**2015-ko ekainaren 19-a** *JARIAKINEN MEKANIKA*

Denbora: 35 min

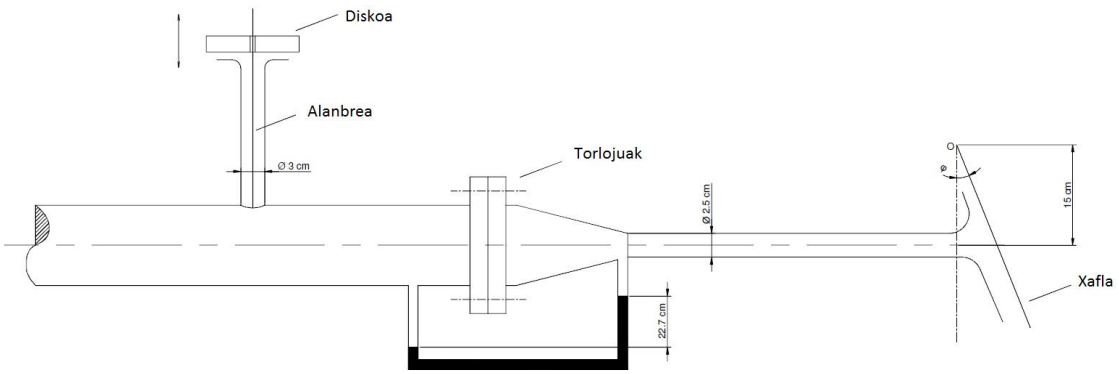
Hodi zirkular batean zirkulatzen ari den ur-emari osoa 11 kg/s-koa da (ikus irudia) eta fluxua iraunkorra da. β=0,625 faktore geometrikoa duen txikiagotze bat torlojuz lotuta jarri da. Modu honetan ura atmosferara ateratzen denean, diametroa 2,5 cm-koa da, eta suposa daiteke hori ere zorrotadaren diametroa dela. Sarreraren eta irteeraren sekzioen artean, U formako merkurio zutabedun manometro bat kokatu da, eta han neurtzen dena 22,7 cm da.

Irteerako zorrotadak karratua den xafla baten kontra jotzen du. Xaflak lodiera uniformea eta 30 cm-ko aldea ditu eta hasieran posizio bertikalean zegoen. Xaflaren masa 5 kg-koa da, eta O puntuan artikulatua da. Zorrotadak puntu horretatik 15 cm-ra jotzen du.

Beste alde batetik, eta lehen deskribatutako txikigotzea baino atzerago dagoen gune batean 3 cm-ko diametrodun zulo bat dago hodian. Handik ateratzen den 7 kg/s-ko emaria 3 kg-ko disko bat bertikalki altxatzeko erabiltzen da. Diskoa alanbre mehe batetik irristatzen da.

Eskatzen da:

a) Zorrotadaren eraginarengatik sortzen den φ biraketa angelua bertikalarekiko kalkulatu.
b) Orekan dagoenean, diskoa noraino altxatzen den kalkulatu.
c) Txikiagotzean behar den torlojuen kopuru minimoa kalkulatu. Horretarako kontuan hartu behar da, torlojuak egiteko erabili den materialarengatik, haiek jasotzen duten trakzio-indar maximoa 0,3 kg-koa dela.




Oharrak:

- *Fluxua perfektua eta konprimaezina dela kontsideratu*
- *Fluidoaren pisua mespretxagarria da beste indarrekin konparatzen bada.*
- *Diskoaren aurreratzean, alanbreak zorrotadan egiten duen eragina mespretxagarria da*
- $\rho_{ura} = 1000\ kg/m^3$
- $\rho_{merkurioa} = 13600\ kg/m^3$
- $p_{atm} = 101\ kPa$

**19 de junio de 2015** *EXAMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS*

Tiempo: 35 min

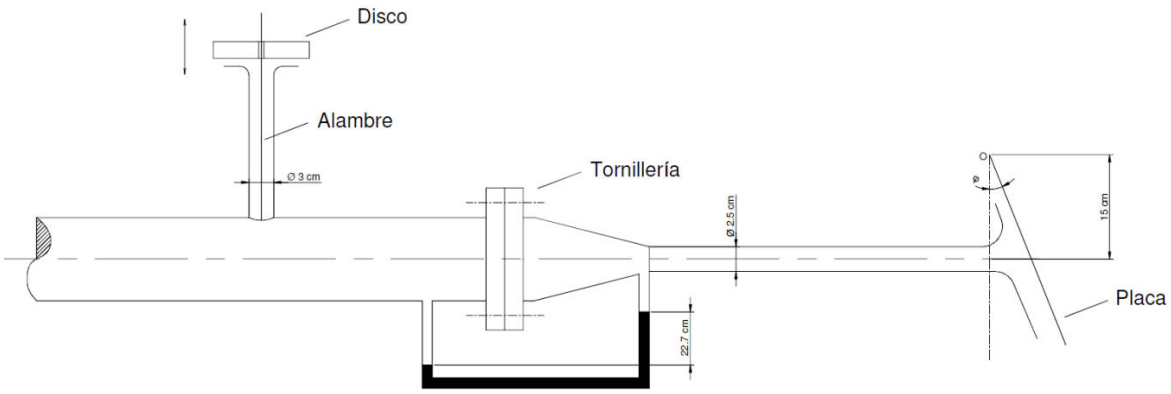
La figura muestra una tubería circular por la que circula un caudal total de 11 kg/s de agua en régimen permanente y en la que se ha instalado una reducción mediante conexión atornillada de factor geométrico β=0,625 con la que se obtiene, en la descarga a la atmósfera, un diámetro igual a 2,5 cm y que puede considerarse igual al diámetro del chorro a la salida. Se ha colocado asimismo, entre las secciones de entrada y salida de dicha reducción, un manómetro diferencial de mercurio en U que arroja una lectura de 22,7 cm.

El chorro de salida termina por impactar contra una placa cuadrada de espesor uniforme y 30 cm de lado que inicialmente se encontraba en posición vertical. La placa, que tiene una masa de 5 kg, se encuentra articulada en el punto O y el chorro incide a 15 cm de dicho punto.

Por otro lado y en una región previa a la reducción arriba descrita, la tubería cuenta con un agujero de 3 cm de diámetro por el cual se tiene un caudal de salida de 7 kg/s, destinado a elevar verticalmente un disco de 3 kg capaz de deslizar por un fino alambre.

