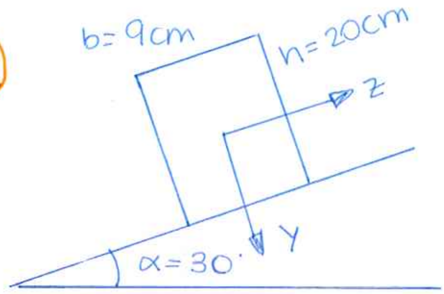
1.1



- sección $\begin{cases} b = 9cm \\ h = 20cm \end{cases}$

$AB = L = 4m$

$\alpha = 30°$

$q = 6 \ \frac{kN}{m}$

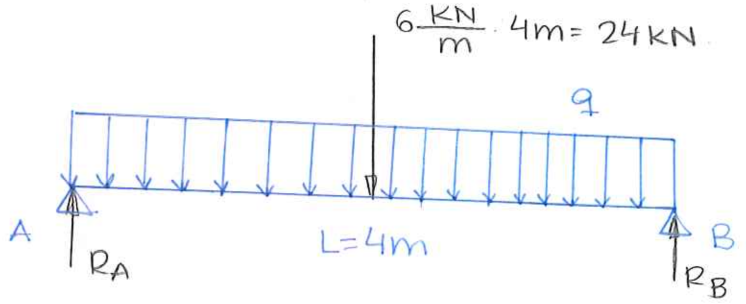
STEINER:

$I_z' = I_z + A \cdot r^2$

I_z: momento de inercia respecto al eje que pasa por Y_G

A: área de la figura plana.

r: distancia del eje z al eje z'



1) TENSIONES NORMALES MÁXIMAS.

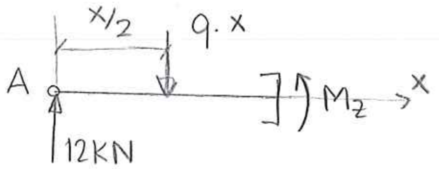
- Las tensiones serán máximas en el punto en que el momento sea máximo.

1° REACCIONES

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 24kN \Rightarrow \boxed{R_A = 12kN}$

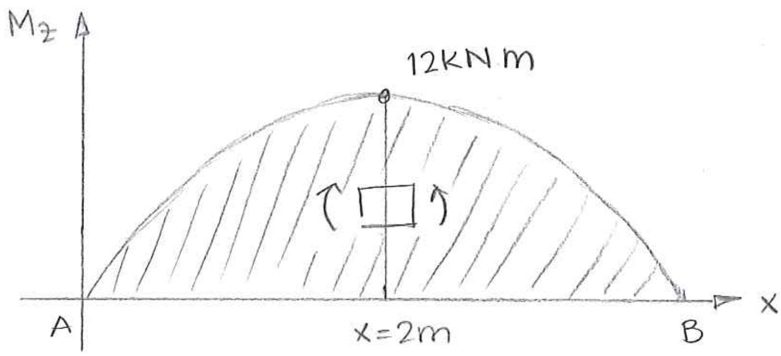
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot 4m - 24kN \ 2m = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = 12kN}$

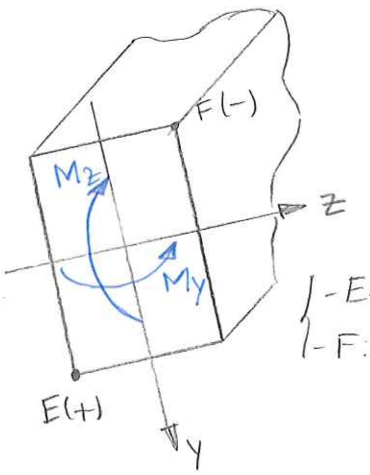
2° DIAGRAMA DE ESFUERZOS



$M_z + \frac{q}{2} x^2 - 12 \cdot x = 0 \ [kN \cdot m]$

$$\left.\begin{array}{l} M_z = 12x - 3x^2 \ [kN \cdot m] \\ \text{- Momento máximo: } \frac{dM_z}{dx} = 0 \Rightarrow 12 - 6 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 2m. \end{array}\right\} M_z(2m) = 12 kN \ m$$

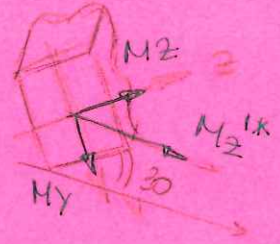




$$\begin{cases} M_y = M_{máx} \cdot sen30 = 12\,KNm \cdot 0'5 = 6\,kNm \\ M_z = M_{máx} \cdot cos30 = 12\,KNm \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,KN.m \end{cases}$$

- E: máxima tracción
- F: máxima compresión

¿Direcciones M_z y M_y?



3. DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES

$$\boxed{\sigma_{xx}} = -\frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} = -\frac{6\,KN.m \cdot z}{1'215 \cdot 10^{-5} m^4} + \frac{6\sqrt{3}\,KN.m \cdot y}{6 \cdot 10^{-5} m^4} =$$

$$\begin{cases} I_y = \frac{1}{12} 20cm(9cm)^3 = 1'215 \cdot 10^{-5} m^4 \\ I_z = \frac{1}{12} 9cm(20cm)^3 = 6 \cdot 10^{-5} m^4 \end{cases}$$

$$= \boxed{-493,827 \cdot z + 173'205\,y \; [MPa]}$$

(x e y en metros)

4. TENSIONES MÁXIMAS

$$\sigma^{(+)}_{xx,máx} = \sigma_{xx}(0'1; -0'045) = -493,827(-0'045) + 173'205 \cdot 0'1 = 39'54\,MPa$$

$$\sigma^{(-)}_{xx,máx} = \sigma_{xx}(-0'1; 0'045) = -493,827\,(0'045) + 173'205(-0'1) = -39'54\,MPa$$

Tensiones normales máximas ⇒ $\sigma^{(+)}_{xx,máx} = 39'54\,MPa$
$\sigma^{(-)}_{xx,máx} = -39'54\,MPa$

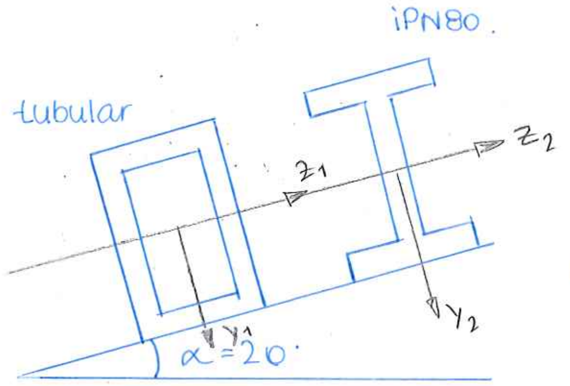
2) ECUACIÓN DEL EJE NEUTRO.

- El eje neutro es el lugar geométrico de los puntos en que $\sigma_{xx} = 0$.

$$\sigma_{xx} = -493'827 \cdot z + 173'205\,y = 0 \Rightarrow y = 2'851\,z$$

Eje neutro ⇒ $y = 2'851z$

1.2



- iPN80: $I_y = 6{,}29\,cm^4$, $I_z = 77'8\,cm^4$
- tubular: $b = 40mm$, $h = 80mm$, $e = 2mm$

} Mismo material

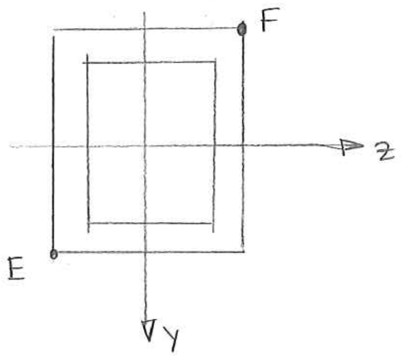
Ante una carga vertical cualquiera

1) ¿PERFIL MÁS RESISTENTE?

Tendríamos un momento máximo M que si lo descomponemos:

$$\begin{cases} M_z = M \cdot \cos 20 \\ M_y = M \operatorname{sen} 20 \end{cases}$$

- PERFIL TUBULAR:



$$I_z = \frac{1}{12}\left[4\,cm(8cm)^3 - 3'6cm\,(7'6cm)^3\right] =$$

$$= 38'9739\,cm^4$$

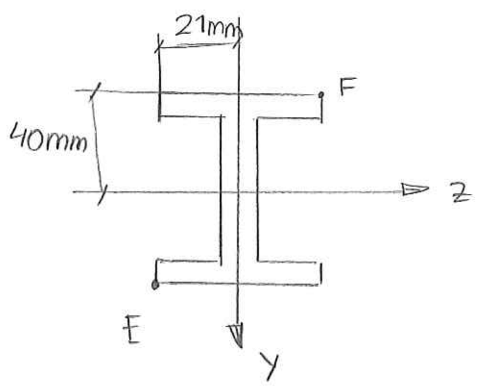
$$I_y = \frac{1}{12}\left[8cm(4cm)^3 - 7'6cm(3'6cm)^3\right] = 13'1179cm^4$$

- Tracción máxima: $\sigma_{xx}(E)$

$$\sigma_{xx}^{TUB} = -\frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} \Rightarrow \sigma_{xx}^{TUB}(E) = \sigma_{xx}^{TUB}(4,-2) = -\frac{M \cdot \operatorname{sen}20 \cdot (-2)}{13'1179} + \frac{M \cos 20 \cdot (4)}{38'9739} =$$

$$= 0'1486 \cdot M$$

- PERFIL iPN



- Tracción máxima: $\sigma_{xx}(E)$

$$\sigma_{xx}^{IPN} = -\frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

$$\sigma_{xx}^{iPN}(E) = \sigma_{xx}^{iPN}(4,-2'1) = -\frac{M \operatorname{sen}20(-2'1)}{6'29} + \frac{M \cos 20\,(4)}{77'8} =$$

$$= 0'1625M$$

$\sigma_{xx}^{IPN} > \sigma_{xx}^{TUB}$ cuando son sometidas a la misma carga vertical.

El perfil tubular será más resistente, en un 9'354%.

$$\frac{\sigma_{xx}^{IPN} - \sigma_{xx}^{TUB}}{\sigma_{xx}^{TUB}} \cdot 100 = 9'354\%$$

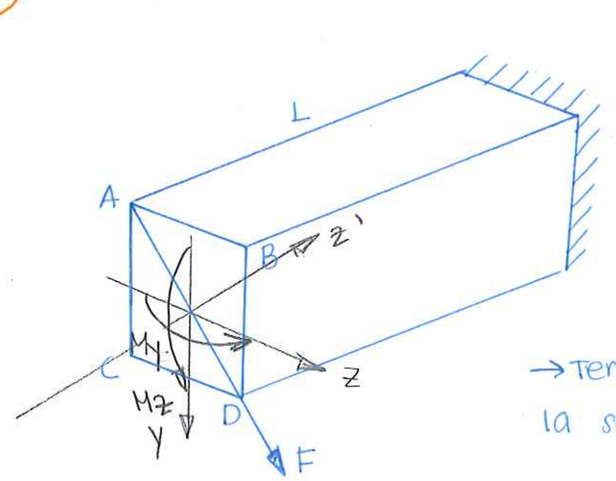
2) VALOR DE α PARA EL CUAL SON IGUAL DE RESISTENTES

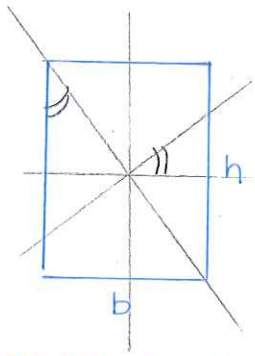
$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx}^{IPN}(\alpha, M) &= -\frac{M \cdot sen(\alpha) \cdot (-2'1)}{6'29} + \frac{M cos(\alpha)(4)}{77'8} \\ \sigma_{xx}^{TUB}(\alpha, M) &= -\frac{M sen(\alpha) \cdot (-2)}{13'1179} + \frac{M cos(\alpha) \cdot 4}{38'9739} \end{aligned}\right\} \sigma_{xx}^{IPN}(\alpha, M) = \sigma_{xx}^{TUB}(\alpha, M)$$

$$\alpha = 15'767^{\circ}$$

serán igual de resistentes para $\alpha = 15'767^{\circ}$

1.3





- Datos

$F = 5 kN$

$L = 2 m$

$h = 40 cm$

$b = 30 cm$

→ Tensión en los puntos medios de los lados de la sección para $x = 1m$

1 REACCIONES

$\Sigma F_x = 0 : \boxed{R_x = 0}$

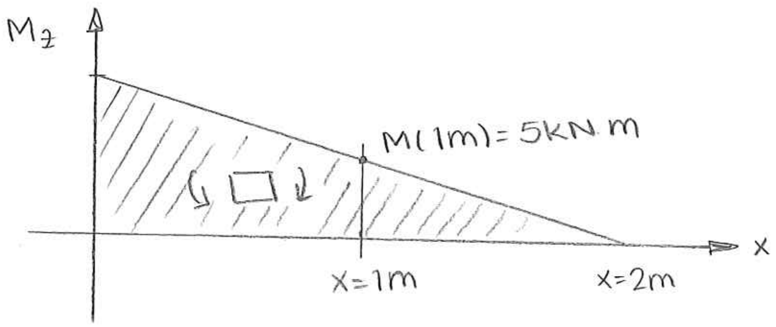
$\Sigma F_y = 0 : \boxed{R_y = 5 kN}$

$\Sigma M_z = 0 : M_z + 5kN \cdot 2m = 0 \Rightarrow \boxed{M_z = -10 kNm}$

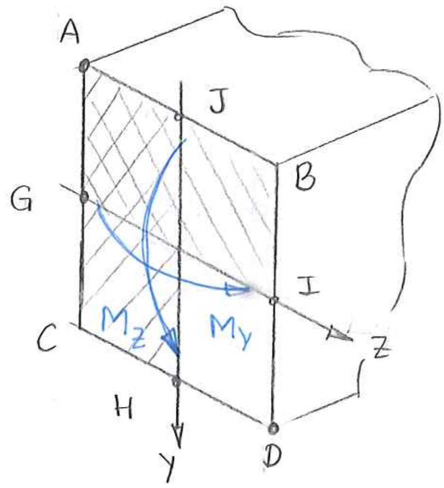
2 DIAGRAMA DE ESFUERZOS

$M_z + 10 kNm - 5kN \cdot x = 0 \Rightarrow M_z = 5kN \cdot x - 10 kN \cdot m$

$M(1m) = 5kN \cdot 1m - 10kNm = -5kN \cdot m$



$$\begin{cases} M_z = M \cdot \cos\alpha = M \cdot \frac{4}{5} = 4kN \cdot m \\ M_y = M \operatorname{sen}\alpha = M \cdot \frac{3}{5} = 3kN \cdot m \end{cases}$$



$\begin{cases} \text{Tracción máxima} \Rightarrow A \\ \text{Compresión máxima} \Rightarrow D \end{cases}$

3. DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z \cdot y}{I_z} - \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

$$I_z = \frac{1}{12}\, 30cm (40cm)^3 = 16 \cdot 10^4\ cm^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}\, 40cm (30cm)^3 = 9 \cdot 10^4\ cm^4$$

$\sigma_{xx}(y,z) = -2{,}5\, y - 3'33\, z$ [MPa]

(y y z en metros)

$G(0, -0'15) \Rightarrow \sigma_{xx}(G) = 0'5 MPa$

$H(0'2, 0) \Longrightarrow \sigma_{xx}(H) = -0'5 MPa$

$I(0, 0'15) \Longrightarrow \sigma_{xx}(I) = -0'5 MPa$

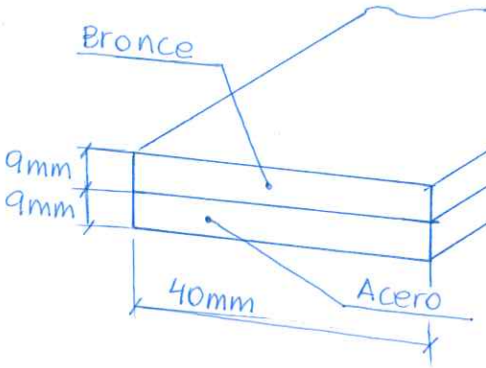
$J(-0'2, 0) \longrightarrow \sigma_{xx}(J) = 0'5 MPa$

Las tensiones en los puntos medios son $\Rightarrow \sigma_{xx}(G) = \sigma_{xx}(J) = 0'5 MPa$

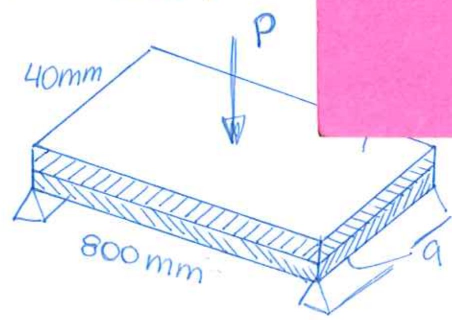
$\sigma_{xx}(H) = \sigma_{xx}(I) = -0'5 MPa$

1.4

¿Luz de 80cm?
Si no vas bien pon 1m



$L = 80\,cm$
(Luz : 80cm)

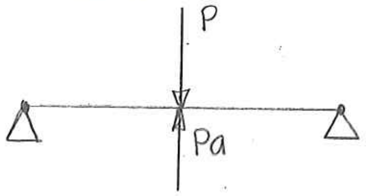


● DATOS

* Módulos de elasticidad : $E_a = 210\,GPa$; $E_b = 84\,GPa$
* Tensiones admisibles : $\sigma^a_{adm} = 120\,MPa$; $\sigma^b_{adm} = 80\,MPa$.

∴ Las barras deslizan.

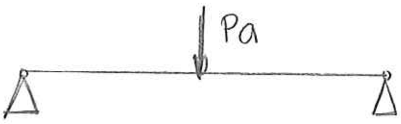
● Bronce :



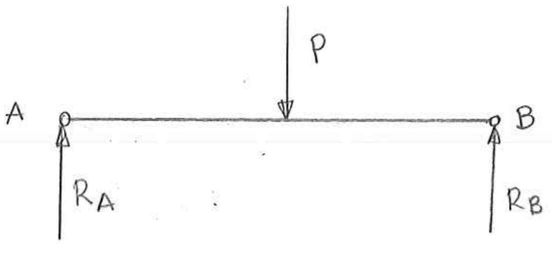
$\Rightarrow P_b = P - P_a$ → $\boxed{P = P_a + P_b}$

La carga que soporta cada una de las barras.

