Logika elementala. QL hizkuntza formala: alfabetoa, terminoen multzoa, adierazpen ongi formatuen multzoa. Azpi-hizkuntzak: murrizpenak, hedapenak. Predikatu soilen logikaren hizkuntza formala: QL_S. Lehen maila, n. maila.

Sarrera

Orain arte egin dugun logikaz, hau da, proposizioen logikaz baliatuz, matematikan eta, hedapenez, beste zenbait hizkuntzetan gertatzen diren arrazonamenduak ezin ditzakegu adieraz. Dioguna ulertzeko kontsidera dezagun ondoko arrazonamendu hau:

Premisak:	.- zenbaki bikoiti guztiak 2-ren multiploak dira.
	.- 14 bikoitia da.
Ondorioa:	.- 14 2-ren multiploa da.

Proposizioen logikan bi premisa hauek ‘p’ eta ‘q’ sinboloen bidez adieraziko genituzke, eta ondorioa ‘r’ proposizio sinboloaren bidez. Beraz, proposizioen logikan aipatutako arrazonamendua ‘p,q |- r’ deribazioaren bidez adieraziko genuke. Dakigunaren arabera, p eta q sinboloetatik r ondorioztatzea onartzen digun prozedurarik ez dago, honengatik, matematikan eta beste hizkuntzetan arruntak izaten diren arrazonamenduak adierazteko beste logika maila batetara jo beharko dugu, hain zuzen ere logika elementalera, batzuetan ere predikatuen logika deitua izan dena.

Proposizioen logika halako arrazonamendu adierazteko gauza ez izatearen arrazoia ondoko hau da: proposizioen logikan proposizioak ez dira barnetik aztertzen. Logika elementalean aldiz, proposizioak barnetik aztertuko ditugu beraien osagaiak ikusiz, eta hizkuntza logiko espresiboago hau tresna baliagarria bihurtuko zaigu aipatutako arrazonamenduak finkatzeko.

QL HIZKUNTZA FORMALA: ALFABETOA, TERMINOEN MULTZOA, ADIERAZPEN ONGI FORMATUEN MULTZOA.

Alfabetoa

$$A_{QL} = \{x_n\}_{n\in N} \cup \{a_i\}_{i\in I} \cup \{f_i^n\}_{i\in J, n\in N^+} \cup \{F_i^n\}_{i\in K, n\in N^+} \cup \{\neg, \rightarrow\} \cup \{\forall\} \cup \{(,)\}$$

A_{QL} alfabetoan ondoko azpimultzo hauek bereizten ditugu:

- $A_1 = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Aldagai indibidualen multzoa da. QL hizkuntzan, multzo honen kardinala $\aleph_0$ da.
- $A_2=\{a_i\}_{i\in I}$. Konstante indibidualen multzoa da. Kasurik normalenean multzo honen kardinala gehienez $\aleph_0$ da, hau da, zenbaki arrunten multzoaren kardinala. Multzo hutsa ere izan daiteke.
- $A_3 = \{f_i^n\}_{i\in J,\ n\in\mathbb{N}^+}$. Funtzio sinboloen multzoa da. Kasurik arruntenean multzo honen kardinala gehienez $\aleph_0$ da. A_3 multzo hutsa izan daiteke ere. f_i^n QL-ren funtzio sinbolo bat bada, azpi-indizeak (i-k) funtzio sinboloen arteko desberdintasuna adierazten du, eta goi-indizeak (n-k) sinbolo bakoitzaren adizitatea (zenbat terminoei aplikatzen zaie) adierazten du. Funtzio sinbolo baten adizitatea aplikazio bat da funtzio sinboloen multzotik zenbaki arrunt positiboen multzora doana.
- $A_4 = \{F_i^n\}_{i\in K,\ n\in\mathbb{N}^+}$ Predikatu sinboloen azpimultzoa da. A_4-ren kardinala, normalean, $\aleph_0$ baino txikiagoa edo berdina da. Multzo honek ezin du hutsa izan. F_i^n QL-ko predikatu sinbolo bat bada, azpi-indizeak (i-k) predikatu sinboloen arteko desberdintasuna adierazten du, eta goi-indizeak (n-k) sinbolo bakoitzaren adizitatea. Adizitatea, lehen bezala, predikatu sinboloen multzotik zenbaki arrunt positiboen multzora doan aplikazio bat da.
- $A_5 = \{\neg, \rightarrow\}$ konektatzaileen multzoa
- $A_6 = \{\forall\}$ zenbatzaile unibertsalaz osatutako multzoa da.
- $A_7 = \{ (,) \}$ bereizle grafikoen multzoa da.