Se pide:

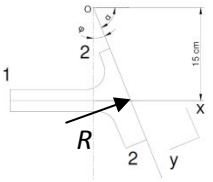
d) Calcular, respecto a la vertical, el ángulo de giro φ de la placa por el efecto del chorro
e) Calcular la altura hasta la que se eleva el disco y permanece en equilibrio
f) Determinar el número mínimo de tornillos en la reducción, sabiendo que debido al material con el que están construidos, cada uno de ellos soporta una fuerza de tracción máxima de 0,3 kg




***Notas:***

- *Considerar fluido perfecto e incompresible*
- *El peso del fluido es despreciable frente al resto de fuerzas*
- *En el avance del disco, el efecto del alambre sobre el chorro es despreciable*
- $\rho_{agua} = 1000\ kg/m^3$
- $\rho_{mercurio} = 13600\ kg/m^3$
- $p_{atm} = 101\ kPa$

a) Calcular, respecto a la vertical, el ángulo de giro φ de la placa por el efecto del chorro

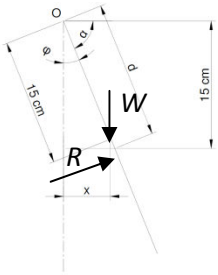
$1^{er}\ T^{1}$ 

$= \dot{\vec{M}}_{sal} - \dot{\vec{M}}_{en}$

$$q_m = 11 - 7 = 4\ {}^{kg}/_{S} = \rho A_s U_s \ \rightarrow\ U_s = \frac{4}{1000 \cdot \left(\pi \frac{0{,}025^2}{4}\right)} = 8{,}15\ {}^{m}/_{S}$$

$$R_h = \dot{M}_{2y} - \dot{M}_{1y} = \rho A_1 U_1^{\,2} sen\alpha = q_m U_1 sen\alpha = 4 \cdot 8{,}15 \cdot sen\alpha = 32{,}6 \cdot sen\alpha = R$$

$$W = 5 \cdot 9{,}81 = 49{,}05\ N$$

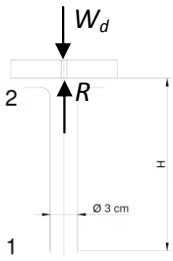



$$x = 0{,}015 \cdot cos\alpha \qquad ; \qquad d = {}^{0{,}015}/_{sen\alpha}$$

$$\sum \Gamma_0 = 0 \rightarrow R \cdot d = W \cdot x \rightarrow (32{,}6 \cdot sen\alpha) \cdot \left({}^{0{,}015}/_{sen\alpha}\right) = 49{,}05 \cdot 0{,}015 \cdot cos\alpha$$

$$\alpha = 48{,}3^0 \ \rightarrow\ \varphi = 90 - 48{,}3 = 41{,}7^0$$

b) Calcular la altura hasta la que se eleva el disco y permanece en equilibrio




$$W_d = 3 \cdot 9{,}81 = 29{,}43\ N \qquad ; \qquad R = q_m \cdot U_2 = 7 \cdot U_2$$

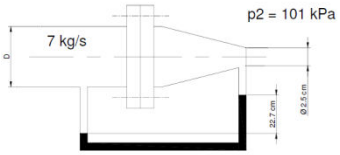
$$W_d = R \ \rightarrow\ 29{,}43 = 7 \cdot U_2 \rightarrow\ U_2 = 4{,}2\ {}^{m}/_{S}$$

$$U_1 = \frac{q_m}{\rho A_1} = \frac{7}{1000 \cdot \left(\pi \frac{0{,}03^2}{4}\right)} = 9{,}9\ {}^{m}/_{S}$$

$$Bernoulli\ 1 \rightarrow 2:\ z_1 + {}^{p_1}/_{\gamma} + {}^{U_1^2}/_{2g} = z_2 + {}^{p_2}/_{\gamma} + {}^{U_2^2}/_{2g}$$

$$z_1 = H = {}^{(U_1^2 - U_2^2)}/_{2g} = {}^{(9{,}9^2 - 4{,}2^2)}/_{2 \cdot 9{,}81} = 4{,}1\ m$$

c) Determinar el número mínimo de tornillos en la reducción, sabiendo que debido al material con el que están construidos, cada uno de ellos soporta una fuerza de tracción máxima de 0,3 kg




$$D = {}^{d}/_{\beta} = {}^{2,5}/_{0,625} = 4\ cm$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = h_{lect}(\gamma_{Hg} - \gamma_{H_2O}) = 0,227 \cdot (133416 - 9810) = 28058,5\ Pa$$

$$q_m = 4\ {}^{kg}/_{s} = \rho A_e U_e \rightarrow U_e = \frac{4}{1000 \cdot \left(\pi \frac{0,04^2}{4}\right)} = 3,18\ {}^{m}/_{s}$$

$$1^{er}\ T^{ma}\ Euler:\ \vec{P} + \vec{G} = \dot{\vec{M}}_{sal} - \dot{\vec{M}}_{en}$$

$$-F_{torn} + p_1 A_1 = q_m (U_2 - U_1)$$

$$F_{torn} = 28058,5 \cdot \left(\pi \frac{0,04^2}{4}\right) - 4 \cdot (8,15 - 3,18) = 15,3\ N$$

$$N^o tornillos = {}^{15,3}/_{(0,3 \cdot 9,81)} = 5,2 \rightarrow \textbf{Mínimo: 6 tornillos}$$

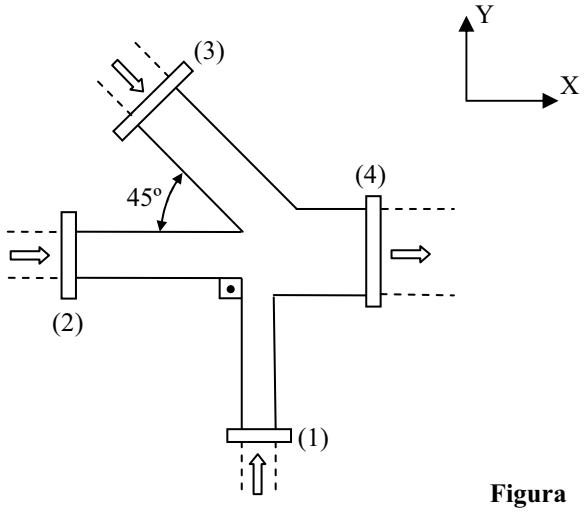
**3er curso de Ingenieros Industriales** *EXÁMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS*
**3 de febrero de 2010** Tiempo: 45 minutos

Se tiene una unión de tres tuberías en confluencia, por donde entran 3 caudales de agua ($\rho$=1000 kg/m$^3$), que dan lugar a una única tubería general por donde circula el caudal total de salida (ver Figura). Los diámetros de las tuberías de entrada son $D_1$ = 6 cm, $D_2$ = 7cm, $D_3$ = 8 cm. El diámetro de la tubería de salida es $D_4$=12cm. Se conoce la velocidad en la entrada (2) $U_2$ = 6 m/s (Se supone perfil uniforme de velocidades en todas las entradas y salida). El caudal total de salida en la sección (4) es $Q_4$ = 144 m$^3$/h. Además, se sabe que si se aumenta el caudal de entrada en la sección (3) en un 40%, el caudal total resultante en la sección (4) se incrementa en un 10% (dejando el resto de caudales invariables).

a) Calcular las velocidades del agua en todas las secciones en la situación inicial.

Las pérdidas de carga localizadas entre la sección de entrada (i) (i=1,2,3) y la sección de salida (4) se pueden definir como $h_{s,i} = \Delta H_{i-4} = K_{i-4}\dfrac{U_4^{\,2}}{2g}$, siendo los coeficientes de pérdidas localizadas $K_{1-4}$=0,08, $K_{2-4}$=0,3 y $K_{3-4}$=0,05 (referidos a la velocidad de salida). Partiendo de la situación inicial del apartado anterior, la presión del agua en la sección de salida (4) es de 100 kPa. Se pide:

b) Calcular las presiones (en kPa) en cada una de las secciones de entrada (i) (i=1, 2, 3).
c) Calcular las componentes X e Y de la fuerza efectiva resultante (en N) que comunica el agua a la unión de tuberías (indíquese valor numérico y signo).