● Acero :



1. REACCIONES

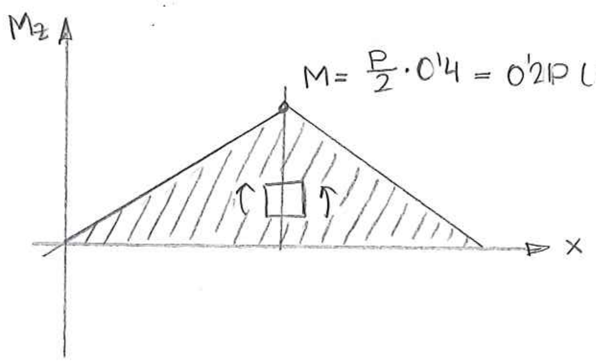


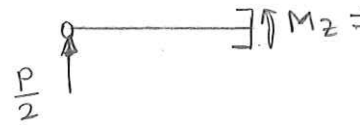
$\Sigma F_y = 0 : R_A + R_B = P$

Por simetría : $\boxed{R_A = R_B = R = \frac{P}{2}}$

2. DIAGRAMA DE ESFUERZOS

$M = \frac{P}{2} \cdot 0'4 = 0'2P \;(N \cdot m)$

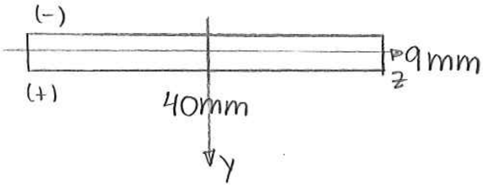




$\Rightarrow M_z = \frac{P}{2} x$

3° TENSIONES ADMITIDAS

- $\sigma^{(a)}_{xx,adm} = 120 MPa = \dfrac{M_{z,máx} \cdot y_{máx}}{I_z}$



$$120 MPa = \frac{0'2\, P_a \cdot 4'5 mm}{2'43 \cdot 10^{-9} m^4} \Rightarrow \boxed{P_a = 324 N}$$

$$I_z = \frac{1}{12}\, 40mm\, (9mm)^3 = 2'43 \cdot 10^{-9} m^4$$

$$\delta = \frac{1}{E \cdot I}\left[\frac{1}{2} \cdot 0'4 \cdot 0'2P \cdot \frac{2}{3} 0'4\right] = \frac{P}{EI} \cdot 0'010\hat{6}\ (m)$$

$$\delta_A = \delta_B \Rightarrow \frac{P_a}{E_a \cdot I} \cdot 0'010\hat{6} = \frac{P_b}{E_b \cdot I} \cdot 0'010\hat{6} \Rightarrow \frac{P_a}{E_a} = \frac{P_b}{E_b} \Rightarrow \frac{P_a}{P_b} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{210}{84} = 2'5$$

$$\boxed{P_a = 2'5 P_b}$$

$$\boxed{P_b = 0'4 \cdot P_a = 0'4 \cdot 324 N = 129'6 N}$$

$$\sigma^{b}_{xx} = \frac{0'2 \cdot P_b \cdot 4'5mm}{2'43 \cdot 10^{-9} m^4} = 48 MPa < 80 MPa$$

$$\boxed{P_{máx} = P_a + P_b = 324 N + 129'6 N = 453{,}6 N}$$

- $\sigma^{(b)}_{xx,adm} = 80 MPa = \dfrac{M_{z,máx} \cdot y_{máx}}{I_z}$

$$80 MPa = \frac{0'2 \cdot P_b \cdot 4'5mm}{2'43 \cdot 10^{-9} m^4} \Rightarrow \boxed{P_b = 216 N}$$

$$\boxed{P_a = 2'5 \cdot P_b = 540 N}$$

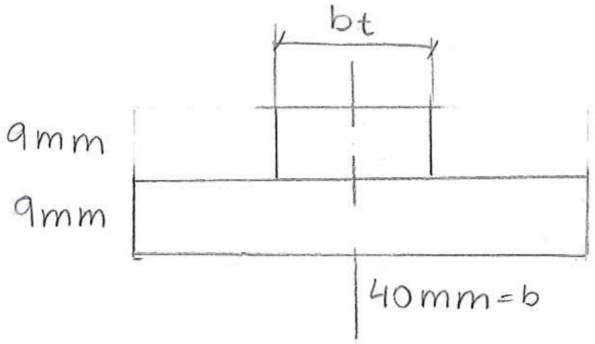
$$\sigma^{a}_{xx} = \frac{0'2 P_a \cdot 4'5mm}{2'43 \cdot 10^{-9} m^4} = 200 MPa > 120 MPa$$

Primero, obtenemos la relación entre P_a y P_b sabiendo que la flecha de ambas debe ser la misma. Calculamos la $P_{a,máx}$ a partir de la $\sigma^{(a)}_{xx,adm}$ y comprobamos que la $\sigma^{(b)}_{xx}$ está dentro del rango. Luego repetimos el procedimiento pero a partir de $\sigma^{(b)}_{xx,adm}$

- El acero llega antes que el bronce a la $\sigma_{xx,adm}$ luego será este el que marque el límite de la carga soportada.

$$\boxed{P_{máx} = 453{,}6 N}$$

2) Las barras forman una sóla pieza.



● Igual resistencia:

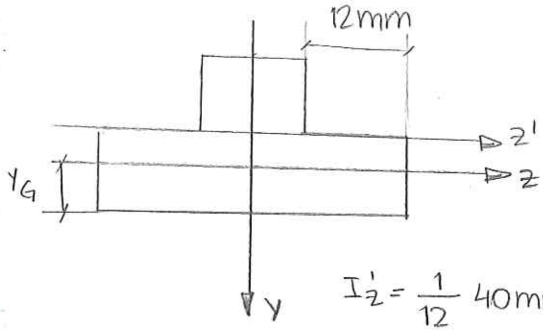
$dF_r = dF_t$

$\sigma_b \cdot b \cdot dy = \sigma_t \cdot b_t \cdot dy$

$b_t = b \cdot \frac{\sigma_b}{\sigma_t}$

$\boxed{b_t = 16mm}$

● Igual rigidez: $\varepsilon_r = \varepsilon_t \Rightarrow \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_t}{E_a} \Rightarrow \frac{\sigma_b}{\sigma_t} = \frac{E_b}{E_a} = \frac{84\,GPa}{210\,GPa} = 0'4$



$(16mm\ 9mm + 40mm\ 9mm)\,Y_G =$

$= 16mm\ 9mm\ 13'5mm + 40mm\ 9mm\ 4'5mm$

$\underline{\underline{Y_G = 7'07mm}}$

$I_z' = \frac{1}{12}\,40mm \cdot (18mm)^3 - 2 \cdot \frac{1}{3}\,12mm \cdot (9mm)^3 = 1.3608 \cdot 10^{-8}m^4$

STEINER $\hookrightarrow$ $I_z' = I_z + [40mm\ 18mm - 2 \cdot 12mm\ 9mm] \cdot (9mm - 7'07mm)^2$

$I_z = 1'17306\ 10^{-8}m^4 \{\approx 1'173343\ 10^{-8}m^4\}$

$$\sigma^{(b)}_{xx,adm} = 80\,MPa = \left(\frac{0'2\,P \cdot (18 - 7'07)\,mm}{1'173343\ 10^{-8}m^4}\right) \cdot \frac{84\,GPa}{210\,GPa} \Rightarrow \boxed{P = 1073{,}51N}$$

(arrows: σ_t, E_b/E_a)

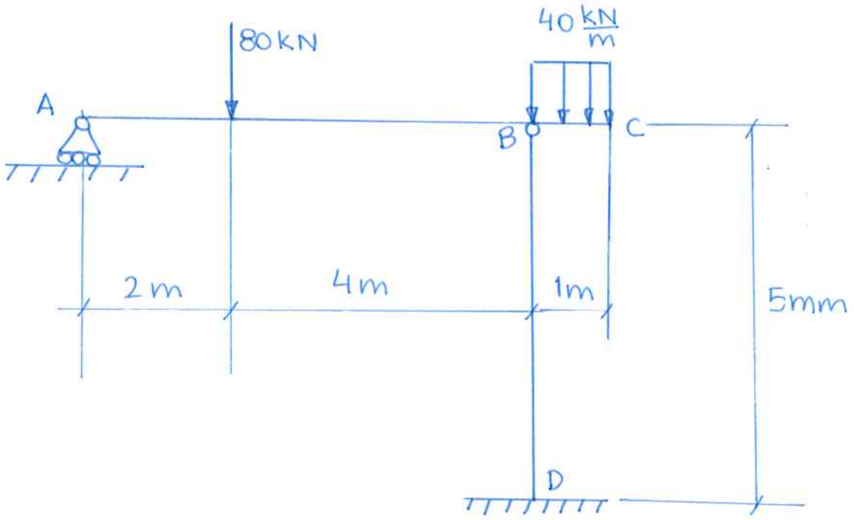
$$\sigma^{(a)}_{xx,máx} = \frac{0'2 \cdot 1073'51 \cdot 7'07mm}{1'173343 \cdot 10^{-8}m^4} = 129'37\,MPa > \sigma^{(a)}_{xx,adm}$$

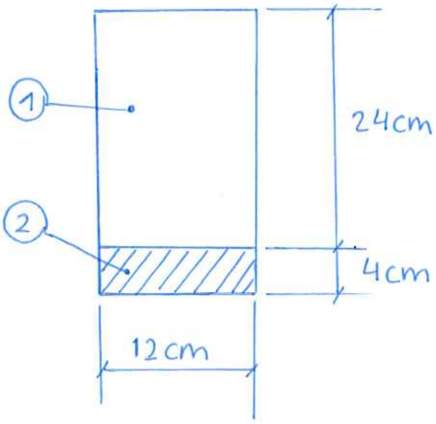
$$\sigma^{(a)}_{xx,adm} = 120MPa = \frac{0'2 \cdot P \cdot 7'07mm}{1'173343\,10^{-8}m^4} \Rightarrow \boxed{995'76\,N = P}$$

$$\sigma^{(b)}_{xx,máx} = \frac{0'2 \cdot 995'76\,(18-7'07)\,mm}{1'173343 \cdot 10^{-8}m^4} \cdot \frac{84\,GPa}{210\,GPa} = 74{,}21MPa < \sigma^{(b)}_{xx,adm}$$

$\boxed{P_{máx} = 995'76N}$

1.5

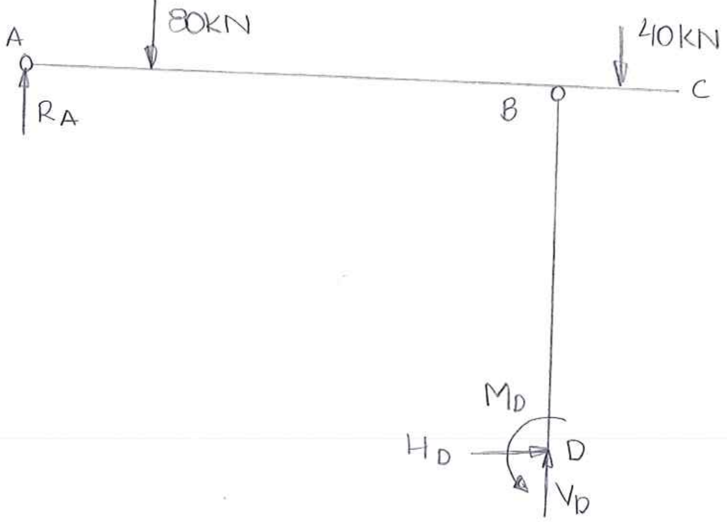




- Módulos de elasticidad : $E_1 = 10$ GPa.
  $E_2 = 200$ GPa.

1) DIAGRAMAS DE ESFUERZOS AXIALES, CORTANTES Y MOMENTOS FLECTORES.

1. REACCIONES



$\Sigma F_x = 0 : \boxed{H_D = 0}$

$\Sigma F_y = 0 : R_A + V_D = 120$ KN

$\Sigma M_B^{(BD)} = 0 : M_D + 5H_D = 0 \Rightarrow \boxed{M_D = 0}$

$\Sigma M_B^{(ABC)} = 0 : -R_A \cdot 6 + 80\,KN \cdot 4 - 40\,KN \cdot 0'5 = 0.$

$$\boxed{\begin{array}{l} R_A = 50\,KN \\ V_D = 70\,KN \end{array}}$$

2. DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

- Diagrama de esfuerzo axial.

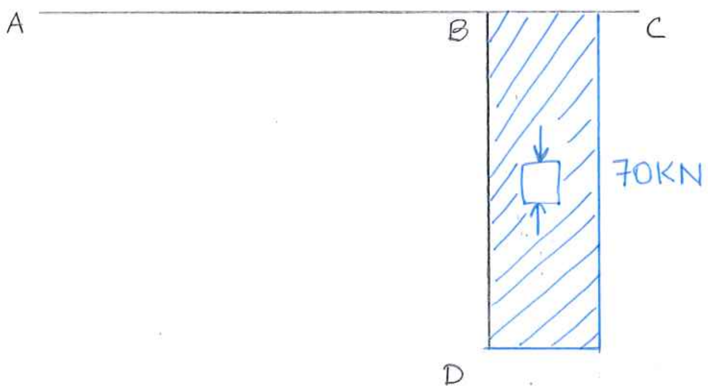
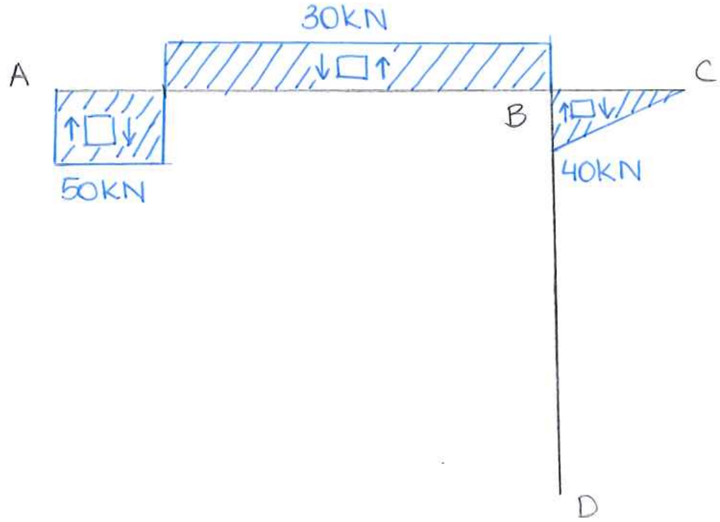
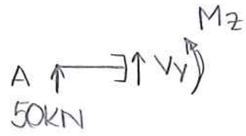


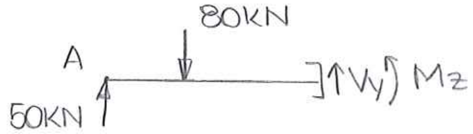
Diagrama de esfuerzo cortante





$V_y = -50KN$

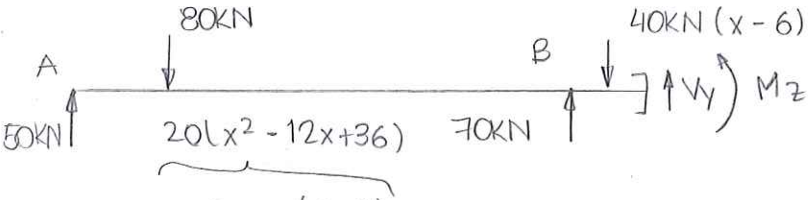
$M_z = 50.x$



$V_y = 30KN$

$M_z = 50\,x - 80(x-2) =$

$= -30x + 160$



$M_z + 40(x-6)\dfrac{(x-6)}{2} - 70(x-6) + 80(x-2) -$

$- 50x = 0 \Rightarrow M_z = -20x^2 + 280x - 980.$

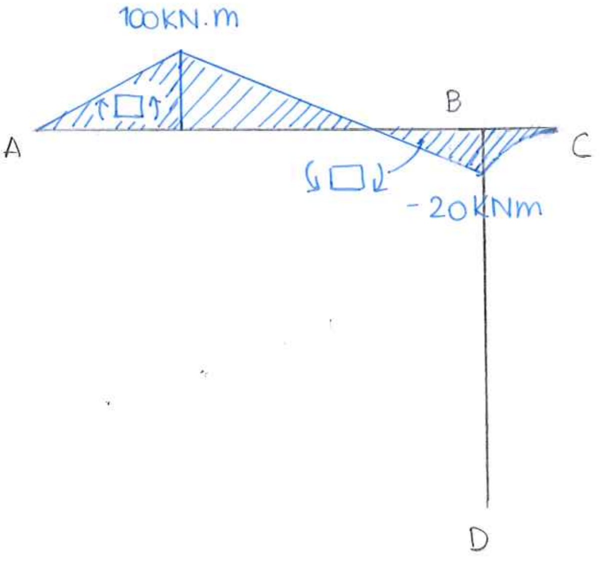
$V_y = 80KN + 40KN(x-6) - 50KN - 70KN =$

$= -280KN + 40KN.x.$

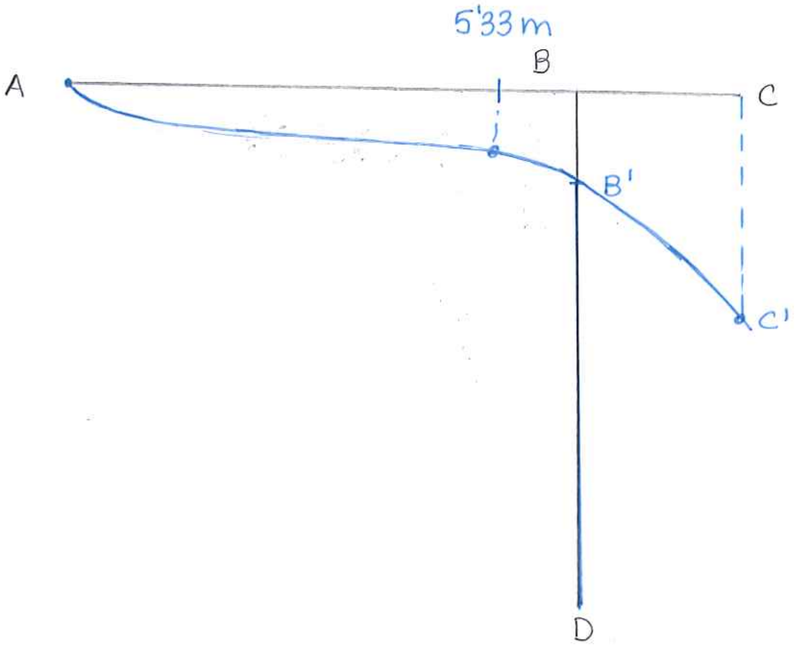
$V_y(6) = -40KN$

$V_y(7) = 0.$

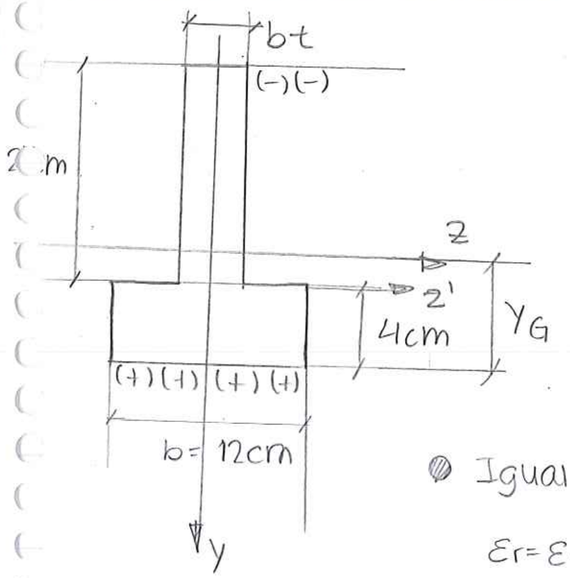
Diagrama de esfuerzo flector.



2) DIBUJO APROXIMADO DE LA DEFORMADA.