Ikusi dugunaren arabera QL hizkuntzaren alfabetoa infinitua da eta predikatuen logikarako edozein hizkuntzatan A_2 eta A_4 multzoek agertu behar dute.

OHARRAK

1. QL hizkuntzaren alfabetoa definitu ondoren, hizkuntza logiko ezberdinak kontsidera ditzakegu horretarako alfabetoan azaltzen diren konstante sinbolo, funtzio sinbolo eta predikatu sinboloen azpimultzoak zehaztuz. Hori egiten dugunean, hizkuntzaren tipoa definitzen dugu. Tipoa definitzen diguten sinboloak hizkuntzaren konstante ez-logikoak deituak izan dira. τ QL hizkuntzarako tipo bat bada, τ-k mugatzen duen QL-ren azpi-hizkuntzari QL(τ) deituko diogu.
2. QL alfabetoan $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$ sinbolo logikoak ditugu. Aipatutako bi konektatzaileak hartuz, beste konektatzaile guztiak definitzen badakigu PL hizkuntzan bezala. $\forall$

kuantifikatzaile unibertsala erabiliz, beste kuantifikatzaile bat, ∃, definitzen da honako era honetan: $\exists x_i \varphi \equiv \neg \forall x_i \neg \varphi$, non φ hizkuntzaren formula bat adierazteko meta-sinbolo bat baita. ∃ kuantifikatzaile existentziala deitzen da.

Formulen multzoa

QL hizkuntzaren aof-en multzoa mugatu aurretik beharrezkoa dugu terminoen multzoa definitzea.

Terminoen multzoa

Multzo hau era errekurtsibo batez adierazten da honako erregela hauek emanez:

1. i guztientzat a_i termino bat da.
2. i guztientzat x_i termino bat da.
3. t_1, t_2,...,t_n terminoak badira (n finitua izanik), orduan, $f_i^n t_1 t_2 ... t_n$ terminoa da i guztientzat.
4. Itxidura erregela: ez da beste terminorik aurreko hiru erregela hauen erabilpen finitutik sortuak direnetatik at.

Adierazpen ongi formatuen edo formulen multzoa

Defini dezagun aldez aurretik zer den adierazpen ongi formatu (aof) atomiko bat: t_1, t_2,...,t_n terminoak badira (n finitua izanik) eta F_i^n predikatu sinbolo n-tar bat bada, orduan, $F_i^n t_1 t_2 ... t_n$ aof atomikoa da.

Ikus ditzagun aof-en multzoa mugatzen duten formazio erregelak:

1. Aof atomikoak aof-ak da.
2. φ aof bada, orduan ¬φ aof-a da.
3. φ eta ψ aof-ak badira, orduan (φ → ψ) aof bat da.
4. φ aof-a bada eta x_i aldagai indibidual sinbolo bat bada, orduan $\forall x_i$ φ aof bat da.
5. Ez da beste aof-rik aurreko lau erregela hauen erabilpen finitutik sortuak direnetatik kanpo.

Adibideak

1. $f_1^3x_2a_1x_1$, $f_1^3x_2a_1f_2^2x_1f_1^1a_3$ eta x_5 terminoak dira.
2. $F_1^1f_1^3x_2a_1x_1$ eta $F_1^2x_1x_2$ aof atomikoak dira.
3. $\exists x_0\forall x_1\left(F_1^1x_1 \rightarrow \left(\neg F_2^1a_0 \rightarrow F_1^2x_0x_2\right)\right)$[1] aof bat da.

Azpiformula

Izan bedi φ nahi bezala emandako aof bat. φ-ren azpi-formula bat, definizioz, hauxe da: formula bat osatzen duen eta φ-n dagoen sinboloren segida kontsekutibo bat.

Definizioak

1. t **terminoa itxia** da baldin eta bakarrik baldin t-n aldagairik azaltzen ez bada. Adibidez, $f_1^3a_3a_4a_1$.

2. **Kuantifikatzaile baten eragina**.
   Izan bedi φ nahi bezala emandako aof bat. φ-ren azaltzen den kuantifikatzaile baten eragina, kuantifikatzaile honetan hasi eta φ-ren barruan dagoen lehendabiziko azpiformula izango da.

