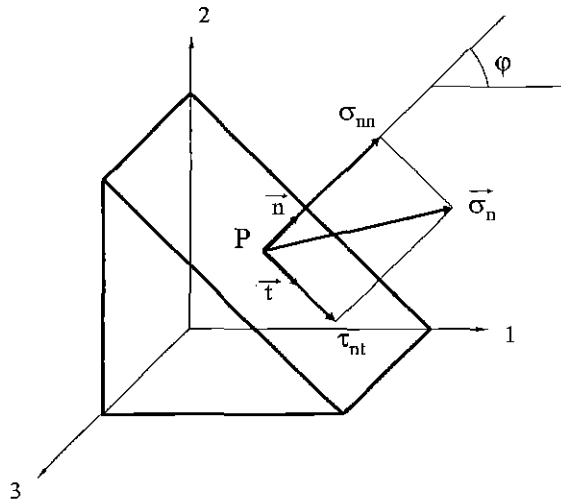


Figura 5.3. Componentes Intrínsecas del vector tensión

Aplicando la fórmula de Cauchy (2.22), se obtiene para el vector tensión:

$$\{\sigma_n\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \text{sen} \varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \varphi \\ \sigma_2 \text{sen} \varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

El valor de la **componente normal** será:

$$\sigma_{nn} = \{\sigma_n\}^T \{n\} = \{\sigma_1 \cos \varphi \quad \sigma_2 \text{sen} \varphi \quad 0\} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \text{sen} \varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \text{sen}^2 \varphi \quad (5.29)$$

La **componente tangencial** al plano se obtendrá proyectando el vector tensión $\vec{\sigma}_n$ sobre el plano, es decir, multiplicando escalarmente $\vec{\sigma}_n$ por un vector unitario \vec{t}

perpendicular a \vec{n} y contenido en el plano xy , cuyo sentido se corresponde con el giro horario de 90° de \vec{n} respecto al interior del sólido (si se mira éste desde el tercer eje positivo, es decir, el eje z):

$$\tau_{nt} = \{\sigma_n\}^T \cdot \{t\} = \{\sigma_1 \cos \varphi \quad \sigma_2 \operatorname{sen} \varphi \quad 0\} \cdot \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \quad (5.30)$$

Teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}; \quad \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \quad (5.31)$$

las ecuaciones (5.29) y (5.30) se convierten en:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi \\ \tau_{nt} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \end{aligned} \quad (5.32)$$

que es la forma habitual de expresar las **componentes intrínsecas** para un vector tensión cualquiera en función de los valores de las tensiones principales en el punto que se está considerando.

5.3.2. Círculo de Mohr

Para este estado de tensión plana cabe preguntarse cuál es *el lugar geométrico de los infinitos vectores tensión definidos por sus componentes intrínsecas*, en una representación gráfica plana en la que se utiliza un sistema de coordenadas σ_{nn} para abscisas y τ_{nt} para ordenadas.

Para su obtención basta con eliminar el ángulo φ de las ecuaciones (5.32). Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumando miembro a miembro, resulta:

$$\left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_{nt}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (5.33)$$

expresión que referida a ese sistema de ejes σ_{nn} y τ_{nt} representa la ecuación de una circunferencia de centro $C \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$ y radio $r = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|$. A esta circunferencia se la denomina impropriamente **círculo de Mohr**, y es una característica del estado plano que se está considerando (fig. 5.4).

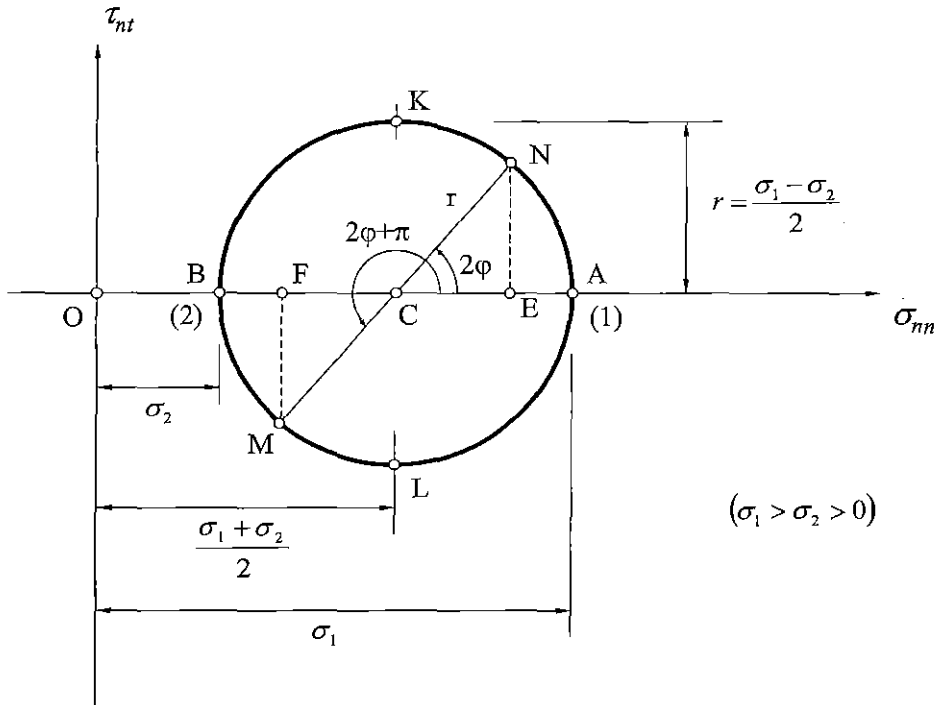


Figura 5.4. Círculo de Mohr

Las coordenadas de cada punto de la circunferencia son las componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente a un plano que pasando por P es perpendicular al plano xy y cuyo vector unitario normal forma un ángulo φ con la dirección positiva del eje principal 1.

De entre todos ellos, los puntos A y B, para los cuales la componente tangencial es nula, representan los planos principales. En efecto, teniendo en cuenta que $BC=CA=r$, los valores de las respectivas componentes normales son:

$$\begin{aligned}
 OA &= OC + CA = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sigma_1 \\
 OB &= OC - BC = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sigma_2
 \end{aligned}
 \tag{5.34}$$

es decir, las tensiones principales.

Para determinar el punto representativo de un plano cualquiera cuyo vector unitario normal \bar{n} forme un ángulo φ con la dirección positiva del eje principal 1, bastará recorrer a lo largo de la circunferencia, a partir del punto A, representativo de σ_1 , y en el mismo sentido de φ , un ángulo de valor doble, es decir, de valor 2φ . Las coordenadas del punto N así obtenido son los valores de las componentes intrínsecas del vector tensión asociado a ese plano. En efecto, de la fig. 5.4 se deduce:

$$OE = OC + CE = OC + r \cdot \cos 2\varphi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

$$EN = r \cdot \text{sen} 2\varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \text{sen} 2\varphi$$
(5.35)

valores que coinciden, respectivamente, con los de σ_m y τ_m expresados en (5.32).

Para la tensión tangencial se adopta el criterio especificado al definir el vector unitario \bar{i} : si dicha tensión tiende a hacer girar el elemento en sentido horario es positiva, y si es en sentido antihorario, negativa (cuando el tercer eje es saliente).

Para localizar en el círculo de Mohr un plano perpendicular al representado por N hay que tener en cuenta que su vector unitario normal forma con la dirección positiva del eje 1 un ángulo $(\varphi + \pi/2)$ y, por lo tanto, sobre el círculo habrá que girar un ángulo $2\varphi + \pi$, obteniendo el punto M, opuesto a N. Fácilmente puede comprobarse que las coordenadas de M coinciden con las componentes intrínsecas (5.32) sustituyendo φ por $(\varphi + \pi/2)$.

De la fig. 5.4 se deduce que las tensiones tangenciales asociadas a estos dos planos perpendiculares son iguales y de signo contrario (la ya conocida ley de reciprocidad de las tensiones tangenciales). Así pues, planos perpendiculares se corresponden con los puntos extremos de un diámetro en el círculo de Mohr, y planos opuestos (que forman 180°) coinciden en el mismo punto. Además, el valor de la tensión tangencial máxima es el radio r , correspondiente a los planos representados por los puntos K y L.

Ahora bien, esta última observación requiere una matización: el valor del radio r es la tensión tangencial máxima cuando se consideran exclusivamente planos perpendiculares al plano xy, es decir, planos paralelos a la dirección principal 3

(dirección z). Si se incluyen todos los posibles planos que pasan por el punto, pueden obtenerse valores de la tensión tangencial superiores a r , como se verá a continuación.

Para demostrarlo de forma sencilla, se prescindirá de la consideración de estado tensional plano para suponer un estado tensional general (tridimensional) cuyas tensiones principales sean tales que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$. En la fig. 5.5a se representa este estado cuando se toma como sistema de referencia el definido por las direcciones principales.

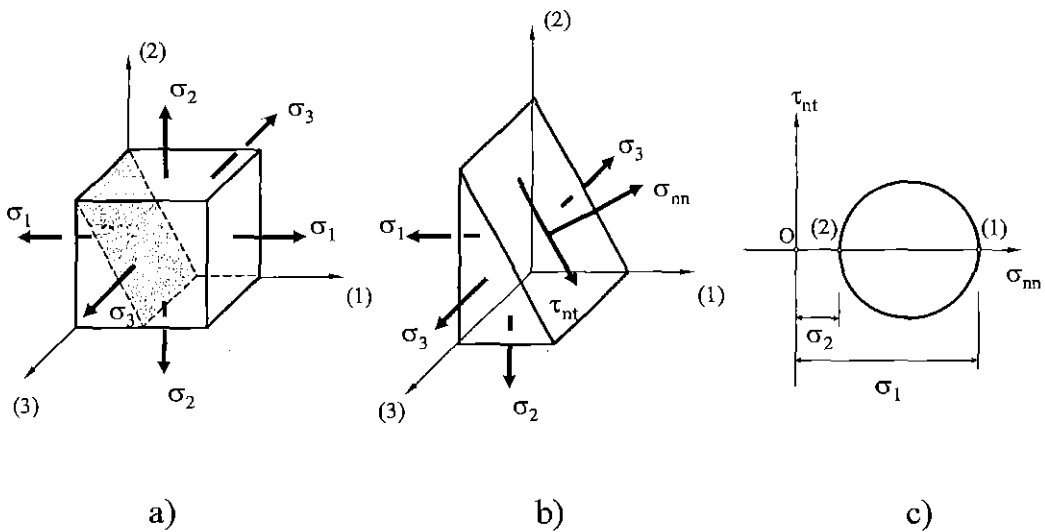


Figura 5.5. Estado general de tensiones

De la observación de la fig. 5.5b se deduce que las componentes intrínsecas para un plano paralelo a la dirección 3 no dependerán más que de los valores de σ_1 y σ_2 , ya que la resultante de las tensiones σ_3 que actúan en caras opuestas de ese elemento prismático se anulan entre sí. En consecuencia, el estudio de tensiones asociadas a los planos paralelos a la dirección 3 puede hacerse como si se tratara de un estado plano ($\sigma_3 = 0$), utilizando el círculo de Mohr definido por σ_1 y σ_2 . Las tensiones asociadas a estos planos son independientes de σ_3 . Quedan representados en el círculo trazado en 5.5c.

De forma análoga puede afirmarse que los estados tensionales correspondientes a los planos paralelos a la dirección 1 estarán representados por el círculo de Mohr definido

por las tensiones principales σ_2 y σ_3 (independientes de σ_1). Consideraciones similares se aplican a la dirección 2.

En la fig. 5.6 se representan los tres círculos. Esta representación completa se suele llamar **diagrama de los círculos de Mohr**. En ella cada círculo está definido mediante dos tensiones principales y es representativo de estados tensionales correspondientes a planos paralelos a la tercera dirección principal. Mohr demostró que a cada plano que, pasando por P , no es paralelo a ninguna de las tres direcciones principales le corresponde un punto del diagrama situado en el área comprendido entre las tres circunferencias. Esta correspondencia es biunívoca y las coordenadas de ese punto son, por consiguiente, las componentes intrínsecas del vector tensión asociado a ese plano.

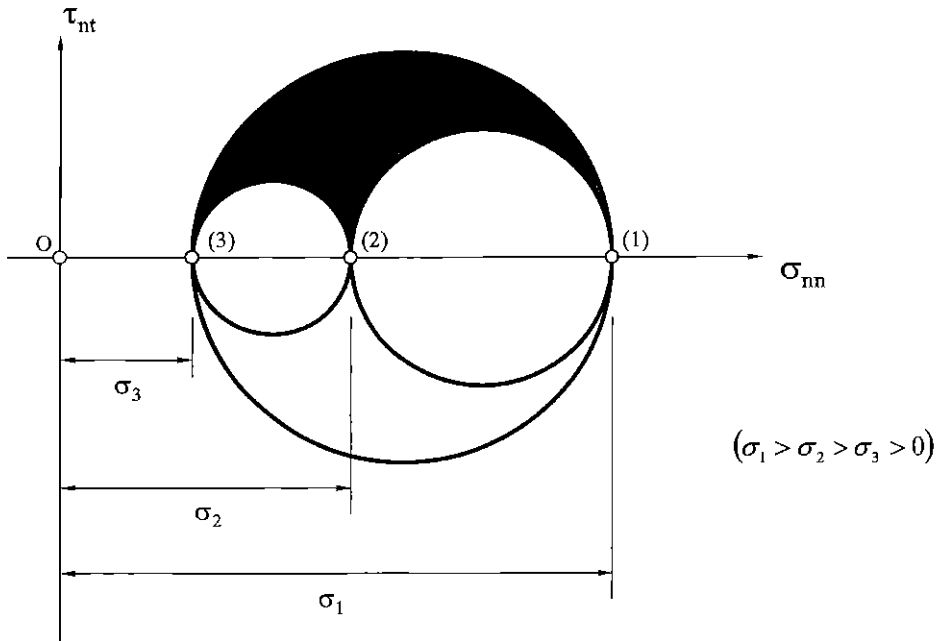


Figura 5.6. Diagrama de los círculos de Mohr

De la observación del diagrama se puede concluir que **el valor de la tensión tangencial máxima es siempre igual al radio del círculo de mayor diámetro**. Su dirección es a 45° entre las dos tensiones principales del círculo correspondiente y a 90° con la tercera. En el caso de tensión plana ($\sigma_3=0$), los diferentes estados tensionales que pueden presentarse se representan en la fig. 5.7. Los vectores unitarios de los planos de máxima tensión tangencial se calculan en la forma:

$$(a): \vec{n}_{\tau_{\max}} = \frac{\vec{n}_1 \pm \vec{n}_3}{\sqrt{2}}$$

$$(b): \vec{n}_{\tau_{\max}} = \frac{\vec{n}_1 \pm \vec{n}_2}{\sqrt{2}}$$

(5.36)

$$(c): \vec{n}_{\tau_{\max}} = \frac{\vec{n}_2 \pm \vec{n}_3}{\sqrt{2}}$$

donde en cada caso se obtienen 4 planos (los dos procedentes de la expresión correspondiente y sus opuestos). Esos planos se indican en la fig. 5.7 [puntos M, M' en el caso a); N, N' en b), y L, L' en c)].