**Figura**

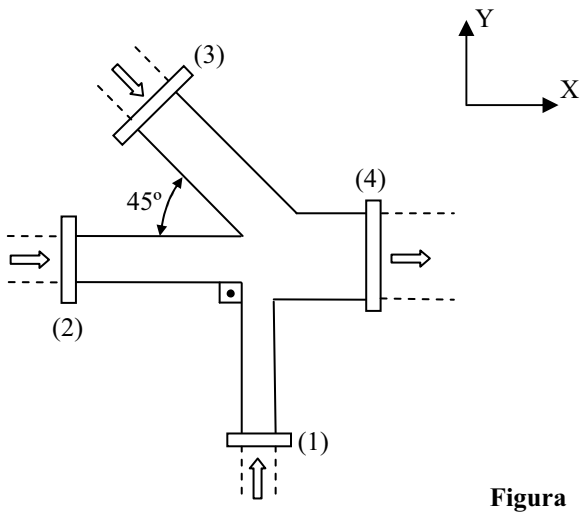
Nota: gravedad g = 9,81 m/s$^2$. La distribución de tuberías se presenta en un plano horizontal, la Figura corresponde a una vista en planta.

a) DATOS: $\rho = 1000 kg/m^3$, $\gamma = 9810 N/m^3$, $g = 9{,}81 m/s^2$

$D_1$=6cm=0,06m
$D_2$=7cm=0,07m
$D_3$=8cm=0,08m
$D_4$=12cm=0,12m
$U_2$=6m/s
$Q_4$=144$m^3$/h=0,04$m^3$/s

Situación 2 ("si se aumenta el caudal de entrada en la sección (3) en un 40%, el caudal total resultante en la sección (4) se incrementa en un 10%, dejando el resto de caudales invariables"):

$Q_3'=1{,}4Q_3$, $Q_4'=1{,}1Q_4$, ($Q_1'=Q_1$, $Q_2'=Q_2$)




**Figura**

a) Se pide calcular todas las velocidades. Con la ecuación de continuidad se evaluarán primero todos los caudales y posteriormente las velocidades.

Ecuación de continuidad en la situación 1:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4$$

$$Q_2 = U_2 \frac{\pi D_2^{\,2}}{4} = 6 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}07^2}{4} = 0{,}02309\_m^3/s$$

$$Q_1 + 0{,}02309 + Q_3 = 0{,}04 \quad ; \quad \boxed{Q_1 + Q_3 = 0{,}01691} \quad (1)$$

Ecuación de continuidad en la situación 2:

$$Q_1' + Q_2' + Q_3' = Q_4'$$

$$Q_1 + Q_2 + 1{,}4Q_3 = 1{,}1Q_4$$

$$\boxed{Q_1 + 1{,}4Q_3 = 0{,}02091} \quad (2)$$

$$Q_1 + Q_3 = 0{,}01691 \quad (1)$$

$$Q_1 + 1{,}4Q_3 = 0{,}02091 \quad (2)$$

(2)-(1) $0{,}4Q_3 = 0{,}004$

$\boxed{Q_3 = 0{,}01\_m^3/s}$ ; a ec. (1), $\boxed{Q_1 = 0{,}00691\_m^3/s}$

Conocidos todos los caudales evaluamos las velocidades como:

$$U_i = \frac{Q_i}{\frac{\pi D_i^2}{4}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} U_1 = 2{,}444\_m/s \quad ; \quad U_2 = 6\_m/s \ (\text{DATO}) \quad ; \\ U_3 = 1{,}989\_m/s \quad ; \quad U_4 = 3{,}537\_m/s \end{array}}$$

b) Las pérdidas localizadas entre la entrada (i) y la salida (4) se pueden calcular mediante:

$$h_{s,i} = \Delta H_{i-4} = K_{i-4}\frac{U_4^2}{2g}$$

Se desea calcular el término de presión en cada una de las entradas. Aplicando la ecuación de la energía entre la sección de entrada (i) y la sección de salida (4) se tiene:

$$z_i + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{U_i^2}{2g} = z_4 + \frac{p_4}{\gamma} + \frac{U_4^2}{2g} + h_{s,i} \quad ; \quad \frac{p_i}{\gamma} + \frac{U_i^2}{2g} = \frac{p_4}{\gamma} + \frac{U_4^2}{2g} + K_{i-4}\cdot\frac{U_4^2}{2g} \quad ;$$

$$\frac{p_i}{\gamma} = \frac{p_4}{\gamma} + \frac{U_4^2}{2g}(1+K_{i-4}) - \frac{U_i^2}{2g}$$

La distribución de tuberías se realiza sobre una superficie plana horizontal:

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4$$

Las pérdidas primarias se consideran despreciables por ser tramos de tubería cortos, es decir, todas las pérdidas de carga se asignan al término de pérdidas localizadas.

De la anterior ecuación:

(i=1)

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_4}{\gamma} + \frac{U_4^2}{2g}(1+K_{1-4}) - \frac{U_1^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{100000}{9810} + \frac{3{,}537^2}{2\cdot 9{,}81}(1+0{,}08) - \frac{2{,}444^2}{2\cdot 9{,}81} = 10{,}578\_\text{m.c.a.}$$

$$\boxed{p_1 = 103769\_Pa = 103{,}8\_kPa}$$

(i=2)

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_4}{\gamma} + \frac{U_4^2}{2g}(1+K_{2-4}) - \frac{U_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{100000}{9810} + \frac{3{,}537^2}{2\cdot 9{,}81}(1+0{,}3) - \frac{6^2}{2\cdot 9{,}81} = 9{,}188\_\text{m.c.a.}$$

$$\boxed{p_2 = 90132\_Pa = 90{,}1\_kPa}$$

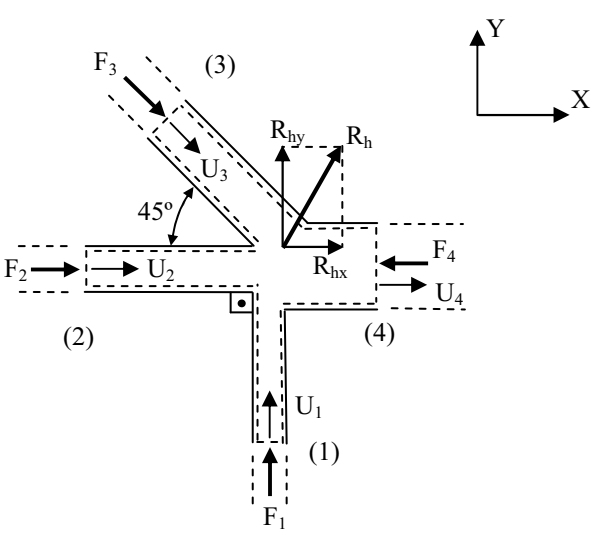
(i=3)

$$\frac{p_3}{\gamma} = \frac{p_4}{\gamma} + \frac{U_4^2}{2g}(1+K_{3-4}) - \frac{U_3^2}{2g}$$

$$\frac{p_3}{\gamma} = \frac{100000}{9810} + \frac{3{,}537^2}{2\cdot 9{,}81}(1+0{,}05) - \frac{1{,}989^2}{2\cdot 9{,}81} = 10{,}662\_\text{m.c.a.}$$

$$\boxed{p_3 = 104590\_Pa = 104{,}6\_kPa}$$

c)




**Empuje $R_h$ (contorno sobre fluido)**

Con el 1er teorema de Euler se calcula $\vec{R}_h$, por el principio de acción y reacción se obtiene el empuje del agua sobre el contorno sólido: $\vec{R} = -\vec{R}_h$.

