SISTEMA DIEDRIKOA

Jarduera zuzena

Roberto Galarraga - Jose Antonio Oriozabala

ELHUYAR edizioak

Unibertsitatea

SISTEMA DIEDRIKOA

Jarduera zuzena

Roberto Galarraga
Jose Antonio Oriozabala
Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoa (EHU)

ELHUYAR
edizioak

EUSKO JAURLARITZA
GOBIERNO VASCO

HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE
ETA IKERKETA SAILA

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN,
UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailaren laguntzaz argitaratu da.

Koordinazioa eta maketa: Elhuyar Edizioak
Laguntzailea: Jose Antonio Oriozabala
Azalaren diseinua: Olatz Goenaga

ISBN: 978-84-92457-50-2

Aurkibidea

1

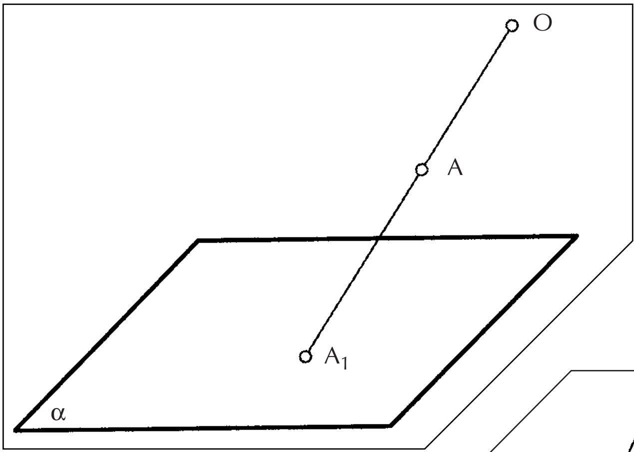
Geometria deskribatzailea

Geometria Deskribatzailea Geometriaren adarra da, eta, proiekzioak erabiliz, espazioko gorputzak planoan irudikatzea du helburu. Erabiltzen den proiekzio motaren araberakoak dira Geometria Deskribatzailearen irudikapen-sistemak. Ale honetan, Sistema Diedrikoa edo Monge-rena aztertzen da.

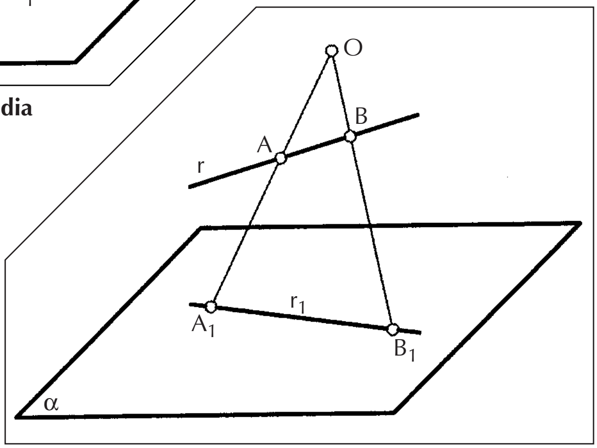
1.1 PROIEKZIOA. PROIEKZIO MOTAK

A puntuaren α planorako proiekzioa da A-tik eta O proiekzio-zentrotik igarotzen den izpi proiektatzaileak α planoa ebakitzen duen puntua (1.1 irudia). O puntutik abiatuta, A puntuaren α planorako proiekzioa A_1 puntua da. O–A–A_1 zuzena izpi proiektatzailea da.

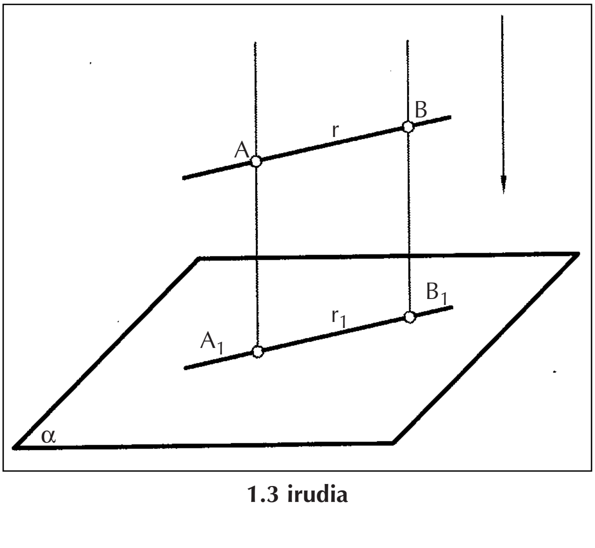
Bi proiekzio mota daude: proiekzio konikoa eta proiekzio zilindrikoa. Lehenbizikoari proiekzio zentrala ere esaten zaio. Proiekzio koniko edo zentralean, izpi proiektatzaile guztiak proiekzio-zentro izeneko puntu finko batetik igarotzen dira; 1.2 irudiko O puntutik, alegia. Proiekzio zilindrikoan, berriz, proiekzio-zentroa ez--jatorra izaten da, hau da, infinituan dago.



1.1 irudia

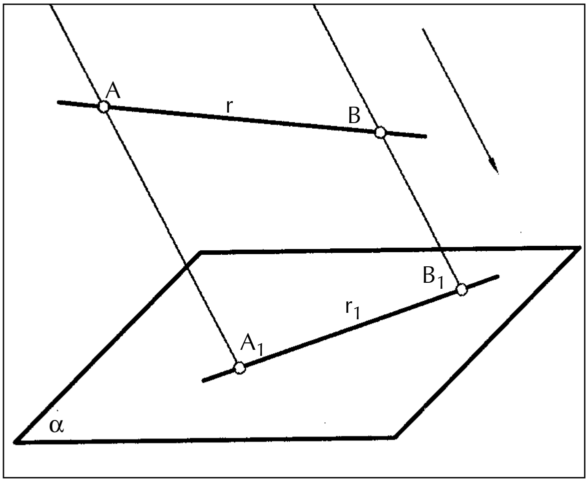


1.2 irudia



1.3 irudia

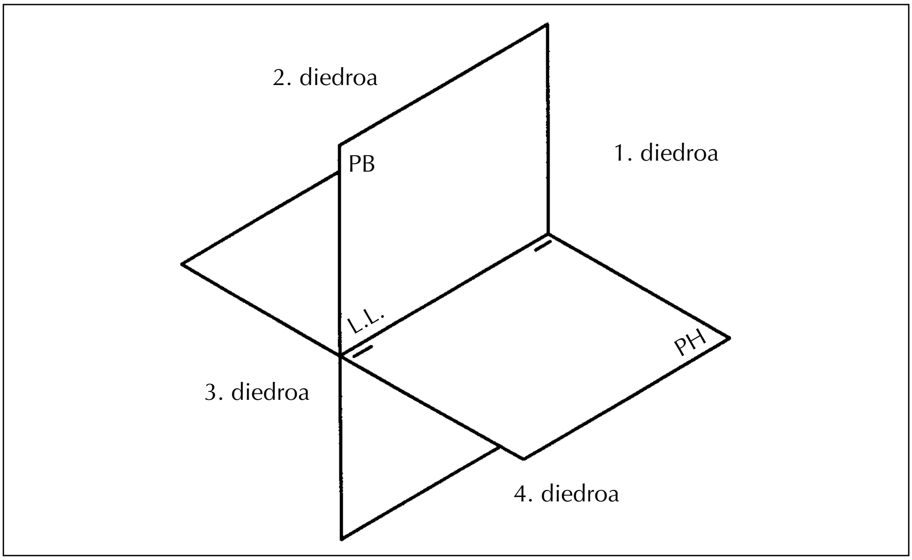
Horregatik, izpi proiektatzaile guztiak paraleloak dira norabide jakin batekiko. Norabidea proiekzio-planoaren perpendikularrean badago, proiekzio zilindriko ortogonala da (1.3 irudia). Zeiharra bada, proiekzio zilindriko zeiharra izango dugu (1.4 irudia).



1.4 irudia

1.2 SISTEMA DIEDRIKOAREN OINARRIAK

Sistema diedrikoa proiekzio zilindriko ortogonaleko sistema da. Sistema honetan, bi plano zut hartzen dira proiekzio-plano gisa, eta bakoitzean lortzen dira irudikatu behar den gorputz edo irudiaren proiekzioak. Plano horizontalari



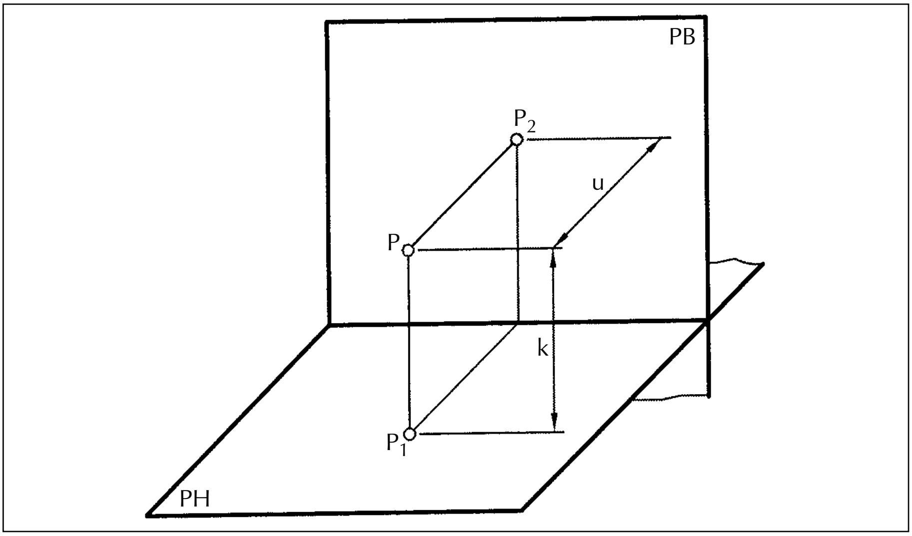
1.5 irudia

PH deritzo eta bertikalari PB. Bi plano horien arteko elkarguneari lur-lerro (LL) deritzo (1.5 irudia).

Proiekzio-planoak lau diedrotan zatitzen du espazioa, eta, proiekzio-planoak opakuak eta infinituak direla kontutan harturik, lehen diedroan dauden gorputzak bakarrik ikusten direla hartu behar da aintzat. Beste hiru diedroak, beraz, ezkutuan daude.

Objektu bat diedro horietako batean ipini ondoren proiekzio-planoetara proiektatzen badugu era ortogonalean, bi proiekzio lortuko ditugu: goitiko bista edo proiekzio horizontala, eta aurretiko bista edo proiekzio bertikala.

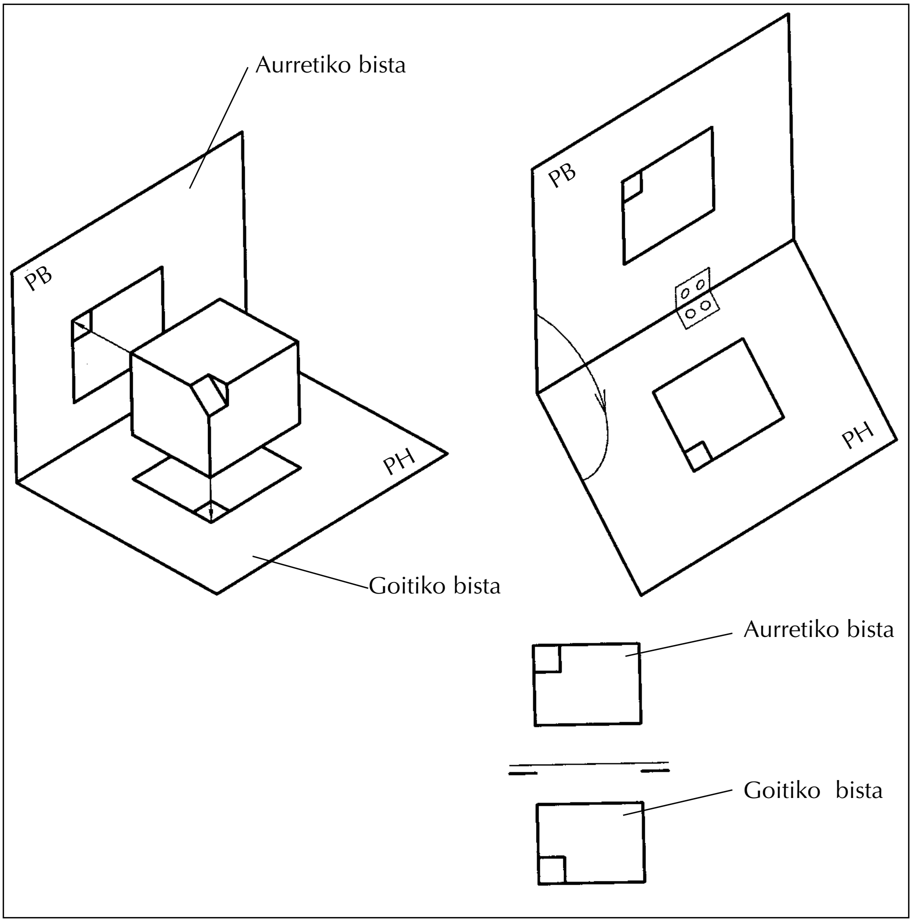
Puntu batek proiekzio-plano horizontalarekiko duen altuerari puntuaren kota deritzo. Puntuak proiekzio-plano bertikalarekiko duen distantziari, aldiz, puntuaren urrunera deritzo (1.6 irudia).



1.6 irudia

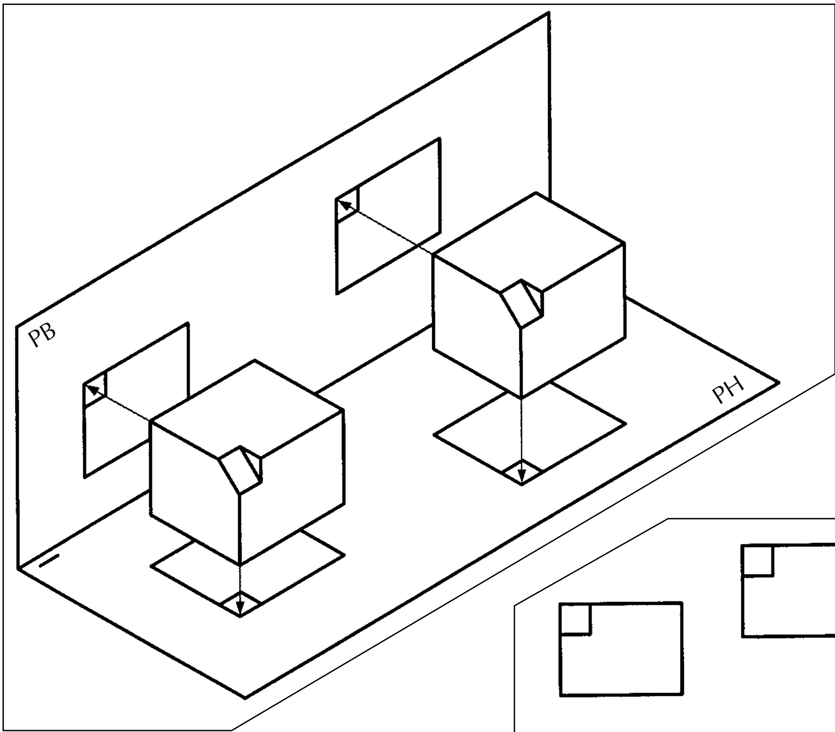
Irudikapen-sistema baten ezaugarri nagusia itzulgarritasuna da. Puntu batek bi proiekzio besterik ez du, eta bi horiek espazioko puntu batenak baino ezin dira izan. Beraz, proiekzioetatik abiatuz, proiektatutako gorputz edo elementuaren posizioa jakin daiteke.

Orain artekoa espazioan egin dugu. Baina hori plano batean, paperean, irudikatu ahal izateko, H planoa lur-lerroaren inguruan biratu behar da B planoarekin bat egin arte. Proiekzio-plano horizontala proiekzio-plano bertikalaren gainean eraitsitakoan, plano berean geratzen dira goitiko bista eta aurretiko bista. Goitiko bista eta aurretiko bista plano bakar batean, aldi berean eta elkarrekin erlazionaturik aurkezten baditugu, objektuaren aurkezpen diedrikoa izango dugu aurrean (1.7 irudia).

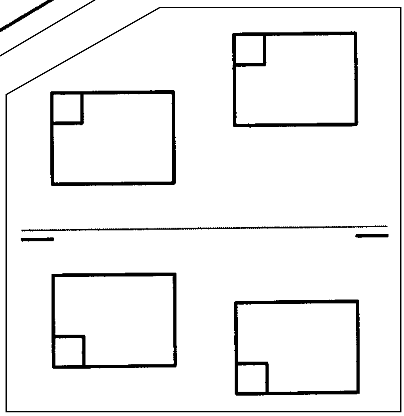


1.7 irudia

Objektua proiekzio-plano baterantz perpendikularrean lekualdatzen denean, haren proiekzioak ez dira formaz aldatzen, baizik eta lur-lerrorako distantziak aldatzen dira soil-soilik. Beste era batera esanda, elementuen kotak eta urrunera aldatzen dira bakarrik (1.8 irudia).

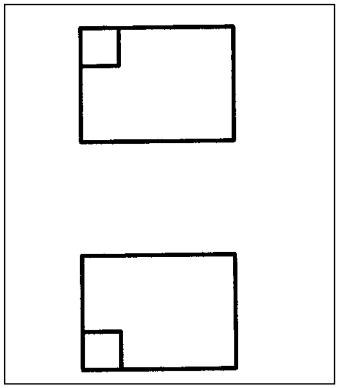


1.8.a) irudia



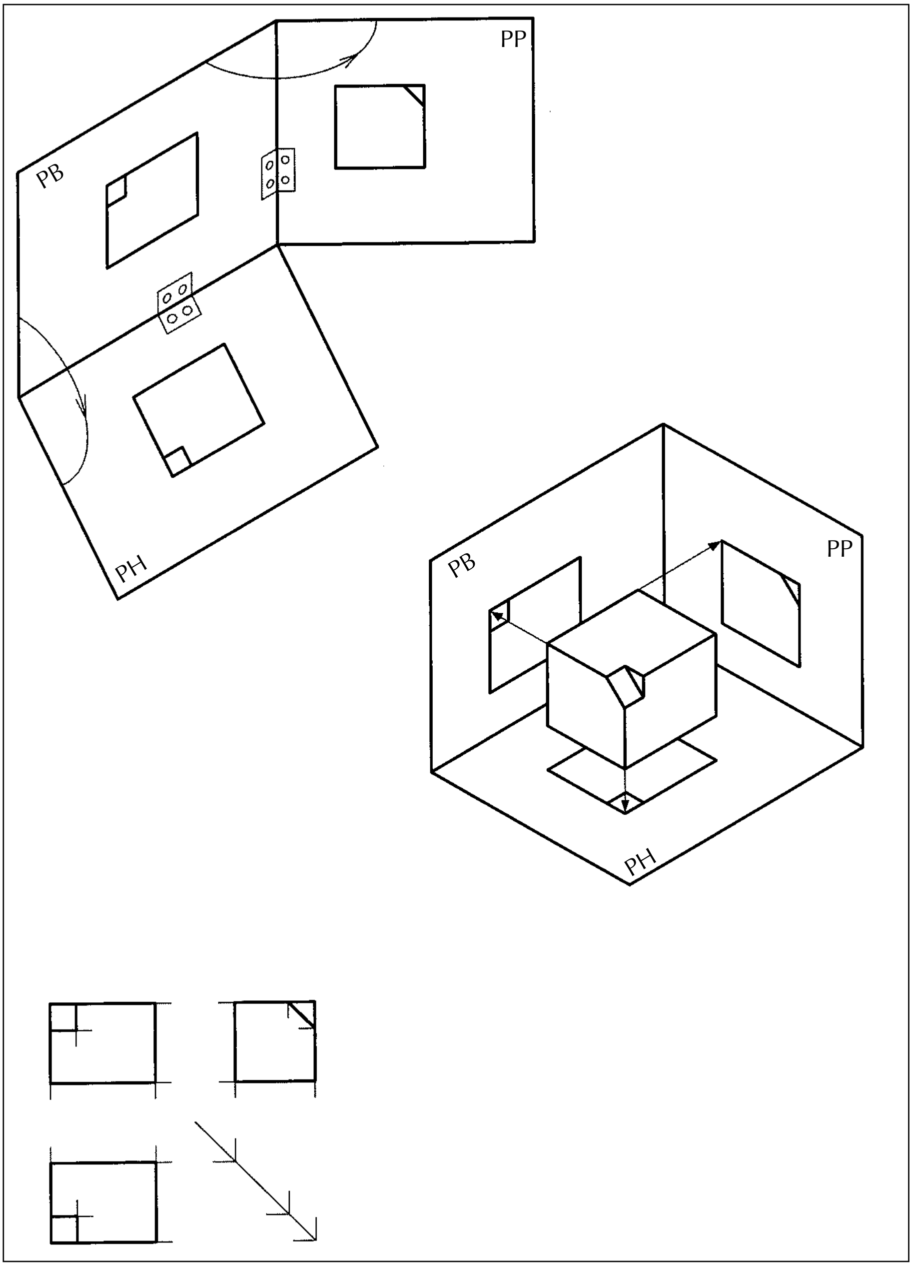
1.8.b) irudia

Halatan, alde batera utz dezakegu lur--lerroa aurkezpen diedrikoan eta objektuaren goitiko eta aurretiko bisten irudikapena egin ditzakegu besterik gabe. Zuzeneko sistema diedrikoan ari garela esango dugu orduan. Horrenbestez, zuzeneko sistema diedrikoan ez da irudikatu beharreko objektuaren eta proiekzio-planoen arteko distantzia aintzat hartzen (1.9 irudia).



1.9 irudia

Batzuetan, marraztu nahi den gorputzari hirugarren proiekzio bat egin behar izaten zaio erabat irudikaturik uzteko. Hirugarren proiekzio hori, alboko P planoan egiten da. P planoa zuta da B eta H planoekiko. Baita LLrekiko ere; 1.10 irudian ikusten da nola gelditzen diren espazioan eta planoan.



1.10 irudia

1.3 MARRAZKETARAKO HITZARMENAK. NOTAZIOAK

Puntuak letra nagusiz adieraziko ditugu. A puntua, esate baterako, $A(A_1–A_2)$ adierazten da. A_1 eta A_2, hurrenez hurren, espazioko A puntuaren proiekzio horizontala eta bertikala dira. Zenbakiz ere adieraz daitezke.

Zuzenak letra txikiz adierazten dira. $r(r_1–r_2)$ notazioak, adibidez, esan nahi du r zuzenaren proiekzio horizontala eta bertikala, hurrenez hurren, r_1 eta r_2 direla.

Planoak, alfabeto grekoko hizkiz izendatzen dira: α, β, γ…

1.4 PUNTUAREN, ZUZENAREN ETA PLANOAREN IRUDIKAPENA

1.4.1 PUNTUAREN IRUDIKAPENA

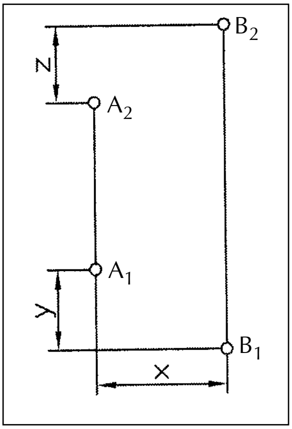
Puntu baten irudikapen diedrikoa puntuaren A_1 proiekzio horizontalean eta puntuaren A_2 proiekzio bertikalean gauzatzen da. Erreferentzia-lerro deritzo bi proiekzioak elkartzen dituen lerroari. Beste puntu batzuen proiekzioak erreferentziatzat hartuta mugatzen da espazioan duen posizioa.

1.11 irudian erakusten dira A puntuaren proiekzioak eta horren X, Y, Z koordenatuak B puntu batekiko.

X koordenatuak bi puntuen arteko urrunera azaltzen digu, profil-planoaren proiekzioaren norabidean.

Y koordenatuak bi puntuen arteko urrunera azaltzen digu, plano bertikalaren proiekzioaren norabidean

Z koordenatuak bi puntuen artean dagoen kota--diferentzia azaltzen du.

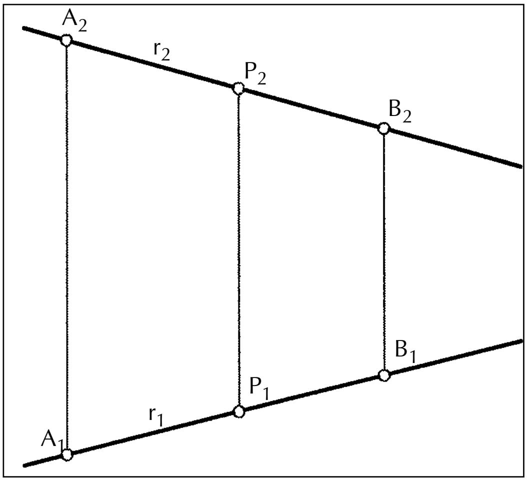


1.11 irudia

1.4.2 ZUZENAREN IRUDIKAPENA

1.4.2.1 Determinazioa

Zuzen baten plano baterako proiekzioa da zuzenaren puntu guztien proiekzioez osatutako beste zuzen bat. Zuzenaren proiekzio diedrikoa lortzeko, aski da zuzena zehazten duten bi puntuen proiekzio diedrikoak gauzatzea. Adibidez, A eta B puntuek r zuzena zehazten dute; A_1 eta B_1 puntuek zehazten dute r zuzenaren r_1 proiekzio horizontala; eta A_2 eta B_2 proiekzioek zehazten dute r zuzenaren r_2 proiekzio bertikala (1.12 irudia).

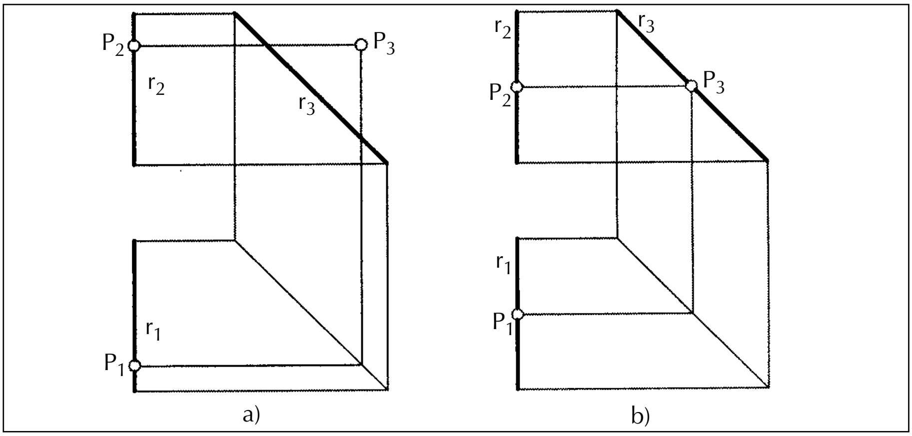


1.12 irudia

1.4.2.2 Zuzen baten barneko puntua

Puntu bat zuzen baten barnean dagoela esan ahal izateko, ezinbestekoa da puntuaren proiekzioak zuzenaren proiekzioetan egotea: P_1 r_1-ean eta P_2 r_2-an (1.12 irudia).

Zuzena profilekoa bada, bere hirugarren proiekzioan ziurtatu beharko dugu p_3 r_3-an dagoela. 1.13.a) irudiko P puntua ez da r zuzenekoa, baina 1.13.b) irudiko P puntua bai.



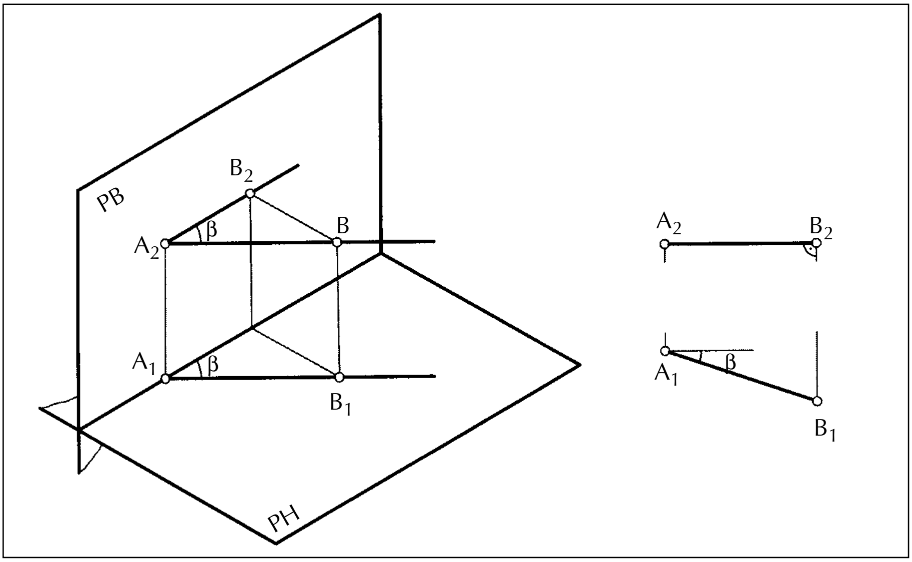
1.13 irudia

1.4.2.3 Posizio egokiak

Zuzen baten posizio egokiak dira, zuzenaren proiekzio batean, haren benetako magnitudea azaltzen duten posizioak; beste elementuekiko erlazio geometrikoak zehazteko ere baliagarriak dira, proiekzio-planoarekiko angelua esaterako. Hurrengo irudietan, zuzenak proiekzio-planoarekiko dituen posizio egoki hauek azaltzen dira, r zuzenaren AB segmentuaren proiekzioaren bidez.

1.4.2.3.1 Proiekzio-planoekiko zuzen paraleloak

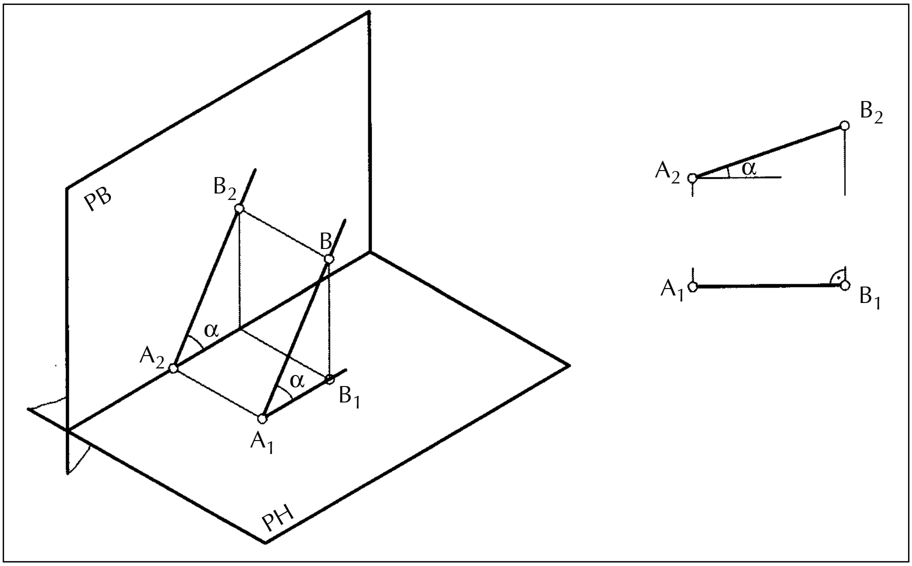
Zuzen horizontalak. Paraleloak dira proiekzio-plano horizontalarekiko. Proiekzio horizontalean egiazko magnitudean proiektatzen dira eta zuzenek proiekzio-plano bertikalarekin osatzen duten β angelua ere neurtzen da (1.14 irudia).



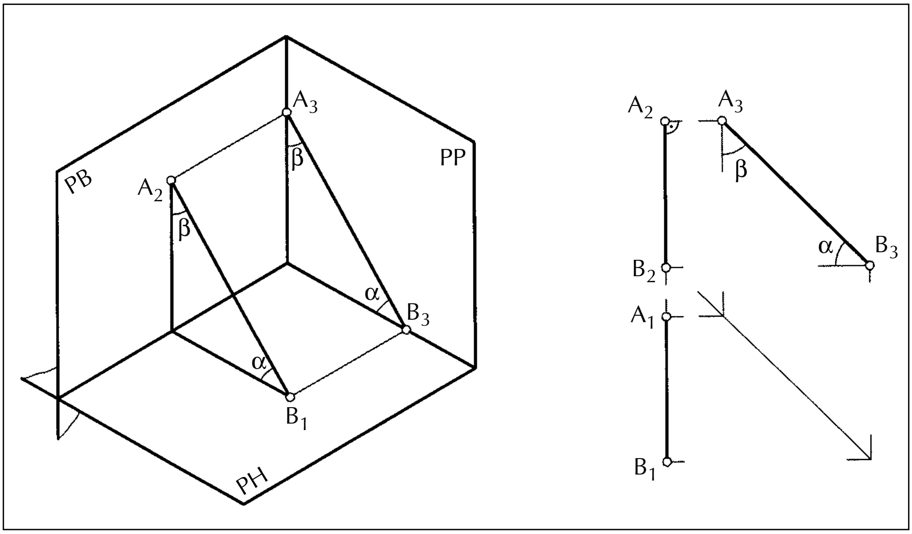
1.14 irudia

Zuzen frontala edo aurrez aurreko zuzenak. Paraleloak dira proiekzio-plano bertikalarekiko. Proiekzio bertikalean egiazko magnitudean proiektatzen dira eta zuzenek proiekzio-plano horizontalarekin osatzen duen α angelua ere neurtzen da (1.15 irudia).

Profil zuzena. Paraleloak dira profil-planoarekiko. Profileko bistan egiazko magnitudean proiektatzen dira eta zuzenek proiekzio-plano horizontalarekin osatzen duen α angelua eta proiekzio-plano bertikalarekin osatzen duen β angelua ere neurtzen dira (1.16 irudia).



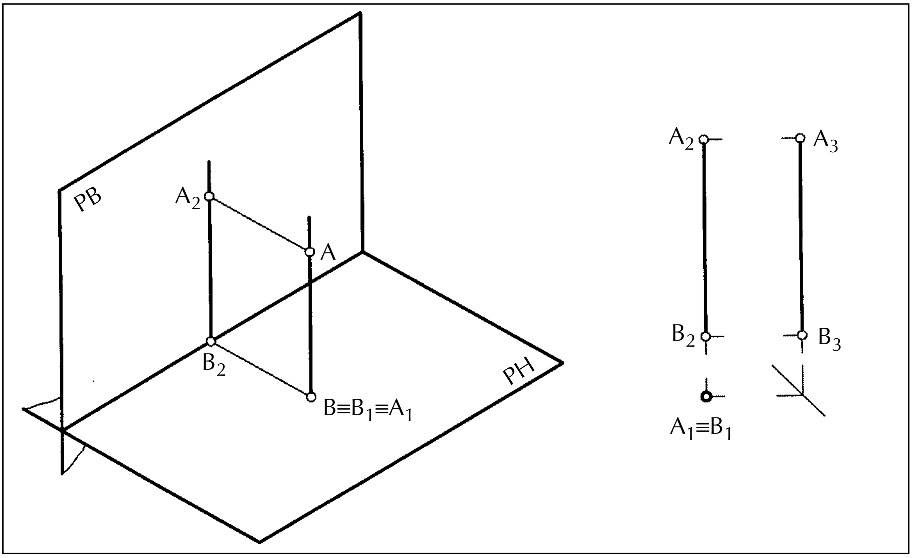
1.15 irudia



1.16 irudia

1.4.2.3.2 Proiekzio-planoekiko zuzen zutak

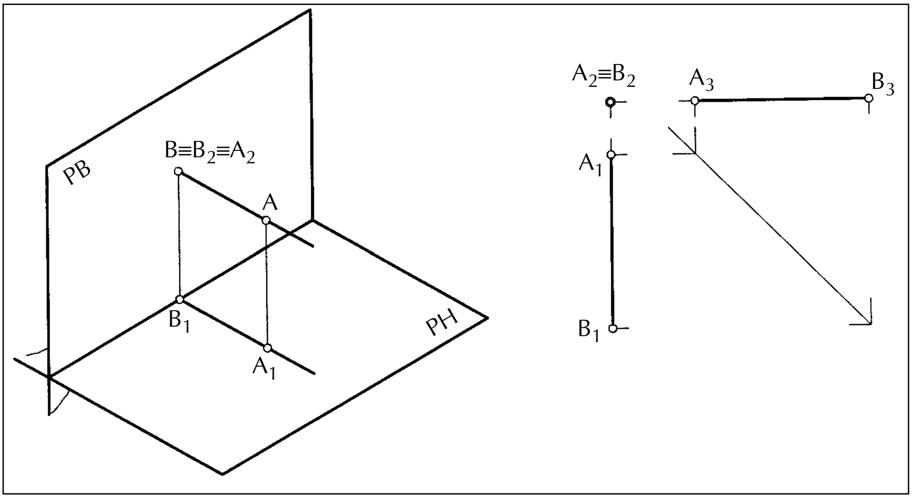
Zuzen bertikalak. Zutak dira proiekzio-plano horizontalarekiko, eta paraleloak beste bi proiekzio-planoekiko. Proiekzio bertikalean eta profileko bistan



1.17 irudia

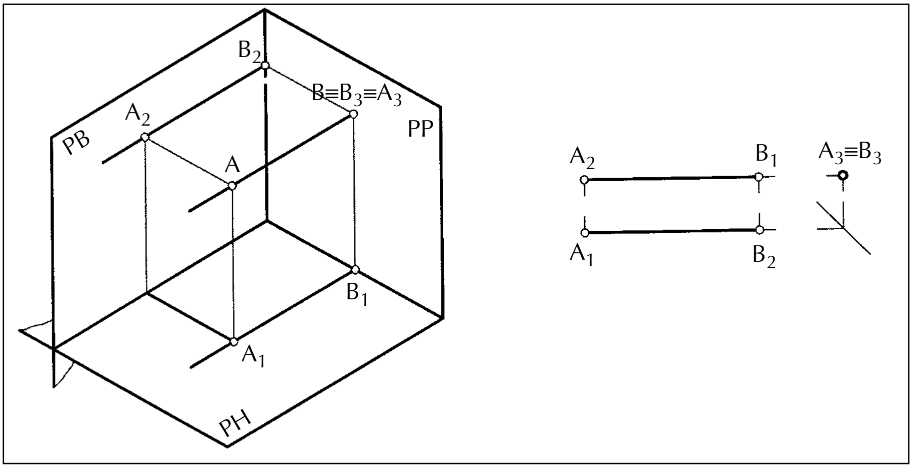
egiazko magnitudean proiektatzen dira. Proiekzio horizontalean, proiekzioa puntu bat da (1.17 irudia).

Punta-zuzenak. Zutak dira proiekzio-plano bertikalarekiko, eta paraleloak beste bi proiekzio-planoekiko. Proiekzio horizontalean eta profileko bistan egiazko magnitudean proiektatzen dira. Proiekzio bertikalean, proiekzioa puntu bat da (1.18 irudia).



1.18 irudia

Profil-planoarekiko zuzen zutak. Beste bi proiekzio-planoekiko paraleloak dira. Proiekzio horizontalean eta proiekzio bertikalean egiazko magnitudean proiektatzen dira. Profileko proiekzioan, proiekzioa puntu bat da (1.19. irudia).

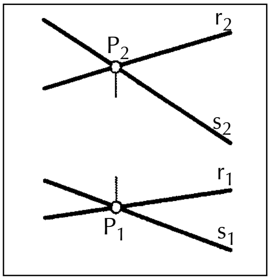


1.19 irudia

1.4.3 PLANOAREN IRUDIKAPENA

1.4.3.1 Determinazioa

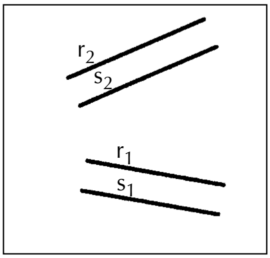
Diedriko zuzenean, plano bat irudikatzeko modurik ohikoena da itxura poligonal itxi baten bitartez egitea. Baina ikuspuntu kontzeptual batetik, plano bat erabat definituta geratzen da elementu hauek ezagututa:



1.20 irudia

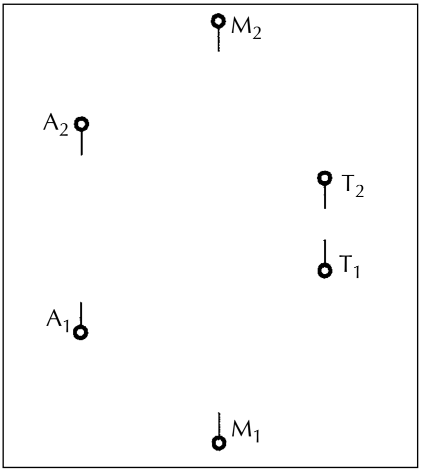
Elkar ebakitzen duten bi zuzenen bidez. Plano bat definitzeko oinarrizko forma da (1.20 irudia).

Bi zuzen paraleloren bidez. Paraleloak diren bi zuzenek elkar ebakitzen dute infinituan (1.21 irudia).

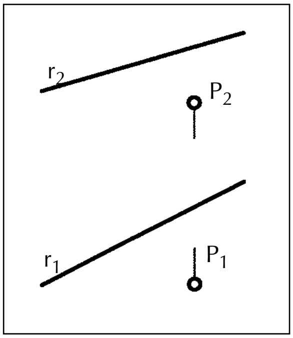


1.21 irudia

Lerrokatu gabeko hiru punturen bidez. Puntu horiek zuzenen bidez lotu ditzakegu, eta elkar ebakitzen duten bi zuzenen bitartez plano bat lortu (1.22 irudia).



1.22 irudia

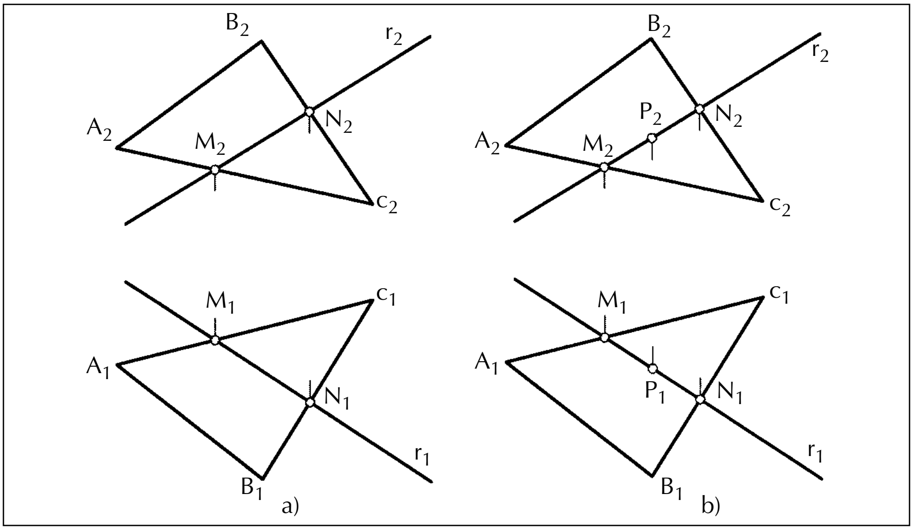


1.23 irudia

Zuzen baten eta hor ez dagoen puntu baten bidez. Kanpoko puntutik aipatutako zuzena ebakitzen duen beste bat eraikitzen badugu, elkar ebakitzen duten bi zuzenen bitartez definituko dugu planoa (1.23 irudia).

1.4.3.2 Plano baten barneko zuzena

Zuzen bateko bi puntu plano baten barnean badaude, zuzen osoa planoaren barnean dagoela esaten da. Plano baten barnean dauden zuzen guztiek elkar ebakitzen dute binaka, planoaren barneko puntu batean. Bi zuzen paraleloren kasuan, infinituko puntu ez-jatorra da ebakitze-puntu hori. (1.24.a) irudia).



1.24 irudia

1.4.3.3 Plano baten barneko puntua

Puntu bat planoaren barnean dagoela esaten da plano horren barneko zuzen batean badago, hau da, puntuaren proiekzioak planoko zuzen baten izen bereko proiekzioetan daudenean. 1.24.b) irudiko P puntua ABC planokoa da.

Esandakoaren arabera, puntu bat ezin daiteke planoan edozein tokitan ipini. Izan ere, aurrez zuzena kokatu behar da plano horretan.

1.4.3.4 Posizio egokiak

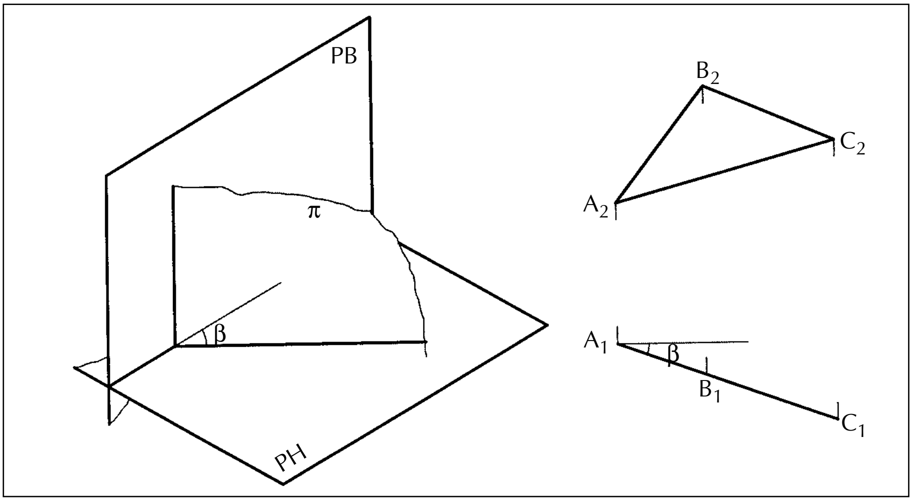
Plano baten posizio egokiak dira planoaren benetako magnitudeak azaltzen dituzten posizioak, edo erlazio geometrikoak mugatu eta ebazteko baliagarri direnak, esate baterako, beste plano batekin osatzen duen angelua, zuzenekiko eta beste planoekiko elkarguneak.

Ondoren, plano batek proiekzio-planoekiko izan ditzakeen posizio egokiak erlazionatzen dira. Adibide hauetan, proiekzio diedrikoetan, planoa triangelu baten bitartez irudikatuta azaltzen da.

1.4.3.4.1 Proiekzio-plano batekiko zutak diren planoak

Plano proiektatzaile horizontala. Zuta da proiekzio-plano horizontalarekiko.

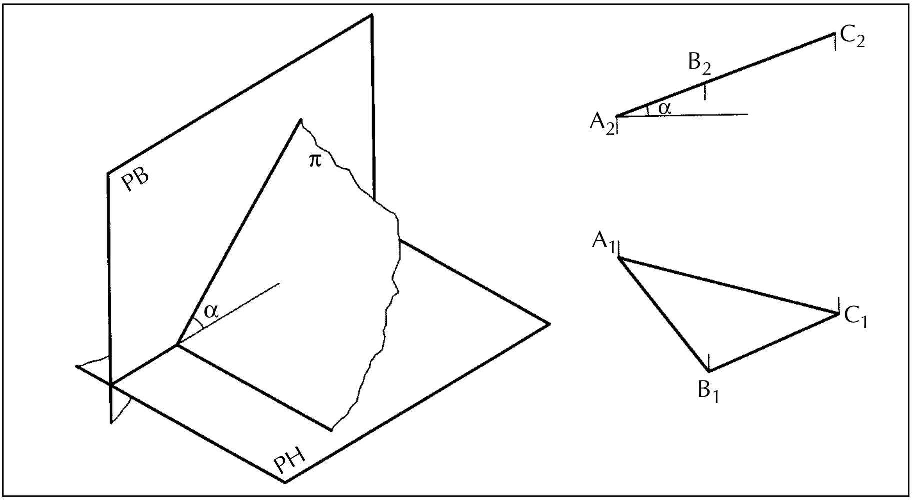
Plano honetan dauden irudi eta puntuak horizontalki zuzen baten gainean proiektatzen dira. Planoak proiekzio-plano bertikalarekin osatzen duen β angelua ere neurtzen da (1.25 irudia).



1.25 irudia

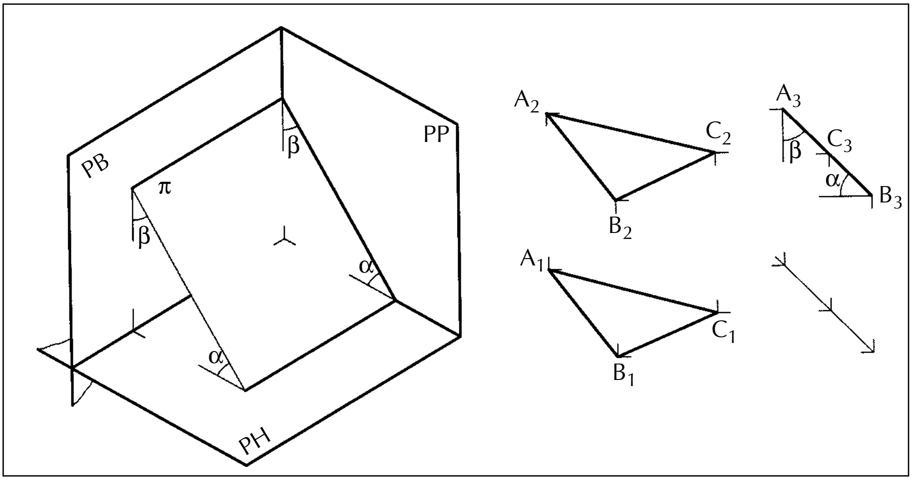
Plano proiektatzaile bertikala. Zuta da proiekzio-plano bertikalarekiko.

Plano honetan dauden puntu eta irudi guztiak bertikalki zuzen baten gainean proiektatzen dira. Planoak proiekzio-plano horizontalarekin osatzen duen α angelua ere neurtzen da (1.26 irudia).



1.26 irudia

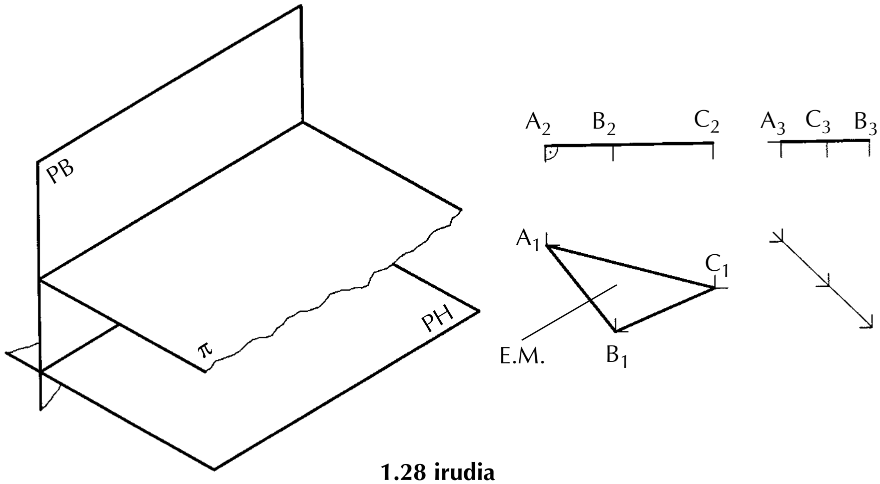
Alboko proiektatzailea. Zuta da profil-planoarekiko. Plano honetan dauden puntu eta irudi guztiak, profilean zuzen baten gainean proiektatzen dira. Planoak proiekzio-plano horizontalarekin osatzen duen α angelua eta proiekzio-plano bertikalarekin osatzen duen β angelua ere neurtzen dira (1.27 irudia).



1.27 irudia

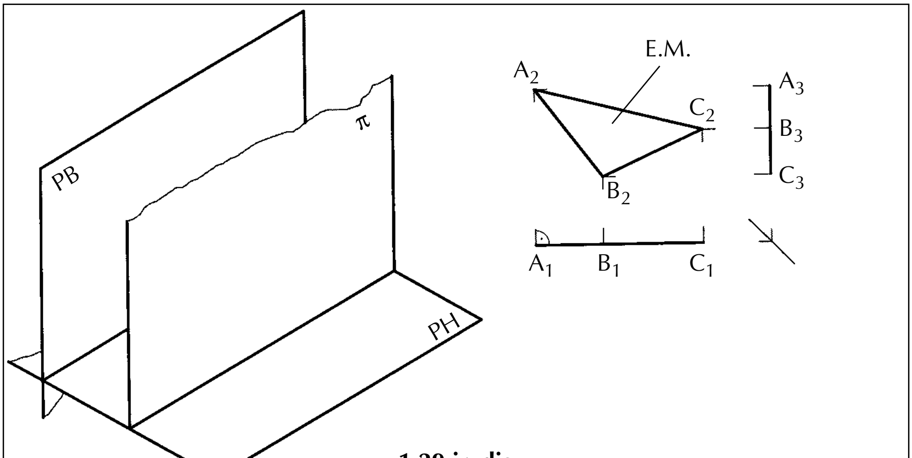
1.4.3.4.2 *Proiekzio-plano batekiko paraleloak diren planoak*

Plano horizontala. Paraleloa da proiekzio-plano horizontalarekiko eta zuta beste bi proiekzio-planoekiko. Plano honetan dauden elementuak horizontalki egiazko magnitudean proiektatzen dira. Proiekzio bertikalean eta profilekoan, planoaren edukia zuzen baten bitartez irudikatzen da (1.28 irudia).



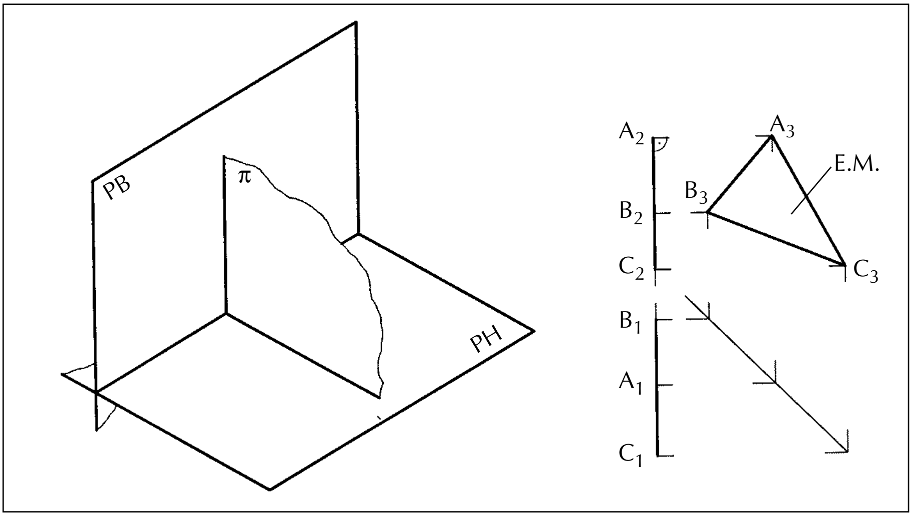
1.28 irudia

Plano frontala edo aurrez aurreko planoa. Paraleloa da proiekzio-plano bertikalarekiko eta zuta beste bi proiekzio-planoekiko. Plano honetan dauden elementuak bertikalki egiazko magnitudean proiektatzen dira. Proiekzio horizontalean eta profilekoan planoaren edukia zuzen baten bitartez irudikatzen da (1.29 irudia).



1.29 irudia

Profil-planoa. Paraleloa da profil-planoarekiko eta zuta beste bi proiekzio--planoekiko. Plano honetan dauden elementuak profileko proiekzioan egiazko magnitudean proiektatzen dira. Proiekzio bertikalean eta horizontalean planoaren edukia zuzen baten bitartez irudikatzen da (1.30 irudia).



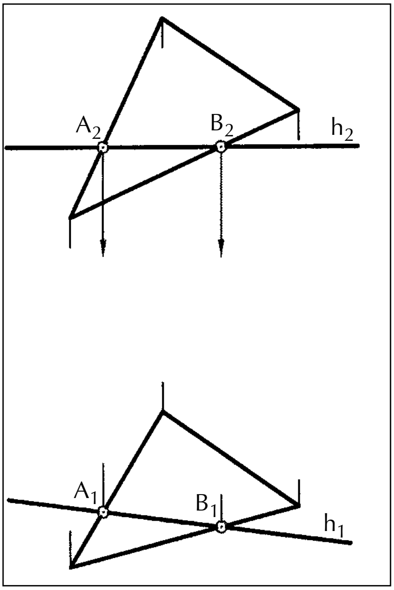
1.30 irudia

1.4.4 PLANOAREN ZUZEN PARTIKULARRAK

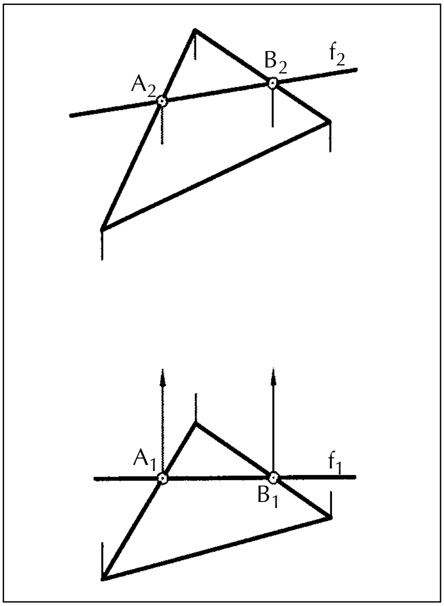
Plano batean ezin konta ahala dauden lerroen artean, arreta berezia jarri diegu zuzen horizontalei, aurrez aurreko zuzenei, malda handieneko zuzenei eta inklinazio handieneko zuzenei.

Plano baten zuzen horizontala proiekzio plano horizontalarekiko paraleloa da, eta kota berdina duten plano bateko puntuen leku geometriko bezala ere defini daiteke (1.31 irudia).

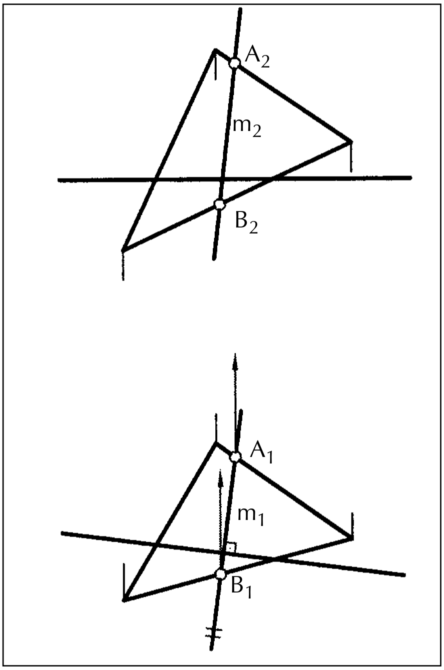
Plano baten zuzen frontala proiekzio--plano bertikalarekiko paraleloa da, eta urrunera berdina duten plano bateko pun-



1.31 irudia



1.32 irudia

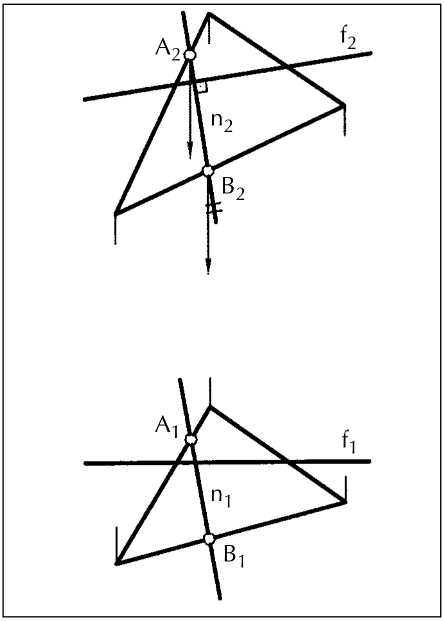


1.33 irudia

tuen leku geometriko gisa ere defini daiteke (1.32 irudia).

Plano baten malda handieneko lerro (m.h.l.) deritzo plano horizontalarekin angelurik handiena osatzen duen plano horretako zuzenari. Planoaren horizontalarekiko zuta da, eta malda handieneko lerroa dela adierazteko, zutasun-zeinua jartzen da, edota bi marka txiki bere proiekzio horizontalean (1.33 irudia).

Plano baten inklinazio handieneko lerro (i.h.l.) deritzo plano bertikalarekin angelurik handiena osatzen duen plano horretako zuzenari. Planoaren frontalarekiko zuta da, eta inklinazio handieneko lerroa dela adierazteko, zutasun-zeinua jartzen da, edota bi marka txiki bere proiekzio bertikalean (1.34 irudia).



1.34 irudia

2

Geometria deskribatzailearen metodoak. Plano-aldaketak

Sistema diedrikoan, puntu, zuzen eta irudien proiekzioez baliatzen garenez, askotan elementuak ez dira beren benetako neurrian azaltzen. Eragozpen hori gainditzeko, geometria deskribatzaileak hiru metodo erabiltzen ditu:

- Proiekzio-planoen aldaketak
- Biraketak
- Eraispenak

Hiru metodo horien helburua da problemak ebazteko egin behar diren eragiketak erraztea. Izan ere, bestela, ebazteko prozedura orokorrari jarraituz, ebaztea nekezagoa izango litzateke.

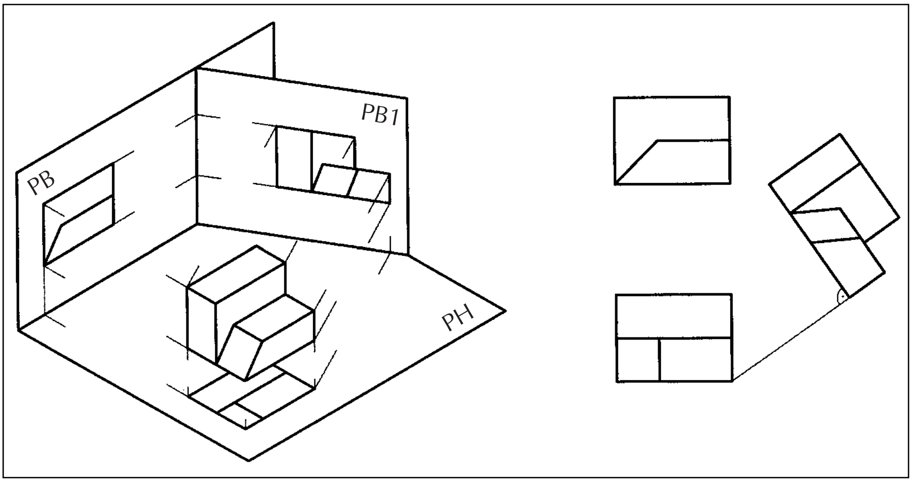
2.1 PLANO-ALDAKETAK

Proiekzio-planoen aldaketa da beste proiekzio-plano batzuk hartu edo aukeratzea, proiektatu behar diren elementuak plano berriekiko egokiago kokaturik gera daitezen. Metodo honetan, beste bietan ez bezala, proiektatu behar diren elementuak espazioan finko geratzen dira.

Plano bat edo biak alda daitezke, baina ez batera; banan-banan aldatzen dira. Adibidez, lehendabizi plano-aldaketa horizontala egiten badugu, ez da plano bertikala higitu behar; proiekzio bertikala aldatu gabe, finko geratzen dela, zehazten da plano horizontalerako proiekzioa. Gero, behar baldin bada, plano bertikala aldatu eta proiekzio bertikal berria zehazten da. Plano berri horiek, jakina, proiekziokoak izaten jarraituko dute, eta proiekzio-eremu berria determinatuko dute.

Bidezkoa denez, H planoa aldatzen bada, plano horrek B planoarekiko zut izaten segitu behar du; eta B planoa aldatzen bada, aukeratzen den H plano berriarekiko zut izaten segitu behar du.

Laburbilduz, proiekzio-planoaren aldaketen bitartez, beste proiekzio-plano batzuk aukeratuko ditugu; plano horien bidez, bista berriak lortuko ditugu (aurretiko bista berriak edo goitiko bista berriak), eta horiek elementu jakin bat posizio egokiago batean agerraraziko dute. Horregatik proiekzio laguntzaile edo bista laguntzaile terminoak erabil daitezke, nahiz eta hitz horiek industria-marrazketarako egokiagoak diren (2.1 irudia).



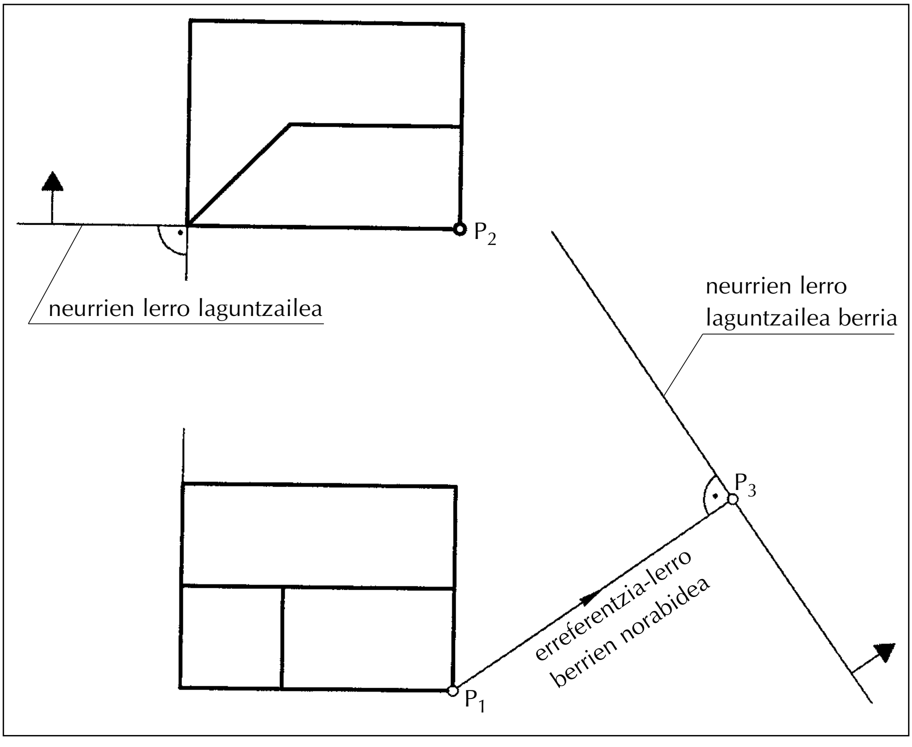
2.1 irudia

2.2 SOLIDO BATEN PROIEKZIO BERRIAK, PROIEKZIO-PLANO BAT ALDATZEN DENEAN

Ikus dezagun nola aurkitu bista laguntzaile hau, bi bista –goitikoa eta aurretikoa– zein diren jakin eta gero.