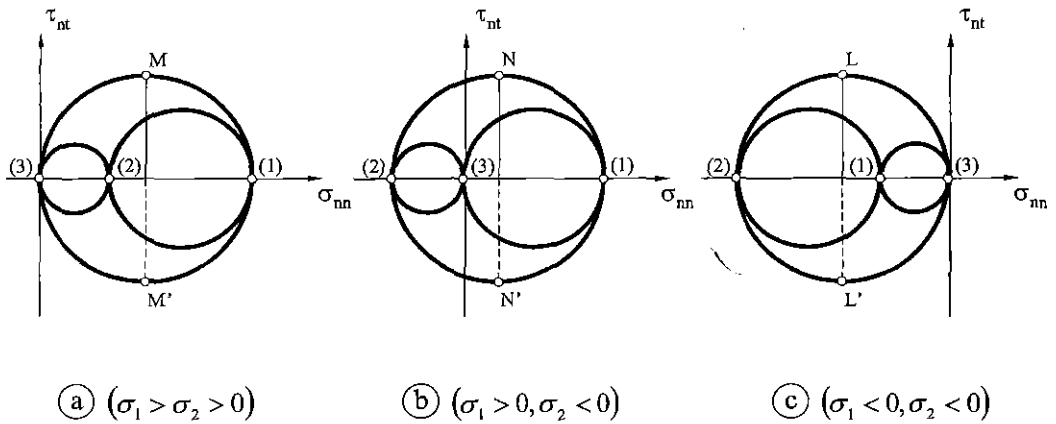
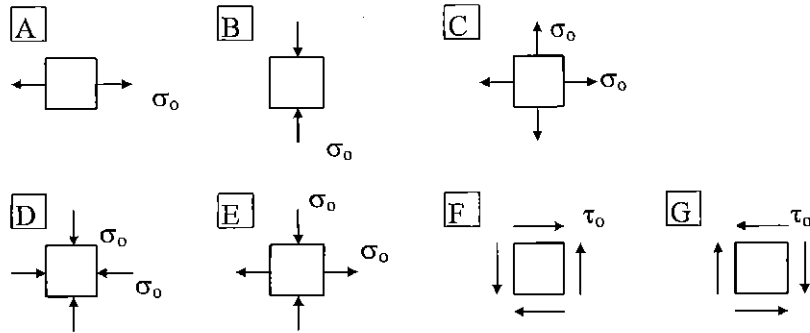


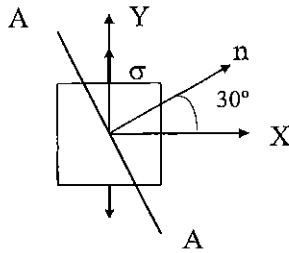
Figura 5.7. Estados de tensión plana

PROBLEMAS

5.1. Representar mediante el diagrama de los círculos de Mohr, cada uno de los siguientes casos de estado plano de tensiones, indicando las tensiones principales.

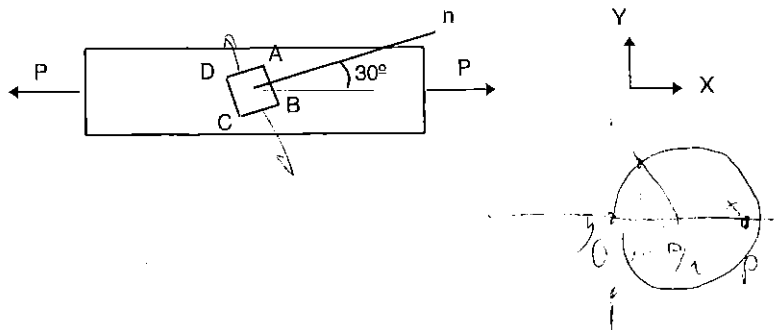


5.2. En la figura se representa el estado tensional en un punto de un cuerpo elástico. Utilizando el diagrama de los círculos de Mohr, determinar la tensión normal y tangencial en el plano A-A.

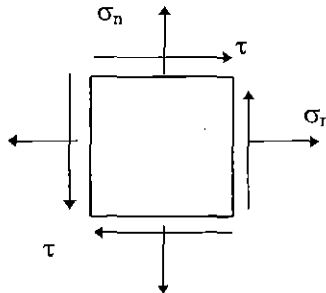


Handwritten signature

5.3. La barra de la figura es de sección cuadrada de 3 cm de lado y está sometida a una fuerza de tracción de 117 kN. Utilizando el diagrama de los círculos de Mohr determinar las tensiones normales y cortantes que actúan en las caras perpendiculares entre sí del elemento ABCD, contenido en el plano de la figura.



5.4. El estado tensional en un punto está definido en la figura adjunta, en la que $\sigma_n = 50$ MPa. El punto pertenece a una barra sometida a tracción simple uniaxial. Determinar el valor de la tensión cortante τ y de la tensión normal máxima e indicar el plano en que ésta actúa.



5.5. En un punto M de un sólido elástico, las componentes de la matriz de tensiones referidas a los ejes XYZ son:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Se pide:

- 1º) Calcular las tensiones principales y sus direcciones.
- 2º) Representar sobre los círculos de Mohr el estado tensional correspondiente a los planos perpendiculares a los ejes X, Y, Z.
- 3º) Indicar en qué planos se presenta la máxima tensión tangencial.

5.6. En un punto P de un sólido elástico, la matriz de tensiones referida a un triedro cartesiano XYZ es la siguiente:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Se pide:

- 1º) Calcular el vector tensión en P correspondiente a un plano cuya normal exterior forma ángulos iguales de 45° con los ejes X e Y, siendo positivos los cosenos directores.
- 2º) Calcular las tensiones y direcciones principales.
- 3º) Obtener analíticamente las componentes intrínsecas del vector tensión asociado al plano anterior.
- 4º) Situar sobre los círculos de Mohr los puntos que representan la tensión en P: a) asociada a cada uno de los planos coordenados, b) asociada a un plano de cosenos directores $(1/2, 1/\sqrt{2}, 1/2)$.
- 5º) Tensión hidrostática en P.

5.7. El estado de tensión plana referido a coordenadas cartesianas en un punto P de un material está definido por la matriz de tensiones siguiente:

$$\begin{bmatrix} T_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{MPa}$$

Se pide:

- 1º) Determinar la tensión en P que actúa en un plano que es perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante.
- 2º) Hallar las componentes normal y tangencial de dicha tensión.
- 3º) Calcular las tensiones y direcciones principales.
- 4º) Representar en el círculo de Mohr el estado tensional del apartado 1º) y el correspondiente a planos perpendiculares a los ejes coordenados X e Y.
- 5º) Determinar los invariantes de la matriz de tensiones, a partir de las componentes cartesianas y a partir de las componentes en las direcciones principales.
- 6º) Hallar la matriz desviadora y sus tensiones principales.
- 7º) Calcular la tensión tangencial máxima, indicando en qué plano se produce.

5.8. El estado de tensión plana referido a coordenadas cartesianas en un punto P de un material está definido por la matriz de tensiones siguiente:

$$\begin{bmatrix} T_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{MPa}$$

Se pide:

- 1º) Determinar la tensión en P que actúa en un plano que es perpendicular a la recta $y=3x$.
- 2º) Hallar las componentes normal y tangencial de dicha tensión.
- 3º) Calcular las tensiones y direcciones principales.
- 4º) Representar en el círculo de Mohr el estado tensional del apartado 1º) y el correspondiente a planos perpendiculares a los ejes coordenados X e Y.
- 5º) Determinar los invariantes de la matriz de tensiones, a partir de las componentes cartesianas y a partir de las componentes en las direcciones principales.
- 6º) Hallar la matriz desviadora y sus tensiones principales.
- 7º) Calcular la tensión tangencial máxima, indicando en qué plano se produce.

5.9. El estado de tensión plana en un punto de un material está definido por las componentes: $\sigma_{xx}=127$, $\sigma_{yy}=29$, $\tau_{xy}=-17$, expresadas en MN/m^2 . Se pide:

- 1º) Tensiones normal y tangencial en el plano que forma 45° con los ejes X, Y y es paralelo al eje Z.
- 2º) Magnitudes y direcciones de las tensiones principales.

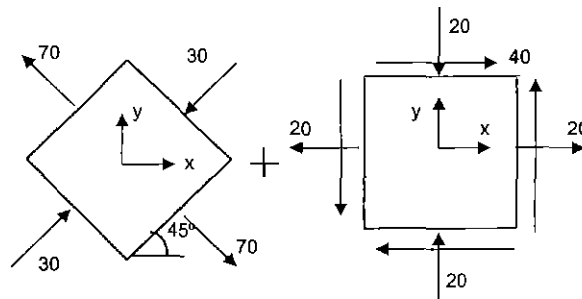
- 3º) Magnitudes de los invariantes de tensión.
- 4º) Máximas tensiones tangenciales en el punto.

5.10. El estado plano de tensiones en un punto de un sólido elástico está definido por la superposición de los estados indicados en la figura, que representa cuatro de las caras de un cubo infinitesimal, cuyas otras dos caras están exentas de tensión. Las tensiones están dadas en MPa.

Se pide:

- 1º) Tensiones principales y sus direcciones, en el sistema de referencia definido por los ejes X e Y.
- 2º) Las tensiones normal y cortante, correspondientes a un plano perpendicular al plano del dibujo, que forma un ángulo de 30º en sentido horario con el plano correspondiente a la mayor tensión principal.
- 3º) Las deformaciones unitarias principales.
- 4º) La deformación angular total máxima, indicando la dirección o direcciones a las que corresponde.

Datos: $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.25$



5.11. Una roseta de galgas extensométricas proporciona los siguientes datos de deformación:

$$\epsilon_{xx}=0,01, \quad \epsilon_{yy}=0,02, \quad \epsilon_{30^\circ}=0,$$

donde ϵ_{30° es la deformación de un elemento lineal a 30º medidos desde el eje X en sentido antihorario. Calcular ϵ_{60° .

5.12. Tres galgas extensométricas en forma de roseta están colocadas en un punto de la superficie de una estructura, y registran las siguientes deformaciones longitudinales unitarias:

$$\epsilon_a=0,00176, \quad \epsilon_b=0,00153, \quad \epsilon_c=0,000492$$

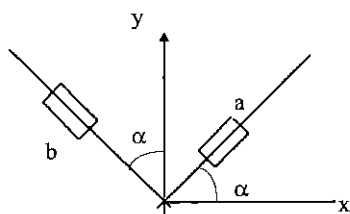
Tomando la dirección de ϵ_a como referencia, las direcciones de ϵ_b y ϵ_c están a 120º y 240º, medidas en sentido antihorario, respecto a la dirección de referencia. Usando el diagrama de los círculos de Mohr de deformaciones, determinar las deformaciones principales y sus

direcciones. Hallar también las tensiones principales, sabiendo que las propiedades del material son: $E=68,9 \text{ GN/m}^2$; $\nu=0,31$.

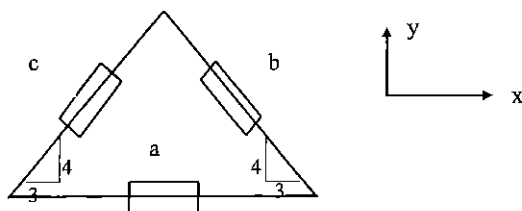
5.13. Una placa plana de un sólido elástico lineal isótropo se encuentra sometida a tracción biaxial. Las tensiones principales son σ_{xx} y σ_{yy} . Se colocan dos galgas extensométricas (a y b) como muestra la figura. El ángulo α está dado por:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\nu}} \quad \text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}$$

Probar que las tensiones principales son proporcionales a las deformaciones en la dirección de las galgas.



5.14 Tres galgas extensométricas (a, b, c) están colocadas sobre la superficie libre de un cuerpo deformado, como se muestra en la figura. Las extensiones unitarias de las galgas son $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$, respectivamente. Determinar $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}$, en términos de $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$.



5.15. Las deformaciones longitudinales siguientes se han medido en un punto de la superficie libre de un cuerpo elástico isótropo, con φ medido en sentido antihorario:

Dirección	Angulo φ	ϵ
a	0°	0,002
b	120°	0,002
c	240°	-0,001

Calcular las deformaciones principales en el plano de la superficie, así como sus direcciones principales.

5.16. Tres galgas extensométricas que forman una roseta se instalan en un punto de la superficie de un componente mecánico y registran las siguientes deformaciones longitudinales unitarias:

$$\epsilon_a = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_b = 1,35 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_c = 0,95 \cdot 10^{-3}$$

Si la dirección de la galga *a* forma un ángulo φ con uno de los ejes de referencia, y las direcciones de las galgas *b* y *c* son $\varphi + 45^\circ$ y $\varphi + 90^\circ$, respectivamente (medidas en sentido antihorario), se pide hallar las deformaciones principales y sus direcciones.