1er Tma. de Euler: $\vec{P} + \vec{G} = \dot{\vec{M}}_4 - \dot{\vec{M}}_1 - \dot{\vec{M}}_2 - \dot{\vec{M}}_3$

Las fuerzas de gravedad $\vec{G}$ están sobre el eje z perpendicular al papel, solo se consideran las componentes sobre el plano horizontal xy.

Fuerzas intrínsecas $\vec{P}$:

Fuerzas de presión en las secciones de entrada y salida:

$F_1 = p_1 A_1$, $F_2 = p_2 A_2$, $F_3 = p_3 A_3$, $F_4 = p_4 A_4$

Fuerza intrínseca del contorno de las tuberías: $\vec{R}_h = R_{hx}\hat{i} + R_{hy}\hat{j}$

Flujos de cantidad de movimiento: $\dot{\vec{M}}_i = q_m \vec{U}_i = \rho Q_i \vec{U}_i$

Entonces:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{R}_h = q_{m4}\vec{U}_4 - q_{m1}\vec{U}_1 - q_{m2}\vec{U}_2 - q_{m3}\vec{U}_3$$

Eje X:

$$p_2 A_2 + p_3 A_3 \cos 45º - p_4 A_4 + R_{hx} = \rho Q_4 U_4 - \rho Q_2 U_2 - \rho Q_3 U_3 \cos 45º$$

$$\boxed{R_{hx} = 401{,}2 \_ N}$$

Eje Y:

$$p_1 A_1 - p_3 A_3 \text{sen} 45º + R_{hy} = 0 - \rho Q_1 U_1 - (-\rho Q_3 U_3 \text{sen} 45º)$$

$$\boxed{R_{hy} = 75{,}5 \_ N}$$

$$\vec{R}_h = 401{,}2 \cdot \hat{i} + 47{,}3 \cdot \hat{j} \_ N$$

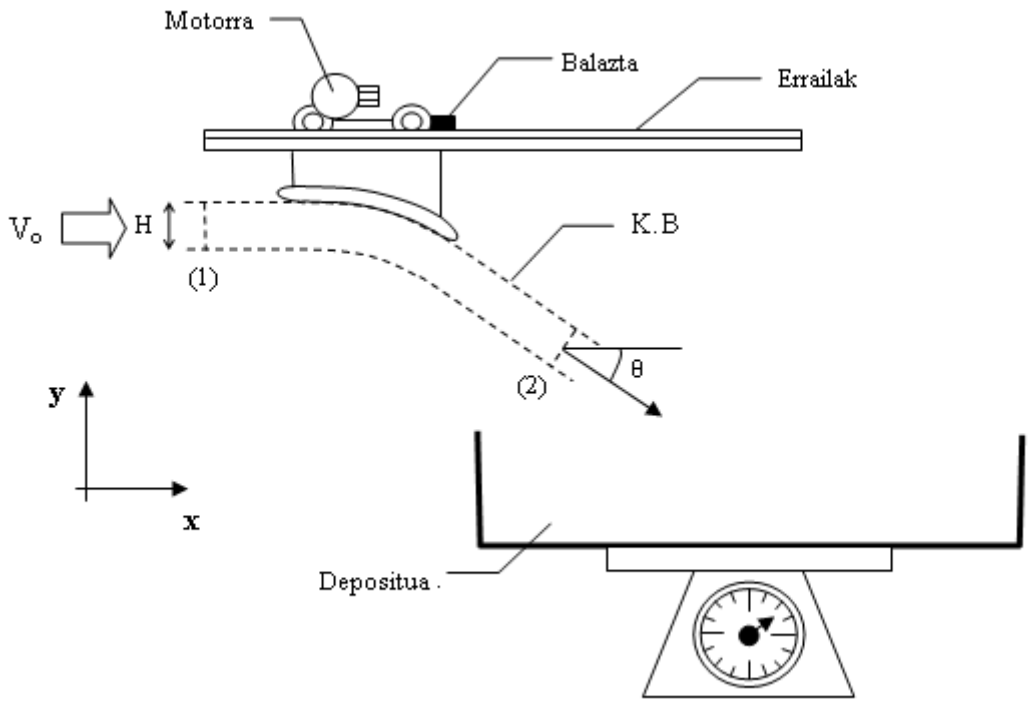
$$\boxed{\vec{R} = -\vec{R}_h = -401{,}2 \cdot \hat{i} - 75{,}5 \cdot \hat{j} \_ N}$$

**3. Maila Ingeniaritza Industriala** *JARIAKINEN MEKANIKA AZTERKETA*
**2. partziala: 2010ko maiatzak 8** **Denbora**: 45 minutu

Ureztabide instalazio txiki batetan, zabalera konstantea aurkezten duen alabe batek bere pisuaren ondorioz errail horizontal batzuen gainean gurpil berezien bitartez eskegita dagoen karro batetara itsatsita dago, irudian ikusi daitekeen bezala, higitu daitekeena marruskadurarik gabe errodatuz motor txiki baten eraginez. Ur-korronte batek era uniformean talka egiten du eta islatua da, uretan behera eta alabetik nahiko urrun dagoen distantziara (2. sekzioa) berriro ere sarreran (1. sekzioa) bezala uniforme egiten delarik, irudian adierazten den kontrol bolumenean agertzen den bezala. Hasiera batetan alabea, 1m-tako zabalera eta $\theta = 30^{o}$ angelutako irteera duena, geldirik dago gurpil baten gainean eragiten duen balaztak higidura horizontala eragozten bait dio. Baldintza hauetan eskatzen da:

1. Lortu balaztak sistemaren higidura eragozteko egin beharko duen indarra, zorrotadak $V_o = 5$ m/s abiadurarekin talka egiten badu eta aipatutako kontrol bolumenaren sarrera-sekzioa guztiz betetzen badu, H = 20 cm direlarik.

2. "Alabe + Karro" sistemak eta honen osagaiek, guztira, 3000 N-tako pisua aurkezten badute, zehaztu sistema pausagunean izango den edo ez baldintza hauetan aipatutako zorrotadaren eraginaren ondorioz.