3) REPARTO DE TENSIONES EN LA SECCIÓN DE LA VIGA ABC QUE SOPORTE EL MOMENTO FLECTOR DE MAYOR VALOR ABSOLUTO.



- Igual resistencia:

$dF_r = dF_t$

$\sigma_1 \cdot b \cdot dy = \sigma_2 \cdot b_t \cdot dy$

$b_t = b \cdot \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$

- Igual rigidez:

$\varepsilon_r = \varepsilon_t$

$\dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{\sigma_2}{E_2}$

$\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{10 GPa}{200 GPa} = 0'05$

$\boxed{b_t = 12cm \cdot 0'5 = 0'6cm}$

$(4cm \cdot 12cm + 0'6cm \cdot 24cm) \cdot y_G = 12cm \cdot 4cm \cdot 2cm + 24cm \cdot 0'6cm \cdot 16cm$

$\boxed{Y_G = 5'2308 cm}$

$I_z' = \frac{1}{3}12cm(4cm)^3 + \frac{1}{3}0'6cm(24cm)^3 = 3{,}0208.10^{-5}m^4$

STEINER $\rightarrow I_z' = I_z + A.r^2 = I_z + (12cm.4cm + 0'6cm.24cm).(5'2308cm - 4cm)^2$

$\boxed{I_z = 2'92627.10^{-5}m^4}$

$\sigma^1_{xx,máx} = \left(\frac{M_{z,máx}.y_{máx}}{I_z}\right)_2 . \frac{E_1}{E_2} = \frac{100kNm.(24cm - 5'2308cm + 4cm)}{2'92627.10^{-5}m^4} \frac{10GPa}{200GPa} =$

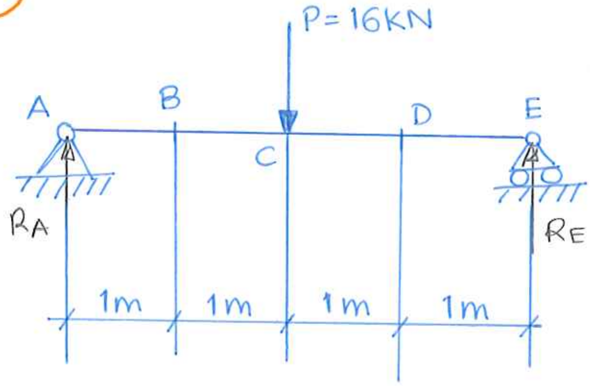
$= 38'905MPa.(-)$

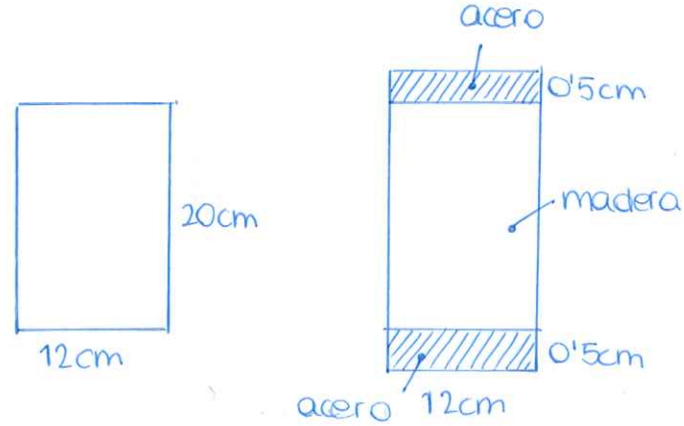
$\sigma^2_{xx,máx} = \frac{M_{z,máx}.y_{máx}}{I_z} = \frac{100kN.m \; 5'2308cm}{2'92627.10^{-5}m^4} = 178{,}753MPa\,(+)$

Tensiones máximas: $\sigma^1_{xx,máx} = 38'905\,MPa\,(-)$
$\sigma^2_{xx,máx} = 178'753\,MPa\,(+)$

Cuando nos pide el reparto de tensiones ¿qué nos pide, $\sigma_{xx}(y)$ o $\sigma_{xx,máx}$?

1.6





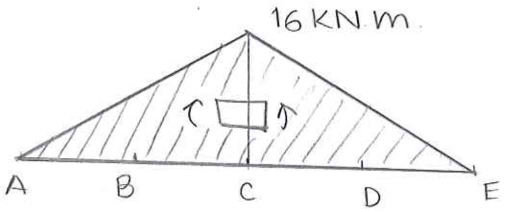
- Límites elásticos: $\sigma^{(a)}_{adm,máx} = 200MPa$; $\sigma^{(m)}_{adm,máx} = 40MPa$

- Módulos de elasticidad: $E_a = 200GPa$; $E_m = 10GPa$.

1. REACCIONES

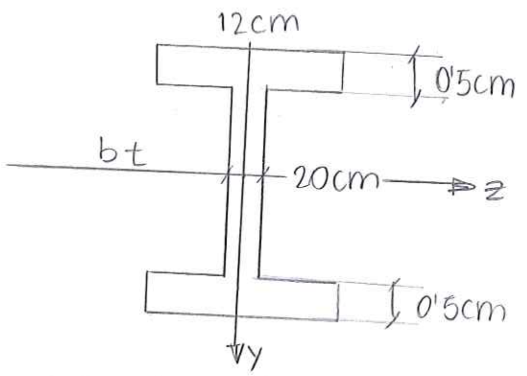
$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_E = 16KN \\ \Sigma M_C = 0 \Rightarrow R_A = R_E\end{array}\right\} \boxed{R_A = R_E = 8KN}$$

2. DIAGRAMA DE ESFUERZOS FLECTORES



3. TENSIONES MÁXIMAS

- La tensión máxima tendrá lugar en el punto en el que el momento sea máximo: C.



- Igual resistencia

$dF_r = dF_t$

$\sigma_m \cdot b \cdot dy = \sigma_a \cdot b_t \cdot dy$

$b_t = \dfrac{\sigma_m}{\sigma_a} \cdot b$

$\boxed{b_t} = 0'05 \cdot 12cm = \boxed{0'6cm}$

- Igual rigidez:

$\varepsilon_r = \varepsilon_t$

$\dfrac{\sigma_a}{E_a} = \dfrac{\sigma_m}{E_m}$; $\dfrac{\sigma_m}{\sigma_a} = \dfrac{E_m}{E_a} = \dfrac{10GPa}{200GPa} = 0'05$

$$I_z = \frac{1}{12} 12cm \cdot (21cm)^3 - 2 \cdot \frac{1}{12} 5'7cm (20cm)^3 = 1'661 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$\sigma_{máx}^{(a)} = \frac{16 kN.m \cdot 10'5 cm}{1'661 \cdot 10^{-5} m^4} = 101,144 MPa < 200 MPa$$

$$\sigma_{máx}^{(m)} = \frac{16 kN \, m \cdot 10 cm}{1'661 \cdot 10^{-5} m^4} \cdot \frac{10 GPa}{200 GPa} = 4'81637 < 40 MPa$$

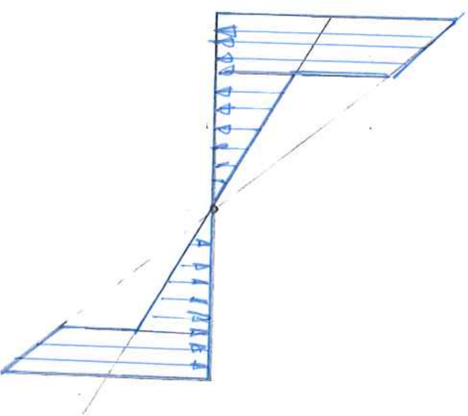
Analizamos la sección B.

$$I_z = \frac{1}{12} 12cm (20cm)^3 = 8 \cdot 10^{-5} m^4$$

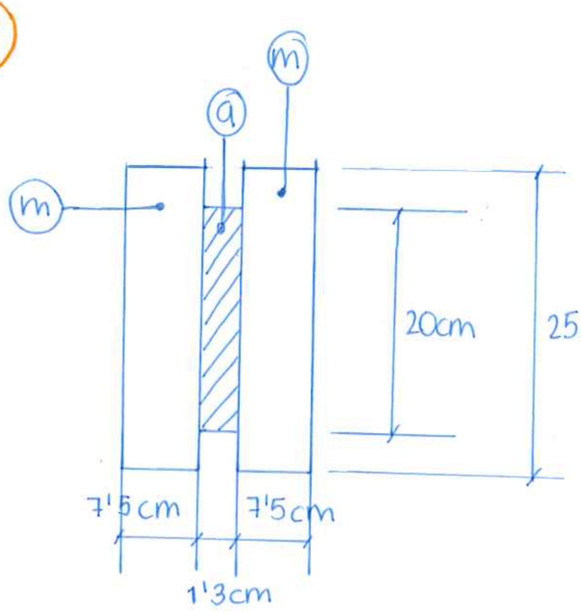
$$\sigma_{máx}^{(m)} = \frac{8 kN.m \cdot 10cm}{8 \cdot 10^{-5} m^4} = 10 MPa$$

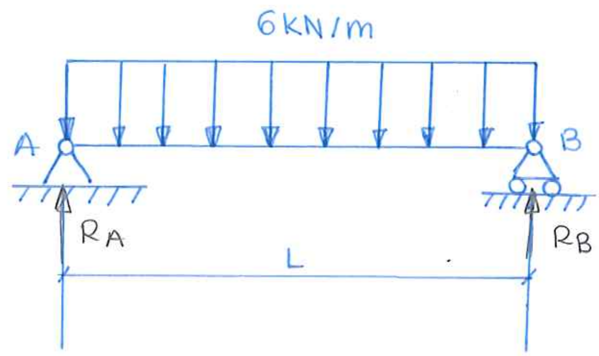
$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_{máx, acero} = 101,144 MPa \\ \sigma_{máx, madera} = 10 MPa \end{array}}$$

4. DIAGRAMA DE REPARTO DE TENSIONES EN C



1.7



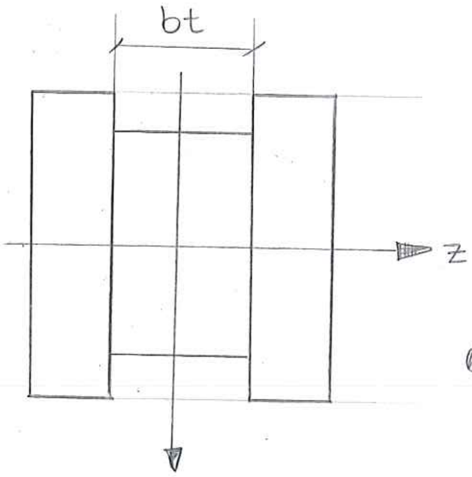


$E_a = 200\,GPa$

$E_m = 10\ GPa$

$\sigma^{(m)}_{adm,\,máx} = 4MPa.$

1) TENSIÓN NORMAL MÁXIMA DE FLEXIÓN QUE SOPORTARÁ EL ACERO.



- Misma resistencia

$$dF_r = dF_t$$

$$\sigma_a \cdot 1'3cm\ dy = \sigma_m \cdot b_t\, dy$$

$$\boxed{b_t = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \cdot 1'3cm = 26cm}$$

- Misma rigidez

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t$$

$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_m}{E_m} \;;\; \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{E_a}{E_m} = \frac{200GPa}{10\ GPa} = 20$$

$$\sigma^{(m)}_{adm,\,máx} = \frac{M \cdot 12'5cm}{I_z} = 4MPa \Rightarrow M = 11796,67\ N.m.$$

$$I_z = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 7'5cm \cdot (25cm)^3 + \frac{1}{12} \cdot 26cm \cdot (20cm)^3 = 3'6865 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$\sigma^{(a)}_{máx} = \frac{M \cdot 10cm}{I_z} \cdot \frac{200\,GPa}{10\ GPa} = 64MPa$$

$$\boxed{\sigma_{acero,\,máx} = 64MPa}$$

2) MÁXIMA DISTANCIA ENTRE APOYOS.

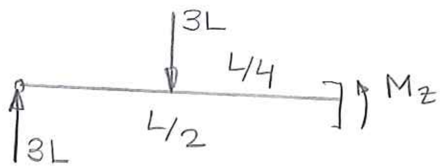
1. REACCIONES

$R_A = R_B = 3.L$ KN

2. MOMENTO MÁXIMO

El momento máximo en una viga biapoyada tiene lugar en la sección central, en $x = \frac{L}{2}$.

Dicho momento máximo tiene su límite en $M = 11796{,}67$ Nm según lo calculado en el apartado anterior



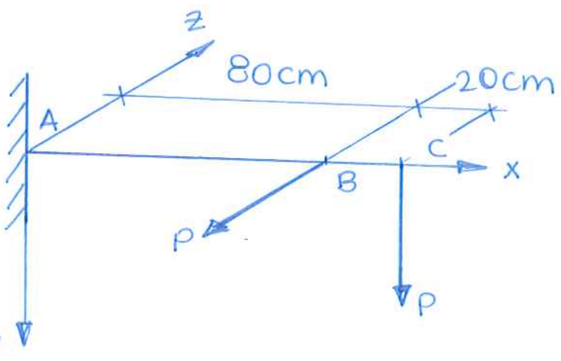
$$M_z + \frac{3}{4}L^2 - \frac{3}{2}L^2 = 0.$$

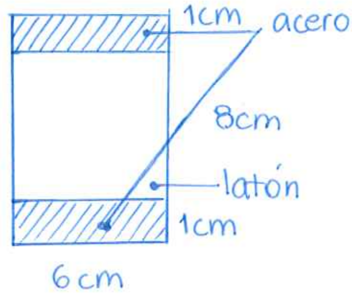
$$11'79667 + \frac{3}{4}L^2 - \frac{3}{2}L^2 = 0$$

$$L = 3'966 m$$

$\boxed{\text{La longitud máxima es } L = 3'966m}$

1.8



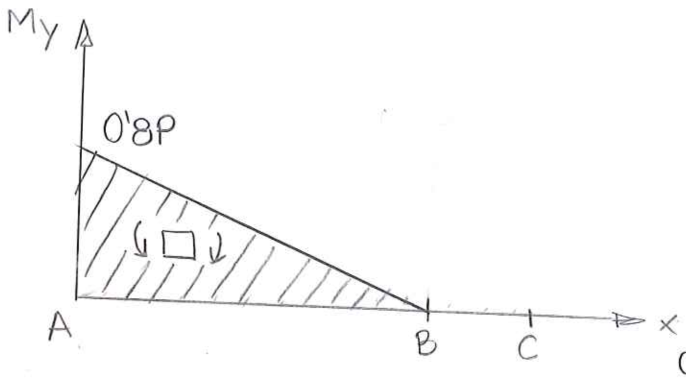


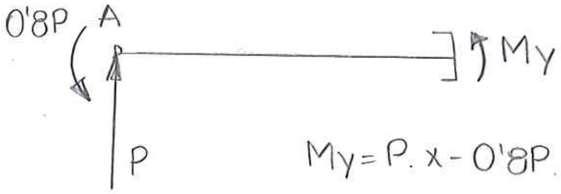
- Acero: $E_a = 200$ GPa
  $\sigma_f^{(a)} = 240$ MPa
- Latón: $E_l = 100$ GPa
  $\sigma_f^{(l)} = 100$ MPa.

Valor máximo de P

1) DIAGRAMA DE ESFUERZOS FLECTORES:

- Debidos a la carga P_z

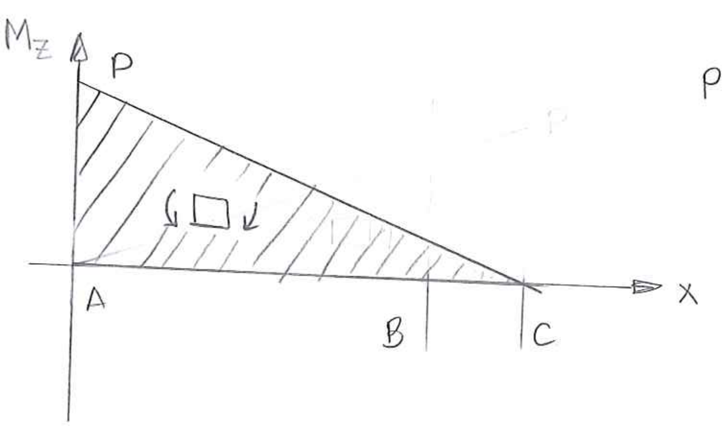


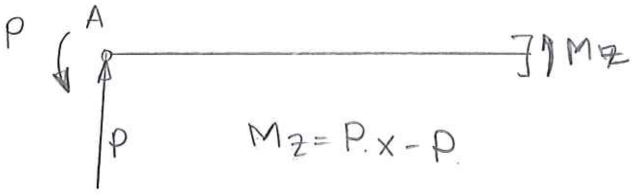


$My = P \cdot x - 0'8P$

$My = -0'8P - P(x - 0'8) + Px = 0.$

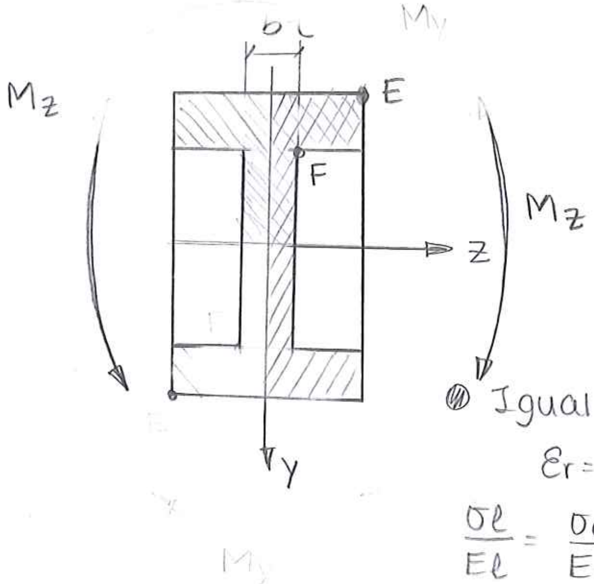
- Debidos a la carga P_y





$Mz = P \cdot x - P$

2) TENSIONES MÁXIMAS



Igual resistencia

$dF_r = dF_t$

$\sigma_l \cdot b \cdot dy = \sigma_a \cdot b_t \cdot dy$

$b_t = \frac{\sigma l}{\sigma a} \cdot b$

Igual rigidez

$\varepsilon_r = \varepsilon_t$

$\frac{\sigma l}{El} = \frac{\sigma a}{Ea}$

$\frac{\sigma l}{\sigma a} = \frac{El}{Ea}$

$$\boxed{b_t = \frac{100GPa}{200GPa} \cdot 6cm = 3cm}$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 6cm(10cm)^3 - \frac{1}{12} \cdot 3cm(8cm)^3 = 3'72 \cdot 10^{-6} m^4$$

mal

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1cm \cdot (6cm)^3 + \frac{1}{12} \cdot 8cm(3cm)^3 = 5'4 \cdot 10^{-7} m^4$$

Punto de máxima tracción: E (acero) $\begin{cases} y = -5cm \\ z = +3cm \end{cases}$; F (latón) $\begin{cases} y = -4cm \\ z = +1'5cm \end{cases}$

Está mal.
La respuesta es P= 6065 N.
YA CORREGIDO

Sección de máximo momento: C $\begin{cases} M_y = 0'8P \\ M_z = P \end{cases}$

$$\sigma_{xx} = +\frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

$$\sigma_{xx,máx}^{(l)} = \left(\frac{0'8P \cdot 1'5cm}{5'4 \cdot 10^{-7} m^4} - \frac{P \cdot (-4cm)}{3'72 \cdot 10^{-6} m^4}\right) \cdot \frac{100GPa}{200GPa} = 16487,4552\, P = 100MPa$$

$$\boxed{P = 6065,217\, N}$$

$$\sigma_{xx,máx}^{(a)} = \frac{0'8P \cdot 3cm}{5'4 \cdot 10^{-7} m^4} - \frac{P(-5cm)}{3'72 \cdot 10^{-6} m^4} = 351,087\, MPa > 240\, MPa$$

$\sigma_{xx,máx}^{(a)} = \frac{0'8P \cdot 3cm}{5'4 \cdot 10^{-7} m^4} + \frac{P(-5cm)}{3'72 \cdot 10^{-6} m^4} = 57885,30466P = 240\,MPa$

$\boxed{P = 4146,13\,N}$

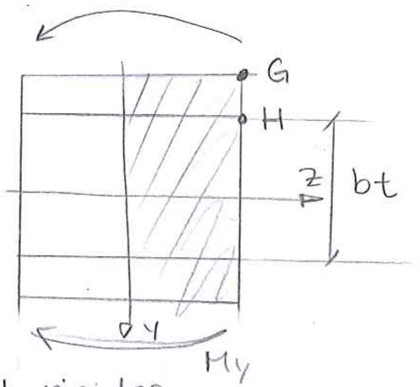
$\sigma_{xx,máx}^{(\ell)} = \left(\frac{0'8P \cdot 1'5cm}{5'4 \cdot 10^{-7} m^4} - \frac{P(-5cm)}{3'72 \cdot 10^{-6} m^4}\right)\frac{100\,GPa}{200\,GPa} = 73'932\,N < 100\,MPa$

La carga máxima que puede soportar es de P=4146,13N

Está mal porque no se puede usar la misma transformada para M_y y para M_z.

