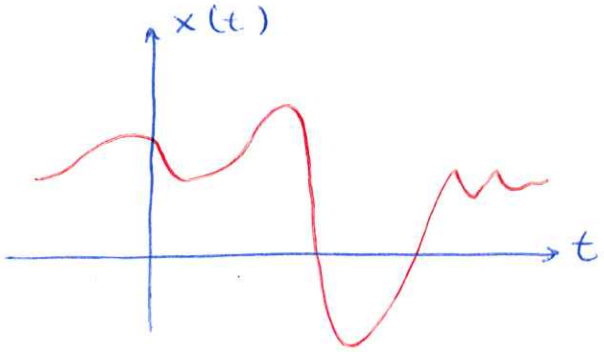
1. OINARRIZKO KONTZEPTUAK

1.1. Seinaleak

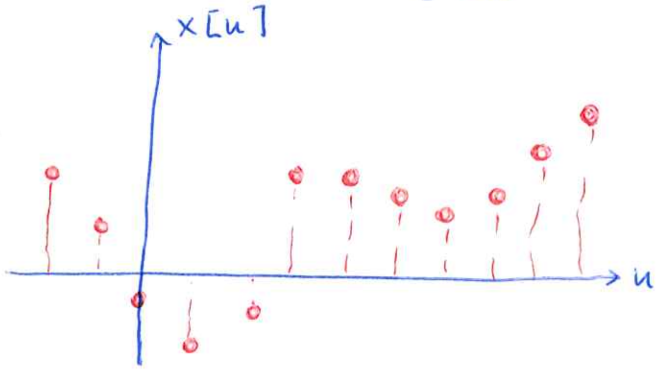
Seinale bat magnitude fisiko bat da, denbora edo beste aldagai aske batekiko edo batzuekiko aldatzen duena. Guk aldagai aske bakarrarekin lan egingo dugu orokorrean: denbora.

Seinaleak adierazpen matematikoen bidez adierazi daitezke. Bi oinarrizko seinale mota ditugu:

- Jarraituak: $x = x(t)$



- Diskretuak: $x = x[n] \equiv \equiv x_n$



Seinale diskretuak horrelakoak izan daitezke aldagai independentea intrintsekoki diskretua delako edo aldagai jarraitu baten muestreoa egin delako.

1.1.1. Energia eta potentzia

Seinale bati dagokion energia eta potentzia, horrenez horren, definitzen:

Ez dute zertan energia eta potentzia fisikoekin zerikusirik!

Jarraituetan:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

Diskretuetan:

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

$$P = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

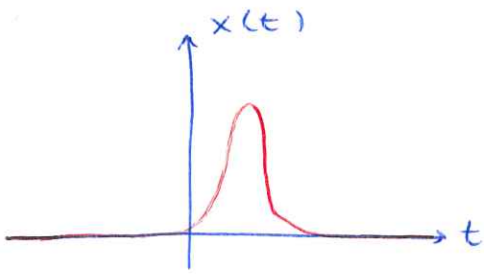
Denbora tarte infinituetan definitzen dira ere:

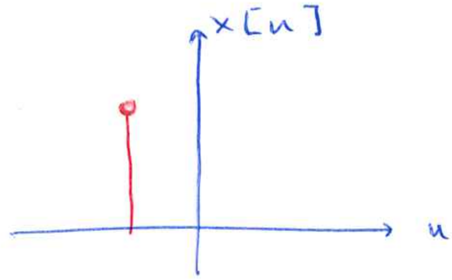
$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \qquad E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \qquad P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Horrela seinaleak sailka daitezke:

1. Energia finituko seinaleak: $E_\infty < \infty$ bada, ondorioz $P_\infty = 0$ izanik. Adibidez,





2. Energia infinituko eta potentzia finituko seinaleak: $E_\infty = \infty$ eta $0 < P_\infty < \infty$ bada. Adibidez, seinale periodikoak edo konstanteak.

3. Energia eta potentzia infinituko seinaleak: $E_\infty = \infty$ eta $P_\infty = \infty$ bada. Adibidez, $x(t) = t$

1.1.2. Transformazioak

- **Aldagai askearen transformazioak:** $x = x(t)$ edo $x = x[n]$ izanda,

1. **Denboraren desplazamendua:**

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \text{edo}$$
$$y[n] = x[n - n_0]$$

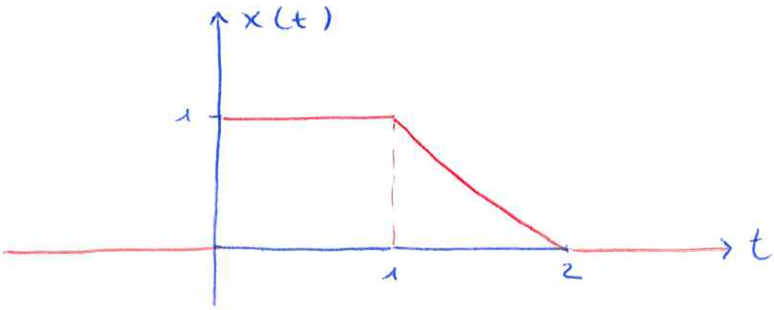
2. **Denboraren islapena:**

$$y(t) = x(-t) \quad \text{edo} \quad y[n] = x[-n]$$

3. **Denboraren eskalatzea:**

$$y(t) = x(\alpha t) \quad \text{edo} \quad y[n] = x[a \cdot n]$$

ARIKETA: Demagun ondorengo $x(t)$ seinalea dugula:



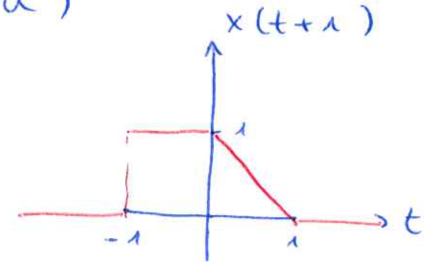
Irudikatu:

a) $x(t+1)$

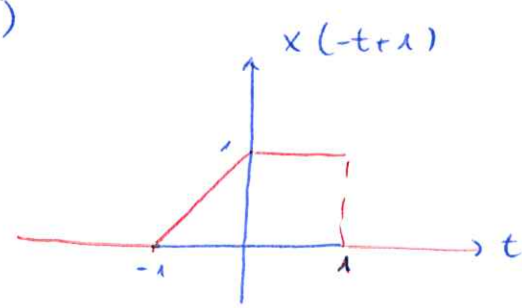
b) $x(-t+1)$

c) $x(3/2\,t+1)$

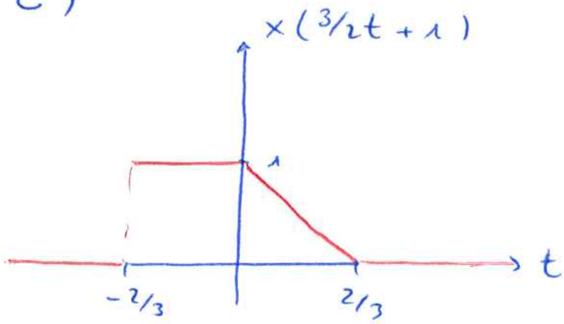
a)



b)



c)



Orokorrean: $\boxed{y(t) = x(\alpha t + \beta)}$

$|\alpha| < 1 \longrightarrow$ Seinalea luzatzen da.

$|\alpha| > 1 \longrightarrow$ Seinalea estutzen da.

$\alpha < 0 \longrightarrow$ Seinalea alderantzizkatzen da.

$\beta > 0 \longrightarrow$ Atzeratzen da.

$\beta < 0 \longrightarrow$ Aurreratzen da.

- Menpeko aldagaiaren transformazioak

$$y(t) = a \cdot x(t) \qquad y[n] = a \cdot x[n]$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \qquad y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$y(t) = \int x(t)\,dt \qquad y[n] = \sum x[n]$$

1.1.3 Seinale periodikoak

Seinale bat periodikoa da baldin eta:

$\exists T > 0$ non $\qquad \exists m > 0$ non

$x(t) = x(t+T) \qquad x[n] = x[n+m]$

t guztietarako $\qquad n$ guztietarako.

1.1.4. Seinale bakoiti eta bikoitiak

Seinale bakoitiak: $x(t) = -x(-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$x[n] = -x[-n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Seinale bikoitiak: $x(t) = x(-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$x[n] = x[-n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$x(t)$ seinale bakarretik seinale bakoiti bat

$$Od[x(t)] = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

eta bikoiti bat eraiki daiteke

$$Ev[x(t)] = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

eta, era berean, $x(t)$ seinale oro seinale bakoiti eta bikoiti baten arteko batura gisa adierazi dezakegu. Gauza bera dugu seinale diskretuekin.

1.1.5. Seinale esponentzial jarraituak

$$x(t) = C \cdot e^{at}$$

non, oro har, $a, C \in \mathbb{C}$ den.

$a, C \in \mathbb{R}$ badugu, esponentzial errealak ditugu.

Ohartu: Esponentziala tarte finituan definitzen badugu e a $Re[a] < 0$ bada, energia finituko seinalea izango dugu!

$a = \omega j$ bada, non $\omega \in \mathbb{R}$ den, esponentzial konplexua dugu, ondorengo eran idatz daitekeena:

$$x(t) = |C| \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

ω ezberdinetarako, seinale guztiak ez berdinak dira, beti periodikoak

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

periodoarekin.

T_0 oinarrizko periodoa da eta ω_0 oinarrizko maiztasuna. $\omega_k = k \cdot \omega_0$ bada, $k \in \mathbb{Z}$

$$x_k(t) = |c| e^{j(\omega_k t + \varphi)}$$

$x(t)$-ren seinale harmonikoa da, $T = \frac{T_0}{|k|}$ periodoarekin.

Gogoratu, seinale esponentzialak sinusoidalekin erlazionatzen dira:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = Re[e^{j\omega t}]$$

$$\sin(\omega t) = Im[e^{j\omega t}]$$

periodo berdina dutena.

1.1.6. Seinale esponentzial diskretuak

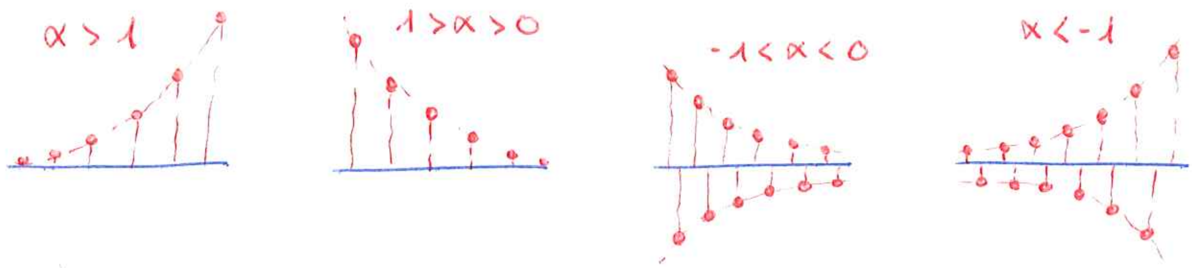
$$x[n] = C\alpha^n$$

non $C, \alpha \in \mathbb{C}$ den. Era berean

$$x[n] = Ce^{\beta n}$$

idatz daiteke, non $\alpha = e^{\beta}$ betetzen den.

- $C, \alpha \in \mathbb{R}$ badira, esponentzial errealak ditugu:
  - $|\alpha| > 1$ bada, gorakorra da.
  - $|\alpha| < 1$ bada, beherakorra da.
  - $\alpha > 0$ bada, $x[n]$-ren balioek beti dute zeinu bera.
  - $\alpha < 0$ bada, $x[n]$-ren balioen zeinuak txandakatzen dira.



- $\beta = \omega_0 j$ bada, $\omega_0 \in \mathbb{R}$ izanik, sinusoidala dugu:

$$x[n] = C e^{j\omega_0 n} =$$

$$= C \cos(\omega_0 n) + jC \sin(\omega_0 n)$$

Periodikoak izateko N periodoarekin

$$N = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

bete behar da. Baina $N \in \mathbb{Z}$ izan behar denez, seinale esponentzial inkonplexu diskretuak EZ dira beti periodikoak.

Periodikoa bada, harmonikoak defini ditzakegu:

$$\phi_k[n] = e^{j\cdot 2\pi k\cdot \frac{n}{N}} \quad , \; k\in\mathbb{Z}$$

non N oinarrizko periodoa den.

Gainera, $\phi_{k+N}[n] = \phi_k[n]$ izanik, seinale batzuk berdinak ditugu maiztasun ez berdinetan

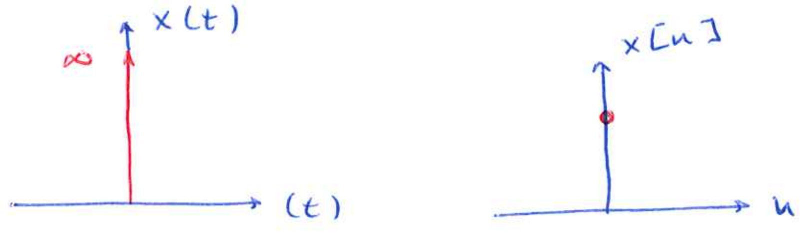
$\omega_k = \omega_0 + 2\pi k$ denean

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Maiztasun finituak ditugu:} \\ \omega\in[0, 2\pi) \text{ edo} \\ \omega\in[-\pi, \pi)\end{array}}$$

Maiztasun "altuak" π balioaren inguruan egongo dira eta "baxuak" 0 edo 2π balioen inguruan. ω_0 tarte horretan aukeratuko dugu.

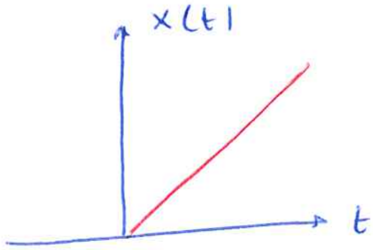
1.1.7. Beste seinale batzuk.

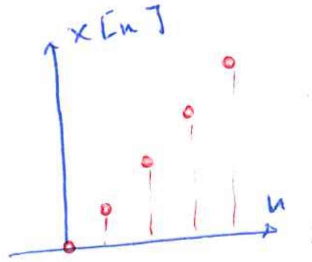
1. Pultsu seinalea



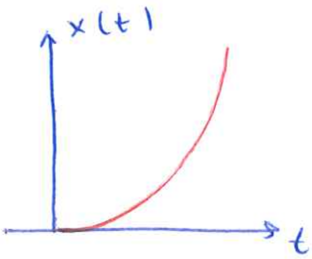
2. Maila seinalea

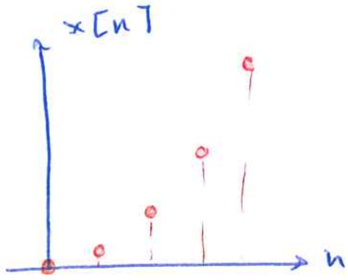
3. Arrapala seinalea





4. Azelerazio seinalea





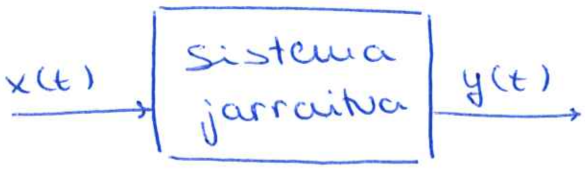
Azkenik sailkapen garrantzitsu bat dugu:

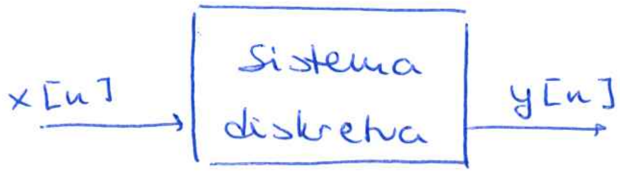
1. Seinale deterministak: Funtzio matematiko baten bidez adierazi daitekeena.