(2) irteera-sekziotik irteten den zorrotadak balantza industrial baten gainean trinkoki kokatuta, dimentsio handikoa eta geldirik dagoen depositu baten kontra talka egiten du. Eskatzen da:

3. Jariakinak deposituaren hondoaren kontra talka egiten dueneko unean balantzak adierazten duena.

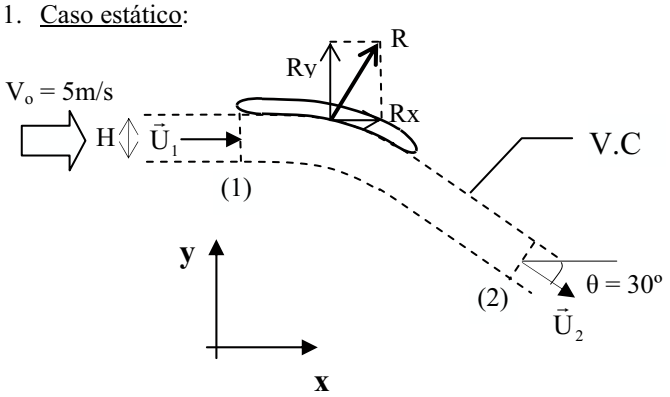
4. Karga prozesua hasi eta 2 segundotara balantzak adierazten duena.

Jarraian balazta kentzen da sistemaren higidura motorraren eraginaren ondorioz ahalbidetuz, eskuinera, 2 m/s-ko abiadurarekin. Egoera berri honetan eskatzen da

5. Lortu balaztak egin beharko duen indarra zorrotadaren eraginari aurre egiteko.

**Oharrak:** Kontsideratu mesprezagarriak grabitatearen eragina jariakinaren gainean, irteerako zorrotadaren alboko dispertsioa, tokizko karga galerak alabearen eraso angeluan eta deposituaren pisua. Hartu uraren dentsitatea 1000 kg/m$^3$-koa dela.

1. <u>Caso estático</u>:




La fuerza que tiene que vencer el freno es Rx.

Consideramos $P_1 = P_2 = P_{atm}$

Aplicando el 1er teorema de Euler al V.C:

$$\vec{P} + \underbrace{\vec{G}}_{0} = \dot{\vec{M}}_2 - \dot{\vec{M}}_1$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{M}}_1 = q_m \cdot \vec{U}_1 = q_m \cdot U_1\ \vec{i} \\ \dot{\vec{M}}_2 = q_m \cdot \vec{U}_2 = q_m \cdot \left(U_2 \cos\theta\ \vec{i} - U_2\ \text{sen}\theta\ \vec{j}\right) \end{cases}$$

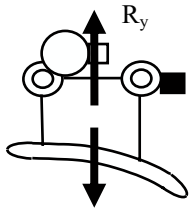
Bernoulli: $|U_1| = |U_2|$ = 5 m/s

$$\underbrace{\vec{R}_h}_{\text{Álabe sobre fluido}} = -\underbrace{\vec{R}}_{\text{Fluido sobre álabe}} \qquad \vec{R} = q_m \cdot U_1 \left[(1-\cos\theta)\vec{i} + \text{sen}\theta\ \vec{j}\right] \begin{cases} R_x = q_m \cdot U_1 \cdot (1-\cos\theta) & [1] \\ R_y = q_m \cdot U_1 \cdot \text{sen}\theta & [2] \end{cases}$$

Sustituyendo valores en [1] y considerando una anchura unidad para la sección:

$$\underline{\underline{R_x}} = q_m \cdot U_1 \cdot (1-\cos\theta) = \rho \cdot A \cdot U_1^2 \cdot (1-\cos\theta) = 1000 \cdot 0{,}2 \cdot 1 \cdot 5^2 \cdot (1-\cos 30) = \underline{\underline{670\ \text{N}}}$$

2. Para que el conjunto esté en reposo se debe verificar el equilibrio de fuerzas sobre el eje vertical ya que la componente horizontal se encuentra equilibrada por la acción del freno.

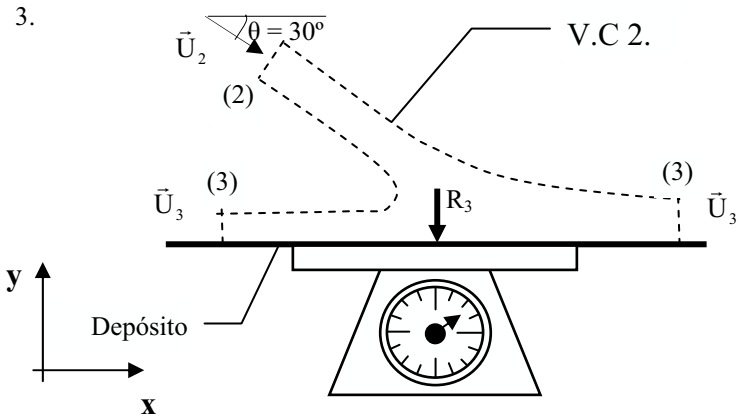



Sustituyendo en [2]:

$$R_y = q_m \cdot U_1 \cdot \text{sen}\theta = \rho \cdot A \cdot U_1^2 \cdot \text{sen}\theta = 1000 \cdot 0{,}2 \cdot 1 \cdot 5^2 \cdot \text{sen}\,30 = 2500\ \text{N}$$

$\underline{\underline{R_y \le W}}$ El conjunto estará en reposo

3.




La balanza indicará R (Fluido sobre depósito)

Aplicando el 1er teorema de Euler al V.C 2:

$$\vec{P} + \underbrace{\vec{G}}_{0} = \dot{\vec{M}}_3 - \dot{\vec{M}}_2$$

Se desprecia el propio peso del fluido y la atmósfera que rodea a todo el volumen de control en el instante inicial:

$$\dot{\vec{M}}_3 = 0$$

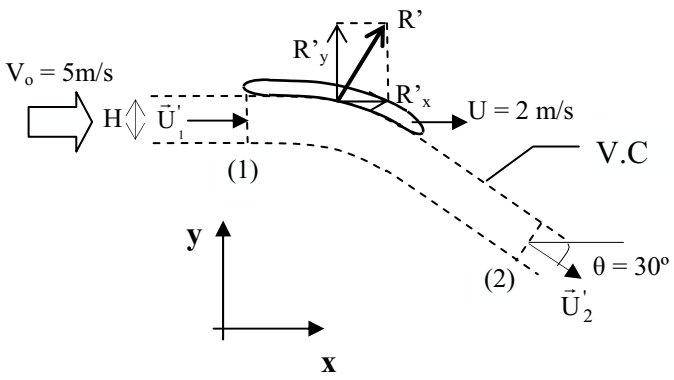
$$R_3 = q_m \cdot U_2 \cdot \text{sen}\theta = \rho \cdot A \cdot U_2^2 \cdot \text{sen}\theta = 1000 \cdot 0{,}2 \cdot 1 \cdot 5^2 \cdot \text{sen}\,30 = 2500\ \text{N}$$

Lo que marcará la balanza, será: $\underline{\underline{P_3}} = \dfrac{R_3}{g} = \dfrac{2500}{9{,}81} = \underline{\underline{254{,}84\ \text{kg}}}$

4. A los 2 segundos de iniciado el proceso de carga, la balanza marcará lo correspondiente al apartado anterior más el peso del fluido almacenado en el depósito en ese tiempo teniendo en cuanta que entra todo el flujo.

$$\underline{\underline{P_4}} = P_3 + q_m \cdot t = P_3 + \rho \cdot A \cdot U_2 \cdot t = 254{,}84 + 1000 \cdot 0{,}2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2 = \underline{\underline{2254{,}84 \text{ kg}}}$$

5. <u>Caso dinámico</u>:




La fuerza que tendría que vencer el freno es Rx. Pero ahora el caso es dinámico por lo que el estudio es análogo al caso estático pero con velocidades relativas:

$$\vec{U}_1' = \vec{V}_0 - \vec{U} = 5 - 2 = 3 \text{ m/s}$$

$$R'_x = q_m \cdot \left(\vec{V}_0 - \vec{U}\right) \cdot (1 - \cos\theta) \qquad [3]$$

$$R'_y = q_m \cdot \left(\vec{V}_0 - \vec{U}\right) \cdot \text{sen}\theta \qquad [4]$$

Sustituyendo valores en [3]:

$$\underline{\underline{R'_x}} = q_m \cdot \left(\vec{V}_0 - \vec{U}\right) \cdot (1 - \cos\theta) = \rho \cdot A \cdot \left(\vec{V}_0 - \vec{U}\right)^2 \cdot (1 - \cos\theta) = 1000 \cdot 0{,}2 \cdot 1 \cdot 3^2 \cdot (1 - \cos 30) = \underline{\underline{241{,}15 \text{ N}}}$$

**3er curso de Ingenieros Industriales** *EXÁMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS*

**Examen: 25 de enero de 2012** Tiempo: 45 min

Por una tubería de diámetro D=10 cm circula un caudal de agua evacuado a la atmósfera a través de una tobera de diámetro de salida d = 2 cm (Figura 1). La tobera tiene un coeficiente de descarga de $C_d$ = 0,83 y a la entrada un manómetro marca una presión de valor p = 5 bar. Calcular:

a) Caudal de agua circulante y velocidad del chorro a la salida

b) Fuerza que ejerce el agua sobre la tobera

El chorro saliente impacta sobre un obstáculo que forma parte de un depósito o tanque (en reposo). El chorro saliente del obstáculo puede depositar el líquido en el interior del depósito (Caso 1, Figura 1) o fuera de él (Caso 2, Figura 2). En ambos casos el chorro a la salida del obstáculo forma con la horizontal un ángulo de θ = 60º.

Calcular:

c) Fuerza horizontal que se debe realizar sobre el carro para evitar su avance en el Caso 1

d) Fuerza horizontal que se debe realizar sobre el carro para evitar su avance en el Caso 2

e) Si ambos carros (de idéntico peso en vacío) se encuentran montados en sendas balanzas con el mismo volumen de líquido interior, ¿marcarían alguna diferencia en la lectura del peso? Si existe calcular su valor.

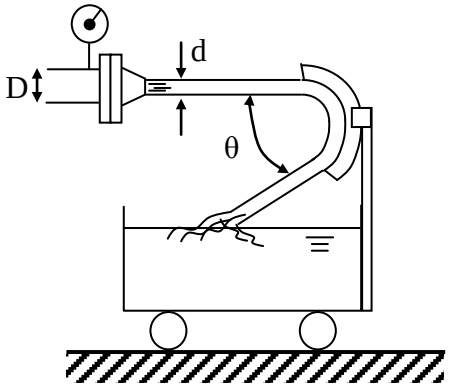



**Figura 1**

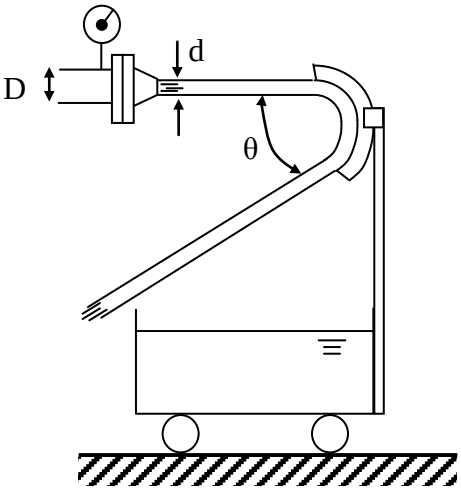


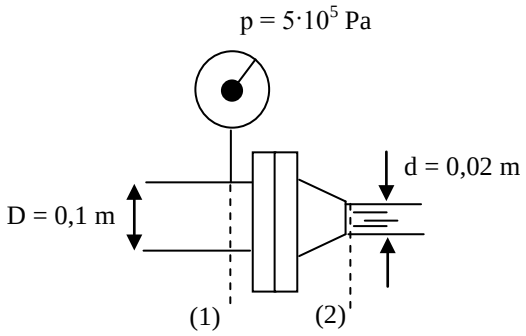

**Figura 2**

**Notas:**

- Gravedad 9,81 m/s$^2$
- Los fenómenos viscosos y diferencia de cotas en el chorro libre son despreciables
- Se desprecia el fenómeno de contracción de vena a la salida
- Gravedad 9,81 m/s$^2$, densidad del agua ρ = 1000 kg/m$^3$

DATOS:

D = 10 CM = 0,1 M
d = 2 cm = 0,02 m
$C_d$ = 0,83
P = 5 bar = $5\cdot10^5$ Pa
g = 9,81 m/s$^2$
ρ = 1000 kg / m$^3$
γ = 9810 N/m$^3$




a) Ecuación de la tobera

$$Q = C_d \frac{A_2}{\sqrt{1-\beta^4}}\sqrt{2g\Delta h} \quad ; \quad \text{con} \quad \Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{d}{D}$$

En este caso:

$$\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{5\cdot10^5 - 0}{9810} = 50{,}968 \text{ m.c.a.}$$

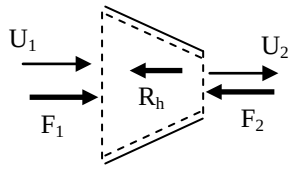
El caudal volumétrico:

$$Q = 0{,}83 \frac{\frac{\pi\cdot0{,}02^2}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}02}{0{,}1}\right)^4}}\sqrt{2\cdot9{,}81\cdot50{,}968} = 8{,}252\cdot10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

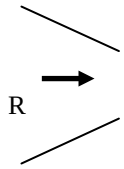
La velocidad:

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{8{,}252\cdot10^{-3}}{\frac{\pi\cdot0{,}02^2}{4}} = 26{,}268 \text{ m/s}$$

b)




Paredes sobre fluido




Fluido sobre paredes

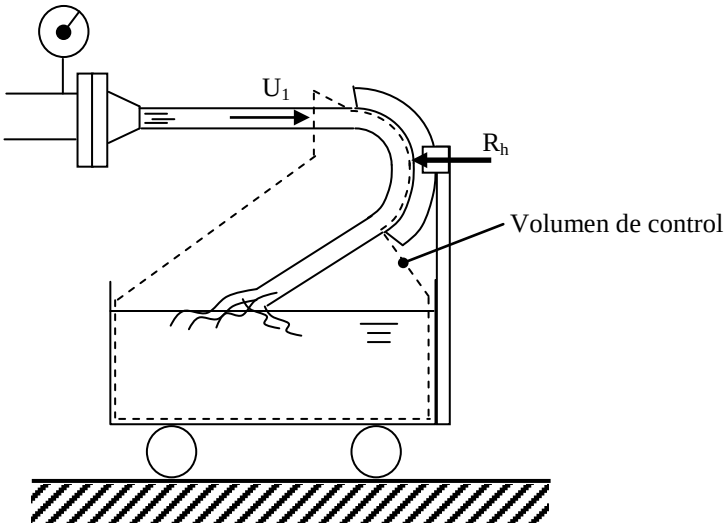
1er Teorema de Euler:

$$\vec{P} + \vec{G} = \dot{\vec{M}}_2 - \dot{\vec{M}}_1$$
$$F_1 - F_2 - R_h = q_m(U_2 - U_1)$$
$$p_1A_1 - p_2A_2 - R_h = q_m(U_2 - U_1)$$
$$R_h = p_1A_1 - p_2A_2 - q_m(U_2 - U_1)$$