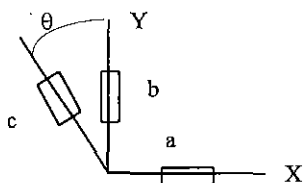
5.17. En un punto de la superficie plana de un sólido elástico, se colocan tres galgas extensométricas, indicadas en la figura, siendo $\text{tg } \theta = 3/4$. Después de cargar el sólido, se miden los siguientes alargamientos unitarios:

$$\epsilon_a = 3 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_b = 2 \cdot 10^{-3}$$

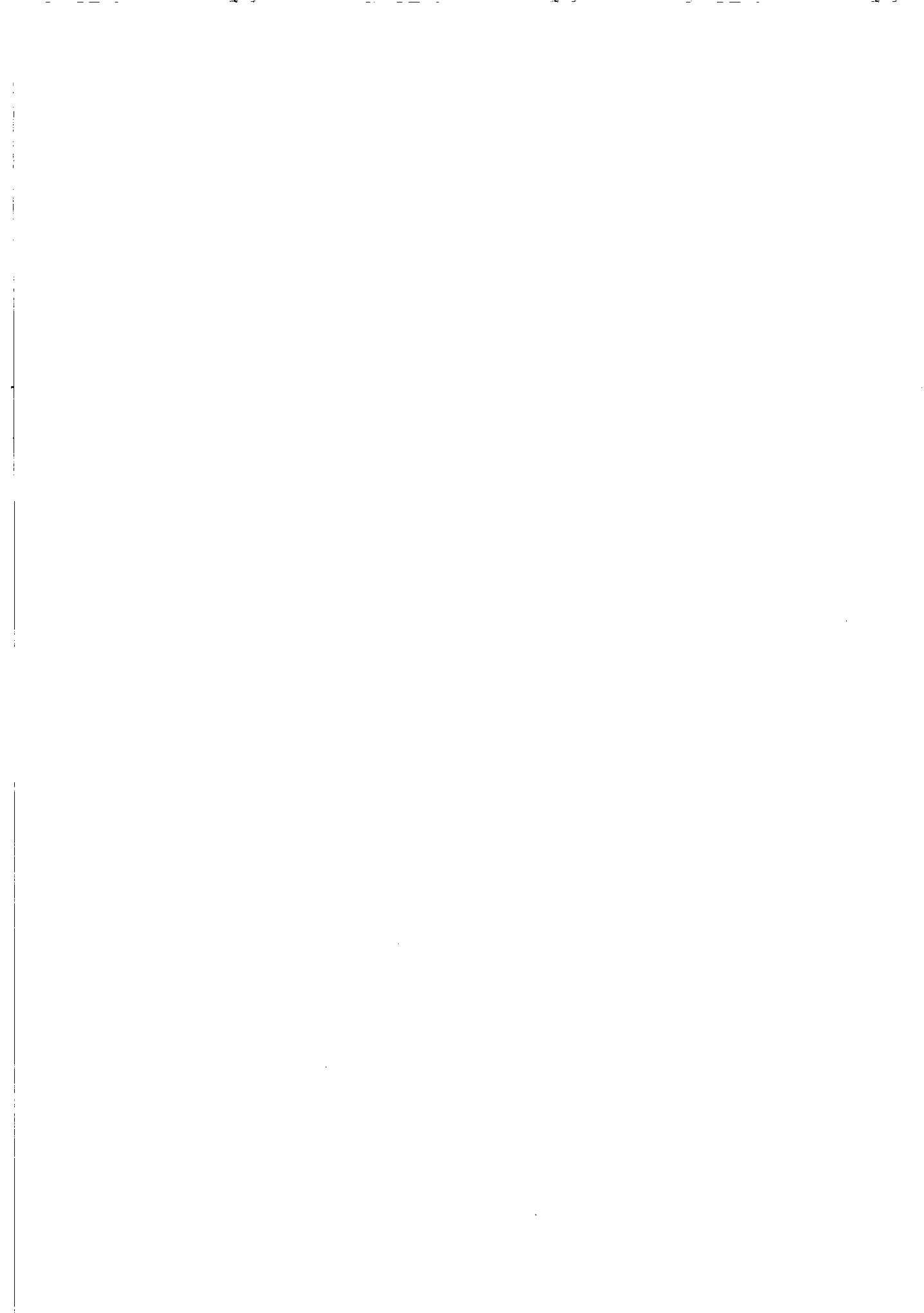
$$\epsilon_c = -4 \cdot 10^{-3}$$

- 1º) Calcular la deformación angular del ángulo recto definido por los ejes de las galgas *a* y *b*.
- 2º) Deformaciones principales y direcciones.
- 3º) Representación en el círculo de Mohr de las deformaciones en las direcciones *a*, *b*, *c*.
- 4º) Deformación longitudinal unitaria correspondiente a la dirección que forma 45° con los ejes *X* e *Y*.
- 5º) Hallar las direcciones que sólo experimentan deformación transversal.
- 6º) Valor de la deformación angular total máxima.



TEMA 6

TEORÍAS DE FALLO



6.1. INTRODUCCIÓN

Se dice que un elemento de una maquinaria o estructura cargada *falla* cuando experimenta unas modificaciones sustanciales en su comportamiento tales que lo convierten en completamente inadecuado para cumplir la función para la cual fue diseñado.

El objetivo de este tema es predecir estados de tensiones que dan lugar a esta situación de fallo. Indudablemente es un tema de importancia fundamental en el diseño o comprobación de elementos de máquinas o estructuras.

Un elemento de una estructura, o más en general, la estructura misma puede fallar de muy diversas formas. En la exposición de este tema, el estudio se restringirá a sólo algunas de ellas. Así por ejemplo, no se tendrá en cuenta el fallo dinámico y, en concreto, el *fallo por fatiga*, característico de elementos de máquinas sometidos a cargas variables periódicamente en el tiempo. Tampoco, el *fallo por pandeo*, propio de elementos estructurales sometidos a cargas de compresión, y que será objeto de estudio en un tema posterior. Se deja también al margen el fenómeno denominado *creep* que, por lo general, se presenta únicamente a temperaturas elevadas. Por último, se prescinde asimismo de tipos de fallo muy particulares, como el debido a acciones químicas: *corrosión de estructuras* que trabajan en condiciones ambientales muy desfavorables.

Únicamente se considerarán en este tema los fallos estáticos, es decir aquellos que son función de las cargas aplicadas, pero no del tiempo durante el cual éstas actúan. Por esta razón, el título preciso de este capítulo sería **Teorías de fallo estático**.

Dentro de esta categoría se encuentran los siguientes tipos de fallos:

- 1.- Fallo por deformación plástica.
- 2.- Fallo por rotura.

6.1.1. Fallo por deformación plástica

Es el fallo que se produce cuando el material ha entrado en fluencia plástica (es decir, ha rebasado su límite elástico). Es característico de los materiales dúctiles, que suelen experimentar deformaciones plásticas relativamente grandes antes del fallo final,

acompañadas muchas veces de estrechamientos o estricciones en la zona de rotura, como ocurre en el ensayo de tracción.

Un examen detenido del cuello de estricción en un ensayo de tracción muestra que la rotura se produce según planos inclinados aproximadamente 45° con el eje. Este hecho sugiere que la fluencia plástica y el fallo final se deben principalmente al deslizamiento del material a lo largo de planos oblicuos, por la acción de las tensiones tangenciales.

La teoría que explica, a nivel microscópico, las deformaciones plásticas se denomina *teoría de las dislocaciones*. En pocas palabras, las dislocaciones son defectos lineales en la red cristalina de los metales, que pueden moverse ante tensiones relativamente pequeñas. Su propagación se realiza a través de planos densos en átomos, llamados planos de deslizamiento, que presentan una menor resistencia a las tensiones cortantes. Cuando las dislocaciones se mueven quedan atrapadas en otros defectos de la red. Esta circunstancia es la responsable de que las deformaciones plásticas sean irreversibles y no se recuperen.

6.1.2. Fallo por rotura

La rotura es la separación o fragmentación en dos o más partes de un elemento cargado. Es la forma de fallo característica de los materiales frágiles, que se produce sin apenas deformaciones plásticas previas ni estricción, y con alargamientos muy pequeños.

Se comprende que este tipo de fallo sea muy peligroso desde el punto de vista práctico: no va acompañado de deformaciones plásticas apreciables y se presenta generalmente de forma súbita, dando origen a una liberación sustancial de energía, que puede ocasionar un fuerte ruido, parecido a una explosión.

El inicio del fallo tiene lugar por la aparición de una o varias grietas pequeñas, generalmente en las proximidades de los puntos donde se presentan valores críticos de las tensiones máximas. Téngase en cuenta que si una grieta aumenta de tamaño en una pieza cargada (aumento que se ve favorecido si la carga es de tipo cíclico), entonces disminuye la sección neta resistente aumentando el nivel de tensión y propagándose así aún más la grieta; esta propagación es realmente muy rápida hasta

que la sección neta no es capaz de soportar la carga y se produce finalmente la rotura.

Conviene precisar que no es muy correcto hablar de materiales dúctiles o frágiles sin más, ya que esta característica puede ser afectada por circunstancias bien diversas. Y así por ejemplo, las bajas temperaturas, las cargas de choque, los estados triaxiales de tensión de tracción, las piezas de gran tamaño, y las muescas y entallas pueden producir el comportamiento de rotura de tipo frágil en una pieza de un material considerado dúctil. También, al estar sometidos a cargas que varían cíclicamente, estos materiales tienden a fallar por rotura frágil para niveles de tensiones relativamente bajas, debido al fenómeno ya mencionado de fatiga.

Es obvio, por consiguiente, que en la fase de diseño siempre habrán de tenerse en cuenta todas aquellas condiciones que puedan afectar al comportamiento resistente de la estructura o máquina que se proyecta. El estudio de estos casos particulares de rotura frágil en elementos fabricados de materiales dúctiles, aun cuando no se consideran en este tema, tiene una gran importancia en el cálculo de elementos de máquinas.

Antes de terminar estas consideraciones, conviene al menos mencionar una teoría que ha experimentado un notable desarrollo en los últimos años: la Mecánica de la fractura. Esta teoría pretende resolver casos del tipo que se acaba de comentar, es decir, casos de roturas de tipo frágil en circunstancias en las que se esperaba un comportamiento dúctil. Dichas roturas, al estar producidas, además, para unos niveles de tensión muy bajos, no pueden explicarse de ningún modo mediante las clásicas teorías de fallo. Para estos casos la mecánica de la fractura no sustituye sino que complementa a estas teorías clásicas.

Una de las aplicaciones típicas de la mecánica de la fractura es determinar la denominada *tensión crítica*, aquella para la que se produce la fractura frágil en una pieza en la que existe una grieta de un tamaño determinado. Esta tensión crítica (que no es una propiedad del material) deberá ser utilizada como valor adicional de comparación con la tensión admisible de diseño.

Las roturas imprevistas a que antes nos referíamos se han producido sobre todo en sistemas estructurales contruidos mediante soldaduras de chapas y perfiles de elevado espesor, como los utilizados en barcos, puentes, grandes depósitos, carcasas

de grandes máquinas, etc. También han aparecido a veces en piezas de gran tamaño, pero fabricadas con aceros y aleaciones de alta resistencia.

Por citar algunos ejemplos reales, en 1919 se fracturó en Boston (USA) un depósito de más de 10 millones de litros de capacidad provocando la muerte de diez personas y ocasionando cuantiosos daños materiales. Entre 1942 y 1952, se calcula que al menos nueve barcos de los utilizados en la segunda guerra mundial se partieron en dos de forma imprevista, y más de mil en una flota de cinco mil presentaban grietas de gran tamaño. Asimismo, en 1962 se produjo la rotura catastrófica de un famoso puente en Melbourne (Australia) y en 1966 del de Point Pleasant (USA), en el que fallecieron 46 personas.

Desde los años 70 se han producido algunos fallos más, pero éstos van siendo cada vez menos frecuentes a medida que ha ido avanzando el conocimiento de la mecánica de la fractura y su aplicación al proyecto de sistemas estructurales.

6.1.3. Fundamento de las diversas teorías de fallo

Como se deduce de lo visto anteriormente, presenta una gran importancia disponer de criterios con los que se pueda determinar qué combinación de tensiones y deformaciones produce el fallo en un determinado material.

Para realizar este cometido se presentan diversas dificultades. Por una parte, los ingenieros que trabajan en el diseño y desarrollo de elementos de máquinas o de estructuras generalmente se encuentran con problemas biaxiales o triaxiales de tensiones, siendo prácticamente infinitas las posibles combinaciones de tensiones principales que pueden presentarse en la práctica. Por otra parte, los datos disponibles de caracterización de materiales se obtienen experimentalmente, a partir de ensayos de laboratorio, siendo el más recurrido, por su relativa sencillez, economía, etc., el ensayo de tracción simple, en el que se origina un estado uniaxial de tensiones.

El problema que se plantea entonces es el siguiente: si un material ha resistido una determinada tensión en un ensayo de tracción simple, ¿qué combinación de tensiones podrá resistir en el caso de ser sometido a estados de tensiones biaxiales o triaxiales? Es evidente que no se puede resolver por vía experimental, dada la imposibilidad de reproducir en el laboratorio la infinita variedad de combinaciones de tensiones posibles

en estos estados multiaxiales. En otras palabras, ¿cómo es posible extrapolar a estos estados múltiples, habituales en los problemas reales, los resultados obtenidos para un estado uniaxial, como es el originado en el ensayo de tracción?

Para contestar a esta pregunta se aplican las denominadas **teorías de fallo**, cuya formulación puede esquematizarse en los dos puntos siguientes:

1º) Se postula una teoría para explicar el fallo de una muestra estándar del material objeto de estudio sometida a un ensayo sencillo de laboratorio (por ejemplo, el de tracción simple). Puede suponerse que el fallo se presenta como consecuencia de que se ha sobrepasado una determinada capacidad del material, pudiendo considerarse bajo esta denominación aspectos diversos como:

- a) Capacidad para resistir tensiones normales.
- b) Capacidad para resistir tensiones tangenciales.
- c) Capacidad de resistencia a las deformaciones unitarias longitudinales.
- d) Capacidad de absorción de energía de deformación, etc...