Adibide honetan, proiekzio-plano bertikala aldatzen da; hori aldatzen badugu, horizontala lehen bezala gelditzen da, eta, harekin batera, bertan dauden proiekzio guztiak. Horregatik ez da aldatzen goitiko bista.

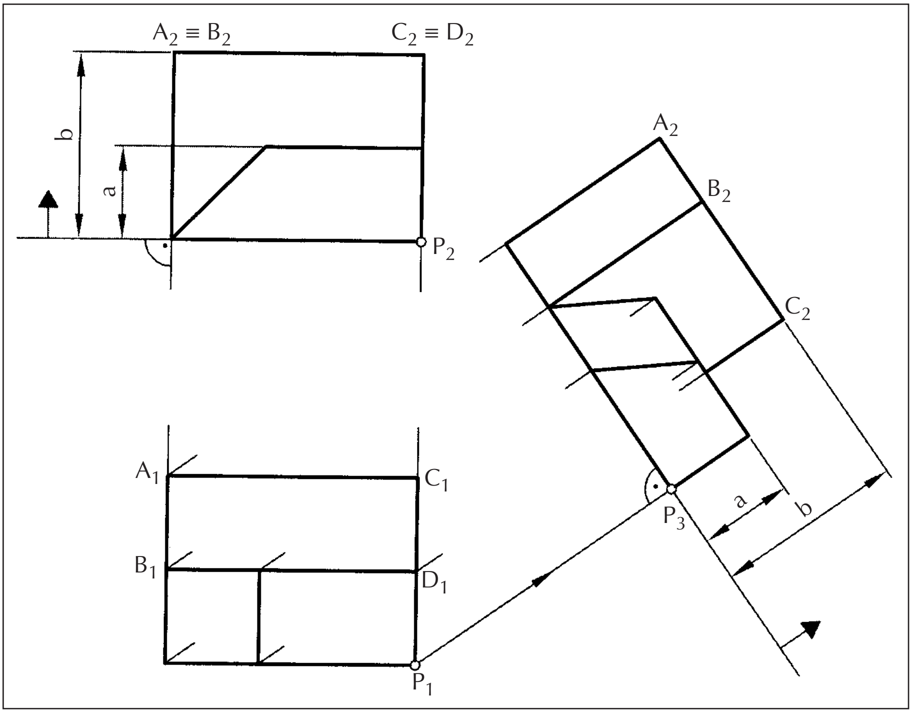
Lehenik eta behin, proiekzio-norabide berria aukeratu behar da, edo, bestela esanda, erreferentzia-lerro berrien norabidea. Erreferentzia-lerro berrien norabidea ondo aukeratzea ezinbestekoa da lortu nahi dugun emaitza lortzeko, eta, erreferentzia-lerro berria ondo aukeratzeko, kontuan izan beharko dugu hasierako sisteman zer dugun eta zer lortu nahi dugun.



2.2.a) irudia

2.2.a) irudian, erreferentzia-lerro berrien norabidea aukeratuko dugu. Adibide honetan emandako datua dugu hori. Ondoren, hasierako erreferentzia-lerroekiko lerro zut bat, neurrien lerro laguntzailea eta proiekzio-norabide berriarekiko beste lerro zut bat zehaztuko ditugu, neurriak haietan oinarrituta hartu ahal izateko: lerro zut haiei gezi txiki aldeberdin bana erantsiko diegu, neurriak zein aldetatik hartu behar diren adieraz diezaguten.

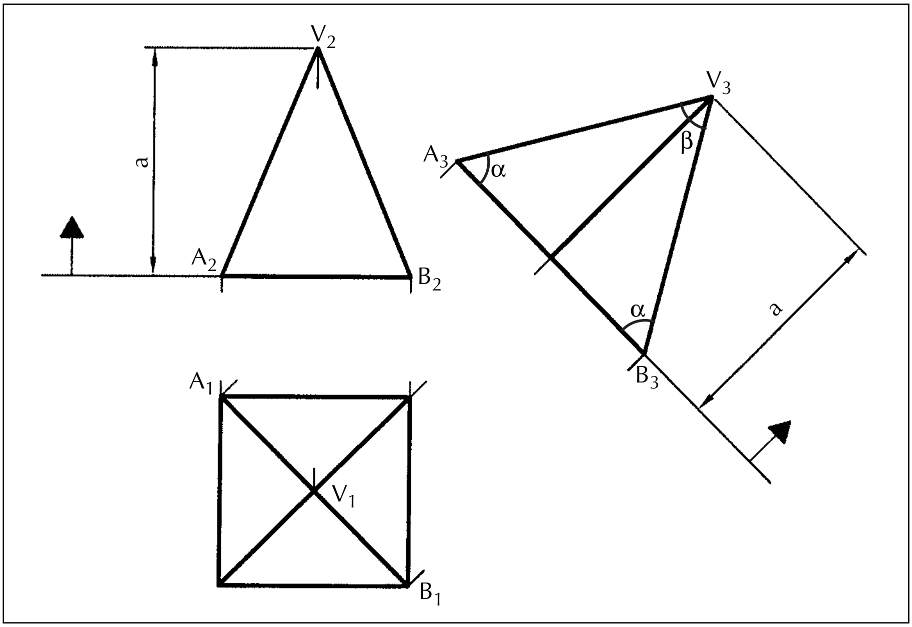
2.2.b) irudian, solidoaren proiekzio berria aurkituko dugu. Proiekzio bertikal berrian, edo aurretiko bista laguntzailean, irudikaturiko elementuen kotak edo altuerak ez dira aldatzen lehengo aurretiko bistan zutenekiko



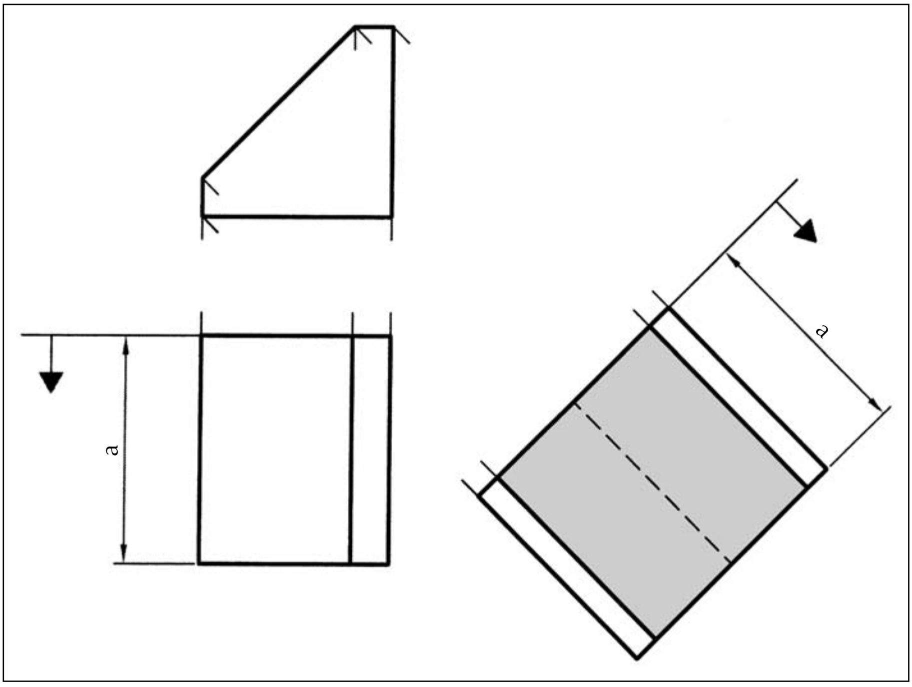
2.2.b) irudia

2.3 irudiko adibidean, piramideko VA eta VB ertzak posizio frontalean geratzen dira proiekzio bertikal berriarekiko. Proiekzio laguntzaile honetan irudikatuta geratzen dira ertzen benetako magnitudea, plano horizontalarekiko osatzen duen α angelua eta haien artean osatzen duten β angelua.

Proiekzio-plano horizontala aldatzen bada, bertikala lehen bezala gelditzen da, eta, harekin batera, bertan dauden proiekzio guztiak. Horregatik ez da alda-



2.3 irudia



2.4 irudia

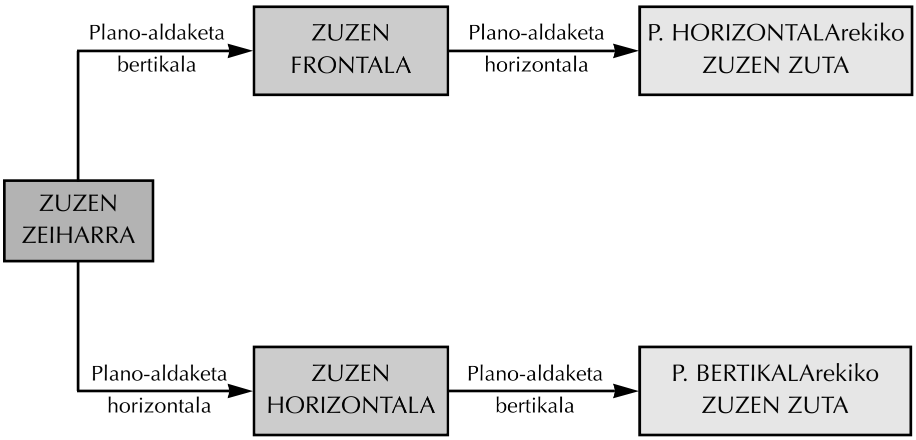
tzen aurretiko bista. Proiekzio horizontal berrian, edo goitiko bista laguntzailean, irudikaturiko elementuen urrunerak ez dira aldatzen lehengo goitiko bistarekiko. 2.4 irudian, solidoaren aurpegi marradunarekiko zut proiektatu da. Aurpegi hori, proiekzio-plano berriarekiko paraleloa denez, benetako magnitudean irudikaturik geratzen da.

2.3 ZUZENAREN PROIEKZIO BERRIAK, PROIEKZIO-PLANO BAT ALDATZEN DENEAN

Zuzen baten kokagunerik egoki edo aproposena lortzeko, proiekzio-plano berriak ezartzen dira; eta zuzenaren proiekzio berriak lortzeko, zuzeneko bi puntu edozeinetarikoren proiekzioak lortu beharko ditugu.

Plano-aldaketa batez, zuzen zeiharra planoko horizontal edo frontal bihur daiteke, aldatzen den planoa, hurrenez hurren, H edo B den.

Bigarren plano-aldaketa baten bidez, zuzen horizontala bertikalarekiko zut ipin daitekea plano bertikala aldatuz. Edo zuzen frontala horizontalarekiko zut ipin daiteke, plano horizontala aldatuz. Ikus 2.5 irudia.



2.5 irudia

2.3.1 ZUZEN ZEIHAR BAT PROIEKZIO-PLANO BATEKIKO PARALELO IPINTZEA

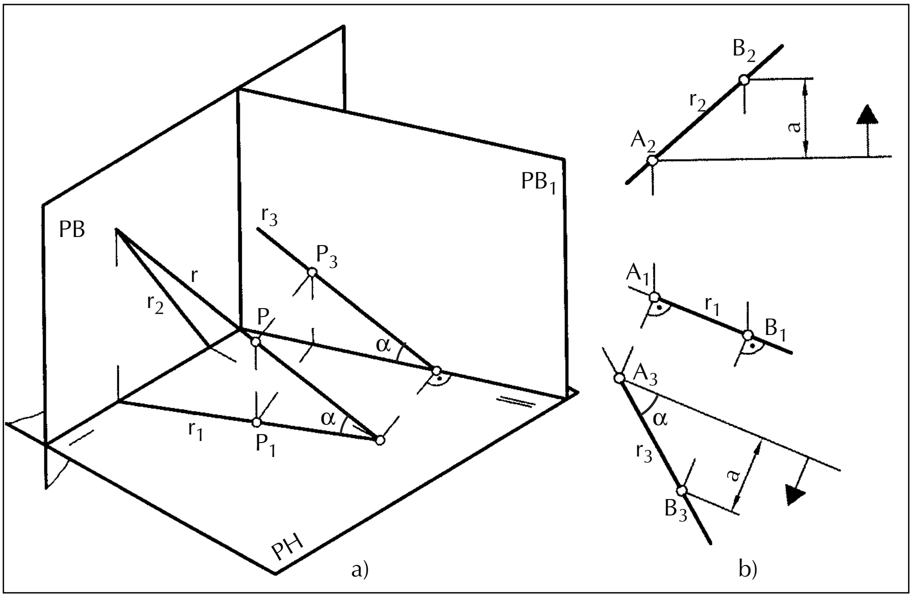
Proiekzioetako bat zuta izango da proiekzio biak elkartzen dituen erreferentzia-lerroekiko

2.3.1.1 Zuzen frontala

r zuzen zeiharra paralelo jarri nahi dugu plano bertikal batekiko; zuzen hori zuzen frontala izango da.

2.6.a) irudian ikusten da nola egiten den espazioan. Zuzenarekiko paraleloa hartzen badugu, B_1 plano bertikala, zuzen frontala izatera pasatuko da.

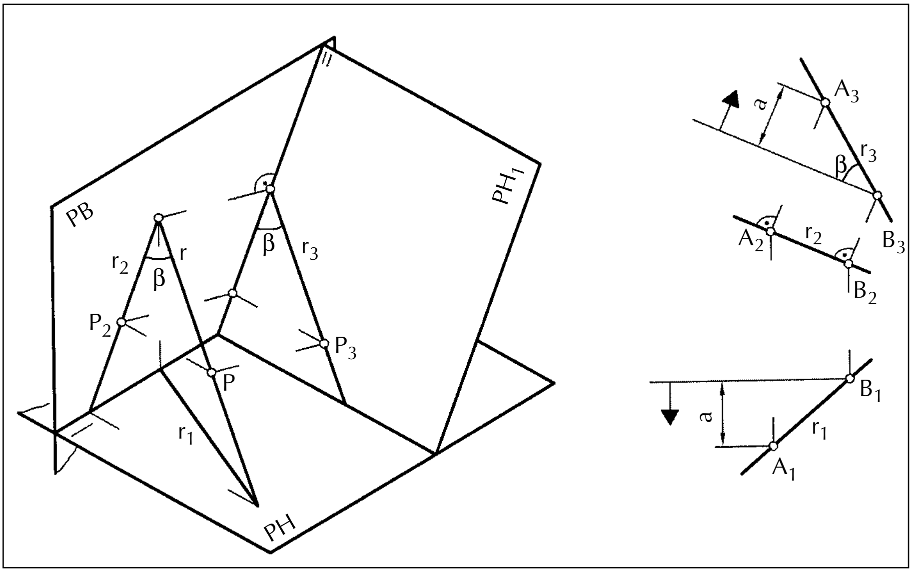
2.6.b) irudian erakusten da nola egiten den sistema diedrikoan. Zuzena frontala izan dadin, erreferentzia-lerroak eta zuzenaren proiekzio horizontalak zutak izan beharko dute elkarrekiko. Hori jakinda, erreferentzia-lerro berrien norabidea aukeratuko dugu, eta erreferentzia-lerro berri horien gainera igaroko dugu a neurria.



2.6 irudia

2.3.1.2 Zuzen horizontala

Modu berean, 2.7 irudian erakusten da nola bihurtzen den horizontal zuzen zeiharra. Horretarako, proiekzio-plano horizontala aldatu behar dugu, eta, hartara, erreferentzia-lerroen norabide berria zuta izango da proiekzio bertikalarekiko.



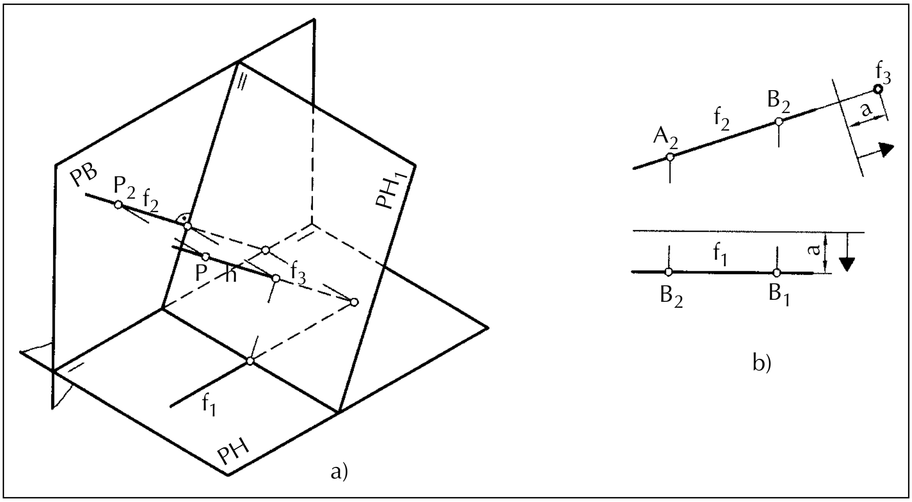
2.7 irudia

2.3.2 ZUZEN HORIZONTALA EDO FRONTALA PROIEKZIO--PLANO BATEKIKO ZUT IPINTZEA

Proiekzioetako bat puntu bat da, eta proiekzio biak eta horiek elkartzen dituen erreferentzia-lerroa lerrokatuak daude.

2.3.2.1 Zuzen bertikala

f zuzen frontala zut jarri nahi dugu plano horizontal batekiko; 2.8.a) irudian erakusten da nola egiten den espazioan. f zuzenari H_1 plano horizontal zut berri bat eraikitzen badiogu, zuzen bertikala izatera pasatuko da. Plano-aldaketa horizontala egiterakoan, zuzenaren proiekzio bertikala ez da aldatuko, eta zuzenaren proiekzio horizontala orain puntu bat izango da.

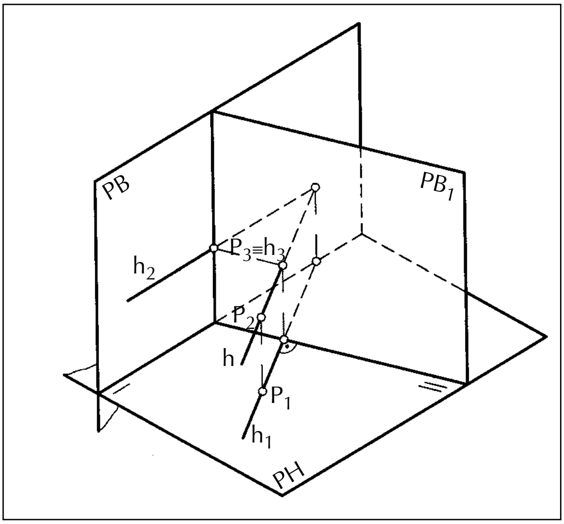


2.8 irudia

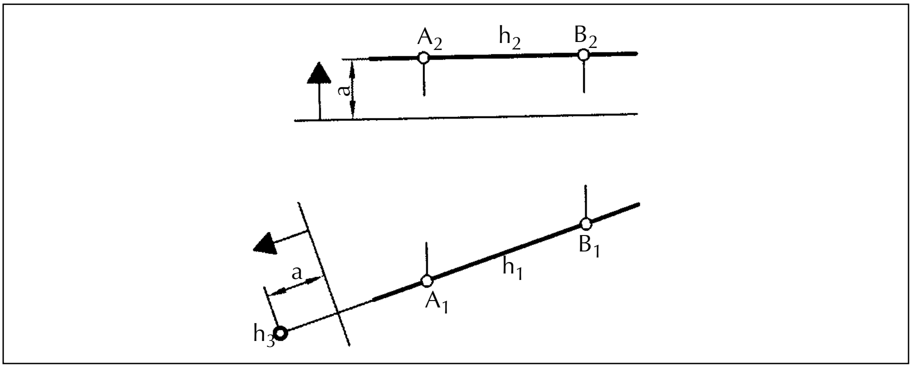
Sistema diedrikoan berdin izango da. 2.8.b) irudian erakusten da nola egiten den. f(f_1–f_2) zuzen frontala plano horizontalarekiko zut izatea nahi dugu. Zuzen bat plano horizontalarekiko zut izan dadin, *erreferentzia-lerroak* eta zuzenaren proiekzio bertikalak lerrokatuak egon behar dute, eta horrek mugatu egiten du aukeratu beharko dugun erreferentzia-lerro berrien norabidea. Norabidea aukeratu ondoren, beti bezala jokatuta gauzatzen da plano-aldaketa.

2.3.2.2 Punta-zuzena

Modu berean, 2.9 irudian erakusten da nola ipintzen den zuzen horizontal bat plano bertikal batekiko zut. Horretarako, proiekzio-plano bertikala aldatu behar dugu.



2.9.a) irudia

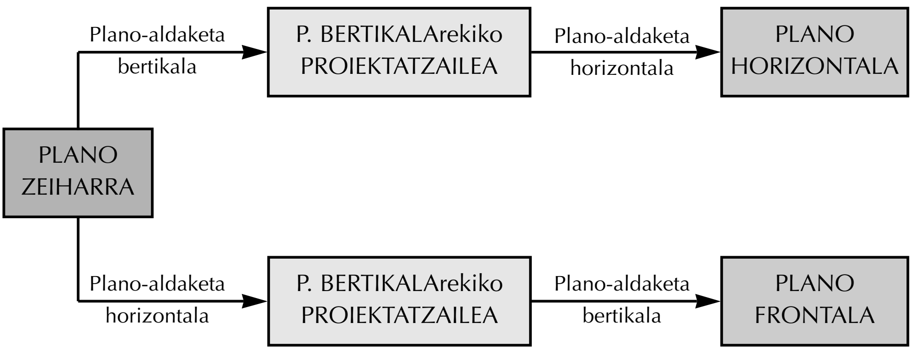


2.9.b) irudia

2.4 PLANOAREN PROIEKZIO BERRIAK, PROIEKZIO-PLANO BAT ALDATZEN DENEAN

Plano-aldaketa batez, plano zeiharra plano proiektatzaile horizontal edo bertikal bihur daiteke, aldatzen den planoa, hurrenez hurren, H edo B den.

Bigarren plano-aldaketa baten bidez, plano proiektatzaile horizontala plano frontal bilaka daiteke plano bertikala aldatuz. Edo plano proiektatzaile bertikala plano horizontal, plano horizontala aldatuz. Ikus 2.10 irudia.

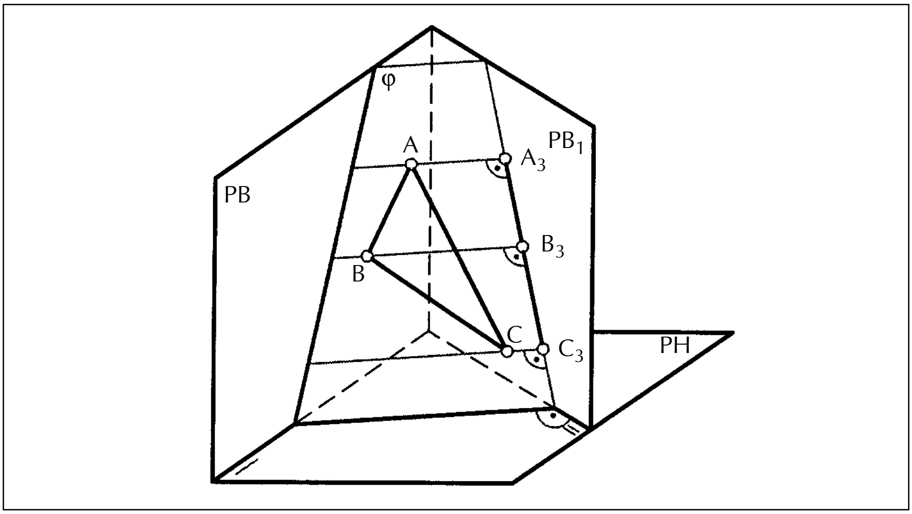


2.10 irudia

2.4.1 PLANO ZEIHAR BAT PROIEKZIO-PLANO BATEKIKO ZUT IPINTZEA

2.4.1.1 Plano proiektatzaile bertikala

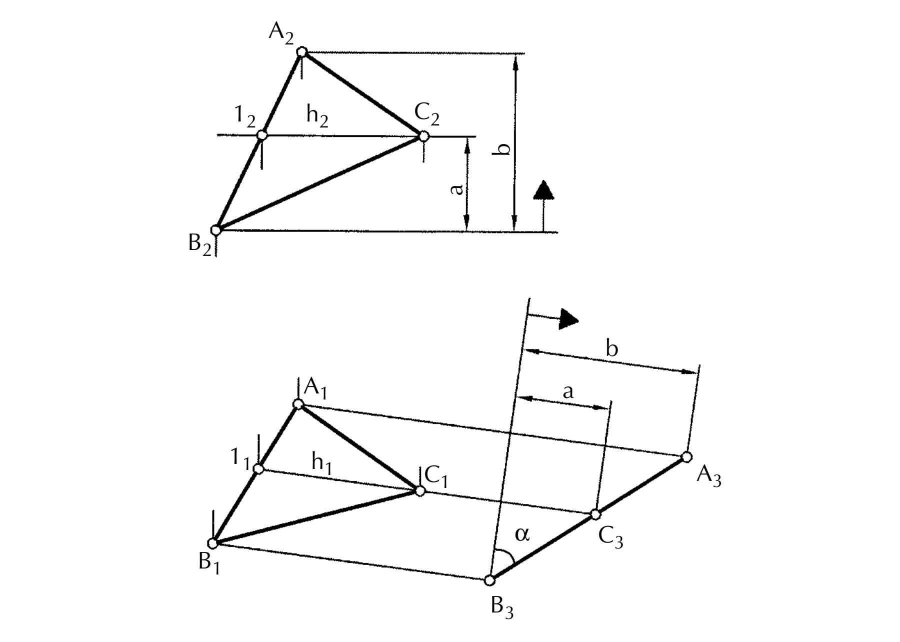
ABC puntuen bitartez definitutako φ plano zeiharra zut jarri nahi dugu plano bertikal batekiko. 2.11 irudian erakusten da nola egiten den espazioan.



2.11 irudia

Horretarako, φ eta H planoekiko zut den B_1 proiekzio-plano bertikal berri bat aukeratzen da. B_1 planoa φ eta H planoekiko zuta denez, bi plano horien arteko elkargunearekiko eta elkargune horrekiko paraleloak diren planoko horizontal guztiekiko ere zuta izango da B_1 planoa. Ondorioz, ABC planoaren proiekzio bertikal berria zuzen bat izango da eta, horrenbestez, ABC planoa proiektatzaile bertikala.

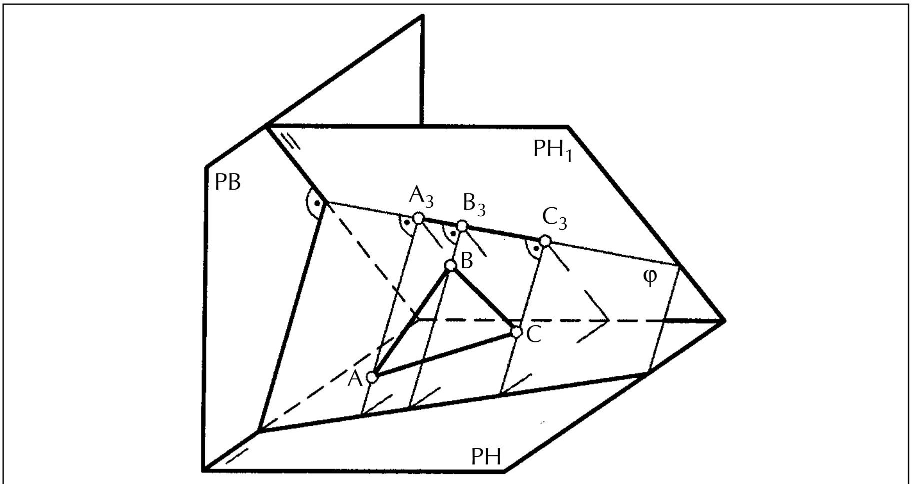
2.12 irudian erakusten da nola egiten den sistema diedrikoan. Triangelu baten goitiko eta aurretiko bistatik abiatuko gara. Edozein zuzen horizontal zehazten dugu triangeluaren barnean; zuzen horren proiekzio horizontalak eskainiko digu erreferentzia-lerro berrien norabidea.



2.12 irudia

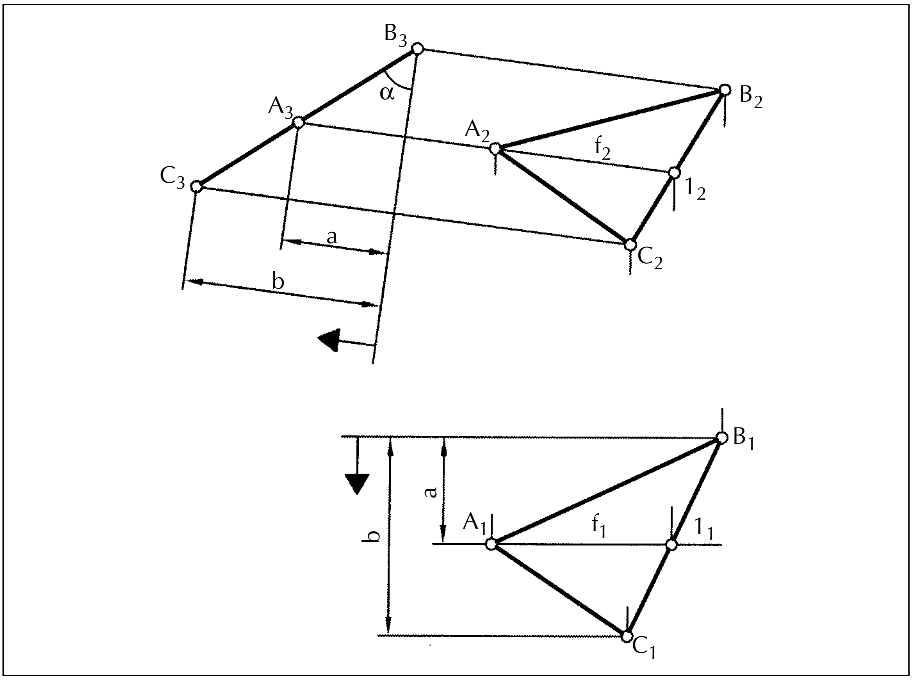
2.4.1.2 Plano proiektatzaile horizontala

Kasu hau aurrekoaren antzekoa da. ABC puntuen bitartez definitutako φ plano zeiharra zut jarri nahi dugu plano horizontal batekiko. 2.13 irudian erakus-



2.13 irudia

ten da nola egiten den espazioan. H_1 planoa φ eta B planoekiko zuta denez, bi plano horien arteko elkargunearekiko eta elkargune horrekiko paraleloak diren planoko frontal guztiekiko ere zuta izango da H_1 planoa. Horrenbestez, zuzen frontal guztien proiekzio horizontal berriak lerro baten gainean proiektatutako puntuak dira. ABC planoa, beraz, proiektatzaile horizontala da.



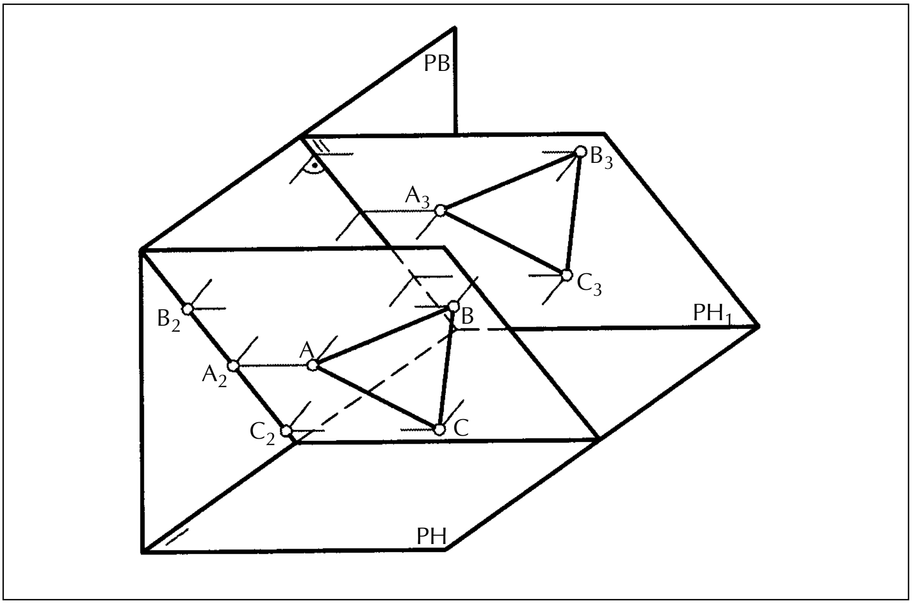
2.14 irudia

2.14 irudian erakusten da nola egiten den sistema diedrikoan. Edozein zuzen frontal zehazten dugu triangeluaren barnean; zuzen horren proiekzio bertikalak eskainiko digu erreferentzia-lerro berrien norabidea.

2.4.2 PLANO PROIEKTATZAILEA PROIEKZIO-PLANO BATEKIKO PARALELO IPINTZEA

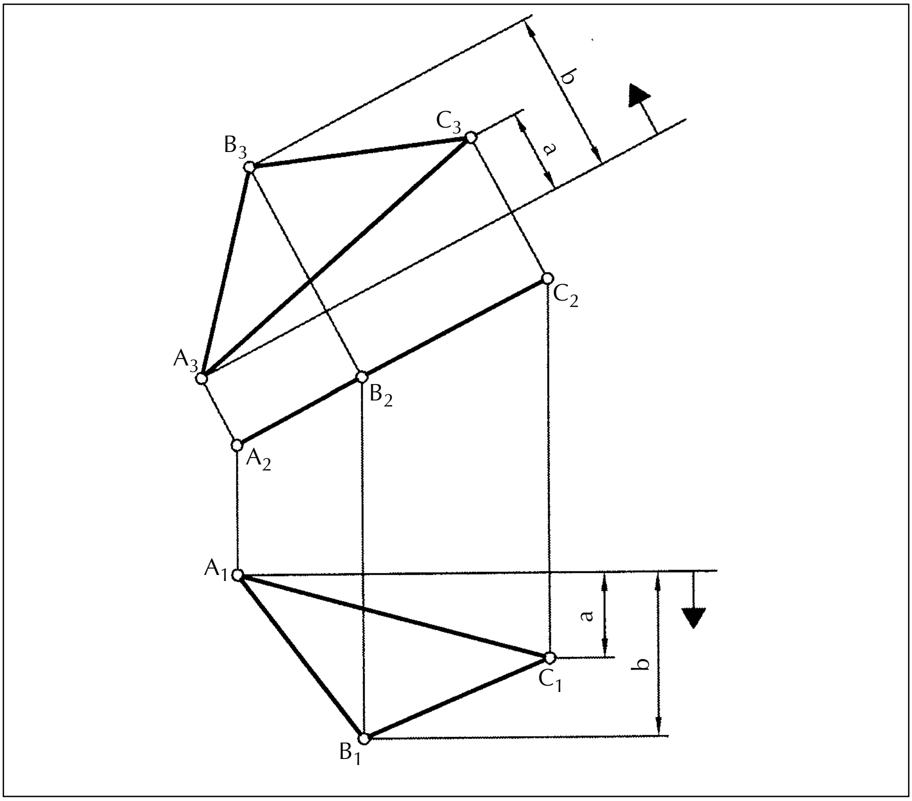
2.4.2.1 Plano horizontala

2.15 irudian, ABC plano proiektatzaile bertikala paralelo jarri nahi dugu plano horizontal batekiko. Irudian erakusten den moduan, hau egiteko, nahikoa da ABC planoarekiko paraleloa den H_1 plano horizontal berri bat aukeratzea.



2.15 irudia

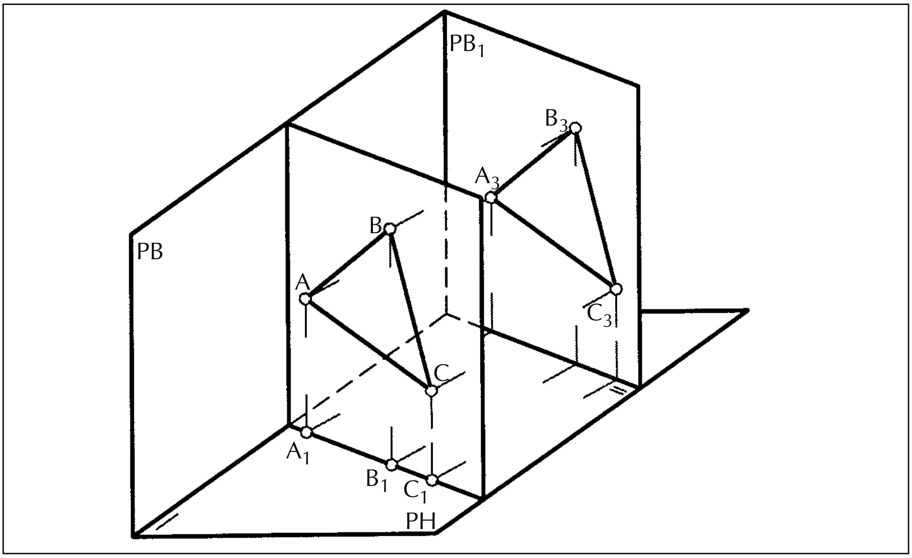
2.16 irudian erakusten da nola egiten den sistema diedrikoan. Beti bezala, erreferentzia-lerroen norabide berria aukeratzeko, kontuan izan beharko dugu zer baldintza bete behar duen plano batek proiekzioekiko paraleloa izateko, eta, beraz, egiazko magnitudean proiektatu ahal izateko. Baldintza hori, plano horizontalaren kasuan, erreferentzia-lerroak eta planoaren proiekzio bertikalak zutak izatea izango da. Hori jakinda, erreferentzia-lerro berrien norabidea aukeratuko dugu, eta erreferentzia-lerro berri horien gainera igaroko ditugu a eta b neurriak.



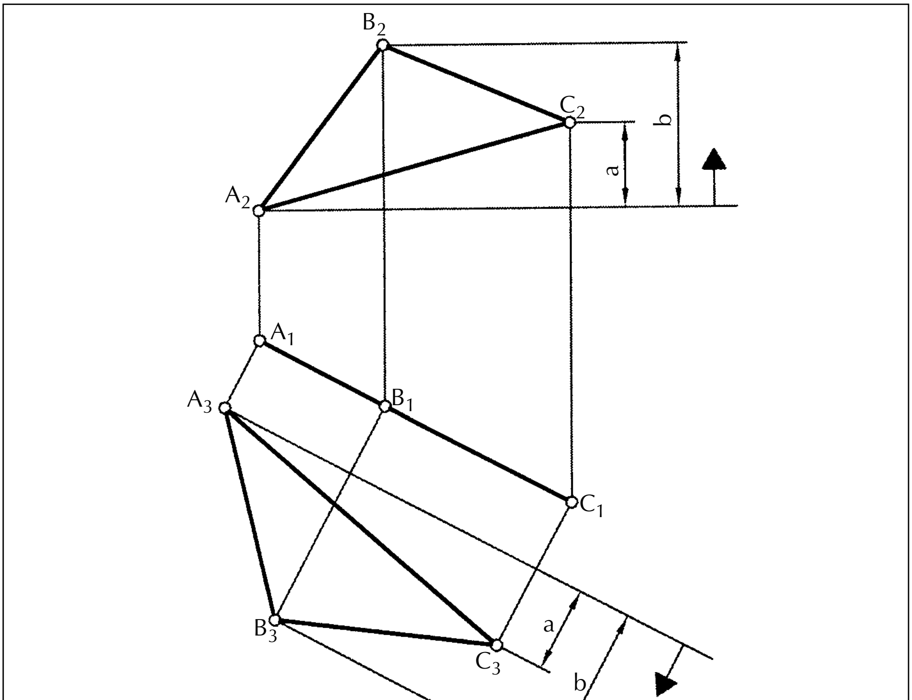
2.16 irudia

2.4.2.2 Plano bertikala

2.17 irudian espazioan eta 2.18 irudian diedrikoan erakusten da nola egin. ABC planoa plano bertikalarekiko paraleloa izan dadin, *erreferentzia-lerroak* eta planoaren proiekzio horizontalak zutak izan behar dute, eta horrek mugatu egiten du aukeratu beharko dugun erreferentzia-lerro berrien norabidea. Norabidea aukeratu ondoren, beti bezala jokatuta gauzatzen da plano-aldaketa.



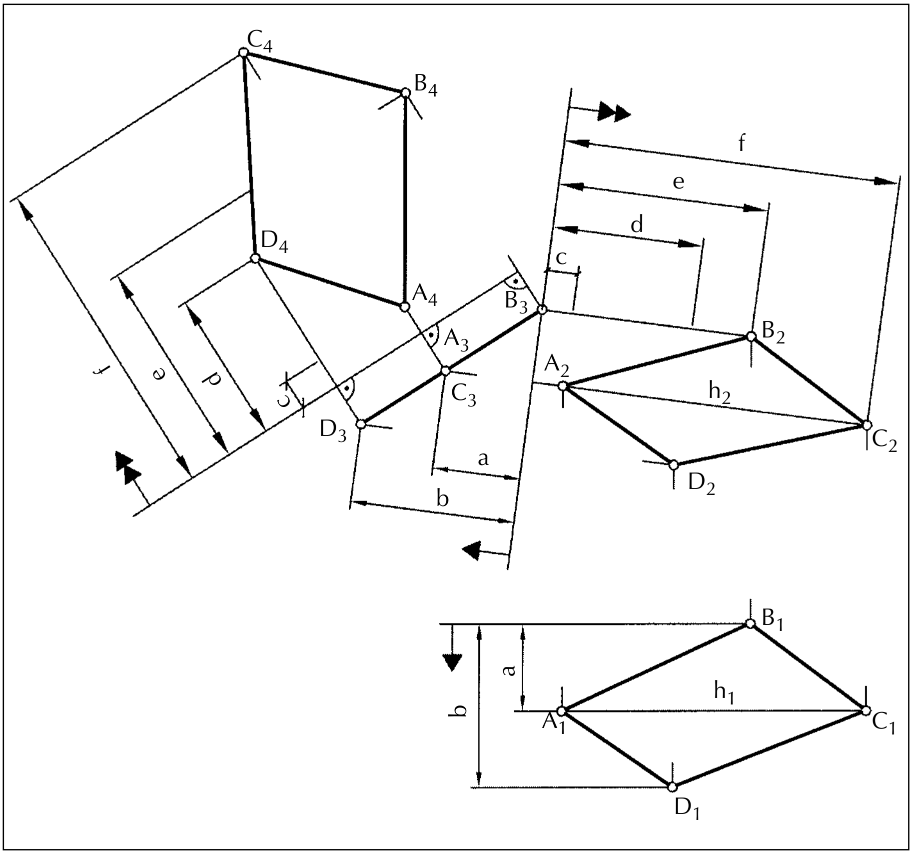
2.17 irudia



2.18 irudia

2.4.3 PLANO-ALDAKETA ONDOZ ONDOKOAK

2.19 irudiko adibidean erakusten da nola lortu ABCD laukiaren egiazko magnitudea. Lehendabiziko plano-aldaketaren bidez, plano proiektatzaile bertikala lortuko dugu; eta, bigarren plano-aldaketaren bidez, proiekzio-plano horizontalarekiko paraleloa den plano horizontala. Bista laguntzaile horretan, ABCD laukia egiazko magnitudean proiektatzen da.



2.19 irudia

3

Biraketak

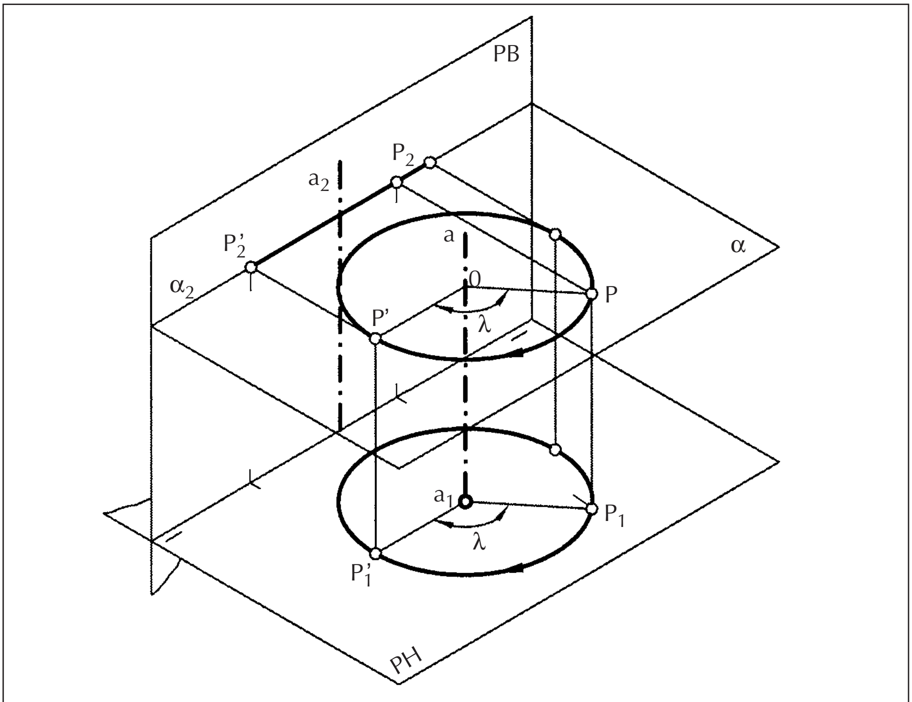
Biraketak dira geometria deskribatzaileko ariketak ebazteko erabiltzen den bigarren metodoa. Metodo honetan, proiektatu behar diren elementuak lekuz aldatzen dira, eta proiekzio-planoak finko geratzen dira. Horixe da plano--aldaketaren metodoarekin duen alderik handiena.

Puntuak, zuzenak, planoak eta gorputzak lehengo posizioarekin konparatuz gero, proiekzio-planoarekiko posizio egokiagoan jarri ahal izateko erabiltzen dira biraketak.

Biraketak egiteko, proiekzio-planoarekiko zutak diren zuzenak hartzen dira biraketa-ardatz gisa. Esandakoaren arabera, biratzen dugun puntu bakoitzak zirkunferentzia bat eratzen du biraketa-ardatzarekiko zuta den plano batean. Ardatzak zirkunferentziaren planoa ebakitzen duen puntua da biraketa-zentroa, eta puntutik ardatzerainoko distantzia, berriz, erradioa.

3.1 PUNTUAREN BIRAKETA

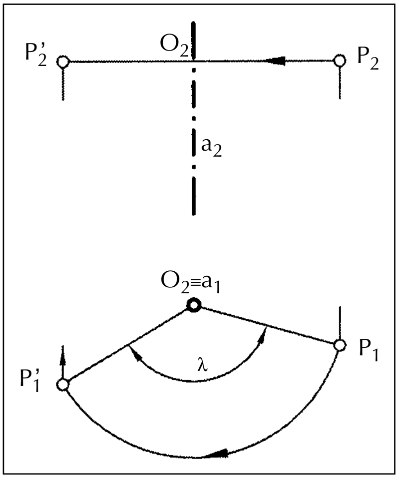
$P(P_1–P_2)$ puntua eta plano horizontalarekiko zuta den $a(a_1–a_2)$ biraketa--ardatza ditugu 3.1 irudian. P puntuak zirkunferentzia bat deskribatzen du a ardatzaren inguruan biratzean. Zirkunferentzia hori P-tik ardatzarekiko zuta den α planoan dago. Beraz, plano horizontala da. Deskribatutako zirkunferentzia H planora egiazko magnitudean proiektatzen da eta B planora α_2 trazaren arabera. Hasierako P puntua, angelu jakin bat biratu ondoren, $P'(P_1'–P_2')$ posiziora pasatzen da. P_2' puntuaren proiekzio bertikal berria beti α_2 planoaren trazo bertikalean egongo da, hau da, P_2 puntutik eraikitako erreferentzia-lerroarekiko perpendikularrean.



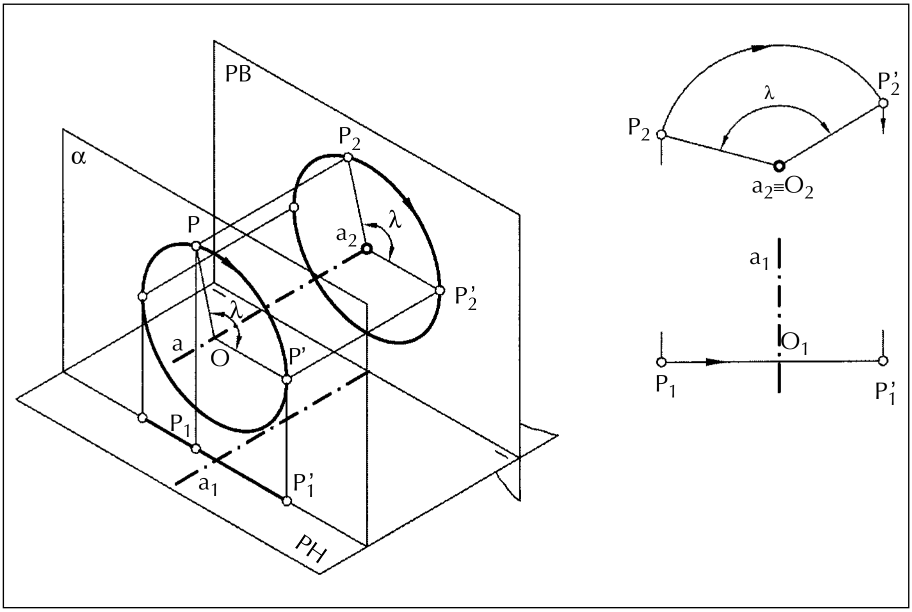
3.1 irudia

3.2 irudian erakusten da nola egiten den sistema diedrikoan. a_1 ardatzaren proiekzio horizontala zentrotzat hartuta, P_1 puntua birarazten da, λ angelua adibidez, eta P_1' puntua erdiesten da. P_2' proiekzioa lortzeko, P_1' eta P_2 puntuetatik erreferentzia-lerroarekiko paralelo bat eta zut bat —puntuaren kota aldatzen ez delako— marraztuko ditugu, hurrenez hurren, elkar ebaki arte. Ikusten denez, a_1 ardatzaren proiekzio horizontala eta O_1 biraketaren zentroa bata bestearen gainean daude.

3.3 irudian, espazioan eta sistema diedrikoan, plano bertikalarekiko zuta den zuzena hartzen da ardatz gisa. a_2 puntua zentrotzat hartuta, P_2 puntua birarazten da nahi dugun angelua, eta P'_2 erdiesten da. P'_1 proiekzioa lortzeko, P'_2 eta P_1 puntuetatik erreferentzia-lerroarekiko paralelo bat eta zut bat marraztuko ditugu, hurrenez hurren, elkar ebaki arte. Ardatza plano bertikalarekiko zuta baldin bada, kasu honetan bezala, P puntuaren urrunera ez da aldatuko.



3.2 irudia



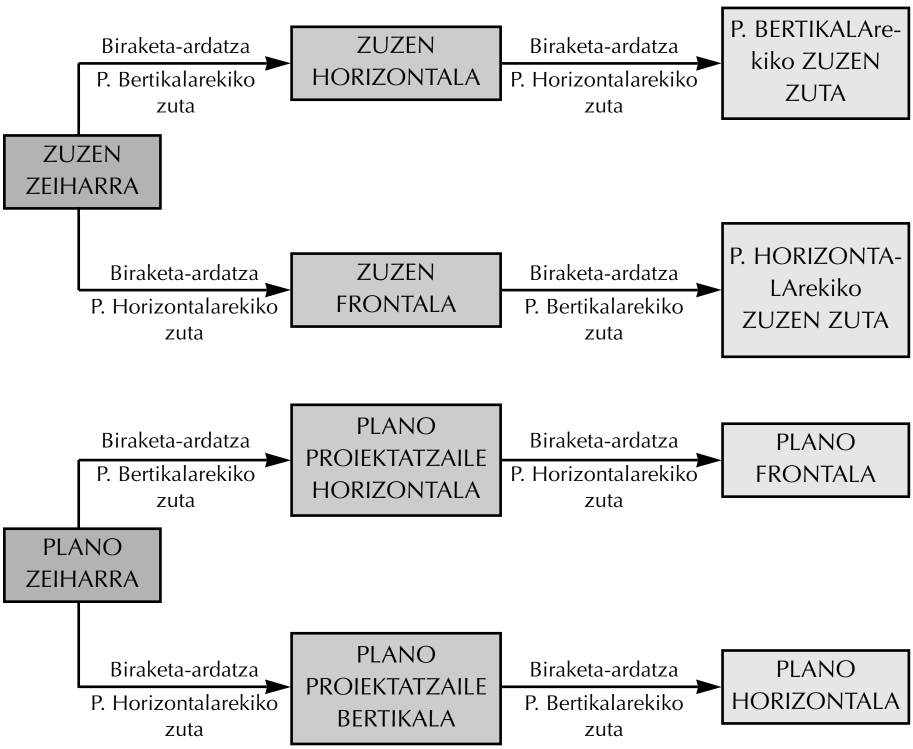
3.3 irudia

3.2 BIRAKETA-ARDATZA AUKERATZEA

Ariketetan bira bat egiteko beharra dagoenean, birarazi behar den elementua posizio zehatzera eramateko izaten da. Horrek zehazten du biratu behar den angeluaren anplitudea, norabidea eta hartu behar den ardatza.

Irakurleak espazioa arretaz aztertzen badu, ikusiko du zuzen zeiharra frontal ipin daitekeela biraketa-ardatz bertikalarekin, eta ardatza B planoarekiko zuta bada, zuzen zeiharra planoko horizontal ipin daiteke, eta ez alderantziz. Adibide honen bitartez, nabarmendu nahi da problema bakoitzean ardatz egokia aukeratu behar dela. Ikus 3.4 irudia.

Zuzen bat, irudi bat edo gorputz bat biraraztean, oso kontuan hartuko da puntu guztiak ardatzaren inguruan angelu bera eratzen dutela eta noranzko berean biratzen direla.



3.4 irudia

3.3 ZUZEN ZEIHAR BAT PROIEKZIO-PLANO BATEKIKO PARALELO IPINTZEA

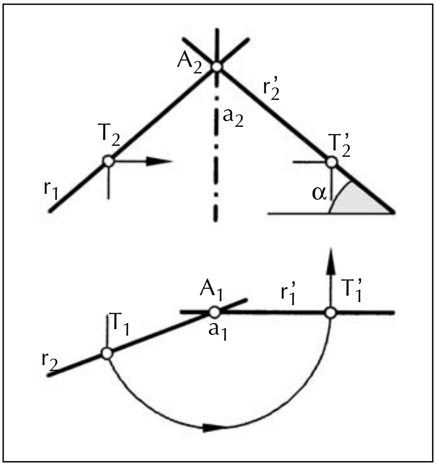
Zuzen bat biratzean, biraketa-ardatzari dagokionez, bi kasu aurkez daitezke:

- Biraketa-ardatzak eta biratzen duen zuzenak elkar ebakitzea.
- Biraketa-ardatzak eta biratzen duen zuzenak elkar gurutzatzea.

Hurrengo ariketetan metodo bat zein bestea erabiliko da.

3.3.1 ZUZEN FRONTALA

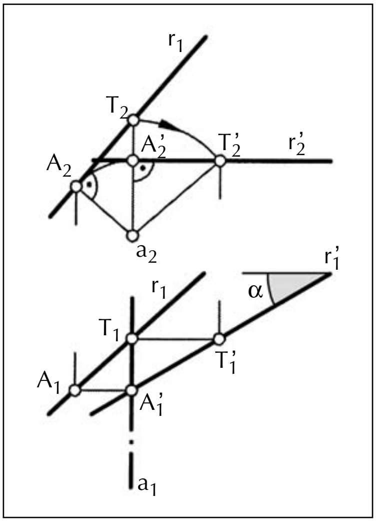
Biraketa-ardatzak zuzena ebakitzen badu, ebakitze-puntu horrek aldatu gabe jarraituko du biratu ondoren. 3.5 irudian, $r(r_1–r_2)$ zuzena plano horizontalarekiko zuta den $a(a_1–a_2)$ ardatzaren inguruan biraraziko dugu plano bertikalarekiko paralelo ipini arte. Zuzenaren proiekzio berriak lortu ahal izateko, gutxienez bi puntu birarazi beharko dira. Puntu bat, lehen aipaturiko $A(A_1–A_2)$ puntua izango da, zuzenaren eta ardatzaren arteko ebakitze-puntua, aldatu gabe jarraitzen duena; eta bigarren puntua edozein izan daiteke, $T(T_1–T_2)$ puntua adibidez. Puntua birarazi ondoren, $T'(T'_1–T'_2)$ puntua lortuko dugu, eta hori $A(A_1–A_2)$ puntuarekin lotuz gero, $r'(r'_1–r'_2)$ zuzen frontalaren proiekzioak lortuko ditugu.



3.5 irudia

3.3.2 ZUZEN HORIZONTALA

Biraketa-ardatzak zuzena ebakitzen ez badu, bi puntu birarazi beharko dira. 3.6 irudian, plano bertikalarekiko zuta den $a(a_1–a_2)$ ardatza eta birarazi nahi dugun $r(r_1–r_2)$ zuzena ditugu. Biratzeko, zuzena eta ardatza bateratu egiten dira biekiko zuta den zuzenki baten bidez. Horretarako, a_2 puntutik r_2 zuzenarekiko zuta marrazten da, eta A_2 puntua lortzen da. Hori egin ondoren, biraketa egingo dugu biraketa-erradioa erreferentzia-lerroarekiko paralelo geratu arte. Biratu ondoren, A_2 puntua A'_2 bihurtuko da, eta r_2 zuzena r'_2. Gero, r_1 zuzenaren proiekzio horizontala lortzeko, r_2 zuzeneko edozein puntu hartuko dugu, $T(T_1–T_2)$ puntua adibidez. Puntu hori, norabide berean eta angelu berdina osatuz biratu ondoren, $T'(T'_1–T'_2)$ puntua lortuko dugu. A'_1 eta T'_1 lotuz, zuzen horizontalaren proiekzio horizontala lortuko dugu.

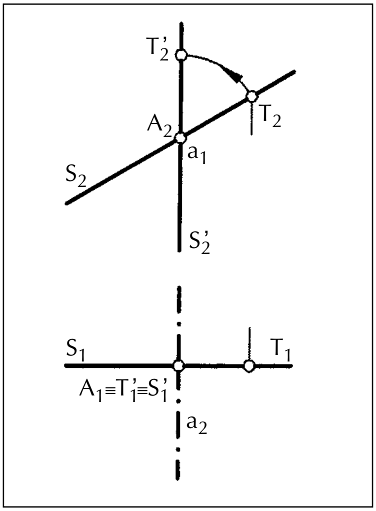


3.6 irudia

3.4 ZUZEN HORIZONTALA EDO FRONTALA PROIEKZIO-PLANO BATEKIKO ZUT IPINTZEA

3.4.1 ZUZEN BERTIKALA

$s(s_1–s_2)$ zuzen frontala zut jarri nahi dugu plano horizontal batekiko, eta punta-zuzena izango da. 3.7 irudian erakusten da nola egin. Horretarako, plano bertikalarekiko zuta den eta s zuzena ebakitzen duen $a(a_1–a_2)$ zuzena hartuko dugu ardatz gisa. Lehen aipatu dugun bezala, gogoratu ebakitze-puntu horrek ez duela posizioa aldatzen biratu ondoren. Beraz, biraketa egiteko, s zuzeneko edozein $T(T_1–T_2)$ puntu hartuko dugu. a_2 proiekzioa zentrotzat hartuta eta $a_2–T_2$ erradiotzat hartuta, s_2 zuzena biraraziko dugu bertikal jarri arte. Biratu ondoren, T_2 puntua T'_2 bihurtuko da, eta s_2 zuzena s'_2. Ohar zai-



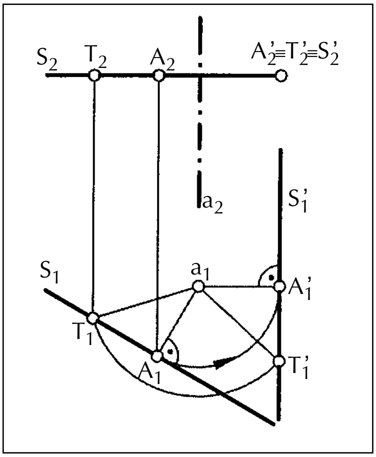
3.7 irudia

tez, s' zuzenaren s_1' proiekzio horizontala puntu bat dela, eta A_1' eta T_1' puntuen proiekzioekin bat datorrela.

3.4.2 PUNTA-ZUZENA

3.8 irudian, $s(s_1–s_2)$ zuzen horizontala zut jarri nahi dugu plano bertikal batekiko, eta punta-zuzena izango da. Horretarako, plano horizontalarekiko zuta den $a(a_1–a_2)$ zuzena hartuko dugu ardatz gisa.

Biraketa egiteko, a_1 puntutik s_1 zuzenarekiko zuta eraikiko dugu eta A_1 puntua lortuko dugu. Gero, biraketa egingo dugu biraketa-erradioa erreferentzia-lerroarekiko zuta izan arte. Biratu ondoren, A_1 puntua A_1' bihurtuko da, eta s_1 zuzena s_1'. Eta s_1' zuzenaren s_2' proiekzio bertikala lortzeko, s_1 zuzeneko edozein $T(T_1–T_2)$ puntu hartuko dugu. Puntu horien proiekzio berriak lortutakoan, $s'(s_1'–s_2')$ zuzenaren proiekzioak aurkituko ditugu.



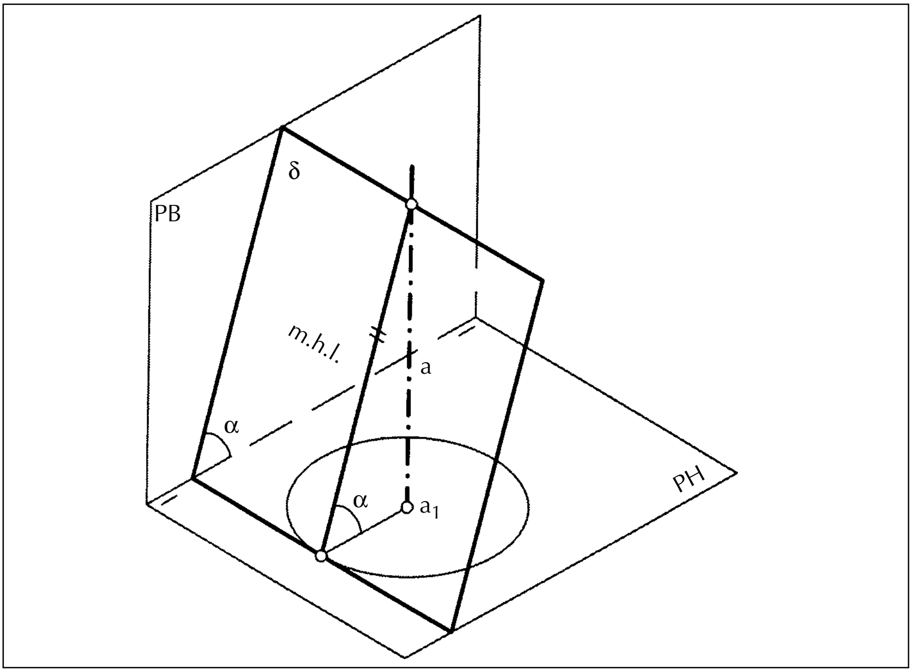
3.8 irudia

3.5 PLANO ZEIHAR BAT PROIEKZIO-PLANO BATEKIKO ZUT IPINTZEA

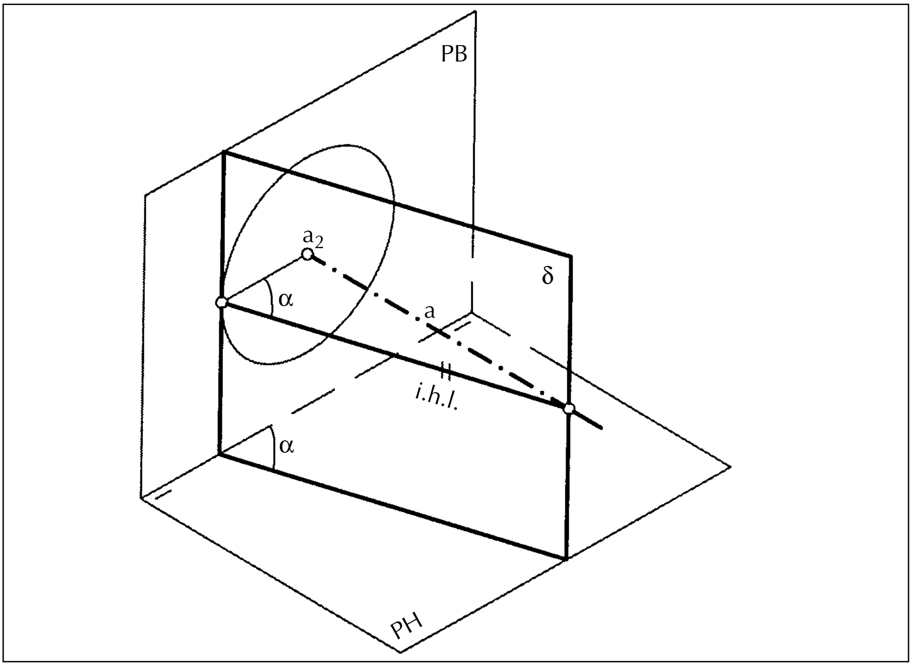
Biraketak eginda plano zeihar bat proiekzio-plano batekiko perpendikular jarri ahal izateko, emandako planoa zein proiekzio-planoren perpendikularra izatea nahi den, proiekzio-plano harexen paraleloa izan arte biratu behar da plano zeiharraren maldarik handieneko lerroa, edo, hala badagokio, inklinazio handieneko lerroa.