La velocidad $U_1 = U_2\frac{d^2}{D^2} = 1{,}051 \text{ m/s}$

$$R = R_h = 5\cdot10^5\cdot\frac{\pi\cdot0{,}1^2}{4} - 8{,}252\cdot(26.268 - 1{,}051) = 3719 \text{ N}$$

c)

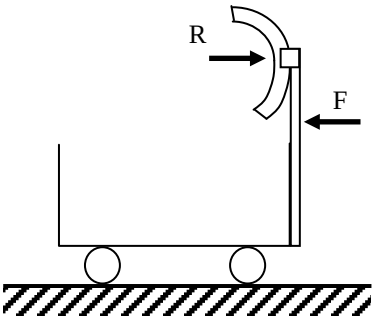



Se escoge un volumen de control que contenga todo el fluido que afecta al depósito. Otra opción más laboriosa (con idéntico resultado) sería evaluar por separado las acciones del chorro sobre el álabe y del chorro al caer dentro del depósito, cada uno con su volumen de control. Aquí se analiza la primera opción.

1er Teorema de Euler:

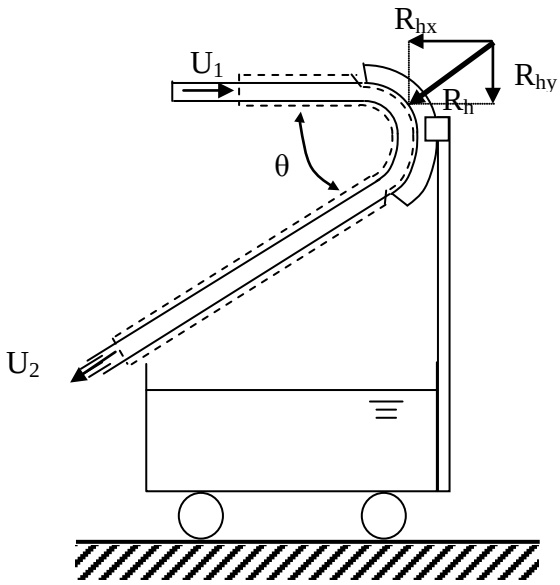
$$\vec{P} + \vec{G} = \dot{\vec{M}}_2 - \dot{\vec{M}}_1$$

Flujo de cantidad de movimiento saliente es nulo $\dot{\vec{M}}_2 = 0$ (no sale fluido del volumen de control)
Todo está envuelto en la atmósfera.

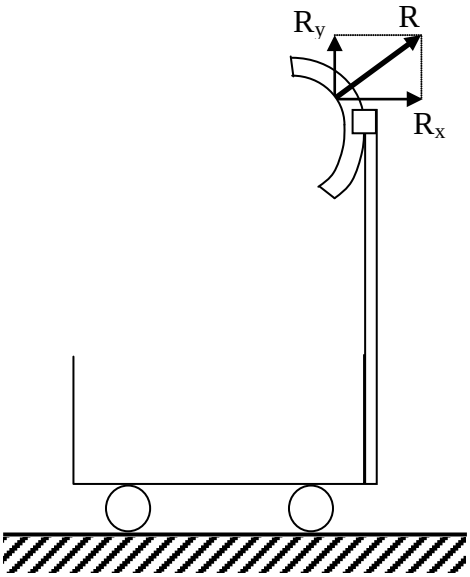



$$R_h = R = F = q_m U_1 = 216{,}77 \text{ N}$$

d)




(Álabe sobre fluido)




(Fluido sobre álabe)

1er Teorema de Euler:

$$\vec{P} + \vec{G} = \dot{\vec{M}}_2 - \dot{\vec{M}}_1$$

Evaluamos en horizontal (sentido hacia la derecha positivo):

$$-R_{hx} = q_m(-U_{2x} - U_{1x})$$

Despreciando diferencia de cotas y aplicando Bernoulli se llega a la conclusión de que: $U_1 = U_2$

$$-R_{hx} = q_m U_1(-\cos\theta - 1)$$

La fuerza horizontal necesaria para compensar a $R_x$ será:

$$F = R_x = R_{hx} = q_m U_1(\cos\theta + 1) = 8{,}252 \cdot 26{,}268 \cdot (\cos 60 + 1) = 325{,}16 \text{ N}$$

(El caudal másico obtenido de: $q_m = \rho Q = 8{,}252 \text{ kg/s}$ y la velocidad del chorro conocida $U_1 = 26{,}268 \text{ m/s}$).

e) En el primer caso al aplicar el primer teorema de Euler $\vec{P} + \vec{G} = \dot{\vec{M}}_2 - \dot{\vec{M}}_1$ solamente se tiene flujo de cantidad de movimiento horizontal, a parte del peso del líquido del depósito. La fuerza resultante sobre el volumen de control debida a la acción del chorro es horizontal. En el segundo caso se tiene flujo de cantidad de movimiento saliente vertical (a parte del mismo peso del líquido en el depósito) que dará lugar a una componente $R_y$ vertical que es la responsable de que una balanza mida una diferencia entre los dos casos. Exactamente la diferencia sería de "$R_y$" menos peso en el caso 2 respecto del caso 1.

Su valor se obtiene de aplicar el 1er Teorema de Euler (apartado anterior) pero en la coordenada vertical:

$$\vec{P} + \vec{G} = \dot{\vec{M}}_2 - \dot{\vec{M}}_1$$

$$-R_{hy} = q_m(-U_{2y} - 0) = -q_m U_{2y}$$

$$R_{hy} = q_m U_{2y} = q_m U_2 \text{sen}\theta = 8{,}252 \cdot 26{,}268 \cdot \text{sen}60^o = 187{,}73 \text{ N}$$

**3er curso de Ingenieros Industriales** *EXAMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS*
**Convocatoria mayo: 15 /05/ 2012** Tiempo: 40 minutos.