$\sigma_{xx,máx}^{(a)} = \sigma_{xx}(E) = -\frac{M_z \cdot Y_E}{I_z} = -\frac{P \cdot (-5cm)}{3'72 \cdot 10^{-6} m^4}$ $\{M_z\}$

$\sigma_{xx,máx}^{(\ell)} = \sigma_{xx}(F) = -\frac{M_z \cdot Y_E}{I_z} = \left(\frac{-P(-4cm)}{3'72 \cdot 10^{-6} m^4}\right)\frac{100\,GPa}{200\,GPa}$ $\{M_z\}$



Igual resistencia

$dF_r = dF_t$

$\sigma_\ell \cdot b \cdot dy = \sigma_a \cdot b_t \cdot dy$

$b_t = \frac{\sigma_\ell}{\sigma_a} \cdot b$

Igual rigidez

$\varepsilon_r = \varepsilon_e$

$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_\ell}{E_\ell}$

$\frac{\sigma_\ell}{\sigma_a} = \frac{E_\ell}{E_a} = \frac{100\,GPa}{200\,GPa}$

$\longrightarrow b_t = \frac{100\,GPa}{200\,GPa} \cdot 8cm = 4cm$

$I_y = \frac{1}{12} \cdot 6cm \cdot (6cm)^3 = 1'08 \cdot 10^{-6} m^4$

$\sigma_{xx,máx}^{(a)} = \sigma_{xx}(G) = +\frac{M_y \cdot z_G}{I_y} = \frac{0'8P \cdot 3cm}{1'08 \cdot 10^{-6} m^4}$ $\{M_y\}$

$\sigma_{xx,máx}^{(\ell)} = \sigma_{xx}(H) = +\frac{M_y \cdot z_G}{I_y} = \frac{0'8P \cdot 3cm}{1'08 \cdot 10^{-6} m^4} \cdot \frac{100\,GPa}{200\,GPa}$ $\{M_y\}$

$\sigma_{xx,max}^{(a)} = \frac{P \cdot 5cm}{3'72 \cdot 10^{-6} m^4} + \frac{0'8P \cdot 3cm}{1'08 \cdot 10^{-6} m^4} < 240\,MPa$

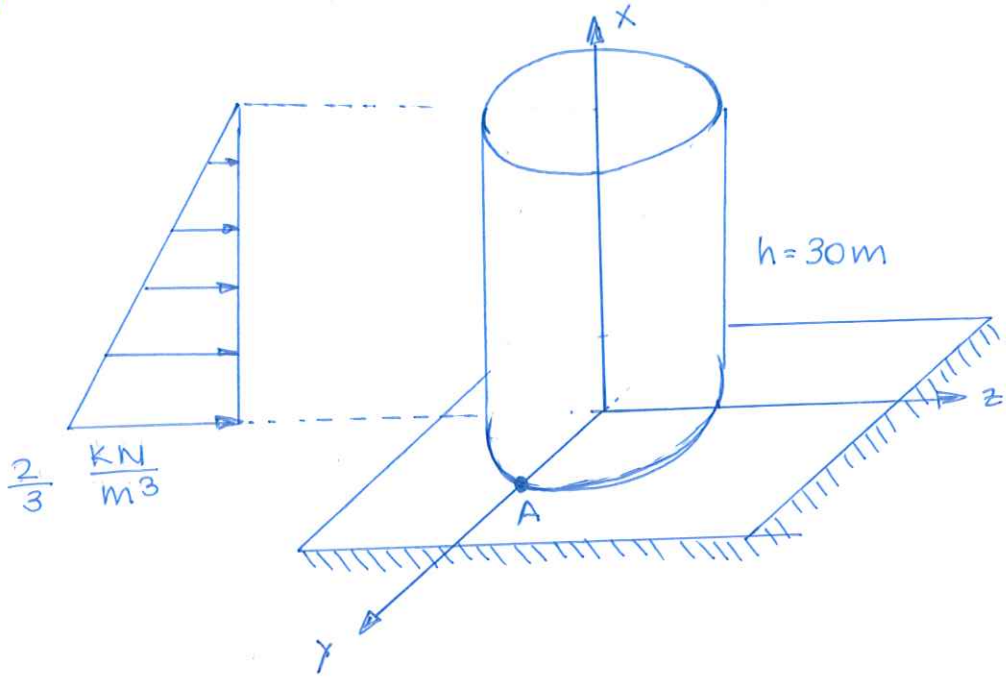
$\boxed{P < 6729,65\,N}$

$$\sigma_{xx,\,máx}^{(e)} = \left(\frac{P \cdot 4cm}{3'72 \cdot 10^{-6} m^4}\right) \cdot \frac{100GPa}{200GPa} + \frac{P \cdot 0'8 \cdot 3cm}{1'08 \cdot 10^{-6} m^4} \cdot \frac{100GPa}{200GPa} < 100MPa$$

$$\boxed{P < 6065,217\ N}$$

El máximo valor de P que puede soportar la carga en régimen elástico es de $P = 6065,217 N$

1.10



Presión base = $\frac{2}{3}\frac{KN}{m^3}$

$\gamma = 30\ \frac{KN}{m^3}$

1) VALOR MÍNIMO DEL DIÁMETRO PARA QUE NO HAYA TRACCIONES.

- La sección más desfavorable es A y por tanto, calculamos el valor de d para que en dicha sección $\sigma_{xx} = 0$.

$$\sigma_{xx,A} = 0 = -\frac{N_x}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

$$\left.\begin{array}{l} A = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{d^2\pi}{4} \\ N_x = \frac{d^2\pi}{4} \cdot 30m \cdot 30\ \frac{KN}{m^3} = 225\ \frac{KN}{m^2} \cdot d^2\pi. \end{array}\right\} \frac{N_x}{A} = 900\ \frac{KN}{m^2}$$

$$M_z = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\ \frac{KN}{\cancel{m^3}} \cdot 30\cancel{m} \cdot 30\cancel{m} \cdot d\right) \cdot 10\cancel{m} = 3000\,KN \cdot d.$$

$$I_z = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{1}{64}\pi \cdot d^4$$

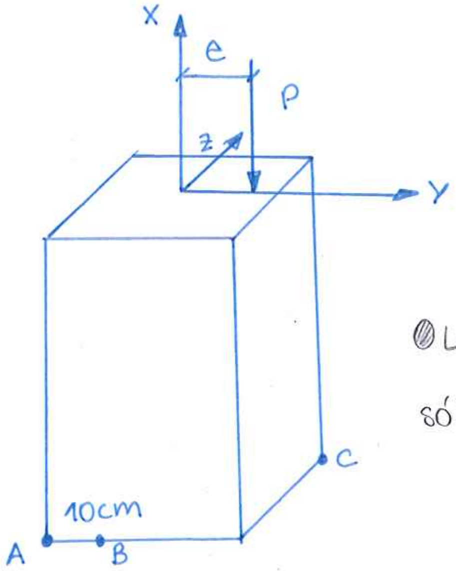
$$\sigma_{xx,A} = -900\ \frac{KN}{m^2} + \frac{3000\,KN \cdot d \cdot \frac{d}{2}}{\frac{1}{64}\pi \cdot d^4} = 0.$$

$d = 5'827\,m$

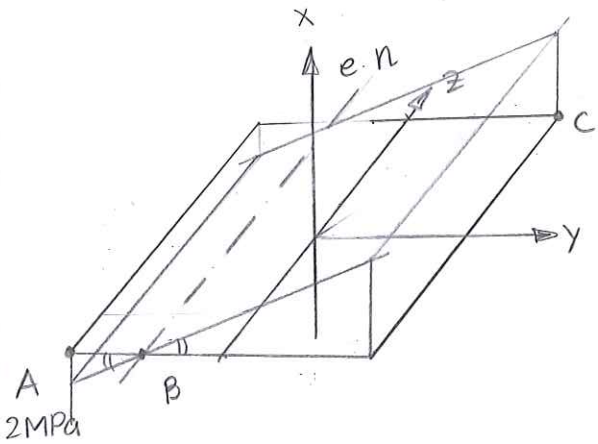
$\boxed{\text{El valor mínimo de d es } 5'827\,m}$

2) DIBUJAR LOS CÍRCULOS DE MORH EN LA SECCIÓN A DEL EMPOTRAMIENTO.

1.11



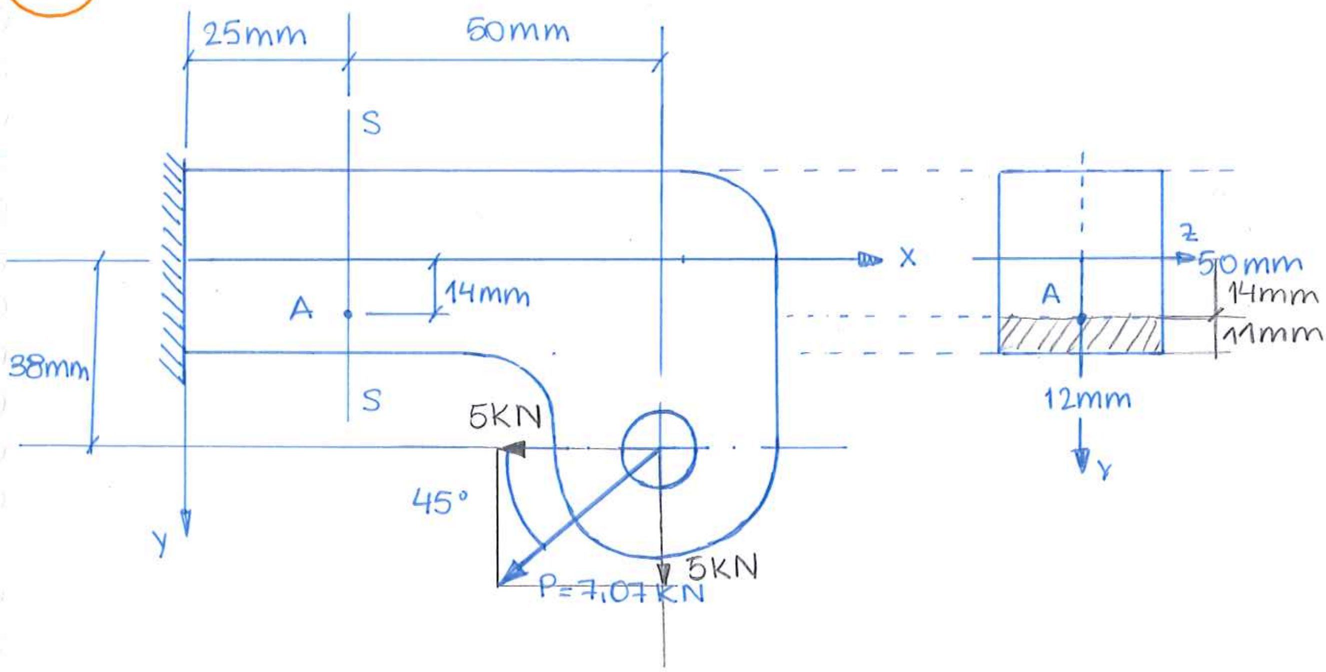
- Sección: $(40 \cdot 40)\ cm^2$
- $\sigma_{xx,A} = 2MPa\ (+)$
- $\sigma_{xx,B} = 0 : B \in e.n$
- La carga está aplicada sobre el eje y luego sólo hay momento respecto del eje z.



$$\frac{2MPa}{10cm} = \frac{\sigma(-)}{40cm - 10cm} \Rightarrow \sigma(-) = 6MPa$$

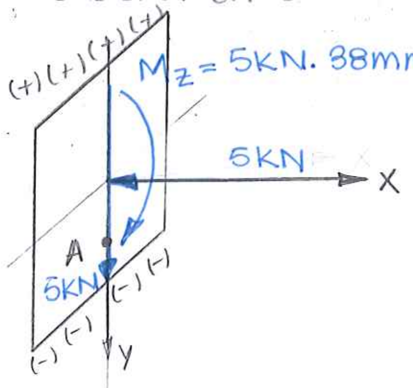
La tensión del punto C es de 6MPa de compresión

1.12



1) DIBUJAR EL DIAGRAMA DE MOHR PARA EL PUNTO A DE LA SECCIÓN S.

- Estado tensional en S.



$M_z = 5KN \cdot 38mm + 5KN \cdot 50mm = 0'44\,KN\cdot m.$

$$\sigma_{xx,A} = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_z \cdot y_A}{I_z} = -\frac{5KN}{12mm \cdot 50mm} - \frac{0'44\,KN\,m \cdot 14mm}{1'25 \cdot 10^{-7} m^4}$$

$$= -57'613\ MPa$$

$$\left\{ I_z = \frac{1}{12} \cdot 12mm (50mm)^3 = 1'25 \cdot 10^{-7} m^4 \right\} \quad \tau_{xy,A} = \frac{V_y \cdot Q}{b \cdot I_z} = \frac{5KN \cdot 2'574 \cdot 10^{-6} m^3}{12mm \cdot 1'25 \cdot 10^{-7} m^4} = 8'577\ MPa$$

$$\left\{ Q = 12mm \cdot 11mm \cdot 19'5mm = 2'574 \cdot 10^{-6} m^3 \right\}$$

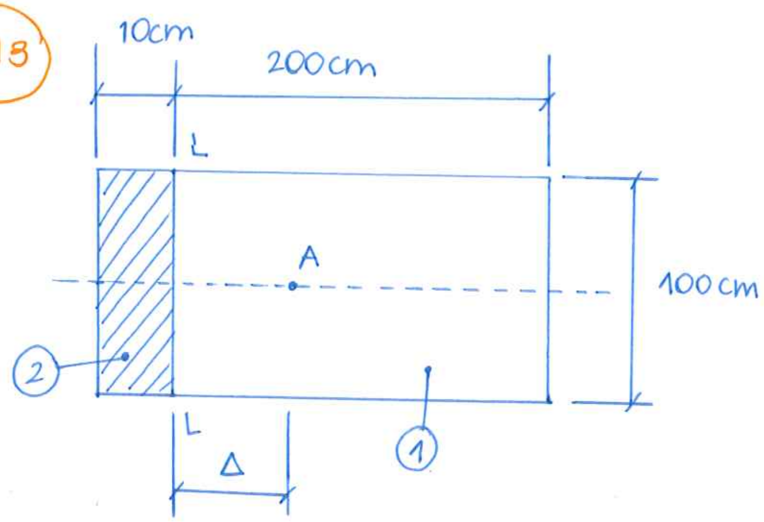
> Las tensiones en el punto A son: $\sigma_{xx,A} = 57'613\ MPa$ de compresión y $\tau_{xy} = 8'577\ MPa$.