3.5.1 PLANO PROIEKTATZAILE BERTIKALA

3.9 irudian, δ planoa bertikalarekiko zut jarri da. Horretarako, planoko malda handieneko lerroa (m.h.l.) birarazten da zuzen frontal bihurtu arte.



3.9 irudia



3.10 irudia

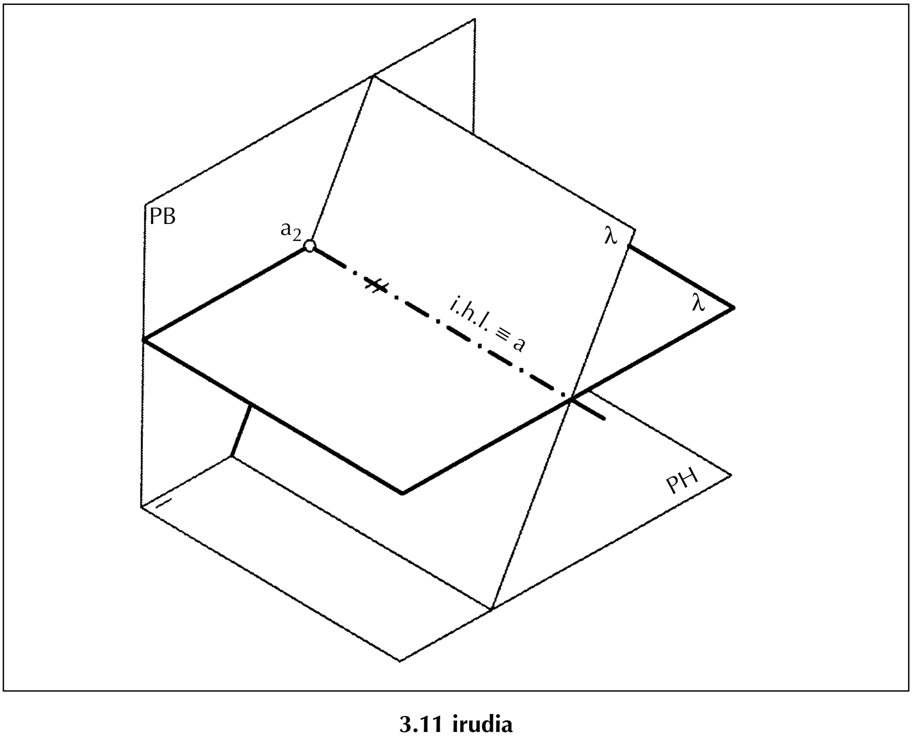
3.5.2 PLANO PROIEKTATZAILE HORIZONTALA

3.10 irudian, δ planoa horizontalarekiko zut jarri da. Horretarako, planoko inklinazio handieneko lerroa (i.h.l.) birarazten da zuzen horizontal bihurtu arte.

3.6 PLANO PROIEKTATZAILEA PROIEKZIO--PLANO BATEKIKO PARALELO IPINTZEA

3.6.1 PLANO HORIZONTALA

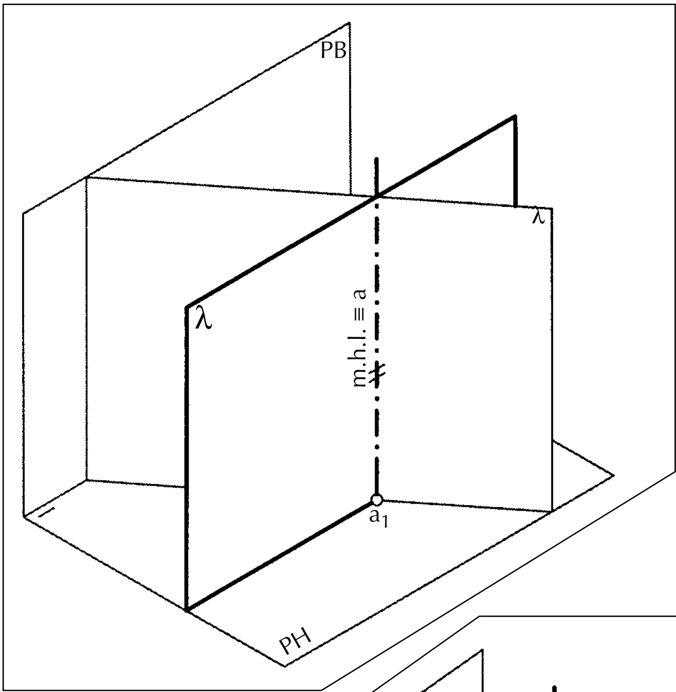
3.11 irudiko λ planoa –proiektatzaile bertikala– inklinazio handieneko lerroaren inguruan birarazten badugu, horizontalarekiko paralelo jar daiteke, planoaren frontalak profil-planoarekiko perpendikular izatera iritsi arte biratuta.



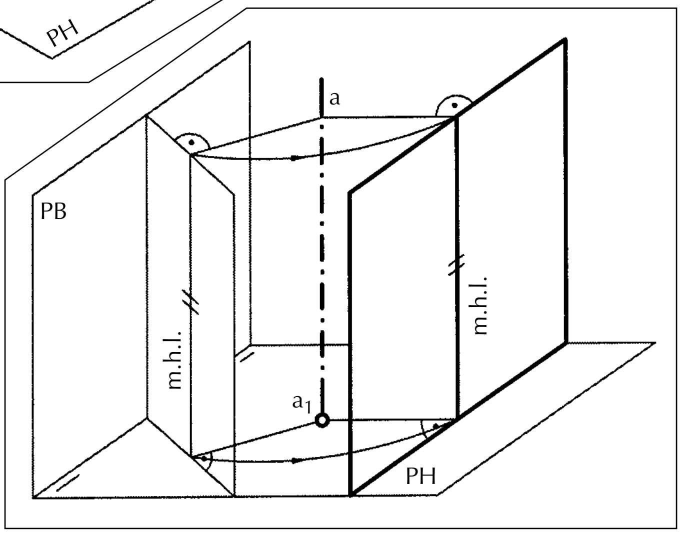
3.11 irudia

3.6.2 PLANO BERTIKALA

3.12 irudian, λ planoa –proiektatzaile horizontala– bertikalarekiko paralelo jarriko da, planoaren m.h.l.-aren inguruan biratutakoan. Planoko horizontalak profil-planoarekiko zuzen perpendikular bihurtzen dira. Biraketa horiek, 3.13 irudian ikus daitekeenez, berdin egin daitezke, m.h.l. edo i.h.l. lerroekiko paraleloak diren ardatzekin.



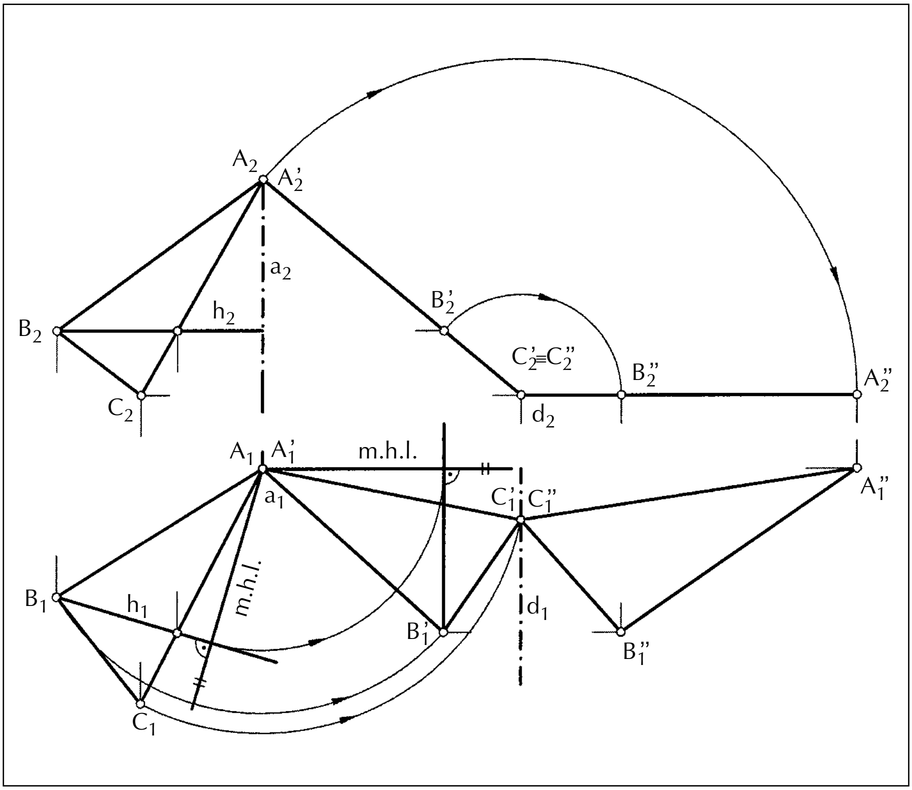
3.12 irudia



3.13 irudia

3.7 APLIKAZIOA

3.14 irudiko adibidean erakusten da nola lortu ABC triangeluaren egiazko magnitudea. Horretarako, ABC planoa proiekzio-plano batekiko paralelo jarri behar da, eta aldez aurretik proiektatzaile bilakatu gainera, arestian azaldu den bezala. Frontala izateraino birarazi da m.h.l. lerroa a ardatzaren inguruan; beraz, planoa proiektatzaile bertikal geratu da. Behin B_2' eta C_2' lortuta, dagozkien erreferentzia-lerroak marrazten dira haietatik; lerro horiek a_1 zentroko eta A_1B_1 eta A_1C_1 erradioko zirkunferentzia ebakitzen duten puntuei B_1' eta C_1' deritze. Kontuan izan behar da zirkunferentzia horiek bi puntutan ebakiko dutela dagokien erreferentzia-lerroa. Ez dira aintzat hartzen irudian marrazten ez diren ebakitze-puntuak, zeren eta horiek m.h.l. biratu den angelua ez bezalako bat biratuta B eta C puntuak lortzen baitira.



3.14 irudia

Ondoren, d ardatzaren bidez, ABC horizontalarekiko paralelo jarri da: $A_1''B_1''C_1''$ triangelua da ABC triangeluaren benetako magnitudea.

4

Eraispenak

Geometria deskribatzailearen hirugarren metodoa da. Eraispenaren bitartez lortuko dugu plano zeihar batean dauden marra edo irudi lauen egiazko magnitudea proiekzio-planoetan.

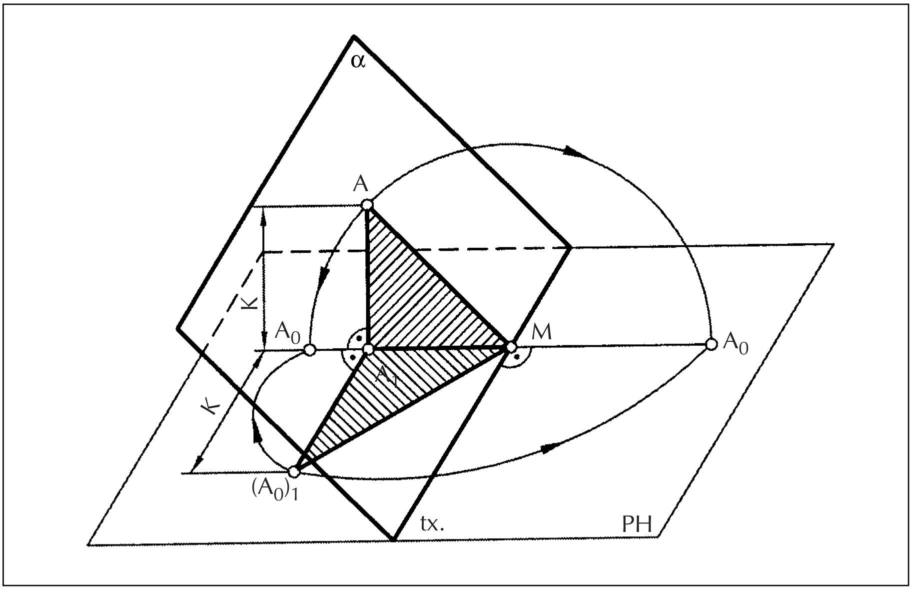
Plano bat proiekzio-plano batera eraistea da lehena bigarren horrekin bat eginaraztea, bien arteko elkargune zuzenaren inguruan bírarazita.

4.1 PLANO BATEKO PUNTU BATEN ERAISPENA

Egia esan, ez da puntua eraisten. Berez, planoa eraisten da bere osagai guztiekin batera.

Lehendabizi espazioan aztertuko dugu arazoa. Ikus 4.1 irudia.

Eman dezagun α planoa dugula, plano zeiharra, eta han A puntua dagoela. Plano hori, eta horrekin batera A puntua, plano horizontalaren gainera eraitsiko dugu. Horretarako, bi planoen arteko zuzen horizontala den elkargunea biraketa-



4.1 irudia

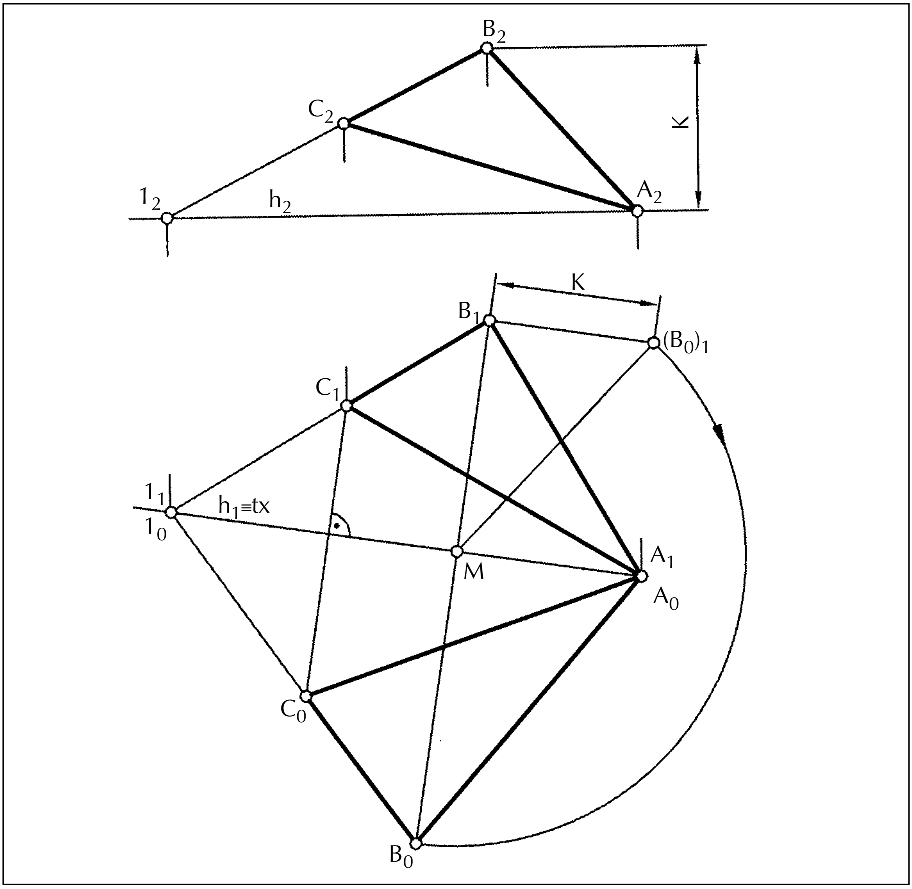
-ardatz gisa hartzen da. Biraketa-ardatz horri banda deritzo, eta “tx” ezaugarriaz irudikatzen da.

A puntuak, tx-ren inguruan bira ematerakoan, AM erradioko zirkunferentzia deskribatzen du. AM zuzenki hori da A puntutik bandara espazioan dagoen distantzia, eta, gainera, A_1AM triangelu zuzenaren hipotenusa da. Horretan, AA_1 katetoa, eraispena egingo den planoari dagokionez, A puntuak duen kota edo altuera da, eta A_1M, berriz, puntuaren proiekzio horizontaletik bandara dagoen distantzia. Triangelu hori plano gainera eraisten badugu, $MA_1(A_0)_1$ triangelua osatuko da. 4.1 irudian ikus daitekeenez, A_1M zuzenkia bandarekiko zuta da. $A_1(A_0)_1$, berriz, A_1 puntutik marrazturiko bandarekiko paraleloa da, eta A puntuaren A_1A kotaren magnitude bera du. M puntua zentrotzat hartuta, $M(A_0)_1$ erradioa duen zirkunferentzia marrazten da, bandarekiko zut A_0 puntuetan ebaki arte. A_0 puntuak A-ren puntu eraitsiak dira.

A puntua plano bertikalera eraitsi nahi baldin badugu, banda bezala plano bertikala α planoarekin duen elkargunea hartuko dugu. Hau zuzen frontala izango da.

4.2 IRUDI LAU BATEN BENETAKO MAGNITUDEA

4.2. irudiko ABC triangeluaren egiazko magnitudea lortzeko, plano horizontalera eraitsiko dugu. Horretarako, ABC planoaren h(h_1-h_2) zuzen horizontala hartuko dugu bandatzat. h_1 proiekzio horizontala lortzeko, 1(1_1–1_2) puntuaz baliatuko gara. A_1 puntua, bandan dagoenez, puntu bikoitza da. Horrek hau esan nahi du: A_1 eta horren A_0 puntu eraitsia bata bestearen gainean daudela. B puntuaren puntu eraitsia lortzeko, B_1 puntuaren proiekzio horizontaletik, bandarekiko zuta eta paraleloa marrazten dira. Paraleloaren gainean, puntuaren kota eramaten da eta $(B_0)_1$ lortzen da. M puntua zentrotzat eta $M(B_0)_1$ zuzenkia erradiotzat harturik, B_0 puntua lortzen da. C_0 puntua kalkulatzeko, B_0 puntua erabakitzeko

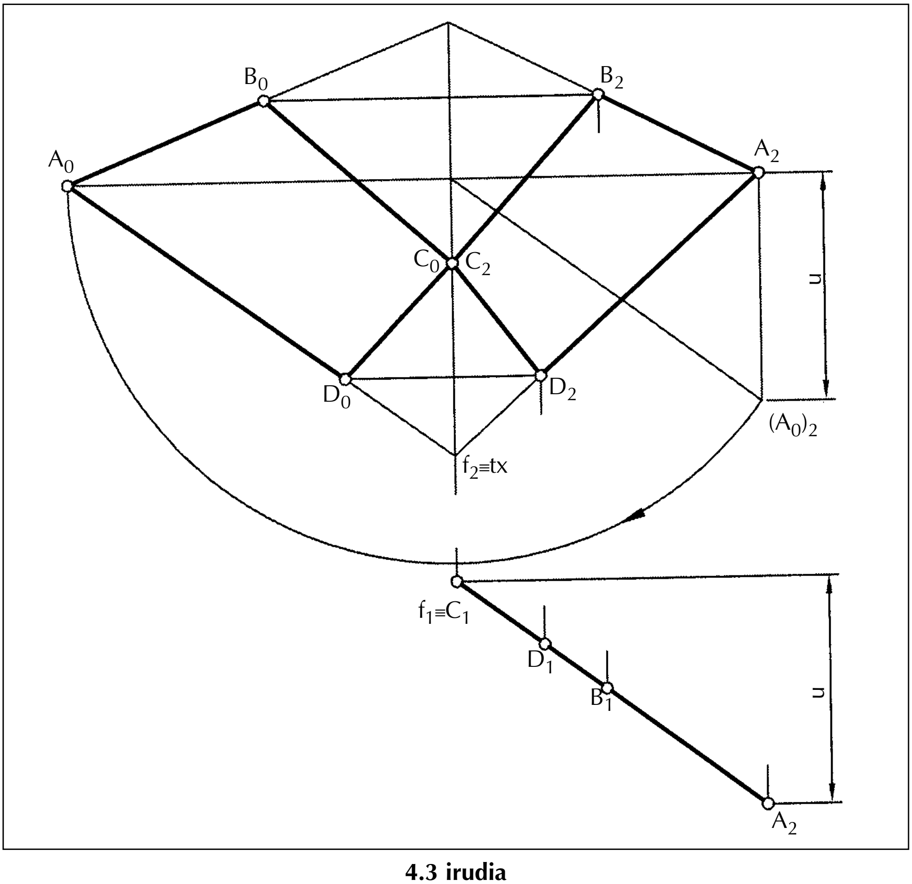


4.2 irudia

erabili den metodo bera erabil zitekeen; hala ere, erabili den prozedura honetan oinarritzen da: ABC irudi lau baten $A_1B_1C_1$ proiekzio horizontalaren eta irudi horrek plano horizontalean duen $A_0B_0C_0$ eraispenaren artean afinitate-erlazio ortogonala dago, eta elementuak hauek dira:

- Afinitate-ardatza: bi planoen arteko elkargunea, hau da, H planoaren eta irudia daukan α planoaren arteko elkargunea den zuzen horizontala.
- Afinitate-norabidea: traza horizontal horrekiko zuta.
- Bi puntu afin: puntu baten proiekzio horizontala eta horren eraispena

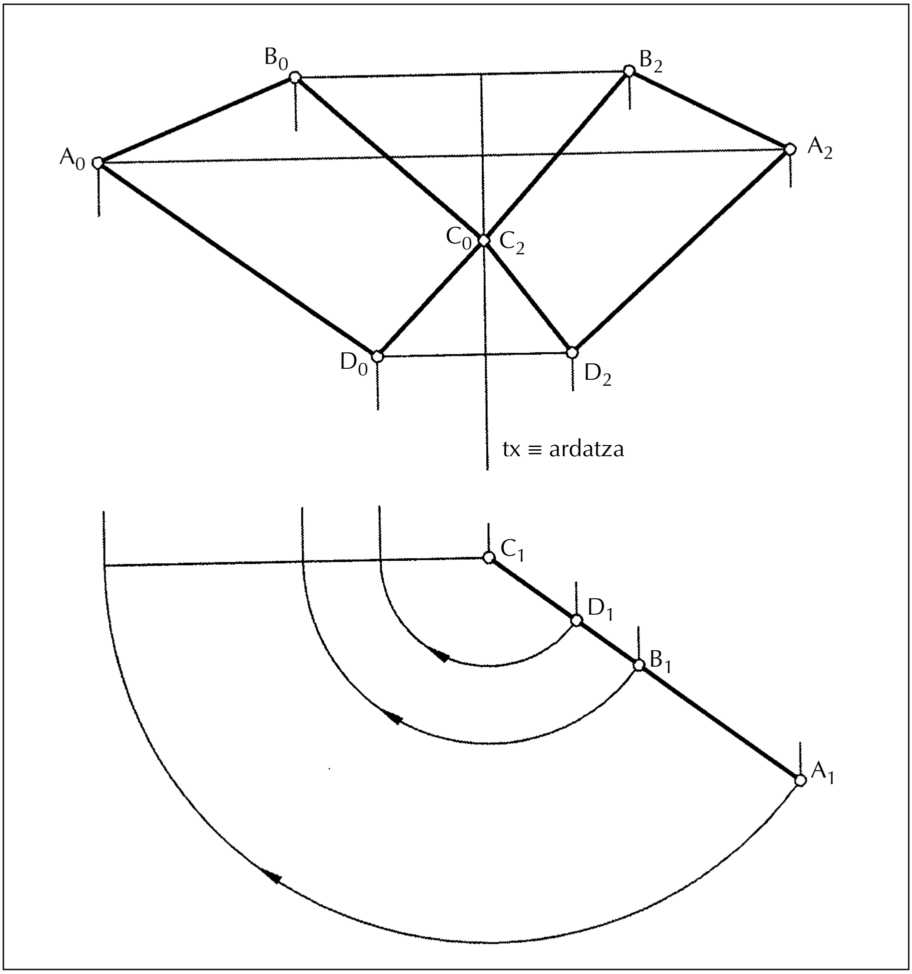
Era berean, planoa plano bertikalera eraisten bada, irudiaren proiekzio bertikalaren eta espazioko irudiak plano bertikalera duen eraispenaren artekoa da afinitate-erlazio hori. Afinitate-ardatza zuzen frontala da, eta afinitate-norabidea, berriz, zuzen frontal horrekiko zuta. Kasu batean zein bestean afinitatea ortogonala da.



4.3 irudia

4.3 irudian, plano proiektatzaile batean dagoen ABCD laukia B plano bertikalera eraisten da benetako magnitudea zehazteko. Plano horien elkargunea $f(f_1–f_2)$ zuzen frontala da, aldi berean, zuzen bertikala ere badena.

f_2 zuzena banda gisa hartuz, A puntua eraisten da bere A_2 proiekzio bertikaletik abiatuta, eta A_0 lortzen da. B_0, C_0 eta D_0 puntuak kalkulatzeko, hauek aplikatu behar dira: f_2 zuzena ardatz gisa duen afinitatea, ardatzarekiko perpendikularra den afinitate-norabidea, eta A_2 eta A_0 puntuak puntu afinen bikote gisa. Kontuan izan afinitate-ardatzeko puntuak beren buruarekiko afinak direla, hau da, bikoitzak dira; beraz, C_0 puntua bat dator C_2 puntuarekin.



4.4 irudia

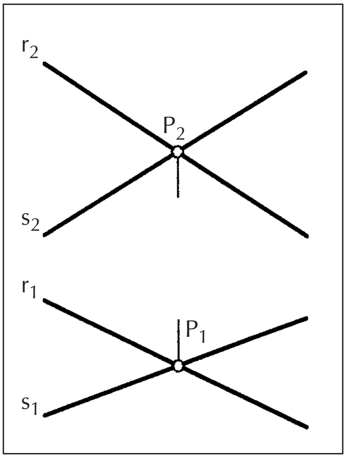
Plano baten eraispena (4.4 irudia) biraketa-kasu berezi gisa har daiteke, non biraketa-ardatza eraispenaren banda den. Aintzat hartu behar da aurpegi horren, proiektatzaile horizontalaren, posizioaren egokitasuna; aurpegiak bere bandaren inguruan bira ematean deskribatzen duen zirkunferentzia-arkua adieraz daiteke zuzenean aurretiko bistan.

5

Elkarguneak

5.1 ZUZENEN ARTEKOA

Bi zuzenen arteko elkargunea puntu bat da. Ez da nahasi behar elkar ebakitzen dute bi zuzen (5.1 irudia) eta elkar gurutzatzen duten bi zuzen (5.2 irudia).



5.1 irudia

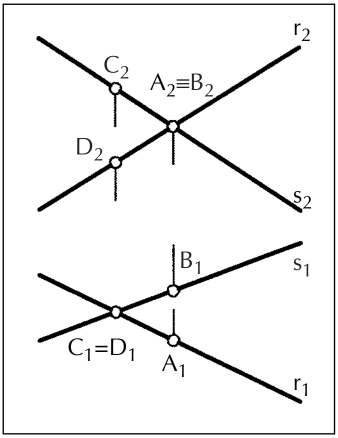
5.1.1 AGERIKO ETA EZKUTUKO PUNTUAK

Izan bitez elkar gurutzatzen duten bi zuzen, eta ikus dezagun proiekzio bakoitzean zuzen bateko zein puntuk uzten dituzten ezkutuan beste zuzeneko puntuak.

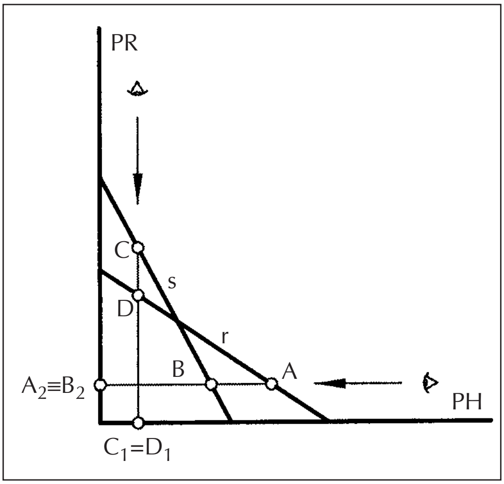
Zuzenen aurkezpen diedrikoan, 5.2 irudian, proiekzio bertikal bera duten bi puntu ikusten ditugu zuzen banatan, A eta B.

Aurrean zein dagoen jakin nahi badugu, hau da, proiekzio bertikalean zein puntuk estaltzen duen bestea, 5.3 irudiari erreparatu behar diogu; ikusiko dugu A puntua dela, hura baita proiekzio--plano bertikaletik urrunen dagoena.

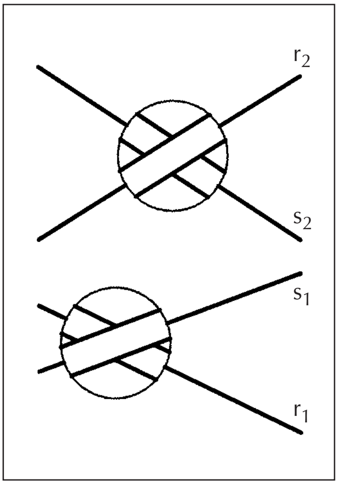
Era berean, proiekzio horizontal bera duten bi puntu baditugu, eta jakin nahi badugu proiekzio horizontalean haietako zein ikusiko dugun bestearen gainean, 5.3 irudiari erreparatu behar diogu; ikusiko dugu C puntua dela, hura baita proiekzio-plano horizontalaren aurrean kota handiena duena. Beraz, 5.2 irudiko proiekzioak, lupa-efektuak aplikatuta, 5.4 irudian ageri den bezala ikusten dira.



5.2 irudia



5.3 irudia

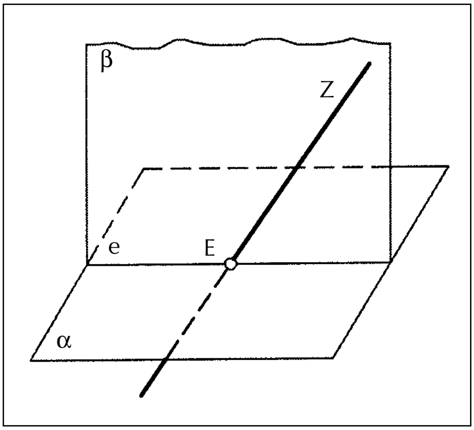


5.4 irudia

Azkenik, ezan dezakegu, kota berean dauden puntuen kasuan, urrunen dagoena ikusiko dela proiekzio bertikalean, eta, urrunera bera duten puntuen kasuan, berriz, kota handiena duena ikusiko dela proiekzio horizontalean.

5.2 ZUZENAREN ETA PLANOAREN ARTEKO ELKARGUNEA

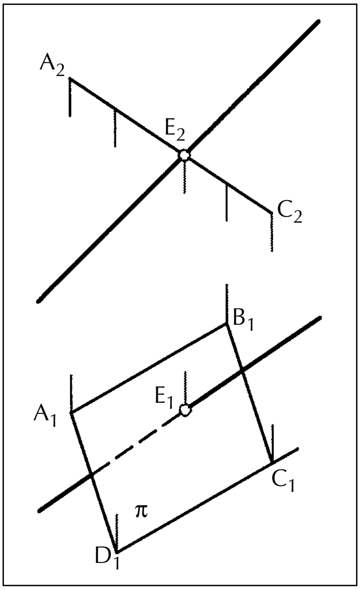
5.5 irudian, espazioan egin beharreko eragiketa erakusten da. z zuzena eta α planoa ditugu. Ebakitze-puntua lortzeko, zuzenetik edozein plano, β, pasarazten da. Bi planoen arteko elkargunea e zuzena da, eta zuzen horrek z zuzena E puntuan ebakitzen du. E puntua da, hain zuzen, z zuzenaren eta α planoaren arteko ebakitze-puntua.



5.5 irudia

Planoa posizio egokian baldin badago, hau da, planoa proiektatzailea bada, planoaren eta zuzenaren arteko ebakitze-puntua berehala zehazten da.

5.6 irudian, proiektatzaile bertikala den π planoa, ABCD paralelogramoa, irudikatzen da. Proiektatzailea denez, plano horretako edozein puntu, π eta r arteko E ebakitze-puntua barne, planoaren proiekzio bertikalean egongo da. Proiektatzailea denez, haren proiekzio bertikala zuzen baten bidez irudikatzen da, non argi eta garbi zehazten baita π eta r arteko elkargunea den E puntua.

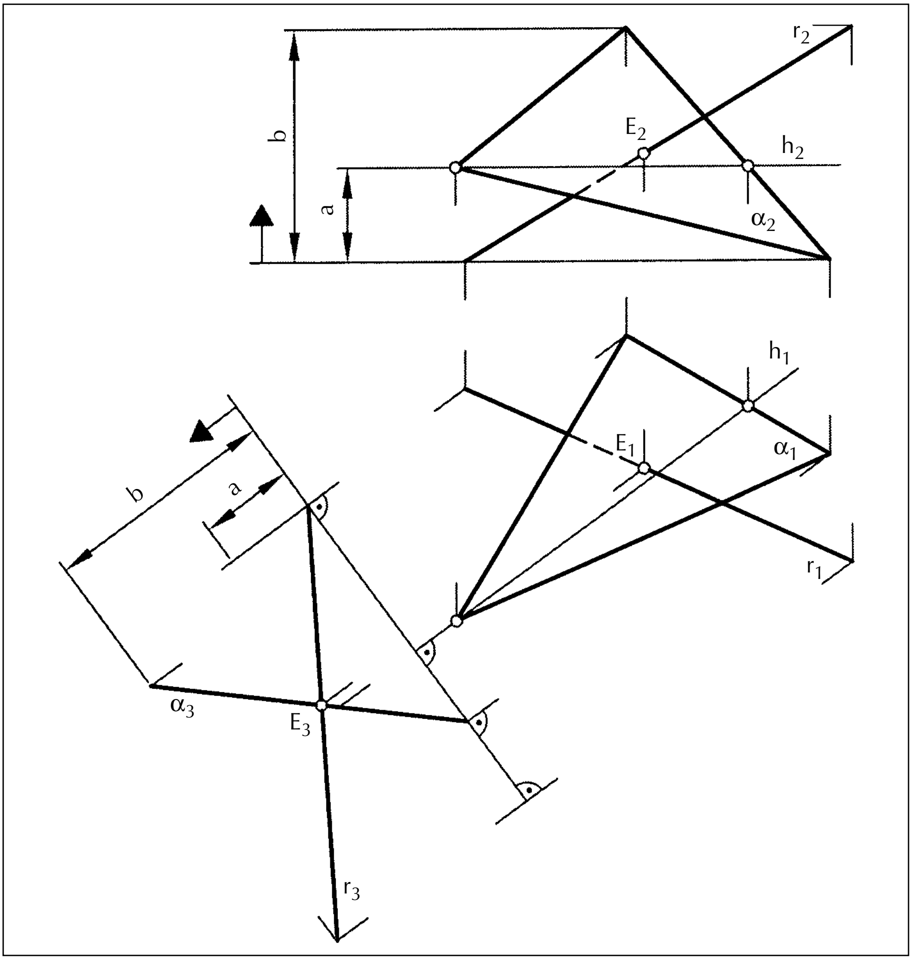


5.6 irudia

5.2.1 METODOEN APLIKAZIOA

5.2.1.1 Plano-aldaketa baten bitartez

Planoa zeiharra bada (5.7 irudia), hirugarren proiekzio-plano batera proiektatuko ditugu planoa eta zuzena, planoa proiektatzaile bihur dadin. Posizio horretan, planoaren proiekzio bertikal berria zuzen baten bitartez irudikatzen

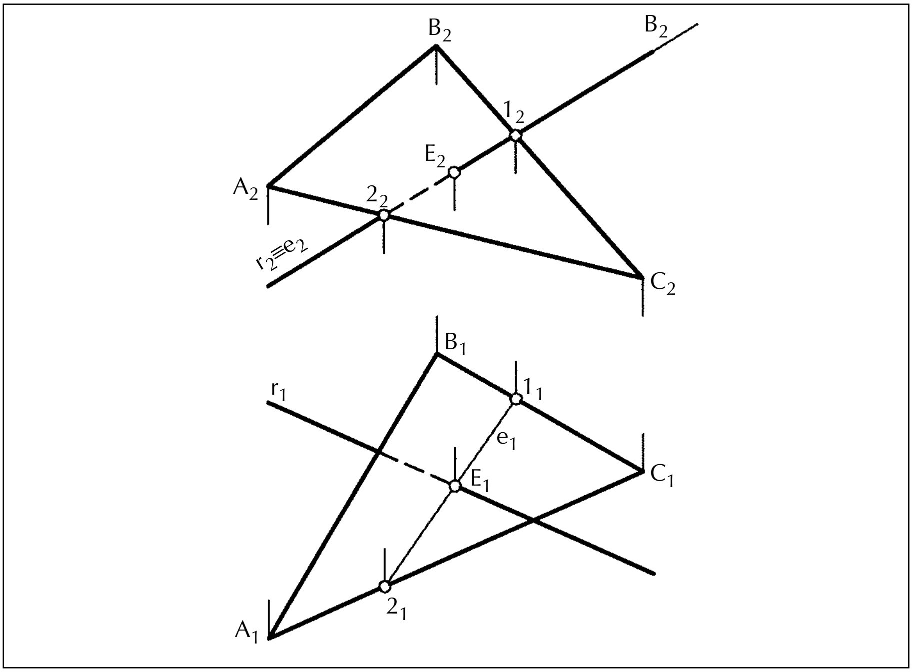


5.7 irudia

da lehen aipatu bezala; horri esker lortzen da r zuzenak planoa ebakitzen duen E ebaki-puntua zehaztea.

5.2.1.2 Zuzena hartuko duen plano laguntzaile baten bitartez

Zuzenetik igarotzen den β plano laguntzailea proiektatzaile bat da. 5.8 irudian, hain zuzen, proiektatzaile bertikala da, eta, irudikatzeko, haren proiekzio bertikala soilik erabiltzen dugu. Planoaren eta ABC triangeluaren bitartez definitutako planoaren arteko elkargunea e zuzena da. e_1 proiekzio horizontalak E_1 puntuan ebakitzen du r_1, eta E puntuaren erreferentzia e_2 proiekzioan aterata, E_2 izango dugu.



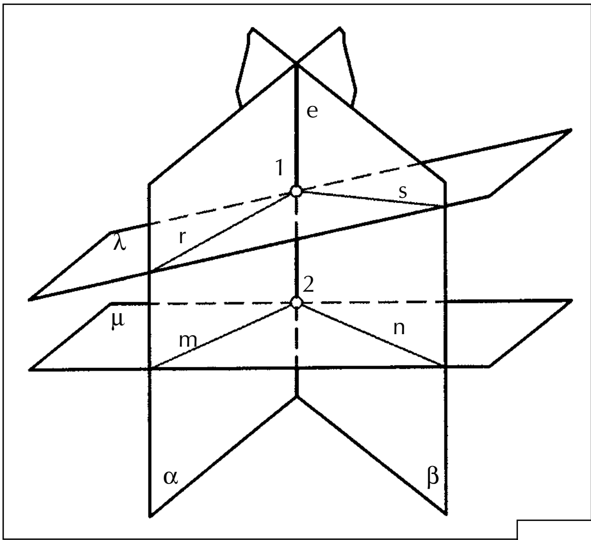
5.8 irudia

5.3 PLANOEN ARTEKO ELKARGUNEA

Bi planoen arteko elkargunea zuzen bat da, eta, zuzen hori ondo definitzeko, ezinbestekoa da gutxienez elkarguneko bi puntu ezagutzea.

Kontraesana badirudi ere, elkargunea lortzeko, planoak hirugarren plano batez ebakitzen dira eta hirugarrenak aurreko bietako bakoitzarekin duen elkargunea zehazten da. Bi zuzen horiek puntu batean ebakitzen dute elkar; puntu hori aurkitu nahi genuen elkargunekoa izango da. Eragiketa beste plano ebakitzaile laguntzaile batez errepikatzen da, eta lortutako zuzenek elkarguneko beste puntu batean ebakiko dute elkar. Puntu hori aurrekoarekin lotuz lortuko dugu aurkitu nahi genuen elkargunea.

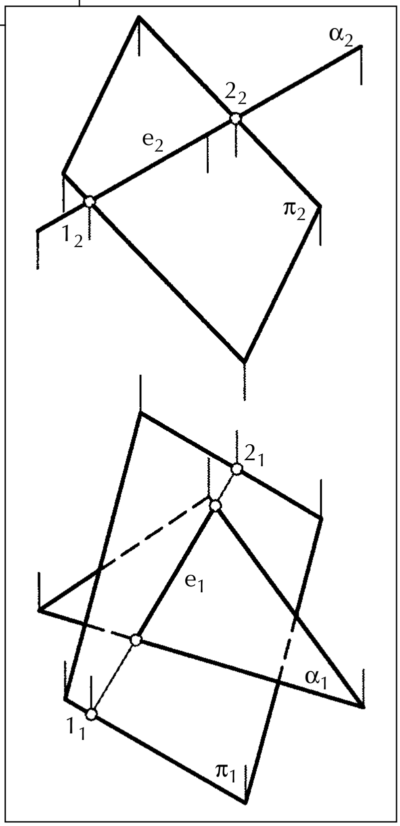
5.9 irudian erakusten da nola lortzen den α eta β planoen arteko elkargunea espazioan. Plano laguntzailetzat λ eta μ planoak hartzen dira. λ-ren eta α-ren



5.9 irudia

arteko elkargunea r zuzena da, eta λ-ren eta β-ren artekoa s zuzena. r eta s zuzenen arteko ebakitze-puntua, 1 puntua, α eta β planoen arteko elkarguneko puntu bat da. μ planoarekin gauza bera egiten badugu, m eta n zuzenak aurkituko ditugu, eta horiek elkar ebakitzen dute α-ren eta β-ren arteko elkarguneko beste puntu batean, 2 puntuan. 1 eta 2 puntuak lotuta, α-ren eta β-ren arteko e elkargunea lortuko dugu.

Posizio egokia dugu haietako bat plano proiektatzailea denean. 5.10. irudian, α planoa proiektatzaile bertikala da eta, proiektatzailea denez, plano horretan dauden elementu guztiak, α eta π planoen arteko e elkargunea barne, irudikatuta daude α planoaren proiekzio bertikalean, eta hori zuzen baten bidez irudikatzen da. Hori dela eta, elkargunea erabat definituta gelditzen da.

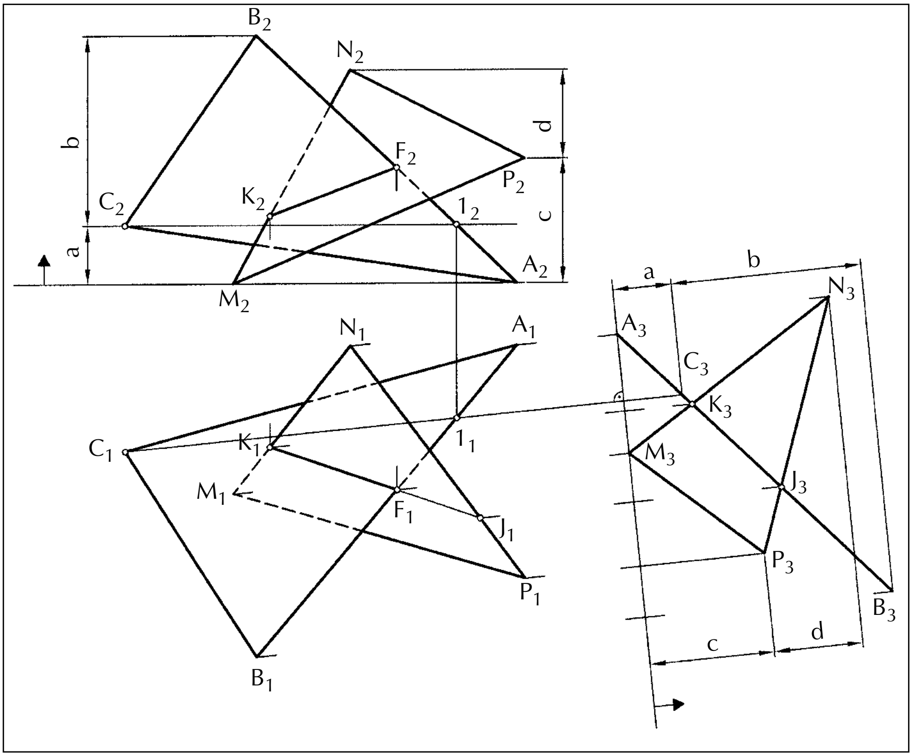


5.10 irudia

5.3.1 METODOEN APLIKAZIOA

5.3.1.1 Plano-aldaketa baten bitartez

Planoen proiekzio berri bat aurkitu behar da, haietako bat, ABC planoa esate baterako, proiektatzaile bihur dadin. K eta J puntuak mugatzen dute elkargunea. 5.11 irudia.

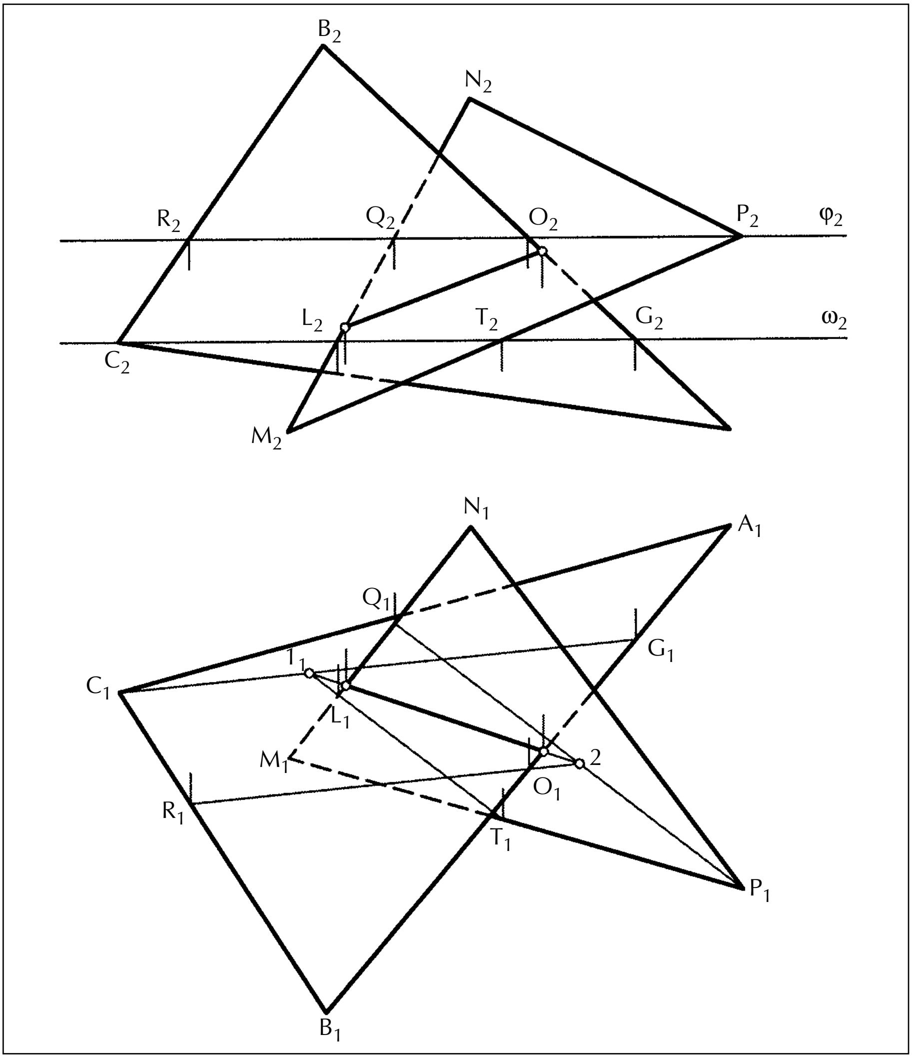


5.11 irudia

5.3.1.2 Plano laguntzaileen bitartez

Hauek proiektatzaileak izan behar dute elkargunea erabat definituta geldi dadin. Beste era batera esanda, plano hauek frontalak, horizontalak, proiektatzaile horizontalak edo proiektatzaile bertikalak behar dute.

5.12 irudian, ABC eta MNP triangeluen arteko elkargunea lortzen da. Elkargunea lortzeko, plano laguntzaileak erabiliko ditugu. Lehendabizi, ω plano hori-

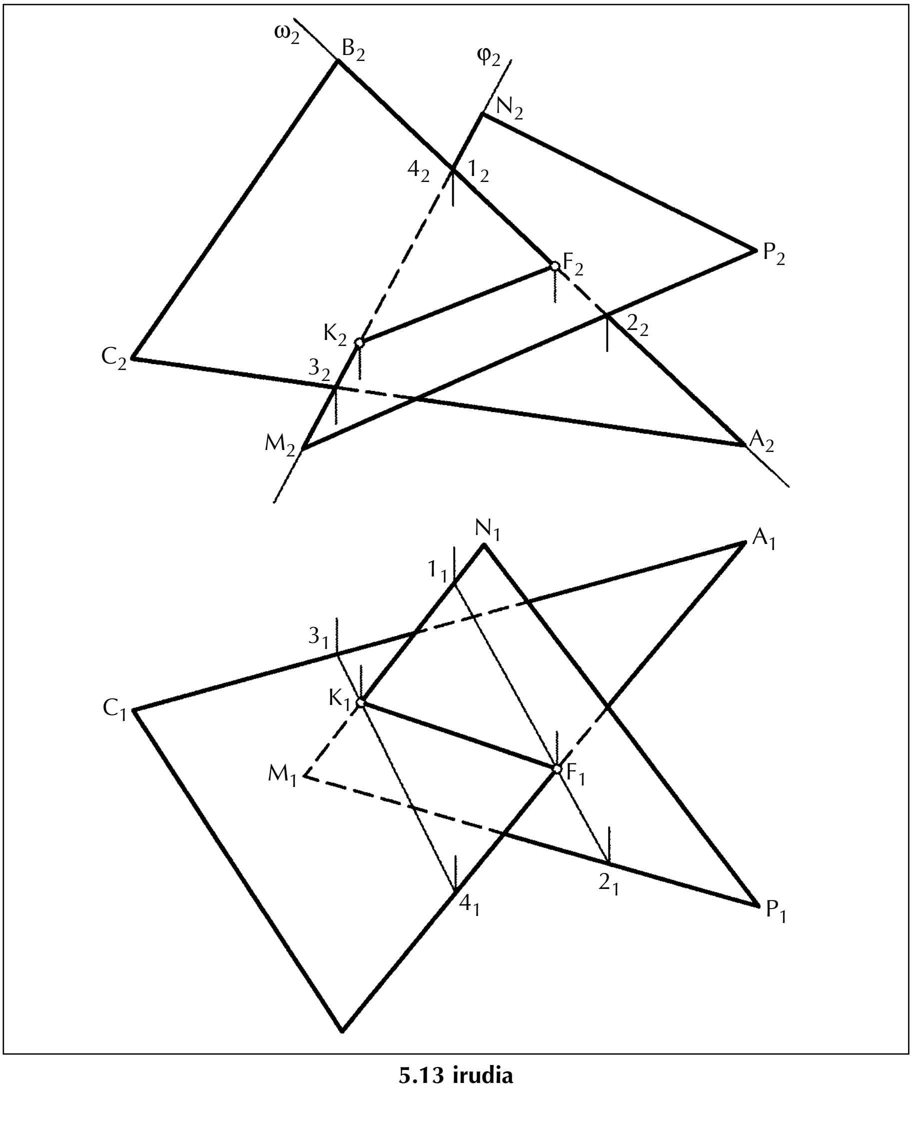


5.12 irudia

zontala erabiliko dugu. Plano horrek ABC triangelua C-G zuzenkian ebakitzen du eta MNP triangelua L-T zuzenkian. C-G eta L-T zuzenkiek 1 puntuan ebakitzen dute elkar. Puntu hori ABC eta MNP triangeluen arteko elkargunea den zuzeneko puntu bat da.

Beste plano laguntzaile bat erabiliz, φ plano horizontala esate baterako, 2 ebakitze-puntua lortzen da. Horretarako, P-Q eta R-O zuzenkiak erabiltzen dira. 1-2 da bi triangeluen arteko elkargunea. Azkenik, esan dezagun C-G eta R-O zuzenkiak paraleloak direla, L-T eta P-Q zuzenkiak diren bezalaxe, plano paraleloen bitartez eginiko plano baten ebaketak zuzen paraleloak sortzen baititu.

5.13 irudian, ariketa bera egiteko, AB zuzena barnean duen plano proiektatzaile bertikala erabiltzen da. Horrek 1-2 zuzenkian ebakitzen du MNP triangelua; elkargune zuzen horren eta AB zuzenkiaren arteko F elkargune-puntua bi triangeluetakoa da. Era berdintsuan, NM zuzena barnean duen plano proiektatzaile bertikalak 3-4 zuzenean ebakitzen du ABC triangelua. NM eta 3-4 zuzenen arteko elkargunea K puntua da. KF da aurkitu behar zen elkargunea.



5.13 irudia

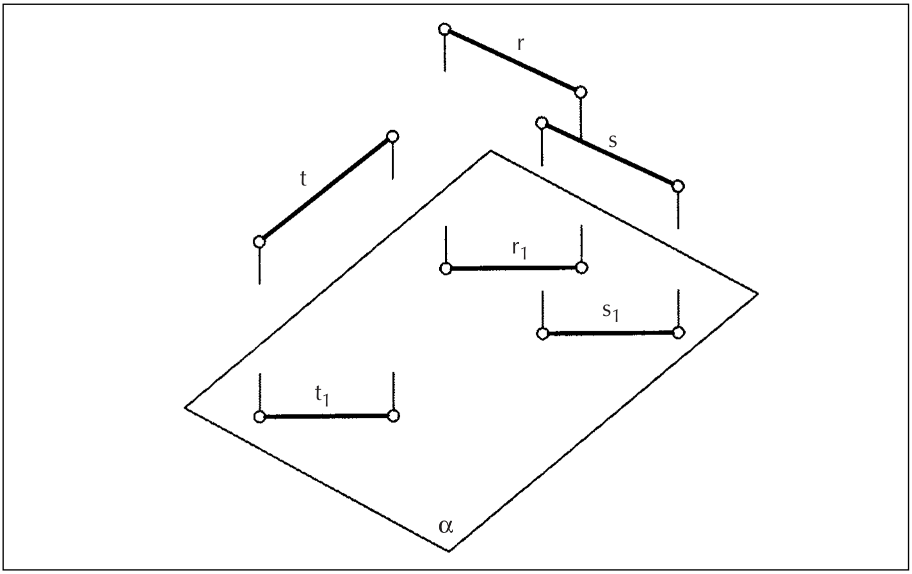
6

Paralelotasuna

6.1 ELKARREKIKO PARALELOAK DIREN ZUZENAK

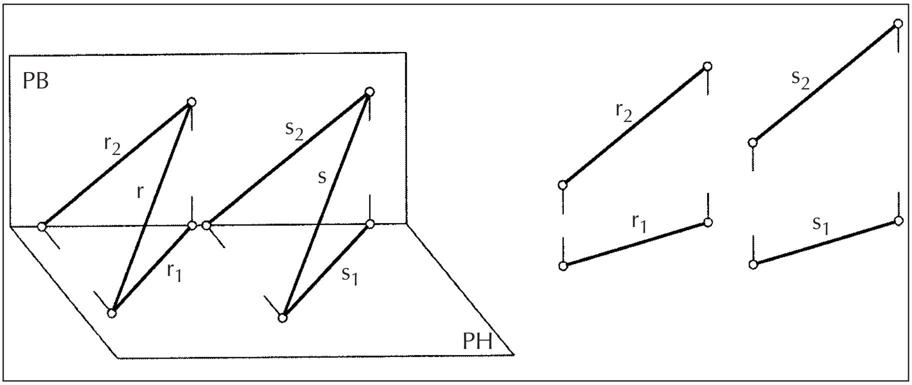
Espazioan paraleloak diren bi zuzen, zuzen paraleloen arabera ortogonalki proiektatzen dira edozein planotara. Alabaina, bi zuzenen plano batera egindako proiekzioak paraleloak izateak ez du esan nahi zuzenak espazioan paraleloak direnik. 6.1 irudian, r eta s zuzenak espazioan paraleloak dira eta paraleloak diren r_1 eta s_1-ren arabera proiektatzen dira. s eta t zuzenak s_1 eta t_1 zuzen paraleloen arabera proiektatzen dira, baina s eta t ez dira paraleloak espazioan. Plano proiektatzaile paraleloetan daudelako gertatzen da hori.

Bi zuzen espazioan paraleloak direla egiaztatzeko, baldintza beharrezkoa eta nahikoa da plano horizontaleko eta bertikaleko proiekzioak paraleloak izatea. Beste era batera esanda, r eta s zuzenak espazioan paraleloak izango dira, baldin eta beren proiekzioak paraleloak badira.



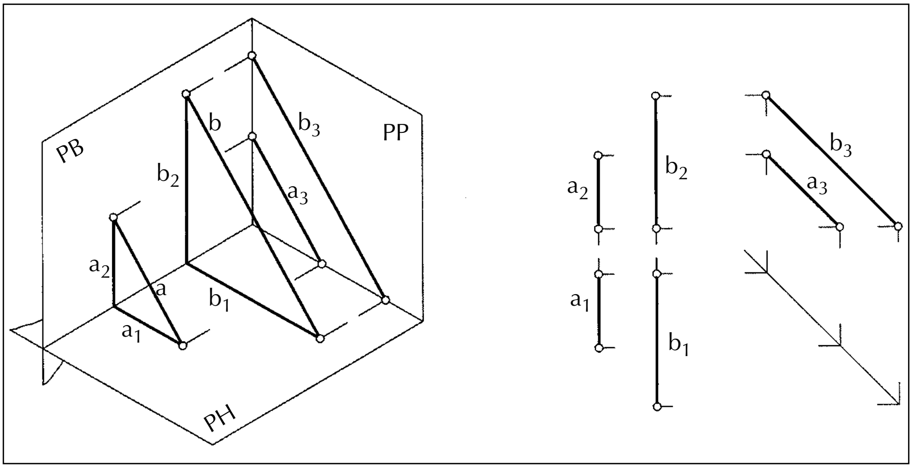
6.1 irudia

6.2 irudian, r eta s zuzenak paraleloak dira eta izen bereko proiekzioak ere bai, hau da, r_1 eta s_1, eta r_2 eta s_2.



6.2 irudia

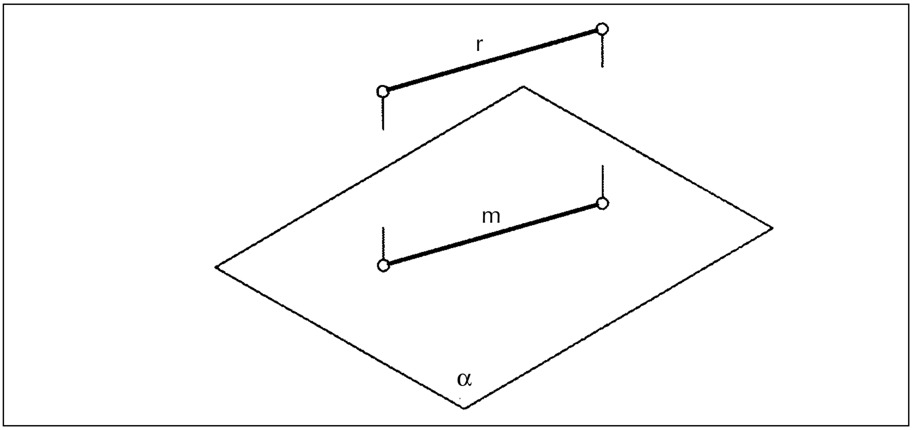
Salbuespen bat badago halere: profil zuzenak badira, hirugarren proiekzio bat beharko da haien paralelotasuna egiaztatzeko. Ikus 6.3 irudia.



6.3 irudia

6.2 PLANO BATEKIKO PARALELOA DEN ZUZENA

r zuzena planoarekiko paraleloa izango da, baldin eta r zuzena plano horretako zuzen batekiko paraleloa baldin bada. 6.4 irudiko r zuzena α planoarekiko paraleloa izango da, r zuzena eta α planoko m zuzena paraleloak direlako.

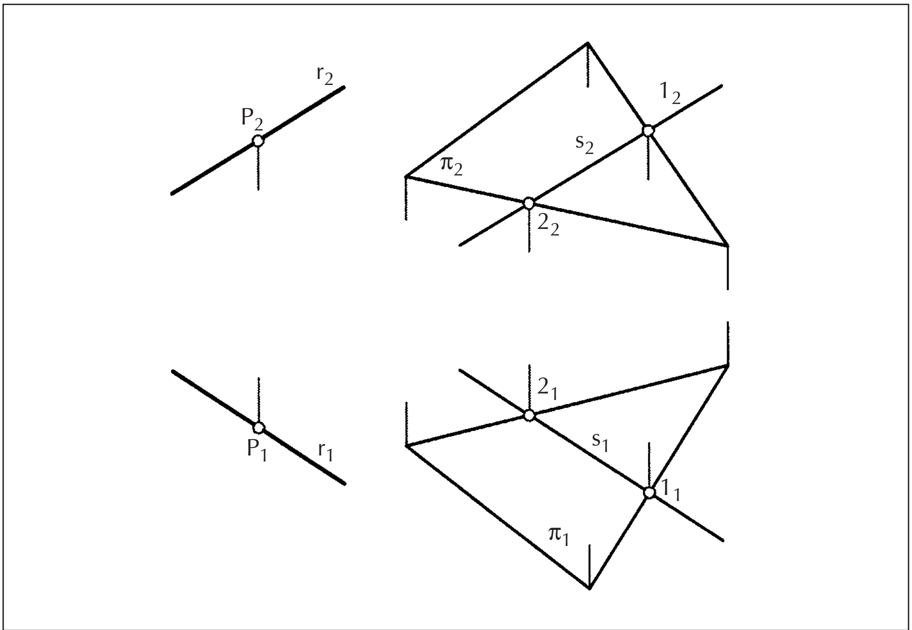


6.4 irudia

6.2.1 ADIBIDEAK

6.2.1.1 Izan bitez P puntua eta π planoa. P puntutik, marraztu π planoarekiko paraleloa den zuzena

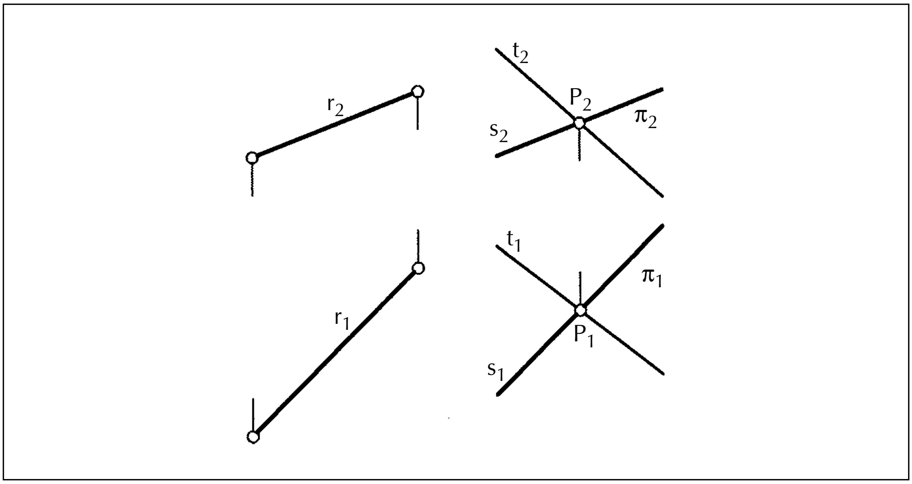
P puntutik igarota, π planoarekiko paraleloak diren infinitu zuzen daude. Horietako bat marrazteko, nahikoa da π planoko edozein zuzen marraztea, s adibidez, eta ondoren s zuzenarekiko paraleloa den r zuzena marraztea P puntutik. Ikus 6.5 irudia.



6.5 irudia

6.2.1.2 Izan bitez P puntua eta r zuzena. P puntutik, marraztu r zuzenarekiko paraleloa den planoa

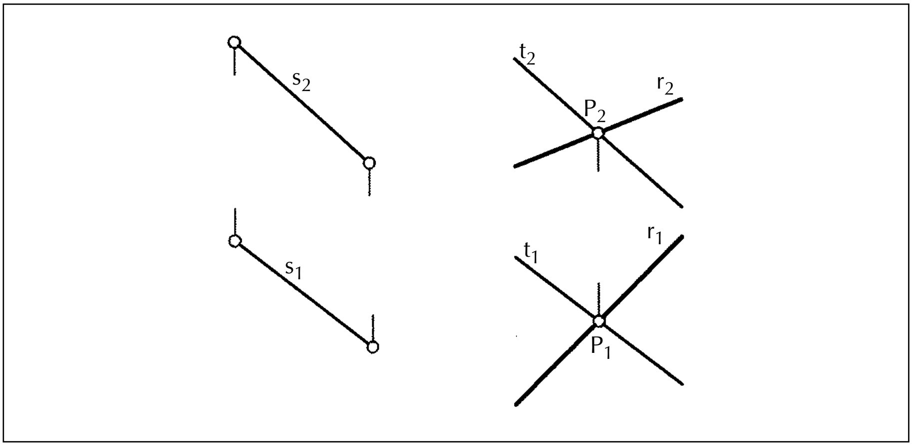
Ariketa honetan ere, infinitu soluzio daude. P puntutik r zuzenarekiko paraleloa den s zuzena marrazten badugu eta, ondoren, puntu beretik edozein t zuzen marraztu, r zuzenarekiko paraleloa den π planoa definituko dugu. Ikus 6.6 irudia.