2. Seinale aleatorio edo estokastikoak: Probabilitate-funtzio baten bidez adierazi daitekeena.

1.2. Sistemak

Sistema bat seinale batean eragiketa bat gauzatzen duen gailu fisikoa da. Eredugarriak dira eta jarraituak edo diskretuak izan daitezke:

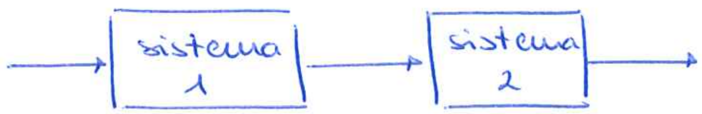




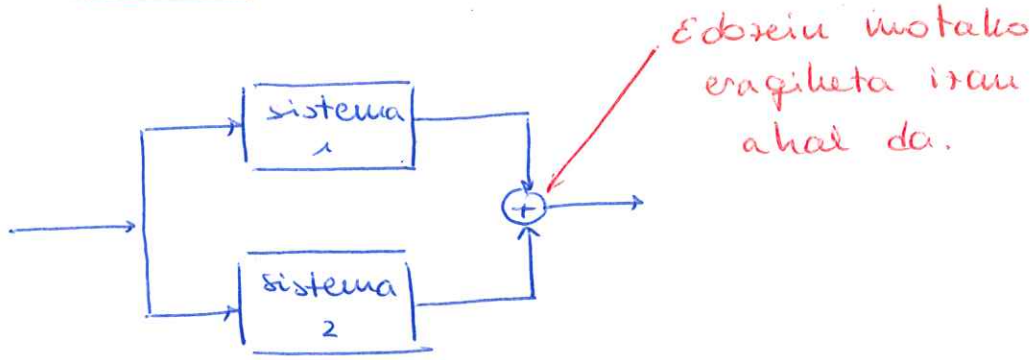
1.2.1. Sistemen arteko konexioa

Izan daiteke:

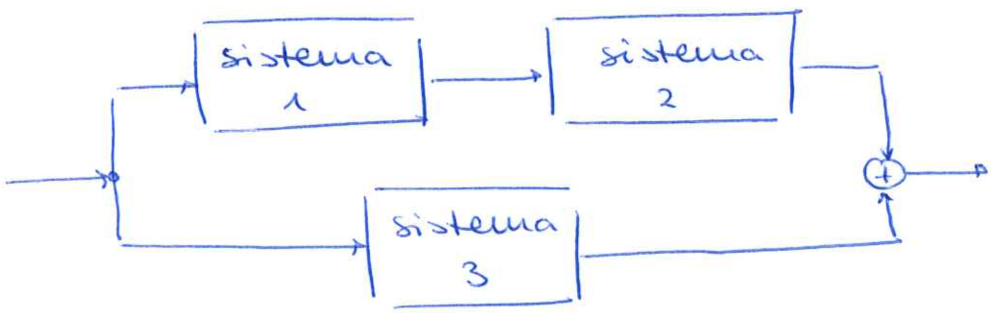
1. Seriean



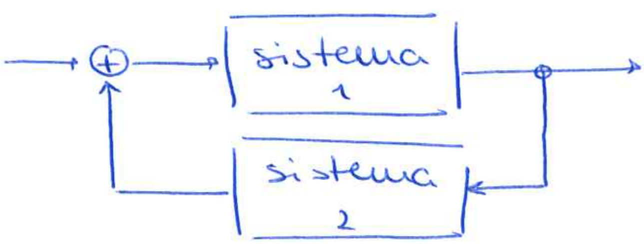
2. Paraleloan



3. Anitza



4. Berrelikaduran



1.2.2. Sistemen ezaugarriak

1. Memoria. Sistema bat memoriaduna da aurreko edo etorkizuneko gertaeren menpekoa bada. Adibidez,

$$y[n] = x[n-1],$$

kondentsadore baten gaineko tentsioa kargan

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt$$

edo metatzailea

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{k} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{k-1} x[n] + x[k] = y[k-1] + x[k]$$

Soilik oraingo gertakizunen menpekoa bada, memoria gabeko sistema dugu; esaterako, gailu baten erresistentzia R bada, bere gaineko potentziala,

$$v(t) = R \cdot i(t)$$

2. Kausalitatea. Soilik oraingo eta iraganeko gertakizunen menpekoa bada, sistema kausala dela diogu. Hala nola,

$$y[n] = x[n-1] \longrightarrow \text{kausala}$$

$$y(t) = x(t+1) \longrightarrow \text{Ez kausala}$$

$$y[n] = x[-n] \longrightarrow \text{kausala } n>0 \text{ denean}$$

$$y(t) = x(t)\cdot\cos(t+1) \longrightarrow \text{kausala, } \cos(t+1) \text{ unean eraguna delako.}$$

3. Linealtasuna. Sistema bat lineala da gainezar-

men printzipioa betetzen badu; hau da. $x_i(t)$ seinalearen erantzuna $y_i(t)$ bada, $i=1,2$ -rentzat,

$$a x_1(t) + b x_2(t), \quad a, b \in \mathbb{C}$$

seinaleen aurrean, sistema linealak

$$a y_1(t) + b y_2(t)$$

erantzuna emango du.

4. Egonkortasuna. Sistema egonkor batek seinale bornatu baten aurrean irteera bornatu bat emango du. BIBO, Bound In Bound Out deituak dira. Metatzailea, adibidez, ezegonkorra da.

5. Denboran aldaezintasuna. Horrelako ezaugarria betetzen duten sistemen jokabidea konstantea da denboran zehar; adibidez, RC zirkuitu bat.

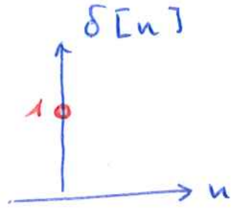
6. Alderantzigarritasuna. Sistema bat alderantzigarria da seinale ezberdinen aurrean irteera ezberdinak ematen badituzte. Horrelako sistementzat existitzen da alderantzizkoa, zeinak sistema originalaren irteera hartuta sarrera gisa originalaren sarreraren berdina den irteera ematen duen.

Guk aztertuko ditugun sistemek ezaugarri hauek betetzen dituzte, sistema linealak eta denboran aldaezinak dira (LTI). Sistema hauek banakorrak, trukakorrak eta elkarkorrak dira.

LTI sistemak matematikoki adierazi ahal ditugu, bai ekuazio diferentzialen bidez sistema jarraituen kasuan eta diferentzien bidez sistema diskretuetan, zein transferentzia-funtzioen bidez.

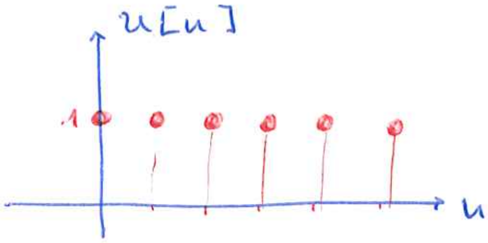
1.2.3. Sistema lineal baten pultsu erantzuna

Pultsu diskretu unitarioa ondorengoa dugu:



$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

eta maila diskretua:



$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Argi dago

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] = \sum_{k=\infty}^{0} \delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

betetzen dela.

Bestalde, edozein seinale pultsuen konbinazio bezala adierazi daiteke:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

Orduan, $\delta[n-k]$ pultsuaren aurrean sistemaren erantzuna $h_k[n]=h[n-k]$ bada, eragina dugu edozein seinaleren aurrean izango duena:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

Honi konboluzioa esaten zaio:

$$\boxed{y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]}$$

Era berean, kasu jarraituan:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

2. SEINALEEN TRANSFORMATUAK

2.1. Fourierren serieak

2.1.1. Seinale jarraituak

$f(t)$ funtzioa izan bedi. T periodoarekiko periodikoa bada, bitarte bornatu batean maximo eta minimo kopuru finitua badu eta edozein denbora-tartean eten-duren kopurua finitua bada, Fourier-en serie baten bidez adierazi daiteke:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega_0 t)$$

non
$$A_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt \;, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

diren. $\int_T$ ikurrak esan nahi du integrala T periodoan zehar dela, mugen kokapenaren independente izanik.

Beste aldaera batzuk baditugu; esaterako:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k)$$

non $a_0 = \frac{A_0}{2}$, $a_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ eta $\varphi = \arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$

diren.

Guretzat, garrantzitsuena aldaera konplexua izango da:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

non

$$C_k = \frac{1}{T}\int_T f(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

den. Hau frogatzeko, har dezagun aurreko f(t) funtzioa eta integra dezagun honela:

$$\int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \int_T \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}\, dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}\, dt$$

Batukari barneko integrala T da $k=n$ denean eta nulua bestela. Beraz,

$$\int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} = C_k \cdot T$$

hots,

$$C_k = \frac{1}{T}\int_T f(t) e^{-jk\omega_0 t}$$

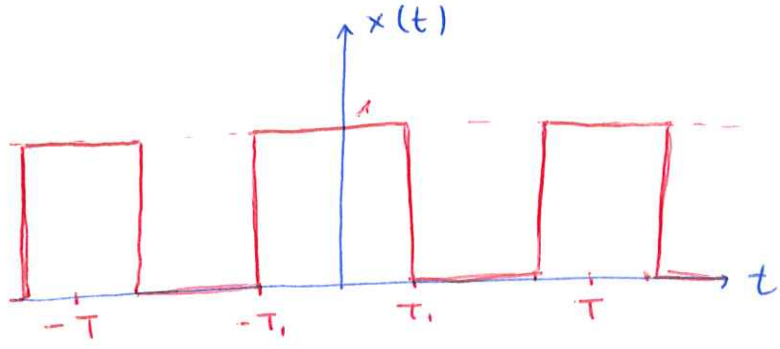
Orain, izan bitez x(t) eta y(t) T periodoko edo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ oinarrizko maiztasuneko seinale periodikoak.

a_k eta b_k badira horrenez horren funtzio bakoitzaren Fourier-en serie biderko garapenaren koefizienteak, ondorengo koefiziente erberdinak izango dituzte funtzio erberdinek, propietate asko betez, oso erabilgarriak.

Propietatea	Seinale periodikoa	Fourierren seriearen koefizienteak
Notazioa	$x(t)$ Periodikoak, T periodokoa eta $y(t)$ oinarrizko maiztasuna $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Linealtasuna	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Denbora-desplazamendua	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Denbora-alderantzikatzea	$x(-t)$	a_{-k}
Denbora-eskala	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$, Periodikoa, periodoa T/α	a_k
Konboluzio periodikoa	$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \quad x(t) * y(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Maiztasun-desplazamendua	$e^{jM\omega_0 t}x(t) = e^{jM(2\pi/T)t}x(t)$	a_{k-M}
Biderketa	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$
Diferentzazioa	$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$
Integrazioa	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$ balio finitukoa eta periodikoa bakarrik $a_0 = 0$ baldin bada	$\left(\dfrac{1}{jk\omega_0}\right) a_k = \left(\dfrac{1}{jk(\frac{2\pi}{T})}\right) a_k$
Simetria konjokatua Seinale errealen kasuan	$x(t)$ erreala	$\begin{cases} a_k & = a^*_{-k} \\ \Re\{a_k\} & = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} & = -\Im m\{a_k\} \\ \lvert a_k \rvert & = \lvert a_{-k} \rvert \\ \angle a_k & = -\angle a_{-k} \end{cases}$
Seinale erreala eta bikoitia	$x(t)$ erreala eta bikoitia	a_k erreala eta bikoitia
Seinale erreala eta bakoitia	$x(t)$ erreala eta bakoitia	a_k irudikari purua eta bakoitia
Konjugazioa	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Seinale errealen banaketa bakoitia eta bikoitia	$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}v[x(t)] & x(t)\ erreala \\ x_o(t) = \mathcal{O}d[x(t)] & x(t)\ erreala \end{cases}$	$\Re\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$
Parsevalen teorema	$\dfrac{1}{T}\int_T \lvert x(t) \rvert^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert a_k \rvert^2$	

PULTSU LAUKIZUZEN TRENA

Izan bedi ondorengo seinale jarraitua:



kalkula ditzagun Fourier-en garapeneko koefizienteak:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\cdot e^{-jk\omega t}\,dt + \cancel{\frac{1}{T}\int_{T_1}^{T-T_1} 0\cdot e^{-jk\omega t}\,dt} =$$

$$= -\frac{1}{Tjk\omega}e^{-jk\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2\sin(k\omega T_1)}{\omega T k} = \frac{\sin(k\omega T_1)}{\pi k}$$

Hau da,

$$C_k = \frac{\omega T_1}{\pi}\,\mathrm{sinc}(k\omega T_1), \quad \text{non} \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

dugu; baina, $k=0$ denean, indeterminazioa dugu; beraz, hasierara goaz kasu partikular hau aztertzera:

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j\cdot 0\,\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{2T_1}{T}$$

Hortaz, gure funtzioaren Fourier-en serie bidezko garapena ondorengoa dugu:

$$x(t) = \frac{2T_1}{T} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\omega T_1}{\pi}\,\mathrm{sinc}(k\omega T_1)\cdot e^{jk\omega t}$$

2.1.2 Seinale diskretuak

Seinale jarraituekin bezala, seinale diskretu bat, N periodokoa eta $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ oinarrizko maiztasunekoa, Fourier-en serie baten bidez adierazi daiteke:

$$x[n] = \sum_{k=\{N\}} a_k e^{jk\cdot\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=\{N\}} a_k \phi_k[n]$$

non $\quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\{N\}} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ den.

Ohartu $n=\{N\}$ notazioak adierazi nahi duela periodo batean zehar batu nahi dela, hots, $n\in[0,N-1]$ tartean, $n\in[1,N]$ tartean... etab.

Hau frogatzeko, har dezagun ondorengo funtzioa:

$$\sum_{n=\{N\}} x[n] e^{-jr\omega n}$$

$x[n]$-ren garapena sartuz,

$$\sum_{n=\{N\}} x[n] e^{-jr\omega n} = \sum_{n=\{N\}}\sum_{k=\{N\}} a_k e^{j(k-r)\omega_0 n} =$$

$$= \sum_{k=\{N\}} a_k \sum_{n=\{N\}} e^{j(k-r)\omega n}$$

Jakinik $\sum_{n=\{N\}} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = N$ dela soilik $k=0,\pm N,\pm 2N\ldots$ denean eta nulua bestela, aurreko funtzioaren balioa $a_r\cdot N$ izango da, hots $k=r$ dagokion batugaiarena.

Hortaz, a_r askatuz,

$$a_r = \frac{1}{N}\sum_{n=\{N\}} x[n] e^{-jr\omega n}$$

Ohartu seinale diskretuetan garapeneko koefizienteak errepikatuko zaizkigula. Izan ere, ondoko kenketa egiten:

$$x[n] = a_0\Phi_0[n] + a_1\Phi_1[n] + \ldots + a_{N-1}\Phi_{N-1}[n]$$

$$-\quad x[n] = \qquad a_1\Phi_1[n] + \ldots + a_{N-1}\Phi_{N-1}[n] + a_N\Phi_N[n]$$

$$0 = a_0\Phi_0[n] \quad / \quad / \quad / \quad - a_N\Phi_N[n]$$

Eta jakinik $\Phi_k[n] = \Phi_{k+N}[n]$ dela edozein k-rako,

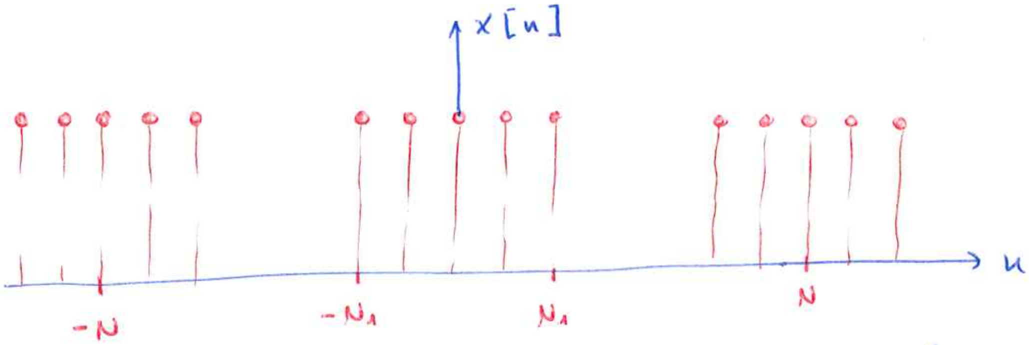
$a_N = a_0$ dugu!