2) TENSIÓN DE FLUENCIA MÍNIMA PARA QUE NO SE PRODUZCA FALLO EN A (TRESCA).

$$\sigma_{f,min} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{(-57'613MPa)^2 + 3(8'577MPa)^2} = 59'498\ MPa$$

> La tensión de fluencia mínima será de 59'498MPa

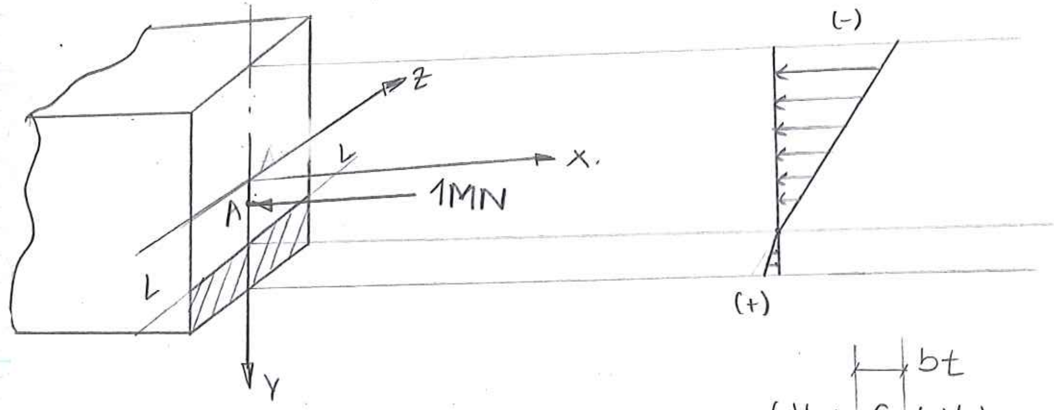
1.18

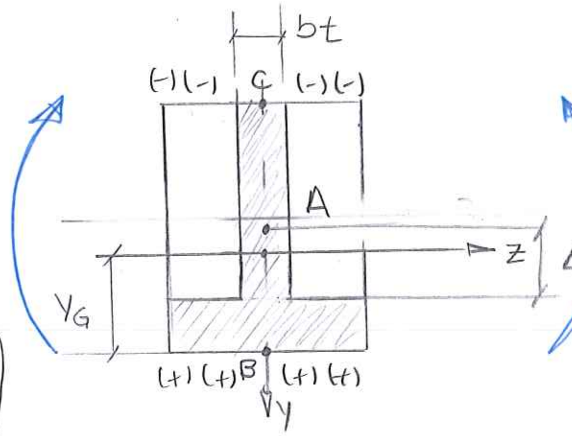


$\frac{E_2}{E_1} = 20.$

$P = 1MN.$

1) CALCULAR Δ





$M_z = 1MN.(10cm + \Delta - 57'5cm) = 1MN(-47'5cm + \Delta).$

- Igual resistencia

$$dF_r = dF_t$$

$$\sigma_1 . b . dy = \sigma_2 . b_t . dy$$

$$b_t = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} . b$$

- Igual rigidez

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t$$

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{20}$$

$$b_t = \frac{1}{20} . 100cm = 5cm$$

$$Y_G(5cm.200cm + 100cm.10cm) = 5cm.200cm.110cm + 100cm.10cm.5cm$$

$$\boxed{Y_G = 57'5cm}$$

$$I_z = \left[\frac{1}{3} . 100cm.(57'5cm)^3 - \frac{1}{3}(100cm - 5cm)(57'5cm - 10cm)^3\right] + \frac{1}{3} . 5cm(210cm - 57'5cm)^3 =$$

$$= 0'08854 m^4$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{N_x}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} = -\frac{1MN}{(5cm \cdot 200cm + 100cm \cdot 10cm)} + \frac{1MN(-47'5\,cm + \Delta)\cdot y}{0'08854\,m^4}$$

$$\sigma_{xx,L=0}: -\frac{1MN}{5cm\,200cm + 100cm \cdot 10cm} + \frac{1MN(\Delta - 47'5cm)\cdot 47'5cm}{0'08854\,m^4} = 0.$$

$$\Delta = 1'407m = 140'7\,cm$$

La distancia del punto A a la linea neutra es de 140'7 cm

2) DETERMINAR LAS TENSIONES MÁXIMAS.

$$\sigma_{xx,máx}^{(2)} = \sigma_{xx,B} = \sigma_{xx}(57'5cm) = -\frac{1MN}{(5cm\,200cm + 100cm\,10cm)} + \frac{1MN(-47'5\,cm + \Delta)\cdot 57'5cm}{0'08854\,m^4} =$$

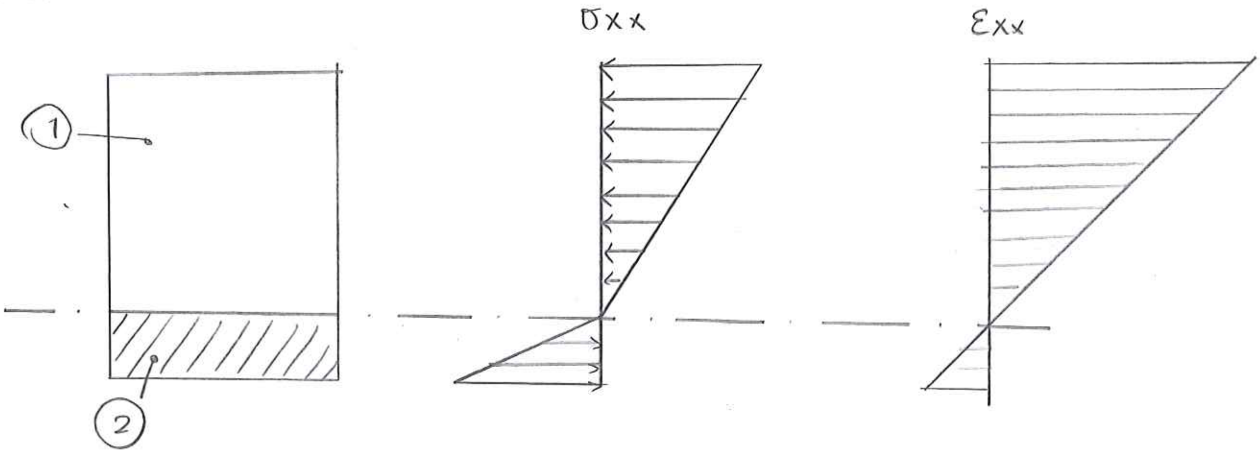
$$= 1'0526MPa = 1052'6\,KPa$$

$$\sigma_{xx,max}^{(1)} = \sigma_{xx,C} = \sigma_{xx}(152,5\,cm) = \left[-\frac{1MN}{5cm\,200cm + 100cm \cdot 10cm} + \frac{1MN(-47'5cm + \Delta)(-152,5cm)}{0'08854m^4}\right]$$

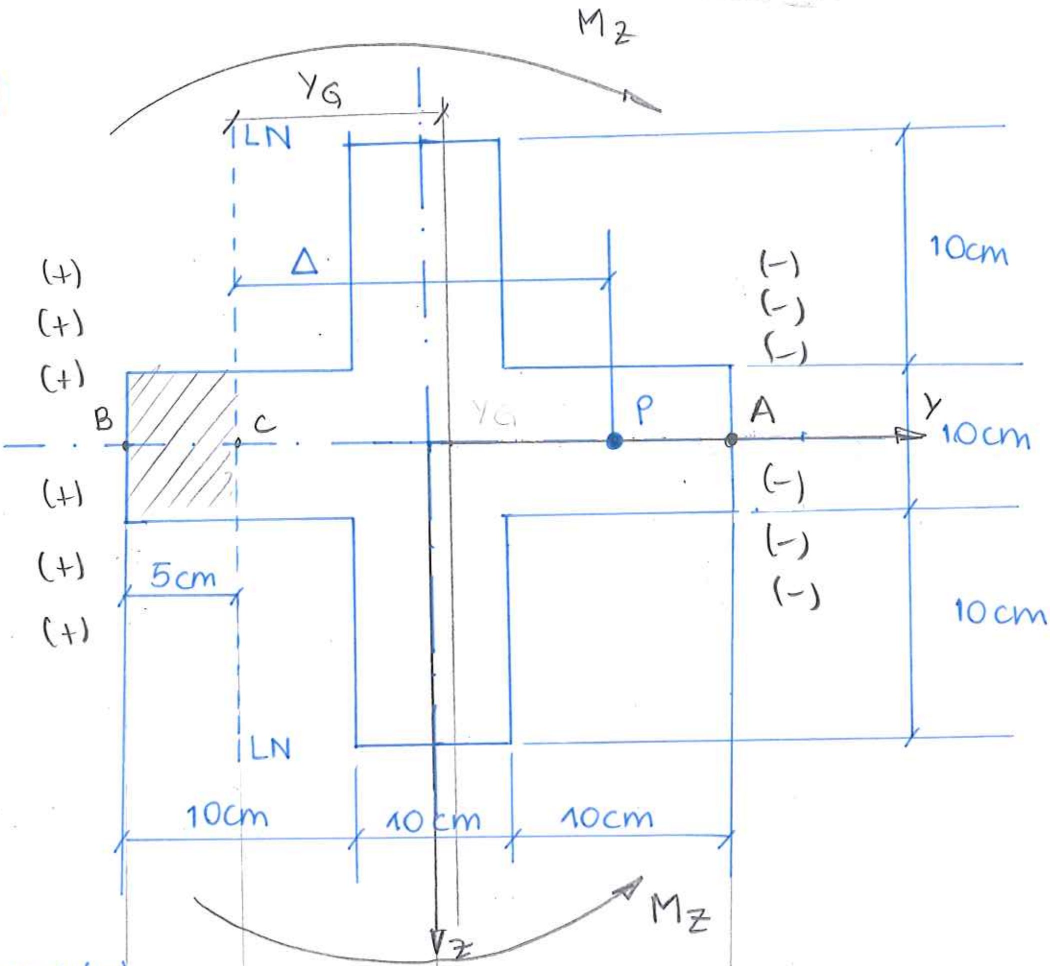
$$\cdot \frac{1}{20} = -1'0526\,MPa = -1052'6\,KPa$$

Las tensiones máximas soportadas son ambas de $\sigma_{xx} = 1052'6$ kN; en el caso del material 2 de tracción, y en el caso del material 1 de compresión

3) DIAGRAMAS DE TENSIONES Y DEFORMACIONES.



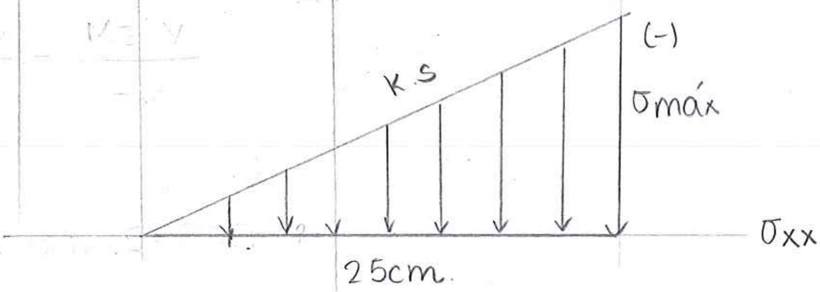
1.14



P=500KN.(−)

- El material no soporta tensiones a tracción.

- A: compresión máxima.
  B: tracción máxima (realmente 0 porque el material no soporta tracción)



$P = K \cdot Q_N$

$P\Delta = K \cdot I_N$

$$I_N = \frac{1}{3} \cdot 10cm \cdot (25cm)^3 + \frac{1}{3} \cdot 20cm \cdot (15cm)^3 - \frac{1}{3} \cdot 20cm(5cm)^3 = 7'375 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$Q_N = (10cm \cdot 25cm + 2 \cdot 10cm \cdot 10cm) \cdot 11'389cm = 5'125 \cdot 10^{-3} m^3$$

$$(10cm \cdot 25cm + 2 \cdot 10cm \cdot 10cm) \cdot Y_G = (10cm \cdot 25cm) \cdot 12'5cm + (10cm \cdot 20cm) \cdot 10cm$$

$$\boxed{Y_G = 11'389cm}$$

$$s_p = \Delta = \frac{I_N}{Q_N} = \frac{7'375 \cdot 10^{-4} m^4}{5'125 \cdot 10^{-3} m^3} = 0'14396 m = 14'396 cm$$

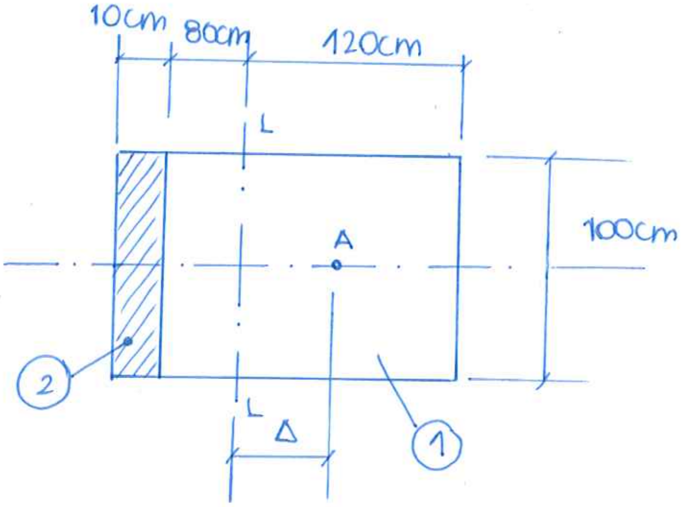
$\boxed{\text{El punto de aplicación de la carga está a } \Delta = 14'396\text{ cm del eje neutro.}}$

$$K = \frac{P}{Q_N} = \frac{500 KN}{5'125 \cdot 10^{-3} m^3} = 97'561 \frac{MN}{m^3}$$

$$\sigma_{xx,máx} = \sigma_{xx,A} = K \cdot s_A = 97'561 \frac{MN}{m^3} \cdot 25 cm = 24'390 MPa$$

$\boxed{\text{La tensión normal máxima es de 24'39 MPa (compresión)}}$

1.15



¿Pur qué?

NO entiendo

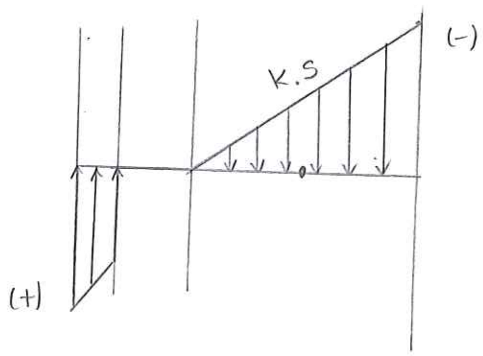
pur qué.

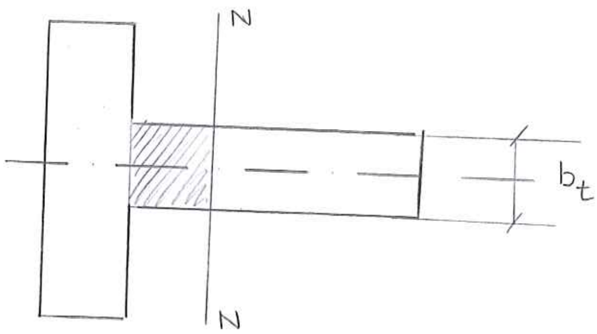
- El material (1) No trabaja a tracción

$\frac{E_2}{E_1} = 1'5.$

$P = 1MN(-).$

1º) CALCULAR Δ





- Misma resistencia

$dF_r = dF_t$

$\sigma_1 . b . dy = \sigma_2 . b_t . dy$

$b_t = b . \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 100cm . \frac{2}{3} = 66'67cm.$

- Misma rigidez

$\varepsilon_r = \varepsilon_t$

$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}$

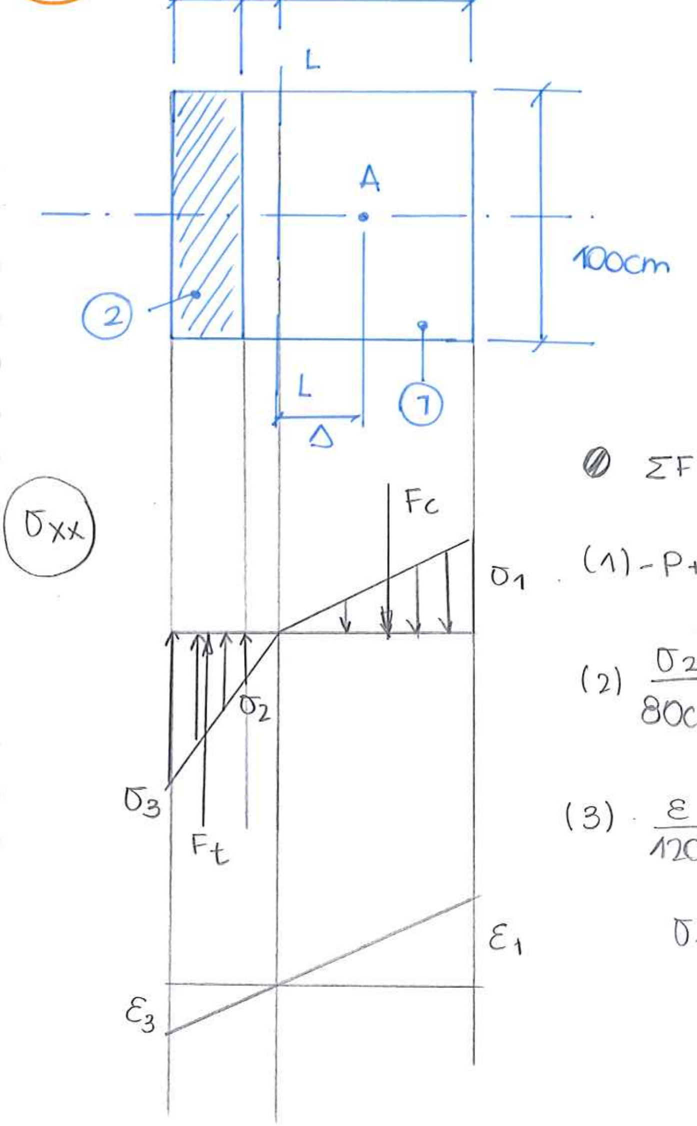
$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{1'5} = \frac{2}{3}$

$I_N = \frac{1}{3} \cdot 100cm(90cm)^3 + \frac{1}{3} \, 66'67cm\,(120cm)^3 - \frac{1}{3} \, 33'33cm\,(80cm)^3 = 0'57m^4$

$Q_N = 66'67cm . 120cm \; 60cm - 10cm . 100cm . 85cm = 0'395m^3$

$S_p = \frac{I_N}{Q_N} = \frac{0'57m^4}{0'395m^3} =$

1.15



- El material 1 no trabaja a tracción

$$\frac{E_2}{E_1} = 1'5$$

$$P = 1MN\,(-)$$

- $\Sigma F = 0 : -P + F_c = F_t$

$$(1)\; -P + \frac{1}{2}\cdot\sigma_1\cdot 120cm\cdot 100cm = \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\cdot 10cm\cdot 100cm$$

$$(2)\; \frac{\sigma_2}{80cm} = \frac{\sigma_3}{90cm} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{8}{9}\sigma_3$$

$$(3)\; \frac{\varepsilon_1}{120cm} = \frac{\varepsilon_3}{90cm} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{E_1\,120cm} = \frac{\sigma_3}{E_2\cdot 90cm}$$

$$\sigma_1 = \sigma_3\cdot\frac{120}{90}\cdot\frac{E_1}{E_2} = \frac{8}{9}\sigma_3$$

$$(1)\; -1MPa + \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}\cdot\sigma_3\; 120cm\; 100cm = \frac{\frac{8}{9}\sigma_3+\sigma_3}{2}\cdot 10cm\; 100cm$$

$\sigma_3 = 2'278\,MPa\,(+)$

$\sigma_2 = 2'025\,MPa\,(+)$

$\sigma_1 = 2'025\,MPa\,(-)$

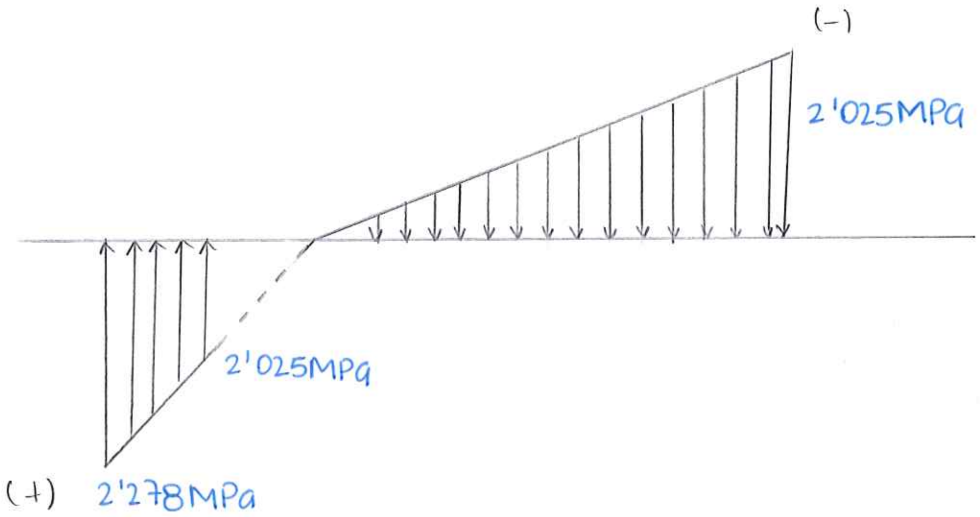
- $\Sigma M_N = 0 :\; P.\Delta = \frac{1}{2}\cdot\sigma_1\cdot 120cm\cdot 100cm\cdot\frac{2}{3}\cdot 120cm + \frac{1}{2}\sigma_2\cdot 80cm\; 100cm\;\frac{2}{3}\, 80cm +$