6.6 irudia

6.2.1.3 Izan bitez r eta s zuzenak. r zuzenetik, marraztu s zuzenarekiko paraleloa den planoa

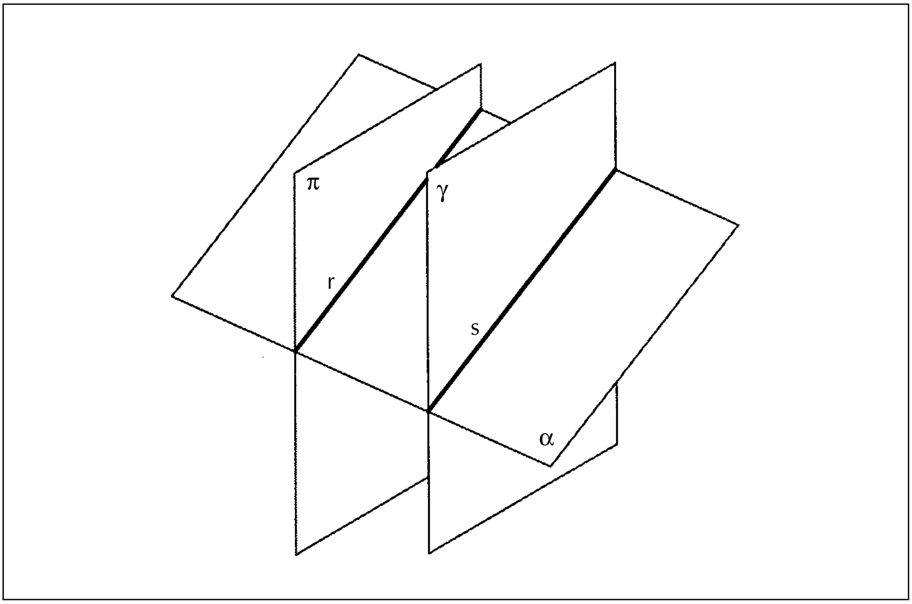
Soluzio bakarra dago. r zuzeneko edozein puntutik s zuzenarekiko paraleloa den t zuzena eraikitzen badugu, s zuzenarekiko paraleloa den planoa lortuko dugu. Ikus 6.7 irudia.



6.7 irudia

6.3 ELKARREKIKO PARALELOAK DIREN PLANOAK

π eta γ planoak paraleloak badira, plano horiek edozein α plano ebakitzean sortzen diren r eta s zuzenak ere paraleloak izango dira (6.8 irudia).



6.8 irudia

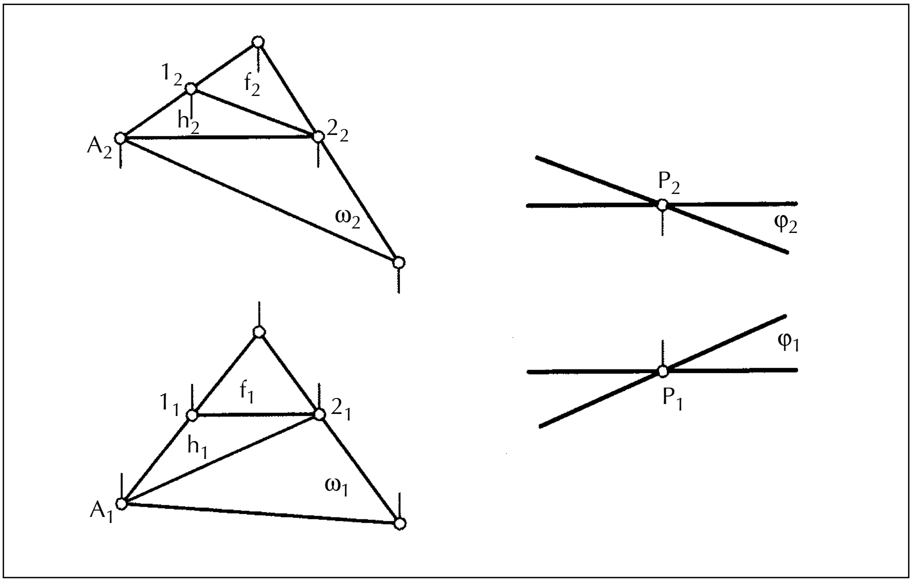
Elkar ebakitzen duten bi zuzenek plano bat definitzen dutenez, bi plano paraleloak diren egiaztatzeko, elkar ebakitzen duten zuzen-bikote bat marraztuko dugu horietako plano bakoitzean. Beste planoko zuzen-bikotearekiko paraleloak badira, planoak ere paraleloak izango dira.

Bi plano elkarrekiko paraleloak badira, bata bestearen lerro bereziak ere paraleloak izango dira elkarrekiko: planoko horizontalak eta frontalak, malda handienekoak eta inklinazio handienekoak. Propietate hori erabilgarria da elkarrekiko paraleloak diren planoak irudikatzeko.

6.3.1 ADIBIDEA

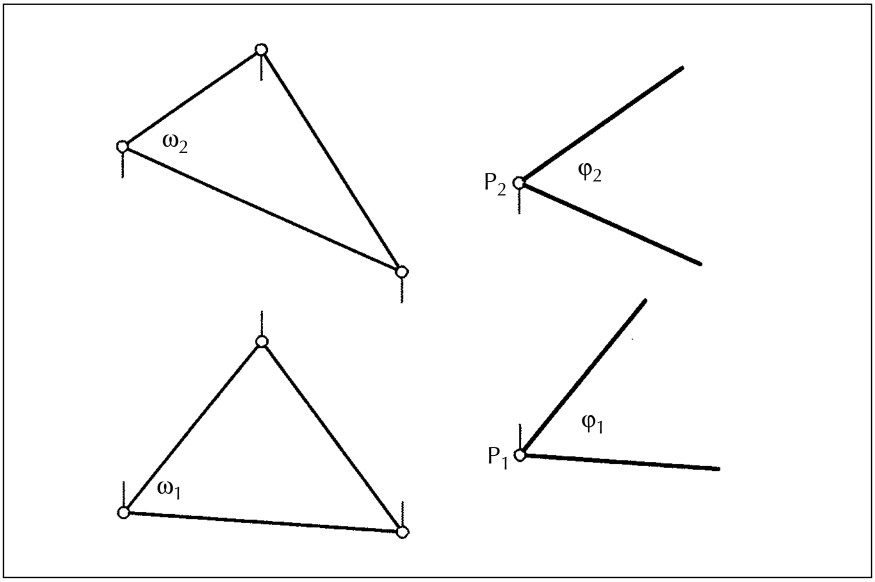
6.3.1.1 P puntutik, marraztu ω-rekiko paraleloa den φ planoa

a) 6.9. irudian, ω planoko zuzen horizontal bat eta frontal bat marraztu dira. P puntutik, zuzen horiekiko paraleloak diren zuzenak eraiki dira eta φ plano paraleloa zehaztu da



6.9 irudia

b) Plano bat bere lerro berezien bidez irudikatzen denean, planoa modu generikoan irudikatzen da. Baina poligono batean gauzatu den planoa hartzen badugu aintzat, poligonoaren aldeak planoko zuzenak dira. Zuzen horien bidez, proiekzioen paralelotasunari esker, proposatutakoarekiko paraleloa den plano edo poligono bat marraz daiteke. 6.10. irudian, hirugarren alde paraleloa erantsi besterik ez da behar proposatutakoaren antzeko hiruki paralelo bat lortzeko.



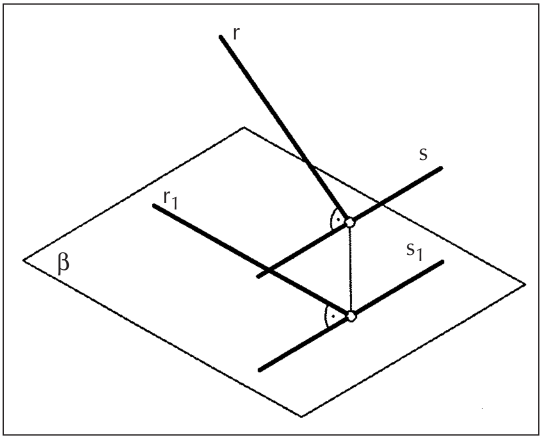
6.10 irudia

7

Perpendikulartasuna eta distantziak

7.1 ZUZENEN ARTEKO PERPENDIKULARTASUNA

Espazioan zutak diren bi zuzen, normalean, bi zuzen zeiharren arabera proiektatzen dira plano batera. Haietako bat proiekzio-plano batekiko paraleloa bada bakarrik betetzen da hiru zuten teorema. Honela dio teorema horrek:



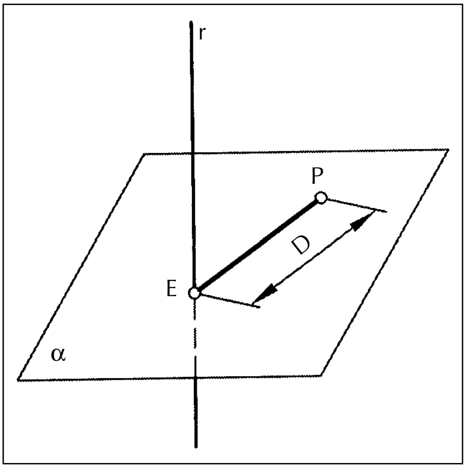
7.1 irudia

r eta s zuzenak espazioan elkarzutak badira eta horietako bat, s adibidez, bi zuzenak proiektatzen diren β planoarekiko paraleloa bada, bi zuzenen r_1 eta s_1 proiekzioak elkarrekiko zutak izango dira (7.1 irudia).

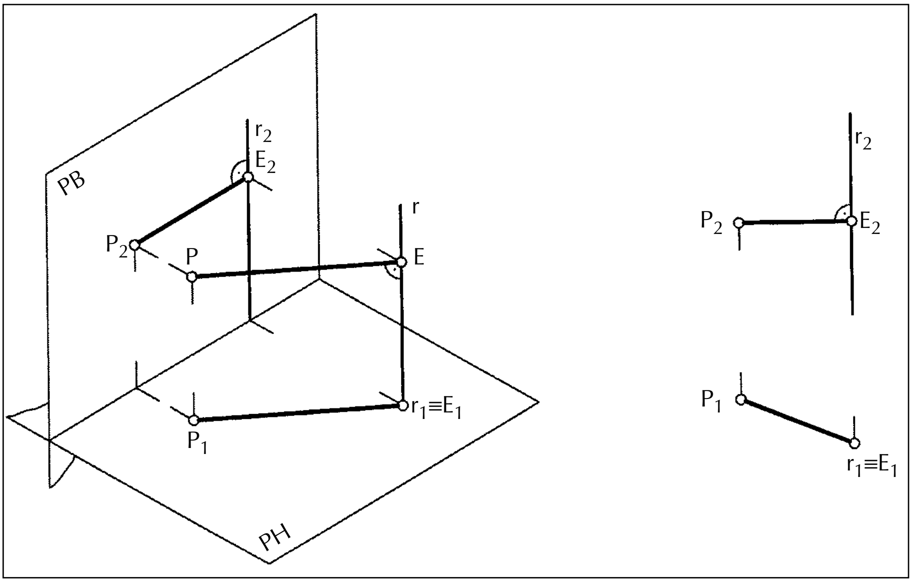
Bestalde, elkar ebakitzen duten bi zuzen zutek plano bat definitzen dute. Plano hori benetako magnitudean proiektatzen bada, zuzenean egiazta daiteke perpendikulartasun-erlazio hori.

7.1.1 PUNTU BATETIK ZUZEN BATERAINOKO DISTANTZIA

P puntutik r zuzeneraino dagoen distantzia kalkulatzeko, r zuzenarekiko zuta den PE zuzenkia lortu behar da. Metodo orokorrari jarraituz, E puntua lortzeko, P puntutik r zuzenarekiko zuta den α planoa marrazten da. Gero, r zuzenaren eta α planoaren arteko E elkargunea lortzen da (7.2 irudia).



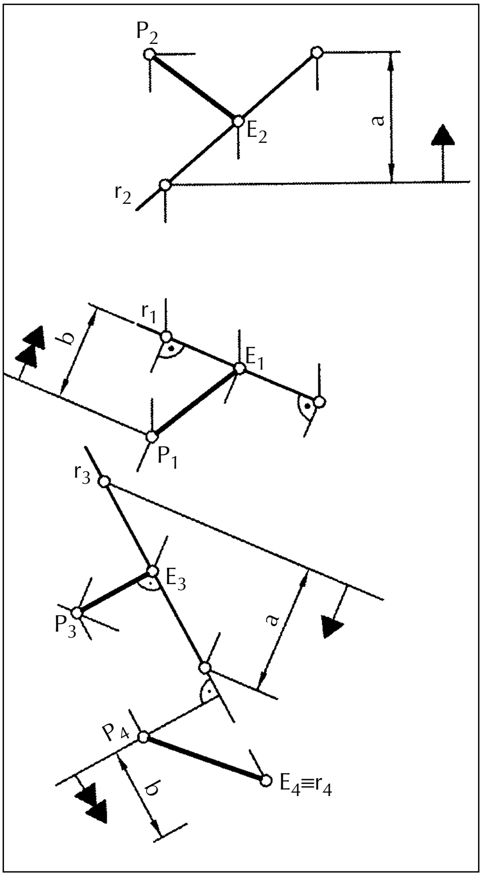
7.2 irudia



7.3 irudia

7.1.1.1 Plano-aldaketen bitartez

7.3 irudian ikus dezakegunez, zuzena proiekzio-plano batekiko zuta baldin bada, berehala zehatz daiteke P puntutik r zuzeneraino dagoen distantzia, hiru zuten teorema bete egiten baita. PE zuzenkia r zuzenarekiko zut proiektatzen da, eta, hura horizontala denez, egiazko magnitudean dago bere proiekzio horizontalean.



7.4 irudia

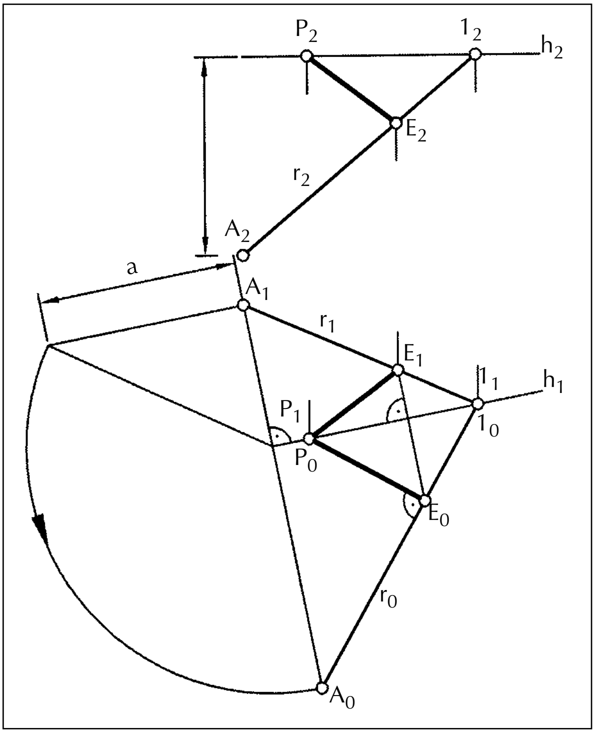
Zuzena zeiharra bada (7.4 irudia), puntuaren eta zuzenaren lehen bista laguntzaile bat aurkitu behar da, zuzena proiekzio--planoarekiko paraleloa izan dadin. Ondoren, bigarren bista laguntzaile bat aurkitu behar da, zuzena proiekzio-planoarekiko zut proiekta dadin. Posizio horretan lortuko dugu E_4P_4 distantziaren egiazko magnitudea.

Distantziaren proiekzioak lortu nahi baditugu, lehendabizi E_3 puntuaren proiekzioa lortu beharko dugu. Horretarako, P_3 puntutik r_3 zuzenarekiko zuzenki zuta eraikiko dugu. Kontuan hartu P_4E_4 eta P_3E_3 proiekzioak zuzen horizontal batenak direla. E_1 eta E_2 lortzeko, E_3 puntutik abiatuz, erreferentzia-lerroarekiko paraleloak marrazten dira.

7.1.1.2 Eraispen baten bitartez

Puntu batek eta puntu horretatik igarotzen ez den r zuzenak plano bat definitzen dute.

Plano hori plano horizontalera eraisteko (7.5 irudia), banda gisa planoaren $h(h_1–h_2)$ zuzen horizontala hartu da. h_1 proiekzio horizontala lortzeko, $1(1_1–1_2)$ puntuaz baliatuko gara.



7.5 irudia

Planoaren egiazko magnitudea lortu eta gero, P_0 puntutik r_0 zuzenarekiko zuta den zuzenkia marraztuta, E_0 puntua lortzen da. P_0E_0 zuzenkia da aurkitu nahi genuen distantziaren egiazko magnitudea.

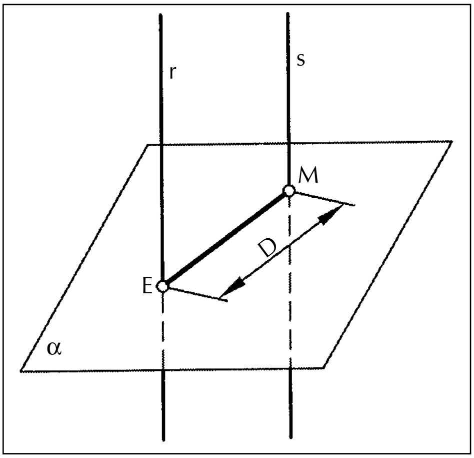
Irudian, gainera, distantziaren E_1P_1 proiekzio horizontala eta E_2P_2 proiekzio bertikala ageri dira irudikatuta.

7.1.2 BI ZUZEN PARALELOREN ARTEKO DISTANTZIA

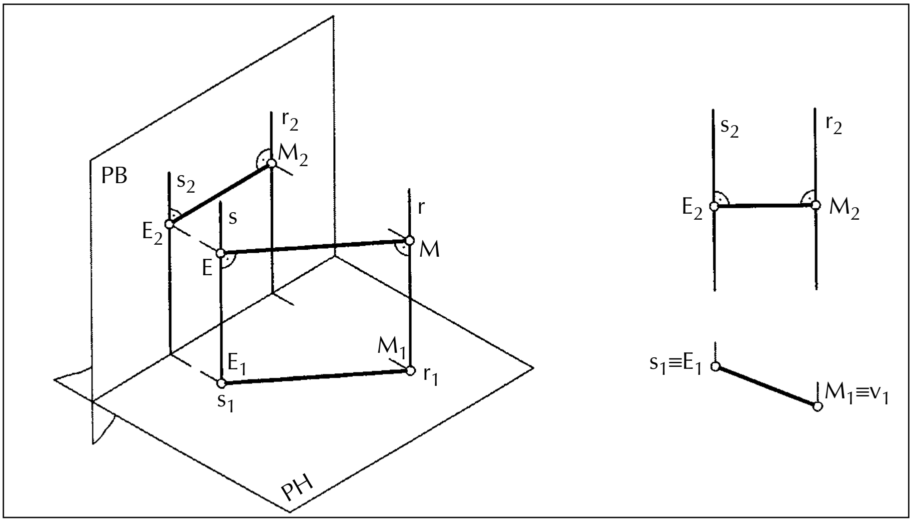
r eta s zuzen paraleloen arteko distantzia kalkulatzeko, biekiko zuta den α planoa marraztu behar da lehenik eta E eta M ebakitze-puntuak aurkitu ondoren. Ikus 7.6 irudia.

7.1.2.1 Plano-aldaketen bitartez

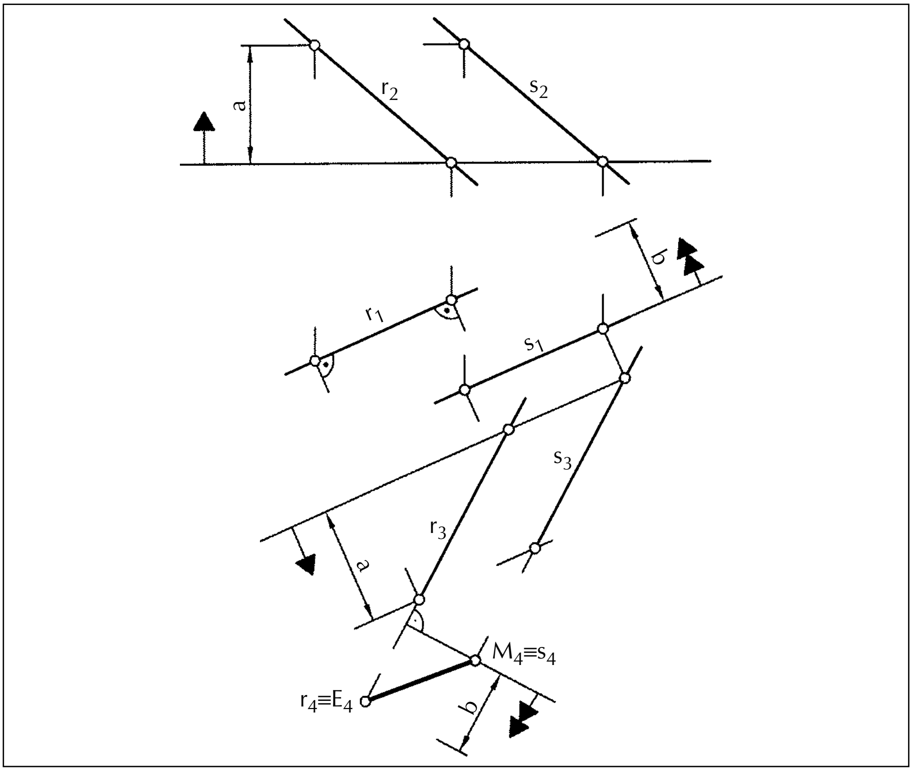
Zuzenak proiekzio-plano batekiko zutak badira, berehala zehatz daiteke biekiko zuta den EM distantzia (7.7 irudia).



7.6 irudia



7.7 irudia

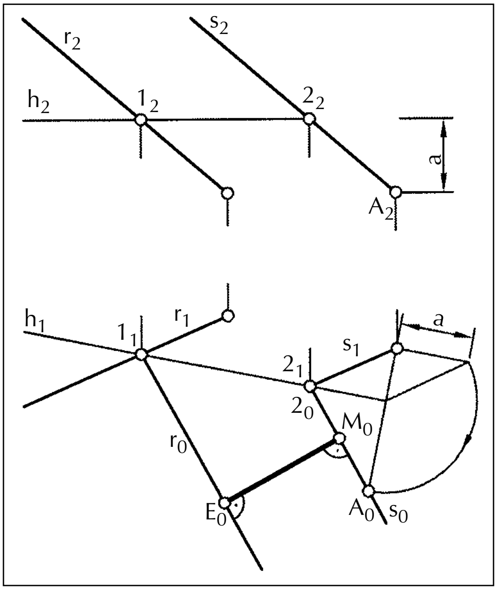


7.8 irudia

Zuzenak zeiharrak badira (7.8 irudia), bien lehen bista laguntzaile bat aurkitu behar da, zuzenak proiekzio-plano berriarekiko paraleloak izan daitezen. Ondoren, bigarren bista laguntzaile bat aurkitu behar da, zuzenak proiekzio--plano berriekiko zutak izan daitezen. E_4M_4 zuzenkia da aurkitu nahi genuen distantziaren egiazko magnitudea.

7.1.2.2 Eraispen baten bitartez

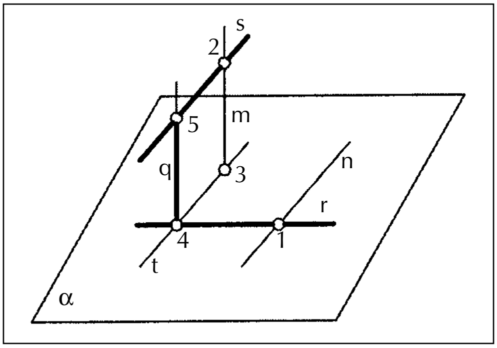
7.9 irudian erakusten denez, r eta s zuzenak eraitsita r_0 eta s_0 lortu ondoren, biekiko zuta den E_0M_0 zuzenkia eraikiko dugu, eta horrek neurtuko du bien arteko benetako distantzia.



7.9 irudia

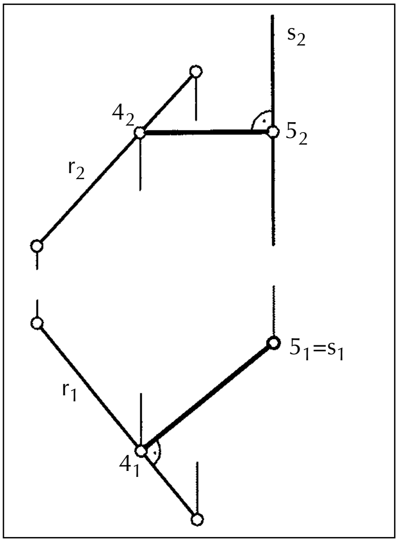
7.1.3 ELKAR GURUTZATZEN DUTEN BI ZUZENEN ARTEKO DISTANTZIA MINIMOA

Elkar gurutzatzen duten bi zuzenen arteko distantzia minimoa biekiko zuta den zuzenki bat da. 7.10 irudian erakusten da espazioan jarraitu beharreko prozedura orokorra. Hona hemen:



7.10 irudia

Izan bitez r eta s zuzenak. r zuzeneko 1 puntutik, s zuzenarekiko n zuzen paraleloa marrazten da. r eta n zuzenek s zuzenaren α plano paraleloa definitzen dute. s zuzeneko 2 puntutik, α planoarekiko zuta den m zuzena eraikitzen da, eta, gero, m zuzenaren eta α planoaren arteko 3 ebakitze-puntua lortzen da. 3 puntutik, s zuzenarekiko paraleloa den t zuzena marrazten da. t eta r zuzenek elkar ebakitzen duten lekua da 4 puntua. 4 puntutik, α planoarekiko zuta den q zuzena marraztuko dugu, s zuzena 5 puntuan ebaki arte. 4-5 zuzenkia izango da distantzia minimoa.

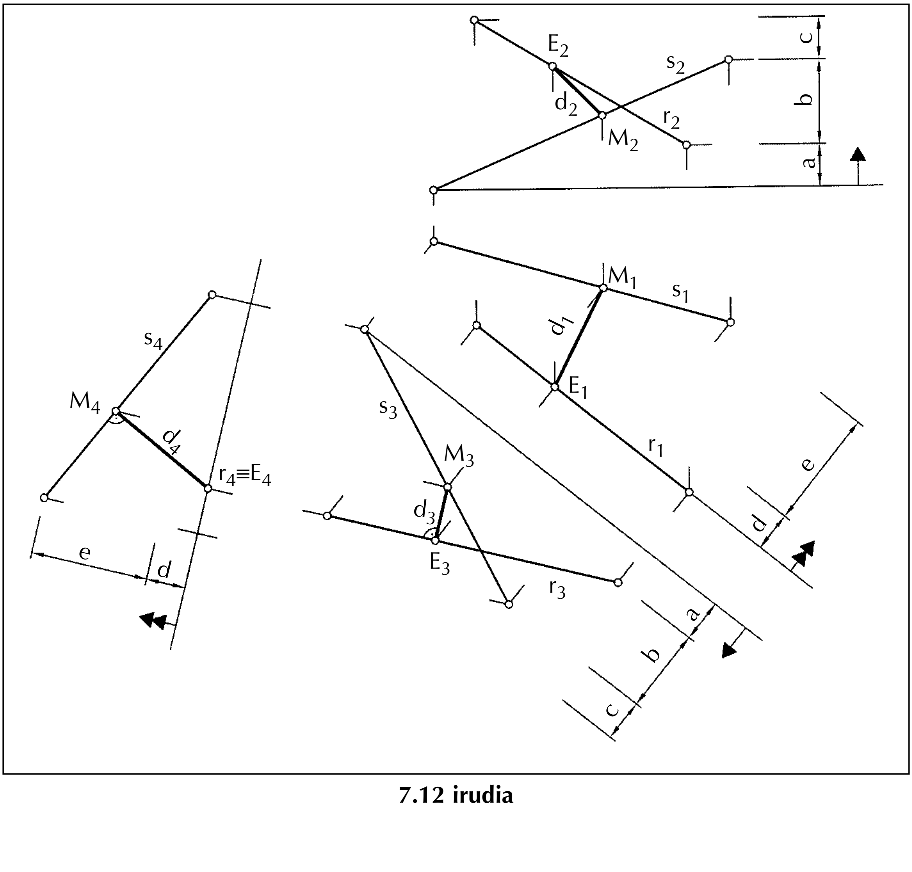


7.11 irudia

7.1.3.1 Plano-aldaketen bitartez

Arazo hau asko sinplifika daiteke plano--aldaketen bitartez. Zuzen bat proiekzio--plano batekiko zuta denean gertatzen da posizio egokia. Kasu honetan, distantzia txikiena (7.11 irudia) horizontal batean dagoen 4-5 zuzenkia da. Proiekzio horizontala da egiazko magnitudea, eta, hori lortzeko, aski da s_1-etik r_1-era zuta marraztea.

Zuzenak zeiharrak direnean (7.12 irudia), bista laguntzaile bat aurkitu behar da zuzen haietako bat proiekzio-plano berria-



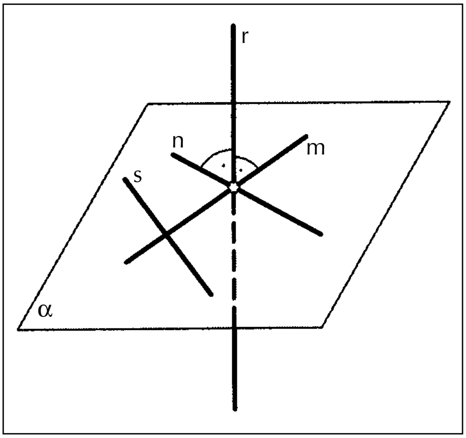
7.12 irudia

rekiko paraleloa izan dadin. Posizio horretan, r zuzena frontala da eta s zuzena zeiharra. Ondoren, bigarren bista laguntzaile batean proiektatzen dira, zuzen frontala proiekzio-plano berriarekiko zuzen zuta izan dadin. Bigarren posizio horretan, r zuzena bertikal geratzen da eta s zeihar.

r eta s zuzenen arteko distantziaren egiazko magnitudea da r_4-tik s_4-rainoko d_4 distantzia. Distantzia horrek, aldaketak deseginda, d_1–d_2 proiekzioak ditu.

7.2 ZUZEN BATEN ETA PLANO BATEN ARTEKO PERPENDIKULARTASUNA

7.13 irudian, espazio-geometriak erakusten duenez, zuzen bat zuta da bere oinetik igarotzen diren eta planokoak diren bi zuzenekiko zuta denean. Beste era batera esanda, zuzen bat plano batekiko zuta da, baldin eta planoko zuzen guztiekiko zuta bada



7.13 irudia

7.2.1 METODOAK

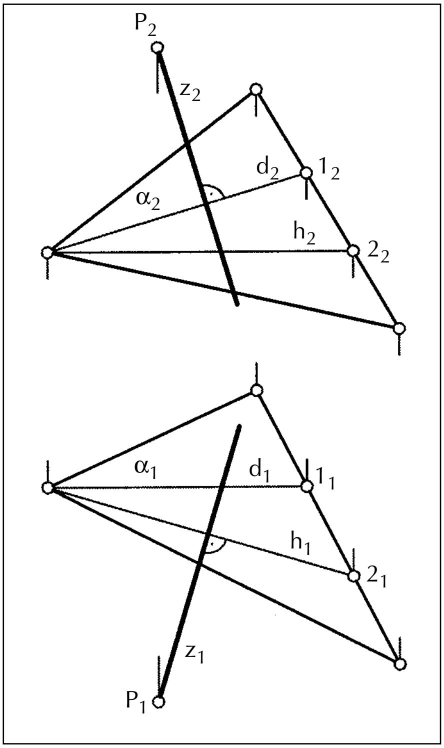
Kanpoko P puntu batetik, α plano batekiko zuta den zuzen bat eraikitzeko, bi metodo erabil daitezke:

7.2.1.1 Eraikuntza zuzena

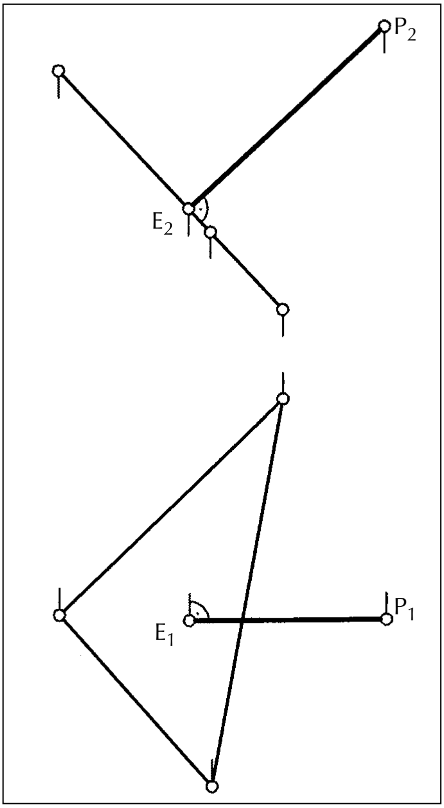
Hiru zuten teoremaren bidez ateratzen da ondoriotzat, goitiko bistan, plano horretako zuzen horizontal guztiekiko zuta izango dela z zuzenaren proiekzio horizontala. Horrexegatik, aurretiko bistan, z zuzenaren proiekzio bertikala planoko frontal guztiekiko zuta izango da (7.14 irudia).

7.2.1.2 Plano-aldaketa baten bitartez

7.15 irudian, planoa proiektatzailea denean, zuzen baten eta plano horren arteko perpendikulartasuna zuzenean irudikatzen da. Planoa zeiharra bada, plano-aldaketa baten bitartez irudika dezakegu posizio egoki horretan.



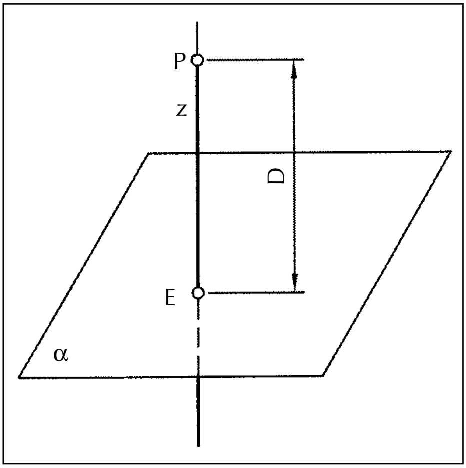
7.14 irudia



7.15 irudia

Plano-aldaketaren bidez, z zuzenaren eta planoaren arteko elkargunea den E puntua ere zehaztuta geratzen da, bai eta PE zuzenkiaren magnitudeak ere, hau da, kanpoko puntutik planorainoko distantzia. Ikus 7.17 irudia.

7.2.2 PUNTU BATETIK PLANO BATERAINOKO DISTANTZIA



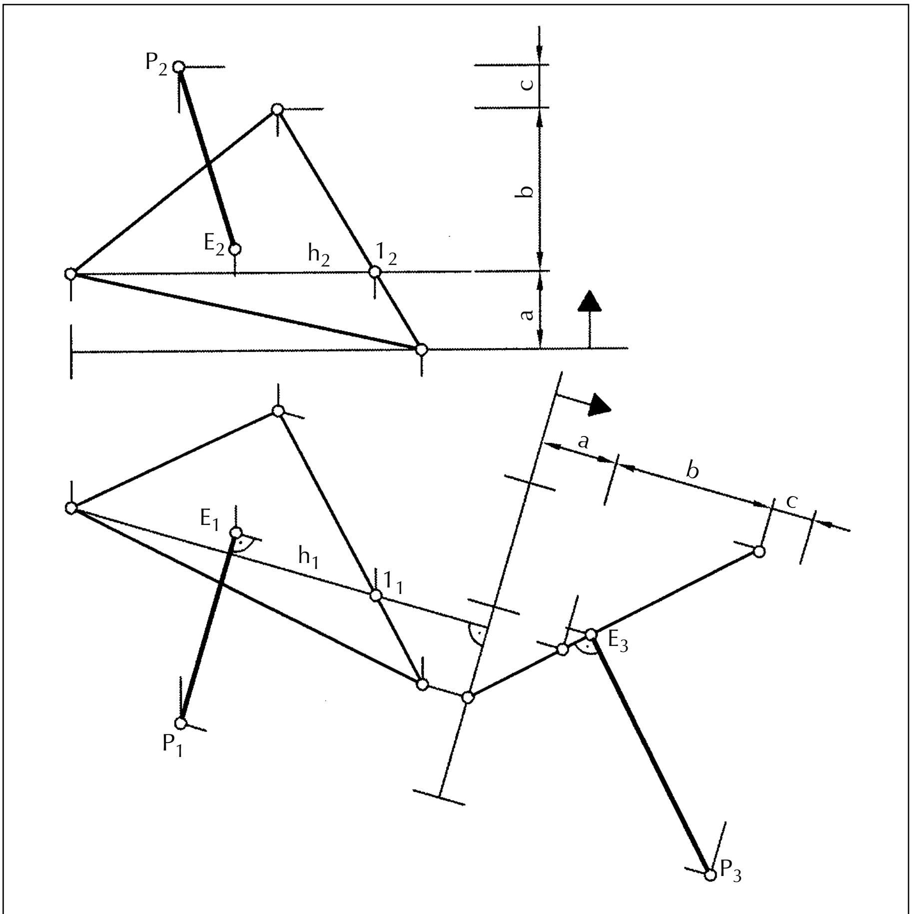
7.16 irudia

7.16 irudian, jarraitu beharreko prozedura orokorra erakusten da. P puntutik α planorainoko distantzia zehazteko, P puntutik planora z zuta marraztu behar da. Zuzenak eta planoa E puntuan ebakitzen du. PE zuzenkia da kalkulatu nahi zen distantzia.

7.2.2.1 Plano aldaketen bitartez

Planoa proiektatzailea denean, 7.15 irudian ikusi dugun bezala, puntuaren eta planoaren arteko distantzia berehala zehatz daiteke.

Planoa zeiharra bada, 7.17 irudia, puntuaren eta planoaren bista laguntzailea aurkitu behar da, plano proiektatzaile bihur dadin. Ondoren, aurreko kasuan bezala jokatuko dugu.



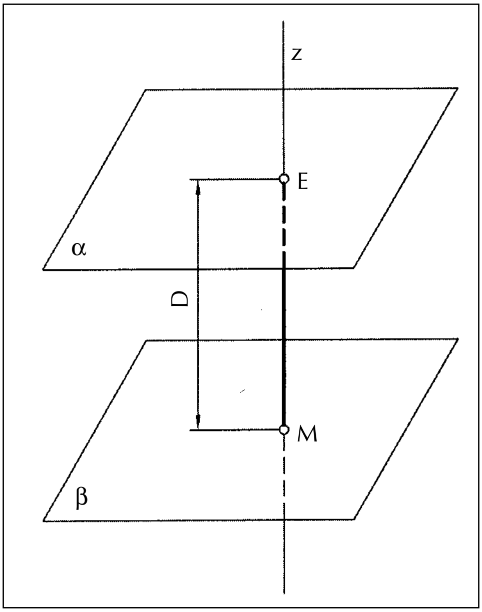
7.17 irudia

7.2.3 BI PLANO PARALELOREN ARTEKO DISTANTZIA

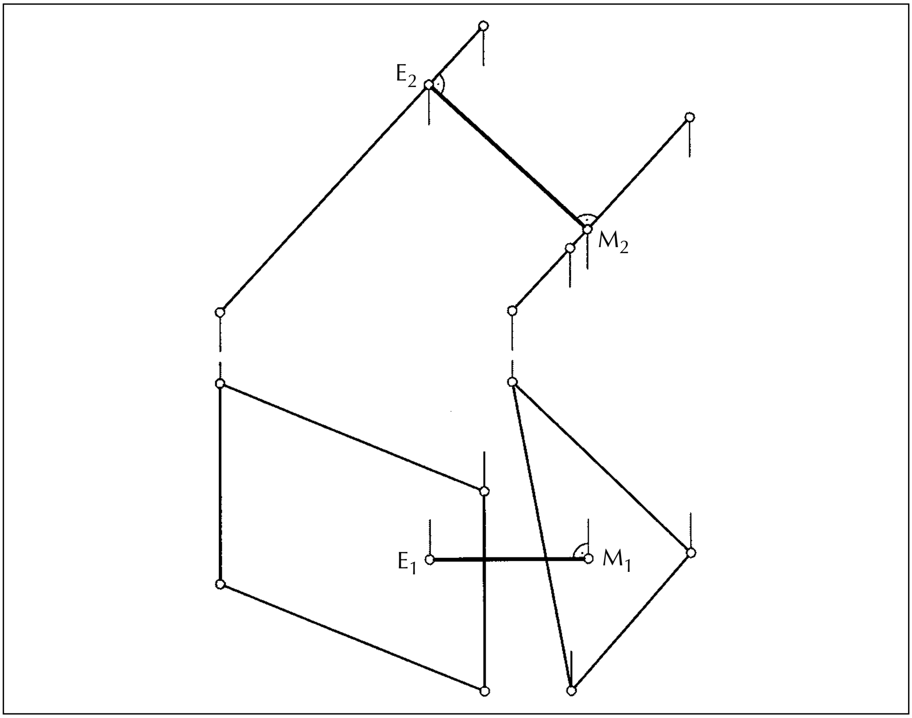
7.18 irudian, jarraitu beharreko prozedura orokorra erakusten da. Bi planoekiko zuta den z zuzena marrazten da, eta bi planoak ebakitzen dituen puntuak zehazten dira. Distantzia EM zuzenkia da.

7.2.3.1 Plano-aldaketen bitartez

Planoak proiektatzaileak direnean azaltzen dute posizio egokia. 7.19 irudian, berehala zehazten da distantzia.

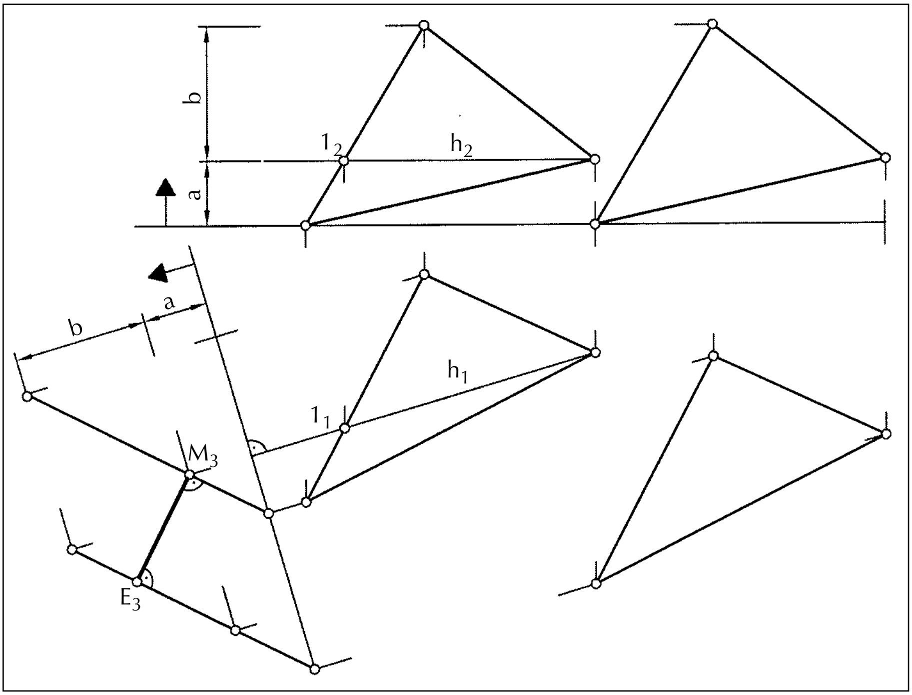


7.18 irudia



7.19 irudia

Planoak proiekzio-planoekiko zeiharrak badira, bista laguntzaile bat aurkitu behar da, proiekzio-plano berriarekiko plano proiektatzaile izan daitezen (7.20 irudia).

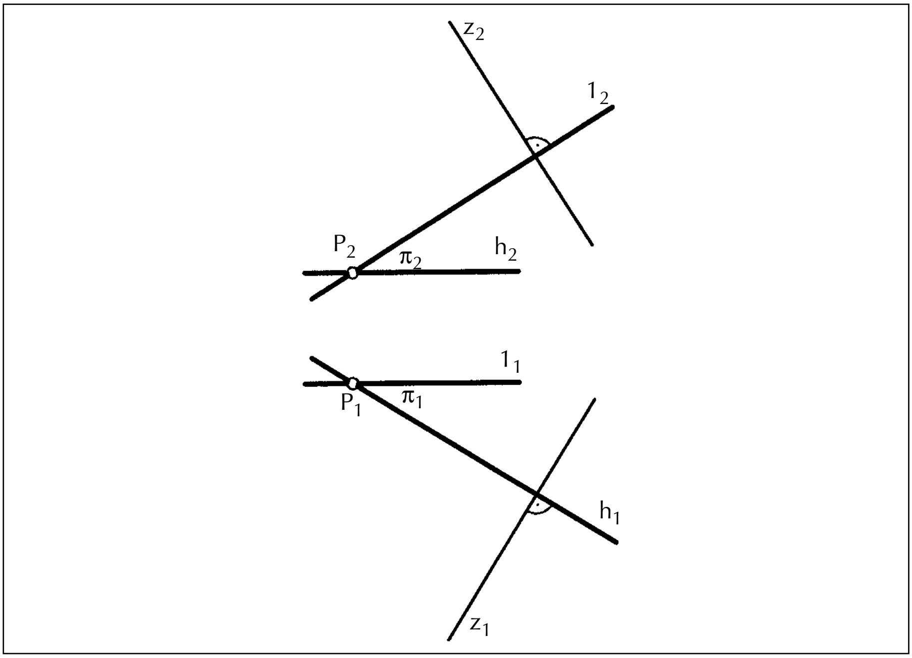


7.20 irudia

7.3 ZUZEN BATEKIKO PLANO ZUTA

Hiru zuten teorema aplikatuta zehazten dira π planoaren zuzen horizontalaren eta zuzen frontalaren proiekzioak, P puntutik pasatzen direnak.

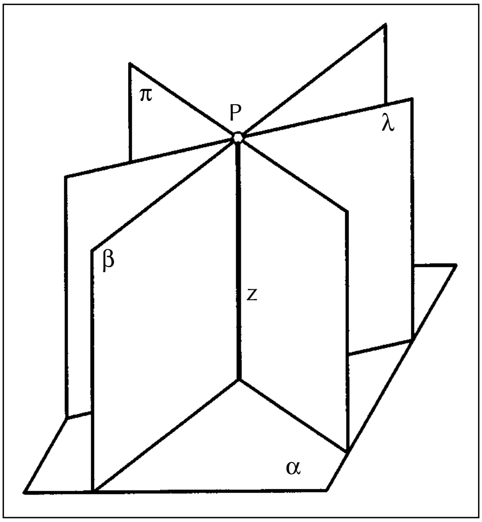
7.21 irudian, zuzen frontal eta horizontal horien proiekzioak eta z-rekiko duten posizio erlatiboa azaltzen dira. h_1 eta z_1 proiekzioak zutak dira; f_2 eta z_2 ere zutak dira; f_1, berriz, frontala da, eta h_2 horizontala. f-ren eta h-ren arteko elkarguneak P puntuan π planoa definitzen du.



7.21 irudia

7.4 PLANO ZUTAK

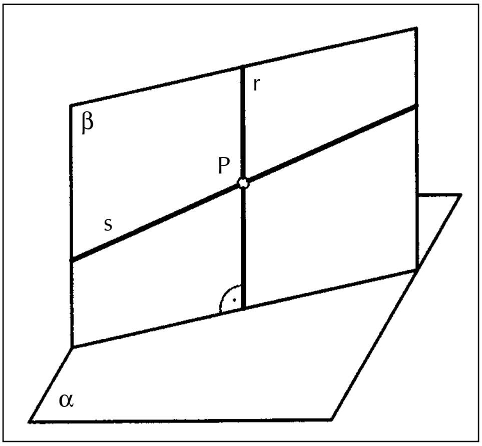
Bi plano elkarrekiko zutak direla esaten da plano batek bestearekiko gutxienez zuzen zut bat duenean. 7.22 irudian, P puntutik α planora β planoa nola marraztu erakusten da. P puntutik α planoarekiko zuta den z zuzena marrazten da. Horrenbestez, z zuzenetik igarotzen diren plano guztiak zutak dira α planoarekiko. Beste baldintzarik ezartzen ez bada, problemak infinitu soluzio ditu.



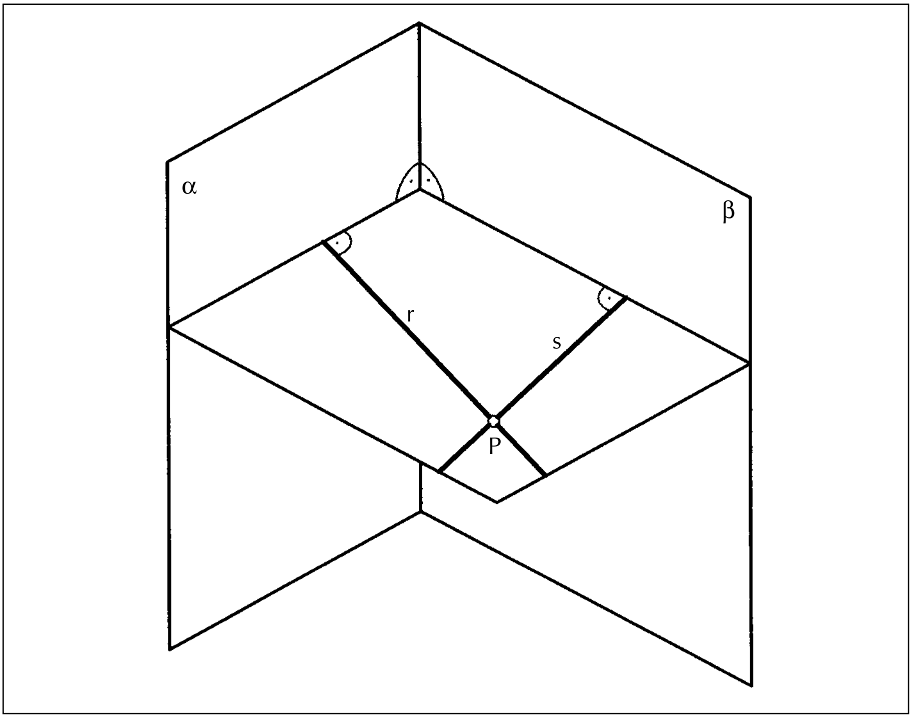
7.22 irudia

7.4.1 PLANO JAKIN BATEKIKO PLANO ZUTA S ZUZENETIK IGAROTA

Zuzen horretatik, plano jakin batekiko zuta den plano bakar bat igarotzen da. 7.23 irudian, plano hori marrazteko, s zuzeneko P puntu bat hartzen da, eta handik α planoarekiko r zuta marrazten da. r eta s zuzenek α-rekiko zuta den β planoa definitzen dute.



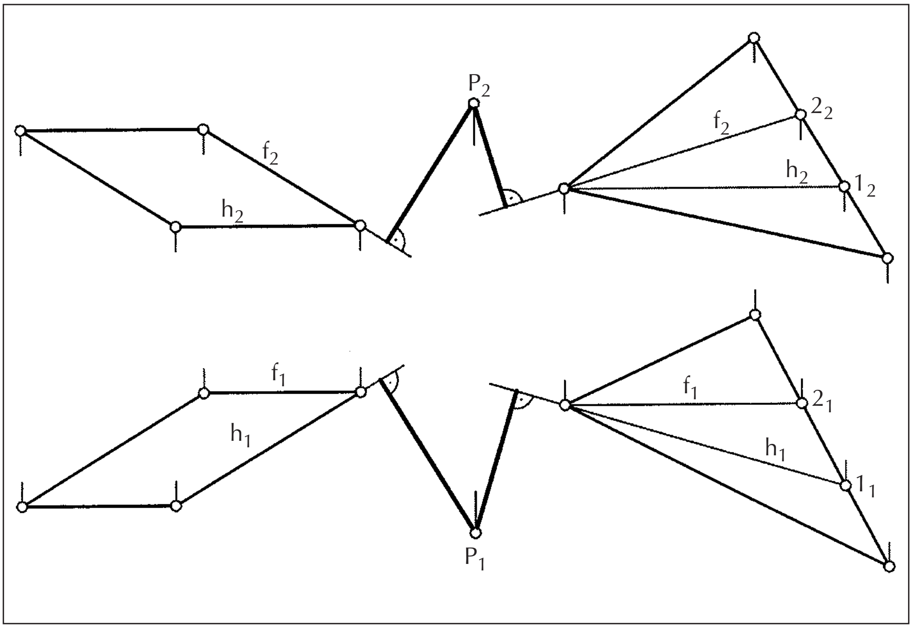
7.23 irudia



7.24 irudia

7.4.2 α ETA β PLANO JAKINEKIKO PLANO ZUTA P PUNTUTIK IGAROTA

7.24 irudian espazioan eta 7.25 irudian diedrikoan, P puntutik, α eta β plano-ekiko zutak diren r eta s zuzenak marrazten dira, hurrenez hurren. Bi zuzen horien bidez definitutako planoa aurrekoekiko zuta da.



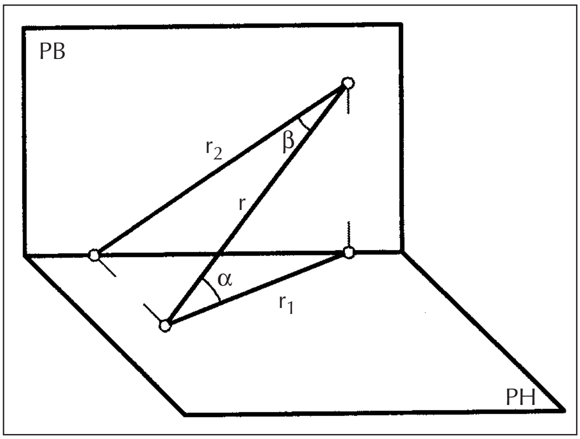
7.25 irudia

8

Angeluak

8.1 ZUZEN BATEK PROIEKZIO-PLANO BAKOITZAREKIN ERATZEN DUEN ANGELUA

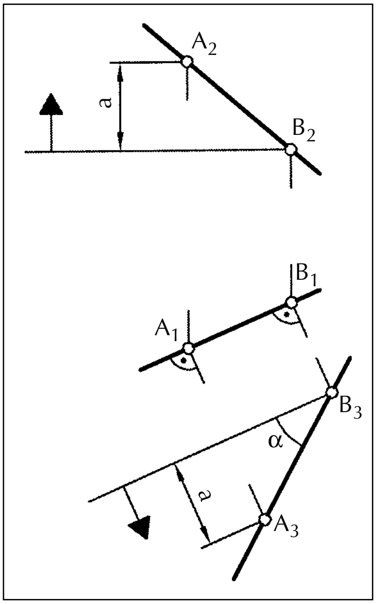
Zuzen batek proiekzio-plano horizontalarekin eratzen duen α angelua eta bere proiekzio horizontalarekin eratzen duena bera da. Modu berean, zuzenak plano bertikalarekin eratzen duen β angelua eta bere proiekzio bertikalarekin eratzen duena bera da. Ikus 8.1 irudia.



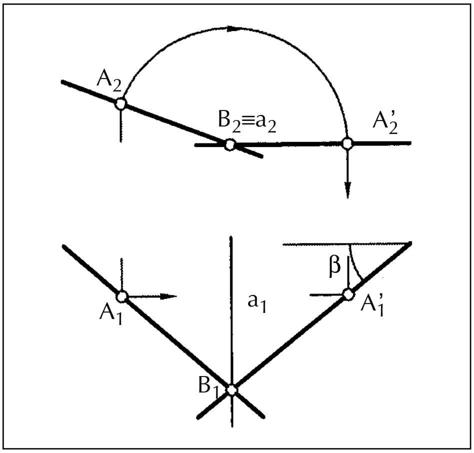
8.1 irudia

Zuzenki baten egiazko magnitudea irudikatzen dugunean, proiekzio-plano batekin eratzen duen angeluaren egiazko magnitudea ere irudikatzen dugu.

8.2 irudian, plano-aldaketen bitartez, AB zuzenkiaren egiazko magnitudea eta proiekzio-plano horizontalarekin eratzen duen α angelua erakusten dira. 8.3 irudian, berriz, biraketa baten bitartez, zuzenkiaren egiazko magnitudea eta proiekzio-plano bertikalarekin eratzen duen β angelua ikus daitezke.



8.2 irudia

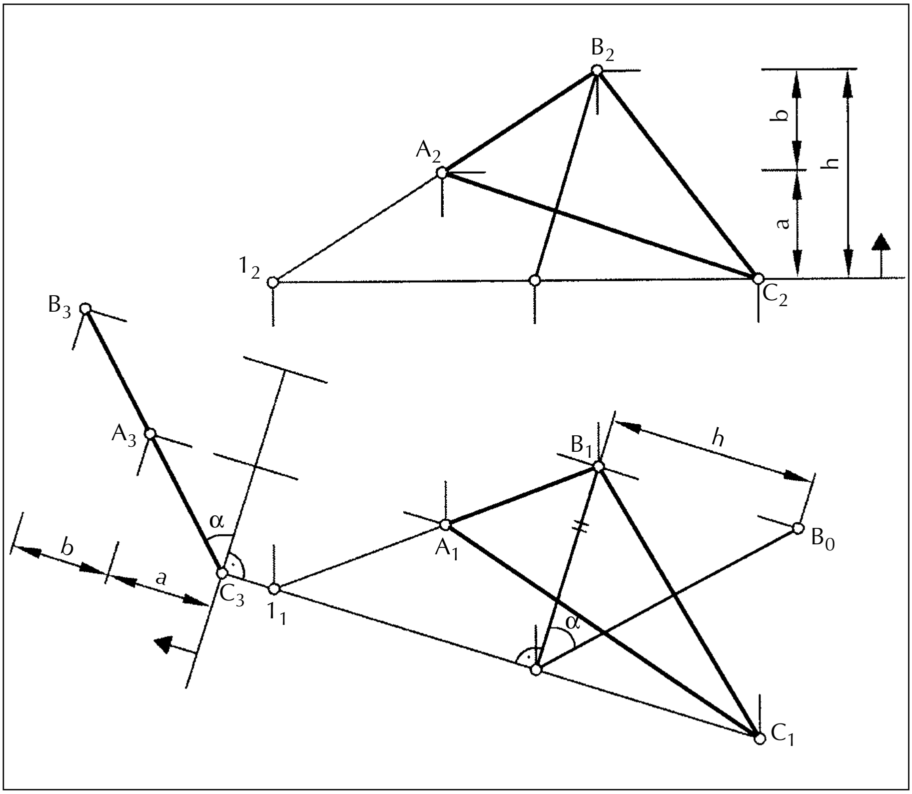


8.3 irudia

8.2 PLANO BATEK PROIEKZIO-PLANO BAKOITZAREKIN ERATZEN DUEN ANGELUA

Plano batek proiekzio-plano horizontalarekin eratzen duen α angelua eta malda handieneko lerroak proiekzio-plano horizontalarekin eratzen duena bera da. Planoa proiektatzaile bertikaleko posizioan badago, proiekzio bertikalean irudikatzen da angeluaren egiazko magnitudea.

8.4 irudian erakusten da nola lortu ABC triangeluak proiekzio-plano horizontalarekin eratzen duen α angeluaren egiazko magnitudea. Adibide horretan, bi

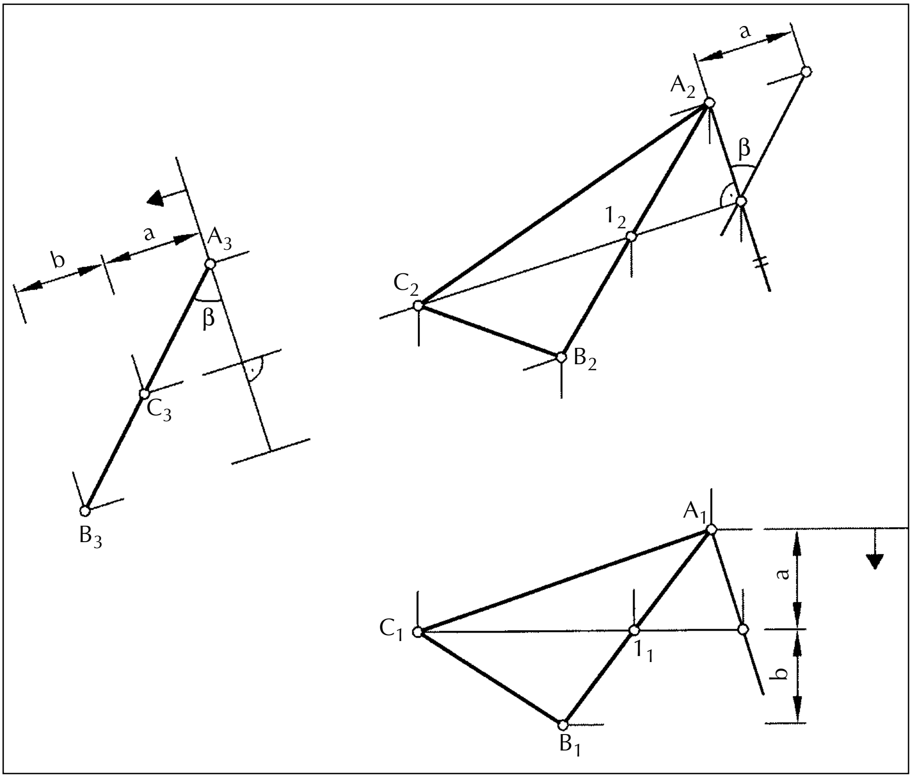


8.4 irudia

metodo erabili dira: batean, triangeluaren aurretiko bista lagungarri bat erabili da; bestean, m.h.l.-aren egiazko magnitudea lortu da, eta, horrekin batera, α angeluaren benetako magnitudea.

Plano batek proiekzio-plano bertikalarekin eratzen duen β angelua eta inklinazio handieneko lerroak proiekzio-plano bertikalarekin eratzen duena bera da. Planoa proiektatzaile horizontaleko posizioan badago, proiekzio horizontalean irudikatzen da angeluaren egiazko magnitudea.

8.5 irudian erakusten da nola lortu ABC triangeluak proiekzio-plano bertikalarekin eratzen duen β angeluaren egiazko magnitudea. Adibide horretan ere, bi metodo erabili dira: batean, triangeluaren goitiko bista lagungarri bat erabili da; bestean, i.h.l-aren egiazko magnitudea lortu da, eta, honekin batera, β angeluaren benetako magnitudea.



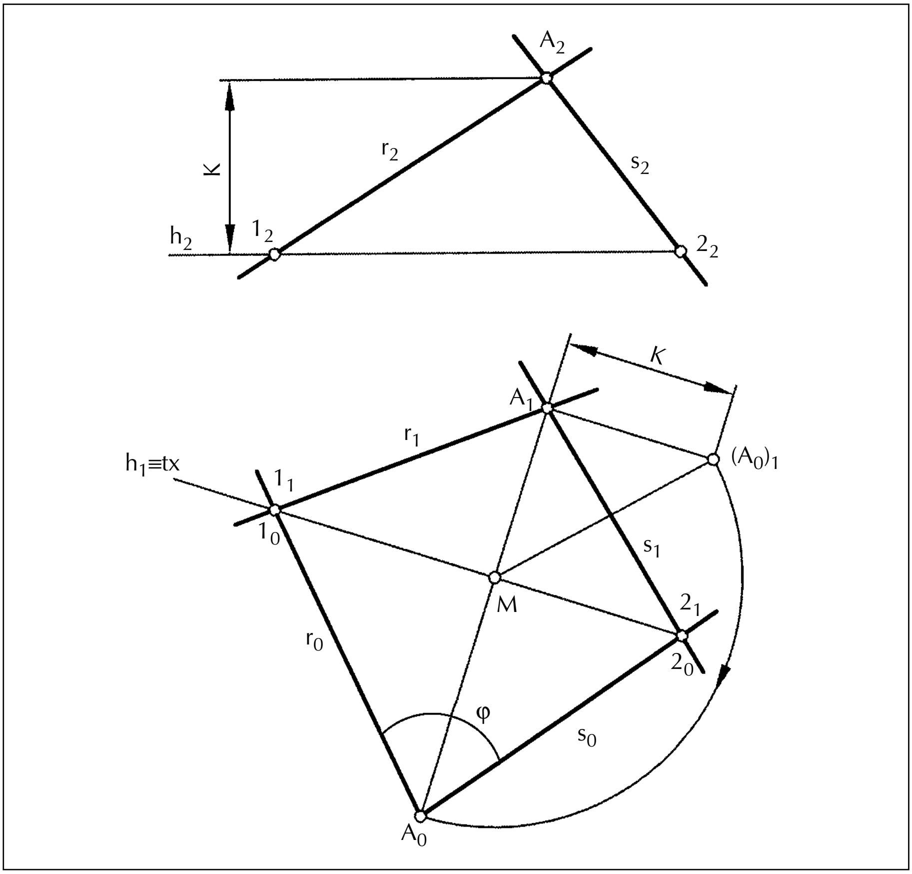
8.5 irudia

8.3 BI ZUZENEN ARTEKO ANGELUA

Elkar ebakitzen duten bi zuzenek plano bat definitzen dute. Plano hori proiekzio-plano batera eraisten badugu, angelua egiazko magnitudean izango dugu.