Serie biderko garapenek propietate asko betetzen dituzte ere. Izan bitez N periododko eta horrenez horren a_k eta b_k koefizienteko $x[n]$ eta $y[n]$ seinale periodikoak. Orduan:

Propietatea	Seinale periodikoa	Fourierren seriearen koefizienteak
Notazioa	$x[n]$, $y[n]$ Periodikoak, N periodokoa eta oinarrizko maiztasuna $\omega_0 = 2\pi/N$	a_k, b_k Periodikoak, N periodokoa
Linealtasuna	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Denbora-desplazamendua	$x[n-n_0]$	$a_k e^{-jk\omega_0 n_0} = a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Maiztasun-desplazamendua	$e^{jM\omega_0 n}x[n] = e^{jM(2\pi/N)n}x[n]$	a_{k-M}
Denbora-alderantzikatzea	$x[-n]$	a_{-k}
Denbora-eskala	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & n \text{ bada } m-\text{ren multiploa} \\ 0 & n \text{ ez bada } m-\text{ren multiploa} \end{cases}$ Periodikoa, periodoa mN	$\frac{1}{m}a_k$ Peridodikoak, mN periodokoa
Konboluzio periodikoa	$x[n] * y[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$	Na_kb_k
Biderketa	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$
Diferentzia	$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - e^{jk\omega_0}\right)a_k = \left(1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)a_k$
Batuketa jarraitua	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]$ balio finitukoa eta periodikoa bakarrik $a_0 = 0$ baldin bada	$\left(\frac{1}{(1-e^{jk\omega_0})}\right)a_k = \left(\frac{1}{(1-e^{jk\frac{2\pi}{N}})}\right)a_k$
Simetria konjokatua Seinale errealen kasuan	$x[n]$ erreala	$\begin{cases} a_k & = a^*_{-k} \\ \Re\{a_k\} & = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} & = -\Im m\{a_k\} \\ \lvert a_k\rvert & = \lvert a_{-k}\rvert \\ \angle a_k & = -\angle a_{-k} \end{cases}$
Seinale erreala eta bikoitia	$x[n]$ erreala eta bikoitia	a_k erreala eta bikoitia
Seinale erreala eta bakoitia	$x[n]$ erreala eta bakoitia	a_k irudikari purua eta bakoitia
Konjugazioa	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Seinale errealen banaketa bakoitia eta bikoitia	$\begin{cases} x_e[n] = \mathcal{E}v[x[n]] & x[n] \text{ erreala} \\ x_o[n] = \mathcal{O}d[x[n]] & x[n] \text{ erreala} \end{cases}$	$\Re\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$
Parsevalen teorema	$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{n=\langle N\rangle} \lvert a_k\rvert^2$	

PULTSU LAUKIZUZEN TREN DISKRETUA

Izan bedi ondorengo segida:



Hau da, periodo batean, $x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & N_1 < |n| < \frac{N}{2} \end{cases}$

adierazpena betetzen duena.

Bere Fourier-en serie bidezko garapenaren koefizienteak:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$n + N_1 = m$ aldagai-aldaketa eginez,

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}$$

dugu. Jakinik $\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r}$ dela, zera dugu:

$$a_k = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \cdot \frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} =$$

$$= \frac{1}{N} \cancel{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}} \cdot \frac{\cancel{e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1/2)}} \left(e^{jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1/2)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1/2)} \right)}{\cancel{e^{-jk\frac{\pi}{N}}} \left(e^{jk\frac{\pi}{N}} - e^{-jk\frac{\pi}{N}} \right)}$$

Hau da,

$$a_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(2\pi k \frac{N_1 + 1/2}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)} \quad , \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \text{ denean}$$

Eta $k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ denean, aldiz,

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \underbrace{e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}_{1} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} 1$$

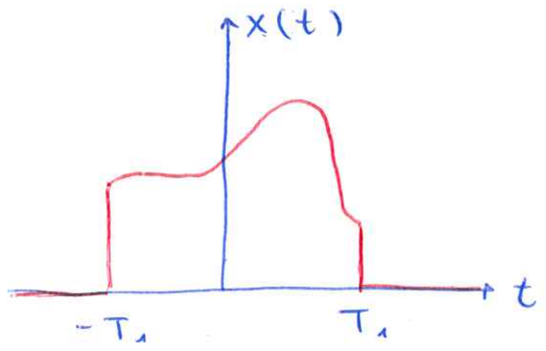
$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N} \quad , \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \text{ denean}$$

2.2. Fourier-en transformatua

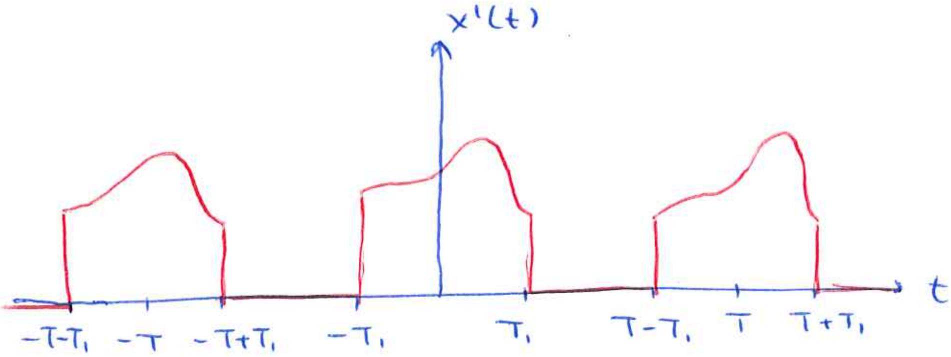
Seinale ez-periodiko baten Fourier-en serie bidezko garapena egin nahi badugu, beste bide batetik jo behar dugu eta hor agertzen zaigu Fourier-en transformatua.

2.2.1. CTFT: Seinale jarraituen Fourierren transformatua.

Har dezagun tarte mugatu batean soilik ez-nulua den seinalea, hots, $x(t) = 0$ dena $|t| > T_1$ denean:



Har dezagun orain $T > T_1$ periodoko seinalea:



non $[-T_1, T_1]$ tartea $x(t)$-ren berdina den.

Modu honetan $x(t) = \lim_{T\to\infty} x'(t)$ gisa ikusi dezakegu.

Badakigunez, $x'(t)$ seinaleak Fourier-en serie bidezko garapena du:

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \text{non} \quad a_k = \frac{1}{T}\int_T x'(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

a_k koefiziienteak berridatziz,

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x'(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Izan bedi

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

orduan $X(j\omega) = a_k \cdot T$ dugu eta $x'(t)$-ren garapena:

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j\omega) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X(j\omega) e^{jk\omega_0 t}$$

$T \to \infty$ limitean, $x'(t) \to x(t)$ izatera gaiu. $\omega_0 \to 0$ izango dugu eta $k\omega_0 \to \omega$. Era honetan batukaria integral bilakatuko zaigu. Horrela, ondorengo adierazpenak lortzek dira:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

non

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$X(j\omega)$ $x(t)$-ren Fourier-en transformatua da eta $x(t)$ $X(j\omega)$-ren antitransformatua.

Berehalakoa da ikustea $x'(t)$-ren a_k koefizienteak $x(t)$-ren $X(j\omega)$ transformatuaren bidez lor ditzakegula; izan ere,

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

Fourier-en transformatuak propietate asko betetzen ditu. Izan bitez $x(t)$ eta $y(t)$ seinaleen $X(\omega)$ eta $Y(\omega)$ transformatuak (ohartu $\omega \to j\omega$ aldagai-aldaketa egin dela definizioan).
Ondorengo taulan jasotzen dira propietate nagusiak.

Propietatea	Seinale aperiodikoa	Fourierren transformatua
Notazioa	$x(t)$ $y(t)$	$X(\omega)$ $Y(\omega)$ $\quad \omega \dashrightarrow j\omega$
Linealtasuna	$Ax(t)+By(t)$	$AX(\omega)+BY(\omega)$
Denbora-desplazamendua	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Denbora-alderantzikatzea	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Denbora-eskala	$x(\alpha t)$, $\alpha>0$	$\frac{1}{\|\alpha\|}X(\frac{j\omega}{\alpha})$
Konboluzio periodikoa	$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(\omega)Y(\omega)$
Maiztasun-desplazamendua (modulazioa)	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
Biderketa	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)*Y(\omega)$
Diferentzazioa	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Integrazioa	$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt$ balio finitukoa eta periodikoa bakarrik $a_0=0$ baldin bada	$\left(\frac{1}{j\omega}\right)X(\omega)+\pi x(0)\delta(\omega)$
Simetria konjokatua Seinale errealen kasuan	$x(t)$ erreala	$\begin{cases} X(\omega) & = X^*(-\omega) \\ \Re\{X(\omega)\} & = \Re\{X(-\omega)\} \\ \Im m\{X(\omega)\} & = -\Im m\{X(-\omega)\} \\ \|X(\omega)\| & = \|X(-\omega)\| \\ \angle X(\omega) & = -\angle X(-\omega) \end{cases}$
Seinale erreala eta bikoitia	$x(t)$ erreala eta bikoitia	$X(\omega)$ erreala eta bikoitia
Seinale erreala eta bakoitia	$x(t)$ erreala eta bakoitia	$X(\omega)$ irudikari purua eta bakoitia
Konjugazioa	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Seinale errealen banaketa bakoitia eta bikoitia	$\begin{cases} x_e(t)=\mathcal{E}v[x(t)] & x(t)\ erreala \\ x_o(t)=\mathcal{O}d[x(t)] & x(t)\ erreala \end{cases}$	$\Re\{X(\omega)\}$ $j\Im m\{X(\omega)\}$
Parsevalen teorema	$\int_{-\infty}^{\infty}\|x(t)\|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|X(\omega)\|^2d\omega$	

Seinale batek Fourieren transformatua izateko baldintza bakarra ondorengoa da:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt<\infty$$

hau da, x(t) energia finituko seinalea izan behar da. (Horrez gain, muturren eta ez-jarraitutasunen kopuruak tarte finitu batean finituak izan behar dira, baina ez dira fisikoki esanguratsuak).

- Seinale periodiko baten CTFTa

Fourier-en serie biderko garapenetik, oso sinplea izango zaigu seinale periodiko baten Fourier-en transformatua lortzea.

Izan bedi ondorengo transformatua:

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

eta bere antitransformatua:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}\,d\omega =$$

$$= e^{j\omega_0 t}$$

Orokortzen badugu, $X(j\omega)$ pultsuen konbinario lineal bat bada,

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-\omega_k)$$

bere antitransformatua

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

izango da. Hau da, $x(t)$ seinalearen a_k Fourier-en garapeneko koefizienteak ezagunak badira, haren Fourier-en transformatua berehalakoa izango da.

- Dualtasuna

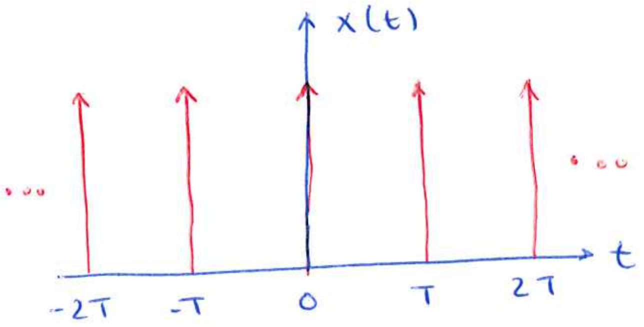
Fourier-en transformatuen propietate oso garrantzitsu bat bere dualitatea da. $x(t)$ seinalearen transformatua $X(j\omega)$ bada, $X(t)$-rena $2\pi x(-j\omega)$ izango da:

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$
$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-j\omega)$$

Adibidez.

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = 1$$
$$X(t) = 1 \longleftrightarrow x(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

PULTSU TRENA



Izan bedi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

pultsu trena. Bere Fourier-en serie bidezko garapeneko koefizienteak lortuz:

$$a_k = \int_T \frac{1}{T} x(t) e^{-j\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\omega_0 kt} dt = 1/T$$

Berehalakoa dugu bere Fourier-en transformatua:

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)$$

Hau da, funtzio bera da baina bereskalatuta.

MAIZTASUN MODULAZIOA

Izan bedi $y(t) = \cos(w_0 t)$ seinalea eta bere

$$Y(jw) = \pi[\delta(w-w_0) + \delta(w+w_0)]$$

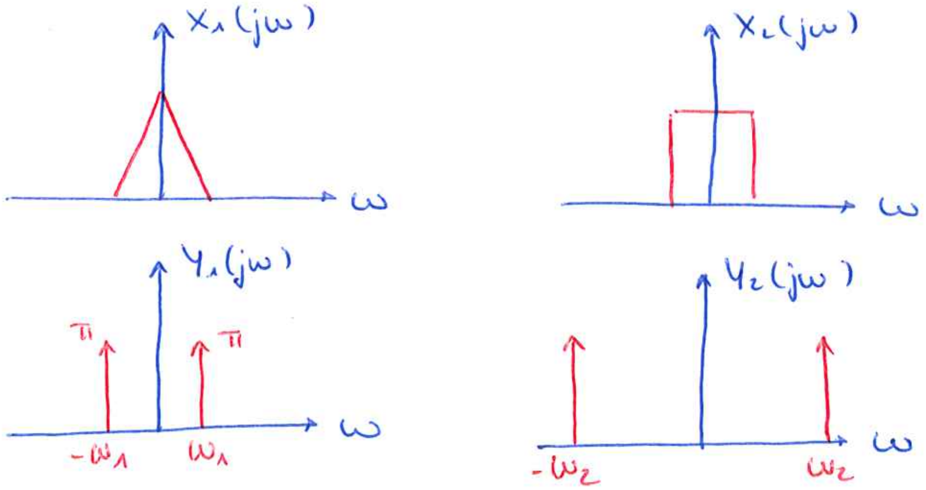
Fourier-en transformatua. Seinale hau erabiliz, edozein $x(t)$ seinale maiztasunean desplazatu diezaiokegu. Izan bedi $z(t) = x(t)y(t)$ seinalea:

$$z(t) = x(t)\cos(w_0 t) = \frac{1}{2}x(t)(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t})$$

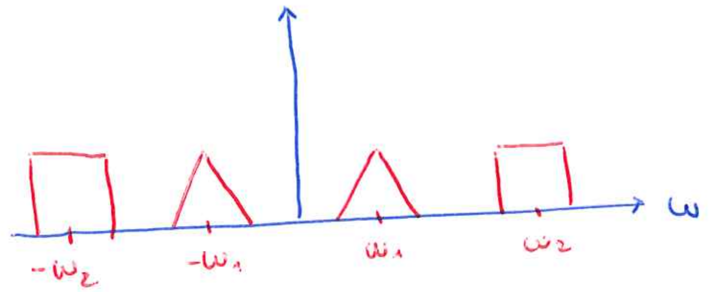
orduan, $x(t)$-ren Fourier-en transformatua $X(jw)$ bada, $z(t)$-rena maiztasunaren desplazamenduagatik:

$$Z(jw) = \frac{1}{2}[X(jw-jw_0) + X(jw+jw_0)]$$

Adibidez,



x_1 eta x_2 seinaleak jasoko bagenitu, ezingo genuke informaziorik bereizi. Baina x_1 y_1 seinalearekin biderkatu eta x_2 y_2 seinalearekin, jasoko genukeenak



itxura izango luke; hau da, jatorrizko seinale biak ditugu maiztasunean sakabanatuta. Modu honetan iragazkiak jartzen baditugu ω_1 edo ω_2 maiztasunen inguruan gai izango ginateke informazioa "aukeratzeko". Ideia honetan oinarritzen da AM irratia, informazioa seinalearen anplitudeak emango baitigu.