$+\frac{1}{2}\sigma_3\cdot 90cm\; 100cm\;\frac{2}{3} 90cm$

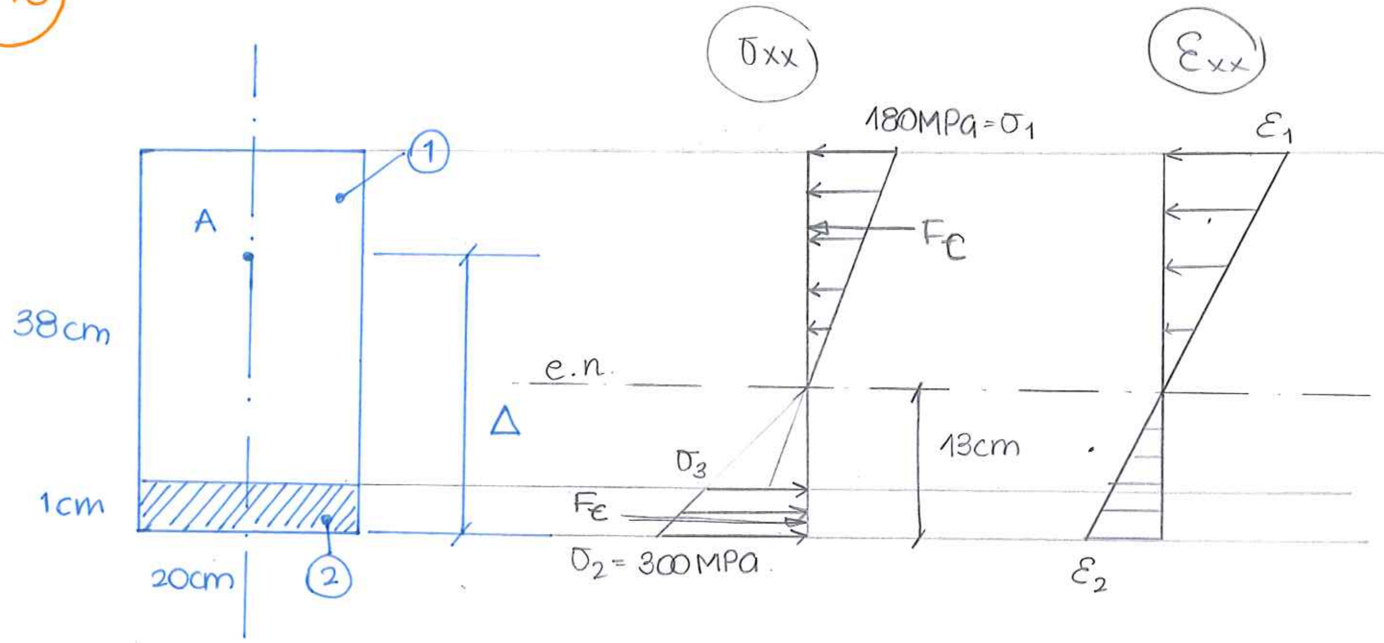
$\Delta = 115,506cm$

$\boxed{\text{La distancia del punto A a la linea neutra es de } \Delta = 115,506cm}$

- Diagrama de reparto de tensiones.



11.16



- Material ① no ofrece resistencia a tracción

$E_1 = 60GPa$ $\quad$ $E_2 = 200GPa$

$\sigma_r = 180MPa.$ $\quad$ $\sigma_f = 300MPa.$

$$\frac{\varepsilon_2}{Y_n} = \frac{\varepsilon_1}{39cm - Y_n}$$

$$\frac{\sigma_2}{E_2} \cdot \frac{1}{Y_n} = \frac{\sigma_1}{E_1} \cdot \frac{1}{39cm - Y_n}$$

$$\frac{300MPa}{200GPa} \cdot \frac{1}{Y_n} = \frac{180MPa}{60GPa} \cdot \frac{1}{39cm - Y_n}$$

$$\boxed{Y_n = 0'13m = 13cm}$$

$$\Sigma F = 0: \boxed{P = F_c - F_t = \frac{1}{2} \cdot 180MPa \cdot (39cm - 13cm) \cdot 20cm - \frac{276'923MPa + 300MPa}{2} \cdot 1cm \cdot 20cm = 4103,077KN}$$

$$\frac{\sigma_3}{12cm} = \frac{300MPa}{13cm} \Rightarrow \sigma_3 = 276'923MPa$$

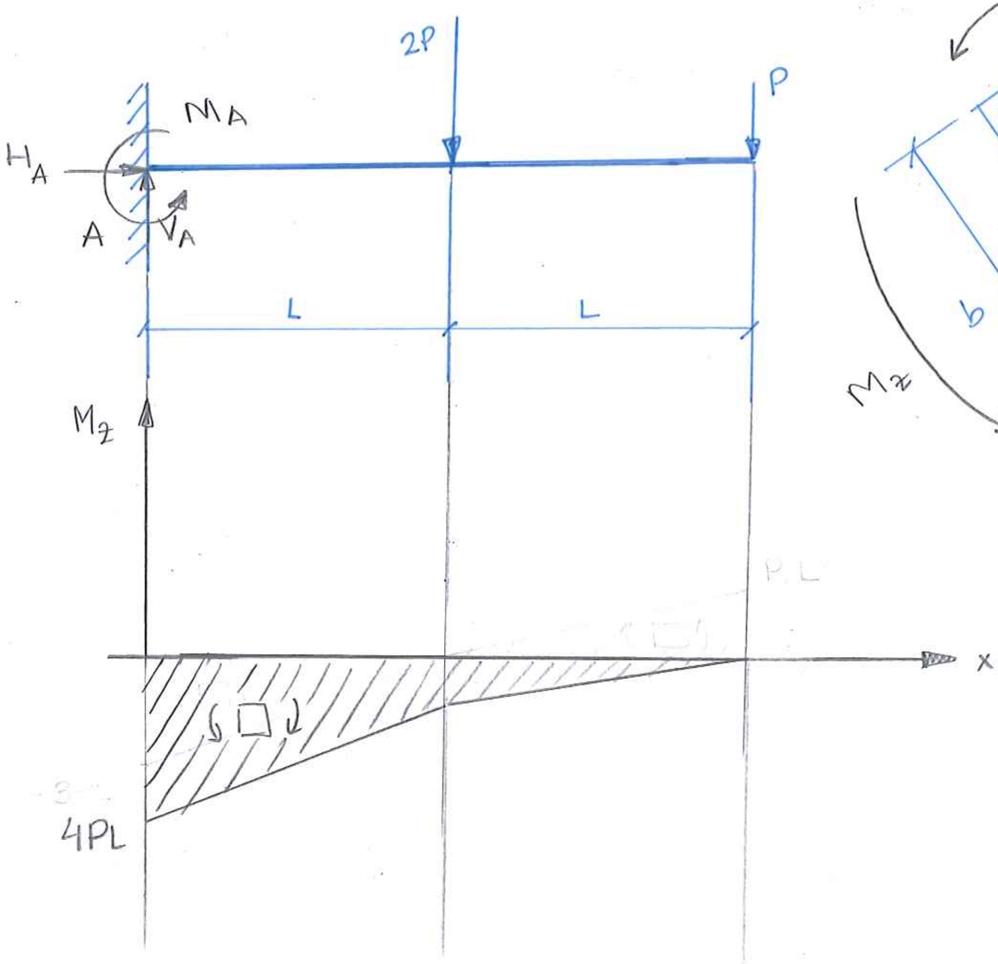
$$\Sigma M_N = 0 : P(\Delta - 13cm) = \frac{1}{2} 180MPa (39cm - 13cm)\, 20cm \cdot \frac{2}{3}(39cm - 13cm) + \frac{1}{2} 300MPa\, 13cm$$

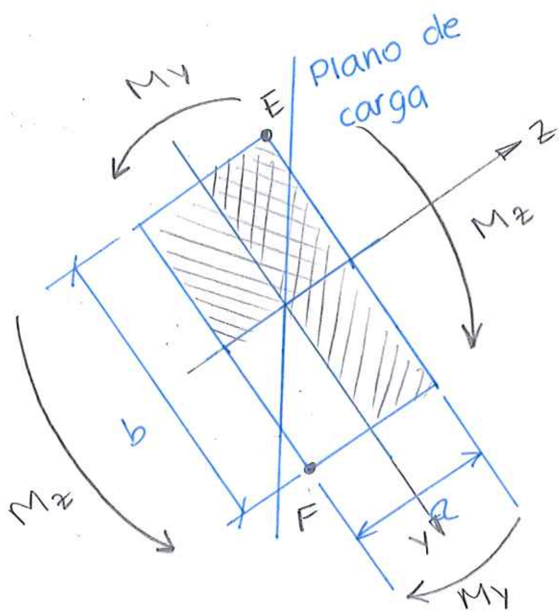
$$\cdot 20cm \cdot \frac{2}{3} 13cm - \frac{1}{2} \cdot 276'923MPa \cdot 12cm \cdot 20cm \cdot \frac{2}{3} 12cm$$

$$\boxed{\Delta = 34'529cm}$$

La carga máxima aplicada será de $P = 4103,077 \, kN$ a $\Delta = 34'529 \, cm$ del borde inferior

C-1.1





1) REACCIONES

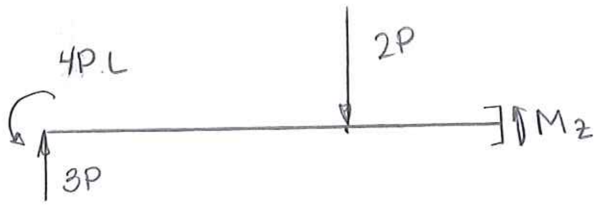
$\Sigma F_x = 0$: $\boxed{H_A = 0}$

$\Sigma F_y = 0$: $\boxed{V_A = 3P}$

$M_A = 0$: $M_A - 2P.L - 2PL = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 4P.L}$

2) DIAGRAMA DE ESFUERZOS

$M_z = 3P.x - 4PL$



$M_z = 3P.x - 2P(x-L) - 4PL =$

$= P.x - 2.L$

3) SECCIÓN A

La sección más desfavorable es la del empotramiento, con un $M = 4PL$

$M_z = M.\cos 45 = \frac{4\sqrt{2}\,PL}{2} = 2\sqrt{2}PL$

$M_y = M.\operatorname{sen} 45 = \frac{4\sqrt{2}\,PL}{2} = 2\sqrt{2}PL$

El punto E es el de mayor tracción y el F el de mayor compresión.

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot ab^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} ba^3$$

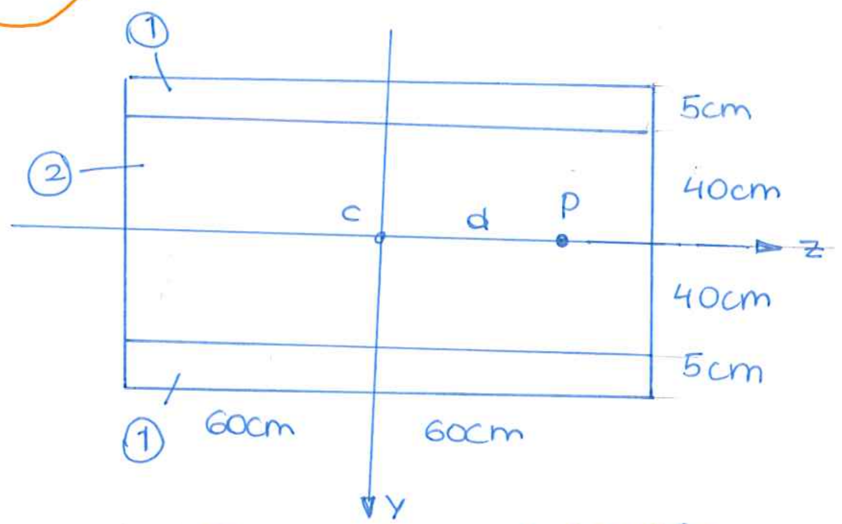
$$\sigma_{xx}(E) = \sigma_f = + \frac{2\sqrt{2}PL\left(+\frac{\cancel{b}}{\cancel{2}}\right)}{\frac{1}{12}ab^{\cancel{3}\,2}} + \frac{2\sqrt{2}PL\left(\frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}\right)}{\frac{1}{12}ba^{\cancel{3}\,2}}$$

$$\sigma_f = \frac{12\sqrt{2}\,PL}{ab^2} + \frac{12\sqrt{2}\,PL}{ba^2}$$

$$\sigma_f = \left(\frac{9\sqrt{2}}{ab^2} + \frac{9\sqrt{2}}{ba^2}\right)PL \Rightarrow P = \frac{\sigma_f \cdot L}{12\sqrt{2}\left(\frac{1}{ab^2} + \frac{1}{ba^2}\right)L} = \frac{\sigma_f\, a^2 b^2 \cdot L}{12\sqrt{2}\,(a+b)L}$$

El máximo valor posible de carga es $P = \dfrac{\sigma_f \cdot a^2 b^2}{12\sqrt{2}\,(a+b)\,L}$

C-1.2

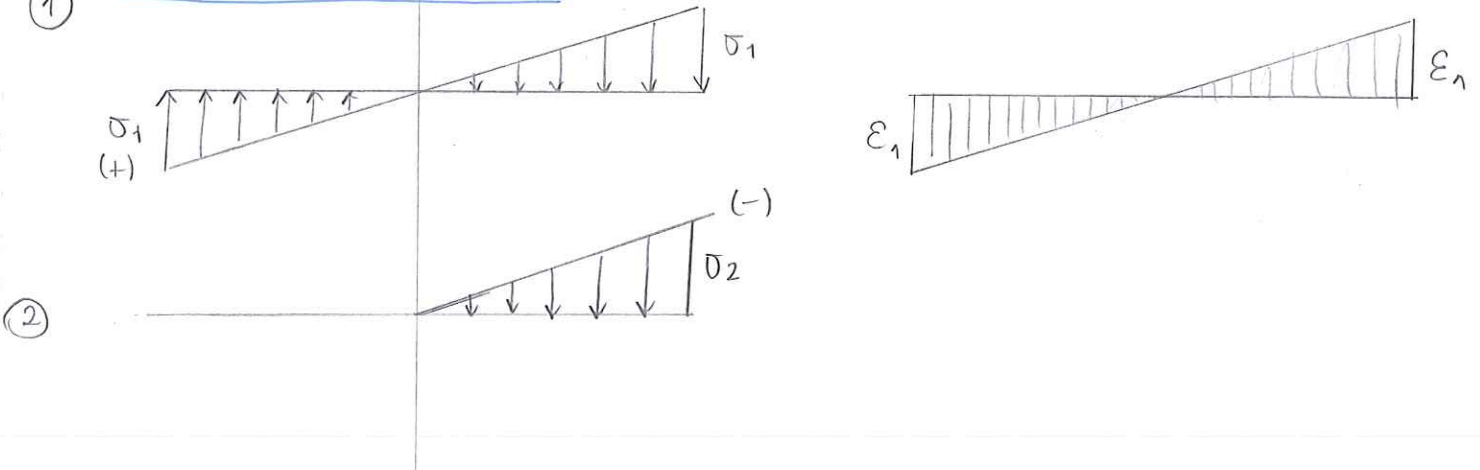


- El material (2) no trabaja a tracción

$\frac{E_1}{E_2} = 1'4.$

$P = 30MN.$

Distribución de tensiones



$\Sigma F = 0: \; P = F_c - F_t = \cancel{\frac{1}{2}\sigma_1 \cdot 60cm \cdot 10cm} + \frac{1}{2}\sigma_2 \cdot 60cm\, 80cm - \cancel{\frac{1}{2}\sigma_1 \cdot 60cm\, 10cm}$

$\boxed{\sigma_2 = 125MPa}$

$M_N = 0: \; P \cdot d = \frac{1}{2}\sigma_1 \cdot 60cm\, 10cm \cdot \frac{2}{3}\, 60cm + \frac{1}{2}\sigma_1\, 60cm 10cm\, \frac{2}{3} 60cm + \frac{1}{2}\sigma_2 \cdot 60cm \cdot 80cm\, \frac{2}{3}\, 60cm \Rightarrow d = 0'54m = 54\,cm$

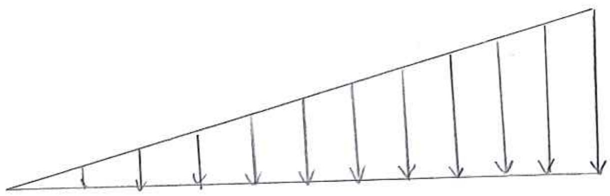
- Igual rigidez: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \frac{E_1}{E_2} \cdot \sigma_2 = 1'4 \cdot 125\, MPa = 175MPa}$

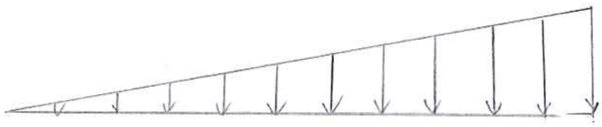
La distancia d para que el e.n pase por el centro de la sección es
d=54cm

● Para que no aparezcan tensiones de tracción: e.n en el borde

(1)