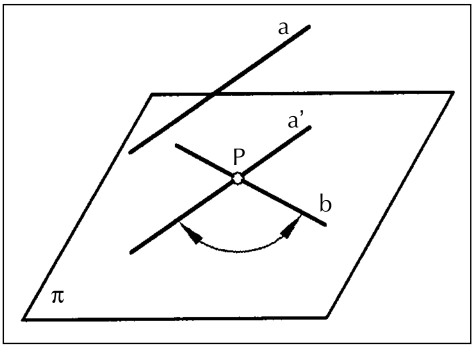
8.6 irudian, r eta s zuzenek zehaztutako π planoaren eraispena ageri da.

Zuzenak proiekzio-plano horizontalera eraisten dira, bandatzat h_1 proiekzioa harturik eta 1_1–2_1 puntuak bikoitzak izanik. A puntua eraitsita, A_0 lortzen da; eta hori 1_0–2_0-rekin loturik, r_0 eta s_0 zuzen eraitsiak lortzen dira. φ angelua da kalkulatu nahi genuena.



8.6 irudia

8.7 irudian, elkarrekin gurutzatzen diren a eta b zuzenen arteko angelua lortzeko, zuzen bateko puntu batetik, beste zuzenarekiko paraleloa den zuzen bat eraikitzen da. Horiek elkar ebakitzen dutenez, plano bat zehaztuko dute. Hori egin ondoren, 8.6 irudian bezala jokatuta jakingo dugu zer angelu eratzen duten.



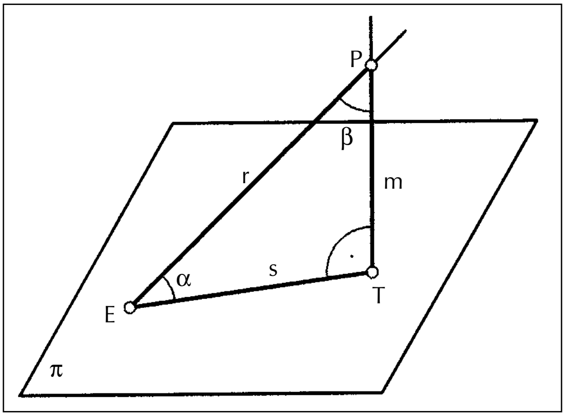
8.7 irudia

8.4 ZUZENAREN ETA PLANOAREN ARTEKO ANGELUA

Zuzen batek eta plano batek eratzen duten angelua, eta zuzen hori plano horretan proiektatzean bien artean eratzen dena bera da.

8.4.1 LEHEN PROZEDURA

8.8 irudian, espazioan, π planoa eta r zuzena ditugu. Zuzeneko P puntutik, π planoarekiko zuta den m zuzena marraztuko dugu. r eta m zuzenek osatzen duten β angelua aurkitu nahi genuen α angeluaren osagarria da. Kontuan hartu PET triangelua zuzena dela.

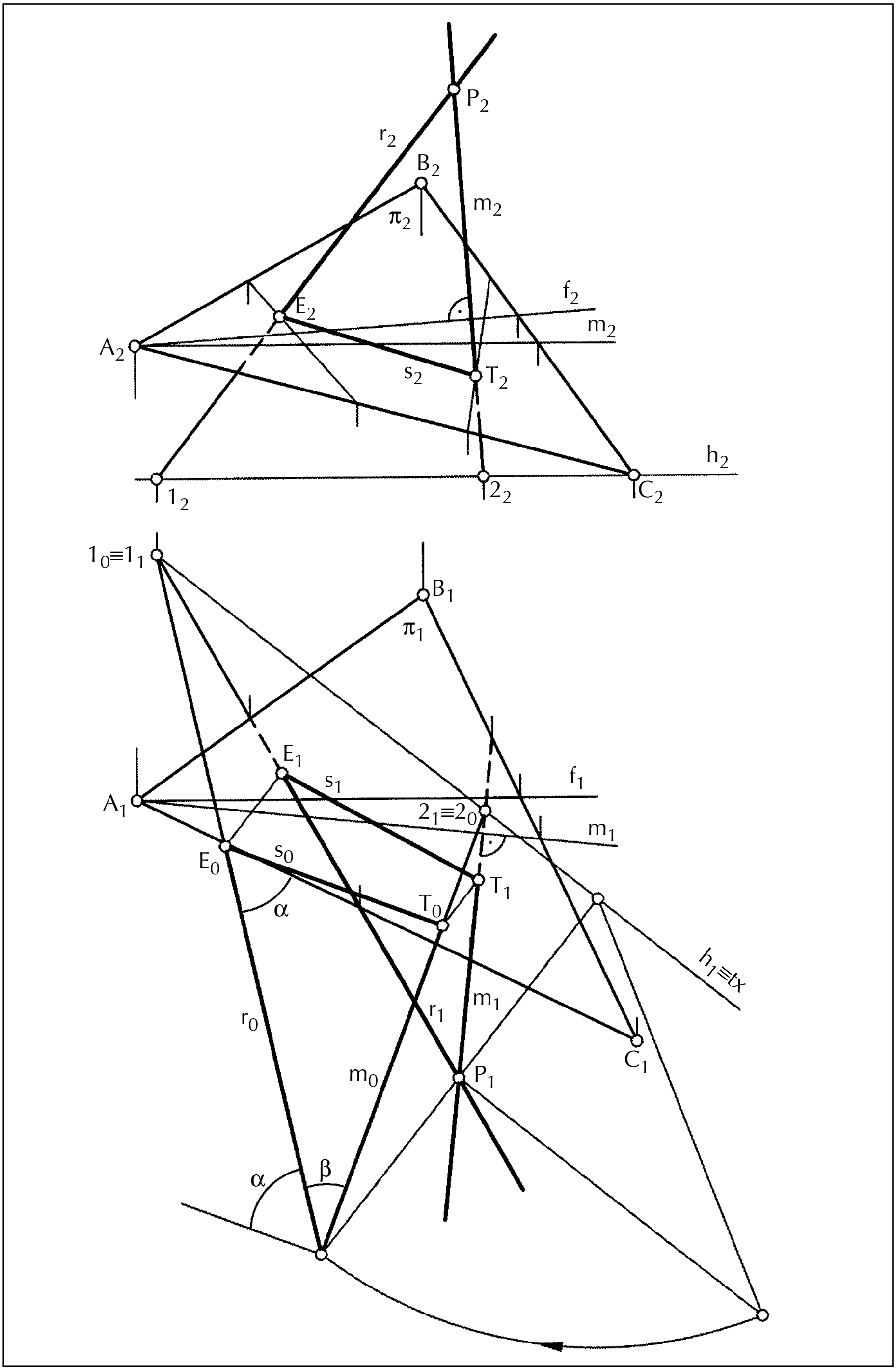


8.8 irudia

8.4.2 BIGARREN PROZEDURA

8.8 irudira itzuliz, angeluaren posizioa eta magnitudea aurkitzeko, r eta π planoaren arteko E elkargunea eta m eta π-ren arteko T puntua lortzen dira. E eta T puntuak lotzen dituen s zuzena proiekzio ortogonala da r zuzenaren π planoarekiko. r eta s zuzenek eratzen duten α angelua kalkulatu nahi genuen.

8.9 irudian, sistema diedrikoan ebazten da aurrez ikusitako bi metodoak erabiliz. Izan bitez r zuzena eta ABC triangeluak zehaztutako π planoa. r zuzeneko P puntutik π planoarekiko m zuta marrazten da. r eta m zuzenen arteko angelua 8.6 irudian adierazi den bezala lortzen da. Banda h_1 da eta P puntuaren eraispena P_0. Azken hori bandako 1_0 eta 2_0 puntuekin lotuta, r_0 eta m_0 zuzen eraitsiak lortzen dira eta, ondorioz, baita β angelua ere. β angeluaren osagarria α angelua da, zuzenak eta planoak osatzen dutena, hain zuzen ere.


P2
r2
B2
m2
π2
f2
E2
m2
A2
s2
T2
h2
12
22
C2
10≡11
B1
π1
E1
s1
f1
A1
21≡20
m1
s0
E0
T1
α
T0
h1≡tx
r0
r1
m1
C1
m0
P1
α
β

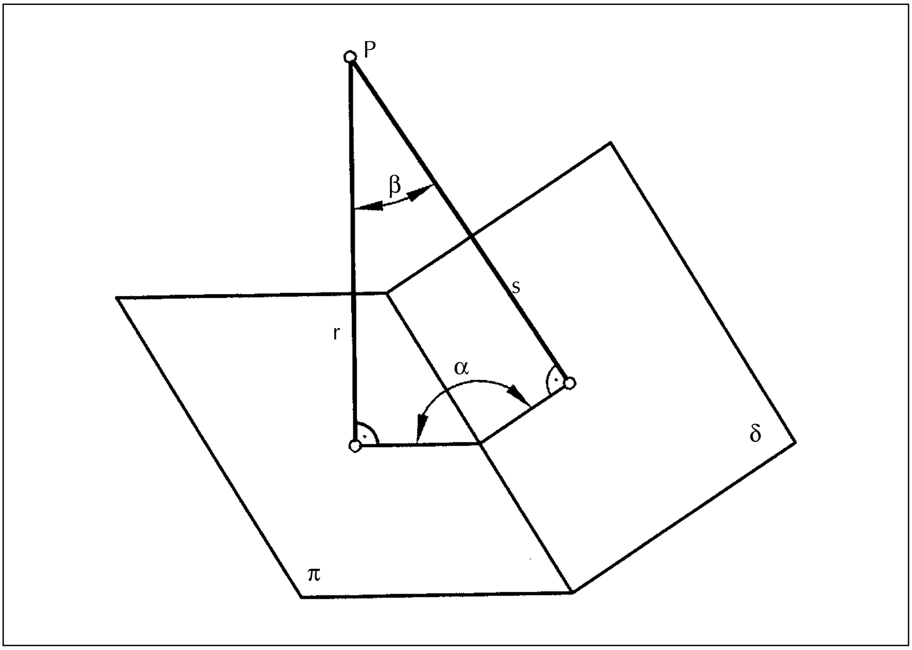
8.9 irudia

Irudian, era berean, r zuzenaren eta π planoaren arteko E elkargunea eta m eta π-ren arteko T puntua mugatu dira. E eta T puntuek s zuzenaren proiekzioak zehazten dituzte; E_0 eta T_0 puntu eraitsiek, berriz, s zuzenaren s_0 zuzen eraitsia. r_0 eta s_0 proiekzioek eratzen duten α angelua, posizioz eta magnitudez, r zuzenak eta π planoak eratzen dutena da.

8.5 BI PLANOREN ARTEKO ANGELU DIEDROA

8.5.1 LEHEN PROZEDURA

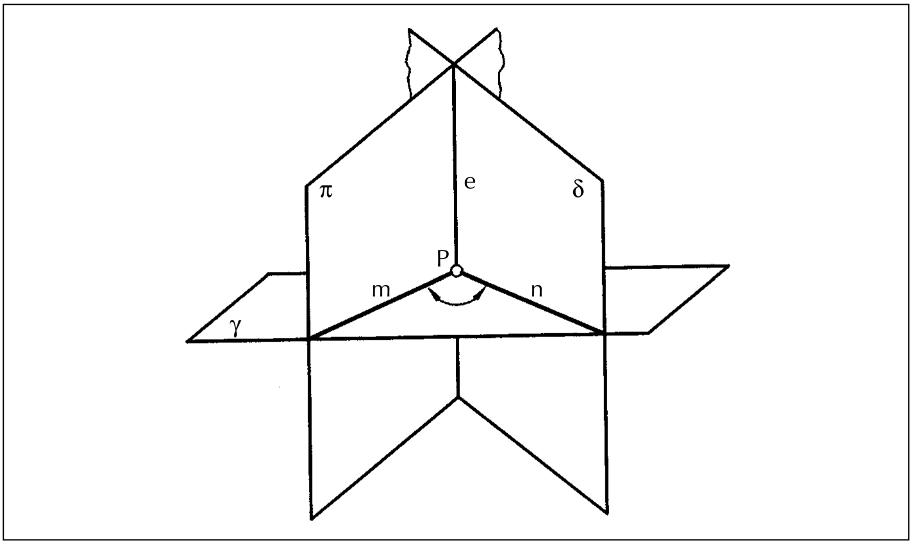
Prozedura honen bidez, angeluaren magnitudea zehazten da, baina ez posizioa. 8.10. irudian, espazioko edozein P puntutik, π eta δ planoekiko, hurrenez hurren, zutak diren r eta s zuzenak marraztuko ditugu. Bi zuzen horiek eratzen duten β angelua da bi planoek eratzen duten α angeluaren betegarria. Eta hori kalkulatu nahi zen.



8.10 irudia

8.5.2 BIGARREN PROZEDURA

Bi planoen arteko angeluaren magnitudea eta posizioa aurkitzeko erabiltzen da. 8.11 irudian, espazioan, erakusten da nola egin. Lehendabizi, π eta δ planoen arteko e elkargunea aurkitzen da. Ondoren, elkarguneko edozein P puntutik, e elkargunearekiko zuta den γ planoa marraztuko dugu. Horrela lortzen dira plano horrek aurreko bi planoekin eratzen dituen m eta n elkarguneak. Bi zuzen horien arteko angelua da bi planoek eratzen dutena.

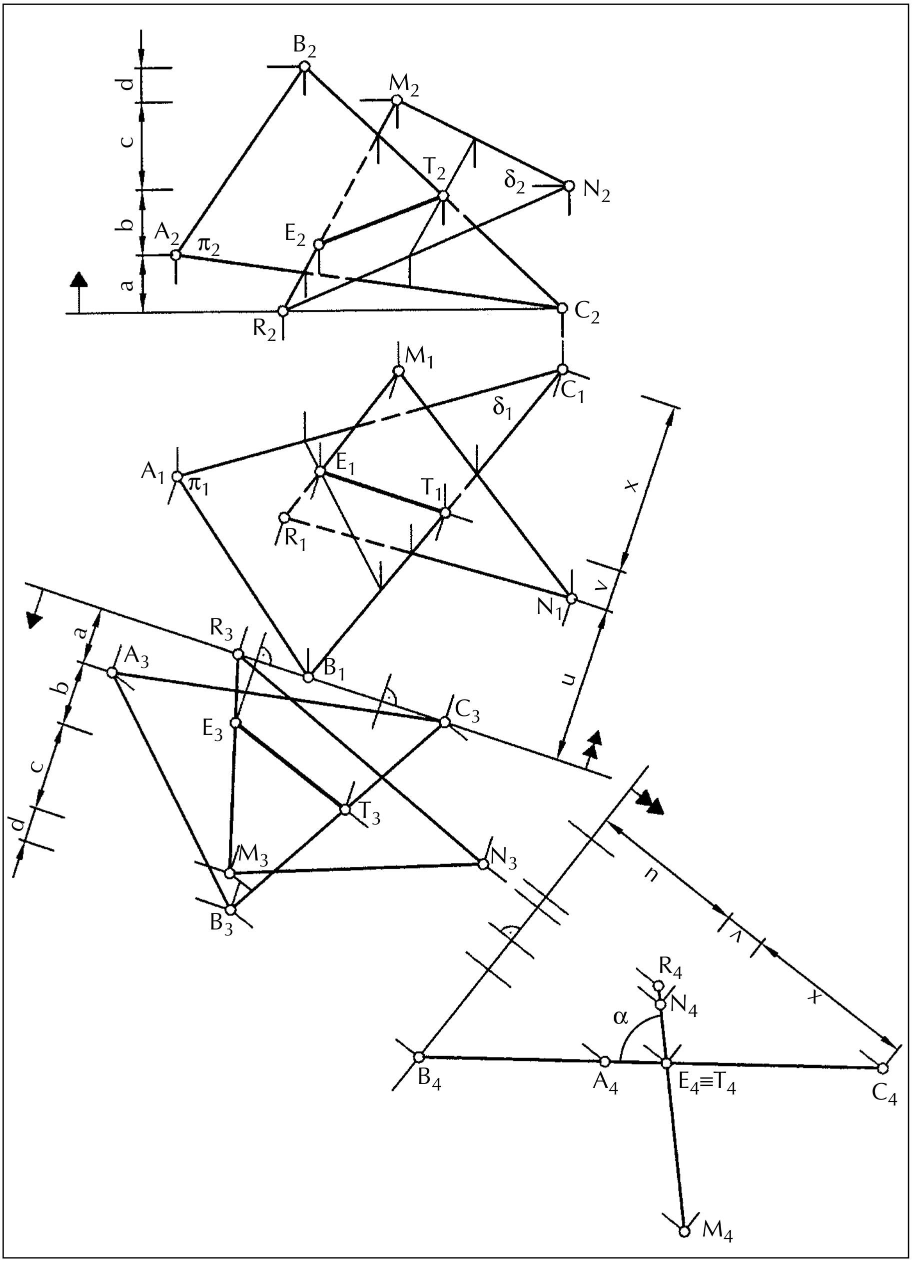


8.11 irudia

8.5.3 HIRUGARREN PROZEDURA. PLANO-ALDAKETEN BITARTEZ

π eta δ planoek eratutako angelua lortzeko, lehendabizi bi planoen arteko elkargunea aurkitu behar da. Bi plano-aldaketen bidez, elkargune hori proiekzio--plano batekiko zut ipini behar da. Aldaketa horietan elkargunearekin batera arrastatutako bi planoak proiektatzaileak izango dira, eta angelua egiazko magnitudean ikusi ahal izango da zuzenean.

8.12 irudian, sistema diedrikoan, bi planoen arteko ET elkargunea lortu ondoren, ET zuzenkia zuzen frontal bihurtzen da lehendabiziko plano-aldaketaren bitartez. Gero, bigarren plano-aldaketa baten bidez, aurreko zuzen frontala zuzen bertikal bihurtuko dugu. Horrekin batera, hasiera batean zeiharrak ziren planoak proiektatzaile bihurtu dira. Bigarren bista lagungarri horretan, bi planoen arteko α angelua egiazko magnitudean zehazten da.

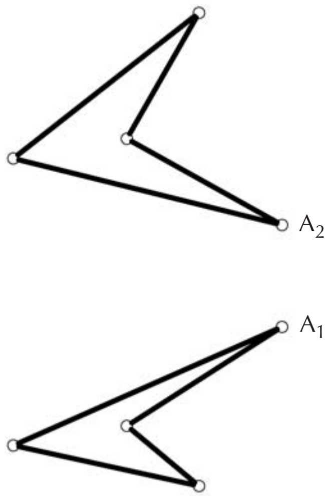


8.12 irudia

Ariketa ebatziak

1. ariketa

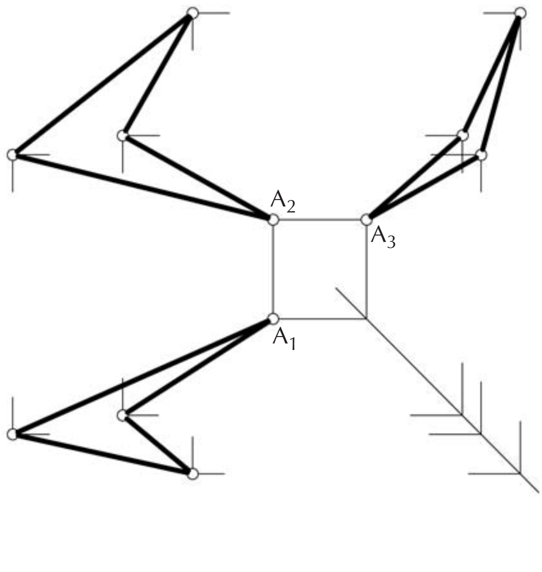
Irudiaren aurretiko eta goitiko bistak ezagututa, lortu albotikoa.



Ebazpena

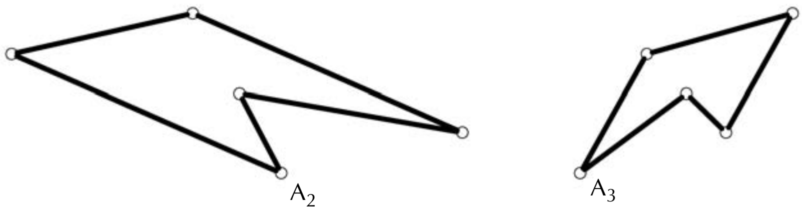
Ariketa honetan, 3. bista aplikatuko dugu.

Lehendabizi, lerro laguntzailea marraztuko dugu nonahi. Hori bai, lerro horizontal batekin 45º-ko angelua osatu behar du. Gero, A_2 eta A_1 proiekzioetatik abiatuz, erreferentzia-lerroak marraztuko ditugu. Elkartzen diren puntuan dugu A_3 proiekzioa. Berdin jokatuko dugu beste puntuekin ere.



2. ariketa

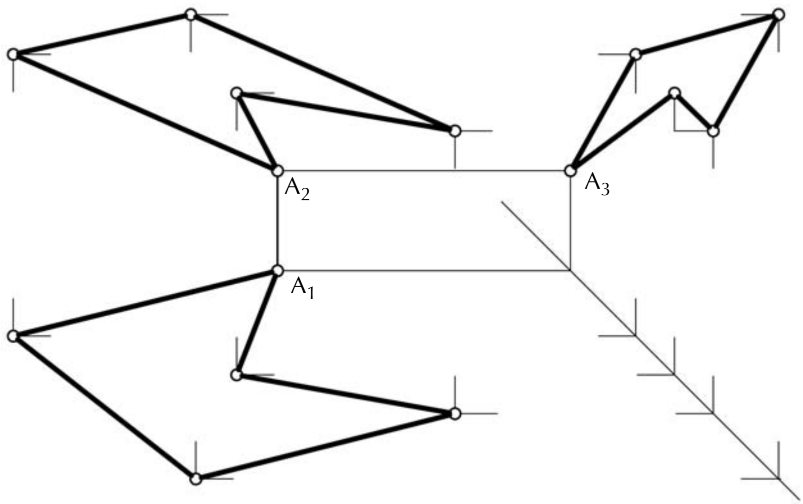
Irudiaren aurretiko eta albotiko bistak ezagututa, lortu goitikoa.



Ebazpena

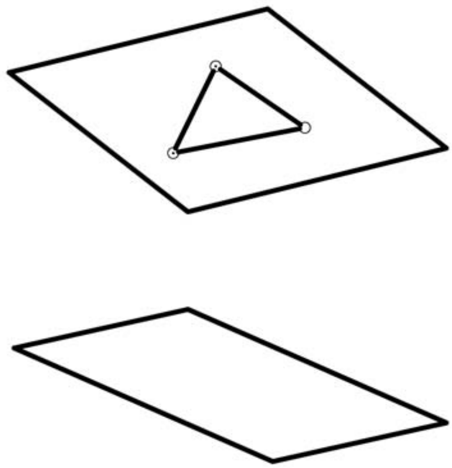
Ariketa honetan, 3. bista aplikatuko dugu.

Lehendabizi, lerro laguntzailea marraztuko dugu nonahi. Hori bai, lerro horizontal batekin 45º-ko angelua osatu behar du. Gero, A_2 eta A_1 proiekzioetatik abiatuz, erreferentzia-lerroak marraztuko ditugu. Elkartzen diren puntuan dugu A_3 proiekzioa. Berdin jokatuko dugu beste puntuekin ere.



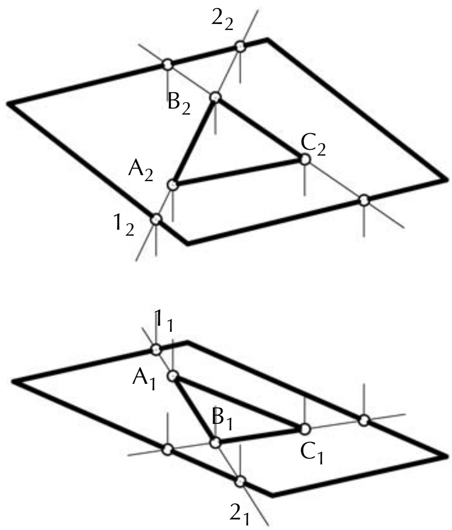
3. ariketa

Lortu laukian dagoen triangeluaren goitiko bista.



Ebazpena

Barnekotasun-erlazioa aplikatuko dugu. Horretarako, alde bat –AB adibidez– luzatuko dugu, harik eta laukiaren aldeak ukitu arte. AB aldearen luzapenak 1 eta 2 puntuetan ukituko ditu laukiaren aldeak. Puntu horiek proiekzio horizontalera eramango ditugu. Hartara, horiek lotuta, AB aldearen luzapenaren proiekzio horizontala lortuko dugu. Gero, A eta B puntuak eramango ditugu proiekzio horretara. Azkenik, C puntua eramatea bakarrik falta zaigu. Horretarako, beste alde bat luzatu behar dugu –AC adibidez–, eta, gero, berdin jokatuko dugu.



4. ariketa

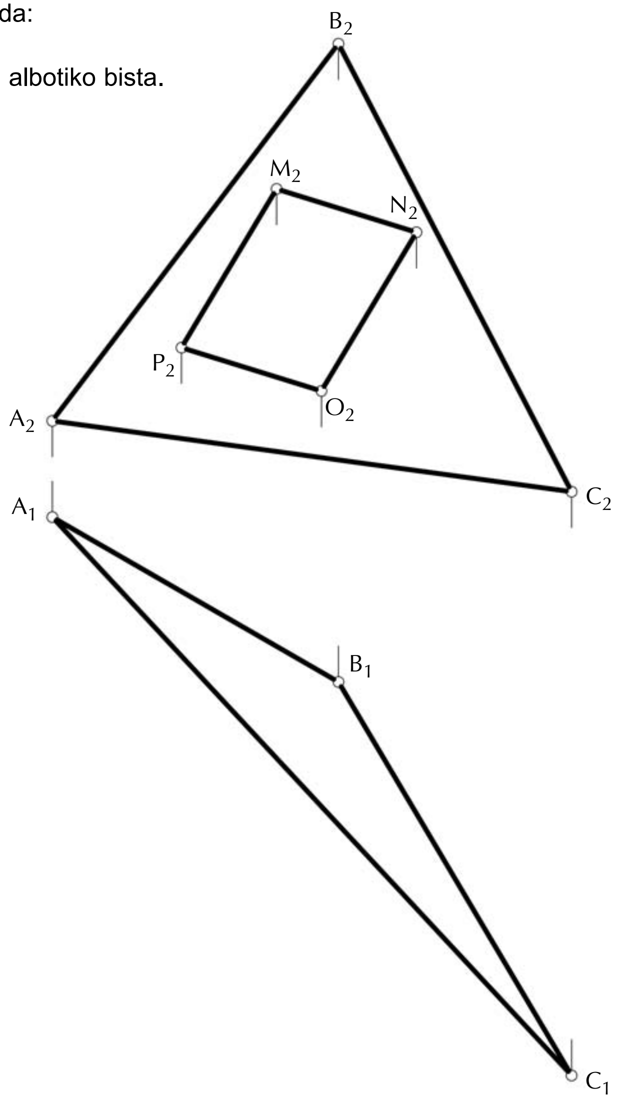
Hauek ditugula:

– ABC triangelua

– Triangelu barnean dagoen MNOP laukiaren aurretiko bista

Hau lortu behar da:

MNOP laukiaren albotiko bista.

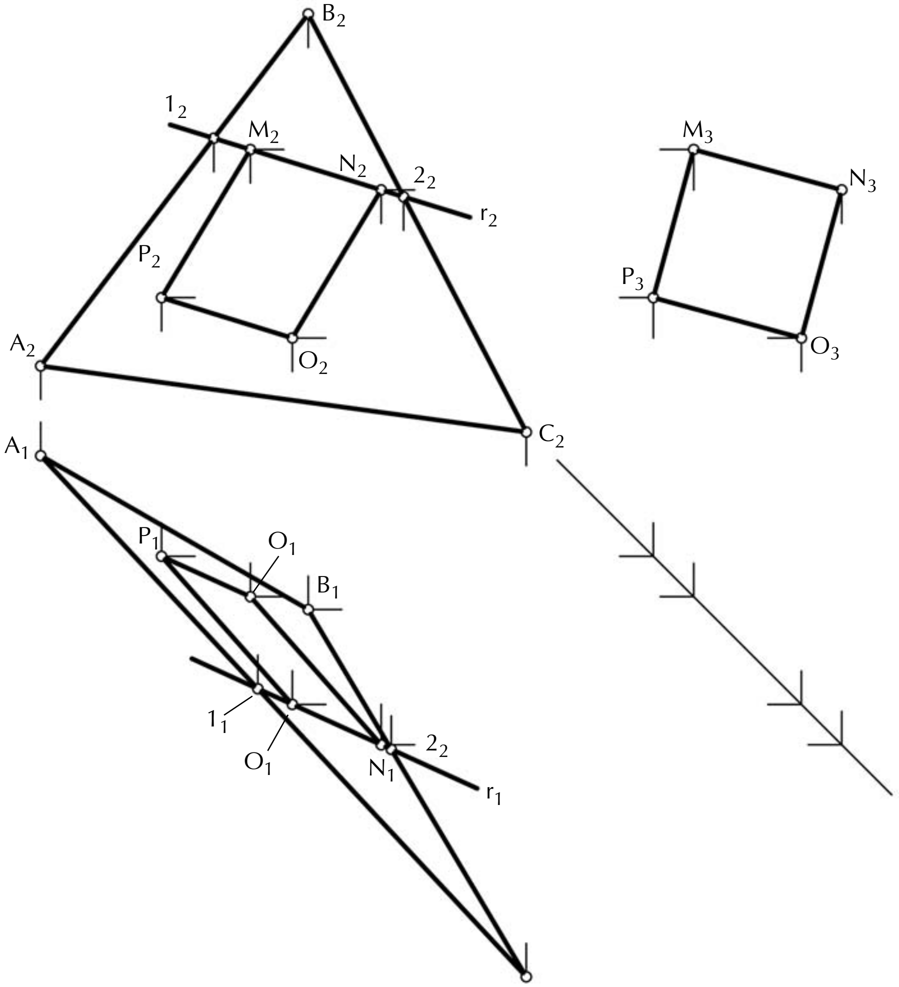


Ebazpena

Barnekotasun-erlazioa eta 3. bista menderatu behar ditugu ariketa hau ebazteko.

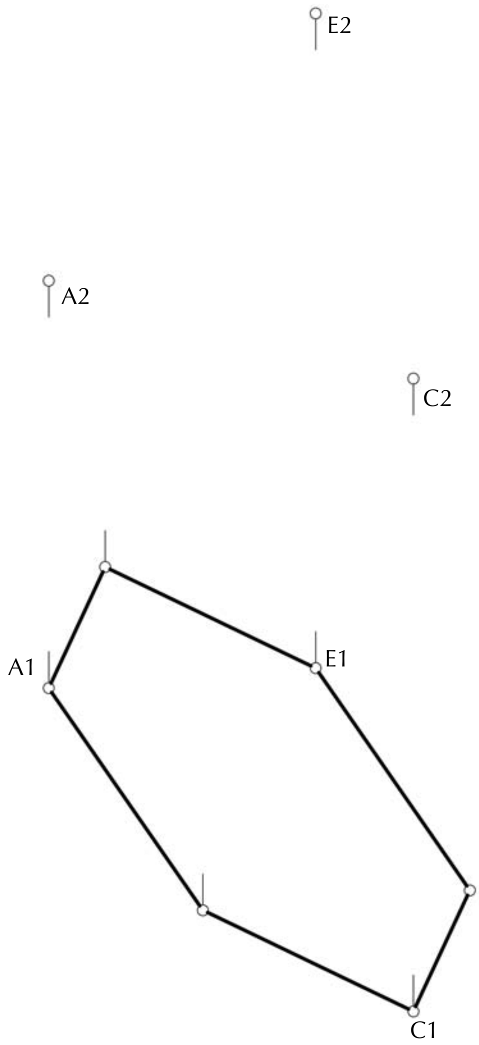
Lehendabizi, barnekotasuna erabilita, laukiaren goitiko bista egingo dugu. Adibidez, M eta N puntuen goitiko bista lortzeko, r zuzen laguntzailea erabiliko dugu. Zuzen laguntzailearen goitiko bista lortzeko, triangeluan dauden 1 eta 2 puntuez baliatuko gara. Behin 1_1 eta 2_1 lortuta, r_1 zehaztuko dugu, eta han izango dira M_1 eta N_1. Gauza bera egin behar dugu P eta O puntuen proiekzio horizontalak lortzeko.

Gero, laukiaren albotiko bista marraztuko dugu, 3. bista aplikatuta.



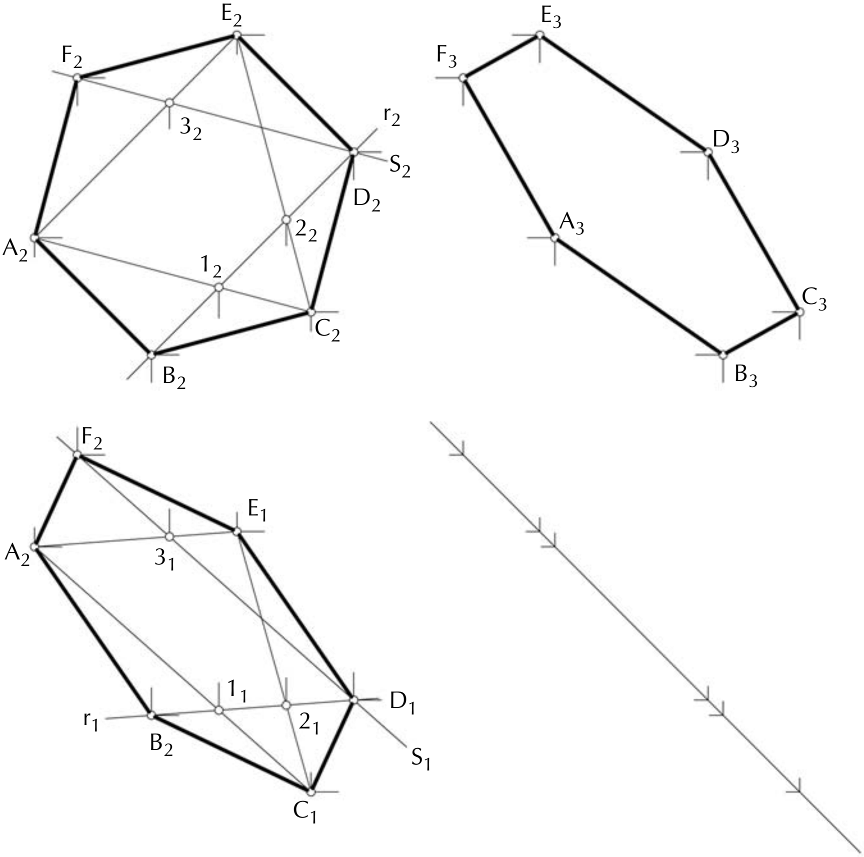
5. ariketa

Hexagonoaren goitiko bista eta A, C eta E puntuen aurreitikoa ezagutzen dira. Osatu hexagonoaren aurreitiko bista eta marraztu albotikoa.



Ebazpena

Ariketa hau ebazteko, triangelu laguntzaile bat erabiliko dugu. Ezagutzen ditugun puntuak proiekzio horizontalean lotuko ditugu, eta gero proiekzio bertikalean. Ondoren, barnekotasun-erlazioa aplikatuko dugu. Adibidez, B eta D puntuak lotuko ditugu r zuzenaren bidez. Zuzenaren proiekzio bertikala 1 eta 2 puntu laguntzaileak erabilita lortuko dugu. Lortu dugun azken r_2 proiekzioan B_2 eta D_2 puntuak ditugu. F_2 proiekzioa lortzea falta zaigu. Horretarako, s zuzen laguntzailea erabiliko dugu. Lehendabizi, s_1 trazatuko dugu F_1 eta D_1 proiekzioetatik. Proiekzio bertikala (s_2) lortzeko, 3 puntua erabiliko dugu.



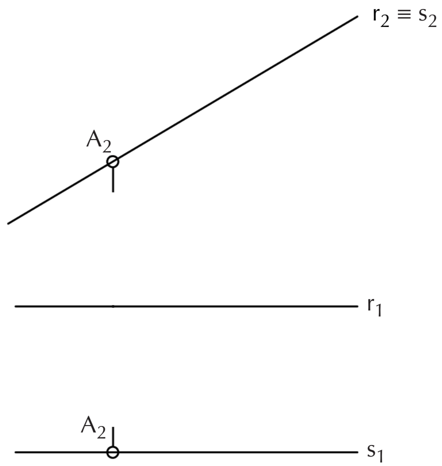
6. ariketa

Marraztu karratu baten 3 proiekzioak datu hauek ezagututa:

– d aldea s zuzenean dago eta A puntua karratuaren erpin bat da; beste erpina eskuinean gelditzen da.

– aurkako b aldea r zuzenean dago.

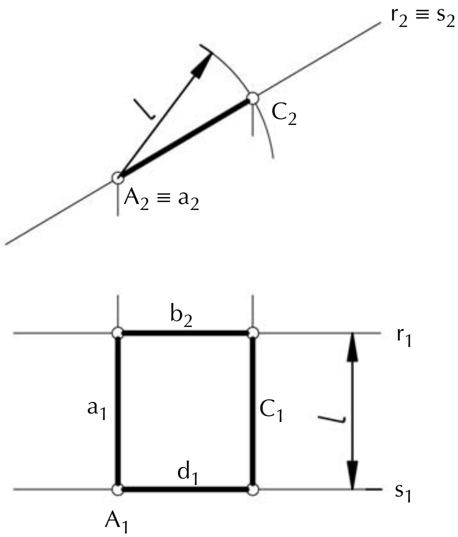
– a eta c aldeak punta-zuzenkiak dira.



Ebazpena

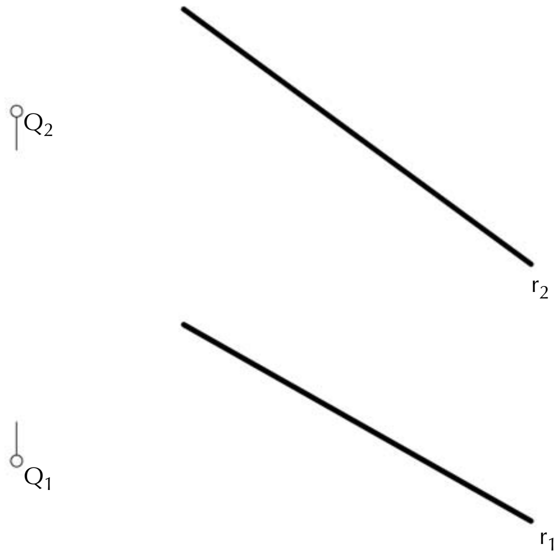
Ariketa hau ebatzi ahal izateko, zuzenaren alfabetoa menderatu behar dugu.

Batetik, A puntutik a zuzenkia trazatu behar dugu, puntakoa dela eta r zuzenean amaitu behar duela jakinda. Punta-zuzenak proiekzio horizontalean benetako magnitudean daude. Horri esker, aldearen “l” luzera kalkula dezakegu. Bestetik, r eta s zuzenak, aurrez aurrekoak izanik, proiekzio bertikalean benetako magnitudean daude. Hala, “l” neurriarekin arku bat trazatuko dugu, b eta d zuzenkiak mugatzeko.



7. ariketa

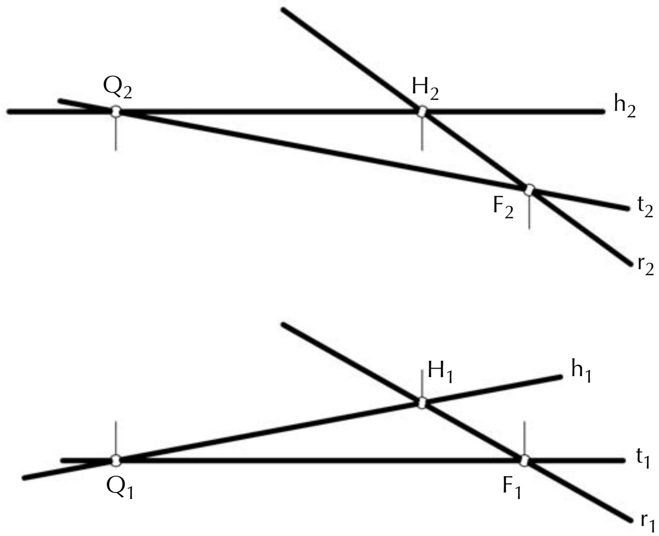
Marraztu Q puntutik igarota r zuzena ebakitzen duten h zuzen horizontala eta f frontala.



Ebazpena

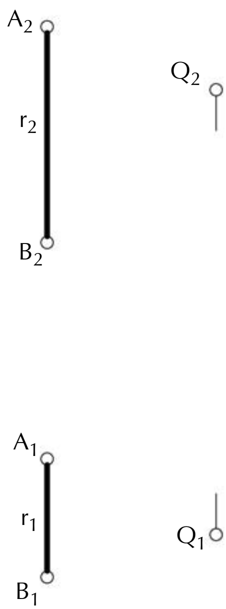
Zuzen horizontala (h) marrazteko, Q_2 proiekziotik abiatuta, h_2 marraztuko dugu, lerro horizontala dela jakinda. h_2 proiekzio horrek r_2 zuzena H_2 puntuan ebakiko du. Puntu horren proiekzio horizontala marraztuko dugu gero (H_1). H_1 eta Q_1 zehaztuta, h_1 lortuko dugu.

Bide bera erabiliko dugu zuzen frontala lortzeko. Hori bai, Q_1 proiekziotik abiatuko gara.



8. ariketa

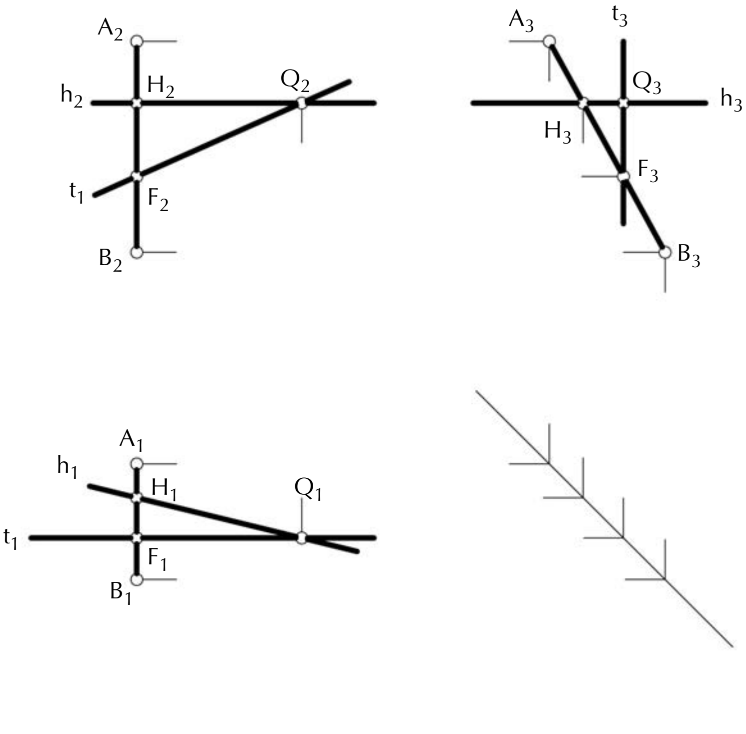
Marraztu Q puntutik igarota r zuzena mozten duten h zuzen horizontala eta f frontala.



Ebazpena

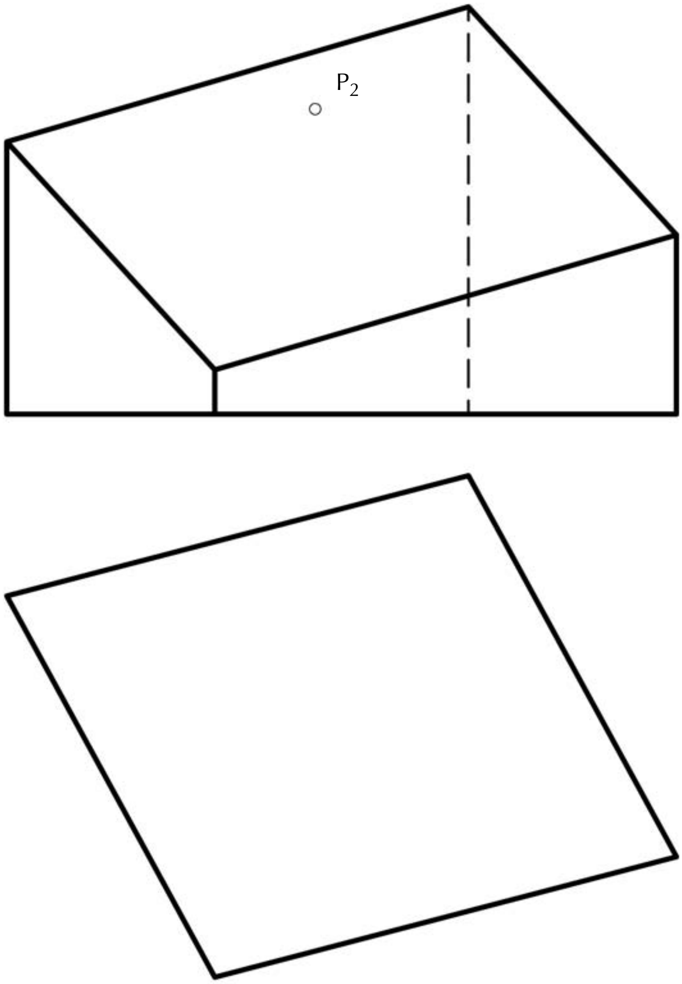
Ezaguna dugun r zuzena profilezkoa denez, lana albotiko bistan egingo dugu. Q_3 proiekziotik zuzen horizontalaren 3. proiekzioa (h_3) marraztuko dugu. Horrek r_3 ukitzen duen H_3 puntuaren proiekzio bertikala eta horizontala trazatu eta Q_2 eta Q_1 proiekzioekin lotuko dugu

Bide bera erabiliko dugu zuzen frontala lortzeko. Lehendabizi, f_3 marraztuko dugu. Gero, f_2 eta f_1 lortuko ditugu.



9. ariketa

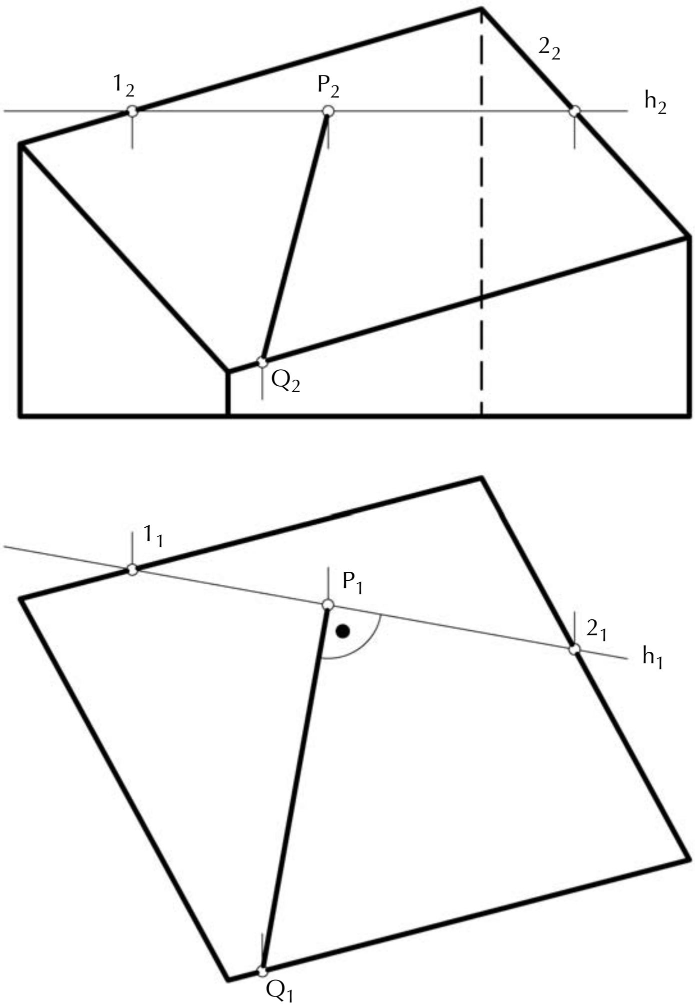
Ur tanta bat poliedro honen gainean (P puntuan) uzten da. Marraztu tantaren ibilbidea.



Ebazpena

Planoko zuzen nagusiak ezagutu behar ditugu ariketa hau egin ahal izateko.

Tanta malda handiena dagoen lekutik eroriko da; beraz, P puntutik, poliedroaren goiko aurpegian malda handieneko lerro bat marraztu beharko dugu. P puntuaren proiekzio horizontala lortzeko, barnekotasun-erlazioa aplikatuko dugu. Zuzen horizontal bat erabiliko dugu, gero beharko dugu eta. Ondoren, malda handieneko zuzena marraztuko dugu.



10. ariketa

Triangelu honen barnean ibilbide bat dago. Marraz ezazu.

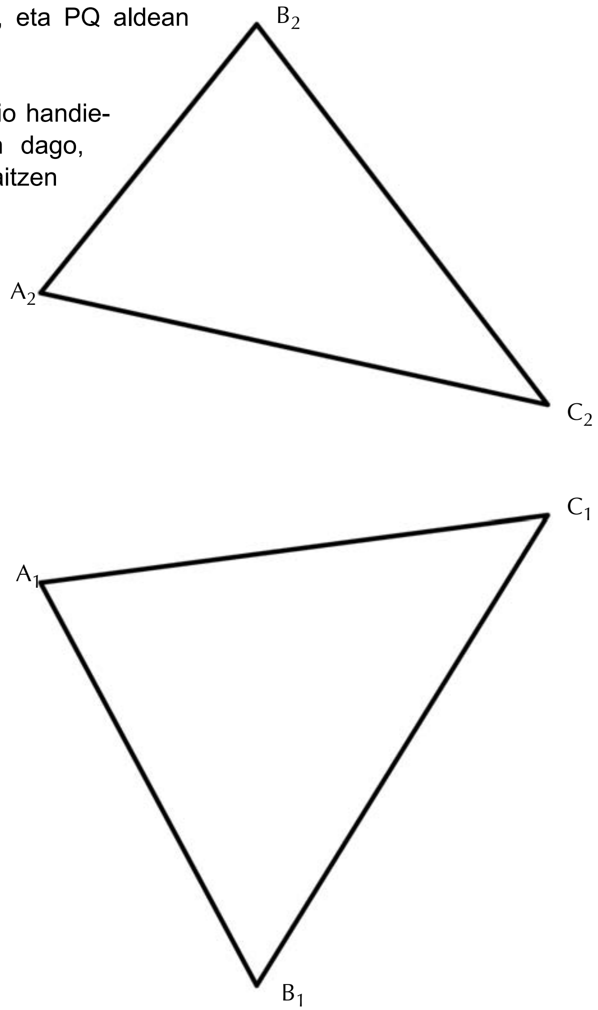
– Ibilbidearen hasiera A puntuan dago

– Lehen zatia 25 milimetroko zuzenki horizontal bat da

– Hurrengo zatia 23 milimetroko aurrez aurreko zuzenki bat da.

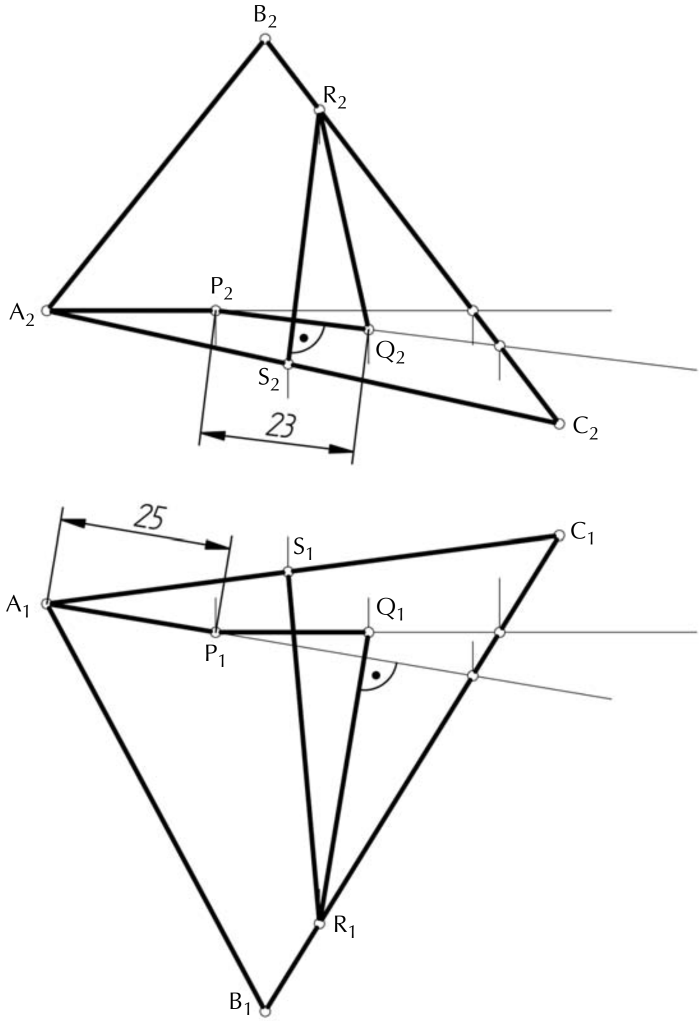
– Hirugarren zatia malda handieneko zuzen batean dago, eta PQ aldean amaitzen da

– Azken zatia inklinazio handieneko zuzen batean dago, eta AC aldean amaitzen da.



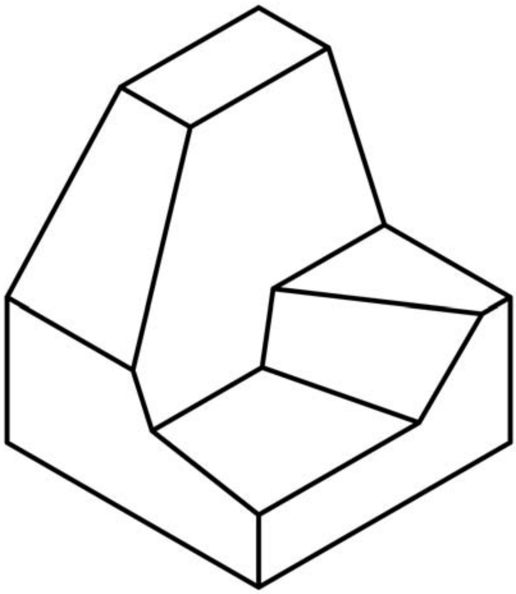
Ebazpena

A puntutik, triangeluan dagoen zuzen horizontala marraztuko dugu. Zuzen hori benetako magnitudean proiekzio horizontalean ikusten dugula dakigunez, bertan 25 milimetro neurtuta jakingo dugu non dagoen P puntua. Ondoren, P puntutik, 23 milimetro luze den planoko aurrez aurreko zuzenki bat marraztuko dugu. Q puntua lortuko da. Puntu horretatik, malda handieneko zuzenki bat trazatuko dugu triangeluaren B aldea ukitu arte. R puntuan kontuan izan behar da malda handieneko zuzenkiaren proiekzio horizontala planoko horizontalarekiko zuta izan behar duela. Azkenik, R puntutik, inklinazio handieneko zuzenkia trazatuko dugu triangeluaren alde bat ukitu arte.



11. ariketa

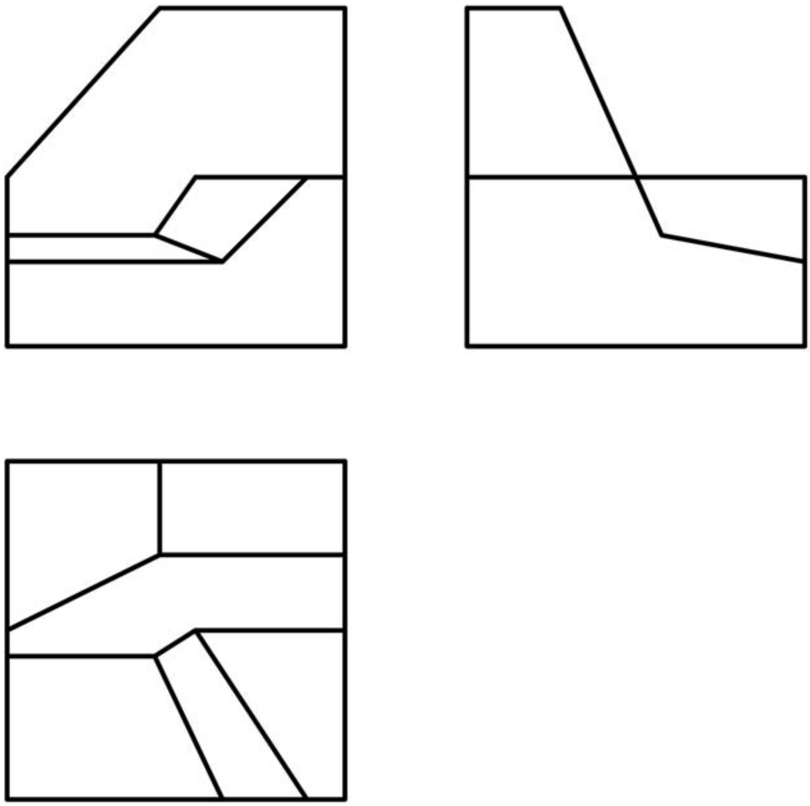
Marraztu poliedroaren hiru bistak. Era berean, marraztu bereizirik benetako magnitudean ikusten diren aurpegiak.



Ebazpena

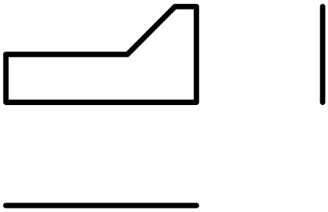
Ariketa hau ebazteko, planoaren alfabetoa menderatu behar dugu.

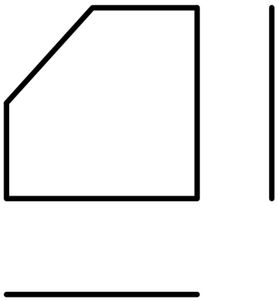
Hona hemen bistak marraztuta. Batean, proiekzio horizontalean benetako magnitudean ikusten diren planoak ageri dira. Bestean, aurrez aurreko planoak proiekzio bertikalean ikusten dira benetako magnitudean. Azkenik, albotiko bistan benetako magnitudean ikusten diren planoak marraztu ditugu.



12. ariketa

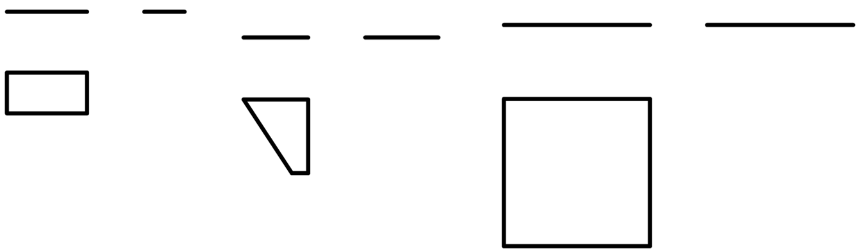
Proiekzio bertikalean, plano hauek benetako magnitudean daude.



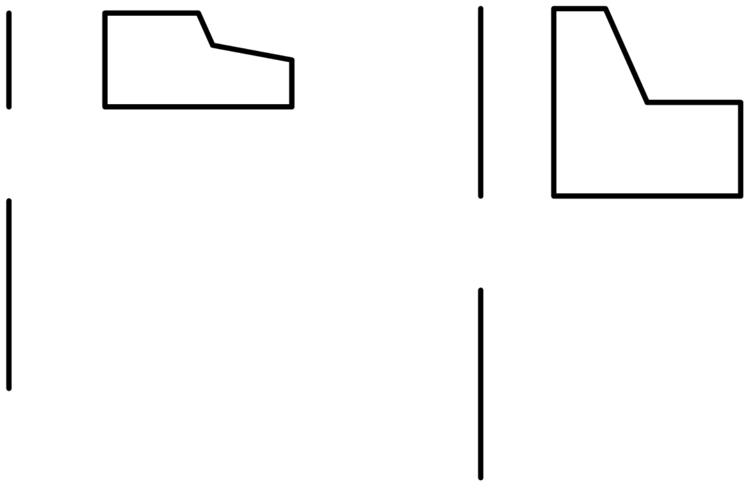


Ebazpena

Behean ditugu proiekzio horizontalean benetako magnitudean dauden aurpegiak.

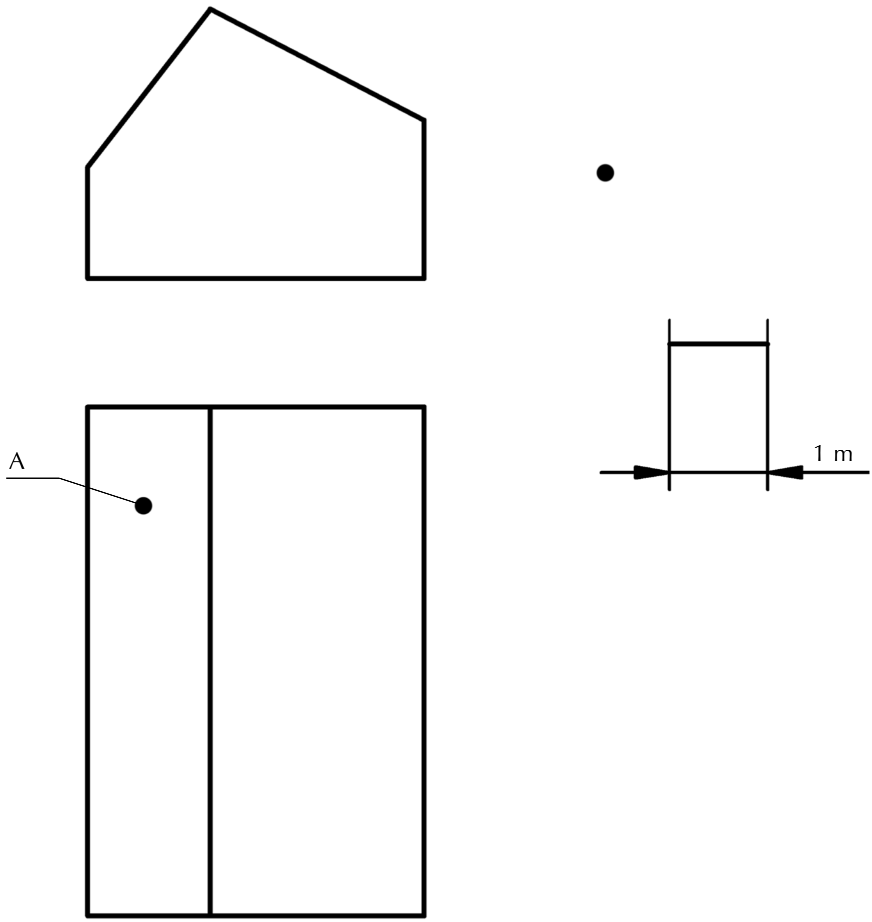


Bi dira albotiko proiekzioan benetako magnitudean dauden aurpegiak.



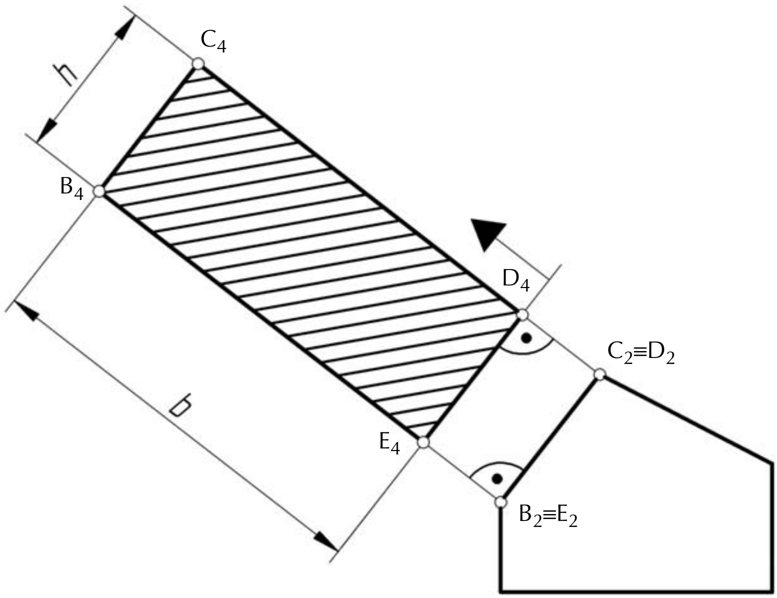
13. ariketa

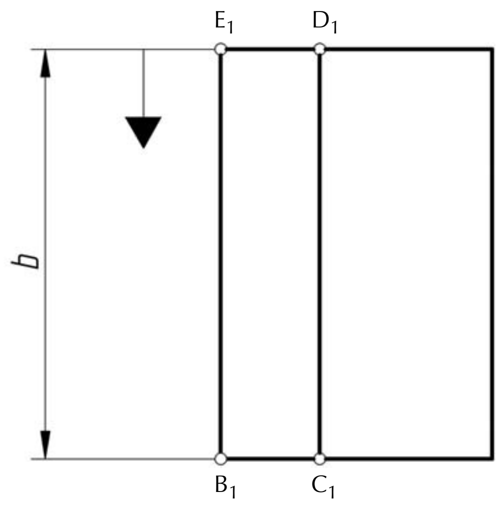
Lortu irudian ikusten den lantegiko A teilatuaren area, bista lagungarriak erabilita. Kontuan hartu eskala ere.