2.2.2. DTFT: Seinale diskretuen Fourierren transformazioa

Oso erabilia ez bada ere, seinale diskretuen Fourier-en transformatua dugu:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

eta Fourier-en antitransformatua:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

DTFTak periodikoak dira 2π-rekiko. Izan ere,

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} =$$

$$= X(e^{j\omega})$$

Horrez gain, hainbat propietate betetzen dituzte:

Propietatea	Denboraren domeinua	Maiztasunaren domeinua
Notazioa	$x[n]$ $y[n]$	$X(\omega)$ Periodikoak, $Y(\omega)$ 2π periodokoa $\omega \dashrightarrow e^{j\omega}$
Linealtasuna	$ax[n] + by[n]$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
Denbora-desplazamendua	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(\omega)$
Denbora-alderantzikatzea	$x[-n]$	$X(-\omega)$
Denbora-eskala	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & n \text{ bada } m-\text{ren multiploa} \\ 0 & n \text{ ez bada } m-\text{ren multiploa} \end{cases}$ Periodikoa, periodoa mN	$X(k\omega)$
Konboluzioa	$x[n] * y[n]$	$X(\omega)Y(\omega)$
Korrelazioa	$r_{xy}[n] = x[n] * y[-n]$	$S_{xy}(\omega) = X(\omega)Y(-\omega) = X(\omega)Y(\omega)$ (baldin eta $y[n]$ erreala bada)
Wiener-Khintchineren teorema	$r_{xx}[n]$	$S_{xx}(\omega)$
Maiztasun-desplazamendua	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulazioa	$x[n]\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$
Biderketa	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\lambda)Y(\omega-\lambda)d\lambda$ $= X(\omega) * Y(\omega)$
Maiztasun-eremuko diferentziazioa	$nx[n]$	$j\frac{dX((\omega)}{d\omega}$
Konjugazioa	$x^*[n]$	$X^*(-\omega)$
Diferentzia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{j\omega})X(\omega)$
Batuketa jarraitua	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]$	$\left(\frac{1}{(1-e^{j\omega})}\right)X(\omega)$
Simetria konjokatua Seinale errealen kasuan	$x[n]$ erreala	$\begin{cases} X(\omega) & = X^*(-\omega) \\ \Re\{X(\omega)\} & = \Re\{X(-\omega)\} \\ \Im m\{X(\omega)\} & = -\Im m\{X(-\omega)\} \\ \lvert X(\omega)\rvert & = \lvert X(-\omega)\rvert \\ \angle X(\omega) & = -\angle X(-\omega) \end{cases}$
Seinale erreala eta bikoitia	$x[n]$ erreala eta bikoitia	$X(\omega)$ erreala eta bikoitia
Seinale erreala eta bakoitia	$x[n]$ erreala eta bakoitia	$X(\omega)$irudikari purua eta bakoitia
Konjugazioa	$x^*[n]$	$X(-\omega)^*$
Seinale errealen banaketa bakoitia eta bikoitia	$\begin{cases} x_e[n] = \mathcal{E}v[x[n]] & x[n]\, erreala \\ x_o[n] = \mathcal{O}d[x[n]] & x[n]\, erreala \end{cases}$	$\Re\{X(\omega)\}$ $j\Im m\{X(\omega)\}$
Parsevalen teorema	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]^2\rvert = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$	

Ohartu Fourier-en transformatua existitzeko ondoko baldintza bete behar dela:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

- Seinale periodiko baten DTFT

$x[n]$ seinale periodiko baten Fourierren serie bidezko garapenaren a_k koefizienteak ezagunak badira, bere Fourier-en transformatua berehalakoa da:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

non N gure seinalearen periodoa den.

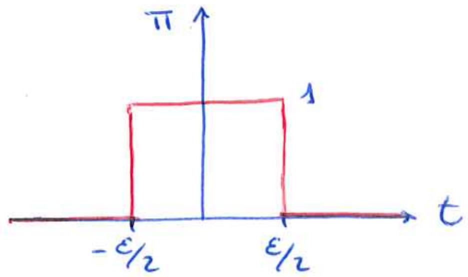
2.2.3 Oinarrizko Fourierren erlazioak

Ondorengo taulan seinale garrantzitsuenen Fourier-en transformatuak bildu ditugu. Ohartu seinale periodikoen kasuan, Fourier-en serie bidezko garapena ezaguna izanik, transformatua berehalakoa dela. Bestalde, jabetu dualtasun propietateaz.

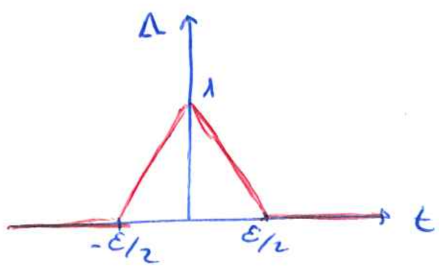
Seinalea	Fourierren transformatua	Fourierren serie koefizienteak (periodikoa bada)
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, bestela
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, bestela
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, bestela
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1,\ a_k = 0,\ k \neq 0$ (Edozein $T > 0$)
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}, \forall k$
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega} = 2T_1 \mathrm{sinc}\omega T_1$	–
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	–
$\delta(t)$	1	–
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	–
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	–
$zeinu(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	–
Pultsu trena $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert < \frac{T}{2} \end{cases}$ and $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \mathrm{sinc}(k\omega_0 T_1) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\prod\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$	$\varepsilon \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)$	
$\varepsilon \mathrm{sinc}\left(\frac{t\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \mathrm{Sa}\left(\frac{t\varepsilon}{2}\right)$	$2\pi \prod\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)$	
$\bigwedge\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$	$\frac{\varepsilon}{2} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\varepsilon}{4}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\varepsilon}{4}\right)$	
$\frac{\varepsilon}{2} \mathrm{Sa}^2\left(\frac{t\varepsilon}{4}\right)$	$2\pi \bigwedge\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)$	

Horrez gain, bi seinale berri definitu dira:

- Pultsu laukizuzena, $\Pi(t/\varepsilon)$



- Pultsu triangeluarra, $\Lambda(t/\varepsilon)$



2.3. Laplace-en transformatua

Edozein $x(t)$ seinalearen Laplace-en transformatua, $X(s)$, ondorengoa da:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

non $s = \sigma + j\omega$ zenbaki konplexua den. Bestalde,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) e^{st} ds$$

dugu. Ohartu Fourier-en transformatua Laplace-renaren kasu partikularra dugula, $s = j\omega$ denean, baina transformatu horiek abantaila bat du. Izan ere, existitzeko baldintza nahikoa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

da: mugapen gutxiago ditu CTFT-ak baino. Hala ere, oso garrantzitsua da ROC-a (Region O. Convergence) zehaztea, hots, non existitzen den Laplaceren transformatua. Adibidez, $x(t) = e^{-at} u(t)$ eta $x'(t) = -e^{-at} u(-t)$ seinaleek Laplaceren transformatu bera dute: $\frac{1}{s+a}$; baina lehenengoaren ROC-a $Re(s) > -a$ da eta bigarrenarena $Re(s) < -a$. Hortaz ROC-a ezagutu gabe, ezin dugu ezagutu jatorrizko + errealeko seinalea.

Hala ere, guretzat ez da oso garrantzitsua izango, sistema kausalekin egingo baitugu lan.

Laplaceren transformatuak ondorengo propietate eta teoremak betetzen ditu:

Propietatea	Seinale aperiodikoa	Laplaceren transformatua	ROC
Notazioa	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$	$R(s)$ $R_1(s)$ $R_2(s)$
Linealtasuna	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$	$R_1 \cap R_2$, gutxienez
Denbora-desplazamendua	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
Denbora-eskala	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}X(\frac{s}{\alpha})$	R eskalatua, s ROC-en dago $\frac{s}{\alpha}$ Ren badago
Konjugatua	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Konboluzioa	$x_1(t)*x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$	$X_1(s)X_2(s)$	$R_1 \cap R_2$, gutxienez
Esponentzial baten biderketa	$e^{at}x(t)$	$X(s-a)$	R desplazatua, $R+a$
Diferentziazioa denbora eremuan	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	R, gutxienez
Diferentziazioa maiztasun eremuan	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integrazioa denbora eremuan	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\left(\frac{1}{s}\right)X(s)$	$R \cap \Re e\{s\} > 0$, gutxienez
Hasierako balioaren teorema	$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$	$x=0$ bada, $t<0$ denean eta funtzio singularrik	ez badaude $t=0$ unean
Amaierako balioaren teorema	$\lim_{s\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$	$X(s)$ analitikoa bada $\forall s$, $\Re e\{s\} > 0$	

Orain arteko transformatua aldebiko Laplaceren transformatua da; baina, era berean, alde bakarreko Laplaceren transformatua definitzen da:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

Oso erabilgarria da gure seinaleak $x(t)u(t)$ forma dutenean, kasu honetan ROC-a ez baita erabilgarria.

Alde bakarreko LT-ak ondorengo propietateak betetzen ditu:

Propietatea	Seinale aperiodikoa	Laplaceren transformatua
Notazioa	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$
Linealtasuna	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$
Denbora-desplazamendua	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
Denbora-eskala	$x(\alpha t)$, $\alpha>0$	$\frac{1}{\alpha}X(\frac{s}{\alpha})$
Konjugatua	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$
Konboluzioa	$x_1(t)*x_2(t)=$ $\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$	$X_1(s)Y_2(s)$
Esponentzial baten biderketa edo Desplazamendua maiztasun-eremuan	$e^{at}x(t)$	$X(s-a)$
Diferentziazioa denbora eremuan	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0^-)$
Diferentziazioa maiztasun eremuan	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$
Integrazioa denbora eremuan	$\int_{0^-}^{t}x(\tau)d\tau$	$\left(\frac{1}{s}\right)X(s)$
Hasierako balioaren teorema	$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$	funtzio singularrik ez badaude $t=0$ unean
Amaierako balioaren teorema	$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)$	$X(s)$ analitikoa bada $\forall s$, $\Re e\{s\}>0$

Ohartu aldebiko transformatuarekiko soilik diferentziazioa, integrazioa eta hasierako balioaren teoremaren baldintzak aldatzen direla.

Azkenik, ondorengo taulak seinale nagusienen Laplaceren transformatuak eta ROC-ak biltzen ditu:

Seinalea	Laplaceren transformatua	Konbergentzi-zonaldea ROC
$\delta(t)$	1	splano osoa
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} > -a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} < -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} < -a$
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	splano osoa
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -a$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -a$

- Poloak eta zeroak

Askotan, seinaleen LT-ek forma arrazionala dute, ondorengoa:

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Kasu hauetan, zenbakitzaileko polinomioaren erroei, $P(s)=0$ egiten dutenei, $X(s)$-ren zero deritze, $X(s)=0$ izango baita; aitzitik, $Q(s)$ izendatzaileko polinomioaren erroei $X(s)$-ren polo deritze, $X(s)\to\infty$ izango baita.

Erro hauetako bat k-anizkoitza bada, (k aldiz errepikatzen bada), k ordenako zeroa edo poloa dugu.

s-planoan zeroak o ikurrarekin markatzen dira eta poloak x ikurrarekin.

- ROC-aren propietate batzuk

1- $s=j\omega$ ardatza ROC-aren barne badago, hots, $Im(s) \in ROC$ bada, jatorrizko t eremuko seinalearen CTFT-a konbergentea da.

2- X(s)-ren ROC-a beti izango da $s=j\omega$ ardatzarekiko paralelo diren banden osatuta.

3- LT arrazionalentzat, ROC-aren barne ez dago polorik, puntu horietan jatorrizko seinalea ezegonkorra dela esan nahi baitu.

4- x(t) seinalearen iraupena finitua bada eta absolutuki integragarria bada, LT-aren ROC-a s-plano osoa da.

- Ekuazio diferentzial linealen ebazpena

Demagun ondorengo itxura duen ekuazio diferentzial lineala ebatzi nahi dela:

$$\alpha \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \beta \frac{dy(t)}{dt} + \gamma y(t) = x(t) \quad ; \quad \begin{array}{l} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y'_0 \end{array}$$

Laplace-ren transformatuaren propietateak erabiliz, ekuazio lineal bilakatu dezakegu. Izan ere,

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) - x(0)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt} \longleftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

transformatu bikoteak ditugu alde bakarreko LT-ren diferentziazio-propietateari esker. Hortaz, gure jatorrizko ED-a ondorengo ekuaziora laburtzen zaigu:

$$X(s) = Y(s)\cdot(\alpha s^2 + \beta s + \gamma) - (\alpha \cdot s \cdot y_0 + \alpha y_0' + \beta y_0)$$

2.4. Z transformatua

Sekuentzia diskretu baten Laplaceren transformatua saiatzen badugu,

$$X(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-sn}$$

ohartuko gara periodikotasun nahiko erredundantea lortuko dugula. Hori ekiditeko, Z transformatua definitzen da:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

eta antitransformatua:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

Ohartu, ondorengoan $z = re^{s}$ zenbaki konplexua dugula eta periodizitatea barneratzen dugula.

Kasu honetan ere ROC-a zehatz behar da. Gainera, $x[n]$-ren $X(z)$ Z transformatuaren ROC-aren barne $r=1$, $Re(s)=0$ badago ($z=re^s$), hots $r=1$ erradioko zirkunferentzia badugu, $x[n]$ DTFT-a konbergentea izango da.

Ondoko taulan Z transformatuaren propietate garrantzitsuenak bildu dira. Hurrengo orrialdean, bestalde, seinale esanguratsuenen transformatuak ditugu.