(2)



$$\Sigma F=0: \quad P=F_C=\frac{1}{2}\sigma_1 \cdot 120cm \cdot 10cm+\frac{1}{2}\sigma_2 \cdot 120cm \cdot 80cm$$

$$\sigma_1=1'4\,\sigma_2$$

$$\sigma_2=53'1915 MPa$$

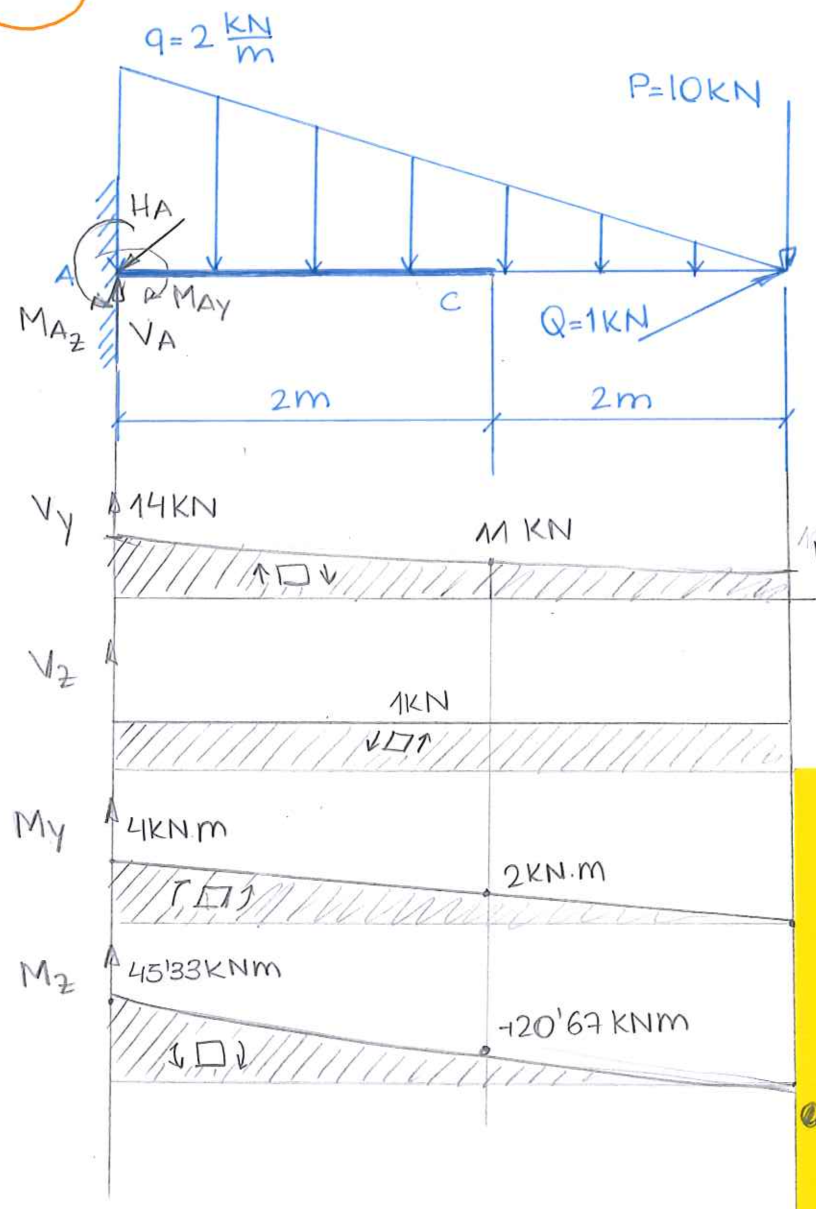
$$\sigma_1=74'4681 MPa$$

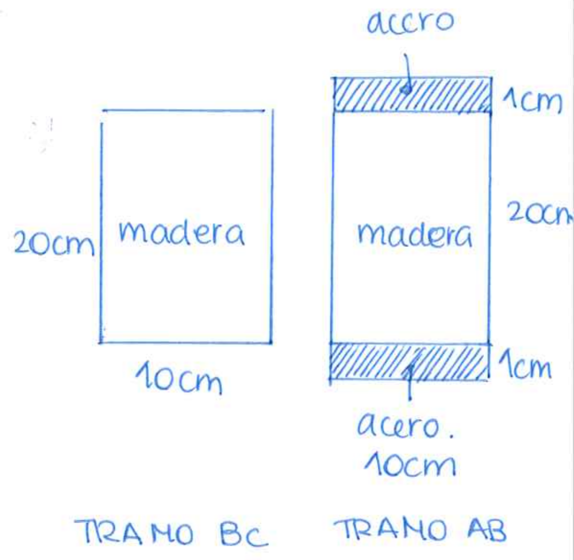
$$M_N=0: \quad P\cdot(60cm+d)=\frac{1}{2}\sigma_1 \cdot 120cm \cdot 10cm \cdot \frac{2}{3}120cm+\frac{1}{2}\sigma_2 \cdot 120cm \cdot 80cm \cdot \frac{2}{3}120cm$$

$$d=0'20m=20cm$$

La máxima distancia a la que se puede aplicar la carga sin que aparezcan tensiones de tracción es de d=20 cm

C-1.3





- Madera: $\sigma_f = 40MPa$, $E = 10GPa$
- Acero: $\sigma_f = 360\ MPa$, $E = 200\ GPa$

Parece que lo que está mal calculado es I_y porque falla todo lo relacionado con eso... lo demás ok!

Esta mal porque hay que utilizar diferente transformada para M_z y M_y. Ver 1.8

Asias Martukiiii!!

1) DIAGRAMAS DE ESFUERZOS CORTANTES Y M

1' REACCIONES

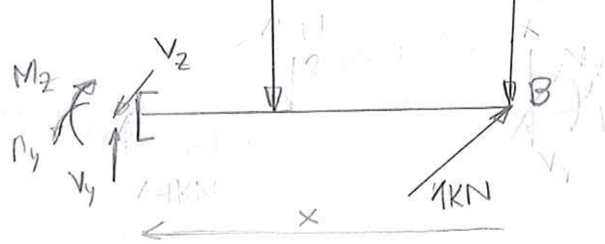
$$\Sigma F_y = 0: \boxed{V_A = P + \frac{1}{2}\cdot q\cdot 4m = 10KN + 2\ \frac{kN}{m}\ 2m = 14KN}$$

$$\Sigma F_z = 0: \boxed{H_A = Q = 1KN}$$

$$M_z = 0: \quad M_{Az} - 10KN\cdot 4m - \frac{2KN}{m}\ 2m\cdot \frac{1}{3}4m = 0 \Rightarrow \boxed{M_{Az} = 45'33KNm}$$

$$M_y = 0: \boxed{M_{Ay} = 1KN\cdot 4m = 4KN.m}$$

ESFUERZOS



$$V_y = 10KN + \frac{1}{2}\cdot 0'5x^2 = $$
$$= 10KN + 0'25x^2$$

$$V_z = 1KN$$

$$M_z + 10KN\cdot x + \frac{1}{2}\cdot 0'5x^2\cdot \frac{x}{3} = 0$$

$$M_z = -10KN\cdot x - \frac{0'25}{3}x^3$$

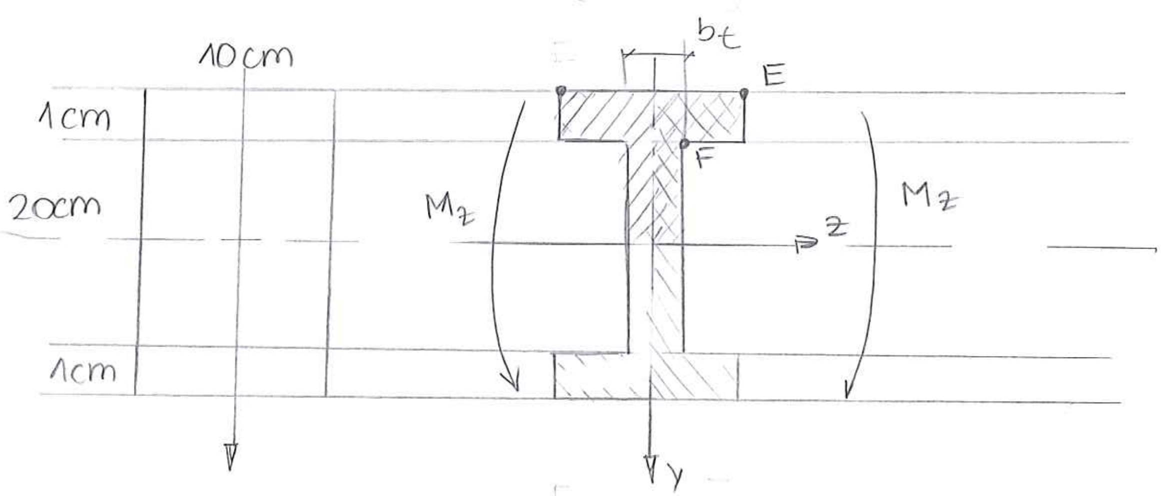
$$M_y = 1x\ KN$$

2) COEFICIENTE DE SEGURIDAD DEL ACERO Y LA MADERA

- TRAMO AC

sección más desfavorecida: la del empotramiento

$$\begin{cases} M_y = 4 kN.m \\ M_z = 45,33 kN.m \end{cases}$$



- Misma resistencia:

$dF_r = dF_t$

$\sigma_m \cdot b \cdot dy = \sigma_a \, b_t \, dy$

$b_t = \frac{\sigma_m}{\sigma_a} \cdot b = 0'05 . 10cm =$
$= 0'5cm$

- Misma rigidez

$\varepsilon_r = \varepsilon_t$

$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_m}{E_m}$

$\frac{\sigma_m}{\sigma_a} = \frac{E_m}{E_a} = \frac{10GPa}{200GPa} = 0'05$

Mal

- Máxima tracción en acero: E; Máxima tracción en madera F

$$\sigma_{xx} = + \frac{M_y . z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \quad ; \quad I_z = \frac{1}{12} \cdot 10cm(22cm)^3 - \frac{1}{12} \cdot 9'5cm(20cm)^3 = 2'54 \, 10^{-5} m^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 2cm . 10cm^3 + \frac{1}{12} \cdot 20cm \, (0'5cm)^3 = 1'66875 . 10^{-6} m^4$$

$$\boxed{\sigma^{(a)}_{xx,máx}} = \sigma_{xx}(E) = \frac{4kNm . 5cm}{1'66875 . 10^{-6} m^4} - \frac{45'33 kNm(-11cm)}{2'54 \, 10^{-5} m^4} = \boxed{316'1761 MPa}$$

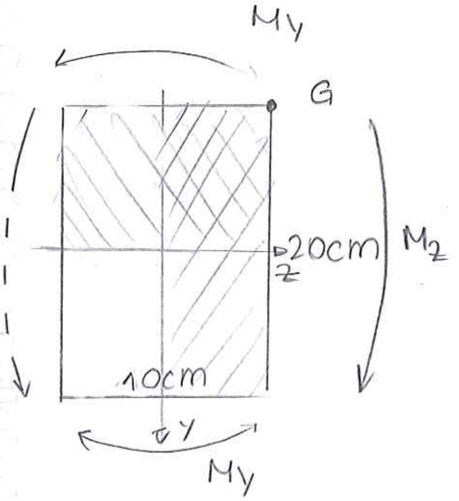
$$\boxed{\sigma^{(m)}_{xx,máx}} = \sigma_{xx}(F) = \left(\frac{4kNm . 0'25cm}{1'66875 10^{-6} m^4} - \frac{45'33 kNm(-10cm)}{2'54 . 10^{-5} m^4} \right) \cdot 0'05 = \boxed{9'2235 MPa}$$

(*)(*)

● TRAMO BC.

sección más desfavorecida C

$$\begin{cases} M_y = 2\,kNm \\ M_z = 20'67\,kNm \end{cases}$$



Máxima tracción G

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y\, z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

$$I_z = \frac{1}{12}\, 10cm(20cm)^3 = 6'67 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}\, 20cm(10cm)^3 = 1'67 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$\boxed{\sigma^{(M)}_{xx,máx} = \sigma_{xx}(G) = \frac{2kNm \cdot 5cm}{1'67 \cdot 10^{-5} m^4} - \frac{20'67kNm \cdot (-10cm)}{6'67 \cdot 10^{-5} m^4} = 37'005\,MPa}$$

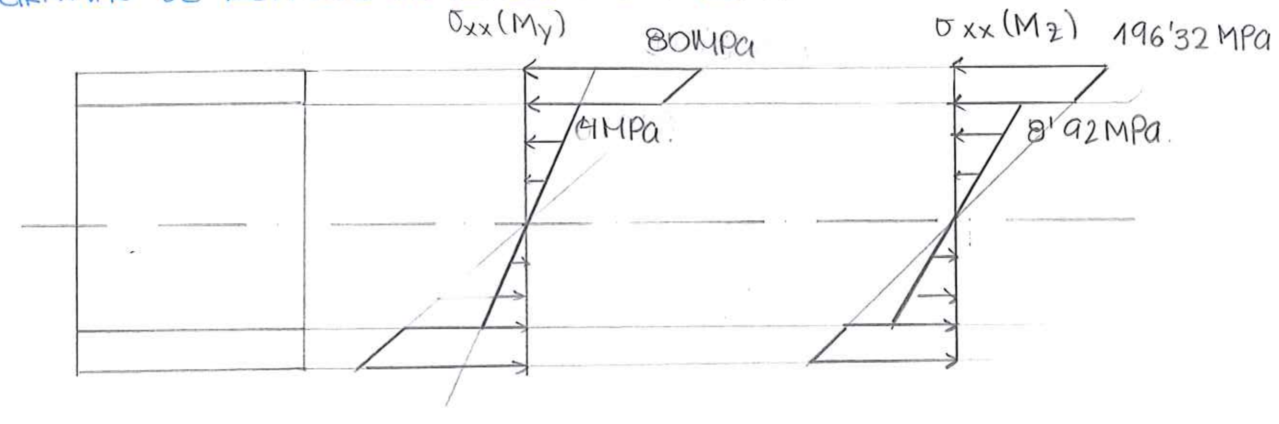
● Coeficientes de seguridad:

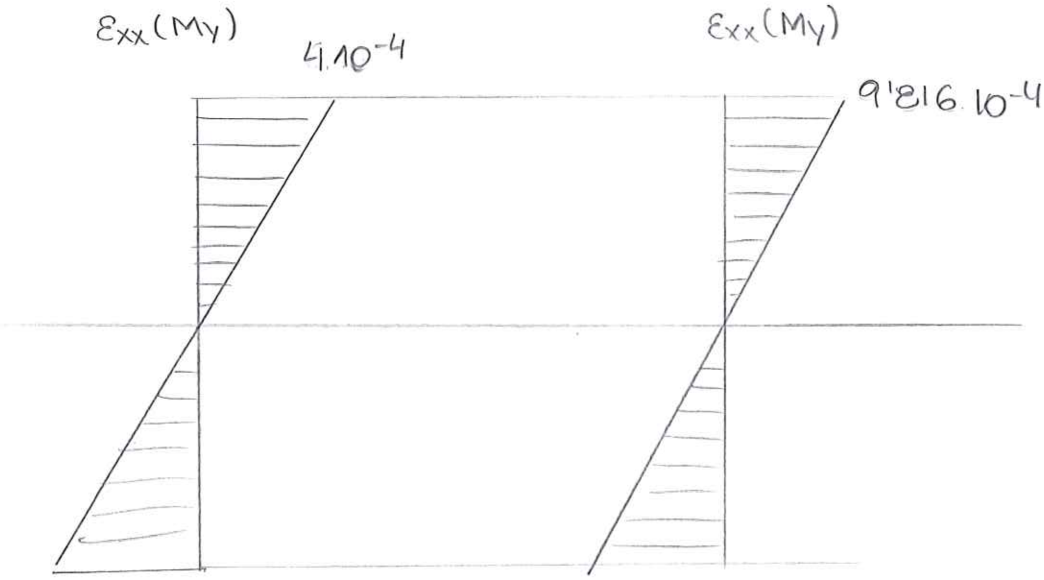
$$n_a = \frac{\sigma_{fa}}{\sigma^{(a)}_{xx,máx}} = \frac{360\,MPa}{316'176\,MPa} = 1'139$$

$$n_m = \frac{\sigma_{fm}}{\sigma^{(m)}_{xx,máx}} = \frac{40\,MPa}{37'005\,MPa} = 1'08.$$

Los coeficientes de seguridad son $n_a = 1'1386^*$ y $n_m = 1'08$. Y las máximas tensiones normales se producen en el punto E de la sección A para el acero y en el punto G de la sección C para la madera.

3) DIAGRAMAS DE REPARTO DE TENSIONES Y DE DEFORMACIONES.

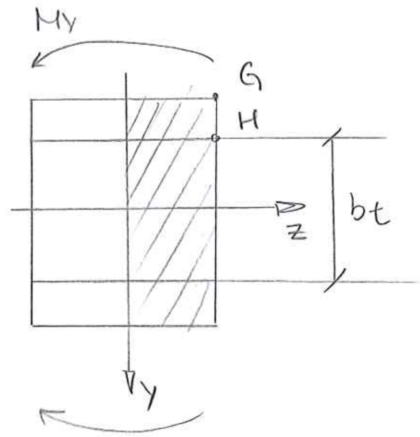




(*)(*) corregido.

$$\sigma^{(a)}_{xx,máx} = \sigma_{xx}(E) = \frac{-M_z \cdot y_E}{I_z} = \frac{-45'33\,KN \cdot m(-11cm)}{2'54 \cdot 10^{-5} m^4} = 196'325 MPa \quad \{M_z\}$$

$$\sigma^{(m)}_{xx,máx} = \sigma_{xx}(F) = \frac{-M_z \cdot y_F}{I_z} = \frac{-45'33\,KN \cdot m(-10\,cm)}{2'54 \cdot 10^{-5} m^4} \cdot 0'05 = 8'924\, MPa \quad \{M_z\}$$



• Misma resistencia

$dF_r = dF_t$

$\sigma_m\, b\, dy = \sigma_a \cdot b_t \cdot dy$

$b_t = \frac{\sigma_m}{\sigma_a} b$

• Misma rigidez

$\varepsilon_r = \varepsilon_t$

$\frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma_a}{E_a}$

$\frac{\sigma_m}{\sigma_a} = \frac{E_m}{E_a}$

$\rightarrow b_t = 0'05 \cdot 20cm = 1cm$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 3cm \cdot (10cm)^3 = 2'5 \cdot 10^{-6}\, m^4$$

$$\sigma^{(a)}_{xx,máx} = \sigma_{xx}(G) = \frac{M_y \cdot z}{I_y} = \frac{4KN \cdot m \cdot 5cm}{2'5 \cdot 10^{-6}\, m^4} = 80\, MPa \quad \{M_y\}$$

$$\sigma^{(m)}_{xx,máx} = \sigma_{xx}(H) = \frac{M_y \cdot z}{I_y} = \frac{4KNm \cdot 5cm}{2'5 \cdot 10^{-6} m^4} \cdot 0'05 = 4MPa \quad \{M_y\}$$

$$\boxed{\sigma_{xx,máx}^{(a)} = 196'325\,MPa + 80\,MPa = 276,325\,MPa}$$

$$\boxed{\sigma_{xx,máx}^{(m)} = 8'924\,MPa + 4\,MPa = 12'924\,MPa}$$

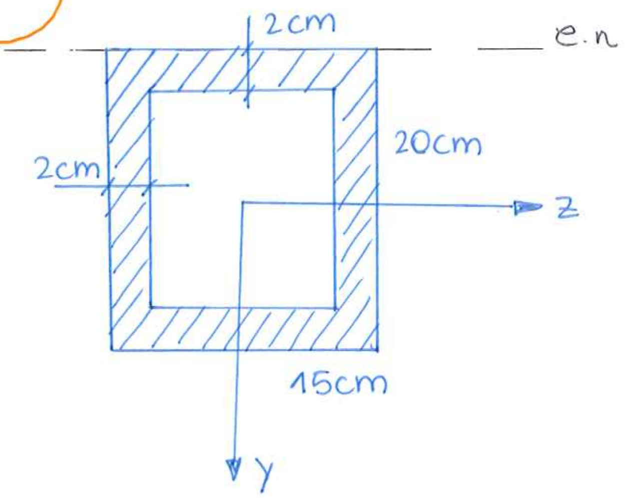
⑪ coeficientes de seguridad

$$n_a = \frac{\sigma_{fa}}{\sigma_{xx,máx}^{(a)}} = \frac{360\,MPa}{276,325\,MPa} = 1'303$$

$$n_m = \frac{\sigma_{fm}}{\sigma_{xx,máx}^{(m)}} = \frac{40\,MPa}{37'005\,MPa} = 1'081$$

Los coeficientes de seguridad son $n_a = 1'303$ y $n_m = 1'081$. Las máximas tensiones normales se producen en el punto E de la sección A para el acero y en el punto G de la sección C para la madera.