3. **Aldagai baten azalpen aske eta lotua**.
   Izan bitez φ nahi bezala emandako aof bat eta x_i φ-n azaltzen den aldagai bat. x_i aldagaiak φ-n azalpen lotua duela diogu baldin eta bakarrik baldin x_i zenbatzaile baten ondotik badator edo zenbatzaile baten eraginpean badago. x_i aldagaiak φ-n azalpen askea duela diogu baldin eta bakarrik baldin badu azalpenen bat lotua ez dena.

4. Izan bitez φ nahi bezala emandako aof bat eta x_i φ-n azaltzen den aldagai bat. x_i **aldagaia askea** da φ-n baldin eta bakarrik baldin x_i-k gutxienez azalpen askeren bat badu φ-n. x_i **aldagaia lotua** da φ-n baldin eta bakarrik baldin x_i-k, gutxienez, azalpen loturen bat badu φ-n.

---

[1] Hemen suposatzen dugu ∃ sinboloa ∀ sinboloaren bitartez definituta dagoela esandako eran.

PREDIKATU SOILEN HIZKUNTZA FORMALA: QL_S.

QL_S hizkuntza QL hizkuntzaren azpi-hizkuntza bat da. QL_s hizkuntzaren alfabetoa QL-ren alfabetoko sinbolo guztiek, funtzio sinboloek izan ezik osatzen dute.
Horrela, QL_s hizkuntzari dagokion termino multzoa definitzea errazten da:

1. a_i termino bat da i guztientzat.
2. x_i termino bat da i guztientzat.
3. ez da beste terminorik aurreko bi erregela hauen erabilpen finiturik sortuak direnetatik kanpo.

Esandakoa kontutan hartuz, bistan dago QL_s hizkuntzaren aof atomiko batean agertzen diren terminoek konstanteak nahiz aldagai sinboloak izan behar dutela

MAILAKETA HIZKUNTZA LOGIKOETAN

- Hizkuntza logiko bat lehen mailakoa dela diogu baldin eta bakarrik baldin beraren aof-en multzoa definitzerakoan, kuantifikatzaileak aldagai indibidual sinboloak bakarrik kuantifika baditzake.
  Definizioa kontuan hartuz, QL eta QL_s hizkuntzak lehen mailakoak direla esan dezakegu.

- Hizkuntza logiko bat 2. mailakoa dela diogu baldin eta bakarrik baldin beraren aof-en multzoa definitzerakoan zenbatzaileak aldagai indibidual nahiz predikatu sinboloak kuantifika baditzake.

- Hizkuntza logiko bat 3. mailakoa dela diogu baldin eta bakarrik baldin beraren aof-en multzoa definitzerakoan zenbatzaileak aldagai indibidual, predikatu sinboloak eta predikatuen predikatu sinboloak kuantifika baditzake.

Semantika: interpretazio kontzeptua (QL-(erlazio)-egitura). Asegarritasuna, egia, eredua, baliozkotasun logikoa, k-baliozkotasuna, adierazpen ongi formatu batentzat eta adierazpen ongi formatuen multzo batentzat. Ondoriotasun semantikoa. Adierazpen ongi formatuen arteko baliokidetza semantikoa.

SEMANTIKA: INTERPRETAZIO KONTZEPTUA. (ERLAZIO)-EGITURA.

Orain arte logika elementalari dagokionez, QL hizkuntza formala eta sintaxi kontzeptu batzuk ikusi ditugu. Oraingoan QL hizkuntzaren semantika zehaztuko dugu QL hizkuntzarentzat interpretazio kontzeptua definituz.

Izan bedi τ QL hizkuntzarako tipo bat, eta demagun tipo honek mugatzen digun sinbolo ez-logikoen multzoa $\{a_i\}_{i\in I'} \cup \{f_i^n\}_{i\in J', n\in N'} \cup \{F_i^n\}_{i\in K', n\in N''}$ dela, non $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J$, $K' \subseteq K$, $N' \subseteq N^+$ eta $N'' \subseteq N^+$ baitira. QL(τ) hizkuntzarentzako I interpretazioa era honetan definitzen da:

I bikote ordenatu bat da, I= (D, J), non :

D multzo bat baita, interpretazioaren unibertso ez hutsa, $D \neq \varnothing$.
J interpretazio funtzio baita.