Ebazpena

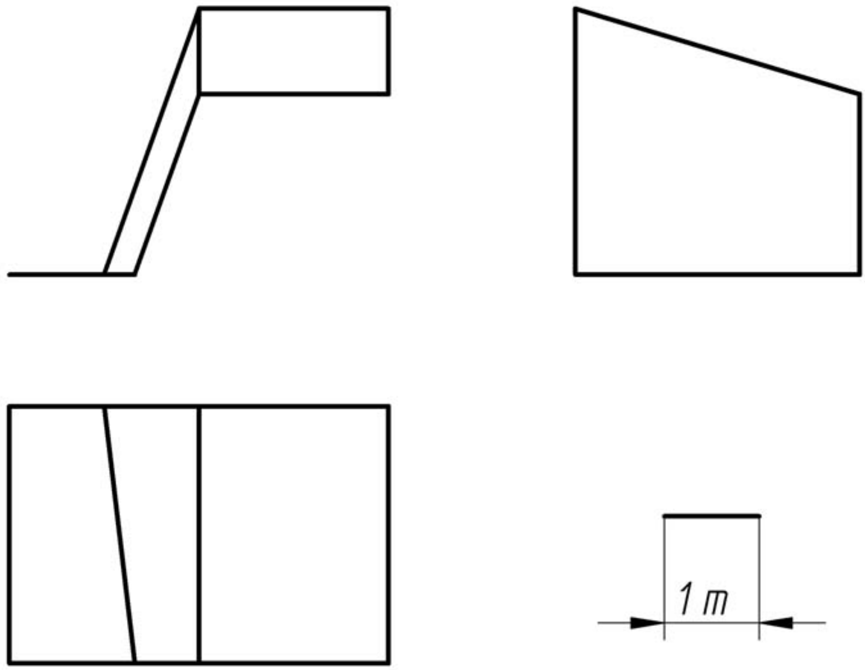
Teilatua proiektatzaile bertikala denez, bista lagungarri bat erabiliko dugu benetako magnitudea lortzeko (B_4–C_4–D_4–E_4 laukia). Gero, aldeak neurtuko ditugu, eta, eskala kontuan harturik, area kalkulatuko dugu. Area = 5,2 (b) * 2 (h) = 10,4 m^2





14. ariketa

Irudi honetan, 3 zatitan eraiki den xafla bat dugu. Kalkulatu xaflaren pisua bista lagungarriak erabilita. Dentsitatea 5 kg/m^2 da.



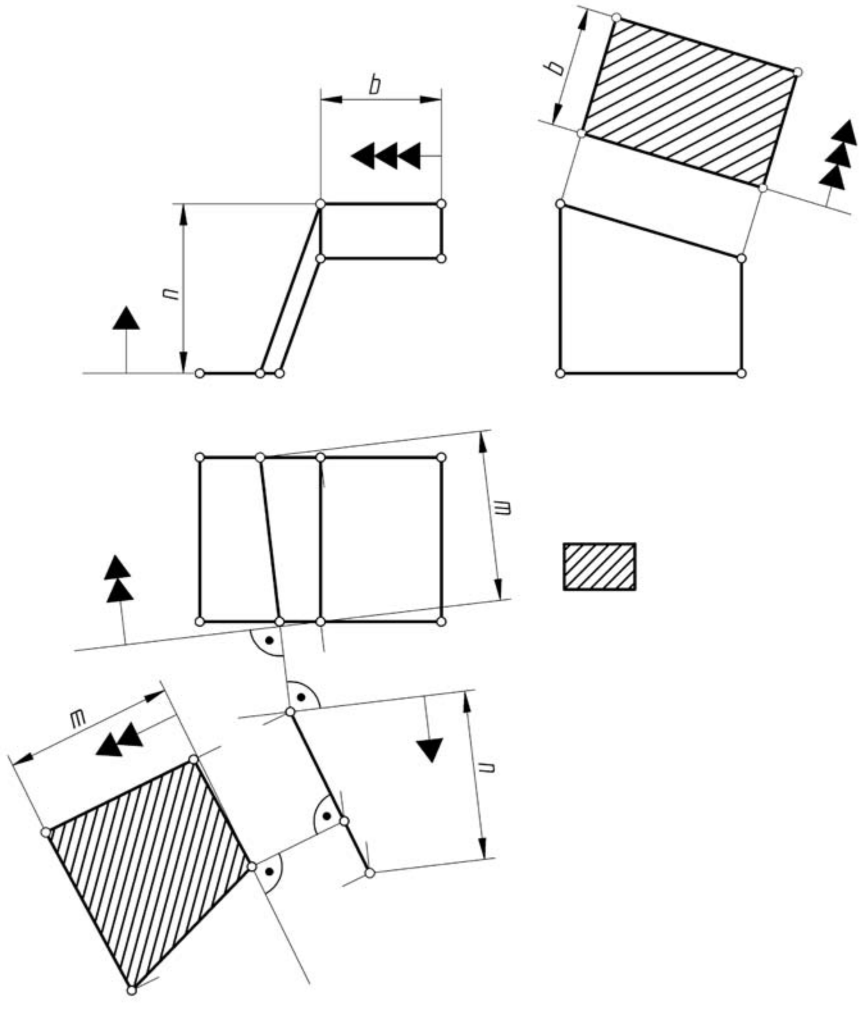
Ebazpena

Ezkerreko zatia horizontala denez, benetako magnitudea proiekzio horizontalean aurkituko dugu. Hor, laukia bi triangelutan banatuko dugu; area kalkulatzeko, bakoitza neurtu eta eskala aplikatu dugu (3,2 m^2).

Eskuineko zatia proiektatzailea da albotiko bistan; beraz, area kalkulatzeko, hor bista lagungarri bat marraztuko dugu (6,3 m^2).

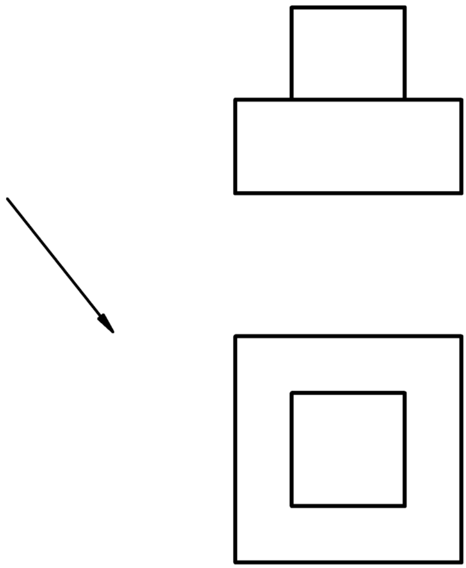
Azkenik, erdiko zati zeiharra dugu. Horren benetako magnitudea aurkitzeko, bi bista lagungarri egin behar ditugu. Lehenbizikoa, CD zuzenki horizontalari jarraituz lortuko dugu. Behin planoa proiektatzaile bihurtuta, bigarren bista lagungarria trazatuko dugu. Han neurtu daiteke area, laukia bi triangelutan banatuta (6,8 m^2).

Pisua kalkulatzeko, areak batu behar ditugu eta eskala aplikatu.
Pisua = (3,2+6,3+6,8)m^2 x 5Kg/m^2 = 81,5 kg



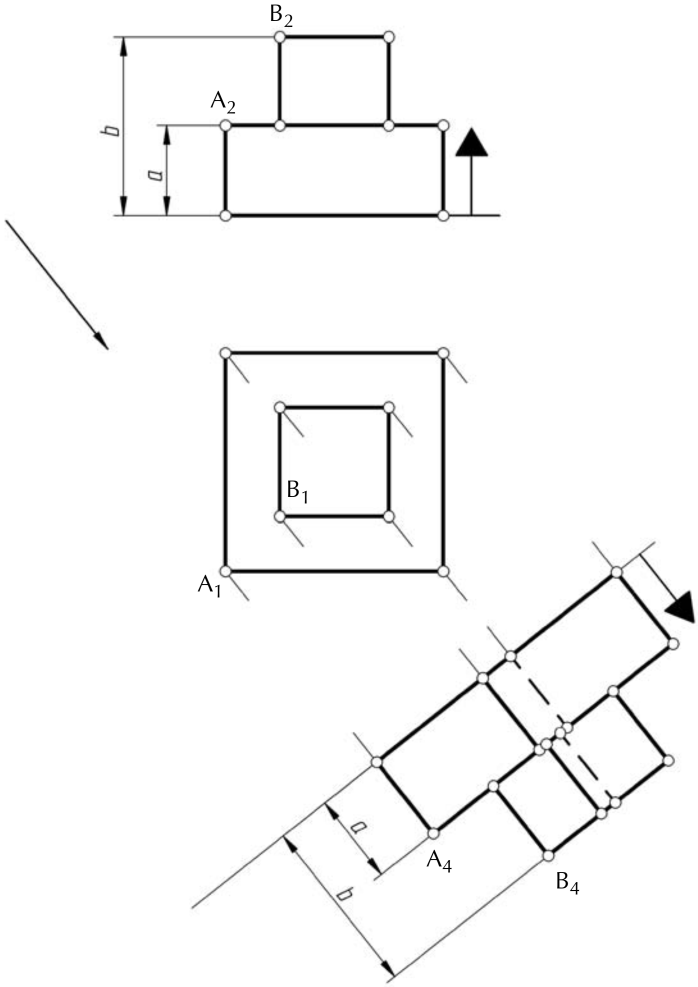
15. ariketa

Lortu piezaren bista lagungarria, geziari jarraituta.



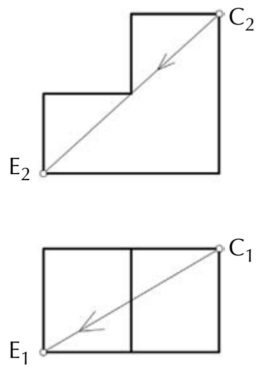
Ebazpena

Bista lagungarrien aplikazio zuzena da. Ageriko eta ezkutuko lerroak ondo aztertu besterik ez da egin behar.



16. ariketa

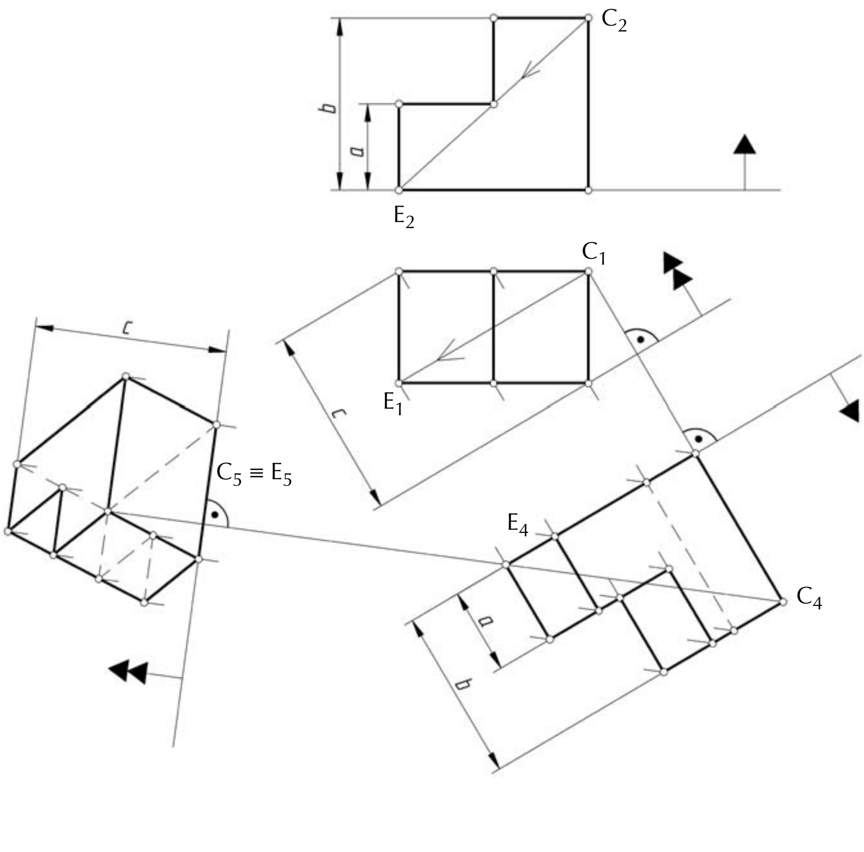
Lortu pieza honen bista lagungarria, EC norabideari jarraituta.



Ebazpena

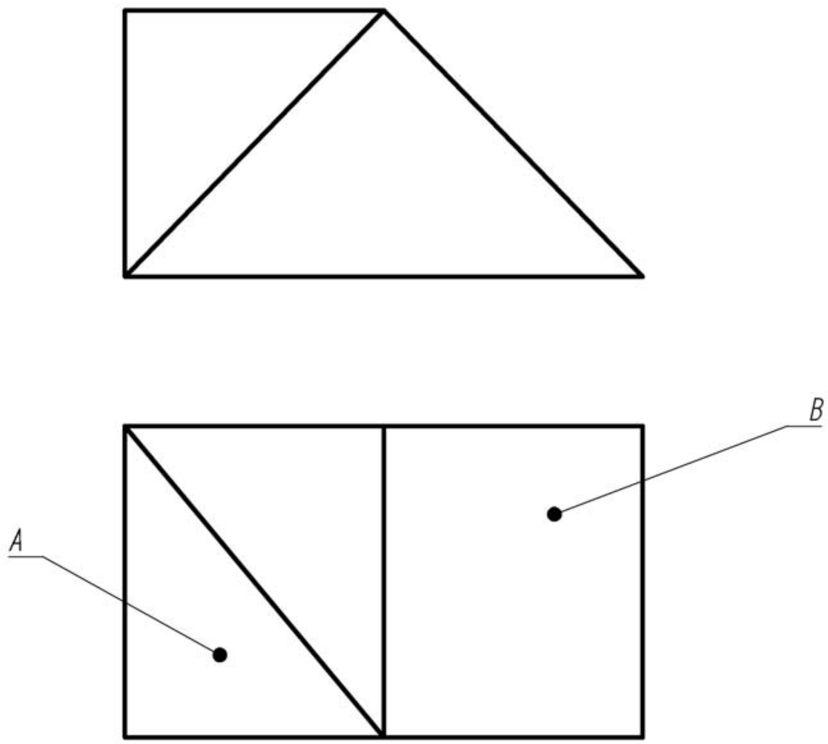
EC zuzena punta-zuzen bihurtu nahi da. Horretarako, bi bista lagungarri marraztu behar dira. Lehenbizikoan, EC zuzena aurrez aurreko bihurtuko dugu, behean ageri den bezala. Bista lagungarri bera egingo dugu piezarentzat ere.

Azkenik, EC zuzena puntu gisa ikustea lortuko dugu. Horretarako, bigarren bista lagungarri bat marraztuko dugu E_4C_4-ri jarraituz. Bista lagungarri bera egingo dugu piezarentzat ere.



17. ariketa

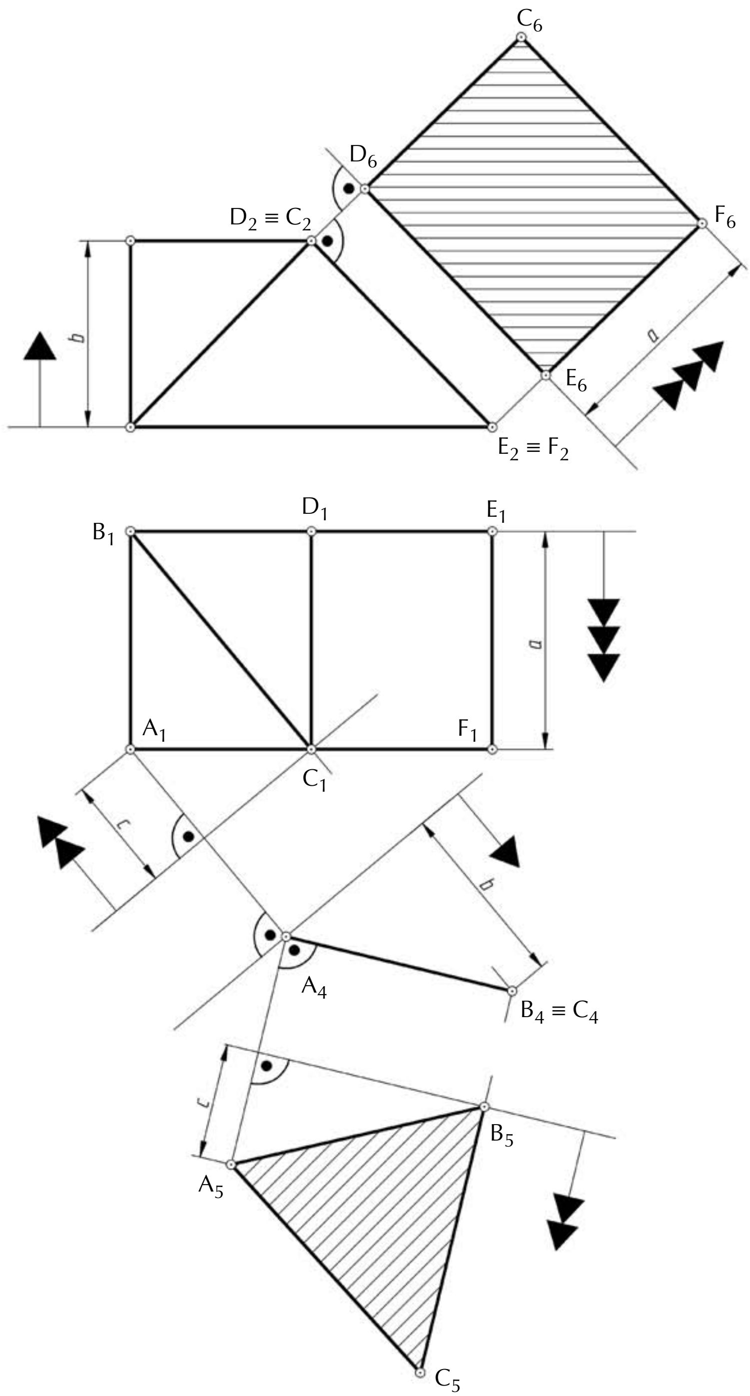
Kalkulatu A eta B aurpegien benetako magnitudea.



Ebazpena

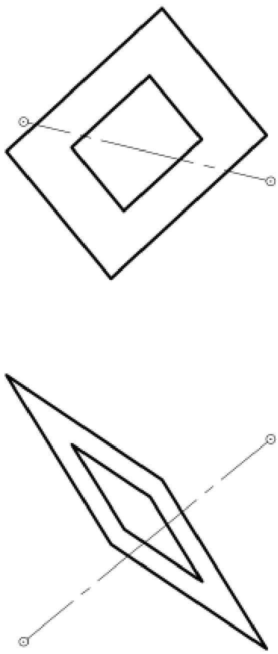
B aurpegia proiektatzailea denez, nahikoa da bista lagungarri bat trazatzea benetako magnitudea lortzeko (C_6–D_6–E_6–F_6).

A aurpegia zeiharra denez, ordea, bi bista lagungarri marraztu beharko ditugu segidan. Lehenbizikoan, A aurpegia proiektatzaile bihurtuko dugu (A_4–B_4–C_4). Ondoren, bigarren bista lagungarri bat marraztuta lortuko dugu benetako magnitudea (A_5–B_5–C_5).


C6
D6
D2 ≡ C2
F6
b
a
E6
E2 ≡ F2
D1
E1
B1
a
A1
F1
C1
c
b
A4
B4 ≡ C4
c
B5
A5
C5

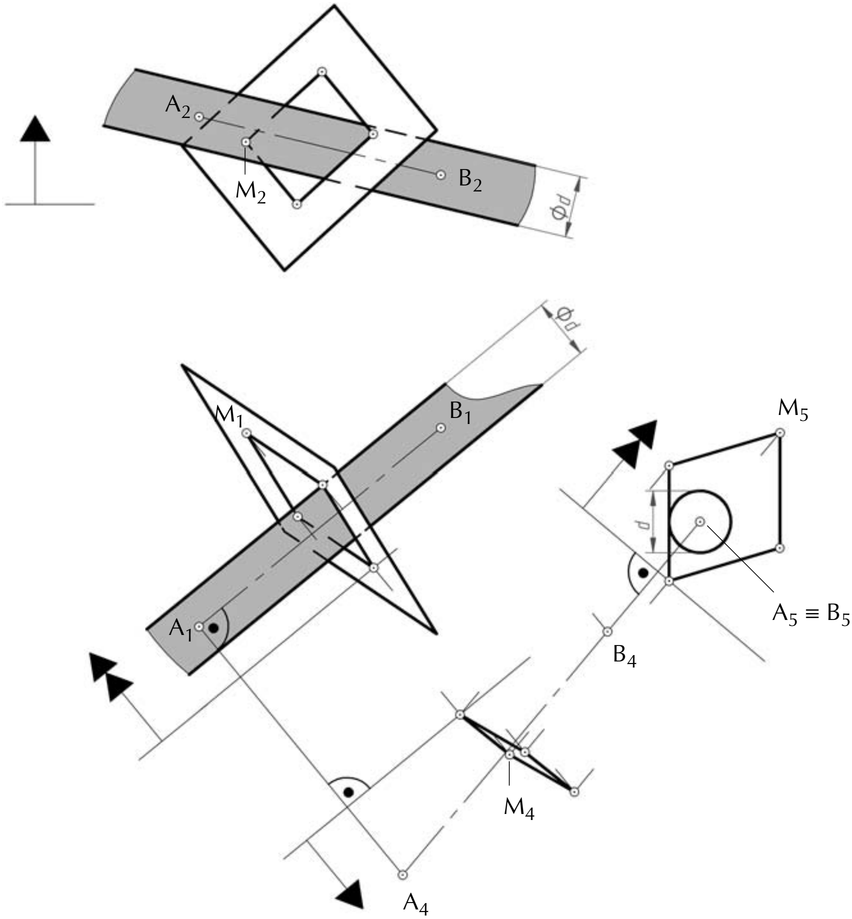
18. ariketa

Izan bitez xafla zulatu bat eta hodi baten ardatza. Marraztu zulotik pasa daitekeen hodirik handiena.



Ebazpena

Lehendabizi, hodiak zer diametro duen jakin behar dugu. Horretarako, hodiaren ardatza punta-zuzen bihurtu behar dugu. Bista lagungarri berberak marraztu behar ditugu zuloarentzat. Bigarren bista lagungarrian, “d” diametroa aurkituko dugu. Diametro horren bidez, hodiaren ohiko bistak marraztuko ditugu.

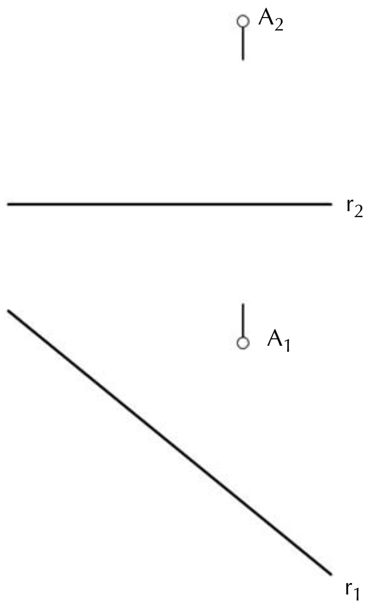


19. ariketa

Izan bitez A puntua eta r zuzena. Marraztu triangelu aldeberdin bat hurrengo bi baldintzekin:

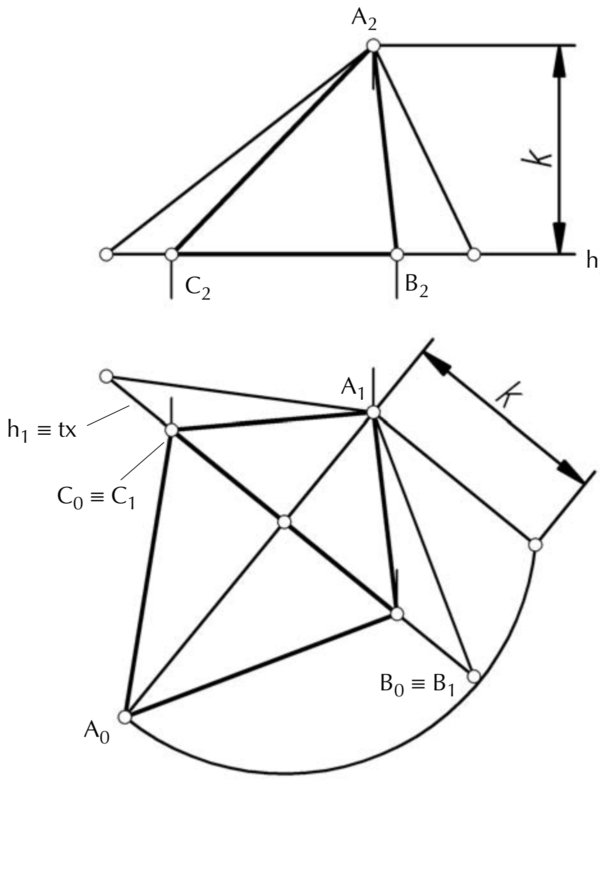
– A puntua triangeluaren erpin bat da

– Aurkako aldea r zuzenean dago.



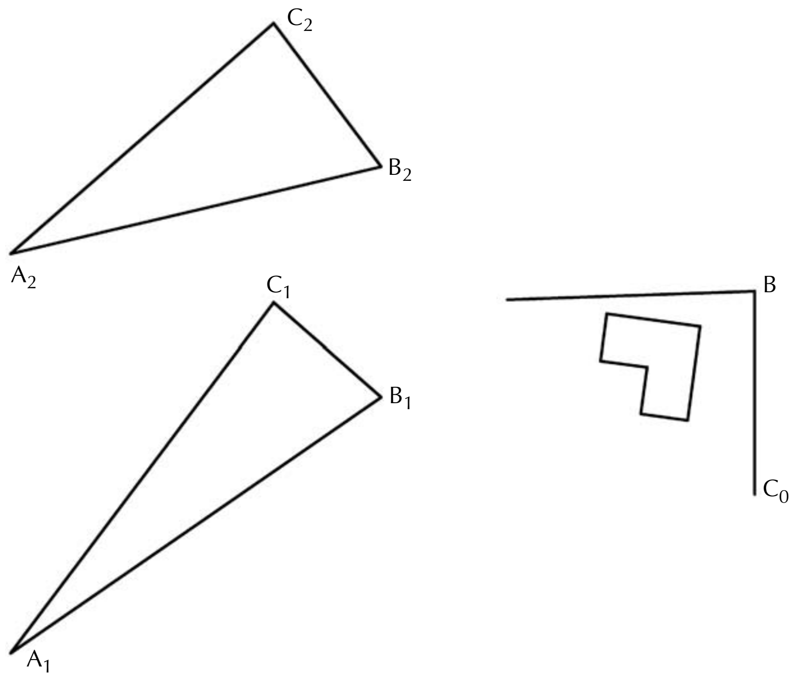
Ebazpena

Triangelua benetako magnitudean marraztu ahal izateko, r zuzenak eta A puntuak osatzen duten planoa eraitsi behar dugu. Ezaguna dugun r zuzena horizontala denez, bandatzat hartuko da. Eraispenaren bidez, A_0–B_0–C_0 triangelu aldeberdina osatuko dugu. Amaitzeko, triangeluaren bi bistak lortuko ditugu.



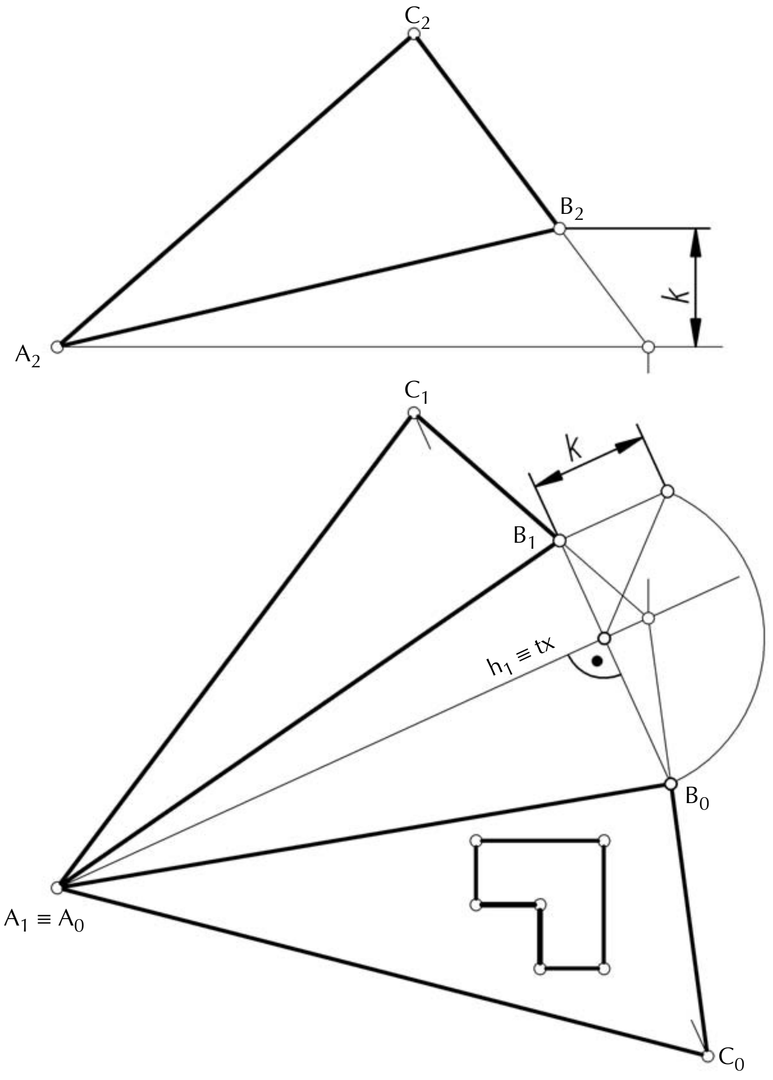
20. ariketa

Lortu triangelu barneko irudiaren bistak.



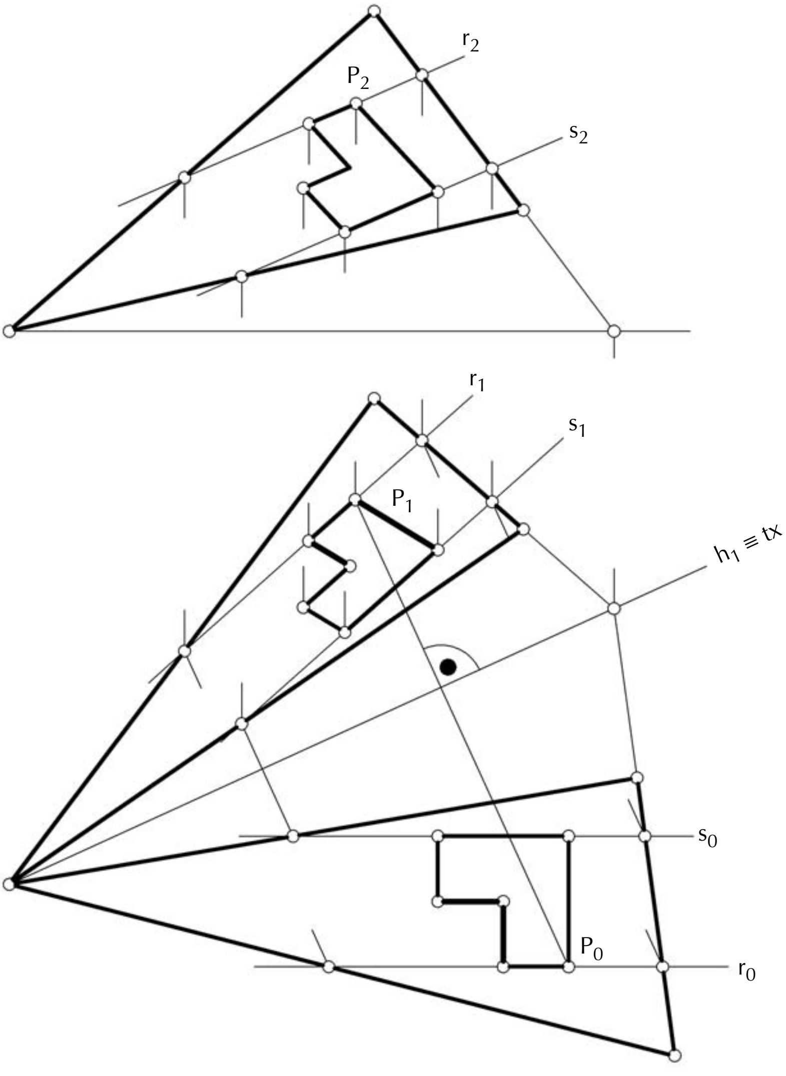
Ebazpena

Eraispenaren bidez, triangeluaren benetako magnitudea lortuko dugu. Han kopiatuko dugu irudia.



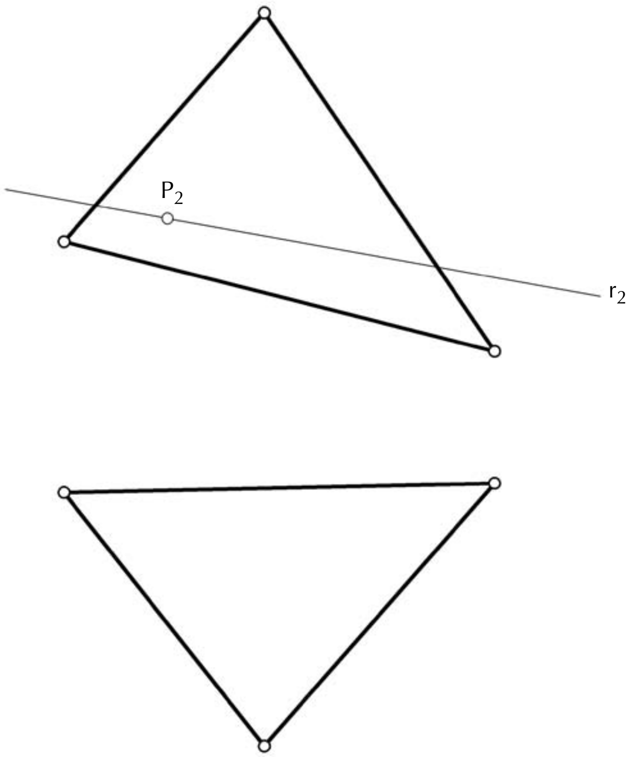
Ondoren, irudiaren proiekzio horizontala lortuko dugu, r eta s zuzen laguntzaileak erabiliz.

Amaitzeko, irudiaren proiekzio bertikala lortuko dugu, berriro ere r eta s erabiliz.



21. ariketa

Zulo karratu bat eginez, arindu irudiko xafla: kendu pisuaren % 25. Karratuaren aldeak r zuzenean izan behar du eta erpin batek P puntuan.

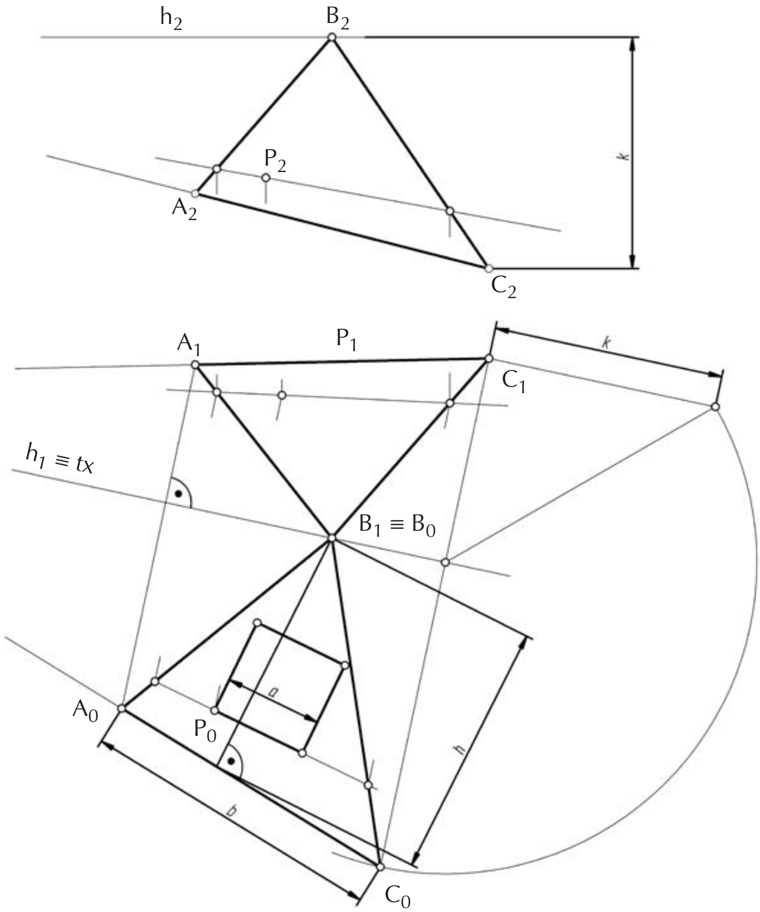


Ebazpena

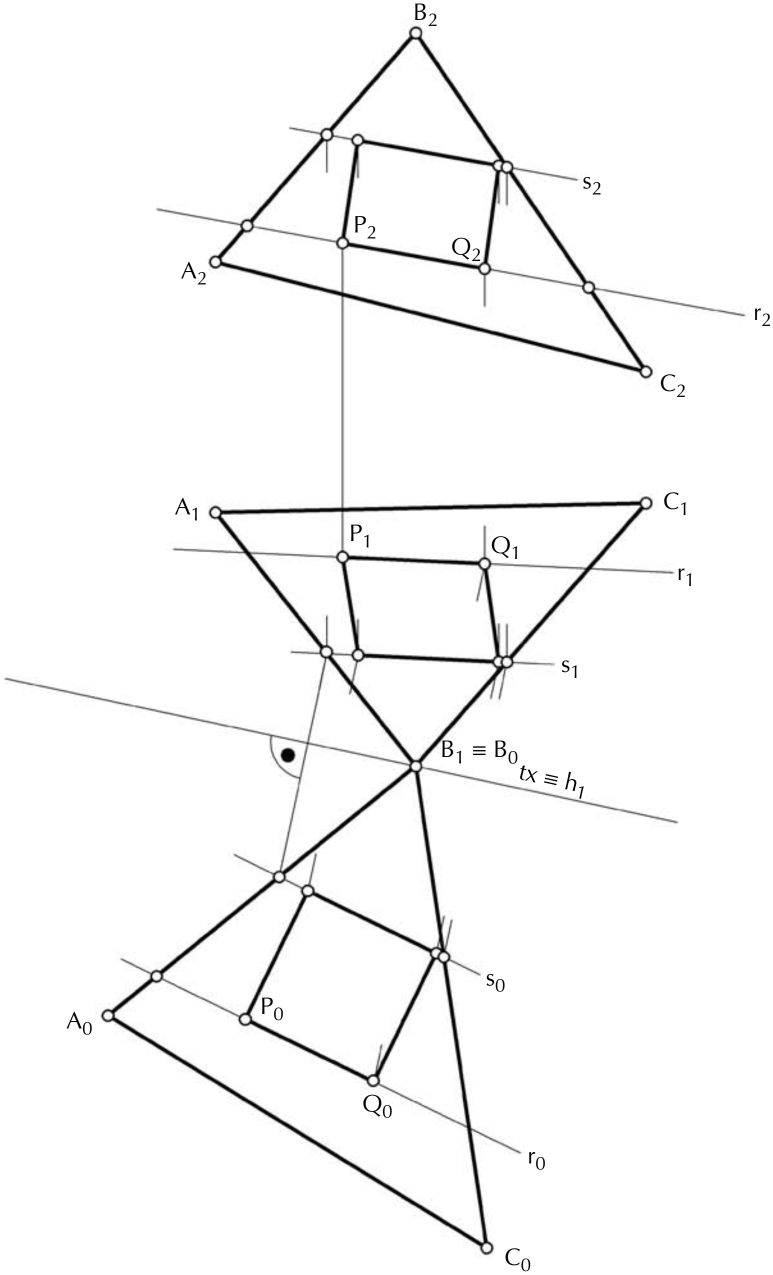
Lehenik eta behin r zuzena eta P puntuaren proiekzio horizontalak lortu behar ditugu barnekotasuna aplikatuz.

Eraispena egiterakoan, proiekzio horizontalaren gainean ez ateratzeko, banda (planoko h zuzen horizontala) A puntuan hartuko dugu.

Gero, triangelua, P puntua eta r zuzena eraitsiko ditugu. Eraispenaren bidez, triangeluaren azalera lortuko dugu, $\frac{b \times h}{2} = \frac{50 \times 59}{2}$ 1.475 mm². Karratuaren azalerak triangeluaren laurden bat izan behar duenez, karratuaren aldea $a = \sqrt{\frac{1475}{4}} =$ 19,2 mm da.

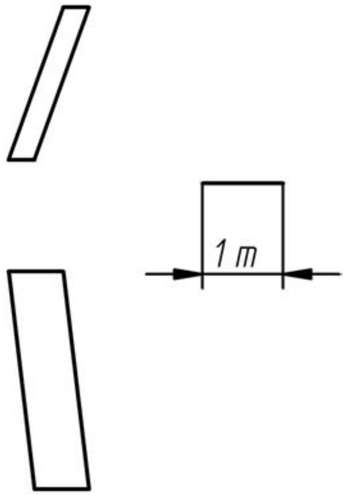


Azkenik, karratuaren proiekzio horizontala eta bertikala lortuko ditugu, s zuzen laguntzailea erabiliz.



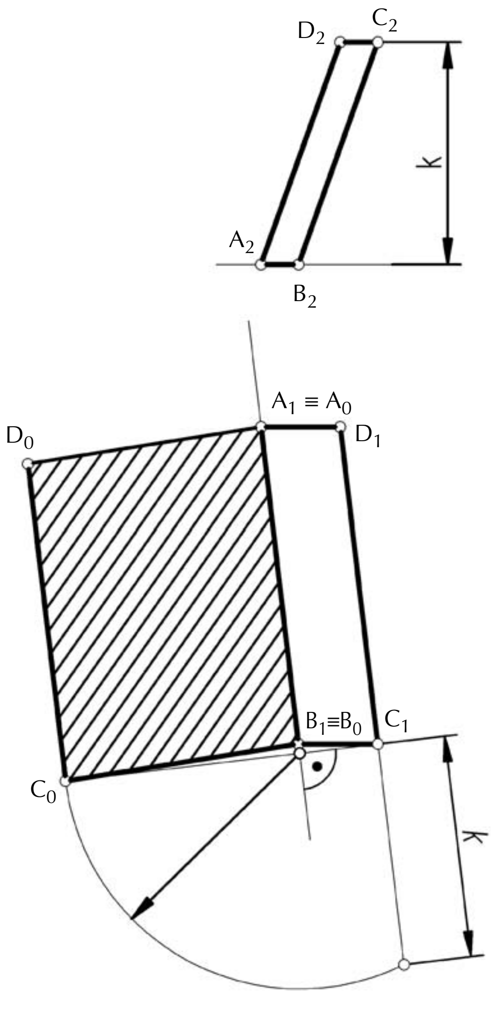
22. ariketa

Kalkulatu xafla honen pisua eraispenak eginda. Dentsitatea 5 kg/m^2 da.



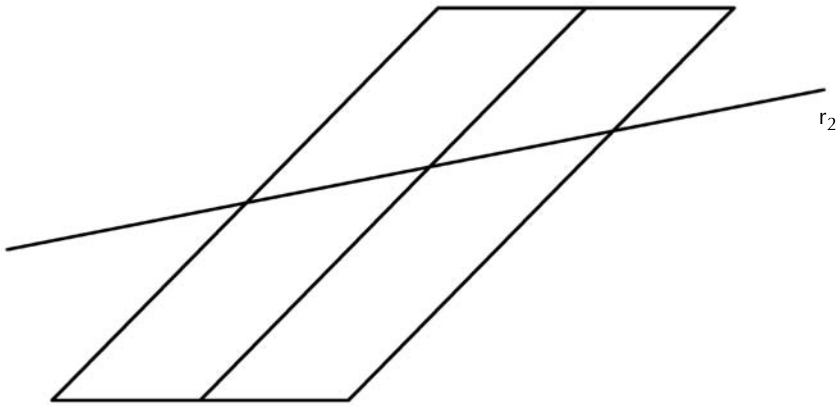
Ebazpena

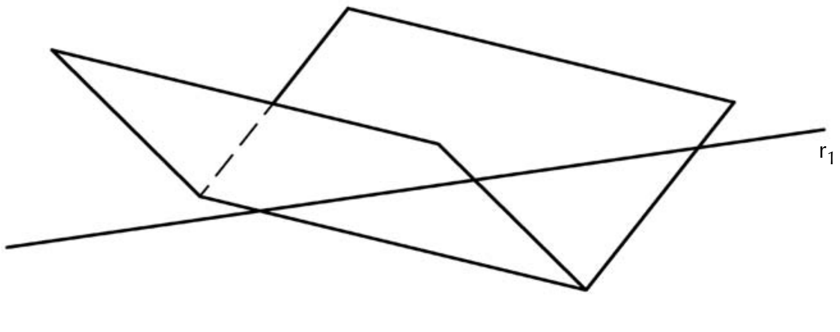
Xaflaren h ertza horizontala denez, bandatzat erabiltzen dugu. Eraitsitako laukia bi triangelutan banatuz, area neurtuko dugu, 10,3 m². Dentsitatea kontuan hartuta, pisua lortuko dugu, 10,3 m² x 5 kg/m² = 51,3 kg.)



23. ariketa

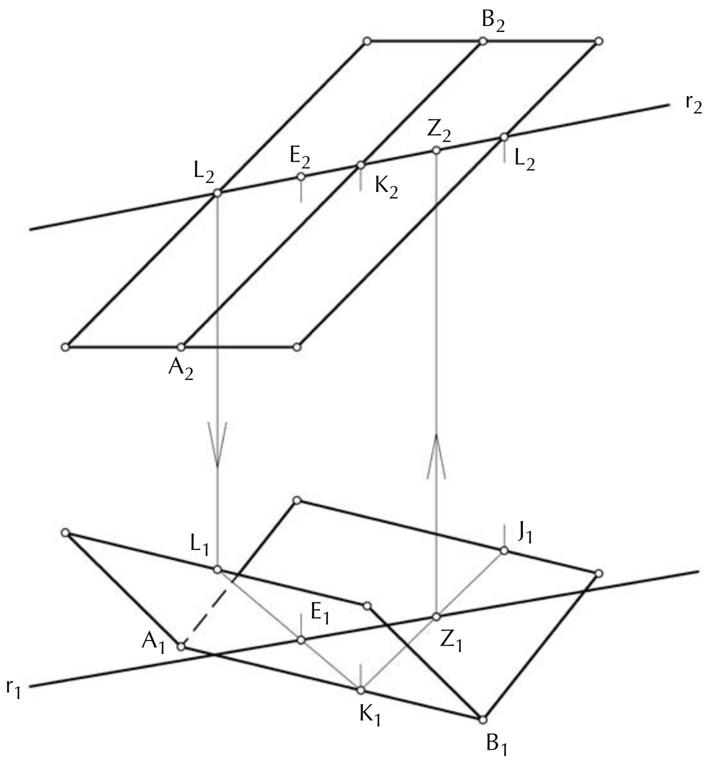
Aurkitu bi planoen eta zuzenaren arteko elkarguneak.



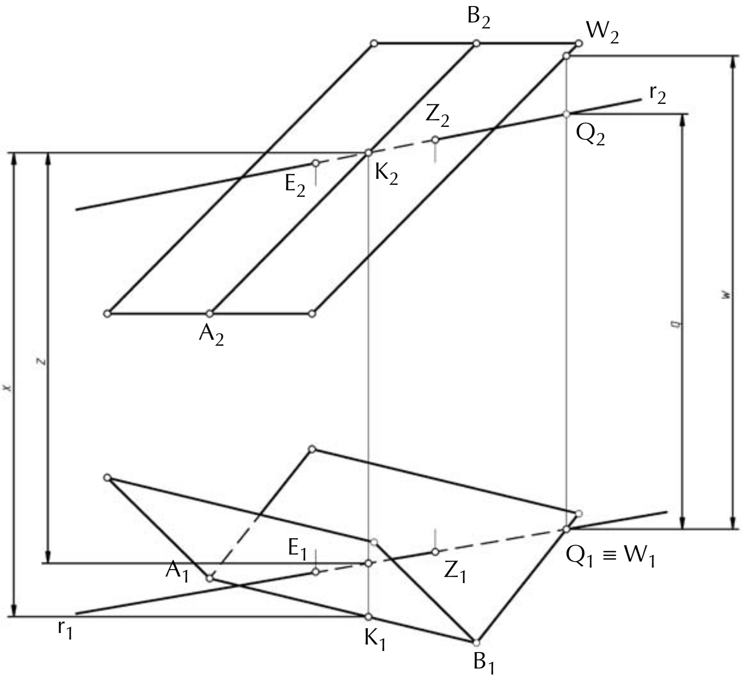


Ebazpena

Proiekzio bertikalean, r_2 proiekzioak planoen ertzak L_2, K_2 eta J_2 puntuetan ukituko ditu. Puntu horien proiekzio horizontalak lortu eta lotuko ditugu. Lortutako zuzen laguntzaileak E_1 eta Z_1 puntuetan ukitzen dute r_1; puntu horiek dira elkarguneak. Azkenik, E_2 eta Z_2 lortuko ditugu, r_2 proiekzioan daudela jakinda.

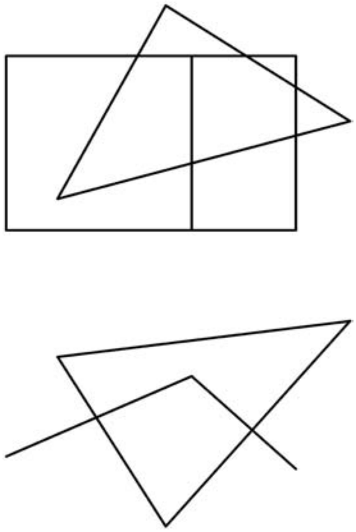


Ariketa amaitzeko, ageriko eta ezkutuko zatiak bereiziko ditugu.



24. ariketa

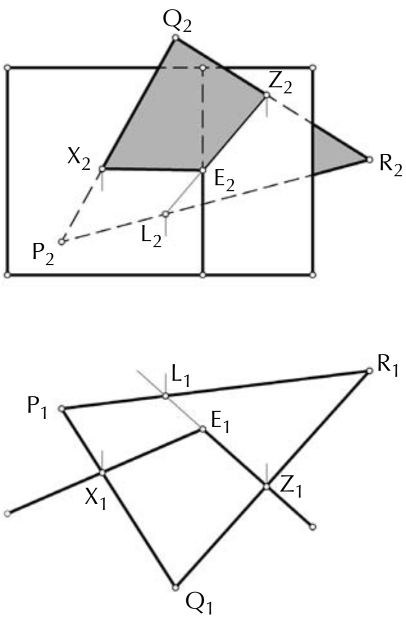
Aurkitu planoen arteko elkargunea, ageriko eta ezkutuko zatien bidez.



Ebazpena

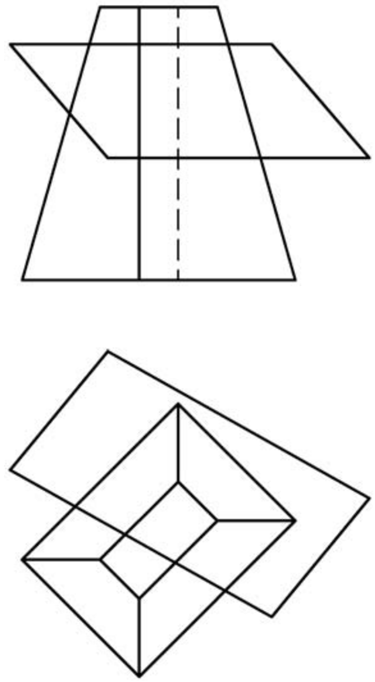
Laukiak proiektatzaile horizontalak direnez, elkargunea proiekzio horizontalean lortuko da zuzenean. Eskuineko laukia zabalduko dugu eta L puntu laguntzailea erabiliko dugu triangeluarekin duen elkargunea lortu arte (E eta Z puntuak). Gero, ezkerreko laukiarekin lortuko dugu elkargunea (X puntua).

Amaitzeko, ageriko eta ezkutuko zatiak bereiziko ditugu. Goitiko bistan ikusten dugunez, triangeluaren Q–X–Z–E zatia laukien aurretik dago, beraz, aurretiko bistan laukia estaliko dute.



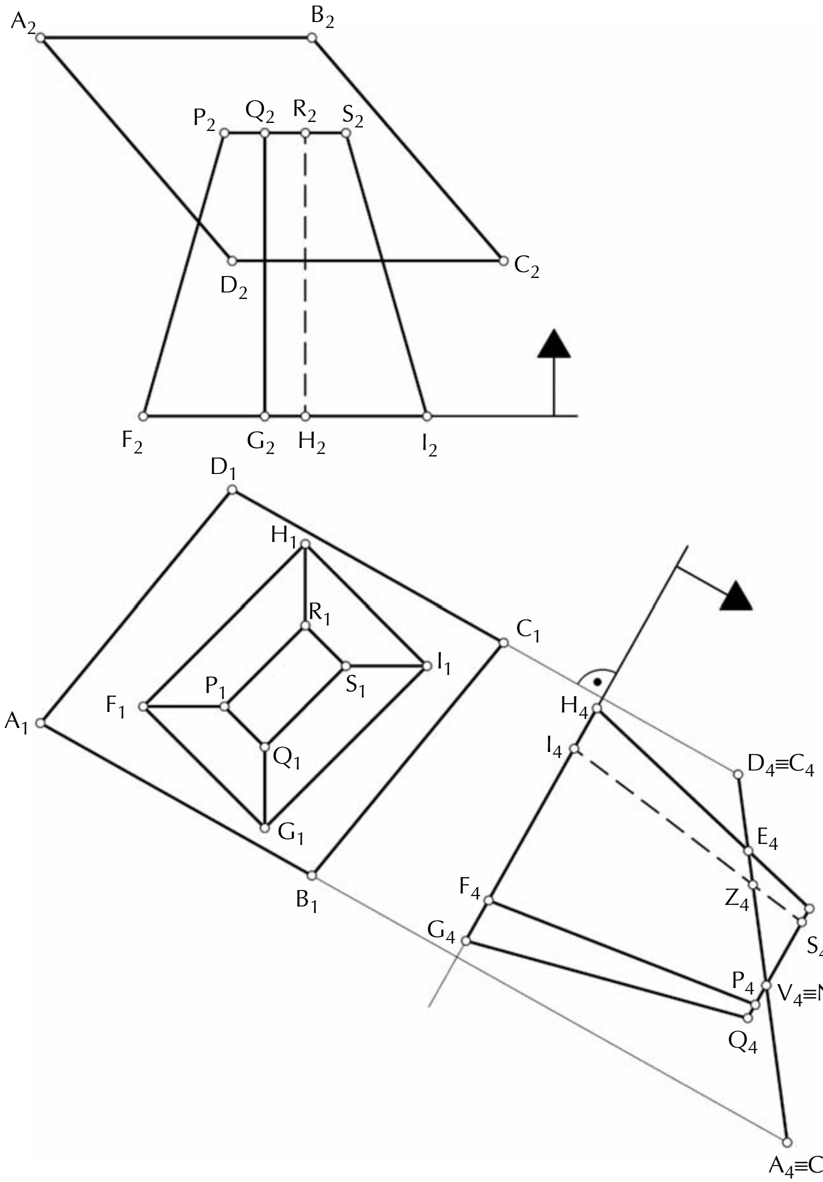
25. ariketa

Aurkitu zutabearen eta laukiaren arteko elkargunea, bista lagungarriak erabilita.

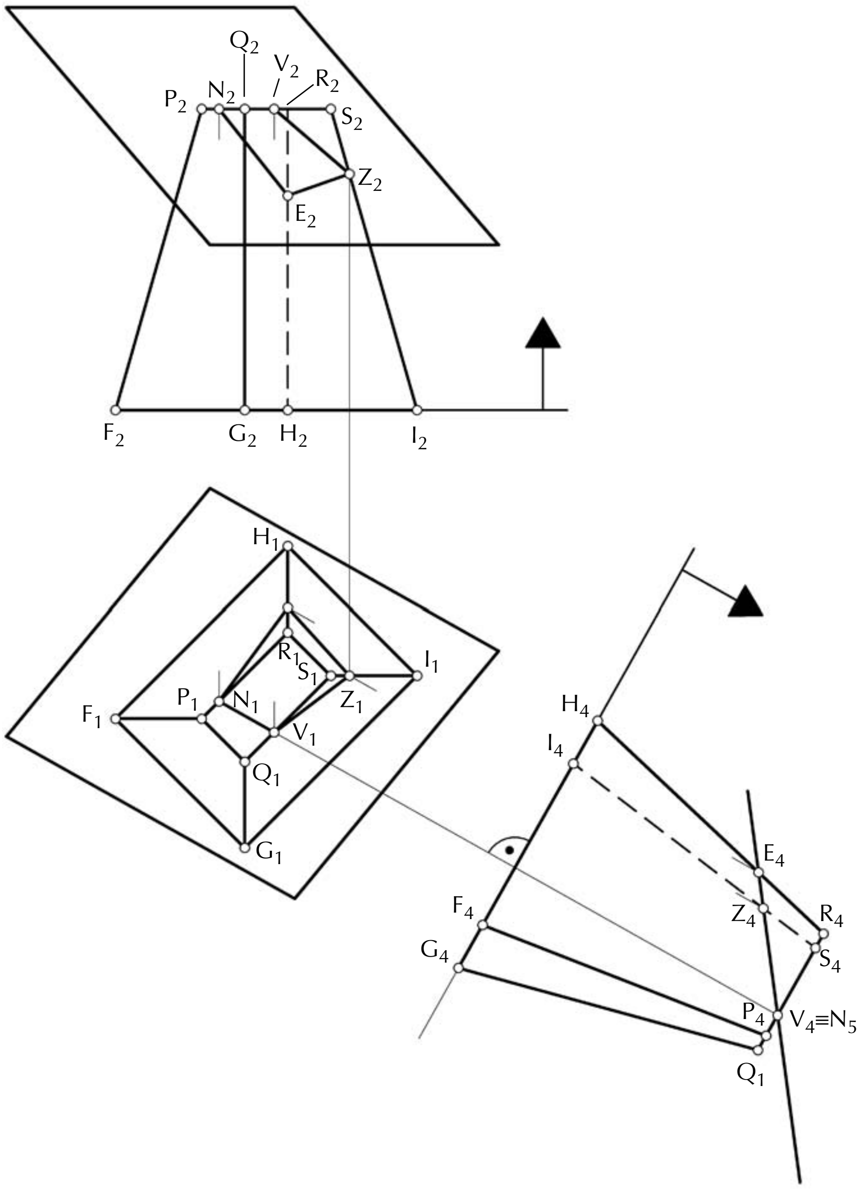


Ebazpena

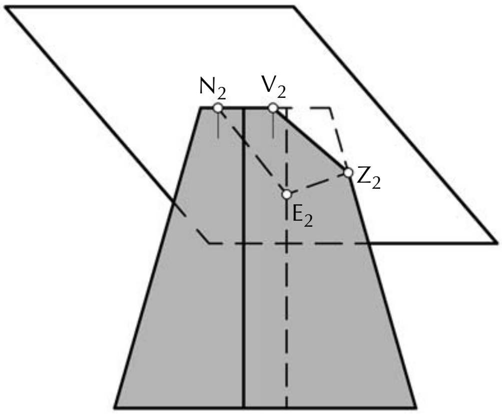
Hasiera batean, planoa proiektatzaile bihurtuko dugu, bista lagungarri bat erabilita. Bista lagungarri bera marraztuko dugu zutabearentzat. Bista lagungarrian, elkargunea zuzenean aurkituko da (E_4 Z_4 V_4 N_4).

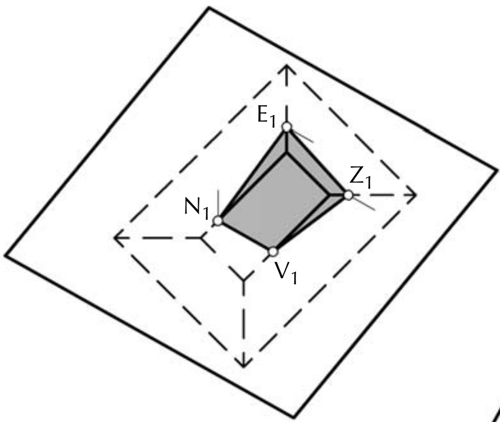


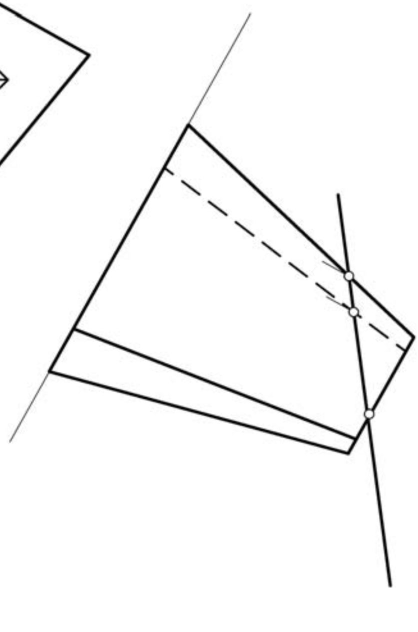
Gero, elkargunearen proiekzio horizontala lortuko da (**E₁ Z₁ V₁ N₁**). Hurrengo urratsa proiekzio bertikala lortzea da. (**E₂ Z₂ V₂ N₂**).



Ariketa amaitzeko, ageriko eta ezkutuko zatiak bereiziko ditugu. Goitiko bistan, laukiaren gainetik dagoen zatia bakarrik ikusiko dugu. Aurretiko bistan, laukiaren aurretik dagoena ikusiko dugu.

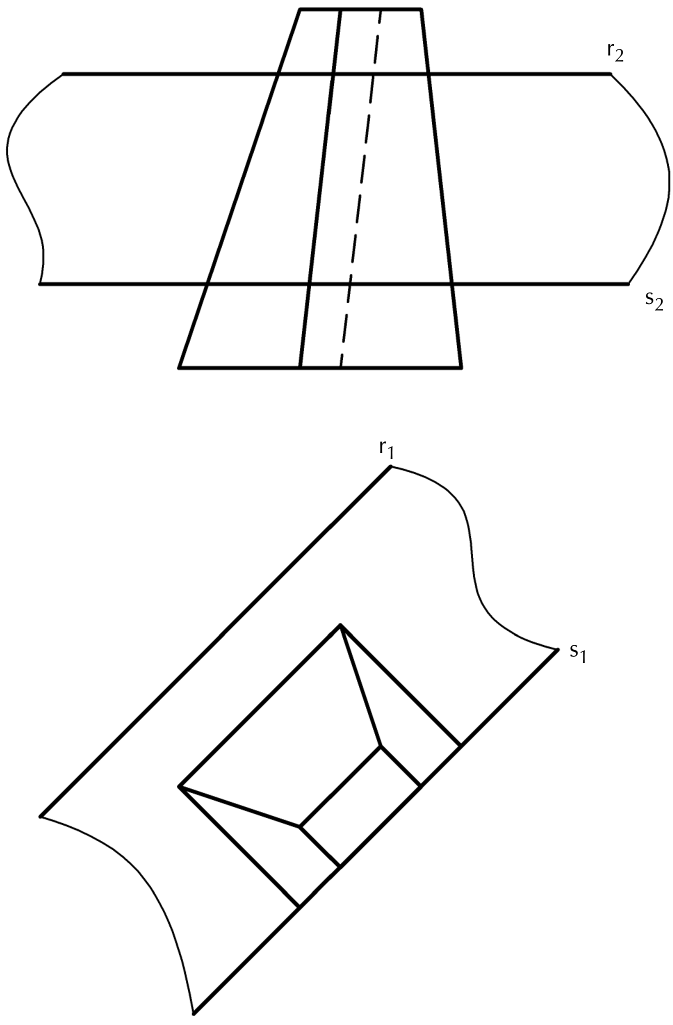






26. ariketa

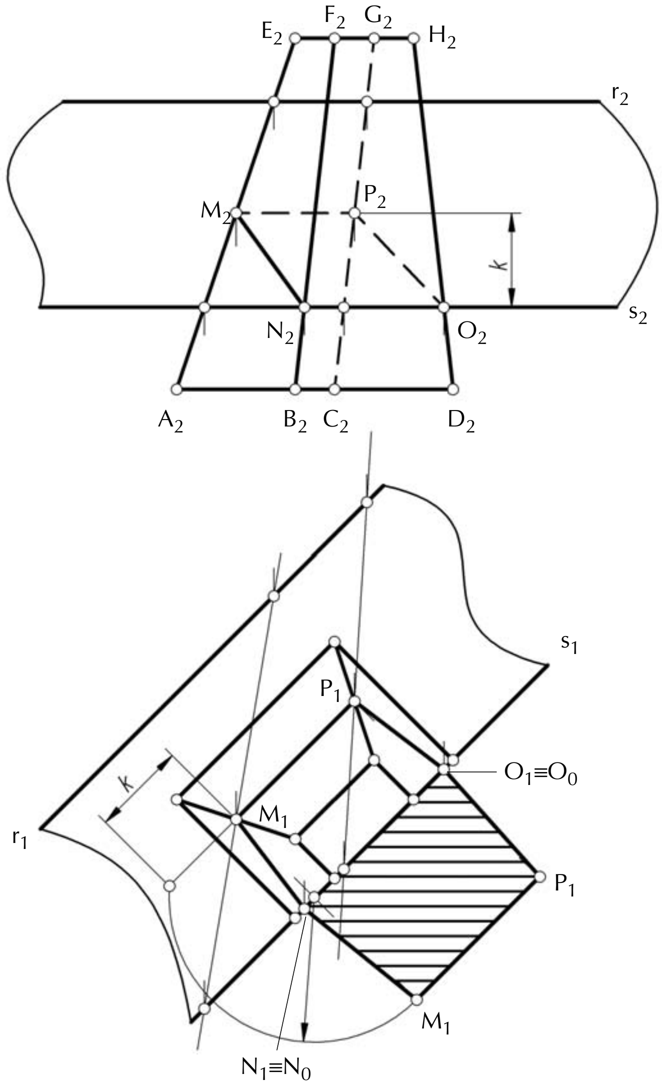
Lortu zutabearen eta r-s planoaren arteko elkargunearen benetako magnitudea.