Propietatea	Seinalea	Z transformatua	ROC
Notazioa	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
Linealtasuna	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	$R_1\cap R_2$, gutxienez
Denbora-desplazamendua	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(s)$	R, jatorria gehituta edo kenduta salbu
Eskala maiztasun eremuan	$e^{-j\omega_0 n}x[n]$ $z_0^n x[n]$ $a^n x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$ $X(\frac{z}{z_0})$ $X(a^{-1}z)$	R z_0R R eskalatua, $\|a\|\,R$
Denbora-alderantzikatzea	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R^{-1}
Denbora-eskala	$x_{(m)}[n]=\begin{cases}x[n/m] & n \text{ bada } m-\text{ren multiploa}\\ 0 & n \text{ ez bada } m-\text{ren multiploa}\end{cases}$	$X(z^m)$	$R^{1/m}$
Konjugatua	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Konboluzioa	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)Y_2(z)$	$R_1\cap R_2$, gutxienez
Diferentzia denbora eremuan	$x[n]-x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	$R\cap\|z\|>0$, gutxienez
Diferentziazioa z eremuan	$nx[n]$	$-\frac{d}{dz}X(z)$	R
Batuketa denbora eremuan	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{(1-z^{-1})}X(z)$	$R\cap\|z\|>1$, gutxienez
Hasierako balioaren teorema	$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$	$x[n]=0$ bada, $n<0$ denean	
Amaierako balioaren teorema	$\lim_{n\to\infty}x[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$	$X(z)$ analitikoa bada $\forall z$, $\|z\|>1$	

	Signal, $x[n]$	Z-transform, $X(z)$	ROC
1	$\delta[n]$	1	all z
2	$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	$z \neq 0$
3	$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
4	$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
5	$nu[n]$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\| > 1$
6	$-nu[-n-1]$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\| < 1$
7	$n^2u[n]$	$\dfrac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\|z\| > 1$
8	$-n^2u[-n-1]$	$\dfrac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\|z\| < 1$
9	$n^3u[n]$	$\dfrac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$	$\|z\| > 1$
10	$-n^3u[-n-1]$	$\dfrac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$	$\|z\| < 1$
11	$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
12	$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
13	$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
14	$-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
15	$n^2a^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$	$\|z\| > \|a\|$
16	$-n^2a^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$	$\|z\| < \|a\|$
17	$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
18	$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
19	$a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
20	$a^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

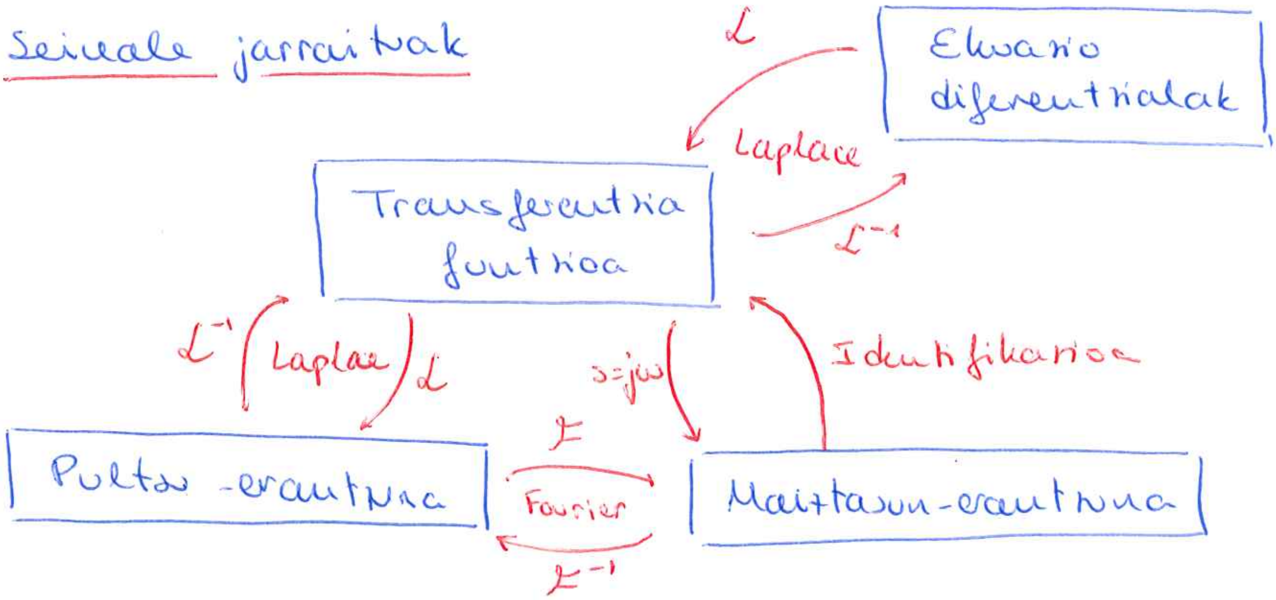
Laplaceren transformatua bezala, Z transformatua oso erabilgarria da ekuazio diferentzialak ebazteko eta sistemen transferentzia funtzioak lortzeko. Helburu honetarako propietate erabilgarrienak bildu ditugu:

Propietatea	Seinalea	Z transformatua
Notazioa	$x[n]$	$X(z)$
Linealtasuna	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$
Denbora-desplazamendua (atzerantz)	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(s)$
Denbora-desplazamendua (aurrerantz)	$x[n+1]$	$zX(s)-zx[0]$
Denbora-desplazamendua (aurrerantz)	$x[n+2]$	$z^2X(s)-z^2\left(x[0]+x[1]z^{-1}\right)$
Denbora-desplazamendua (aurrerantz)	$x[n+n_0]$	$z^{n_0}X(s)-z^{n_0}\sum_{n=0}^{n_0-1}x[n]z^{-n}$
Hasierako balioaren teorema	$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$	$x[n]=0$ bada, $n<0$ denean
Amaierako balioaren teorema	$\lim_{n\to\infty}x[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$	$X(z)$ analitikoa bada $\forall z$, $\|z\|>1$

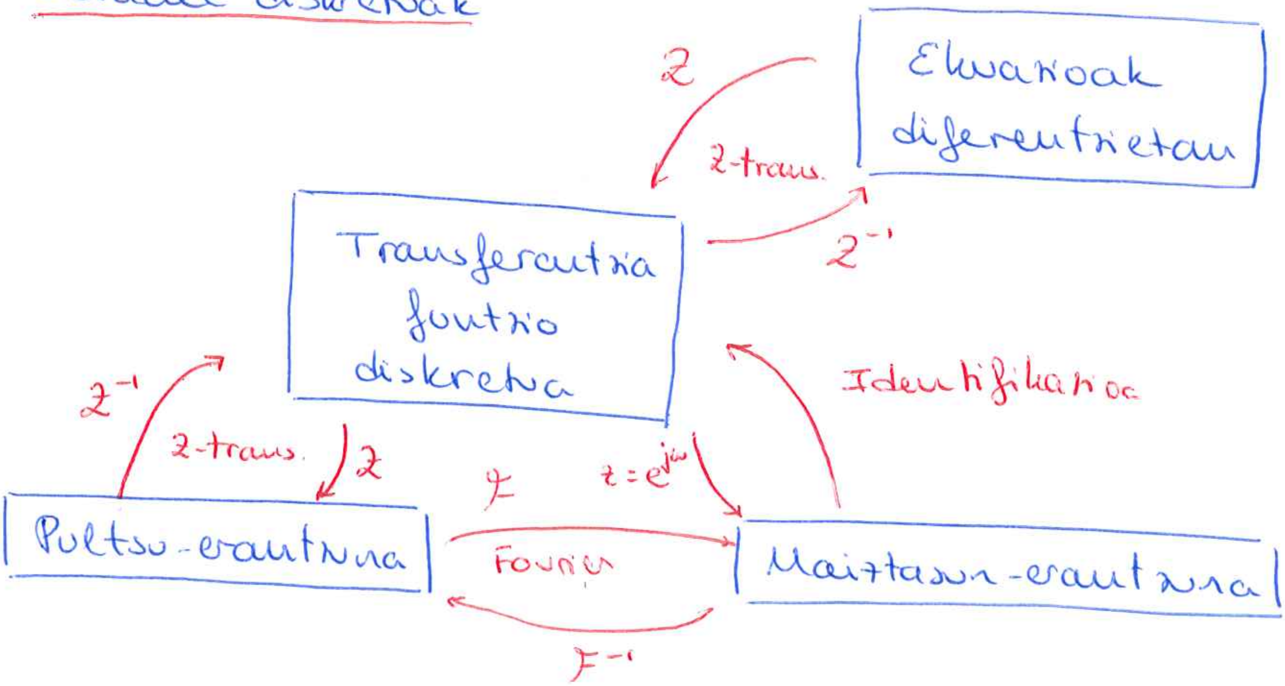
2.5 Laburpena

Ondorengo diagramek bai seinale jarraituen bai seinale diskretuen aurrean sistemek duten jokaera matematikoki errepresentatzeko erlazioak adierazten dituzte, bai eta zein tresna erabili eremu batetik bestera aldatzeko:

- Seinale jarraituak



- Seinale diskretuak



3. SEINALE ETA SISTEMEN ANALISIA

Orain arteko kontzeptu eta tresna matematikoak erabiliz seinale eta sistemen analisiak egingo dira, bai denborako bai maiztasuneko eremuan, transferentzia funtzioaren bidez askotan.

3.1. Espektroak, seinale motak, potentzia eta konboluzioa

3.1.1. Anplitude eta fase espektroak

Seinale baten anplitude- eta fase-espektroak Fourier-en serie bidezko garapeneko koefizienteek eskaintzen digute. Koefiziente horien moduluak eta faseek emango dizkigute espektro bakoitza.

Seinale jarraituen espektroa, beraz,

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \longrightarrow f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

eta seinale diskretuen espektroa:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\{N\}} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \longrightarrow x[n] = \sum_{k=\{N\}} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Bestalde, seinaleen dentsitate espektralak ditugu, Fourier-en transformatuek eskainiko dizkigutenak:

Seinale jarraituen dentsitate espektrala:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \longrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d$$

eta seinale diskretuen dentsitate espektrala:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \longrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

3.1.2. Energia- eta potentzia-seinaleak.

Seinale bat energia-seinalea da energia finituko bada, hots, ondorengoa betetzen bada

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad \text{jarraituen kasuan}$$

eta

$$E[x] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad \text{diskretuen kasuan.}$$

Ohartu energia-seinaleek potentzia nulua dutela.

Seinale bat potentzia-seinalea da potentzia finitu ez-nulukoa bada; hots, energia infinitukoa bada eta ondorengoa betetzen bada

$$P[x] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt < \infty \quad \text{jarraituen kasuan}$$

eta

$$P[x] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 < \infty \quad \text{diskretuen kasuan.}$$

Seinale bat borneatua bada potentzia-seinalea da.

Horrez gain mugatua badago denbora-tarte finitu batera, energia-seinalea da.

Definizio hauek aplikagarriak dira periodikoak ez diren seinaleen kasuan.

3.1.3. Parseval-en teorema

Energia eta potentzia bezalako magnitudeak kalkulatzeko Parseval-en teorema oso erabilgarria izaten da, denborako seinalea eta espektroak erlazionatzen baititu.

Seinale jarraituen kasuan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

dugu eta, periodikoa bada,

$$\frac{1}{T}\int_{T} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Seinale diskretuen kasuan,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

dugu, eta periodikoa bada,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

Testuinguru horietan, oso erabilgarriak dira energia- eta potentzia-espektroak.

- Potentzia espektroa: $|a_k|^2$

- Energia-Dentsitatearen Espektroa (ESD)

Oudorengo eran definitzen da:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot |X(\omega)|^2$$

eta energia-seinaleen energia, beraz:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, d\omega$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, d\omega$$

Ohartu $\Phi(\omega)$ espektrua kasu diskretuan periodikoa izango dela, potentzia espektrua bezala.

3.1.4. Energia eta potentziarako beste bide bana

Bi seinaleen arteko korrelazioa (korrelazio gurutzatua) bi seinaleen menpetasunaren antzekotasunaren adierazle eta oudorengo eran definitzen da:

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t+\tau)\, dt$$

Seinale baten autokorrelazioa seinale horrek bere buruarekin duen korrelazioa da. Bada, existitzen bada, ESD-ren berdina da bere Fourier-en transformatua:

$$\Phi(\omega) = S_{xx}(\omega) \equiv \mathcal{F}[r_{xx}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t+\tau)\, dt\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Bestetik, seinale baten Fourier-en transformatu ungaba definitu ahal dugu:

$$\hat{X}_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_0^T x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

non T denbora-tarte mugatu arbitrario bat den (ez du zertan periodo bat izan). Bada, magnitude horren moduluaren karratuaren itxarotako balioa kalkulatuz eta T infinituranzt eramanez, Potentzia-Dentsitate Espektroa (PSD) lortuko dugu:

$$|a_k|^2 = \Gamma_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} E\left[|\hat{X}_T(\omega)|^2\right]$$

Bai energia bai potentzia maiztasun-tarte jakin baterako kalkula ditzakegu:

$$E = \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{xx}(\omega)\, d\omega + \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} S_{xx}(\omega)\, d\omega$$

$$P = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \Gamma_{xx}(\omega)\, d\omega + \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} \Gamma_{xx}(\omega)\, d\omega$$

- Ausazko seinaleak?

Askotan, ausazko seinale batek badu autokorrela-zioaren batez bestekoa:

$$\gamma_{yy}(m) = E[y^*(n) * y(n+m)]$$

Bada, bere Fourier-en transformatua PSD-a da:

$$\Gamma_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{yy}(m)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

3.1.5. Konboluzioa eta sistema linealen oinarrizko ekuazioa.

Bi seinaleren (denborako eremuan) arteko konboluzioa kalkulatzea matematikoki zaila izan daiteke:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]$$

Baina oso erraza da maiztasunaren, Laplace-ren edo Z-eremuetan, biderkadura bilakatzen baita:

$$Y(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

$$Y(s) = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

$$Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

Beraz, sistema baten pultso-seinalearekiko $H(\omega)$ erantzuna ezaguturik (horren bidez ezaugarritzen ditugu sistemak), sarreran edozein seinale izanda maiztasunezko eremuan (edo Laplacerenean edo Z-renean), $X(\omega)$, irteeran izango duguna berehalakoa da:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Erlazioa berdina da energia- zein potentzia-seinaleentzat.

Energia zein potentzia dentsitate espektroek ere antzeko erlazio bat betetzen dute:

$$\Gamma_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot \Gamma_{xx}(\omega)$$

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{xx}(\omega)$$

Adierazpen hauek baliagarriak dira ausazko seinaleentzat.

3.1.6. Iragazkiak eta banda-zabalerak.

- Seinaleen beste sailkapen bat

1. Oinarrizko banda: Maiztasun espektroa $[0, \omega_{max}]$ tartean definitua badu.
2. Banda paseko seinalea: Maiztasun espektroa $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ tartean definitua badu.
3. Espektro mugatukoa: ω_1 maiztasun jakin batetik aurrera seinalea nulua badu (errealitatean ez dira existitzen):

$$|X(\omega)| = 0, \quad \omega > \omega_1$$

- Banda-zabalera (BW): seinale baten osagai nagusiak kokatzen direneko maiztasun-tartea da:

1. Espektro mugatuko seinaleetan:

$$\omega_{max} = \max_{\omega \geq 0} \{ \omega \mid |X(\omega)|^2 \neq 0 \}$$

$$\omega_{min} = \min_{\omega \geq 0} \{ \omega \mid |X(\omega)|^2 \neq 0 \} \quad \text{izanik,}$$

$$BW = \omega_{max} - \omega_{min}$$

2. Espektro ez-mugatukoetan.

Izan bedi $M = \max_{\omega \geq 0} \{ |X(\omega)|^2 \}$

$$0 < \alpha < 1$$

aukeratuz eta

$$\omega_{min} = min_{\omega \geq 0} \{ \omega \mid |X(\omega)|^2 = \alpha M \}$$

$$\omega_{max} = max_{\omega \geq 0} \{ \omega \mid |X(\omega)|^2 = \alpha M \}$$

izanik,

$$BW = \omega_{max} - \omega_{min}.$$

α hori aplikazioaren arabera aukeratzen bada ere, guretzat

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

izango da, BW-ren mugetan potentzia maximoaren (M) erdira jaisten delarik.

3. Espektro periodikoen kasuan, analisia

$$\omega \in [0, \pi]$$

tartean egiten da. Beraz, $\omega_{max} \leq \pi$ izango da beti eta $BW \leq \pi$.

- Banda-limitea (BL)

Espektro mugatuko seinaleen kasuan,

$$|X(\omega)|^2 = 0, \quad \forall \omega > BL$$

eran definitzen da; ez-mugatukoen kasuan, BW definitzeko erabili dugun hausnarketa bera egingo da.

$$|X(\omega)|^2 < \alpha M, \quad \forall \omega > BL$$

3.2. Sistemen analisia transferentzia funtzioak erabiliz

Nola lortu sistema baten erantzuna sarrerako seinale baten aurrean?

Sistema jarraitua bada, Laplace-ren eremuko transferentzia funtzioaren bitartez ezaugarritzeko dugu: $G(s)$. Orduan, sarrerako seinalearen Laplace-ren transformazioa kal-kulatuko dugu, $X(s)$, eta irteerako seinalea eremu ho-rretan lortuko da:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

Azkenik, $Y(s)$ seinalearen Laplace-ren antitransformatua burutuko dugu.