J funtzioaren domeinua hizkuntzaren sinbolo ez-logikoen multzoa da, hau da: $\{a_i\}_{i\in I'} \cup \{f_i^n\}_{i\in J', n\in N'} \cup \{F_i^n\}_{i\in K', n\in N''}$. Irudi multzoa honela mugatzen dugu:

- Alfabetoko konstante indibidual bakoitzaren irudia unibertsoko elementu bereizi bat izango da, beraren erreferentzia edo denotazioa deitutakoa. Hau da, i guztientzat, $J(a_i) = \overline{a_i} \in D$.
- QL(τ) hizkuntzako funtzio sinbolo bakoitzaren irudia J-ren bidez (edo beraren denotazioa edo erreferentzia) aplikazio bat izango da era honetan mugatuta: $J(f_i^n) = \overline{f_i^n} : D^n \rightarrow D$. Hau da, funtzio sinbolo n-tar baten irudia D^n-tik D-ra doan aplikazio bat izango da.
- QL(τ) hizkuntzako predikatu sinbolo bakoitzaren irudia J-ren bidez (beraren denotazioa edo erreferentzia) erlazio bat izango da era honetan mugatuta: $J(F_i^n) = \overline{F_i^n} \subseteq D^n$. Hau da, predikatu sinbolo n-tar baten irudia D^n-ren azpimultzo bat izango da, edo beste era batera esanda D-n definitutako erlazio n-tarra.

Interpretazioaren ideia ere **erlazio egiturak** deitutakoen bidez adierazi ohi da. Horrela QL(τ) hizkuntza interpretatzeko ondoko erlazio egitura hauek hartzen dira:

$$A = \left\langle D, \{\overline{a_i}\}_{i \in I'}, \{\overline{f_i^n}\}_{i \in J', n \in N'}, \{\overline{F_i^n}\}_{i \in K, n \in N''} \right\rangle .$$

Bertan azaltzen diren elementuek goian emandako definizio bera dute, hau da, D interpretazio domeinua da eta beste guztiak hizkuntzaren sinbolo ez-logikoen denotazioak dira.

Asegarritasuna, egia, eredua, baliozkotasun logikoa, k-baliozkotasuna adierazpen ongi formatu batentzat eta adierazpen ongi formatu multzo batentzat.

ASEGARRITASUNA

Izan bedi $A = \left\langle D, \{\overline{a_i}\}_{i \in I'}, \{\overline{f_i^n}\}_{i \in J', n \in N'}, \{\overline{F_i^n}\}_{i \in K, n \in N''} \right\rangle$ QL(τ) hizkuntzarako egitura bat. Har dezagun D-ren domeinuko elementuez osatutako segida bat s = <b_0, b_1, b_2,.....,b_i,....>. Defini dezagun s* aplikazioaren bidez QL(τ)-ren **terminoen balioa** s segidarentzat honako era honetan:

s*: {Term} → D, non {Term} QL(τ)-ren terminoen multzoa baita:

i) t = x_i bada, s*(t) = s*(x_i) = $b_i \in$ D, hau da, segidaren i. tokian dagoen elementua.

ii) t = a_i bada, s*(t) = s*(a_i) = J(a_i) = $\overline{a_i} \in$ D, hau da a_i konstantearen denotazioa.

iii) t = $f_i^n t_1 \cdots t_n$ bada, s*(t) = s*($f_i^n t_1 \cdots t_n$) = $\overline{f_i^n}$ (s*(t_1),...,s*(t_n)) ∈ D, non $\overline{f_i^n}$, f_i^n funtzio sinboloaren interpretazioa baita. Hau da, t-ren balioa t_1, t_2,..., t_n terminoen balioen irudia $\overline{f_i^n}$ aplikazioaren bidez da.

Aurreko definizioa kontutan hartuz, izan bitez egitura bat, A , egitura honen unibertsoko elementuez osatutako segida bat, s, eta QL(τ)-ren aof bat, φ. **s-k φ formula** **asetzen du** **A egituran** baldin eta bakarrik baldin honako baldintza hauetako bat betetzen bada:

i) φ aof atomikoa bada, hau da φ = $F_i^n t_1 \cdots t_n$ bada, orduan s segidak φ asetzen du baldin eta bakarrik baldin $\overline{F_i^n}$ (s*(t_1),...,s*(t_n)) betetzen bada, hau da, baldin eta bakarrik baldin $<s^*(t_1),\ldots,s^*(t_n)> \in \overline{F_i^n}$ edo beste hitzetan esanda, t_1, t_2,..., t_n terminoen balioak $\overline{F_i^n}$ erlazioan baldin badaude.