Se pretende diseñar un pequeño álabe plano que se encuentra inicialmente frenado en una instalación hidráulica tal y como se muestra en la figura. Sobre el álabe incide tangencialmente y de forma uniforme un chorro de agua que sale por una conducción (D = 50 cm.) a través de una tobera (d = 10 cm.) en lo que puede considerarse una transformación sin pérdidas de energía. La presión que indica el manómetro en la conducción es de 50 m.c.a. En estas condiciones en las que el álabe se encuentra estático, se pide:

1. Determinar la velocidad de salida del chorro por la tobera.

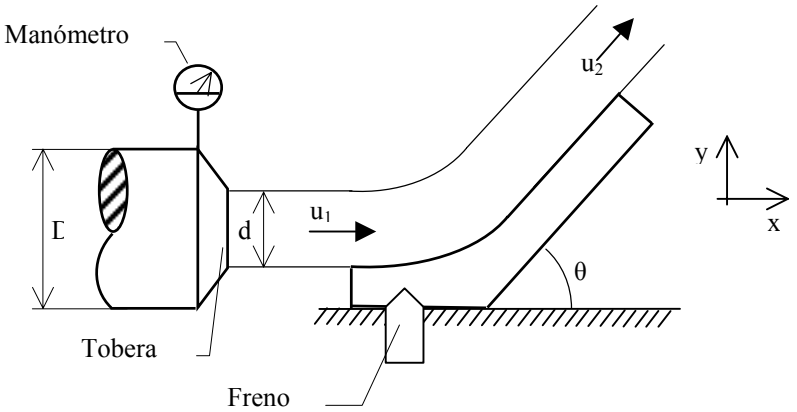
2. Obtener el ángulo de salida del álabe que tendría que tener para que la componente horizontal de la fuerza resultante que realiza el chorro sobre el álabe sea máxima.

3. Valor de la mencionada componente horizontal de la fuerza, expresada en N.

Para una configuración genérica de álabe, se suelta el freno proporcionándole una velocidad constante u hacia la derecha, permaneciendo la tobera estática. Se pide en esta nueva situación:

4. Determinar el nuevo ángulo de salida del álabe para que se igualasen en módulo las dos componentes horizontal y vertical de la nueva fuerza resultante que realiza el chorro sobre el álabe.

5. En esas condiciones de diseño, calcular el valor de la velocidad del álabe para que la componente horizontal de la fuerza se reduzca a la mitad de la obtenida en el apartado 3.




**Notas:**

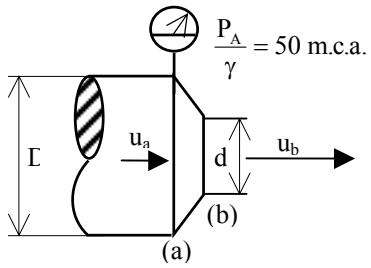
- Considerar despreciable el efecto de la gravedad para el fluido, la dispersión lateral del chorro saliente del álabe así como las fuerzas de rozamiento, el peso del álabe y las pérdidas de carga localizadas en el ángulo de ataque del mismo.

- Tomar 1000 kg/m$^3$ como valor para la densidad del agua y 9,81 m/s$^2$ para la aceleración de la gravedad.

- Considerar para la resolución la relación trigonométrica: $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

**3er curso de Ingenieros Industriales** *EXAMEN DE MECÁNICA DE FLUIDOS*
**Convocatoria mayo: 15 /05/ 2012**

**1.) CASO ESTÁTICO:**




Aplicando la ecuación de Bernoulli entre (a) y (b):

$$\frac{P_a}{\gamma} + \frac{u_a^2}{2g} + z_a = \overbrace{\frac{P_b}{\gamma}}^{0} + \frac{u_b^2}{2g} + z_b \quad \Rightarrow \quad \frac{P_a}{\gamma} = \frac{u_b^2 - u_a^2}{2g} \qquad [1]$$

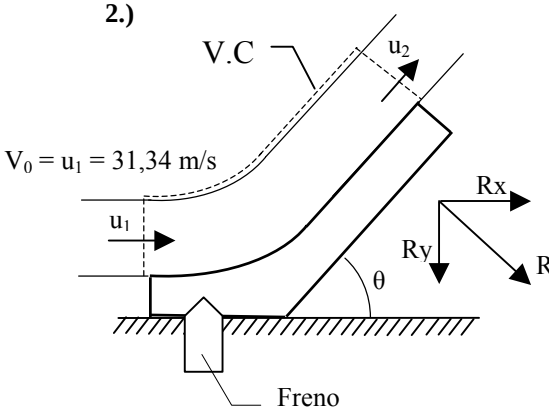
Aplicando la ecuación de continuidad entre (a) y (b):

$$Q = cte \quad \Rightarrow u_a A_a = u_b A_b \quad \Rightarrow u_a = u_b \frac{A_b}{A_a} \qquad [2]$$

Sustituyendo [2] en [1]:

$$\frac{1}{2g} u_b^2 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = \frac{P_A}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{u_b}} = \sqrt{\frac{2g\frac{P_A}{\gamma}}{1 - \frac{d^4}{D^4}}} = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}81 \times 50}{1 - \frac{0{,}1^4}{0{,}5^4}}} = \underline{\underline{31{,}34 \text{ m/s}}}$$

**2.)**




Ecuación de Bernoulli entre (1) y (2): $\Rightarrow \quad |u_1| = |u_2| = 31{,}34 \text{ m/s}$

Consideramos $P_1 = P_2 = P_{atm}$

Aplicando el 1er teorema de Euler al V.C.: $\underbrace{\vec{R}_h}_{\text{Álabe sobre fluido}} = - \underbrace{\vec{R}}_{\text{Fluido sobre álabe}}$

$$R_x = q_m \cdot u_1 \cdot (1 - \cos\theta) = \rho \cdot A_b \cdot u_1^2 \cdot (1 - \cos\theta) \qquad [3]$$

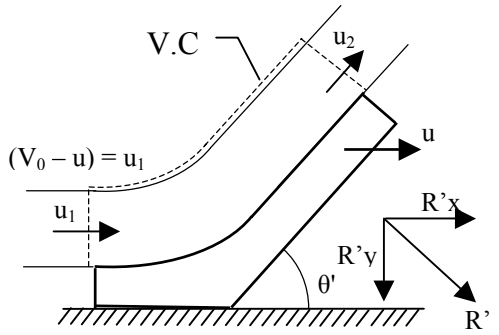
$$R_y = -q_m \cdot u_1 \cdot (\text{sen}\theta) = -\rho \cdot A_b \cdot u_1^2 \cdot \text{sen}\theta \qquad [4]$$

Para que $R_x$ sea máxima, en [3] debe verificarse que: $\underline{\underline{\theta = 180^o}}$

**3.)** Sustituyendo en [3]:

$$R_x = 1000 \times \frac{\pi}{4} \times 0{,}1^2 \times 31{,}34^2 \times (1 - (-1)) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R_x = 15428{,}29 \text{ N}}}$$

**4.) CASO DINÁMICO:**




Ahora las nuevas componentes de la fuerza vienen dadas por:

$$R'_x = \rho \cdot A_b \cdot (V_0 - u)^2 \cdot (1 - \cos\theta) \qquad [5]$$

$$R'_y = -\rho \cdot A_b \cdot (V_0 - u)^2 \cdot \text{sen}\theta \qquad [6]$$

Para que se cumpla: $|R'_x| = |R'_y|$ igualamos [5] y [6] y se verifica:

$$\text{sen}\theta + \cos\theta = 1 \qquad [7]$$

Considerando: $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Sustituyendo en [7] obtenemos como soluciones: $\theta = 0^o$ y $\underline{\underline{\theta = 90^o}}$
La primera de ellas no tiene sentido.

**5.)** Sustituyendo en [5]:

$$R'_x = \frac{R_x}{2} = 7714{,}14 = 1000 \times \frac{\pi}{4} \times 0{,}1^2 \times (31{,}34 - u)^2 \times (1 - 0) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{u = 0 \text{ m/s}}}$$