Sistema diskretuen kasuan, dena Z-eremura eramango dugu: sistema $G(z)$ funtzioaz ezaugarrituko dugu, sarre-ra seinaleari Z-transformatua aplikatuko diogu eta

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z)$$

Z-eremuko seinalea lortuko dugu. Horrela, Z-antitrans-formatua egingo dugu denborako irteera-seinalea lor-tzeko.

Azpimarratu nahi duguna zera da, sistema baten trans-ferentzia-funtzioaren bidez ezaugarri guztiak ezagutu ahal ditugu.

3.2.1. Iraunkorra eta iragankorra

Sistema batean sarrera bat dugunean, irteera bi parte edo erregimenetan zatitu dezakegu: erregimen iragankorra eta erregimen iraunkorra.

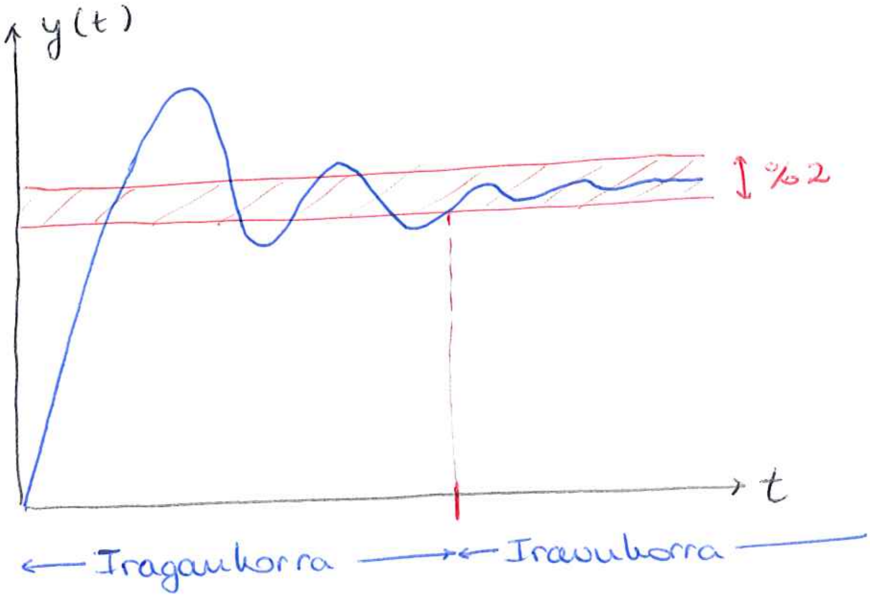
$$y(t) = y_i(t) + y_e(t)$$

eran idatzi ahalko dugu.

Informazioaren trukaketa abiadura finituan denez, sistemen erantzunak ezin dio edozein seinaleri bat-batean erantzun eta erregimen iragankorra agertuko zaigu. Denbora aurrera doan heinean, sistema egonkorra bada, erregimen hau desagertuko da eta erregimen iraunkorrean sartuko gara. Erregimen haren definizio normalizatutik ez dago, baina gorentzat seinaleak $t \to \infty$ infinituan hartzen duen baliotik %2ko (frakzio hau alda daiteke) desbiderapena baino gehiago jasaten ez duen puntutik aurrera hasiko da.

$t \to \infty$-an duen balio hori erregimen iraunkorreko erantzuna da eta ez badator bat sarrera-seinalearekin sistemak errorea duela esaten da.

Esan dezakegu egoera iraunkorra sarrera seinalearekin bat datorrela eta iragankorra sistemaren dinamikak zehaztuko duela.



3.2.2. Sistemak aztertzeko eremuak

Sistemak denbora-eremuko patroi-seinaleak erabiliz aztertu daitezke, maila-, arrapala- edota parabola--seinaleen bitartez, esaterako.

Baina bide egokiagoa da maiztasun ezberdineko seinale sinusoidalak erabiltzea. Izan ere, LTI sistema baten sarrera maiztasun jakin bateko sinusoidea bada, irteeran seinale berbera izango dugu baina amplitude eta fase ezberdinekoa, maiztasuna aldatu gabe.

Sarrera $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$ bada, $H(s)$ transferentzia-funtzioaz ezaugarritutako sistemaren irteera ondorengoa izango da:

$$y(t) = A \cdot |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \underline{/H(j\omega_0)})$$

non $|H(j\omega_0)|$ eta $\underline{/H(j\omega_0)}$ hurrenez hurren $H(j\omega_0)$-ren modulua eta fasea diren.

3.2.3. Egonkortasuna

Sistema baten egonkortasunerako hiru definizio ezberdin ditugu, baliokideak hirurak, noski:

1. BIBO egonkortasuna (Bounded Input - Bounded Output): Sistema egonkorra da sarrera bornatu baten aurrean irteera bornatua ematen badu.

2. Sistema lineala egonkorra da

$$\int_0^{\infty} |g(t)|\, dt$$

finitua bada, hots, $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$ bada

3. Sistema lineala egonkorra da bere transferentzia-funtzioko polo guztiak s-planoko ezkerreko erdian badaude (Y edo Im(s) ardatza kritikoki ezegonkorra da).

- Routh-Hurwitz-en irizpidea.

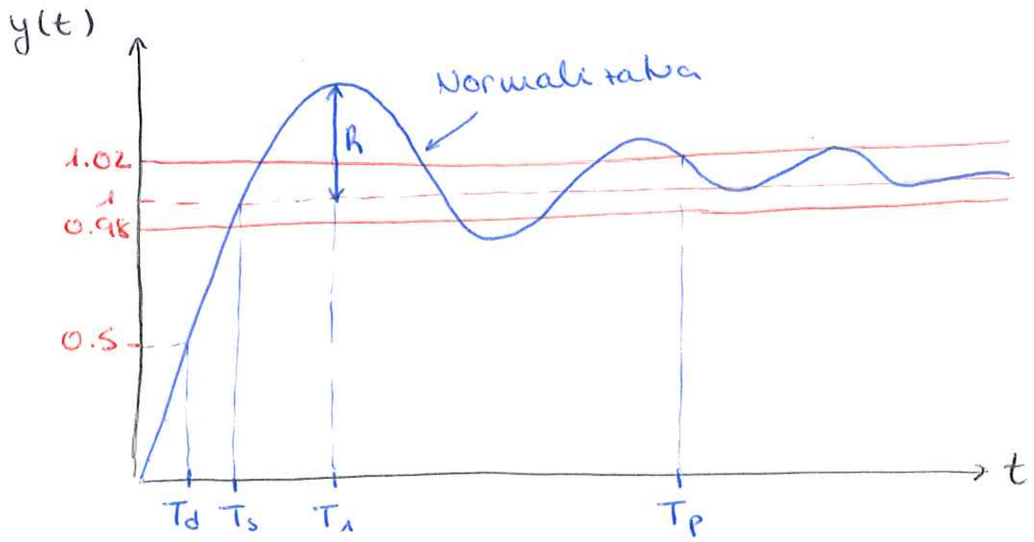
3. definizioaren arabera, sistema baten egonkortasuna s-plano barruan transferentzia-funtzioko poloak non kokatzen diren arabera mugatzen da.

Polinomio bat Hurwitz-en polinomioa dela esaten da, bere erro guztiek alde erreal negatiboa badute. Beraz, sistema egonkorra da bere ekuazio karakteristikoa (transferentzia funtzioaren izendatzailea) Hurwitzen polinomioa bada.

Polinomio bat Hurwitz-ena bada, bere koefizierro guztiak positiboak izango dira.

3.2.4. Iragankorraren espezifikazioak

Oso garrantzitsua izaten da sistema lineal baten irteeraren erregimen iragankorraren espezifikazioak zehaztea, bai kasu jarraituan bai kasu diskretuan.



- Atzerapen-denbora, T_d: Iraunkorreko balioaren erdira iristen denekoa.
- Hasiera-denbora, T_s: Iraunkorreko balioa lehenengo aldiz lortzen denekoa (definizio ez-finkoa)
- Egonkortze-denbora, T_p: Iraunkorrera iristeko behar duen denbora (definizio ez-finkoa).
- Gehienezko gainditzea, R: Irteeraren balio maximoaren eta iraunkorreko balioaren arteko diferentzia.
- Gainditze portzentuala: $\%R = \dfrac{R}{\text{azken balioa}} \times 100$

- Puntako denbora, T_p: Balio maximoa lortzen duenekoa.

Kasu diskretuan era analogoan definitzen dira k_d atzerapen-tartea, k_r hasiera-tartea, k_s egonkortze-tartea, M gehienezko gainditzea, %M gainditzea portzentuala eta k_p puntako tartea.

3.3. Iragankorraren azterketa

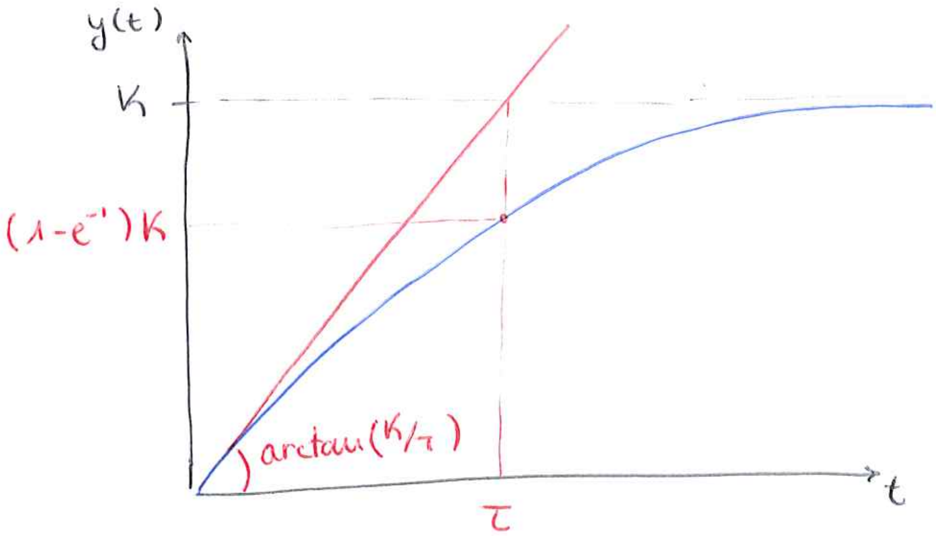
Sistema ezberdinen irteeren iragankorraren azterketa egingo dugu atal honetan, sistema jarraientzat.

3.3.1. Lehen ordenako sistema.

Izan bedi ondorengo transferentzia-funtzioa duen lehen ordenako sistema:

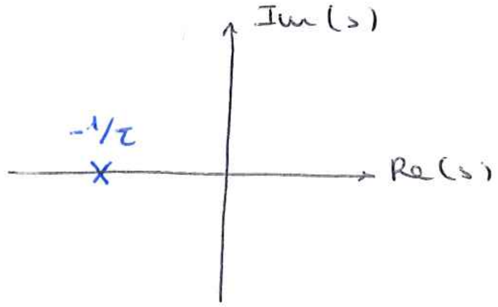
$$G(s) = \frac{K}{1+\tau s}, \quad \text{non } K \text{ irabazia den.}$$

Sarreran maila-seinalea badugu, irteeran ondorengoa lortuko da:



$$x(t) = u(t)$$
$$\downarrow$$
$$y(t) = K(1-e^{-t/\tau})$$

Sistemak polo bakarra du, $s=-1/\tau$ eta, negatiboa denez, egonkorra da $\tau>0$ denean.



τ parametroari denbora-konstantea deritzo, sistemak iraunkorreko balioaren %63.2era iristeko behar duen denbora izanik.

$t=0$ aldiuneko ihteeraren malda K/T da.

Azkenik, egonkortze-denbora:

$$T_p = -\tau \ln(0.02) \simeq 4\tau$$

3.3.2. Bigarren ordenako sistemak

Ondorengo transferentzia funtzioa dugu:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$$

non K irabazia den, ω_n maiztasun naturala eta δ indargetze-faktorea.

Sistemak bi polo ditu:

$$s_\pm = \omega_n\left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2-1}\right)$$

$\omega_n>0$ izanik, sistemaren izaera δ parametroaren mende egongo da:

1. $\delta < 0$: Polo baten alde erreala positiboa da, beraz, sistema ezegonkorra da.

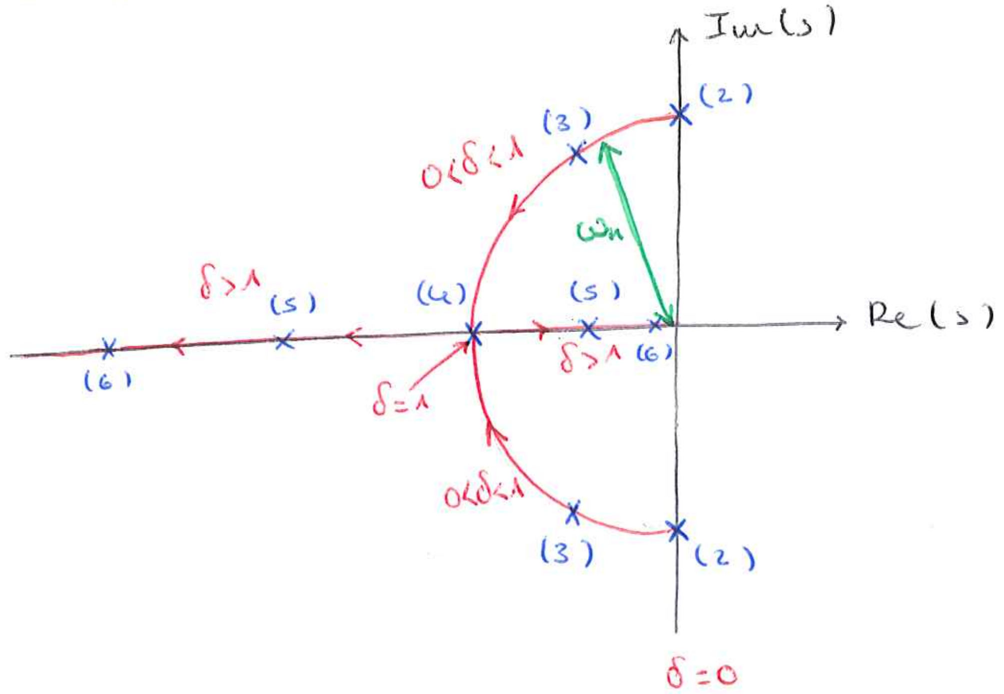
2. $\delta = 0$: $s_\pm = \pm i\omega_n$ dira poloak; sistema kritikoki egonkorra da

3. $0 < \delta < 1$: $s_+ = s_-^*$ dugu eta $Re(s_\pm) < 0$; sistema azpiindargetua da.

4. $\delta = 1$: $s_\pm = -\omega_n$ dugu eta sistema kritikoki indargetua da.

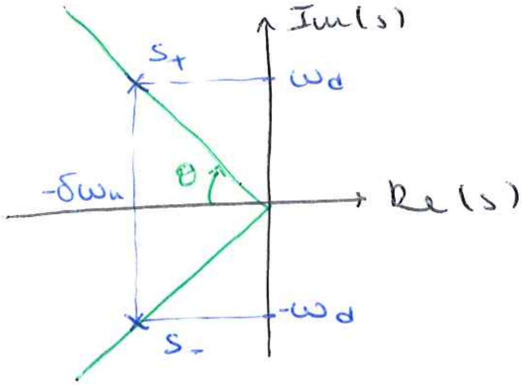
5. $\delta > 1$: Poloak errealak, negatiboak eta ezberdinak dira; sistema indargetua da.

Sistema egonkor ezberdinak ondorengo planoan laburbiltzen dira:



Sistemaren poloak gero eta gertuago egon $Im(s)$ ardatzetik, orduan itxaera oszilakorragoa izango du sistemak eta geroz eta urrunago egon orduan eta irteera indargetuagoa.