Ebazpena

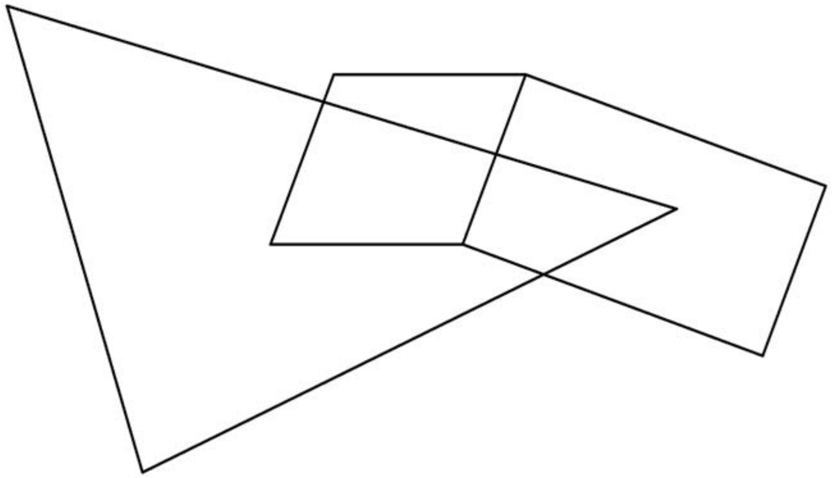
Lehendabizi elkargunea aurkitu behar dugu. Elkargunearen N eta O puntuak aurkitu behar ditugu, s zuzena F-B eta D-H ertzetatik igarotzen da eta. Gero, A-E eta G-C ertzek planoa ukitzen duten gunea , P eta O puntuak, lortuko ditugu.

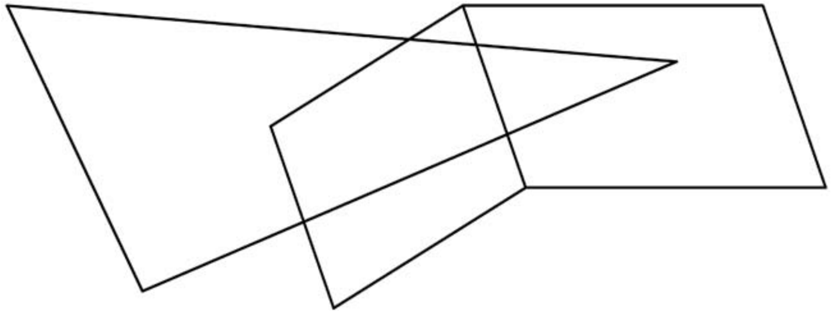
Azkenik, eraispen baten bidez, elkargunearen benetako magnitudea marraztuko dugu, s zuzen horizontala txarnelatzat hartuta.



27. ariketa

Aurkitu planoen arteko elkargunea.

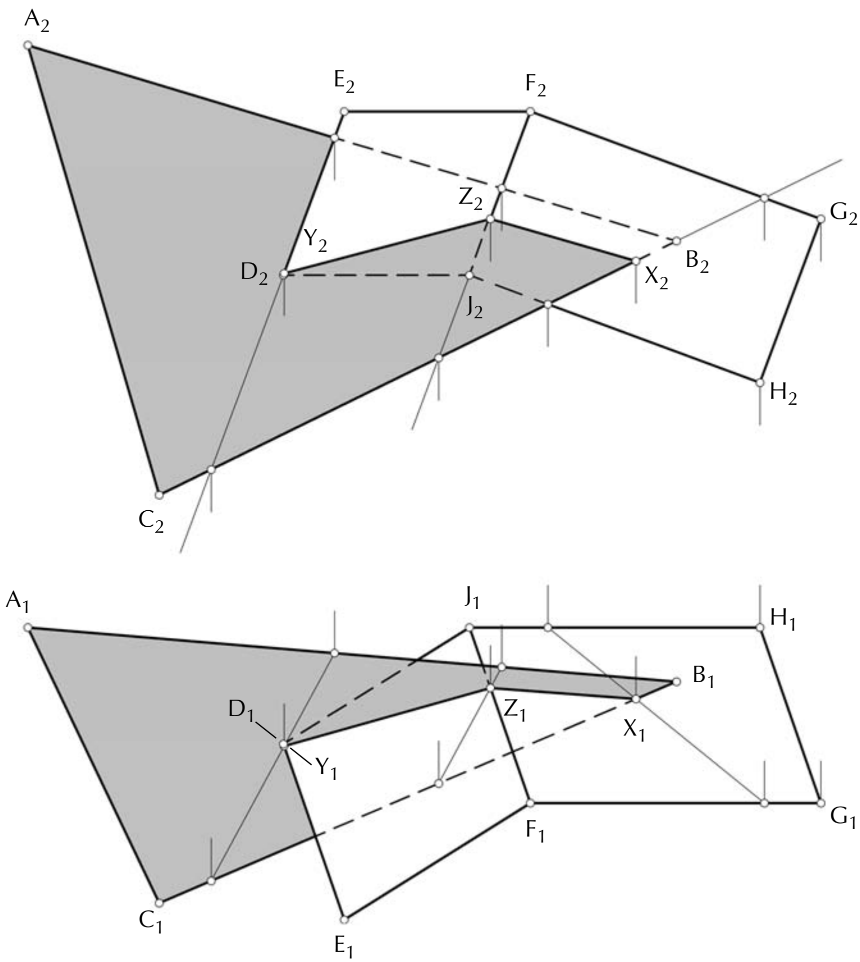




Ebazpena

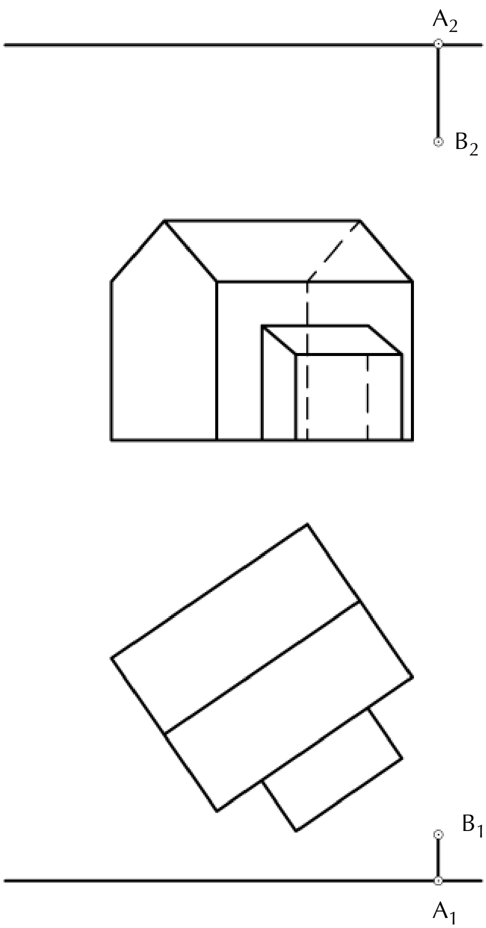
Elkargunea hiru punturekin definitzen da:

- ED ertzak hirukia ukitzen duen gunea: Y
- FJ ertzak hirukia ukitzen duen gunea: Z
- CB ertzak eskuineko laukia ukitzen duen gunea: X



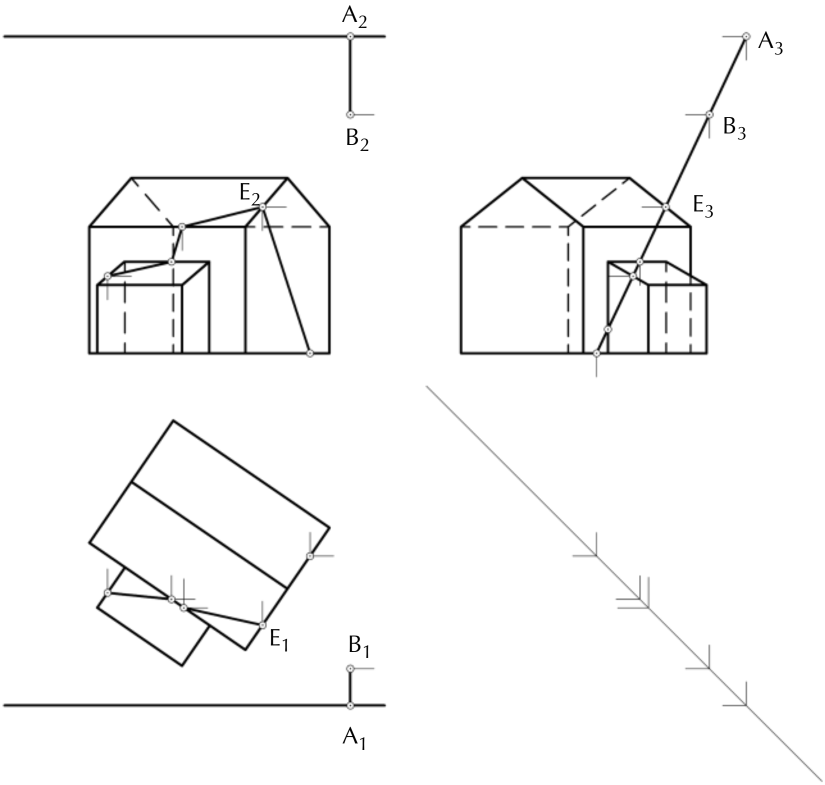
28. ariketa

Marraztu alanbreak etxean sortzen duen itzala. Argiaren izpiek AB norabidea dute.



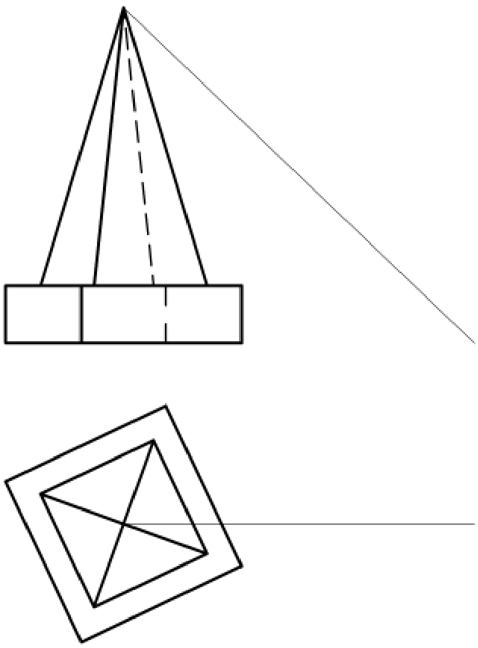
Ebazpena

Alanbreak eta argiaren norabideak osatzen duten planoaren eta etxearen elkarguneak definitzen dute itzala. Planoa albotiko planoarekiko zuta denez, 3. bista trazatu behar dugu, han elkargunea aurkitzeko. Azkenik, itzalaren ohiko bistak lortuko ditugu.



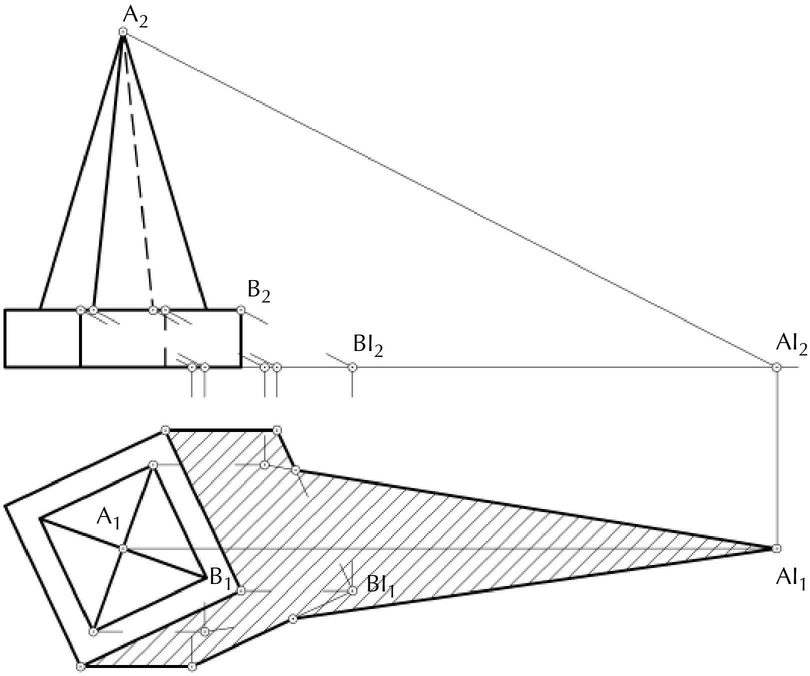
29. ariketa

Kalkulatu monumentuak zoruan sortzen duen itzala. Argiaren norabidea d da.



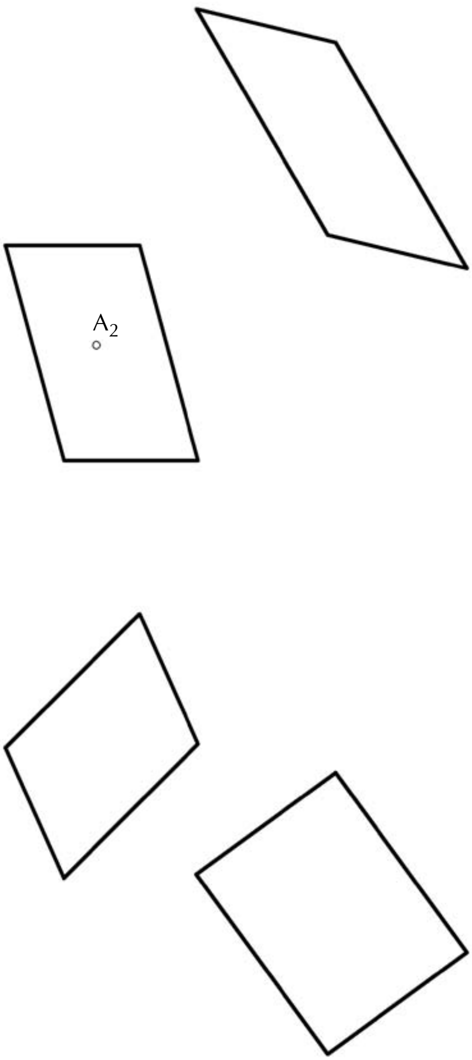
Ebazpena

Monumentuaren erpinetatik d norabidearekiko zuzen paraleloak trazatuko ditugu. Horien eta zoruaren arteko elkarguneak lortutakoan, lotu eta itzala osatuko dugu.



30. ariketa

Bi hormak hodi baten bidez lotu nahi dira. Hodiak ezkerreko hormarekiko zuta izan behar du eta A puntutik igaro. Kalkulatu hodiaren pisua. Dentsitatea 15 kg/m. Eskala 1:100.

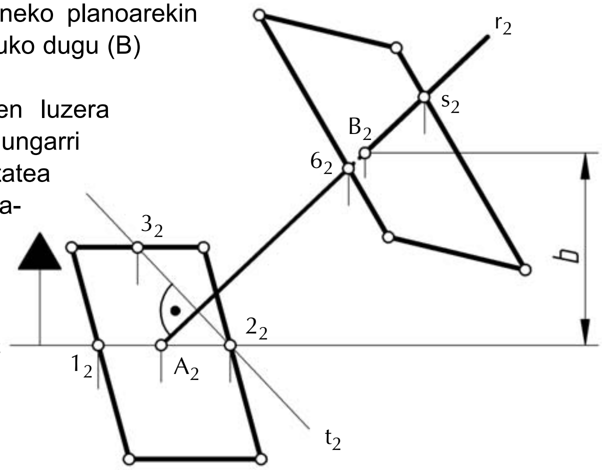


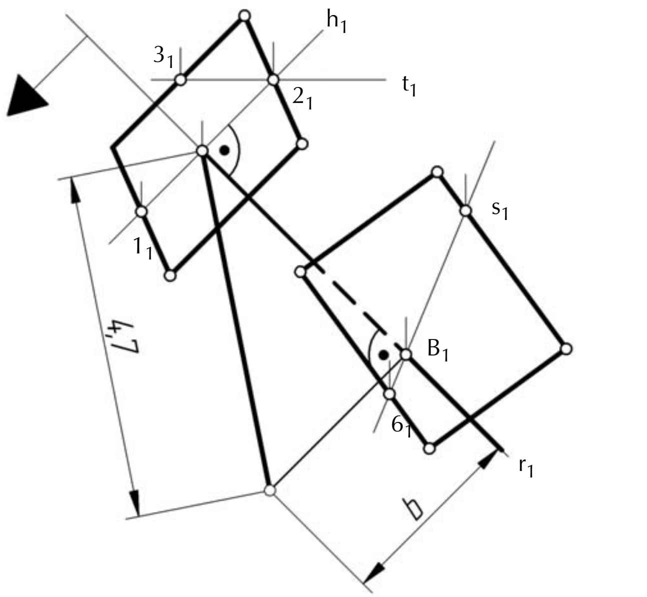
Ebazpena

Ezkerreko planoarekiko zuta den r zuzena marraztuko dugu A puntutik abiaturik. Horretarako, planoko zuzen horizontala (h) eta aurrez aurreko zuzena (f) erabiliko ditugu.

Gero, r zuzenak eskuineko planoarekin duen elkargunea aurkituko dugu (B)

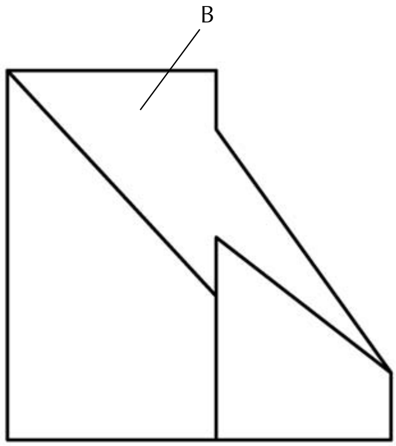
Amaitzeko, r zuzenaren luzera aurkituko dugu bista lagungarri baten bidez, eta, dentsitatea ezagututa, pisua kalkulatuko dugu. Pisua = 4,7m x 15 kg/m = 70,5 kg

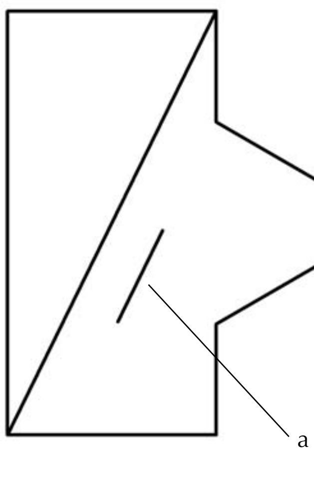




31. ariketa

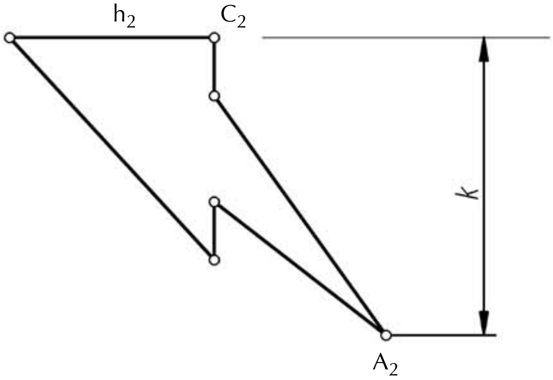
Marraztu zulo bat piezan ikusten den “B” aurpegian. Zuloaren sekzio zuzena “a” aldeko karratua da. Zuloa “B” aurpegiarekiko zuta da, eta pieza osoa zeharkatzen du.

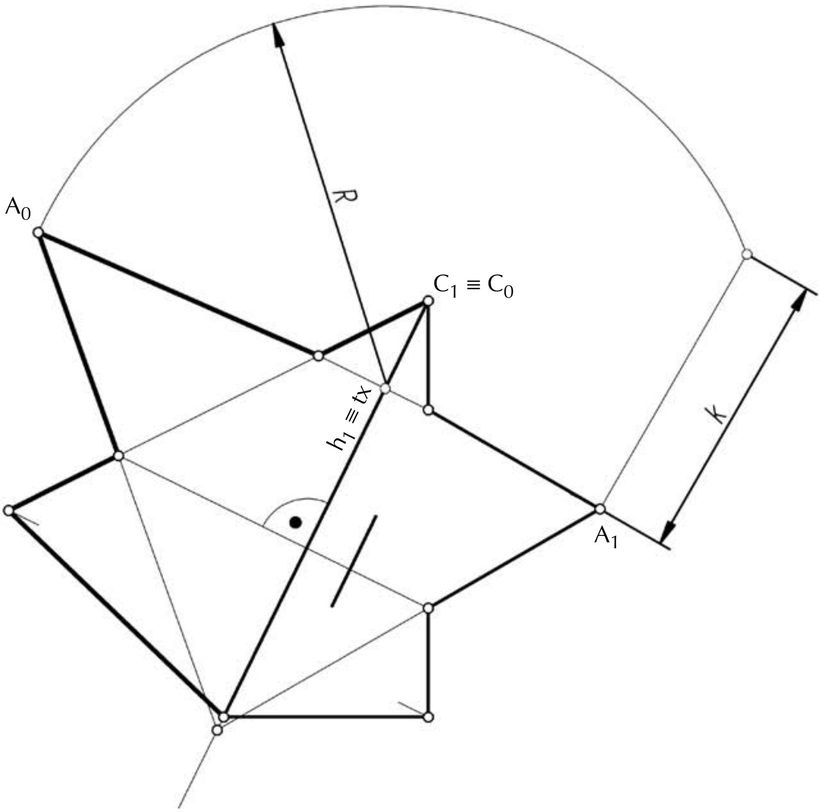




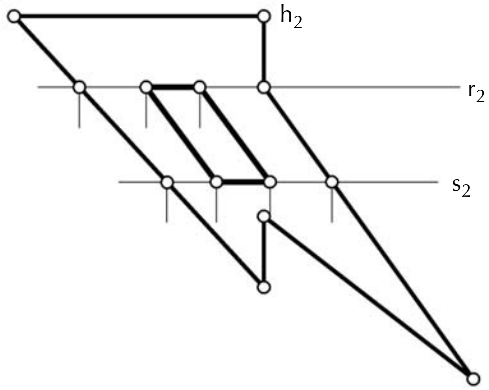
Ebazpena

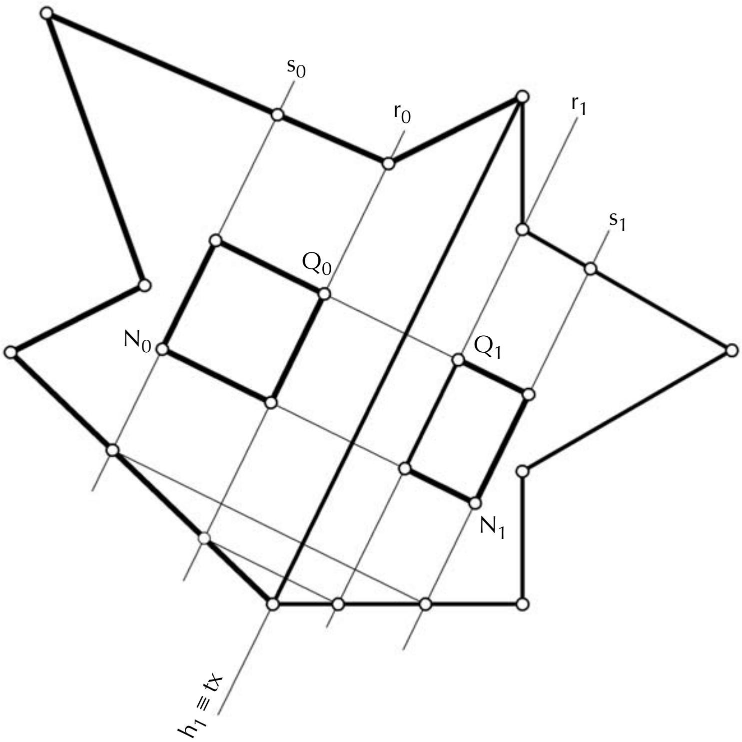
h zuzena bandatzat hartuta, “B” aurpegia eraitsiko dugu.



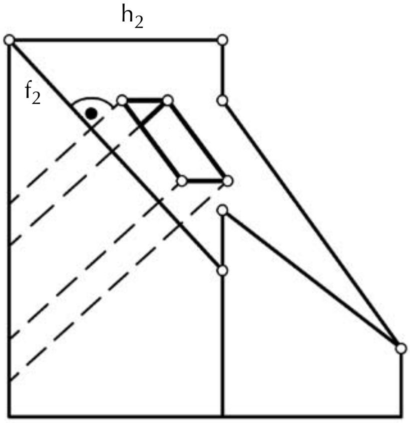


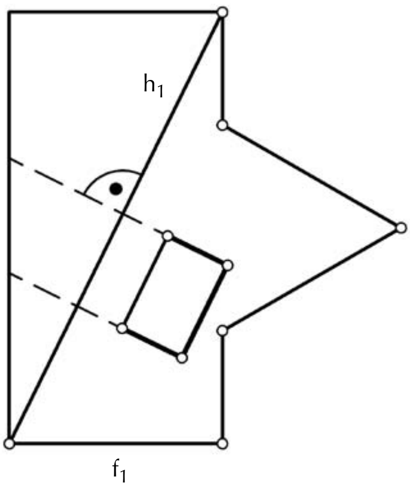
Karratuaren aldea eraitsi ondoren, karratua osatuko dugu.
Gero, karratuaren proiekzio horizontala lortuko dugu.
Hurrengo urratsean, karratuaren proiekzio bertikala lortuko dugu.





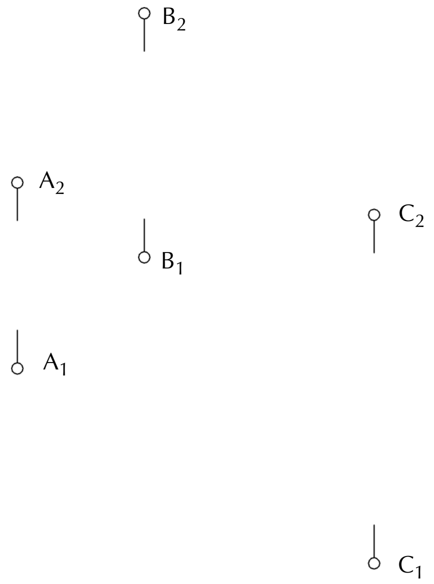
Amaitzeko, “ B” aurpegiarekiko zuta den zuloa marraztuko dugu. Horretarako, f aurrez aurreko zuzena eta h zuzen horizontalak erabiliko ditugu.





32. ariketa

Lortu A, B eta C puntuetatik 40 mm-ra dagoen Z puntua. Aukeratu kotarik handiena daukan ebazpena.



Ebazpena

Egin behar dugun lana ondoko perspektiban azaltzen da:

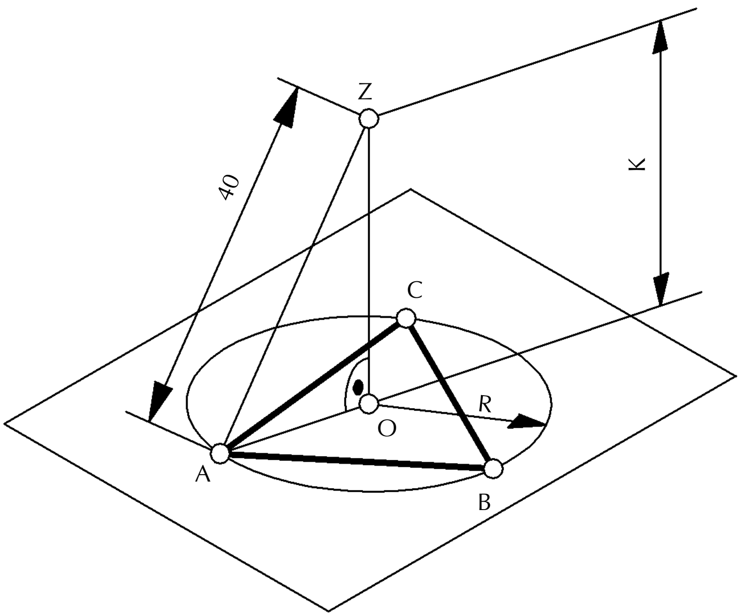
– A, B eta C puntuetatik igarotzen den triangelu laguntzaile bat marraztuko dugu

– Triangeluaren zirkunzentroa (O puntua) aurkitu ondoren, A, B eta C puntuetatik igarotzen den zirkunferentzia marraztuko dugu. Lana benetako magnitudean egin ahal izateko, triangelua eraitsiko dugu.

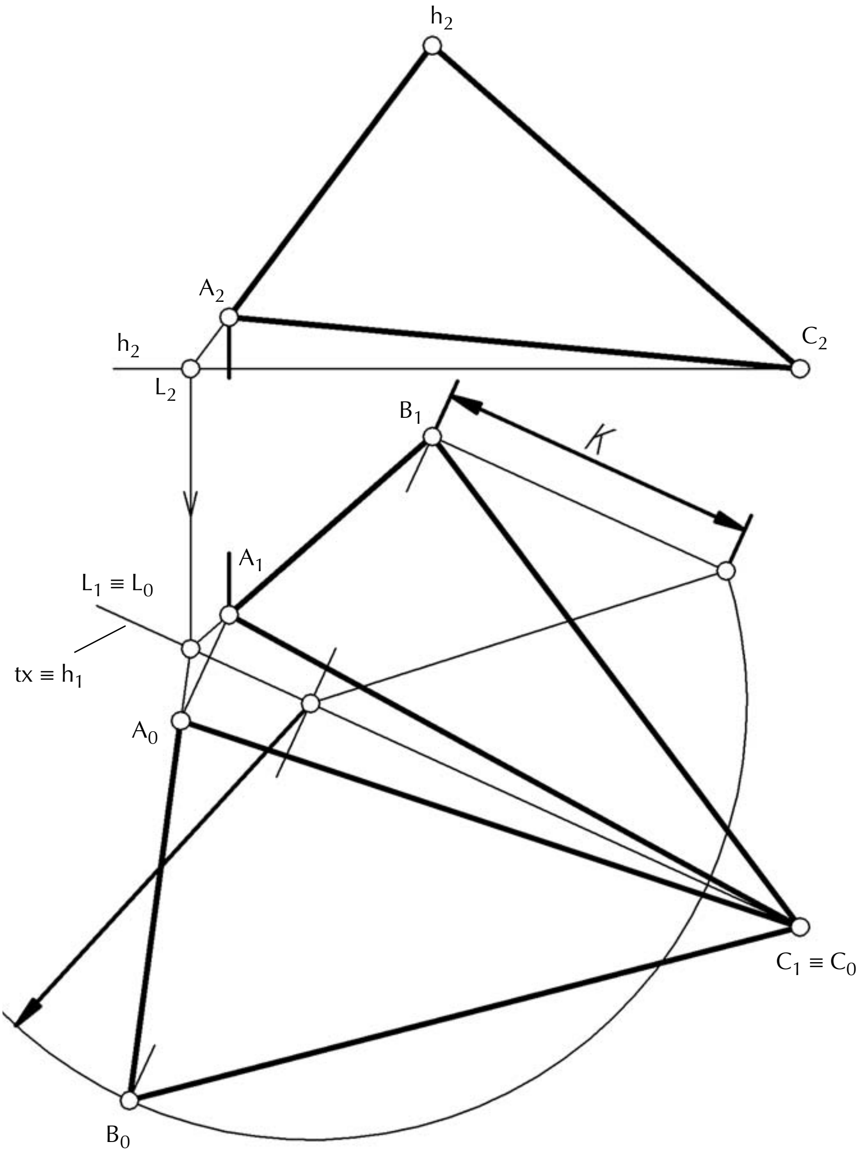
– O puntutik abiatuz, A, B eta C puntuek definitzen duten planoarekiko zuzen zuta marraztuko dugu.

– Triangelu zuzen laguntzaile bat eraikiko dugu gero. Hipotenusa 40 mm-koa izango da eta kateto bat aurreko zirkunferentziaren erradioa (R). Beste katetoaren luzera k distantzia izango da.

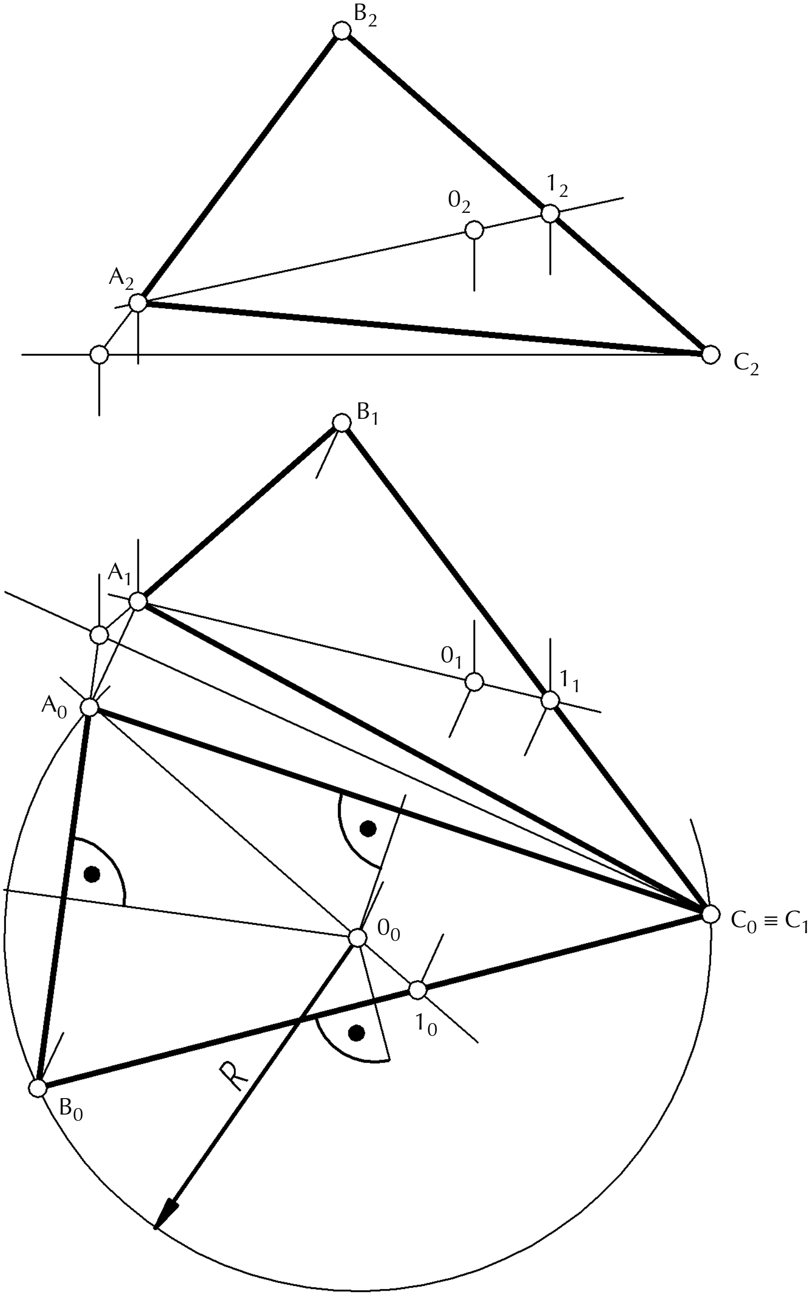
– O puntutik abiatuz, k neurria neurtuko dugu zuzen zutean, Z puntua lortzeko.



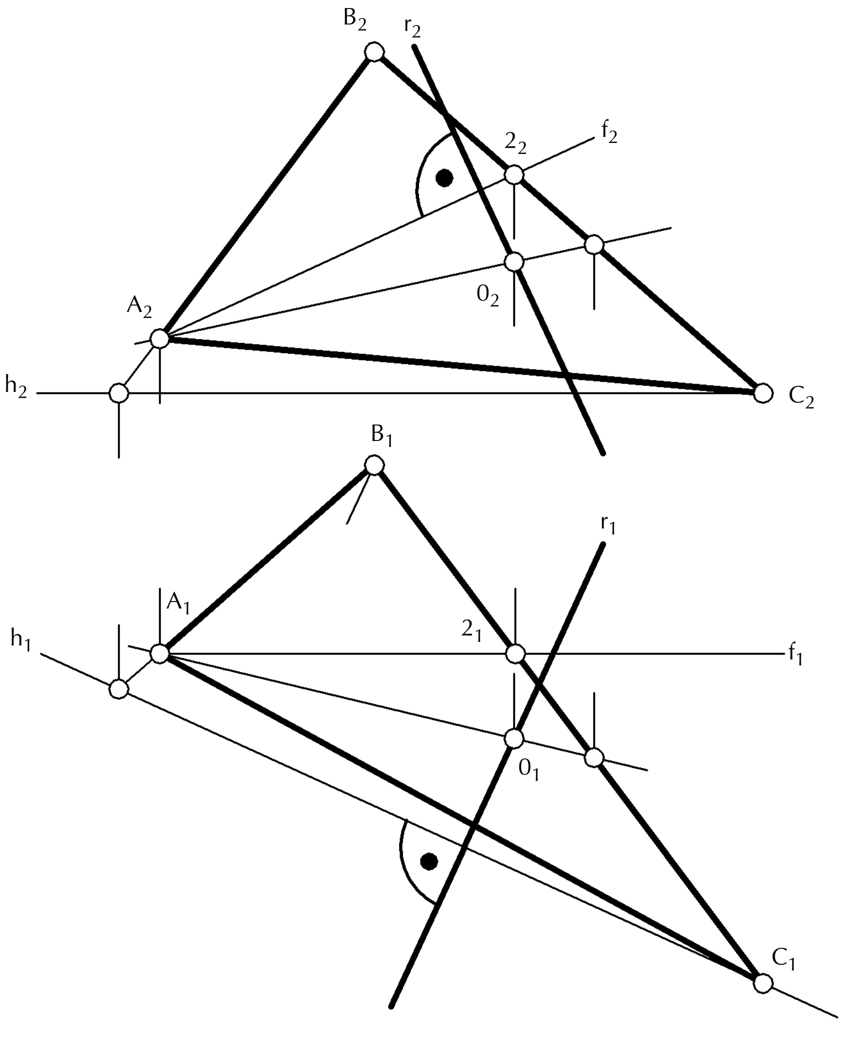
– ABC triangelua eraitsiko dugu, benetako magnitudea lortzeko.



– Eraispenean, triangeluaren zirkunzentroa (O_0) aurkituko dugu. Gero, zirkunferentzia zirkunskribatua marraztuko dugu.

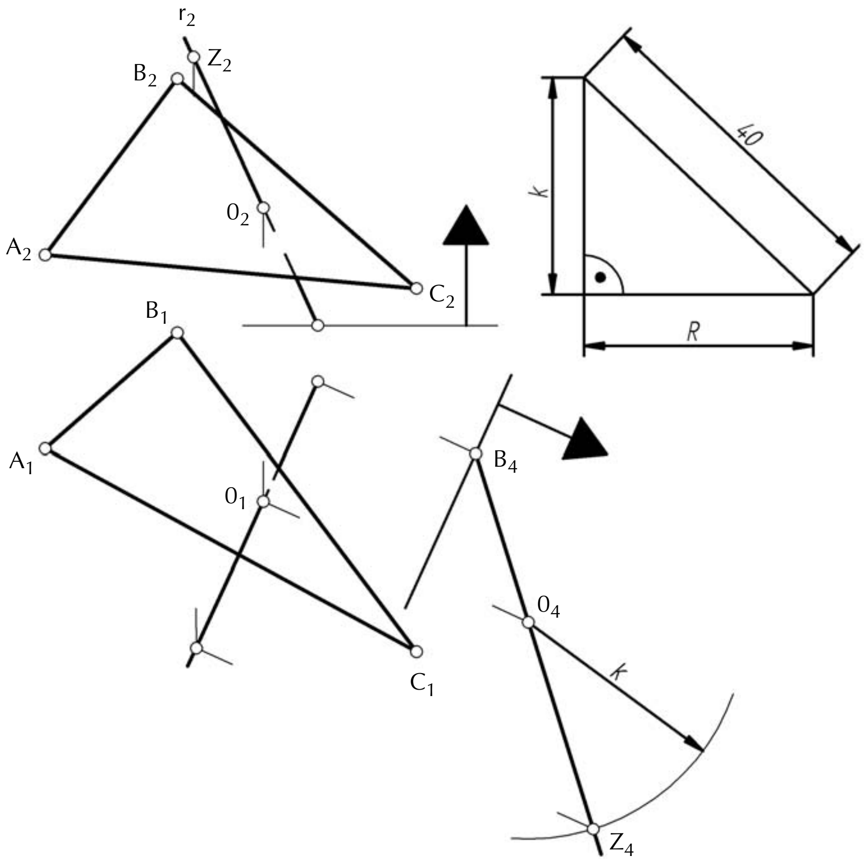


Zirkunzentroa proiekzio horizontalera eta bertikalera igoko dugu (O_1 eta O_2). Ondoren, planoarekiko r zuzen zuta marraztuko dugu, aurrez aurreko f zuzena eta h horizontala erabiliz.



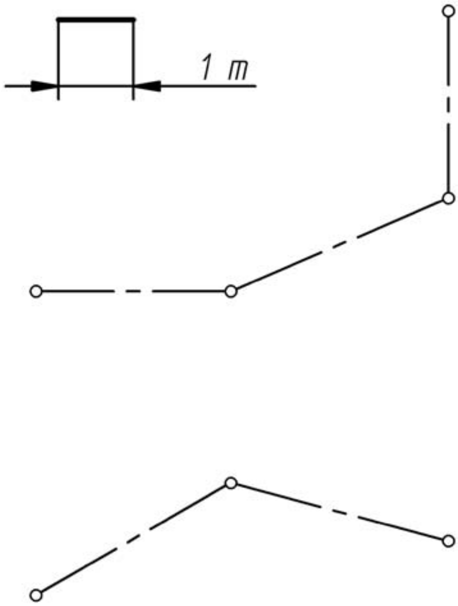
Eskuinean, triangelu zuzen laguntzaile bat eraikiko dugu. Datuak hipotenusa eta R neurria (zirkunferentzia zirkunskribatuaren erradioa) dira. Horiekin, k neurria lortuko dugu.

Bista lagungarri baten bidez, r zuzenaren benetako luzera aurkituko dugu (r_4). k neurria haraino eramanda, Z_4 aurkituko dugu (kotarik handiena daukan aukera erabiliko dugu). Amaitzeko, Z puntuaren proiekzio horizontala eta bertikala aurkituko ditugu.



33. ariketa

Plano honetan, hodi baten ardatza ageri da. Kalkulatu hodiaren pisua. Eskala 1:100. Dentsitatea: 15 kg/m.



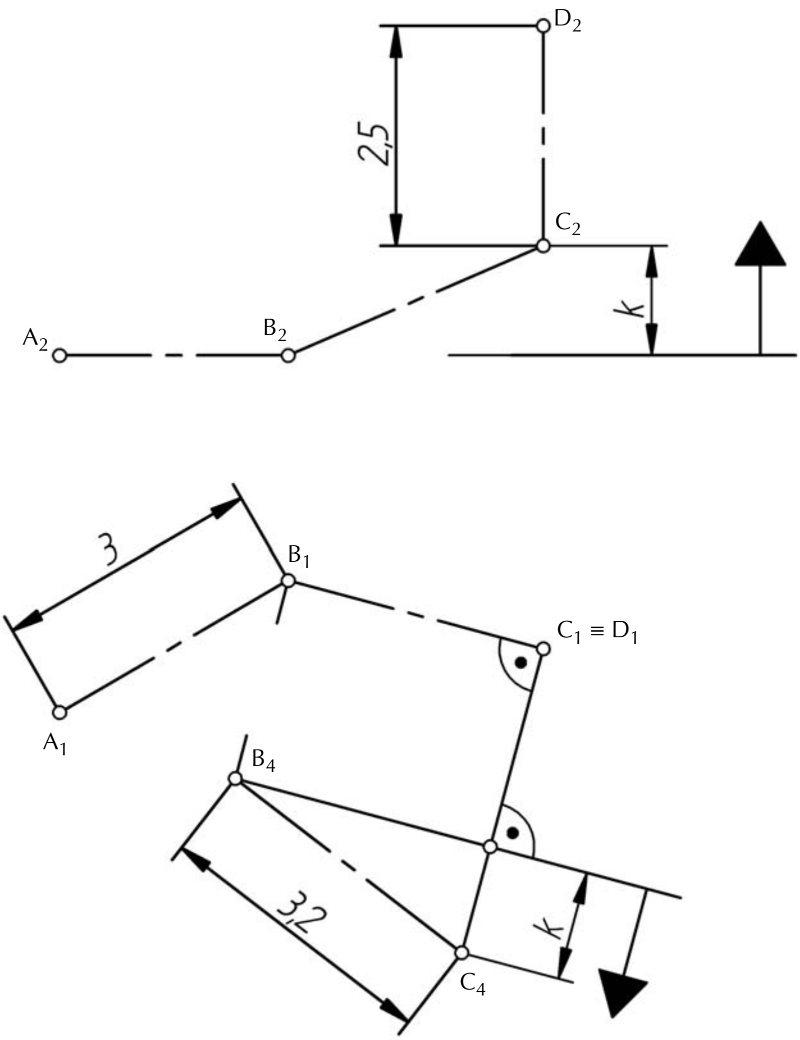
Ebazpena

Hodiaren ezkerreko zatia horizontala denez, zati horren benetako magnitudea proiekzio horizontalean ikusiko dugu.

Eskuineko zatia bertikala da; beraz, horren proiekzio bertikalean dugu benetako magnitudea.

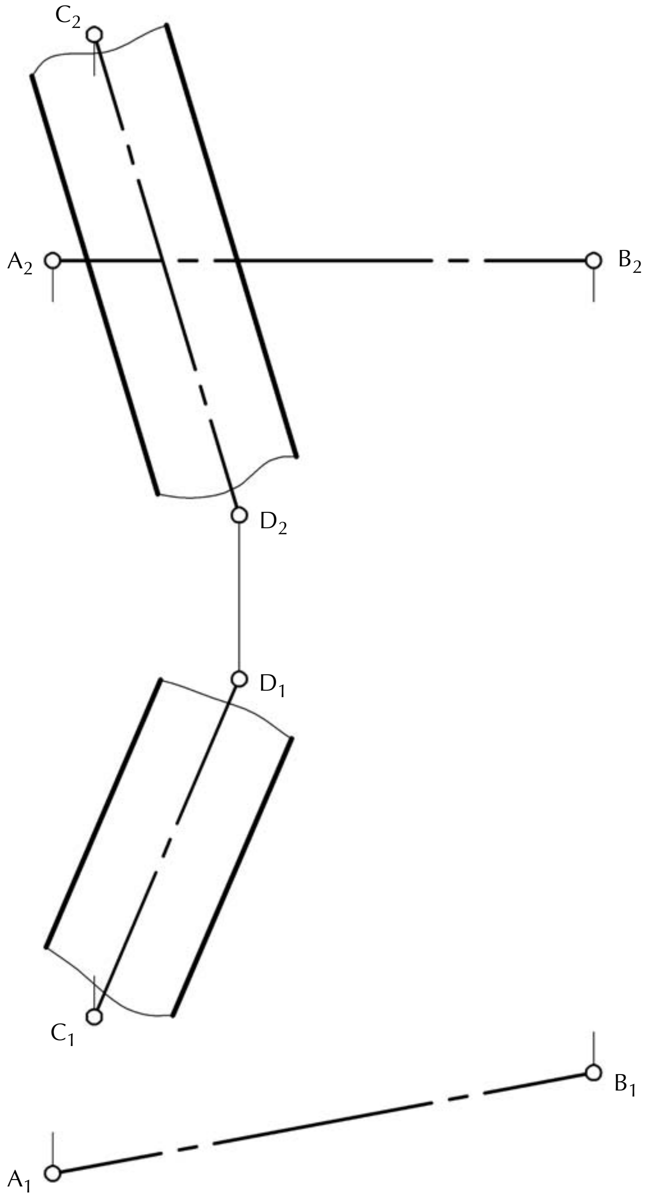
Azkenik, erdiko zatia zeiharra denez, bista lagungarri bat marraztuko dugu zati horren benetako magnitudea lortzeko.

Luzera guztiak batuko ditugu (3 + 3,2 + 2,5 = 8,7 m), eta, dentsitatea ezaguna dugunez, pisua kalkula dezakegu: 8,7 m x 15 kg/m = 130,5 kg.



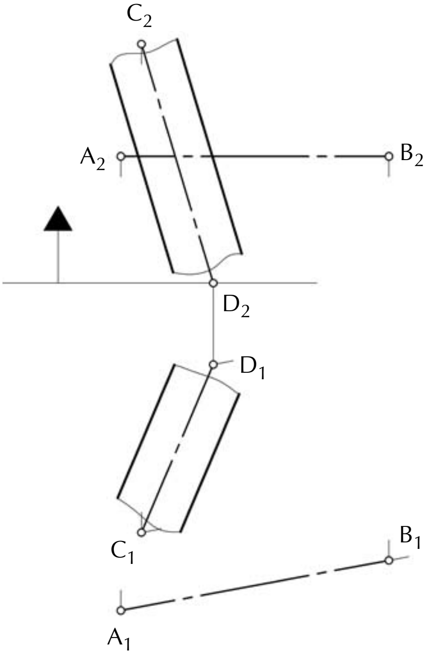
34. ariketa

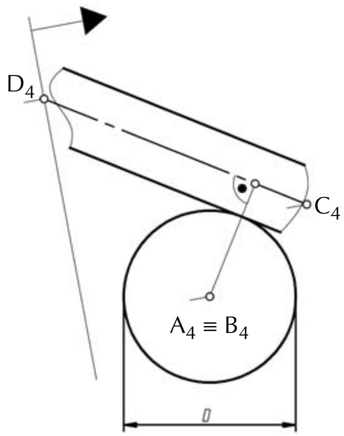
Izan bitez hodi baten bistak (CD) eta beste hodi baten AB ardatza. Lortu bigarren ardatzak izan behar duen diametroa CD hodiarekiko ukitzaile izateko.



Ebazpena

AB zuzena horizontala denez, bista lagungarri baten bidez, puntako bihurtuko dugu, eta hodien ardatzen arteko distantzia benetako magnitudean ikusiko dugu. Beste hodiak eduki dezaken diametro handiena "D" da.



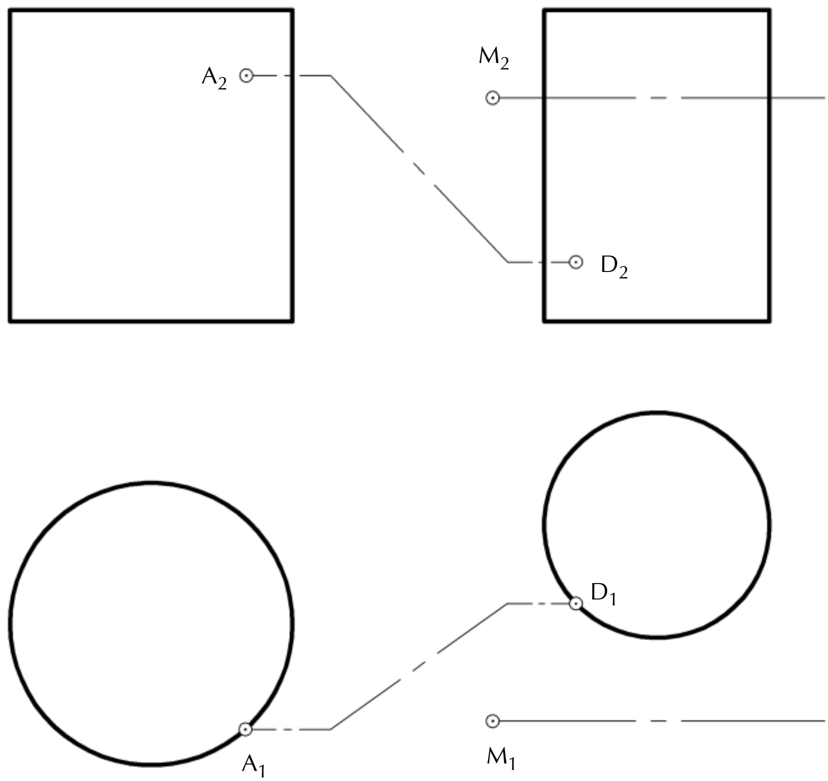


35. ariketa

Izan bitez bi depositu lotzen dituen AD hodia eta beste hodi baten M muturra. Hau eskatzen da:

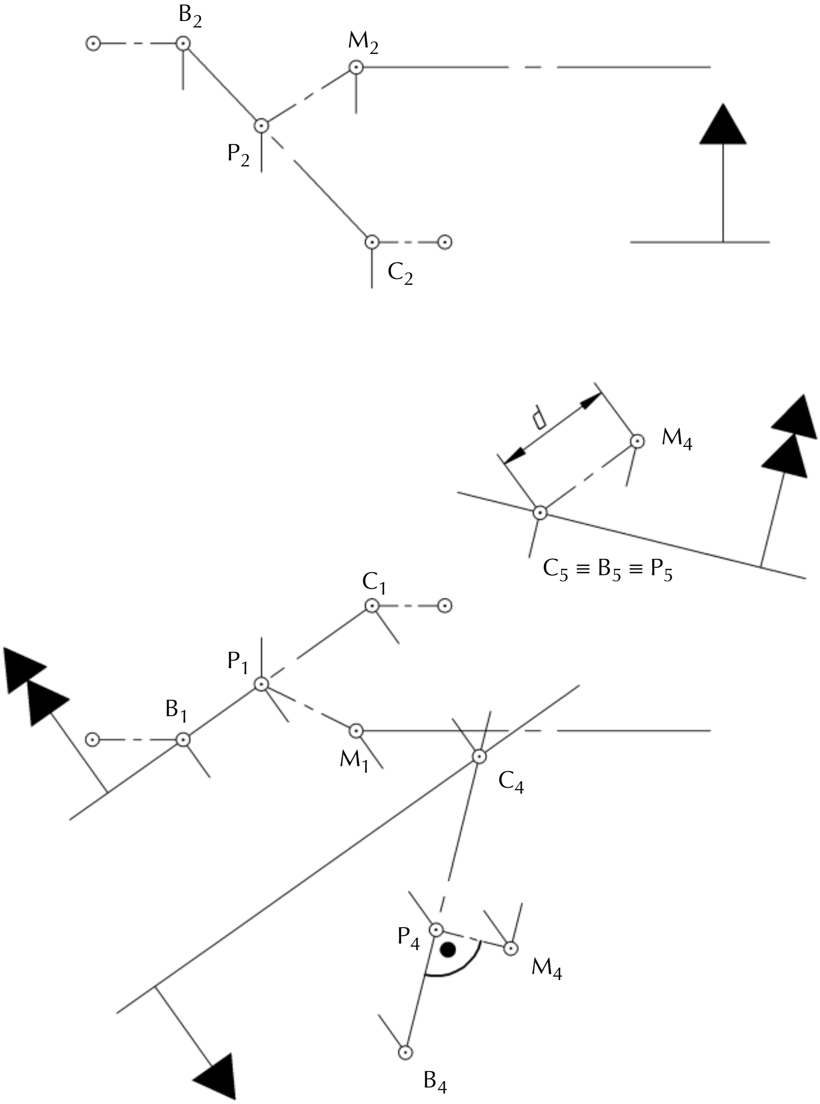
– M muturra AD hodiarekin lotzeko hodi motzena

– Aurreko hodiaren luzera.



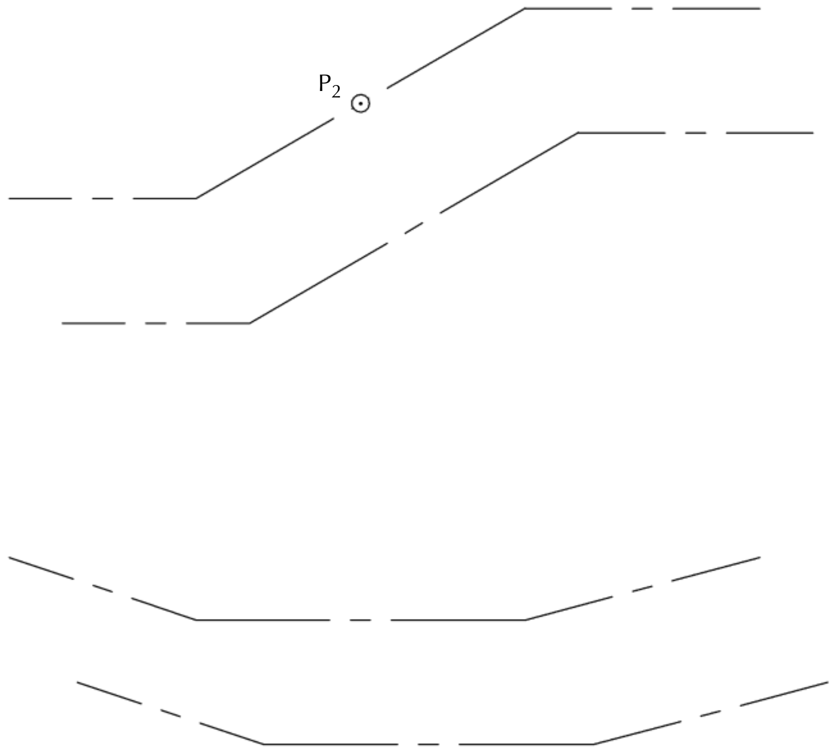
Ebazpena

Zuzenaren eta puntuaren arteko distantzia motzena lortu behar dugu. Horretarako, zuzena punta-zuzen bihurtu behar dugu. Kasu honetan zuzena zeiharra denez, bi bista lagungarri marraztuko ditugu. Bigarren bista lagungarrian, distantzia benetako “d” magnitudean dugu. Lortu dugun P puntu berria ohiko bistara itzuli behar dugu (P1 eta P2) ariketa amaitzeko. Hodi motzena MP da.



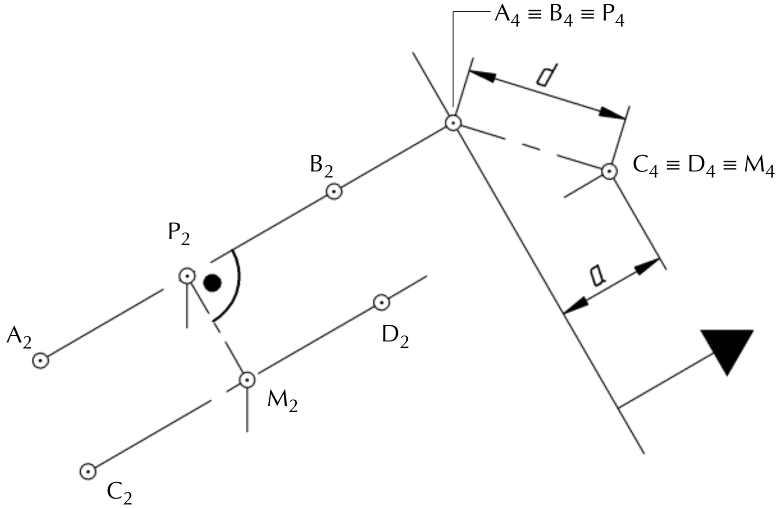
36. ariketa

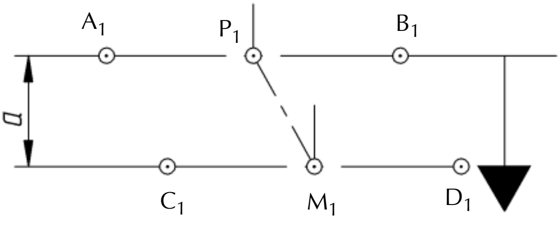
Bi hodi hauek beste baten bidez lotu nahi dira P puntutik abiatuta. Aurkitu loturaren luzera, eta marraztu hodi motzena.



Ebazpena

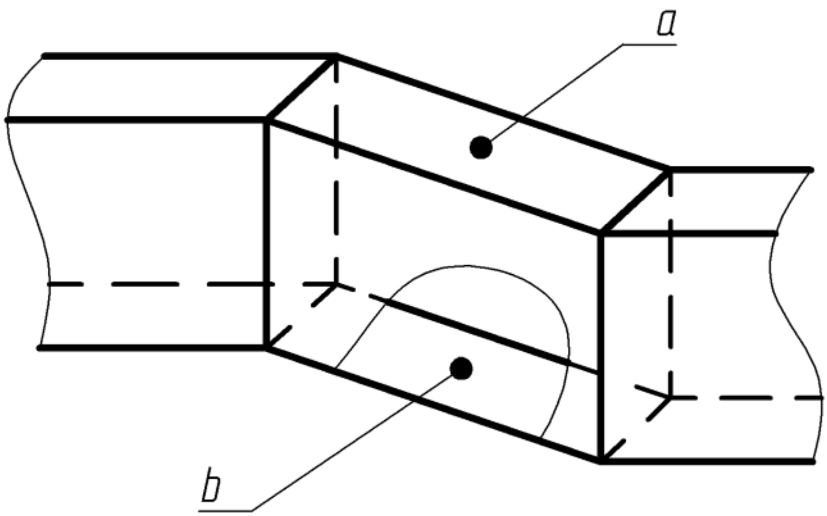
Bi hodien arteko distantzia motzena aurkitzeko, punta-zuzen bihurtu behar ditugu. Kasu honetan aurrez aurrekoak direnez, nahikoa da bista lagungarri bat. Behin M puntu berria lortuta (hodi motzenaren amaiera), ohiko bistara itzuliko dugu (M_2 eta M_1).

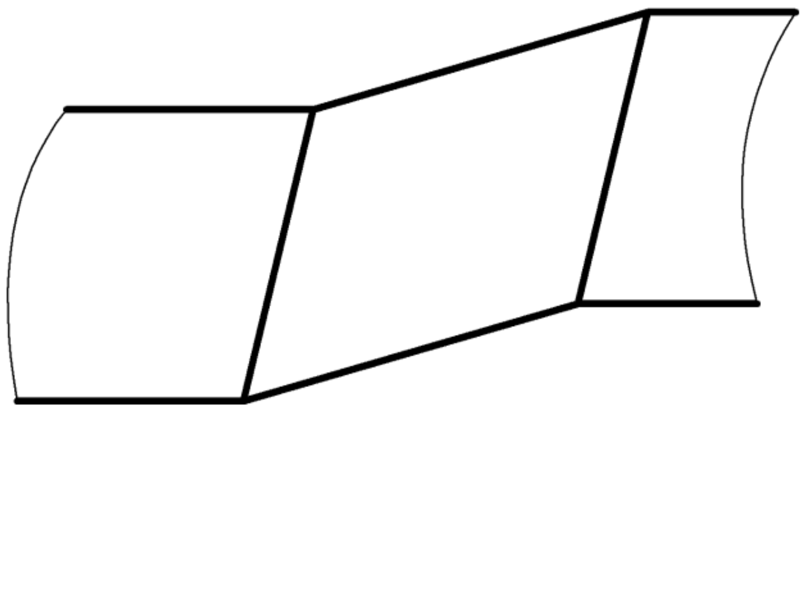




37. ariketa

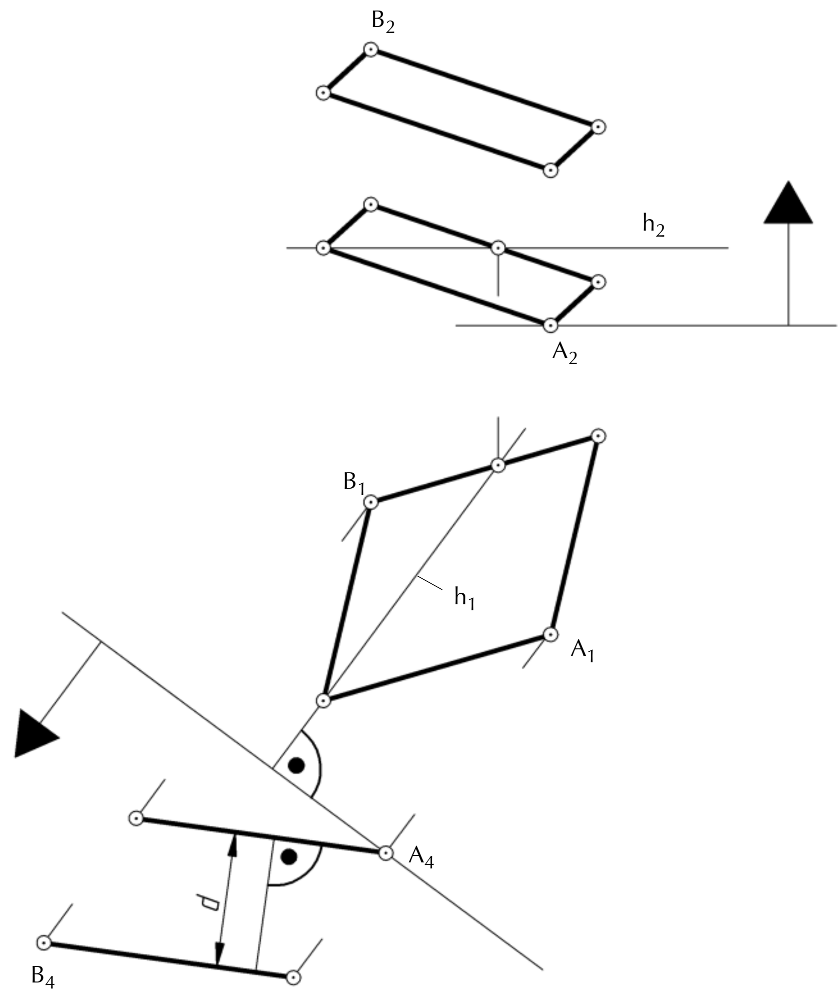
Kalkulatu hodi honetan agertzen diren a eta b xafla paraleloen arteko distantzia.