Por ejemplo, sometiendo a una probeta de un material dúctil a un ensayo de tracción se origina en el material un estado tensional simple: el estado uniaxial. Si la carga aplicada a la probeta crece gradualmente, llegará un momento en que alcanzará un valor para el cual el material comienza a experimentar deformaciones plásticas. Se dice entonces que el material fluye. En el momento de iniciación de la fluencia se pueden cuantificar, por ejemplo, las siguientes seis magnitudes (fig. 6.1):

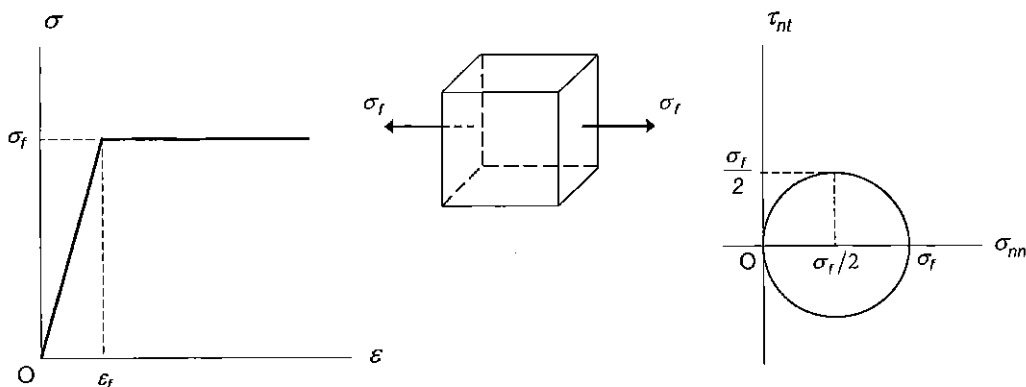


Figura 6.1. Ensayo de tracción simple

a) La tensión normal máxima:

$$\sigma_1 = \sigma_f \quad (6.1)$$

b) La tensión tangencial máxima:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_f}{2} \quad (6.2)$$

c) La deformación longitudinal unitaria máxima:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E} \quad (6.3)$$

d) La energía de deformación absorbida por unidad de volumen:

$$U_o = \frac{1}{2} \sigma_f \varepsilon_f = \frac{\sigma_f^2}{2E} \quad (6.4)$$

e) La energía de distorsión absorbida por unidad de volumen:

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_f^2 \quad (6.5)$$

f) La tensión tangencial octaédrica:

$$\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f \cong 0,47 \sigma_f \quad (6.6)$$

2º) Los resultados del ensayo de laboratorio se utilizan para establecer la magnitud de la capacidad elegida. De esta forma si el ensayo de tracción simple indica una tensión de fluencia, por ejemplo, de 240 MPa, se supondrá que la fluencia, y por tanto el fallo, se presentará siempre que en ese material, bajo cualquier combinación de cargas estáticas, se produzca uno de entre los siguientes resultados:

- a) Una *tensión normal máxima* superior a la de fluencia obtenida en el ensayo (240 MPa).
- b) Una *tensión tangencial máxima* mayor que la tensión tangencial máxima en el momento de producirse la fluencia en el ensayo (120 MPa).
- c) Una *deformación longitudinal máxima* mayor que la obtenida en el ensayo.

Y así sucesivamente con las demás magnitudes anteriormente citadas. En otras palabras, *en las teorías clásicas de fallo se supone que la misma cantidad del parámetro que se considere y que daba lugar al fallo en el ensayo de tracción, producirá también el fallo de cualquier elemento hecho de ese material, independientemente del estado de tensiones a que se encuentre sometido.*

Según el parámetro que se considere como determinante de la capacidad resistente del material, surgirán las diversas teorías de fallo que en este tema se expondrán.

6.1.4. Tensión equivalente

Ya se ha dicho que en el estado uniaxial -originado, por ejemplo, en el ensayo de tracción- el fallo se produce cuando la tensión alcanza el valor de la tensión de fluencia σ_f del material, si éste es dúctil, o su tensión de rotura σ_r si es frágil.

Para extender este criterio de fallo a estados multiaxiales de tensiones, se define la **tensión equivalente** σ_{eq} como la tensión que en un estado uniaxial proporcionaría la misma resistencia que el estado multiaxial que se está considerando. Esta tensión equivalente se expresará como una determinada combinación de las tensiones principales en el estado multiaxial (fig. 6.2). Por consiguiente, se dice que se produce el fallo cuando se verifica:

$$\sigma_{eq} \geq \sigma_c \quad (6.7)$$

donde:

$$\sigma_{eq} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (6.8)$$

y σ_c es la tensión de fluencia (si el material es dúctil) o la de rotura (si es frágil) obtenida en el ensayo de tracción simple (o, en su caso, compresión simple). Por el contrario, no existe fallo cuando se verifica:

$$\sigma_{eq} < \sigma_c \quad (6.9)$$

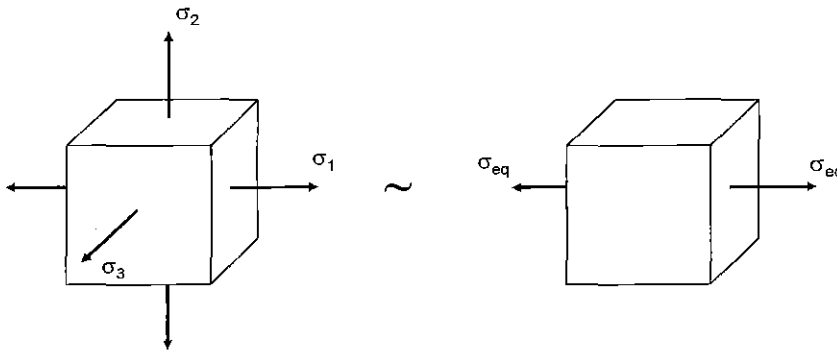


Figura 6.2. Tensión equivalente

En los epígrafes siguientes se expondrán las teorías más conocidas. En las más importantes, se formulará matemáticamente la función de fallo y se obtendrá la representación gráfica correspondiente en un estado biaxial de tensiones. Finalmente, se comentarán las principales limitaciones de cada teoría, así como su ámbito de aplicabilidad.

6.2. TEORÍA DE LA TENSIÓN PRINCIPAL MÁXIMA

Se atribuye a **Rankine**, y es posiblemente la más simple de todas las teorías que se han propuesto. Enunciada en forma general, establece que *se producirá el fallo por fluencia en un punto de un material, punto en el que existe un estado multiaxial de tensiones, cuando la mayor de las tensiones principales positivas supere el límite de fluencia a tracción, o cuando la mayor (en valor absoluto) de las tensiones principales negativas supere el límite de fluencia a compresión, siendo ambos límites de fluencia los obtenidos, respectivamente, en los ensayos de tracción y compresión simple con muestras estándar de ese material.*

Para el fallo por rotura en un material frágil el enunciado es idéntico, sustituyendo el límite de fluencia por la tensión de rotura del material.

La *tensión equivalente* para este criterio sería entonces: $\sigma_{eq} = \sigma_{m\acute{a}x}$.

En la fig. 6.3 se muestra una representación gráfica de esta teoría para un estado biaxial de tensiones, en el que se supone $\sigma_3 = 0$, siendo σ_1 y σ_2 las otras dos tensiones principales. En la figura σ_{ft} y σ_{fc} representan los límites de fluencia a tracción y compresión, respectivamente. Para predecir el fallo por rotura, se utilizarían las tensiones de rotura σ_{ft} y σ_{fc} .

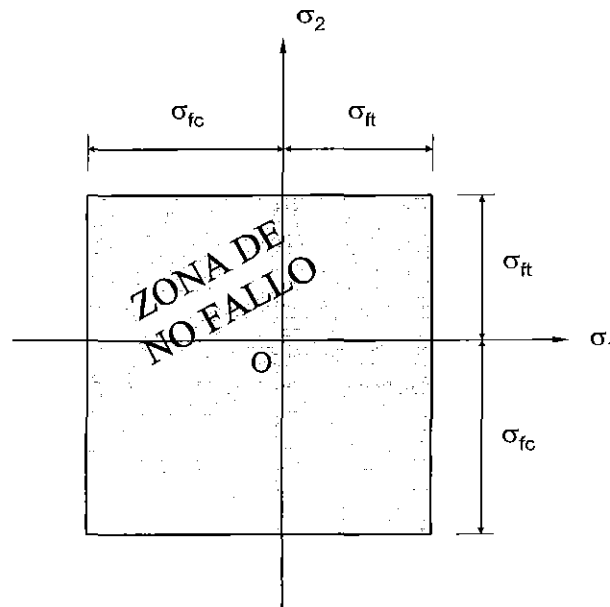


Figura 6.3. Teoría de Rankine

El fallo se producirá para estados tensionales cuyo punto representativo se sitúe fuera del cuadrado. Para un estado triaxial la representación gráfica sería un cubo. Los puntos interiores al mismo representan estados tensionales para los cuales no se produce el fallo. En materiales equirresistentes tanto el cuadrado como el cubo son simétrico respecto de los ejes coordenados.

Obsérvese que según esta teoría, la resistencia del material depende únicamente de una de las tensiones principales (la de mayor valor absoluto) y es completamente independiente de la magnitud y dirección de las otras dos tensiones principales. Para el caso hidrostático de tensiones (sea en tracción o compresión) y material dúctil equirresistente, esta teoría predice el fallo por fluencia cuando la tensión principal $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ alcanza el valor de la tensión de fluencia del material obtenida en un

ensayo de tracción. Sin embargo, se ha comprobado experimentalmente que en la compresión o tracción hidrostática no se produce en absoluto fluencia plástica, sino únicamente una pequeña deformación elástica. Por otra parte, la teoría tampoco explica que el fallo a cortadura pura en materiales dúctiles se produzca para valores de la tensión cortante generalmente comprendidos entre 0,55 y 0,60 del valor de σ_f .

En la práctica, esta teoría no predice bien el comienzo de la fluencia plástica y, por tanto, no debe utilizarse para materiales con comportamiento dúctil. En cambio, proporciona buenos resultados en el caso de materiales cuyo fallo se produce por rotura frágil, como hierro fundido, hormigón, etc..., aunque tampoco explique adecuadamente el caso hidrostático de tensiones. El límite predicho en ese caso sería $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_f$. Sin embargo, los resultados obtenidos experimentalmente muestran que los materiales frágiles resisten tensiones hidrostáticas muy superiores a ese valor.

6.3. TEORÍA DE LA DEFORMACIÓN LONGITUDINAL UNITARIA MÁXIMA

La teoría de la deformación longitudinal unitaria máxima, también denominada teoría de **Saint-Venant** y ampliamente aceptada durante el pasado siglo, establece que *para un estado multiaxial de tensiones el fallo se producirá siempre que la deformación longitudinal unitaria máxima alcance el valor que esta magnitud tiene en el momento de producirse el fallo en un estado uniaxial de tensiones (ensayos de tracción o compresión simple), de una muestra estándar del mismo material.*

La *tensión equivalente* de Saint-Venant será por tanto: $\sigma_{eq} = E\varepsilon_{m\acute{a}x}$. En la fig. 6.4 se representa esta teoría para el caso bidimensional ($\sigma_3 = 0$) y material equirresistente de tensión de fluencia σ_f . Las expresiones analíticas de las líneas correspondientes al estado límite pueden obtenerse fácilmente.

En el caso tridimensional, la superficie de fallo consiste en ocho superficies triangulares pertenecientes a cuatro pirámides tetraédricas simétricamente dispuestas respecto a la diagonal ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$).

Como en el caso de la teoría de Rankine, la superficie de fallo cerrada predice que se producirá fallo en el caso hidrostático de tensiones, en contra de lo constatado

experimentalmente. Obsérvese que a diferencia de la teoría anterior, aquí influye el valor de la tensión principal intermedia.

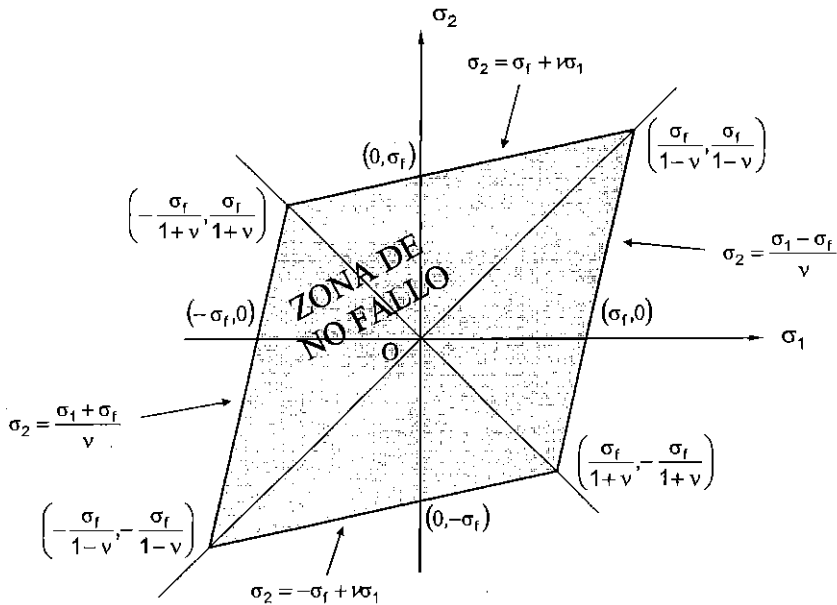


Figura 6.4. Teoría de Saint-Venant

Esta teoría apenas se utiliza en estos momentos, aunque algunas comprobaciones experimentales actuales avalan que puede aplicarse aceptablemente para el caso de algunos materiales compuestos.