$\delta < 1$ deneko partean "zoom" egiten badugu:



non maiztasun indargetua definitu den,

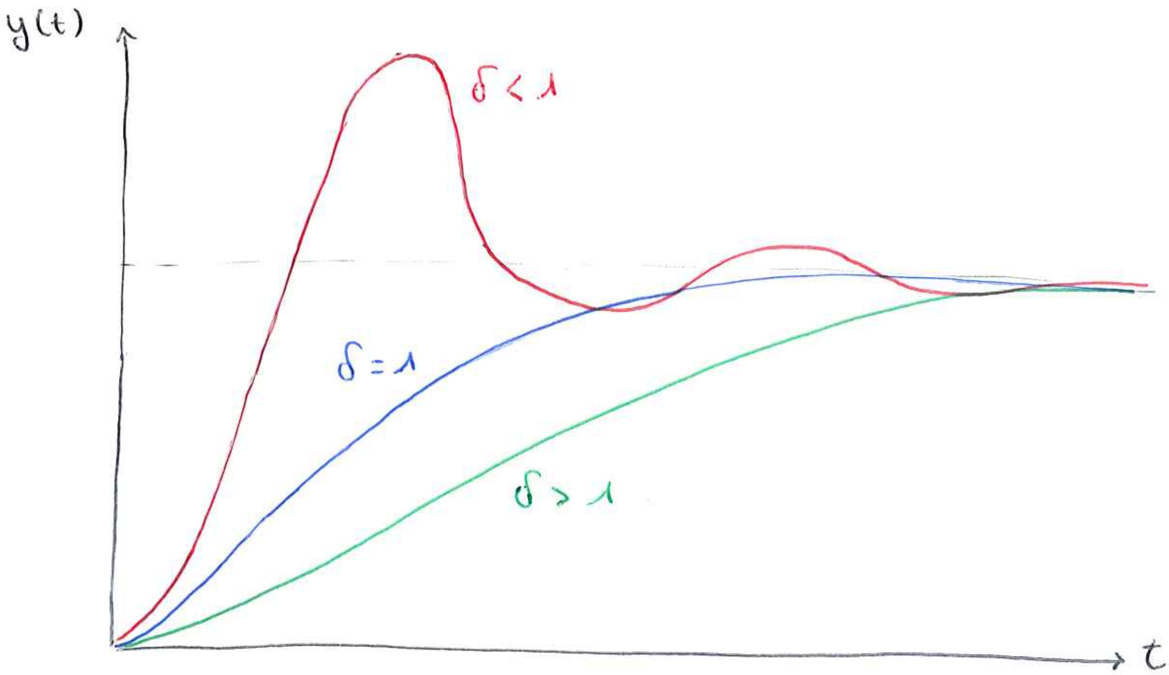
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$$

eta ondorengo angelua dugu:

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

Maila-sarrera aplikatuz, ondorengo irteera dugu:

$$y(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin\left(\omega_d t + \arctan\theta\right)\right]$$



Sistema azpiindargetuan:

- Gainditeta:

$$R = e^{-\pi \cotan(\theta)} = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

δ indargetze-koefizientea handitu, R jaisten da.

- Puntako denbora:

$$T_n = \frac{n\pi}{\omega_d} = \frac{n\pi}{\sqrt{1-\delta^2}\cdot\omega_n}$$

n-garren maximoarentzat. δ handitu, T_n-ak handitzen dira.

- Hasiera-denbora:

$$T_s = \frac{\pi-\theta}{\omega_d} = \frac{\pi-\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

δ-rekin handitzen da eta, puntako denbora bezala, maiztasun naturalaren alderantziz proportzionala da.

- Egonkortze-denbora:

$$T_p = \frac{3.91-\ln\left(\sqrt{1-\delta^2}\right)}{\delta\omega_n} \sim \frac{4}{\delta\omega_n}$$

Hau ere maiztasun naturalarekiko alderantziz proportzionala da

3.3.3. Zero bat duen bigarren ordenako sistema

Gure transferentzia funtzioa ondorengoa da:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(1+as)}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Poloak 3.3.2. ataleko berdinak izango dira

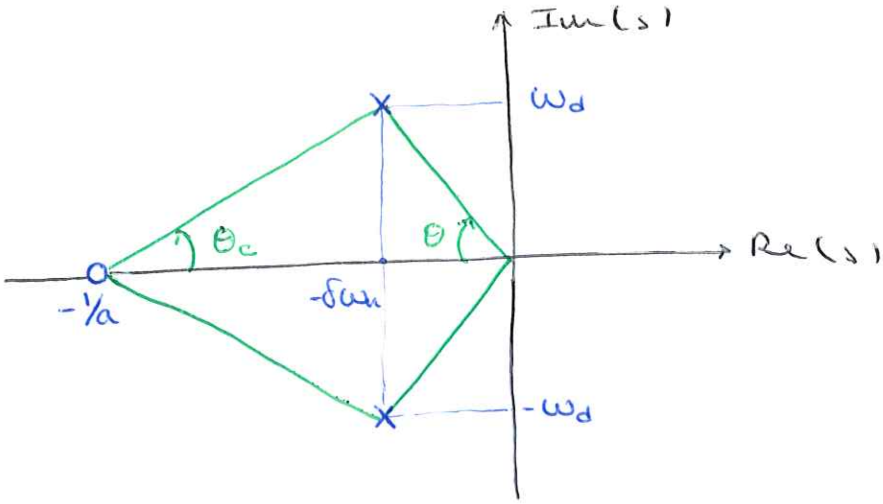
$$s_\pm = \omega_n(-\delta \pm \sqrt{\delta^2-1})$$

eta gure zeroa:

$$z = -1/a$$

Bigarren ordenako sistemaren aurreko ezaugarriak ditu, baina zeroak osziilakortasuna ematen dio sistemari: geroz eta gertuago egon Im(s) ardatzetik, orduan eta osziilakorragoa izango da.

$0<\delta<1$ denean:



non parametro berri bat dugun:

$$\theta_c = \arctan\left(\frac{\omega_d a}{\delta\omega_n a-1}\right)$$

Maila-sarreraren irteera ondorengoa da:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\omega_d t \cot(\theta)}}{\sin(\theta+\theta_c)} \sin(\omega_d t + \theta + \theta_c)$$

- Hasiera-denbora:

$$T_s = \frac{\pi - (\theta+\theta_c)}{\omega_d} = T_{s0} - \frac{\theta_c}{\omega_d}$$

non $T_{s0} = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$ zerorik gabeko bigarren ordenako sistemaren hasiera-denbora den.

- Puntako-denbora:

$$T_n = \frac{n(\pi - \theta_c)}{\omega_d} \longrightarrow T_1 = \frac{\pi}{\omega_d} - \frac{\theta_c}{\omega_d}$$

- Egonkortze-denbora:

$$T_p = \frac{3.91 - \ln[\sin(\theta+\theta_c)]}{\delta \omega_n}$$

θ_c-rekiko minimo bat dauka, θ handitz doan heinean θ_c-ren balio txikiagoan dagoena.

- Gainditzeta:

$$R = \frac{e^{(\pi-\theta_c)\cot(\theta)}}{\sin(\theta+\theta_c)} \sin\theta$$

θ_c-rekin handitzen da.

3.3.4. Polo bat gehio duen bigarren ordenako sistema

Gure sistemaren transferentzia funtzioa ondorengoa da orain:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(1+bs)(s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

3.3.2 atalelo bi polo ditugu

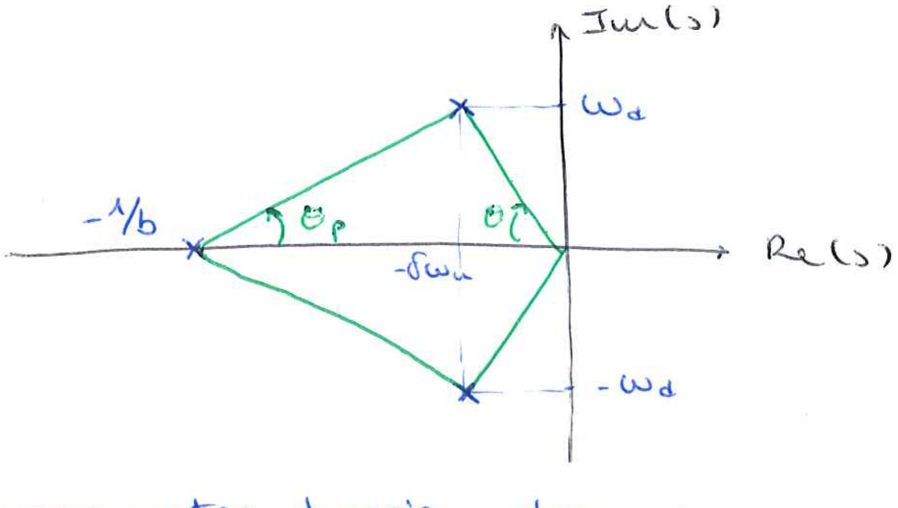
$$s_\pm = \omega_n(-\delta \pm \sqrt{\delta^2-1})$$

eta hirugarren bat:

$$p = -\frac{1}{b}$$

Orokorrean, bigarren ordenako sistemari polo bat gehitzeak egonkortasuna ematen dio, hots, oszilakortasuna jaisten dio, erantzunean motelago eginez: geroz eta gertuago egon hirugarren poloa $Im(s)$-tik orduan eta egonkorragoa.

$0<\delta<1$ denean:



non parametro berria dugun:

$$\theta_p = \arctan\left(\frac{\omega_d b}{\delta\omega_n b - 1}\right)$$

θ_p $[0, \pi/2]$ tartean handiagotzen dugun heinean, hasiera-denbora, puntako denbora eta egonkortze-denbora hartzen dira. Hala ere, $s_\pm$ polo bikotea $Im(s)$ ardatzetik oso gertu badago, egonkortze-denbora jaitsi daiteke minimo bat izan arte.

Gainditketa, aldiz, beherakorra da:

$$R = \frac{-e^{-\omega_d T_1 \cot(\theta)}}{\sin(\theta)} \sin(\omega_d T_1 + \theta)$$

3.3.5. Ordena altuagoak

Bigarren ordenako sistemari zeroak gehitzeak eta ordena handitzeak (poloa gehitzea), noski, kalkuluak zailtzen ditu. Horregatik, diseinatzailearen esku geratzen da zehaztasunaren eta erabilgarritasunaren arteko aukeraketa.

Oro har, gure transferentzia funtzioek

$$G(s) = K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdot\ldots\cdot(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdot\ldots\cdot(s+p_n)}$$

forma izango dute eta maila-seinalearekiko irteerek ondorengoa:

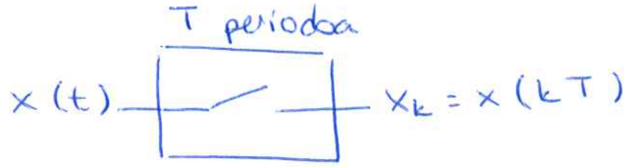
$$y(t) = K\left[1 + \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-p_i t}\right]$$

Hala ere, zero baten hurbiltasunagatik edota polo baten urruntasunagatik hurbilketak egin ditzakegu a_i koefizienteak arbuiatuz, ordena altuko sistemak sinplifikatzeko bide gisa.

3.3.6. Kasu diskretua

4. LAGINKETA ETA BERRERAIKUNTZA

Seinale jarraitu baten tarte bereko puntuetako balioak ezagutzen ditugunean, seinale lagindua dugu:



T laginketa periodoak zehaztuko du informazio galera prozesuan, geroz eta T txikiagoa orduan eta informazio gehiago gordeko da (baina kostu handiagoa suposatuko du!)

4.1. Lagindutako seinale baten Fourier-en transformatua

Har dezagun $x(t)$ energia-seinalea:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega, \quad \text{non} \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

Lagindu dezagun seinale hori T periodoaz eta ondorengo seinale diskretua lortuko dugu:

$$x_k = x(kT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega kT}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{(2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(2r+1)\pi}{T}} X(\omega) e^{j\omega kT}\, d\omega$$

Azken urratsean zera egin dugu, integrala $\frac{2\pi}{T}$

tamainako eremuetan zatitu, r-z identifikatuta eta r guztietarako batu.

Ondorengo aldagai-aldaketa eginez:

$$\omega = \frac{\Omega + 2\pi r}{T}$$

x_k berridatzi daiteke,

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(\frac{\Omega + 2\pi r}{T}\right) e^{j\left(\frac{\Omega+2\pi r}{T}\right)kT} \, d\Omega$$

Beraz, T periodoaz lagindutako x(t) seinalea ondorengoa da:

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega + 2\pi r}{T}\right) e^{j\Omega k} \, d\Omega$$

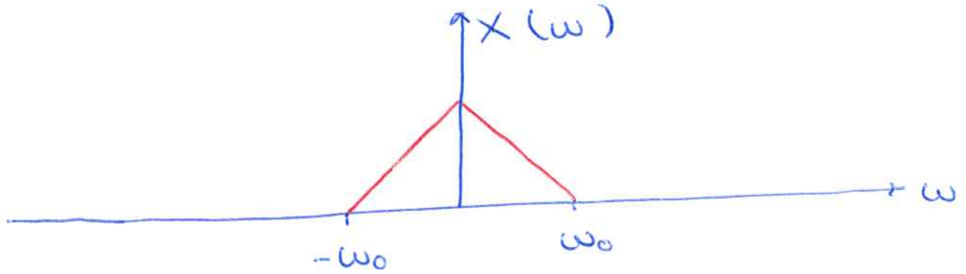
Azkenik, $\omega = \frac{\Omega}{T}$ eskala-aldaketa eginez, definiziotik lor dezakegu Fourier-en transformatua:

$$X^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(\omega + \frac{2\pi r}{T}\right)$$

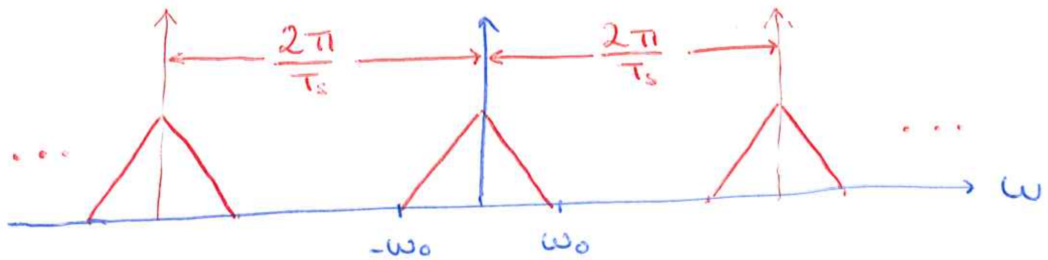
Hau da seinale lagindutaren Fourier-en transformatua zera da, jatorrizko seinalearen Fourier-en transformatua $\frac{2\pi}{T}$ periodoarekin errepikatuta maiztasunaren eremuan. T handiagoa bada, kopien arteko distantzia txikitu egiten da eta kontu handia izan behar dugu gainezarmenarekin.

4.2. Gainezarmena eta Nyquist-en teorema.

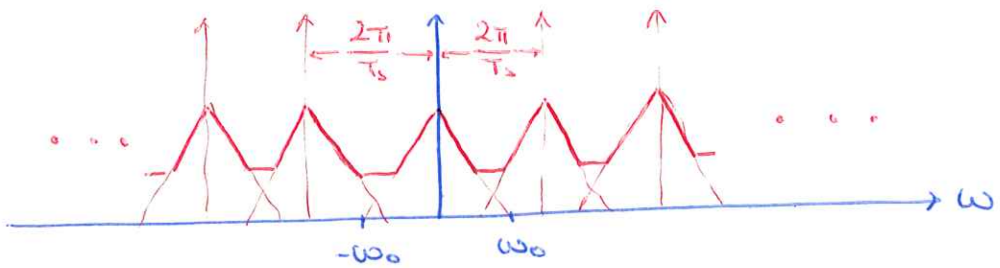
Har dezagun ondorengo espektroa duen seinale jarraitua:



4.1 atalean ikusi dugunez, seinalea lagindu ez, haren gutxi gorabeherako espektroa ondorengoa litzateke:



Baina zer gertatzen da T_s laginketa-periodoa handitzen badugu, hots laginketa-leihoa txikitzen badugu?