ii) $\varphi = \neg\chi$ bada, orduan s segidak φ asetzen du A -n baldin eta bakarrik baldin s-k ez badu χ asetzen A -n.

iii) $\varphi = \chi\rightarrow\psi$ bada, orduan s segidak φ asetzen du A -n baldin eta bakarrik baldin s-k χ asetzen ez badu A -n edo s-k ψ asetzen badu A egituran.

iv) $\varphi = \forall x_i\psi$ bada, orduan s segidak φ asetzen du A -n baldin eta bakarrik baldin s segidatik gehienez i. elementuan bereizten diren segida guztiek ψ asetzen badute A egituran.

s segidak φ formula asetzen badu A egituran A $\models \varphi[s]$ idatziko dugu.

Izan bitez QL-ren aof bat, φ, eta QL-ren aof multzo bat Γ. φ **asegarria** da baldin eta bakarrik baldin badaude gutxienez egitura bat, A , eta egitura honen unibertsoko elementuez osatutako segida bat, s, non s-k φ asetzen baitu. Γ multzoa **asegarria** dela diogu baldin eta bakarrik baldin badaude egitura bat, A , eta egitura honen unibertsoko elementuez osatutako segida bat, s, non s-k Γ-ko aof guztiak batera asetzen baititu.

Izan bitez QL-ren aof bat, φ, eta QL(τ) hizkuntzarako egitura bat, A . φ A egituran **egiazkoa** dela diogu baldin eta bakarrik baldin A -ren unibertsoko elementuez osatutako segida guztiek φ asetzen badute. Bestalde, φ egiazkoa bada A -n, A φ-ren **eredua** dela esango dugu. Sinboloetan A $\models \varphi$ idatziko dugu. φ A egituran **faltsua** dela diogu baldin eta bakarrik baldin A -ren unibertsoko elementuez osatutako segida batek ere ez badu φ asetzen[2]. Sinboloetan A $\not\models \varphi$ idatziko dugu.

Γ multzoa A egituran **egiazkoa** dela diogu baldin eta bakarrik baldin A -ren unibertsoko elementuez osatutako segida guztiek Γ multzoko formula guztiak batera asetzen badituzte. Γ egiazkoa bada A -n, A Γ-ren **eredua** dela esango dugu eta era horretan idatziko dugu A $\models \Gamma$. Γ multzoa A egituran **faltsua** dela diogu baldin eta bakarrik baldin A -ren unibertsoko elementuez osatutako segida bakar batek ere ez baditu Γ multzoko formula guztiak batera asetzen.

Izan bedi QL-ren aof bat, φ. φ **logikoki baliozkoa** dela diogu baldin eta bakarrik baldin QL hizkuntzaren egitura guztiak φ-ren ereduak badira. φ logikoki baliozkoa izatea sinbolikoki $\models \varphi$ adieraziko dugu.

φ **k-baliozkoa** dela diogu eta era honetan idatzi, $\models^k \varphi$, baldin eta bakarrik baldin, k kardinaleko unibertsoa duten egitura guztiak φ-ren ereduak badira.

---

[2] Definizio honen arabera gerta daiteke φ formula ez egiazkoa ez eta faltsua ere izatea. Hau da, faltsua izatearen ukazioa ez da egiazkoa izatea emandako definizioaren arabera.

ONDORIOTASUN SEMANTIKOA

Izan bitez φ eta χ QL-ren bi aof. χ φren **ondorio semantikoa** dela diogu baldin eta bakarrik baldin A egitura guztientzat, φ formula asetzen duten segida guztiek χ ere asetzen badute. χ φ-ren ondorio semantikoa bada, horrela idatziko dugu $\varphi \models \chi$.
Era berean, Γ QL-ren aof multzo bat bada, φ Γ-ren ondorio semantikoa dela esango dugu, $\Gamma \models \varphi$ baldin eta bakarrik baldin egitura guztientzat Γ-ren formulak aldi berean asetzen dituzten segida guztiek φ ere asetzen badute.

BALIOKIDETZA SEMANTIKOA

φ eta χ formulak **baliokide semantikoak** direla diogu, $\varphi \equiv \chi$, baldin eta bakarrik baldin $\varphi \models \chi$ eta $\chi \models \varphi$ badira, hau da, χ φ-ren ondorio semantikoa eta φ χ-ren ondorio semantikoa gertatzen bada.