6.4. TEORÍA DE LA TENSIÓN TANGENCIAL MÁXIMA (CRITERIO DE TRESCA)

Probablemente la teoría de la tensión tangencial máxima sea la más antigua de todas las teorías de fallo. Fue propuesta originalmente por Coulomb, formulada posteriormente por Tresca en 1865 y adoptada universalmente tras los ensayos realizados por Guest a comienzos del siglo XX. En la bibliografía puede encontrarse bajo diversas denominaciones, entre las que quizá sea la más habitual la de **criterio o teoría de Tresca**.

La teoría afirma que *se produce el fallo en un estado multiaxial de tensiones cuando la máxima tensión tangencial en ese estado alcanza el mismo valor o excede a la*

máxima tensión tangencial en el momento de producirse el fallo en un ensayo de tracción o compresión simple del mismo material.

Si $\sigma_{m\acute{a}x}$ y $\sigma_{m\acute{i}n}$ son las tensiones principales máxima y mínima en un estado general de tensiones, la teoría predice que se producirá fallo cuando:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}}{2} \geq \frac{\sigma_f}{2} \quad (6.10)$$

Por tanto, la *tensión equivalente* según Tresca es: $\sigma_{eq} = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}$.

La teoría es razonablemente aceptable para materiales dúctiles (acero, latón, aluminio,...) sometidos a estados de tensión en los que se presentan tensiones tangenciales relativamente grandes. Por ejemplo, en ensayos de torsión, en los que se genera un estado de cortadura pura, el valor de la tensión cortante correspondiente a la iniciación de la fluencia es $\tau_f = 0,57 \sigma_f$, en lugar de $0,5\sigma_f$, tal como se deduce de la teoría de Tresca. La aproximación en este caso es razonablemente buena (dentro del 15% de error) y actúa además en sentido favorable a la seguridad. En general, los resultados experimentales permiten concluir que se trata de una teoría conservadora.

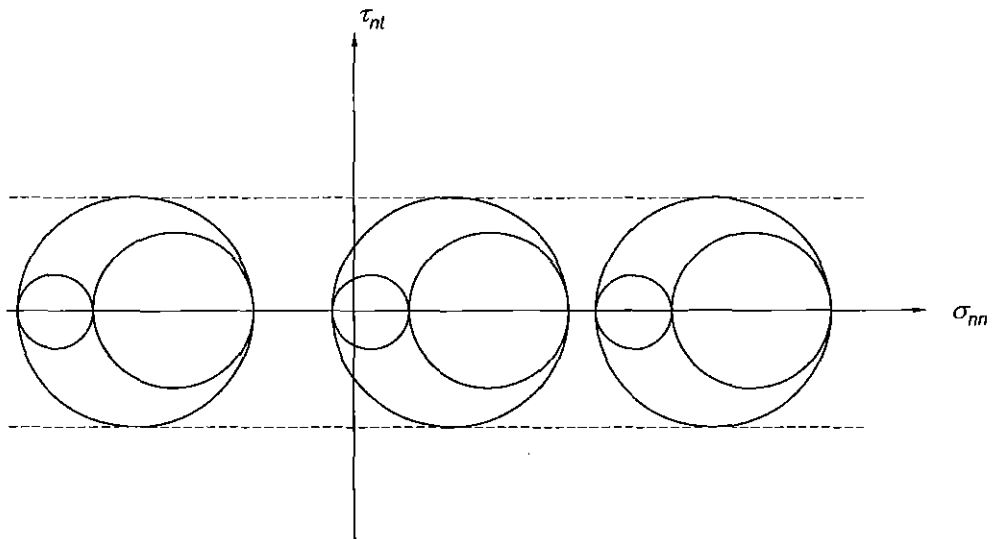


Figura 6.5. Teoría de Tresca: Influencia de la tensión hidrostática

Una particularidad de la teoría es que, al considerar únicamente la diferencia entre los valores extremos de las tensiones principales, resultan equivalentes estados tensionales que sólo se diferencian entre sí en la componente hidrostática, como se observa en la fig. 6.5, en la que se representan los círculos de Mohr correspondientes a diferentes estados tensionales. En otras palabras, la tensión hidrostática no afecta al resultado que proporciona este criterio. Por eso, éste se hace particularmente adecuado para materiales dúctiles que fallan por deformación plástica, ya que en ellos se comprueba experimentalmente la casi nula influencia de la tensión hidrostática.

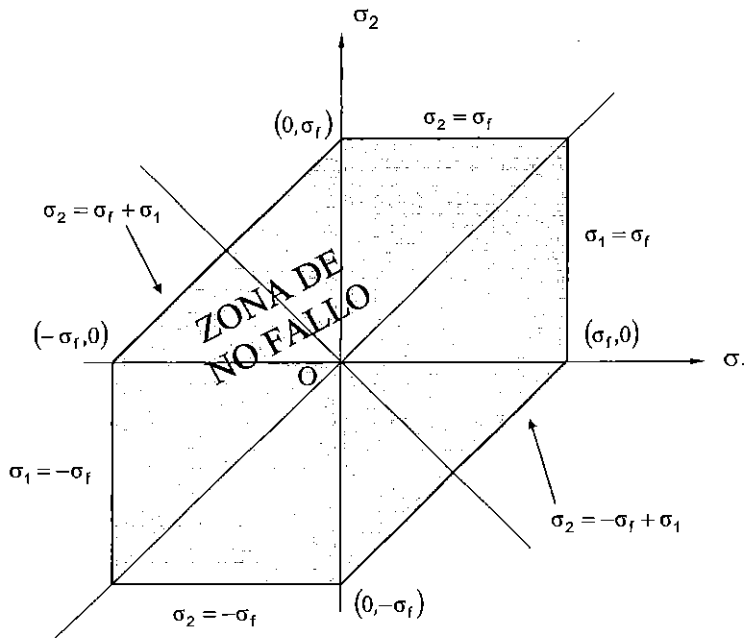


Figura 6.6. Teoría de Tresca

En la fig. 6.6 se representa la teoría para un estado de tensiones biaxial ($\sigma_3=0$). La línea EF corresponde a la ecuación $\sigma_1 = -\sigma_2$, representativa de un estado de cortadura pura en el plano 1-2, y se denomina *diagonal de cortadura* del gráfico $\sigma_1 - \sigma_2$.

En un estado triaxial de tensiones la representación es un prisma hexagonal regular cuyo eje es la trisectriz del primer octante del espacio definido por las tensiones principales (cfr. fig. 6.12). Puntos interiores al prisma indican la situación de no fallo. La teoría es conforme con los resultados obtenidos experimentalmente acerca del comportamiento de materiales dúctiles bajo estados hidrostáticos de tensiones, ya que los puntos representativos de tracción o compresión hidrostática están situados sobre

el eje del prisma, es decir, en la región de no fallo. Por tanto, según esta teoría nunca se producirá fluencia plástica para estados tensionales hidrostáticos.

6.5. TEORÍA DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN TOTAL

Esta teoría, propuesta por **Beltrami y Haigh** en torno a 1885, expresa que se produce el fallo en un punto de un cuerpo en el que existe un estado tensional cualquiera cuando la energía de deformación absorbida por unidad de volumen en un entorno de dicho punto es igual a la energía de deformación absorbida por unidad de volumen cuando el material alcanza la tensión de fluencia en el ensayo de tracción.

En su formulación matemática, se produciría el fallo cuando:

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \geq \frac{\sigma_f^2}{2E} \quad (6.11)$$

Respecto de las teorías anteriores, presenta la ventaja de que la energía de deformación es independiente de las orientaciones de las tensiones y deformaciones consideradas. Por este motivo podría aplicarse más fácilmente a materiales no isótropos, en tanto que las anteriores teorías sólo son estrictamente aplicables a materiales isótropos.

Pero su inconveniente principal radica en que resulta difícil evaluar la energía de deformación total para un estado arbitrario de tensiones. En la práctica, esta teoría no se utiliza y aquí se menciona sólo por su papel precursor de la teoría de la máxima energía de distorsión, que a continuación se expone.

6.6. TEORÍA DE LA ENERGÍA DE DISTORSIÓN (CRITERIO DE VON MISES)

Según la teoría de la energía de distorsión se produce el fallo en un punto en el que se presenta un estado multiaxial de tensiones, cuando la energía de distorsión por unidad de volumen en el entorno de ese punto alcanza o excede el valor de la energía de distorsión por unidad de volumen en el momento de producirse el fallo en un ensayo de tracción o compresión simple del mismo material.

Comúnmente atribuida a *Huber* (1904), suele conocerse con el nombre de **criterio o teoría de Von Mises** o de *Von Mises-Hencky*, ya que fueron estos investigadores quienes posteriormente la desarrollaron y explicaron.

La teoría predice la fluencia en un material dúctil con mayor precisión que cualquiera de las otras teorías conocidas, basándose únicamente en el conocimiento de la tensión de fluencia del material. Cuando el estado tensional es triaxial, esta teoría -a diferencia de la de Tresca- tiene en cuenta la influencia de la tercera de las tensiones principales.

Un aspecto interesante de la teoría es que admite diversas interpretaciones físicas. De ellas, quizá las más importantes son las que hacen referencia a la energía de distorsión y a la tensión tangencial octaédrica. En este epígrafe se deducirán las ecuaciones de fallo -que evidentemente coincidirán- desde estos dos puntos de vista.

6.6.1. Formulación de la energía de distorsión

En la fig. 6.7 se representa el estado tensional en un punto cuando como sistema de referencia se elige el definido por las direcciones principales, siendo σ_1 , σ_2 y σ_3 las respectivas tensiones principales. Cuando estas tensiones son iguales ($\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$), el estado tensional es hidrostático y los tres círculos de Mohr degeneran en un único punto. Como en este caso no hay tensiones tangenciales, tampoco habrá deformación angular ni distorsión, aunque sí cambio de volumen ($\theta=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$). Cualquier otro estado triaxial distinto del hidrostático implica la existencia de tensiones tangenciales, las cuales dan lugar a las correspondientes deformaciones angulares de manera que, además de un cambio de volumen, hay también un cambio de forma o distorsión.

Para un estado arbitrario de tensiones, la energía de deformación es igual a la suma de la energía asociada al *cambio de volumen (energía de dilatación)* más la asociada al *cambio de forma (energía de distorsión)*. El razonamiento que configuró esta teoría postula que el fallo por deformaciones plásticas está relacionado precisamente con este segundo valor, en tanto que la energía de dilatación, que es la energía asociada al estado hidrostático no tiene ninguna relación con el fallo. De hecho, se va a determinar la energía de distorsión calculando la energía total de deformación y sustrayendo a continuación la que se emplea en originar únicamente un cambio de volumen, es decir, la parte correspondiente a la tensión hidrostática.

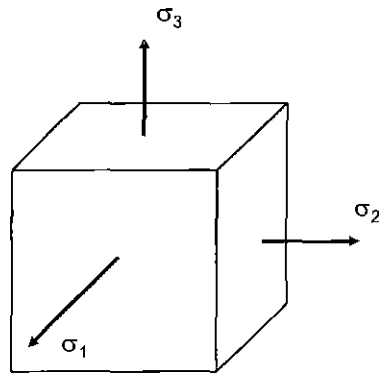


Figura 6.7. Estado triaxial de tensiones

Se comenzará recordando la expresión (4.52) que, para la energía elástica de deformación por unidad de volumen, se dedujo en el tema 4. Particularizando dicha expresión para un sistema de ejes cartesianos definido por las direcciones principales, se obtiene la siguiente expresión para U_o en función de las tensiones principales:

$$U_o = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right] = U_{ov} + U_{od} \quad (6.12)$$

donde estos dos últimos sumandos representan, respectivamente, la energía de dilatación y la energía de distorsión.

Para calcular la *energía de dilatación* U_{ov} , es decir, la energía de deformación asociada exclusivamente al cambio de volumen, bastará con sustituir las tensiones principales que figuran en la expresión (6.12) por el valor de la tensión hidrostática. En efecto, el estado genérico de tensiones que se está considerando puede obtenerse superponiendo los estados de tensiones mostrados en las fig. 6.8a y 6.8b, donde σ_m es la tensión media o hidrostática y σ_i' ($i=1,2,3$) las tensiones desviadoras. El estado de la fig. 6.8a tiende a cambiar el volumen del elemento de material, pero no la forma, pues se trata de una tensión hidrostática.

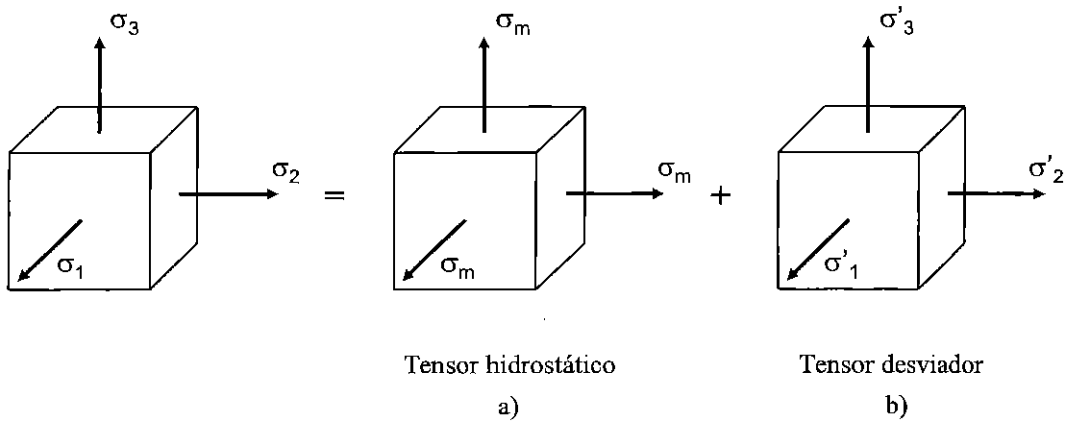


Figura 6.8. Estado genérico de tensiones. a): Estado hidrostático; b) Estado desviador

Por otra parte, de la propia definición de tensión hidrostática y tensión desviadora se deduce que:

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0 \quad (6.13)$$

lo que es significativo de que alguna de las tensiones mostradas en la fig. 6.8b son de tracción y otras de compresión y, en consecuencia, producen una distorsión del elemento. Por otra parte, la dilatación causada por este estado de tensiones es, teniendo en cuenta (6.13):

$$e' = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0 \quad (6.14)$$

Estas observaciones permiten concluir que la parte de energía de deformación correspondiente al cambio de volumen está asociada al estado de tensiones mostrado en la fig. 6.8a, en tanto que la correspondiente al cambio de forma o distorsión está asociada al estado tensional de la fig. 6.8b.