C-1.4



$$y_p^n = -\frac{i_z^2}{y_p} = -10cm \Rightarrow y_p = \frac{i_z^2}{10cm} = 0'05037\,m = 5'037\,cm$$

$$z_p^n = -\frac{i_y^2}{z_p} = \infty \Rightarrow z_p = 0$$

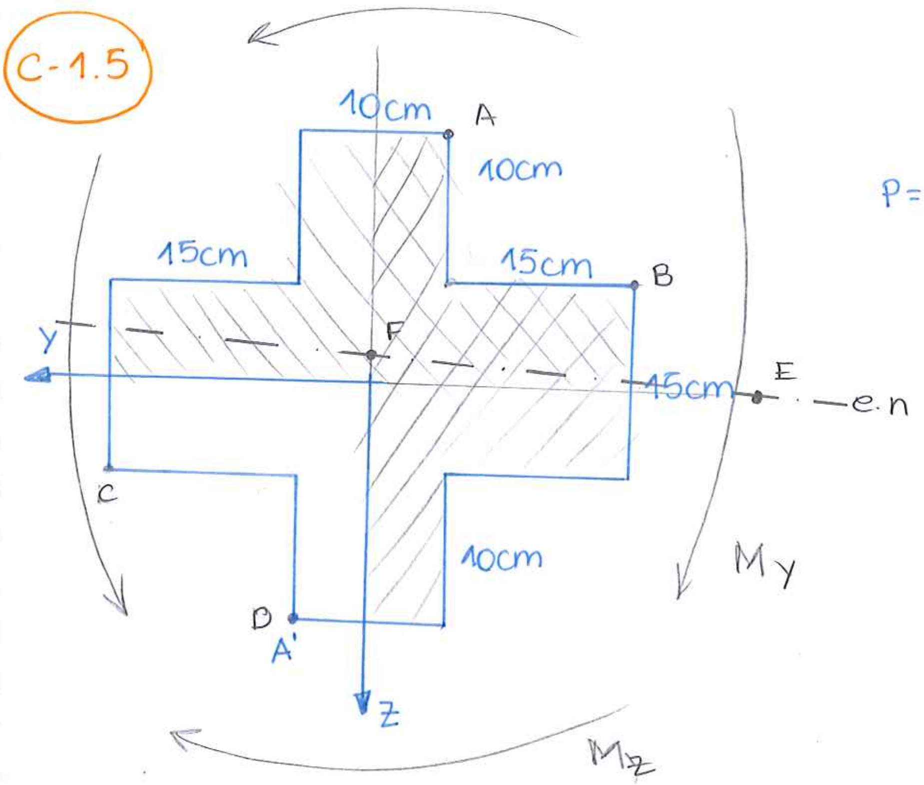
$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = 5'036556 \cdot 10^{-3}\,m^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}\,15cm\,(20cm)^3 - \frac{1}{12}\,11cm\,(16cm)^3 = 6,24533 \cdot 10^{-5}\,m^4$$

$$A = 20cm \cdot 15cm - 11cm \cdot 16cm = 0'0124\,m^2$$

$\boxed{\text{La excentricidad límite de carga de compresión es } y_p = 5'037cm}$

C-1.5



P = 500kN (−)

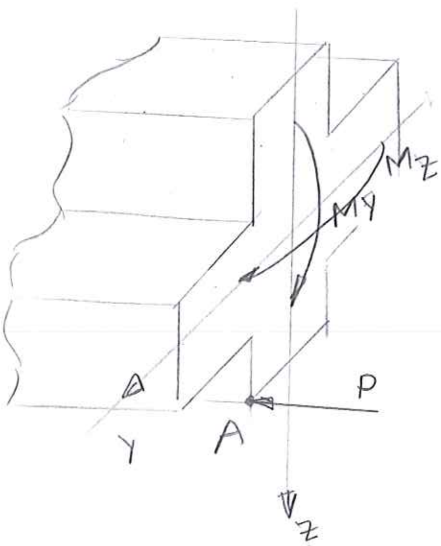
E(−20'41, 0) [cm]

F(0, −3'15) [cm]

1) TENSIONES MÁXIMAS DE TRACCIÓN Y COMPRESIÓN.

$M_y = P \cdot 17'5cm = 87'5 \, kN \cdot m$

$M_z = P \cdot 5cm = 25 \, kNm$



- Posibles puntos de máxima tracción: A, B
- Posibles puntos de máxima compresión: C, D

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{A} - \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

$A = (15cm)^2 \cdot 2 + (10cm)^2 \cdot 2 + 15cm \cdot 10cm = 0'08 m^2$

$I_y = \frac{1}{12} \, 10cm \cdot (35cm)^3 + \frac{1}{12} \cdot 30cm \, (15cm)^3 = 4,4167 \cdot 10^{-4} m^4$

$I_z = \frac{1}{12} \cdot 15cm \, (40\,cm)^3 + \frac{1}{12} \, 20cm (10cm)^3 = 8,1667 \cdot 10^{-4} m^4$

$$\sigma_{xx}(A) = \frac{-500kN}{0'08m^2} - \frac{87'5kN \cdot m(-17'5cm)}{4,4167 \cdot 10^{4} \, m^4} - \frac{25kN \cdot m \cdot (-5cm)}{8,1667 \cdot 10^{-4} m^4} = 29'950 \, MPa$$

$$\sigma_{xx}(B) = \frac{-500kN}{0'08m^2} - \frac{87'5kN \cdot m(-7'5cm)}{4,4167 \cdot 10^{-4} m^4} - \frac{25kN \cdot m \, (20\,cm)}{8,1667 \cdot 10^{-4} m^4} = 14'731 MPa$$

$$\sigma_{xx}(C) = \frac{-500 kN}{0'08 m^2} - \frac{87'5 kNm (7'5cm)}{4{,}4167 \cdot 10^{-4} m^4} - \frac{25 kNm (20cm)}{8{,}1667 \cdot 10^{-4} m^4} = -27{,}231 MPa$$

$$\sigma_{xx}(D) = \frac{-500 KN}{0'08 m^4} - \frac{87'5 KNm (17'5cm)}{4{,}4167 \cdot 10^{-4} m^4} - \frac{25 KNm (5cm)}{8{,}1667 \cdot 10^{-4} m^4} = -42{,}450 MPa$$

La tensión máxima de tracción es $\sigma_{xx} = 29'95 MPa$ en A y la de compresión $\sigma_{xx} = 42{,}45 MPa$ en D.

- Eje neutro. $\sigma_{xx} = 0$.

$$-\frac{500 kN}{0'08 m^2} - \frac{87'5 kN m \cdot z}{4{,}4167 \cdot 10^{-4} m^4} - \frac{25 kNm \; y}{8{,}1667 \cdot 10^{-4} m^4} = 0.$$

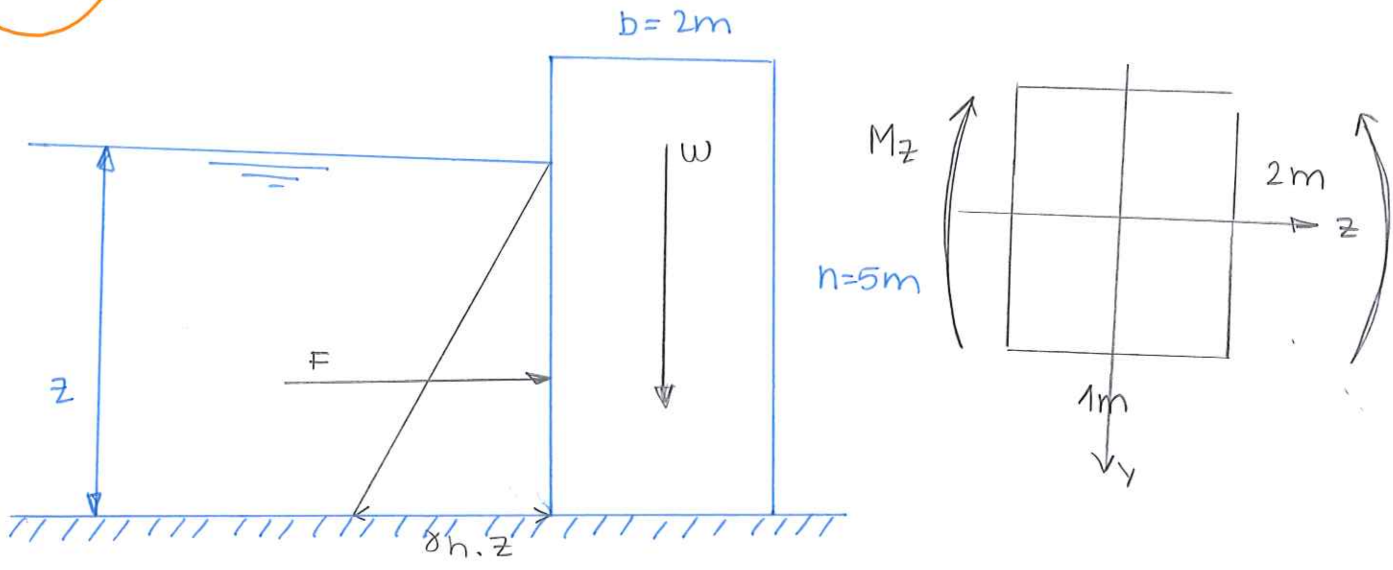
$$-6250 - 198111{,}71242 - 30612{,}11995y = 0.$$

$$z = 0 \Rightarrow y = -0'2041675 m = -20'41675 cm$$

$$y = 0 \Rightarrow z = -0'031547857 m = -3'1547857 cm.$$

El eje neutro viene dado por la recta $30612{,}11995y + 198111{,}71242 + 6250 = 0$ que pasa por los puntos $E(-20'41, 0)$ y $F(0, -3'15)$ [cm]. La ecuación del eje neutro viene dada en [m]

C-1.6



Suponemos 1 m de profundidad.

$\gamma_h = 24 \frac{KN}{m^3}$

$\gamma_a = 10 \frac{KN}{m^3}$

$F = \frac{1}{2} \gamma_a . z . z \cdot \overset{1m}{} = \frac{1}{2} 10 \frac{KN}{m^3} z^2 \cdot \overset{1m}{} = 5 \frac{KN}{m^3} . z^2 . 1m = 5 \frac{KN}{m^2} . z^2$

$\sigma_{xx} = - \frac{N_x}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$

$N_x = w = \gamma_h h . b . 1m = 24 \frac{KN}{m^3} \cdot 5m . 2m . 1m = 240 \, KN$

$M_z = F . \frac{z}{3} = 5 \frac{KN}{m^2} \cdot z^2 \cdot \frac{z}{3} = 1'667 \frac{KN}{m^2} \cdot z^3$

$A = 2m \; 1m = 2m^2$

$I_z = \frac{1}{12} \, 1m (2m)^3 = 0'667 m^4$

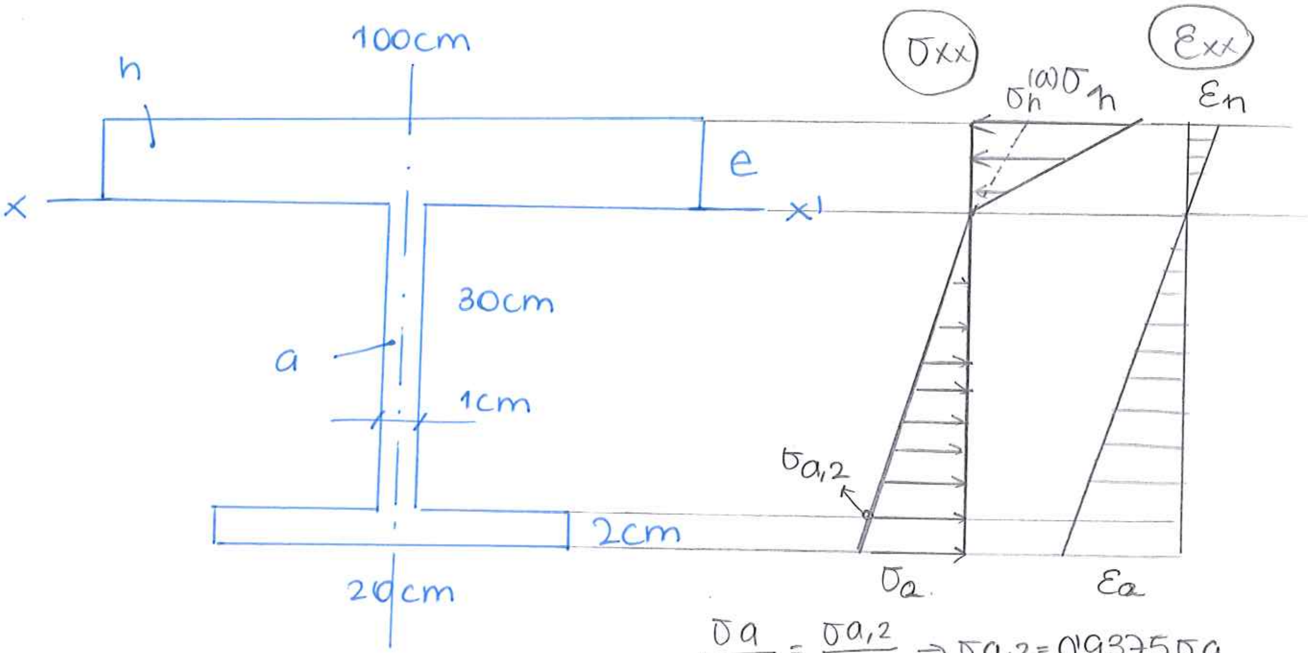
En la base

$\sigma_{xx} = - \frac{240 KN}{2m^2} + \frac{1'667 \frac{KN}{m^2} \cdot z^3 . (1m)}{0'667 m^4} = 0$

$z = 3'634 \, m$

La máxima altura es de $z = 3'634m$

C-1.7



$$\frac{\sigma_a}{32} = \frac{\sigma_{a,2}}{30} \Rightarrow \sigma_{a,2} = 0'9375\,\sigma_a$$

- Recta $xx' =$ e.n.

$$\frac{E_a}{E_h} = 10.$$

$$\frac{\varepsilon_h}{e} = \frac{\varepsilon_a}{32cm} \Rightarrow \frac{\sigma_h}{E_h \cdot e} = \frac{\sigma_a}{E_a \cdot 32cm} \Rightarrow e = \frac{\sigma_h}{\sigma_a} \cdot \frac{E_a}{E_h} \cdot 32cm =$$

- Flexión Pura

$$\Sigma F = 0: \ \frac{1}{2} \cdot \sigma_a \, 32cm \cdot 20cm - \frac{1}{2} \cdot 0'9375\sigma_a \cdot 30cm \, 20cm + \frac{1}{2} \cdot 0'9375\sigma_a \cdot 30cm \cdot 1cm =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sigma_h \cdot e \cdot 100cm$$

$$52'8125\,cm^2\,\sigma_a = 50\,cm\,\sigma_h\,e$$

$$\frac{\sigma_h}{\sigma_a} = 1'05625\,cm \cdot \frac{1}{e}$$

$$e = 1'05625\,cm \, \frac{1}{e} \cdot 10 \cdot 32cm$$

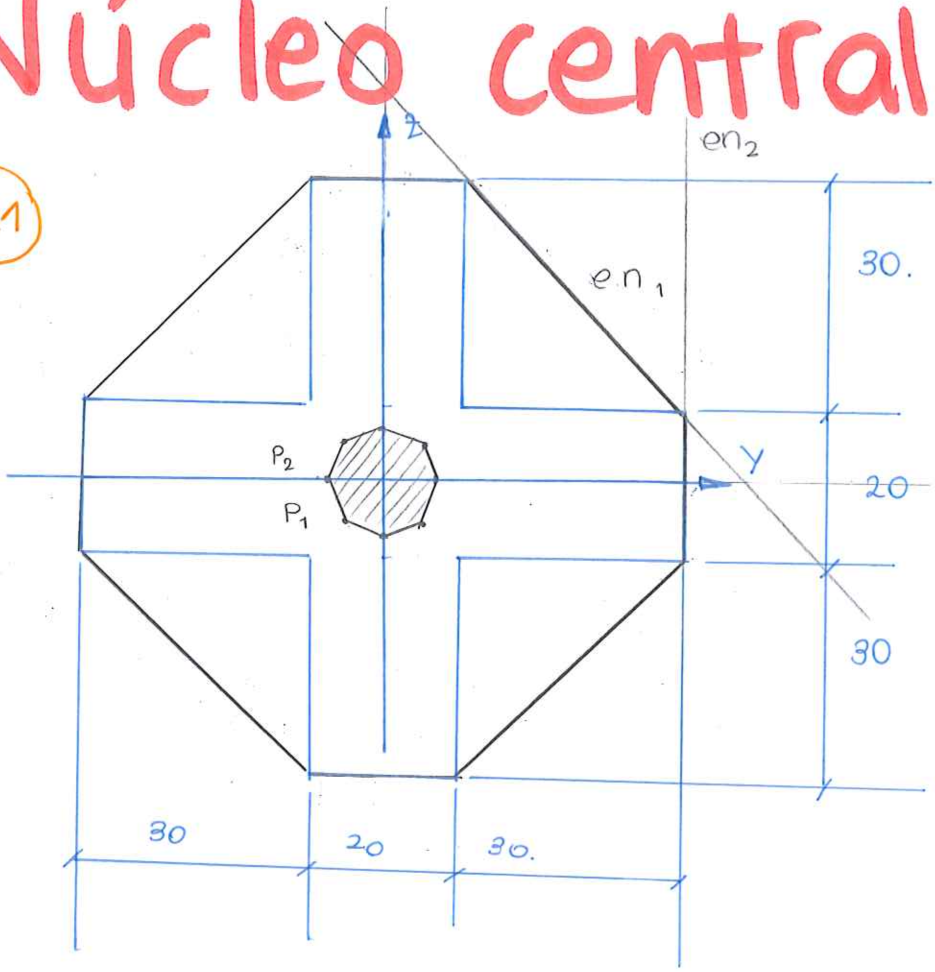
$$e^2 = 1'05625\,cm \cdot 10 \cdot 32cm$$

$$e = 18'385\,cm$$

$\boxed{\text{El espesor es de } e = 18'385\,cm}$

Núcleo central

1-21



● $e.n._1$: $y_p = -\dfrac{i_z^2}{y_p^n} = -6'38095$; $z_p = -\dfrac{i_y^2}{z_p^n} = -6'38095$ } $P_1(-6'38095, -6'3809)$

$$\left\{\begin{array}{l} i_z^2 = \dfrac{I_z}{A} = \dfrac{\frac{1}{12}20cm(80cm)^3 + 2\cdot\frac{1}{12}\cdot 30cm(20cm)^3}{2\cdot 20cm\cdot 30\,cm + 80cm\cdot 20cm} = 319{,}047619cm^2 \\ i_y^2 = \dfrac{I_y}{A} \quad i_z^2 = 319'047619cm^2 \end{array}\right.$$

$y_p^{n_1} = 50cm$, $z_p^{n_1} = 50cm$

● en_2: $y_p = -\dfrac{i_z^2}{y_p^n} = -7'97619$; $z_p = \dfrac{-i_y^2}{z_p^n} = 0$ } $P_2(-7'97619, 0)$

$y_p^{n_2} = 40cm$, $z_p^{n_2} = \infty$

Los vértices del núcleo central son $P_1(-6'38095, -6'38095)$; $P_2(-7'97619, 0)$ y sus simétricos