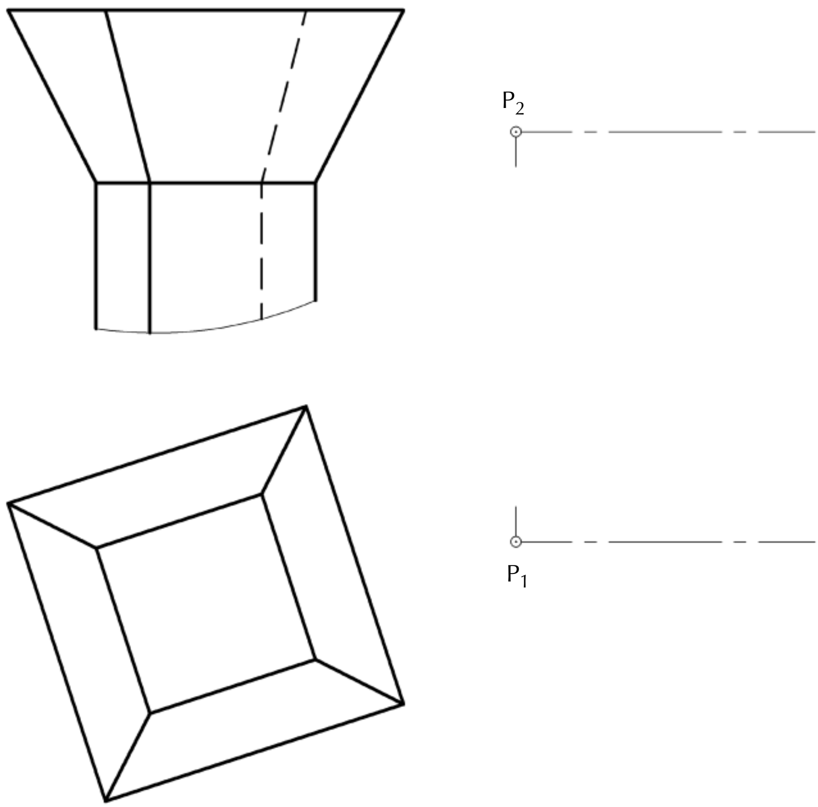
Ebazpena

Ariketa ebazteko, bi planoak aparte marraztu ditugu. Bi plano paraleloen arteko distantzia aurkitzeko, horiek proiektatzaile bihurtu behar ditugu bista lagungarri baten bidez.



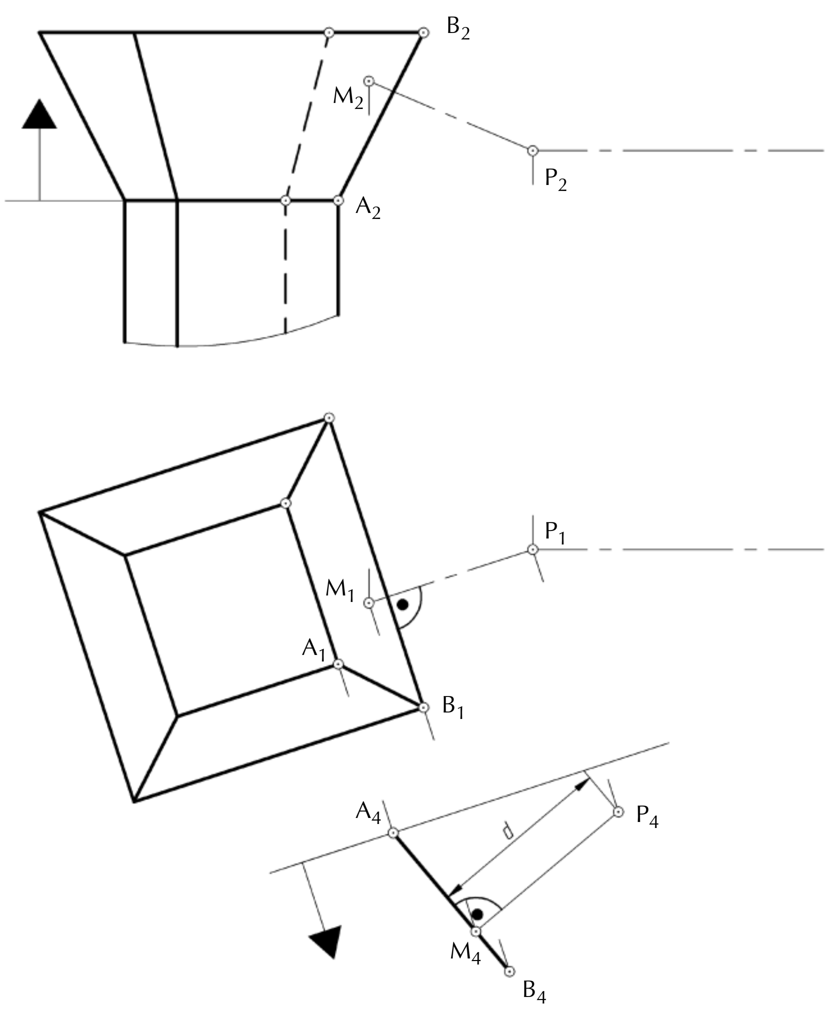
38. ariketa

Hodi baten bukaera (P puntua) eta kalapatxa lotu nahi dira bide laburrena erabiliz. Kalkulatu loturaren luzera, eta marraztu.



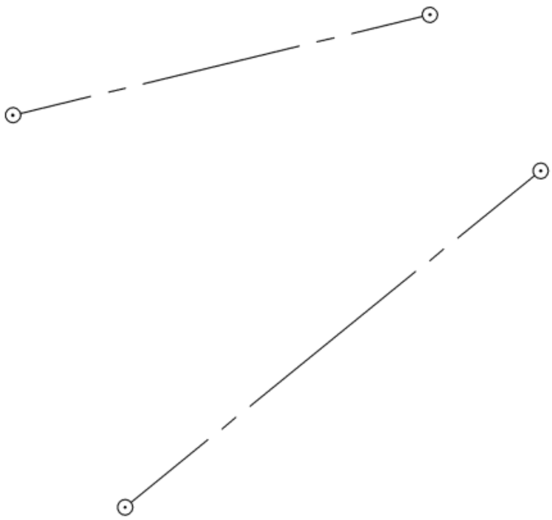
Ebazpena

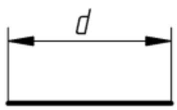
Eskatu diguten loturaren luzera kalkulatzeko, P puntutik gertuen dagoen xafla proiektatzaile bihurtu behar dugu bista lagungarri baten bidez. Bista lagungarrian, loturaren amaierako proiekzioa lortuko dugu (M_4). Ariketa amaitzeko, M puntuaren ohiko bistak lortu behar ditugu (M_2 eta M_1).

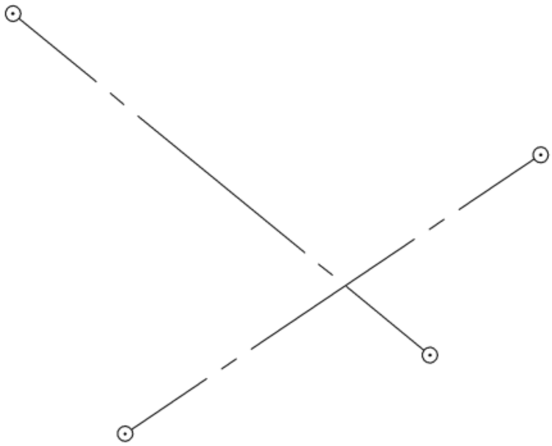


39. ariketa

Izan bitez “d” diametroko bi hodiren ardatz hauek. Kalkulatu hodien arteko tartea.

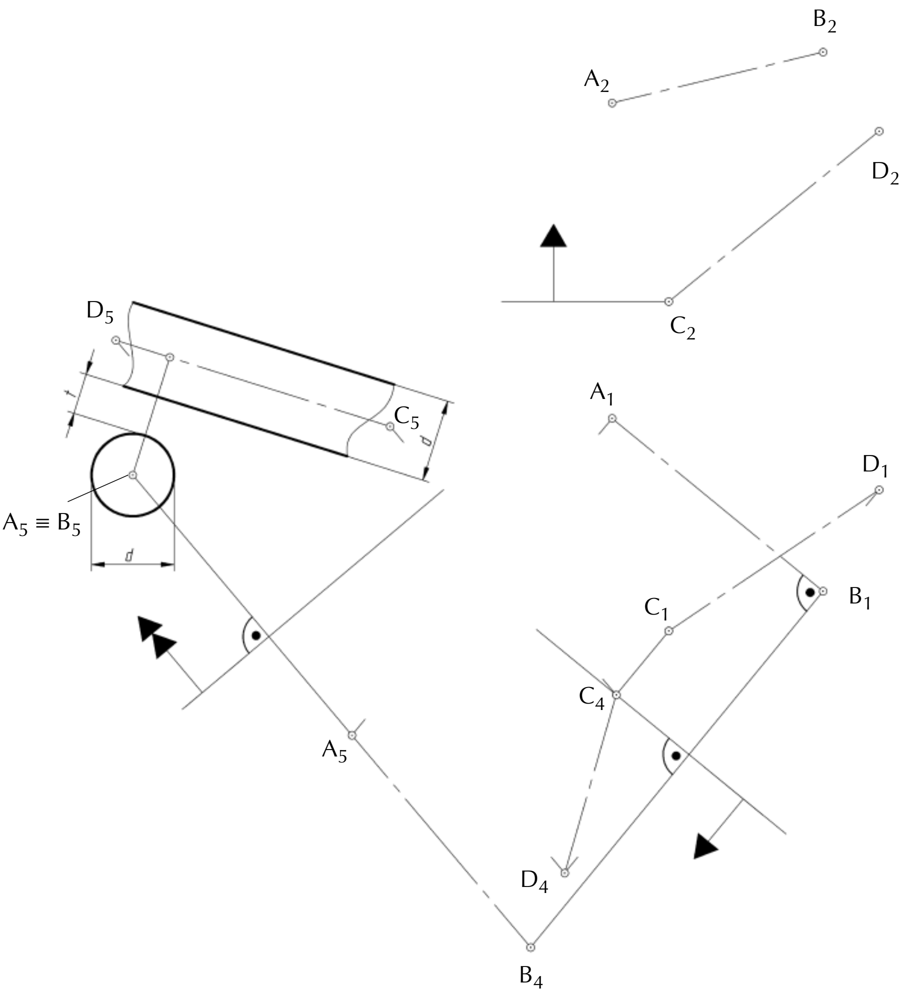






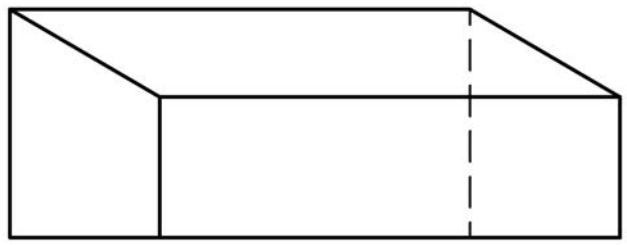
Ebazpena

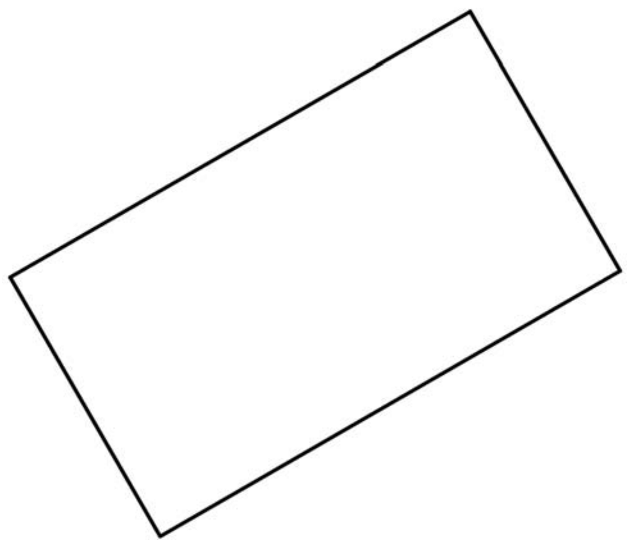
Bi ardatzen arteko distantzia minimoa kalkulatu behar dugu lehendabizi. Gero, diametroaren bidez, hodiak marraztuko ditugu bigarren bista lagungarrian. Tartea “t” da.



40. ariketa

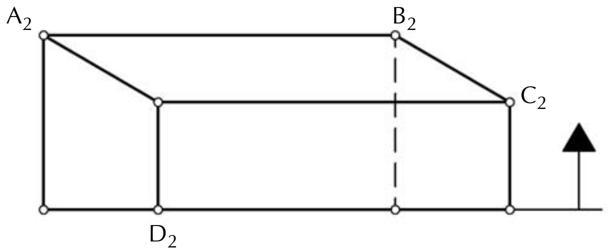
Aurkitu piezaren goiko aurpegiak proiekzio-plano horizontalarekin eratzen duen angelua.

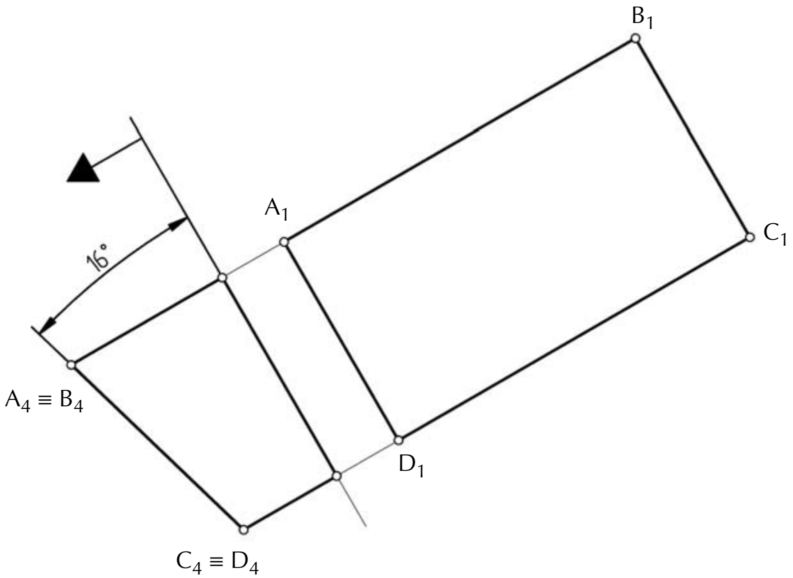




Ebazpena

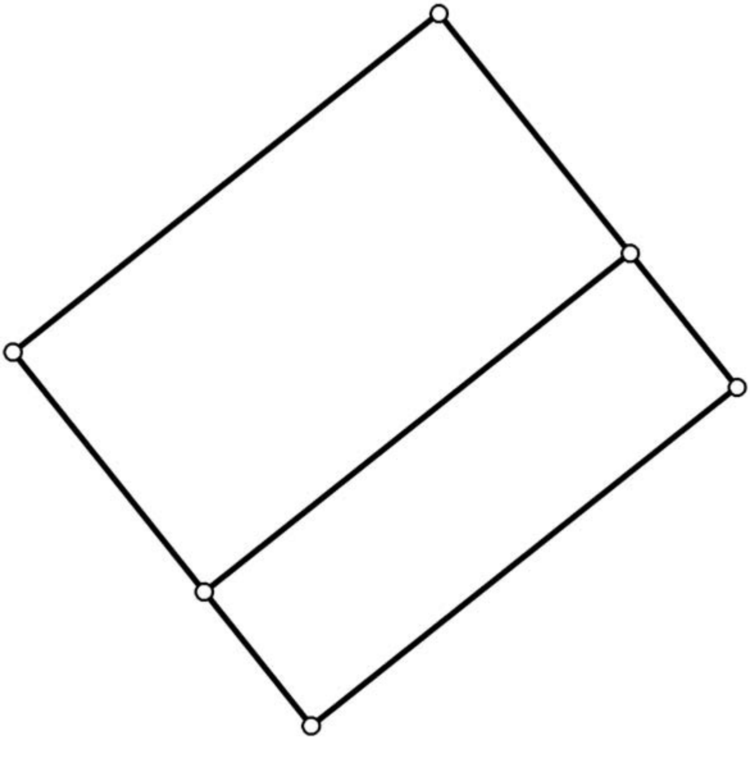
Angelua lortzeko, bista lagungarri bat erabiliko dugu. Proiekzio-plano berria bertikala eta goiko aurpegiarekiko zuta izango da; beraz, aurkitu nahi genuen angelua benetako magnitudean lortuko dugu.

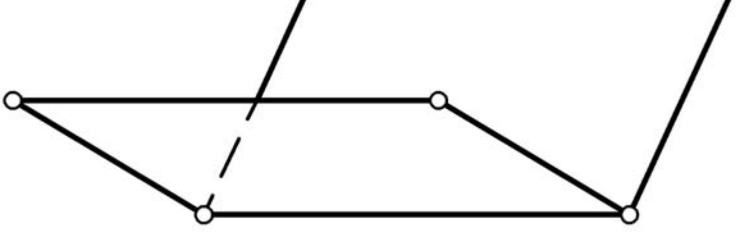




41. ariketa

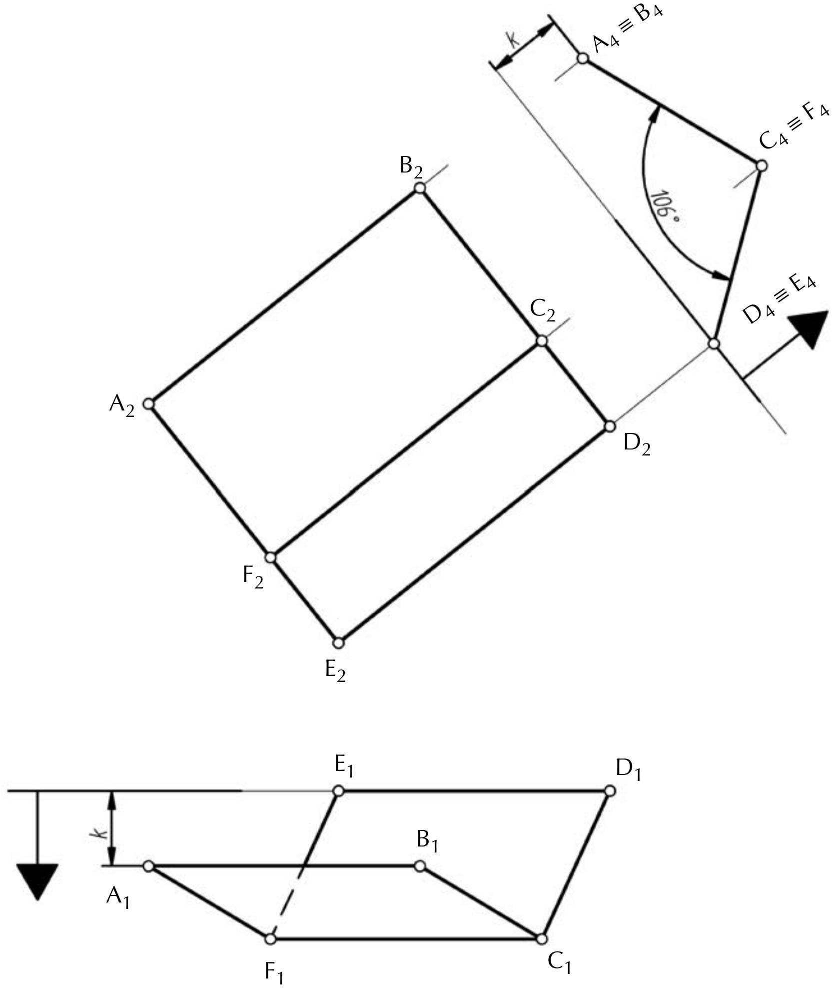
Kalkulatu bi planoek eratzen duten angelua.





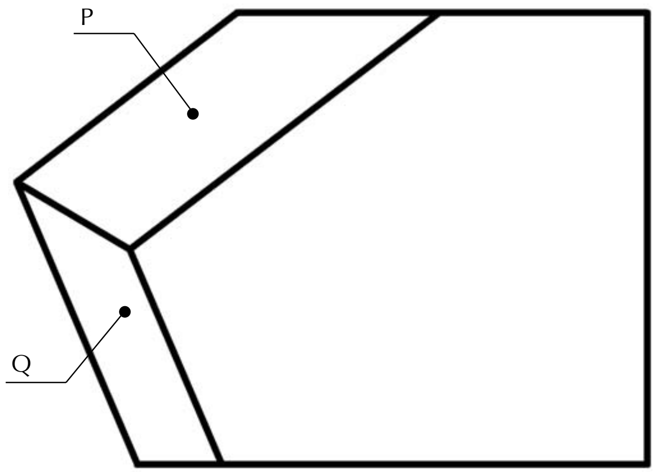
Ebazpena

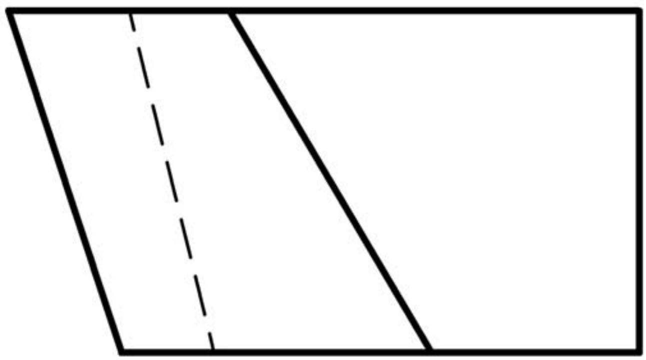
Bi planoen arteko elkargunea aurrez aurrekoa denez, bista lagungarri baten bidez, puntako bihurtuko dugu eta angelua zuzenean ikusiko dugu.



42. ariketa

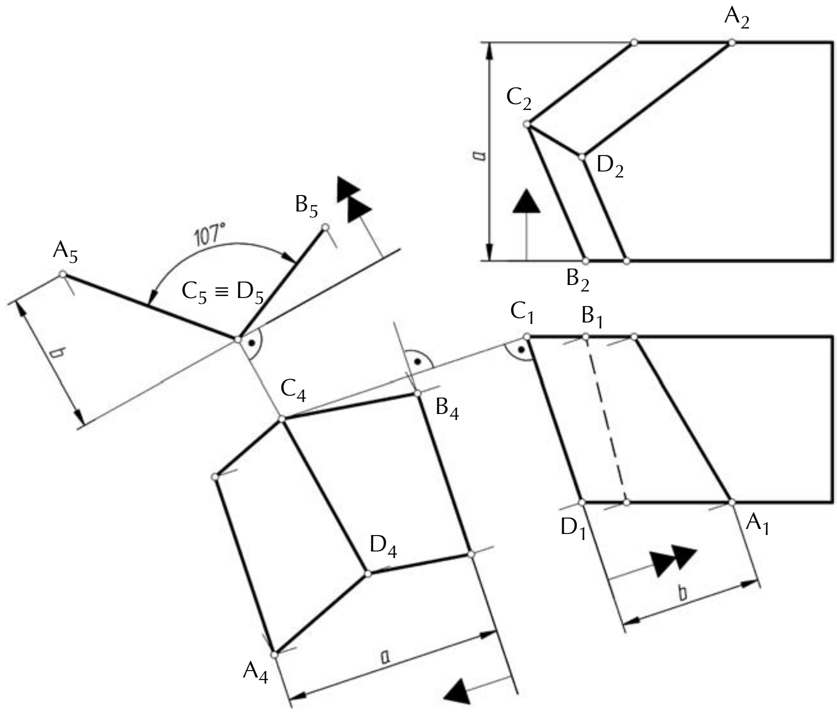
Kalkulatu tornu honetako erremintaren P eta Q aurpegiek eratzen duten angelua.





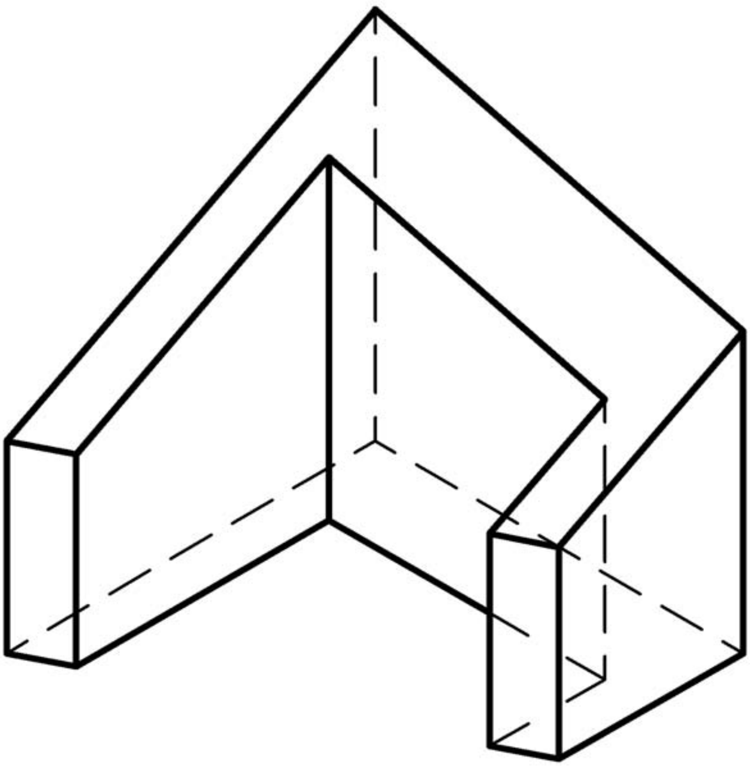
Ebazpena

Angelua zuzenenean ikusteko, bi planoen arteko elkarguneak (CD ertza) puntakoa izan behar du. CD zeiharra denez, bi bista lagungarri marraztuko ditugu puntako bihurtzeko. Bista lagungarri horiexek osatuko ditugu P eta Q aurpegientzat.



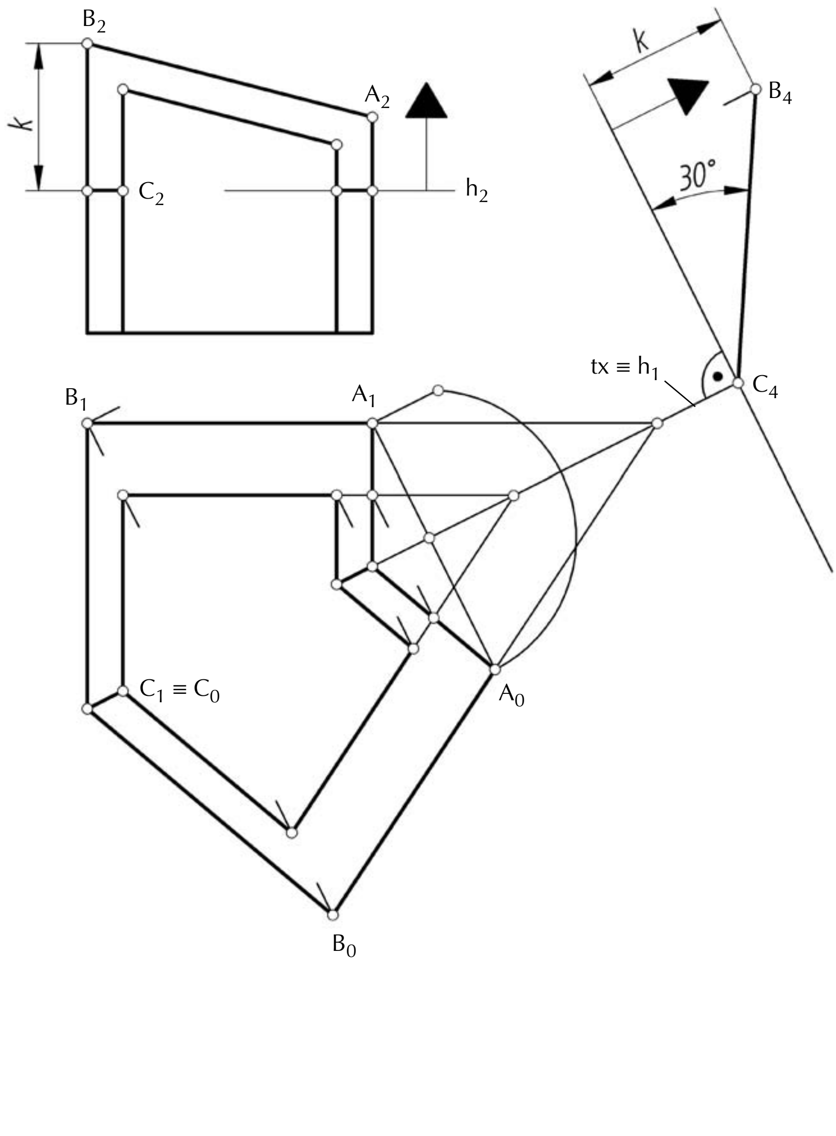
43. ariketa

Lortu poliedroaren aurpegi zeiharraren benetako magnitudea eta proiekzio--plano horizontalarekin eratzen duen angelua.



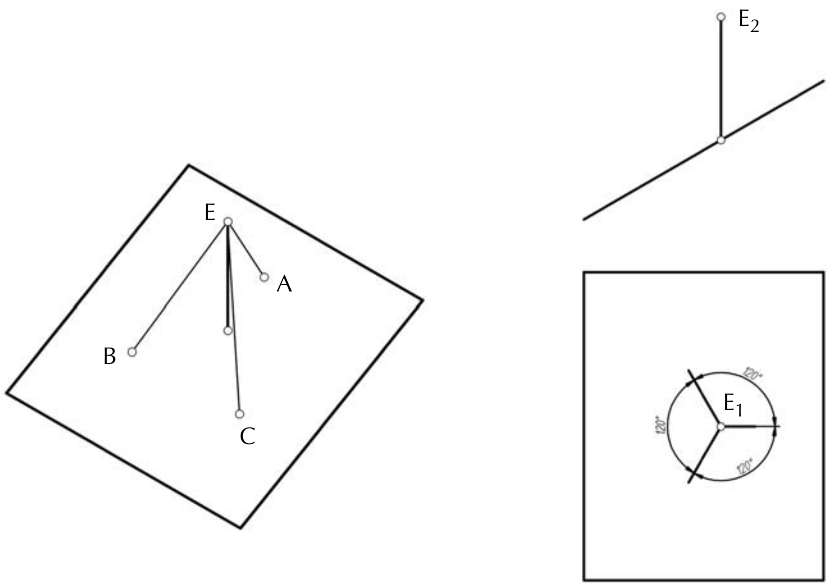
Ebazpena

Piezaren bistak lortu ondoren, aurpegi zeiharraren benetako magnitudea lortzeko, eraispen bat egingo dugu. Banda h zuzen horizontala da. Aurpegia proiektatzaile bihurtuz, kalkulatu nahi genuen angelua lortuko dugu zuzenean (30º).



44. ariketa

Teilatu batean, hiru tenkagailu erabili nahi dira antena bat lotzeko. Tenkagailuek 30º-ko angelua eratu behar dute antenarekin. Tenkagailuen kokapena goitiko bistan ageri da.



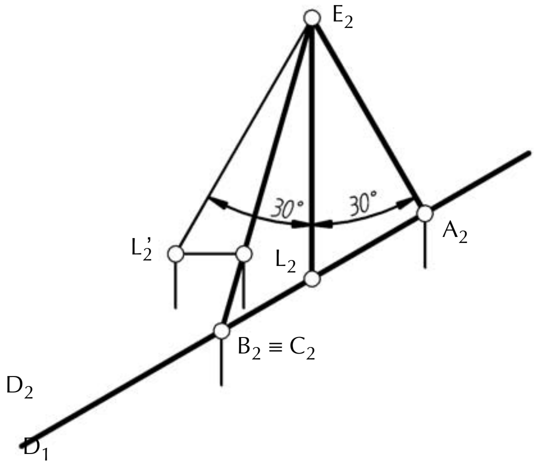
Ebazpena

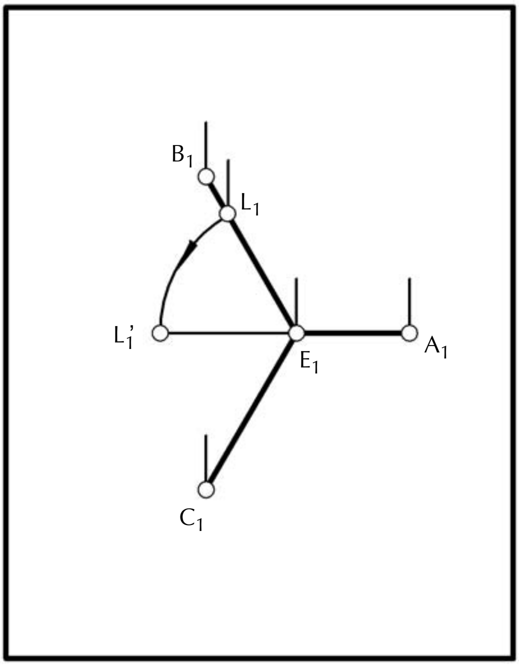
AE tenkagailua aurrez aurrekoa denez, antenarekin eratzen duen angelua zuzenean ikusiko dugu aurretiko bistan. Behin E_2A_2 tenkagailuaren aurretiko bista trazatuta, A puntua jaitsiko dugu A_1E_1 lortzeko.

BE tenkagailua lortzeko, biraketa bat egingo dugu aurrez aurreko bihurtu arte L_1 puntu laguntzailea erabilita. Biraketa-ardatza antena bera izango da. Ondoren, antenarekin eratu behar duen angelua kontuan hartuta, $E_2L'_2$

marraztuko dugu. Gero, biraketa desegingo dugu eta L_2 lortuko dugu. B_2–L_2 tenkagailua luzatuta, teilatuarekin duen elkargunea, B_2, lortuko da. Amaitzeko, B_1 marraztuko dugu.

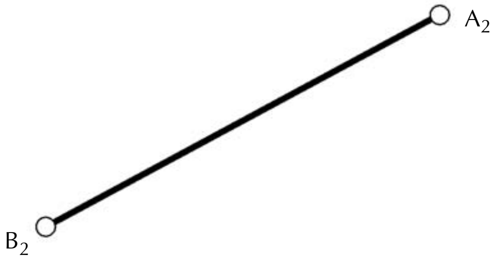
CE tenkagailua aurrekoarekiko simetrikoa denez, zuzenean marraz daiteke.

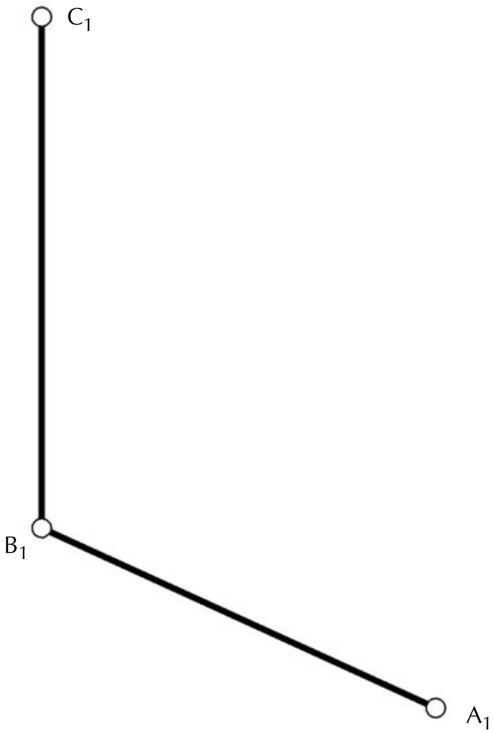




45. ariketa

Izan bitez AB hodiaren bi bistak eta BC hodiaren goitiko bistak. Lortu AB hodiaren luzera eta horizontalarekin eratzen duen angelua. Kalkulatu BC hodiaren luzera, horizontalarekin 45º-ko angelua eratzen duela jakinda (C puntuak B puntuak baino kota handiagoa du). Eskala 1:100.

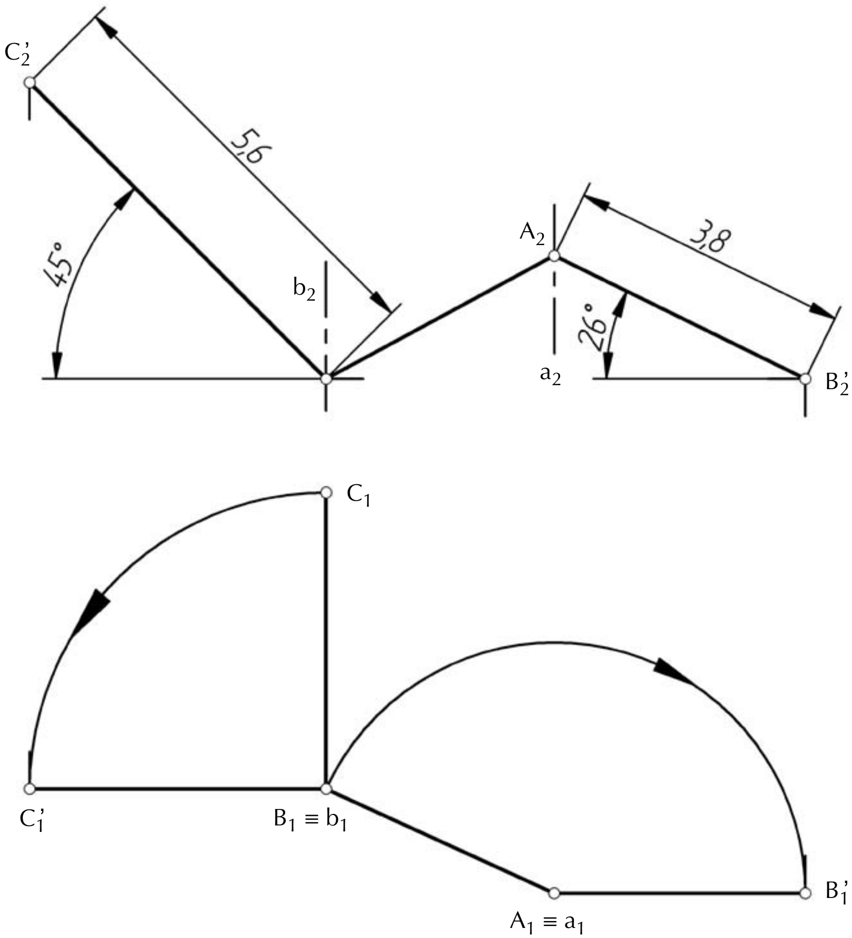




Ebazpena

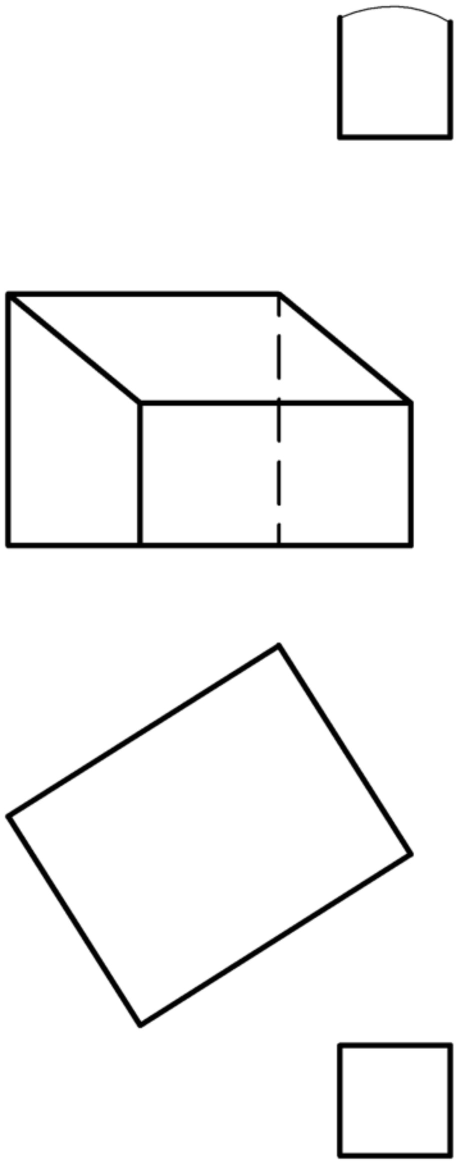
Biraketa baten bidez, “a” ardatza erabiliz, AB hodia aurrez aurreko bihurtuko dugu. Beraz, zuzenean aurkituko ditugu luzera (3,8 m) eta angelua (26º).

“b” ardatza erabiliz, BC biratu behar dugu aurrez aurreko bihurtu arte. Aurretiko bista biratua marraz dezakegu angeluari esker. Ondoren, luzera neurtuko dugu (5,6 m).



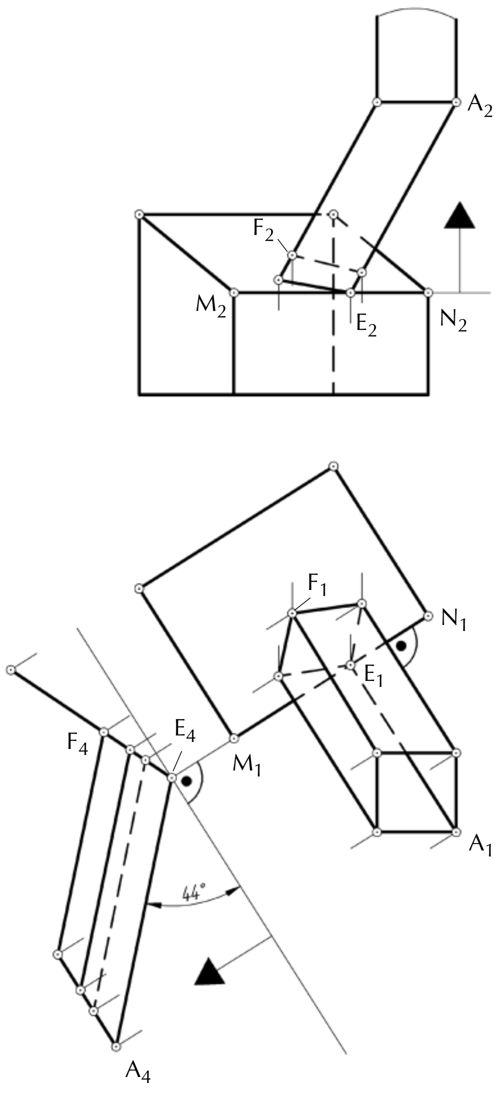
46. ariketa

Hodi baten bidez lotu nahi dira hodi bertikala eta deposituaren goiko xafla. Marraztu bigarren hodi hori, kontuan izanik angelurik handiena osatu behar duela horizontalarekin eta ahal den motzena izan behar duela.



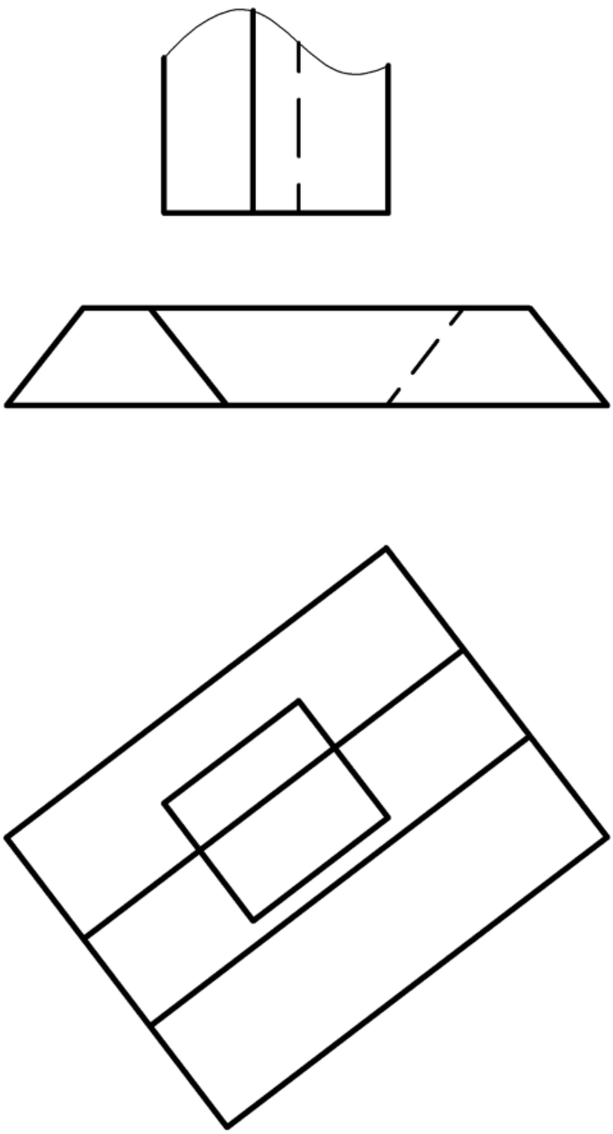
Ebazpena

Marraztu behar den hodiak inklinazio handiena izan dezan, A puntutik abiatzen den ertzak depositUaren MN ertzean amaitu behar du. Bestetik, motzena izateko, MN eta A puntutik abiatzen den ertzak elkarrekiko zutak izango dira espazioan. Hiru zuten teorema aplikatuz, haien proiekzio horizontalak ere zutak izango dira, MN horizontala baita. Beraz, AE ertza marraz dezakegu. Gero, bista lagungarri baten bidez, hodiak depositUaren goiko xaflarekin eratzen duen elkargunea lortuko dugu. Ariketa amaitzeko, hodiaren ohiko bistak osatuko ditugu.



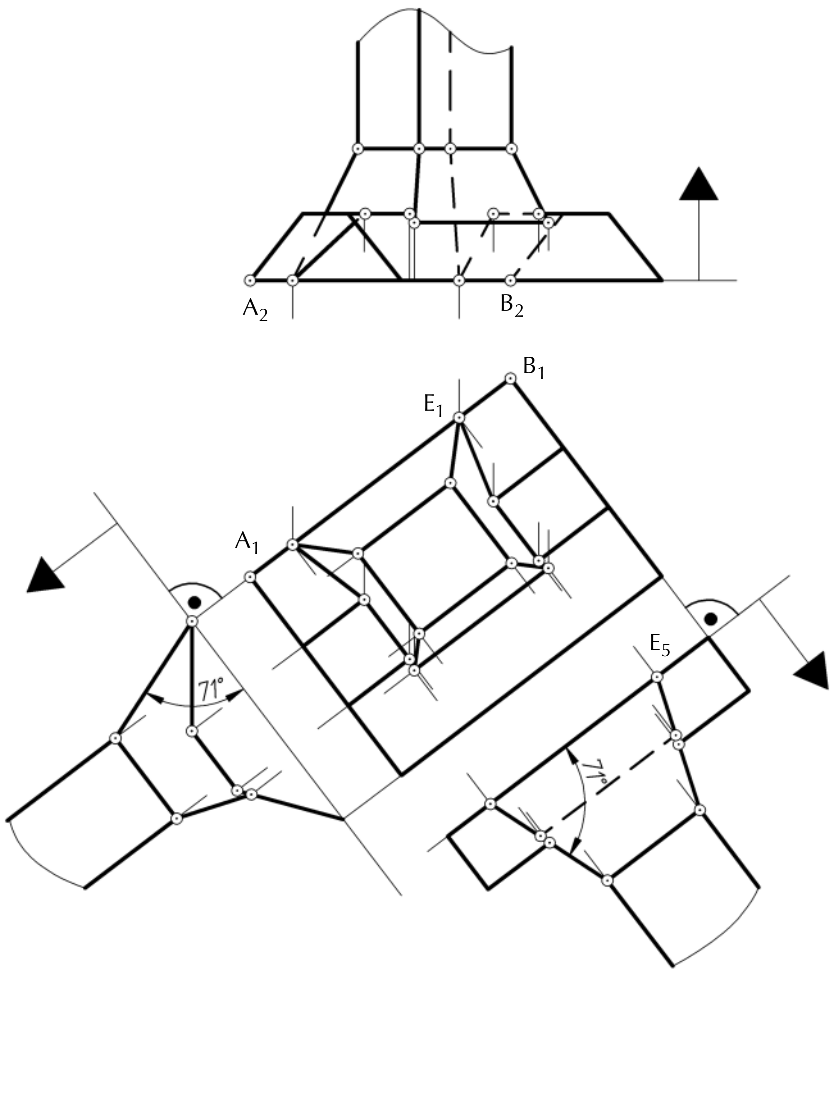
47. ariketa

Egokitzaile batekin lotu nahi dira suburua eta hodi bertikala. Kea erraz ateratzeko, egokitzaileak ahalik eta angelurik txikiena osatu behar du horizontalarekin. Bestetik, egokitzailearen fabrikazioa errazteko, aurpegi guztiek angelu berdina osatu behar dute horizontalarekin. Marraztu egokitzailea.



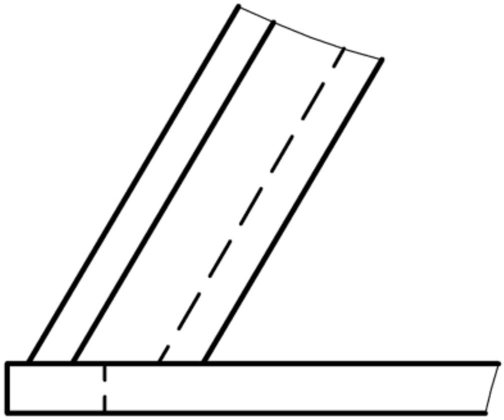
Ebazpena

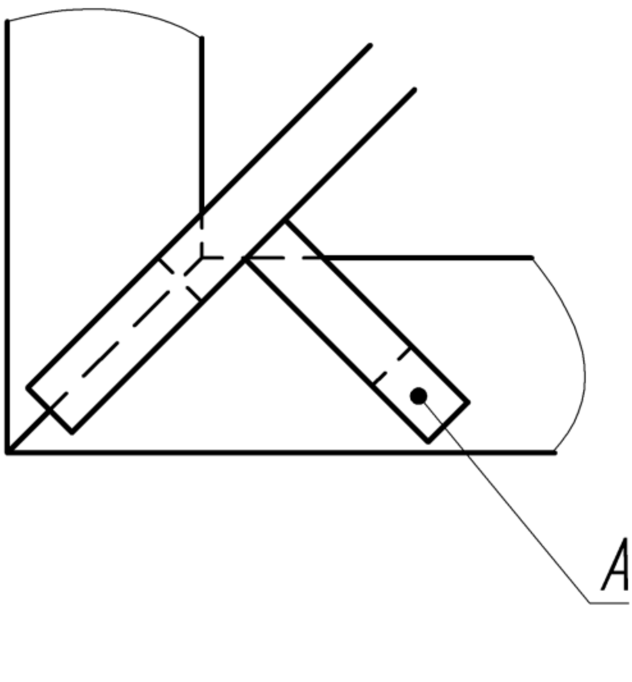
Hodi bertikala suburuaren AB ertzetik oso gertu dago. Horrek mugatuko digu egokitzailearen xaflek osa dezaketen angelua. Hain zuzen, bista lagungarrian ikus daiteke angelurik handiena 71º-koa dela. Behin angelua lortuta, gainerako aurpegiak marraztuko ditugu. Horretarako, beste bista lagungarri bat trazatu beharko dugu. Gero, egokitzailearen aurpegiek suburuarekin bat egiten duten puntuak aurkituko ditu.



48. ariketa

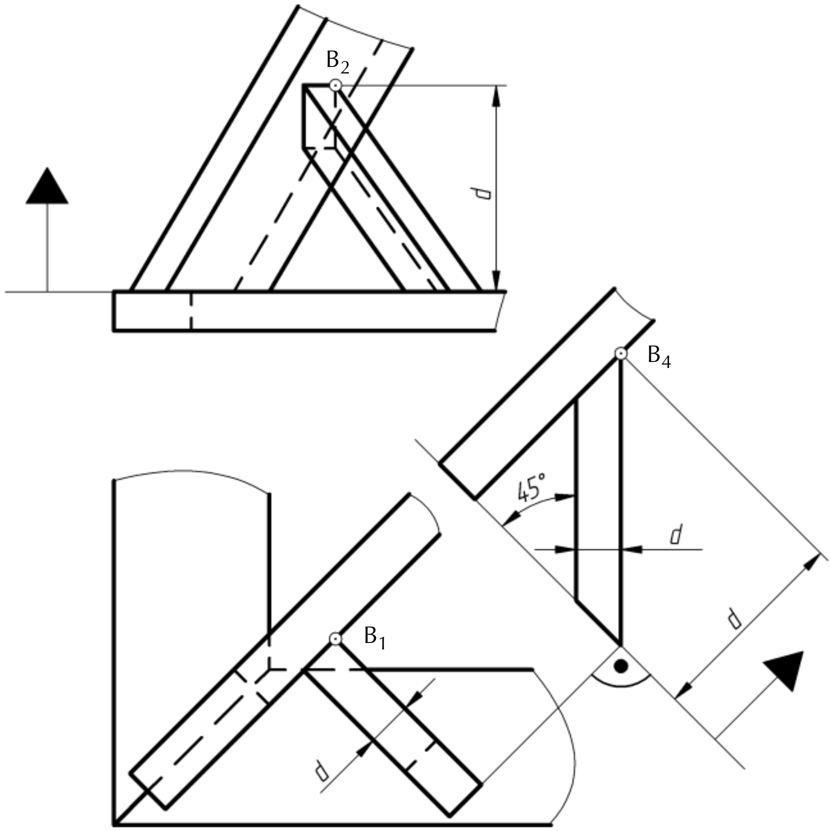
Osatu A habearen aurretiko bista, horizontalarekin 45º-ko angelua osatzen duela eta sekzio zuzena karratua dela jakinda.





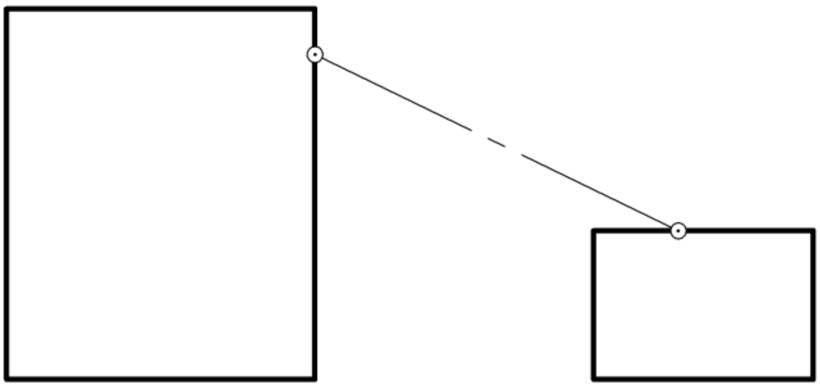
Ebazpena

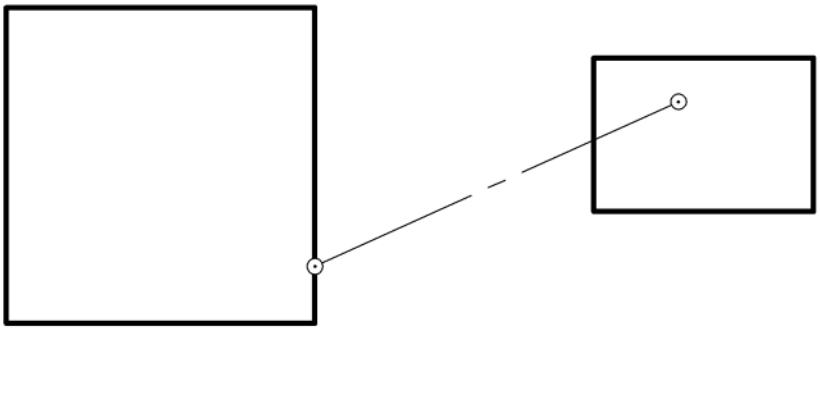
Bista lagungarri baten bidez, habea osa dezakegu angelua zein den jakinda. Azkenik, aurretiko bista osatuko dugu.



49. ariketa

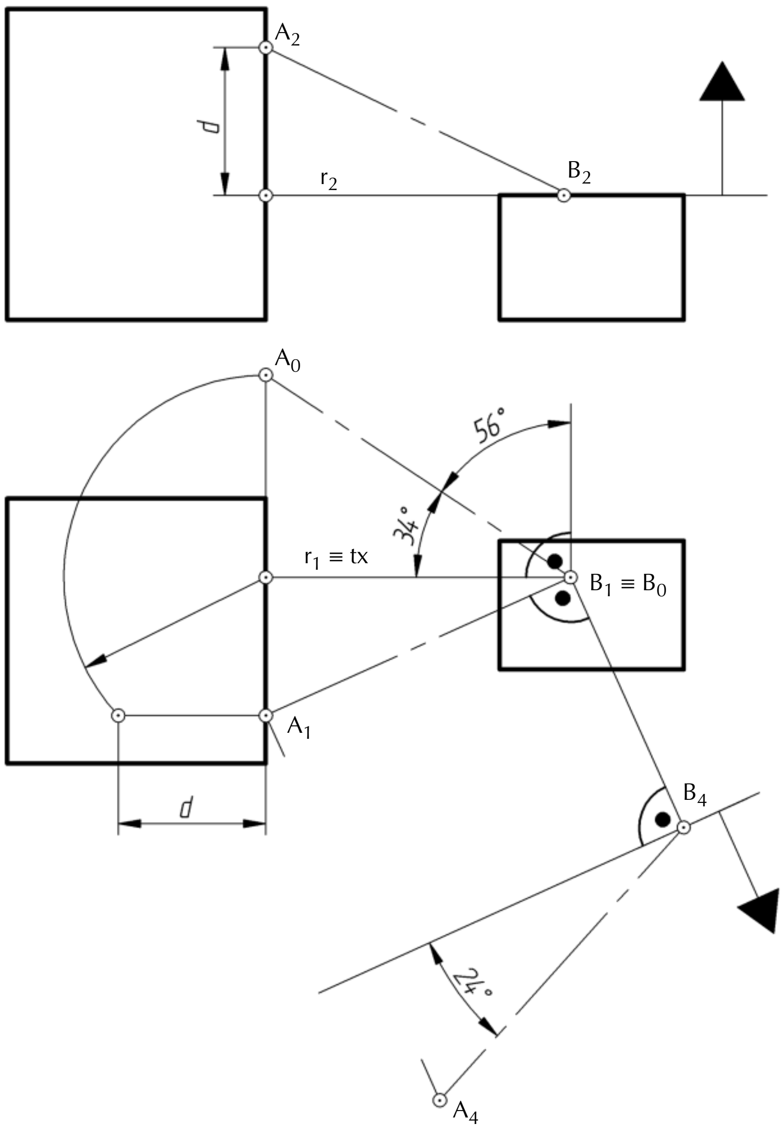
Kalkulatu hodiak bi biltegi hauekin osatzen duen angelua.





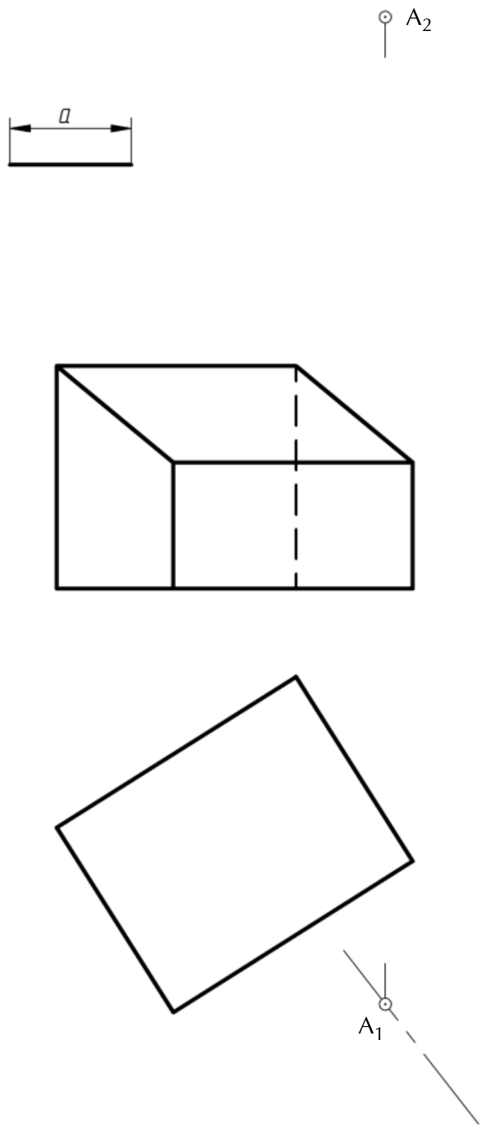
Ebazpena

Eskuineko biltegiarekin osatzen duen angelua kalkulatzeko, nahikoa da bista lagungarri bat marraztea (24º). Hodiaren B puntutik biltegiarekiko r zuzen zut bat marraztu behar dugu, hodiak ezkerreko biltegiarekin osatzen duen angelua kalkulatzeko. Biltegiak hodiarekin zer angelu osatzen duen jakiteko, eraispen bat egin behar dugu. Hala lortutako angeluaren osagarria (56º) izango da erantzun zuzena.



50. ariketa

Depositu batean zulo bat egin nahi da hodi bat sartzeko. Zuloak "a" aldea duen karratu bat izan behar du eta bi alde horizontal izan behar ditu. Hodiari buruz datu hauek ditugu: goitiko bista A puntutik igarotzen da eta 45º-ko angelua osatzen du zoruarekin. Marraztu zuloa.

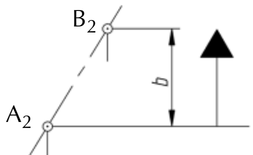


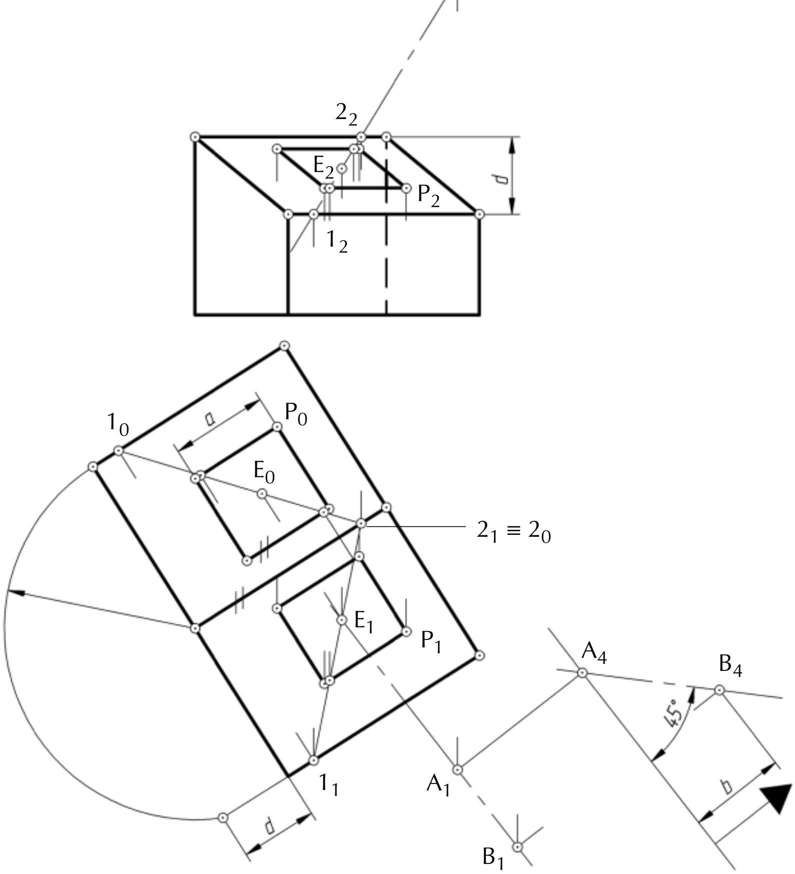
Ebazpena

Lehendabizi, hodiaren aurretiko bista behar dugu. Horretarako, bista lagungarrian, angeluaren bidez, bista berria osatu behar dugu. Hala, B puntuaren kota zein den jakin dezakegu; B_2 proiekzioa lortu ondoren, A eta B lotuta, hodiaren aurretiko bista marraztuko dugu.

Gero, hodiaren eta deposituaren goiko xaflaren arteko elkargunea lortuko dugu (E puntua).

Ondoren, h banda erabiliz, goiko xafla eta E puntua eraitsiko ditugu. Eraistean, karratua marraztuko dugu. Azkenik, karratuaren ohiko bistak osatuko ditugu.





ELHUYAR Edizioak

Unibertsitateko gaiak

- Giza zientziak
- Ingeniaritza
- Kimika
- Marrazketa
- Matematika
- Osasuna
- Teknologia elektrikoa
- Teknologia mekanikoa

ELHUYAR edizioak