Por lo tanto, la energía de deformación relacionada con el cambio de volumen se obtendrá a partir de la ecuación (6.12), sustituyendo cada una de las tensiones principales por σ_m , es decir:

$$U_{ov} = \frac{1}{2E} [3\sigma_m^2 - 2\nu(3\sigma_m^2)] = \frac{3\sigma_m^2}{2E} (1-2\nu) \quad (6.15)$$

Sustituyendo σ_m por su valor en función de las tensiones principales:

$$\sigma_m^2 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9} \quad (6.16)$$

resulta:

$$U_{ov} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_1\sigma_3) \quad (6.17)$$

La energía de distorsión se obtendrá restando (6.12) y (6.17). Operando:

$$\begin{aligned} U_{od} &= U_o - U_{ov} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_2)] - \\ &\frac{1}{6E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1] + \\ &+ \frac{2\nu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_1\sigma_3) = \\ &= \frac{1}{6E} [(1+\nu)](2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_3^2) - (1+\nu)(2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (6.18)$$

Obsérvese que esta ecuación pone de manifiesto el resultado comentado de que la energía de distorsión es nula para un estado tensional en el que todas las tensiones principales son iguales (tensión hidrostática).

La aplicación de la teoría supone calcular el valor de la energía de distorsión asociada al momento de iniciación de la fluencia en el ensayo de tracción simple y utilizarlo como valor límite comparativo para un estado arbitrario de tensiones. De la ecuación (6.18) se puede obtener ese valor particularizando al estado uniaxial:

$$\sigma_1 = \sigma_f, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (6.19)$$

resultando:

$$U_{od} = \frac{1+\nu}{6E} \cdot 2\sigma_f^2 = \frac{\sigma_f^2}{3E} (1+\nu) \quad (6.20)$$

Finalmente, igualando (6.18) y (6.20):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} = \sigma_f \quad (6.21)$$

Es decir, *habrá fallo en un punto de un material si la combinación de tensiones principales definida en el primer miembro de la ecuación (6.21), expresión que se conoce con el nombre de **tensión equivalente de Von Mises**, iguala o supera el valor de la tensión de fluencia σ_f de ese material obtenida en un ensayo de tracción simple.*

6.6.2. Formulación de la tensión tangencial octaédrica

La fluencia se inicia cuando la tensión tangencial que actúa sobre los **planos octaédricos** (uno de los cuales, para un estado general de tensiones, se representa en la fig. 6.9) sobrepasa un valor crítico. Naturalmente, este valor crítico es el de la tensión tangencial octaédrica en el momento de iniciación de la fluencia en el ensayo de tracción.

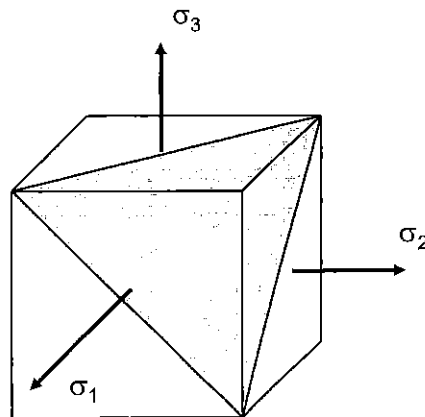


Figura 6.9. Plano octaédrico

Recuérdese que sobre los ocho planos octaédricos actúan idénticas tensiones normales σ_{oct} , que reciben el nombre de componentes hidrostáticas de la tensión y

tienden a modificar el volumen del octaedro formado por esos ocho planos, sin distorsionarlo. Análogamente, también son idénticas las tensiones tangenciales que actúan sobre los planos octaédricos, que tienden a distorsionar el octaedro sin variar su volumen.

El valor de la **tensión tangencial octaédrica** en función de las tensiones principales viene dado por:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (6.22)$$

En el momento de iniciación de la fluencia en el ensayo de tracción ($\sigma_1 = \sigma_f$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$):

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} [2\sigma_f^2]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f \quad (6.23)$$

que será entonces el valor crítico de comparación según esta teoría. Luego las deformaciones plásticas aparecerán cuando:

$$\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f \quad (6.24)$$

o bien:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_f \quad (6.25)$$

que se corresponde exactamente con la ecuación (6.21) obtenida a partir del concepto de energía de distorsión máxima.

6.6.3. Tensión equivalente y representación gráfica

Ya se ha dicho que la *tensión equivalente* del criterio de Von Mises es:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (6.26)$$

Para el caso de un estado de tensiones biaxial ($\sigma_3 = 0$), la ecuación (6.25) se reduce a:

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} = \sigma_f \quad (6.27)$$

ecuación que se representa en la fig. 6.10.

Si se opera en un sistema de referencia arbitrario xyz en lugar de hacerlo en el sistema principal de tensiones, la tensión equivalente (6.26) se puede expresar, para el caso biaxial ($\sigma_3 = 0$), en términos de las tensiones σ_{xx} , σ_{yy} y τ_{xy} , sin más que tener en cuenta la relación entre ambos sistemas:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.28)$$

Sustituyendo en (6.26) se obtiene:

$$\sigma_{eq} = (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (6.29)$$

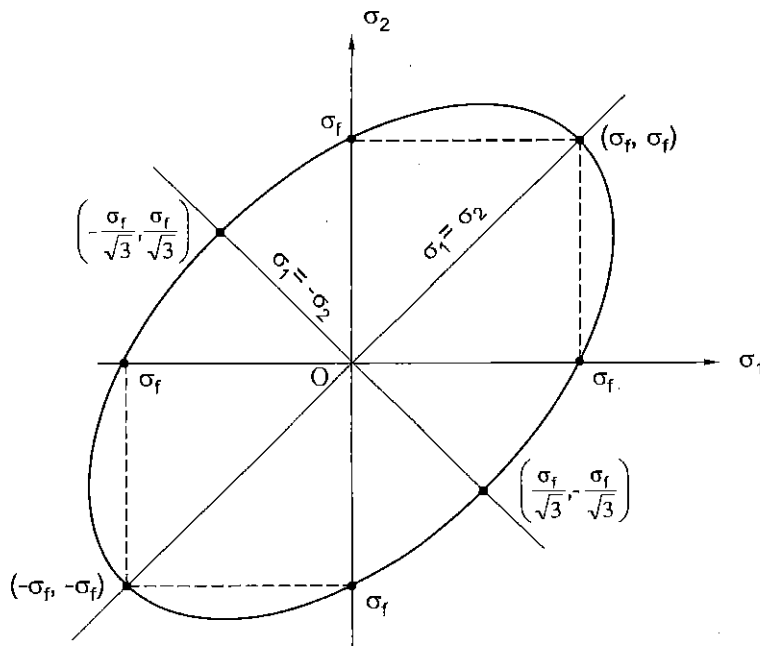


Figura 6.10. Criterio de fallo de Von Mises para un estado biaxial de tensiones.

Para un estado *triaxial de tensiones* la superficie de fallo es una superficie cilíndrica circular cuyo eje forma ángulos iguales con los tres ejes principales, y que tiene la particularidad de estar circunscrita a la superficie representativa de la teoría de Tresca (fig. 6.11). Por consiguiente, al igual que Tresca, la teoría de Von Mises también predice que no se producirá fallo en los casos hidrostáticos de tensiones, lo que está conforme con la evidencia experimental.

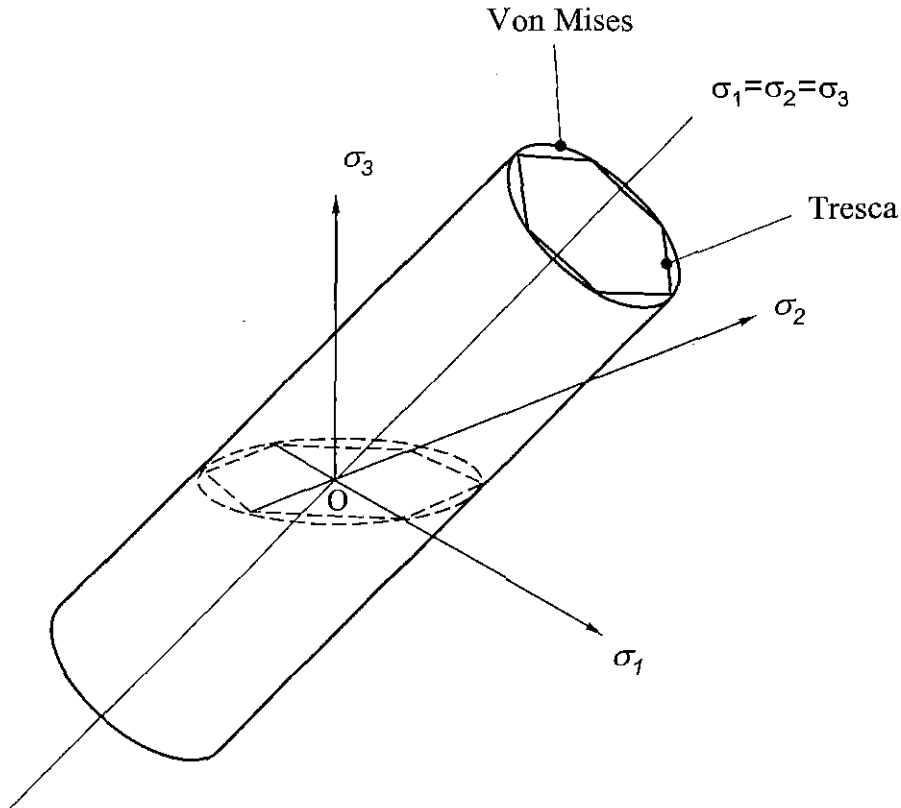


Figura 6.11. Criterio de fallo de Von Mises para un estado triaxial de tensiones.

Numerosas experiencias realizadas con materiales dúctiles han confirmado que la teoría de Von Mises es la que explica de un modo más satisfactorio el comienzo de las deformaciones plásticas ante cargas estáticas, por lo que en la actualidad es la teoría más utilizada para predecir el fallo en dichos materiales.

Ejemplo. Aplicando el criterio de Von Mises calcular el valor de la tensión cortante τ para el cual se produce el fallo en un estado de cortadura pura.

Para este estado de tensiones, en la fig. 6.12 se representa el círculo de mayor diámetro del correspondiente diagrama de los círculos de Mohr, con indicación expresa de los valores de las tensiones principales.

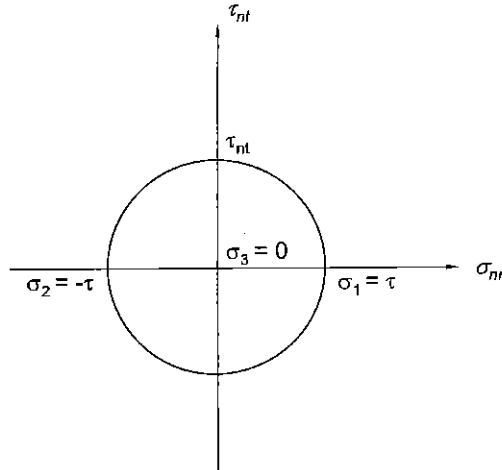


Figura 6.12. Estado de cortadura pura

Sustituyendo estos valores en (6.25), resulta:

$$\sqrt{3}\tau = \sigma_f \quad (6.30)$$

Esto significa que la fluencia comenzará para un valor de τ :

$$\tau = \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} = 0,577\sigma_f \quad (6.31)$$

que es totalmente acorde con los resultados experimentales obtenidos en materiales dúctiles. Por tanto, una conclusión básica de esta teoría es que la máxima tensión de cortadura es el 57,7% de la resistencia a tracción simple.

Trabaja mejor a compresión que a tracción.

6.7. TEORÍA DE MOHR

Las teorías de fallo expuestas en los epígrafes precedentes, y de forma especial la de la tensión tangencial máxima, han servido de base para la llamada **Teoría de los estados límites de Mohr** (1900), bastante aceptada en la actualidad para materiales

con distinta resistencia a la tracción que a la compresión. Una versión propuesta por Caquot en 1935 es la denominada **Teoría de la curva intrínseca**.

Su fundamento es el siguiente: en un estado tridimensional, el estado tensional de un punto viene representado por el diagrama de los círculos de Mohr (fig. 6.13, donde se supone $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$). Como es sabido, las coordenadas de un punto del área comprendido entre las tres circunferencias son los valores de las tensiones normal y tangencial correspondientes a un plano cualquiera. Los puntos pertenecientes a una misma vertical, como la MN , tienen por coordenadas las componentes intrínsecas de tensión asociadas a planos para los que la componente normal es la misma y únicamente difiere la componente tangencial. De todos estos planos de igual componente normal, el más débil, naturalmente, es el que corresponde al punto M situado sobre la circunferencia principal de mayor diámetro, puesto que es el de máxima tensión tangencial.

Repitiendo el razonamiento con cualquier otra vertical, se concluye que *los planos más débiles corresponden a los puntos de la circunferencia exterior*. Bastará, por consiguiente, considerar los círculos de mayor diámetro para determinar los estados tensionales para los que se produce el fallo.

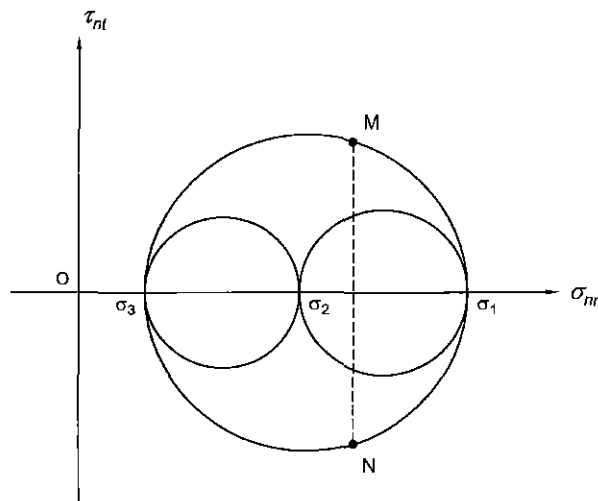


Figura 6.13. Estado tensional en un punto: diagrama de los círculos de Mohr

El procedimiento para determinar la representación gráfica de los estados límite es el siguiente. Se realizan diversos ensayos experimentales, cada uno de los cuales da

lugar a un estado de tensiones característico en el material (tracción, cortadura pura, etc.). Para cada uno de ellos se representa el mayor círculo de Mohr correspondiente al instante en el que se produce el fallo. A continuación, se traza la curva envolvente de todos los círculos límite. Esta envolvente se denomina **curva intrínseca** y es una característica del material. La teoría de Mohr admite la unicidad de esta curva y su independencia de los valores de las tensiones principales intermedias.

Se producirá el fallo en un punto de un material en el que existe un estado tensional dado, si su círculo de Mohr de mayor diámetro es tangente o corta a la curva intrínseca obtenida experimentalmente para ese material.

En la fig. 6.14 se representa dicha curva obtenida a partir de tres ensayos: tracción simple, compresión simple y cortadura pura, en un material dúctil para el que se supone distinta tensión de fluencia a tracción que a compresión.

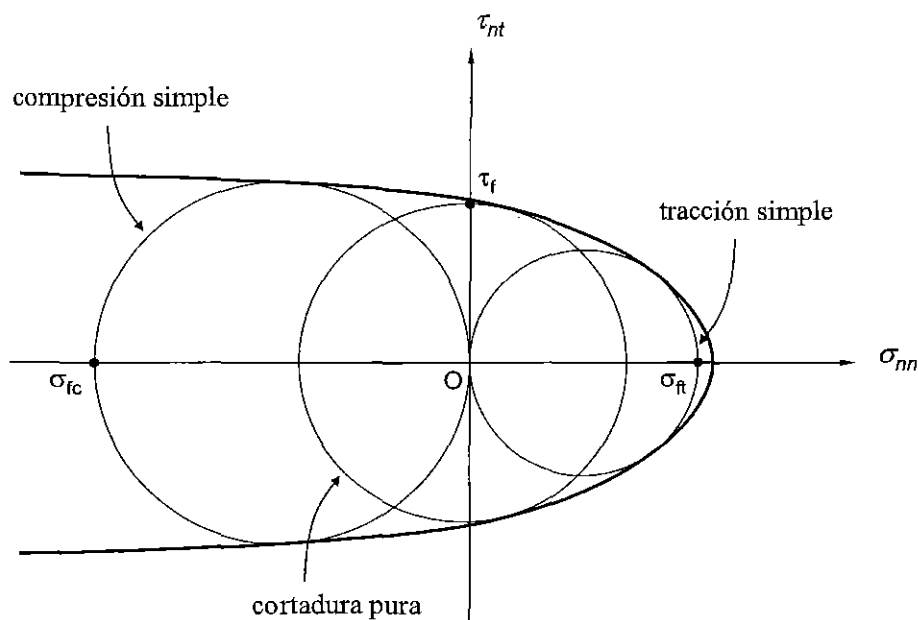


Figura 6.14. Curva intrínseca

La dificultad de aplicación de la teoría radica en que no es fácil determinar con exactitud la curva intrínseca de cada material. Por eso, muchas veces ésta se suele aproximar a la tangente común de los círculos límite correspondientes a los ensayos de tracción y compresión simple (fig. 6.15). De esta manera, la teoría puede considerarse como una modificación de la teoría de la máxima tensión tangencial, que

proporcionará resultados más precisos si se conocen los valores límites de los dos ensayos mencionados. Evidentemente, coincide con ella cuando el material es equirresistente.

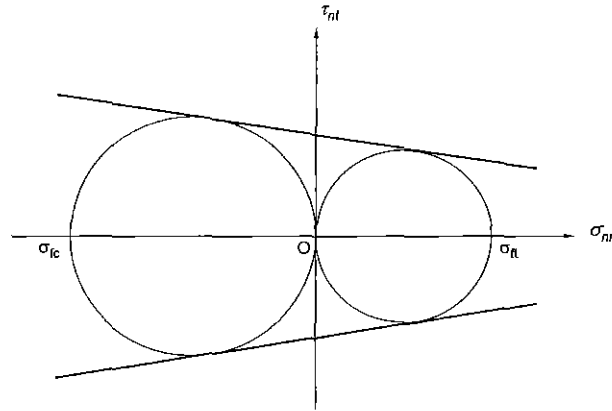


Figura 6.15. Curva intrínseca aproximada

Si se representara gráficamente la teoría de Mohr para un estado multiaxial de tensiones, la superficie de fallo sería bastante parecida al prisma hexagonal representativo de la teoría de Tresca. La diferencia principal es que ahora las superficies planas de este prisma son de diferente tamaño. La teoría de Mohr, al igual que la de Tresca, predice satisfactoriamente que no se originará fluencia plástica en un estado hidrostático de tensiones. En la fig. 6.16a se muestra su representación para el estado biaxial de tensiones.

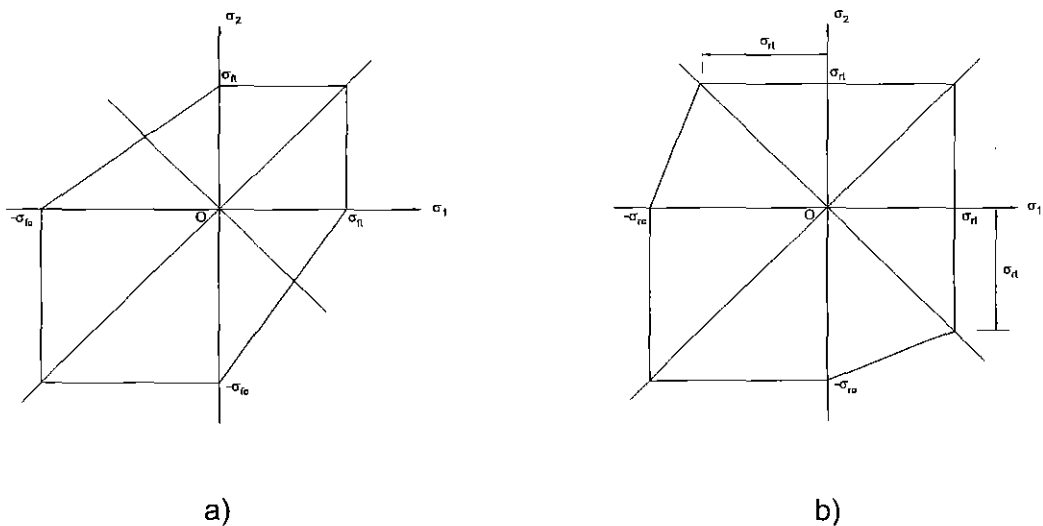


Figura 6.16. Teoría de Mohr: superficie de fallo para un estado biaxial de tensiones. a) Sin modificar; b) Teoría modificada

No es objeto de esta breve exposición estudiar la formulación matemática de la teoría de Mohr, formulación que, por otra parte, sólo puede obtenerse de forma aproximada. Cabe añadir que si el modo de fallo es por fluencia plástica y los comportamientos a tracción y compresión del material son significativamente diferentes, entonces esta teoría puede utilizarse con buenos resultados.

Además, para materiales frágiles que también presentan comportamientos significativamente diferentes a tracción y compresión, se ha establecido la llamada **Teoría de Mohr modificada**, que se ha comprobado es la que proporciona resultados más acordes con los datos experimentales. Esta modificación empírica, que se muestra en la fig. 6.16b, incluye una extensión lineal de valor σ_T de los contornos de fallo en el segundo y cuarto cuadrantes.

6.8. SELECCIÓN Y UTILIZACIÓN DE LAS TEORÍAS DE FALLO

En este apartado se comenta sucintamente en qué casos son aplicables las diferentes teorías de fallo estudiadas y cuáles son los criterios para su selección. Recuérdese que existen una serie de situaciones prácticas de considerable interés, tales como el caso de pandeo, creep, cargas de impacto y fatiga, para las cuales las teorías de fallo expuestas no son aplicables, pues el estudio de estos fenómenos requeriría consideraciones adicionales. Lo mismo puede decirse para elementos de máquinas o estructuras en los que se produce concentración de tensiones por la presencia de orificios, entalladuras, etc., concentraciones que tienen una gran importancia si el material es frágil. Evidentemente, todas estas situaciones quedan al margen del campo de aplicación de las teorías de fallo expuestas.

Antes de hacer un comentario más detenido, en la fig. 6.17 se representan los criterios de fallo más representativos, para un estado biaxial de tensiones y material equirresistente. Fácilmente pueden apreciarse las principales similitudes y discrepancias que entre ellas existen. Por otra parte, la fig. 6.18, que recoge resultados experimentales obtenidos para estados biaxiales de tensiones en materiales frágiles (izquierda) y dúctiles (derecha), permite verificar la validez de dichas teorías.

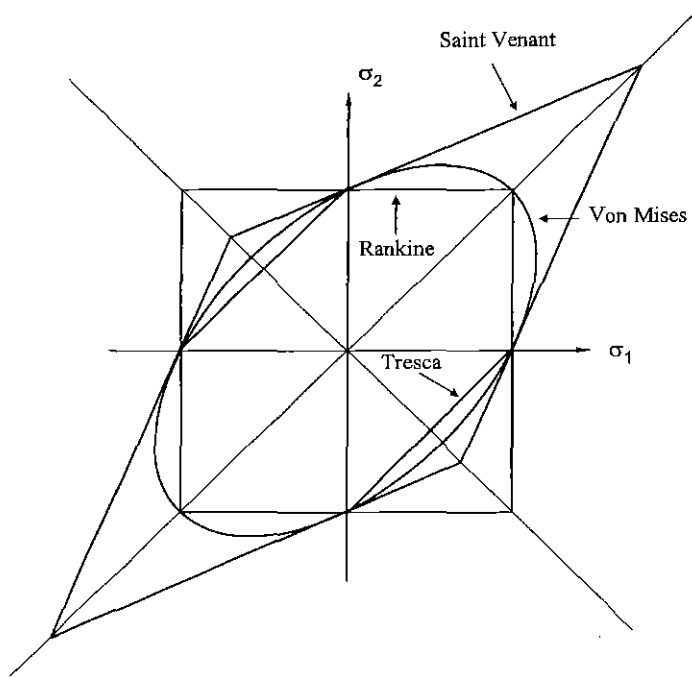


Figura 6.17. Comparación de distintas teorías de fallo para un estado biaxial de tensiones

La evaluación de las teorías de fallo discutidas en este capítulo a la luz de los datos obtenidos experimentalmente, conduce a las siguientes conclusiones:

- Para materiales equirresistentes que fallan por fractura frágil, la teoría de la tensión normal máxima (Rankine) proporciona buenos resultados.
- Para materiales que fallan por fractura frágil pero que tienen una tensión de rotura a compresión significativamente diferente de la de tracción, la teoría más adecuada es la de Mohr modificada.
- Para materiales equirresistentes que fallan por fluencia plástica, la mejor teoría es la de la máxima energía de distorsión (Von Mises), aunque puede afirmarse que, para estos casos, la teoría de la tensión tangencial máxima (Tresca) proporciona unos resultados casi tan buenos como la anterior, ligeramente más conservadores.

- Para materiales que fallan por fluencia pero que tienen una tensión de fluencia a compresión significativamente diferente de la de tracción, resulta más apropiada la teoría de Mohr.

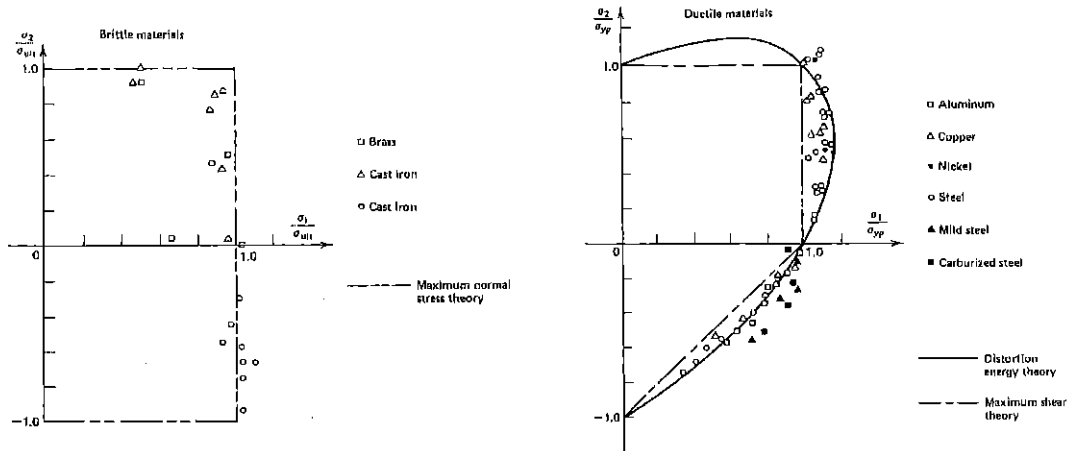
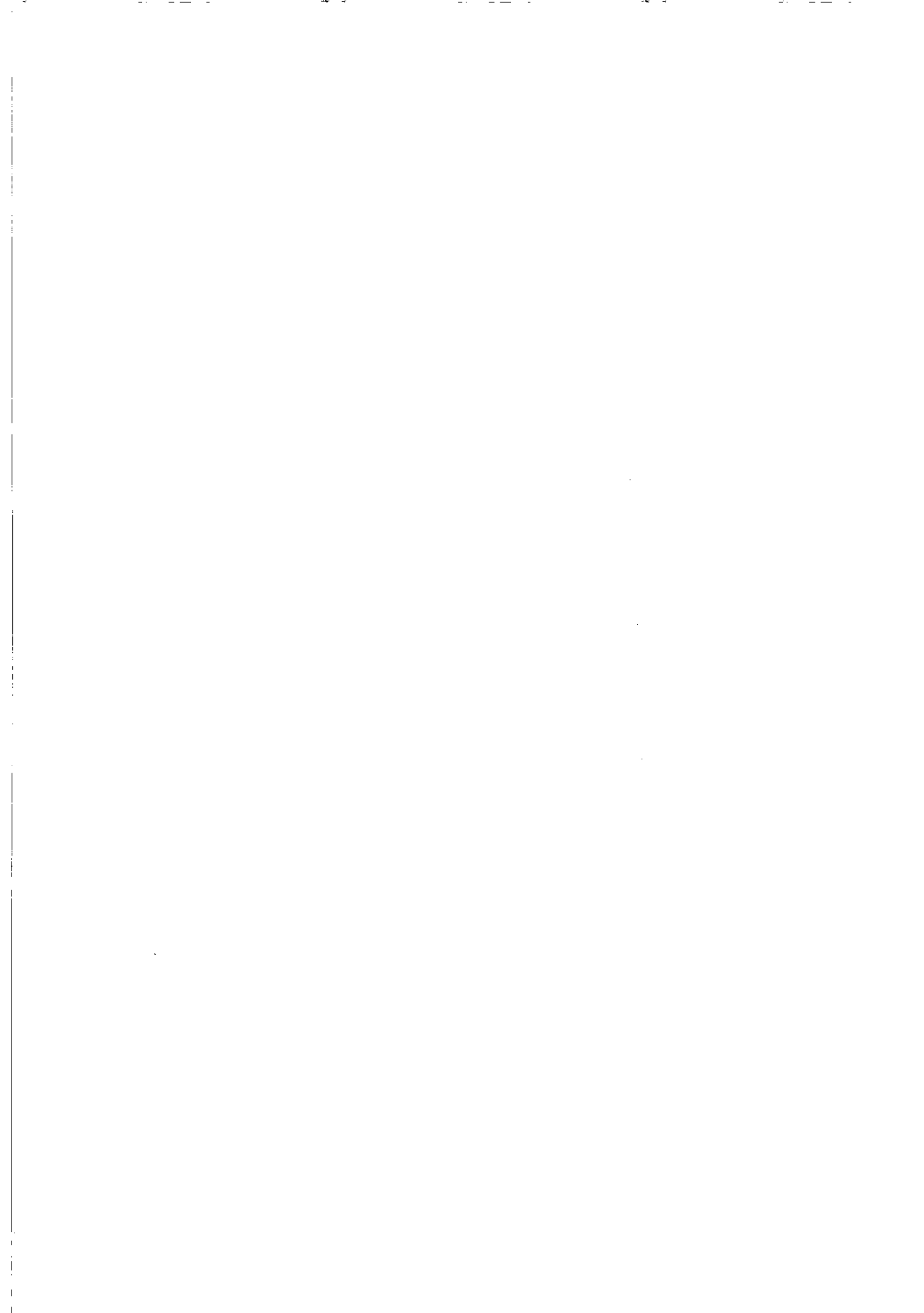
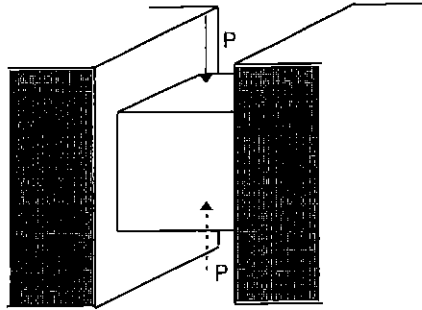


Figura 6.18. Resultados experimentales para distintos materiales frágiles y dúctiles: comparación con las teorías de fallo

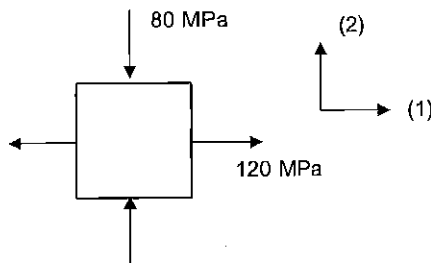


PROBLEMAS

6.1. Calcular el valor de la carga P que produce el agotamiento del cubo de la figura, según las siguientes teorías de fallo: Rankine, Saint-Venant, Tresca y Von Mises. El cubo tiene arista unidad y es de un material equirresistente de tensión de fluencia σ_f y coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Se supone contacto sin rozamiento.

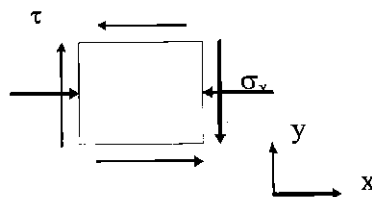


6.2. Calcular el coeficiente de seguridad con que trabaja el cubo de la figura, de características mecánicas: $\nu = 0,3$ y $\sigma_f = 240$ MPa, según las mismas teorías de fallo del problema anterior.



6.3. En una pieza de porcelana, cuyas tensiones de rotura en tracción y compresión simple son, respectivamente, $\sigma_t = 3$ MPa y $\sigma_c = -12$ MPa, el estado tensional más desfavorable es el indicado en la figura. Siendo $\nu = 0,1$, calcular el coeficiente de seguridad respecto al estado de agotamiento según las teorías de Rankine, Saint-Venant y Tresca.

Datos del problema: $\sigma_{xx} = 1,8$ MPa; $\sigma_{yy} = 0$; $\sigma_{zz} = 0$; $\tau_{xy} = 1,2$ MPa.

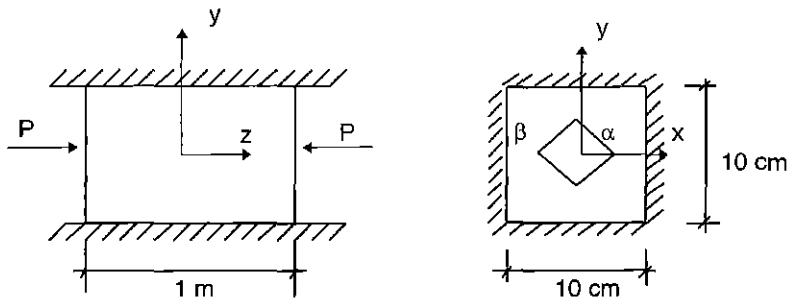


6.4. La barra de acero de la figura, de material equirresistente de características:

$$E = 200 \text{ GPa}; \quad \sigma_f = 200 \text{ MPa}; \quad \nu = 0,3$$

está sometida a la carga $P = 500 \text{ kN}$, y encaja transversalmente en una cavidad indeformable. Se pide:

- 1º) Dibujar el diagrama de los círculos de Mohr para un punto del interior de la barra, indicando los puntos que corresponden a los planos α y β , paralelos al eje z , y que forman 45° con los ejes x e y .
- 2º) Determinar el coeficiente de seguridad con que trabaja el material según las teorías de Rankine, Saint-Venant, Tresca y Von Mises.

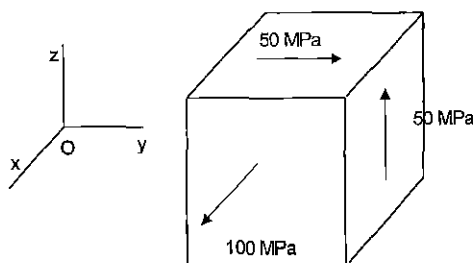


6.5. Sobre un cubo de arista unidad, orientado paralelamente a los ejes xyz , se aplican las tensiones:

$$\sigma_{xx} = 100 \text{ MPa} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 50 \text{ MPa}$$

- 1º) Determinar las tensiones y direcciones principales. Representar los planos principales en el cubo de la figura.
- 2º) Dibujar el diagrama de los círculos de Mohr, debidamente acotado, y señalar el valor de la tensión cortante máxima.
- 3º) Determinar el coeficiente de seguridad con que trabaja el material según las teorías de fallo de Rankine, Saint-Venant, Tresca y Von Mises.

Material equirresistente de características: $E = 200 \text{ GPa}; \quad \sigma_f = 200 \text{ MPa}; \quad \nu = 0,3.$



6.6. En un punto de un sólido elástico se sabe que:

- las tres tensiones principales son de tracción,
- dos de ellas son 5 y 35 MPa,
- la tensión tangencial máxima es de 20 MPa.

1º) Obtener el diagrama de los círculos de Mohr, razonando brevemente la solución adoptada.

2º) Tensión normal asociada al plano de máxima tensión tangencial.

3º) Coeficiente de seguridad frente al fallo según los criterios de Rankine, Saint-Venant, Tresca y Von-Mises.

Características mecánicas del material: $\sigma_f = 80 \text{ MPa}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$

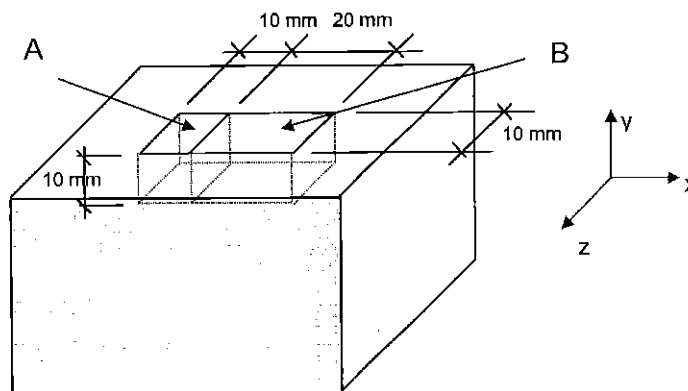
6.7. La figura representa un bloque rígido con una ranura de 30 mm de longitud, 10 mm de anchura y 10 mm de profundidad. En la ranura se alojan sin presión ni holgura 2 bloques de acero A y B de dimensiones A (10x10x10 mm³) y B (20x10x10 mm³). Sobre la cara libre del bloque A se aplica una fuerza de compresión uniformemente repartida de 8 kN, y la temperatura de ambos se eleva en 20°C.

1º) Calcular las tensiones principales y dibujar el diagrama de los círculos de Mohr para un punto del interior del bloque A y otro punto del interior del bloque B.

2º) Determinar el coeficiente de seguridad con que trabajan ambos bloques según el criterio de fallo de Tresca.

Se desprecia el rozamiento entre paredes.

Las constantes características del acero son: $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_f = 240 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$
 $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$



6.8. Un paralelepípedo de dimensiones a, b, c según los ejes xyz , respectivamente, se encuentra alojado en una cavidad de una losa indeformable, tal como se muestra en la figura. En la dirección del eje y está en contacto con una placa que a su vez está unida a un muelle de constante k , sin deformación inicial. En la dirección del eje x no existe huelgo alguno entre losa y paralelepípedo. Este se somete a un incremento de temperatura ΔT .

Supuestos conocidos el módulo de elasticidad E del material del paralelepípedo, su coeficiente de dilatación lineal α y su coeficiente de Poisson ν , calcular:

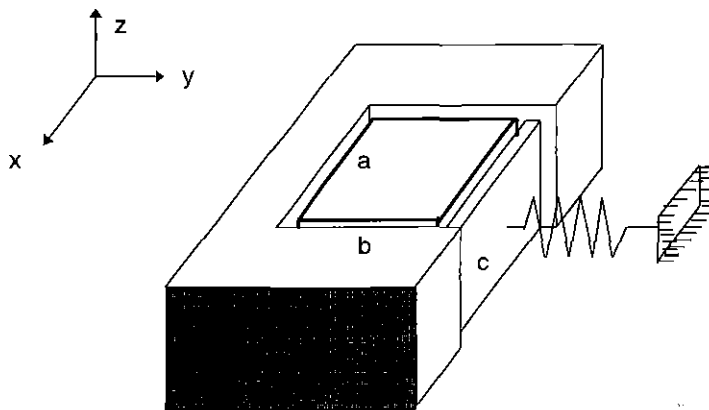
1º) La matriz de tensiones.

2º) Componentes intrínsecas del vector tensión asociado al plano que forma ángulos iguales con los ejes xyz .

3º) Dibujar el diagrama de los círculos de Mohr para un punto cualquiera del paralelepípedo, y calcular el coeficiente de seguridad con el que trabaja según la teoría de Tresca.

Datos del problema:

$a = 50 \text{ mm}$	$E = 200 \text{ GPa}$	$\sigma_f = 240 \text{ MPa}$
$b = 100 \text{ mm}$	$\alpha = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}^{-1}$	$\Delta T = 80 \text{ }^\circ\text{C}$
$c = 50 \text{ mm}$	$\nu = 0,3$	$k = 10^5 \text{ N/mm}$



6.9. El conjunto de la figura está formado por tres cubos A, B y C de 1 cm de lado, alojados en el interior de una cavidad indeformable. Los cubos B y C están separados del cubo A mediante una placa infinitamente rígida, de forma que el cubo superior está centrado en dicha placa. Los cubos están contruidos con acero de módulo de elasticidad $E = 200 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$, tensión de fluencia $\sigma_f = 360 \text{ MPa}$ y coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. No existe rozamiento entre las superficies en contacto y se considera despreciable el peso de todos los elementos.

Se somete al cubo A a un incremento de temperatura ΔT . Se pide:

- 1º) Matrices de tensiones en los puntos de los tres cubos respecto del sistema de referencia indicado en la figura, cuando $\Delta T = 130 \text{ }^\circ\text{C}$.
- 2º) Máximo incremento de temperatura admisible sin que se produzca el fallo en ninguno de los cubos según el criterio de Tresca.