Gainezarpena dugu eta espektroa desitxuratu da! Modu honetan, gorde dugun informazioa ez da jatorrizkoaren baliokidea eta aliasing efektua gertatu dela esaten dugu.

Muga, berat, ondorengo teoremak emango digu:

Nyquist-en laginketa teorema

Seinale baten banda-zabalera mugatua bada, hots

$$X(\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > \omega_0 \text{ denean}$$

bada, laginketaren bitartez lortutako sekuentziak informazio berbera izango du laginketa-periodoa

$$T_s \leq \pi / \omega_0$$

bada.

Modu honetan, laginketa-maiztasuna

$$\omega_s = 2\omega_0$$

bada, BW mugatuko seinalea berreskuragarria izango da. BW ez-mugatua bada beste irizpide batzuk erabili behar dira. Gure kasuan:

1. Sistema azpiindargetua bada,

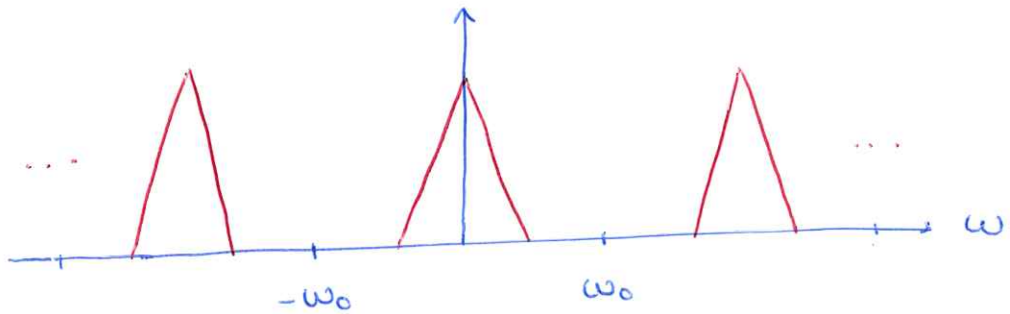
$$T_s = \frac{T_1}{10} \quad \text{edo} \quad \omega_s = 20\,\omega_d = 20\,\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

2. Sistema ez bada azpiindargetua,

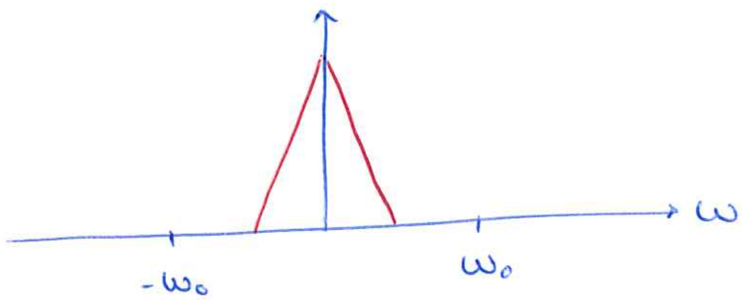
$$T_s = \frac{\tau}{10}$$

4.3. Seinaleen berreraiketa

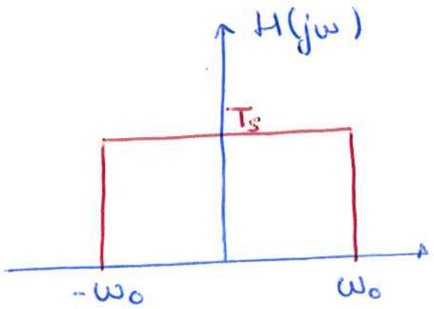
Demagun orain seinale laginду bat (Nyquist-en teorema betetzen duena) izanik. jatorrizko seinale jarraitua berreskuratu nahi dugula. Hau da,



izurako dentsitatea duen seinale batetik



seinalea lortu nahi dugu. Argi dago, horretarako. $2\omega_0$ zabalerako edo ω_s zabalerako iragazki idealetik pasatuarazi behar dugula:



$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_0 = \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{bestela} \end{cases}$$

Ohartu T_s faktoreaz biderkatzen dugula seinalea laginketan $1/T_s$ faktorea agertzen zaigulako maiztasunaren eremuan.

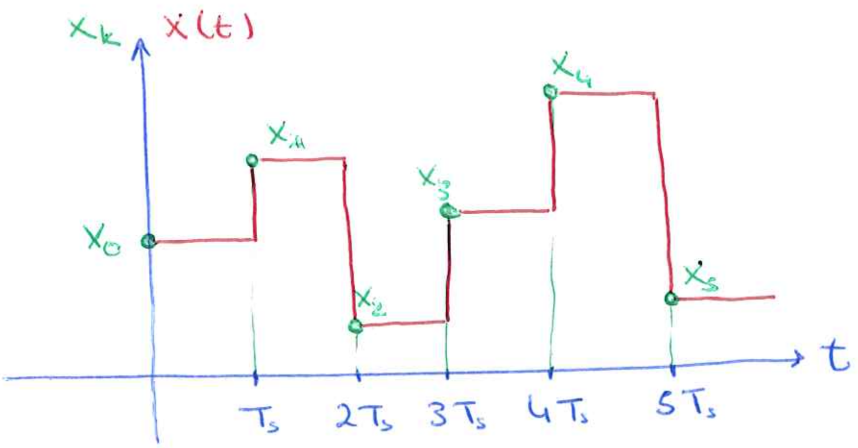
Errealitatean, baina, ezinezkoa da fisiko eta tekno-logikoki horrelako iragazkia eraikitzea eta gure iragazkiaren dinamika kontuan sartuko zaigu. Gainera, gure iragazki ideala ez da kausala, $t<0$ denean ez-nulua delako. Soluzioa? Hurbilketak erabiltzea izango da.

- Zero Ordenako Euskailua, ZOH

Hurbilketa horietako garrantzitsuenetarikoa ZOH (zero order hold) da. Ondorengoan datza: x_k seinale lagindutik $x(t)$ seinalea lortzeko, T_s periodoaz lagindua izan bada,

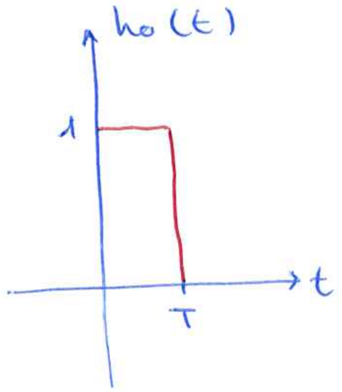
$$x(kT_s \le t < (k+1)T_s) = x_k$$

egingo dugu; hau da, $x(t)$-ren balioa konstantea izango da x_k aldatzen den arte:



Modu honetan $x_k = x(kT_s)$ izango dugu.

Horretarako, gure iragazkia ondorengoa da:



$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & t > T_s \end{cases} =$$

$$= u(t) - u(t-T)$$

kausala dena eta ondorengo maiztasuneko adierazpena duen:

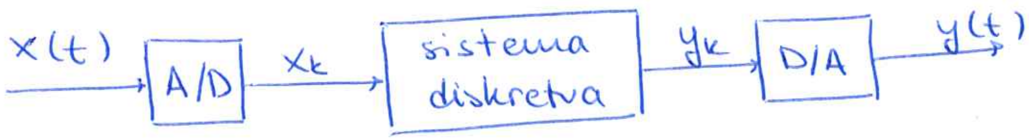
$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

Frogapena intuitiboki ikusten da denbora-eremuan,

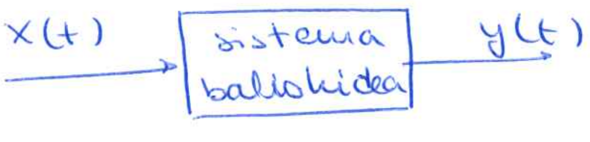
$$x(t) = x_k * h_0(t)$$

baita.

4.4. Baliokide diskretua

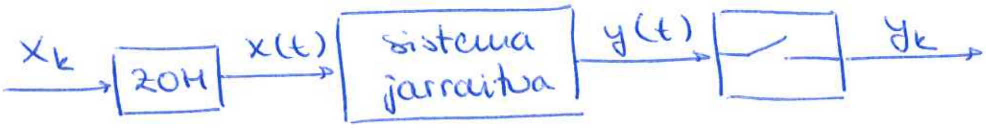


sistema dugula demagun. Ondorengo baliokide bat definitu nahiko bagenu:

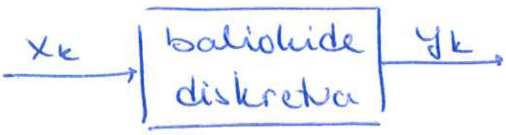


Arazo handiak izango genituzke, baliokidea ez baita zehatza (informazio galera bat dugu).

Adibidez, har dezagun ondorengo sistema:



Kasu honetan <u>baliokide diskretua</u>



zehatza da. Lor dezagun baliokide diskretuaren transferentzia-funtzioa.

Badakigunez, y_k seinale laginduaren Laplace-ren transformatua:

$$Y^*(s) = \frac{1}{T_s} \sum_{r=-\infty}^{\infty} Y\left(s + j\frac{2\pi r}{T_s}\right)$$

Jatorrizko sistema jarraitua $F(s)$ bada eta $G(s) = ZOH(s) \cdot F(s)$ definituz, $Y(s) = G(s) \cdot X^*(s)$ izango dugu. Beraz,

$$Y^*(s) = \frac{1}{T_s} \sum_{r=-\infty}^{\infty} G\left(s + j\frac{2\pi}{T_s} r\right) X^*\left(s + j\frac{2\pi r}{T_s}\right)$$

dugu. Printzipioz, $X^*(s)$ r-ren independentea da, hots, $X^*\left(s + j\frac{2\pi r}{T_s}\right) = X^*(s)$ dugulako. Beraz, berridatzketa batekin.

$$Y^*(s) = \left(\frac{1}{T_s} \sum_{r=-\infty}^{\infty} G\left(s + j\frac{2\pi}{T_s} r\right) \right) X^*(s)$$

dugu; hau da, gure baliokidea

$$G^*(s) = \frac{1}{T_s} \sum_{r=-\infty}^{\infty} G\left(s + j\frac{2\pi}{T_s} r\right)$$

da, non $G(s) = ZOH(s) \cdot F(s)$ den.

Baina guk $G(z)$ baliokide diskretua lortu nahi dugu. Frogatu daiteke (ez dugu egingo) ondorengoa dela:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[G^*(s)\right] = \sum_{\substack{\text{poloak} \\ G(s)}} \text{Res}\left[G(s) \cdot \frac{1}{1 - e^{sT_s} z^{-1}} \right]$$

non Cauchy-ren hondarraren teoremagatik, x_0 $f(x)$-ren polo sinplea bada

$$\text{Res}_{x=x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot (x - x_0)$$

den.

Formula hori erabili beharrean, gu tauletaz baliatuko gara:

Entry #	Laplace Domain	Time Domain	Z Domain (t=kT)
1	1	$\delta(t)$ unit impulse	1
2	$\frac{1}{s}$	$u(t)$ unit step	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
5		$b^k \quad \left(b=e^{-aT}\right)$	$\frac{z}{z-b}$
6	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{\left(z-e^{-aT}\right)^2}$
7	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{z\left(1-e^{-aT}\right)}{a(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$
8	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{z\left(e^{-aT}-e^{-bT}\right)}{\left(z-e^{-aT}\right)\left(z-e^{-bT}\right)}$
9	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}-\frac{e^{-at}}{a(b-a)}-\frac{e^{-bt}}{b(a-b)}$	
10	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}\left(1-e^{-at}-ate^{-at}\right)$	
11	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	
12	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin(bt)$	$\frac{z\sin(bT)}{z^2-2z\cos(bT)+1}$
13	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos(bt)$	$\frac{z(z-\cos(bT))}{z^2-2z\cos(bT)+1}$
14	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin(bt)$	$\frac{ze^{-aT}\sin(bT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$
15	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos(bt)$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos(bT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$
16	$\frac{Bs+C}{(s+a)^2+\omega_n^2}$	$e^{-at}\left[B\cos(\omega_n t)+\frac{C-aB}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]$	
17		$\sqrt{\frac{a^2d^2+b^2-2abc}{d^2-c^2}}d^n\cos(\beta n+\gamma)$ $\beta=\cos^{-1}\left(-\frac{c}{d}\right), \quad \gamma=\tan^{-1}\left(\frac{ac-b}{a\sqrt{d^2-c^2}}\right)$	$\frac{az^2+bz}{z^2+2cz+d^2}, \quad d>0$
Prototype Second Order System (ζ<1, underdampded)			
18	$\frac{\omega_n^2}{s\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\cos^{-1}(\zeta)\right)$	$\frac{z}{z-1}-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{z^2\sqrt{1-\zeta^2}+z\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T-\cos^{-1}(\zeta)\right)e^{-\zeta\omega_n T}}{z^2-2ze^{-\zeta\omega_n T}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T\right)+e^{-2\zeta\omega_n T}}$
19	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{ze^{-\zeta\omega_n T}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T\right)}{z^2-2ze^{-\zeta\omega_n T}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T\right)+e^{-2\zeta\omega_n T}}$
20	$\frac{s\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{-\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\cos^{-1}(\zeta)\right)$	$\frac{-\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{-z^2\sqrt{1-\zeta^2}+z\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T+\cos^{-1}(\zeta)\right)e^{-\zeta\omega_n T}}{z^2-2ze^{-\zeta\omega_n T}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T\right)+e^{-2\zeta\omega_n T}}$

- ZOH erabiltzean

$$ZOH(s) \cdot F(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} F(s) = (1-e^{-sT}) \frac{F(s)}{s}$$

izanik, defektuz izango duguna kontrakoa esan ezean, baliokide diskretua

$$Z[ZOH(s)F(s)] = (1-z^{-1}) Z\left[\frac{F(s)}{s}\right]$$

izango da.

ZOH erabiltzen ez bada, $\frac{1-e^{-sT}}{s}$ adierazpena baino ez zaigu aldatuko.

5. ANALISIA MAIZTASUN EREMUAN

5.1 Maiztasun erantzuna

Sistema jakin baten transferentzia funtzioa ezaguna bada, $G(j\omega)$, ezaguna dugu seinale sinusoidalen aurrean izango duen erantzuna. Hau da,

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

izanik sarrera, irteera ondorengoa izango da:

$$y(t) = A \cdot R(\omega) \sin[\omega t + \varphi_0 + \phi(\omega)]$$

non $R(\omega)$ plantak seinaleari emandako irabazia den eta $\phi(\omega)$ plantak sartutako desfasea:

$$R(\omega) = |G(j\omega)|$$

$$\phi(\omega) = Arg(G(j\omega))$$

Beraz, maiztasun-erantzuna $|G(j\omega)|$ eta $Arg(G(j\omega))$ bitartez definituta dator.

Informazioa biltzeko tresna grafikoak ditugu:

1. koordenatu polarretako irudikapena: ω-ren arabera $G(j\omega)$ koordenatu polarretan adierazten da.

2. Bode-ren diagrama: Alde batetik $|G(j\omega)|$ irudikatzen da dezibelioetan, hots

$$20 \log(|G(j\omega)|)$$

eta bestetik $Arg(G(j\omega))$, biak ala biak $\log(\omega)$-ren menpe edo eskala logaritmikoan.

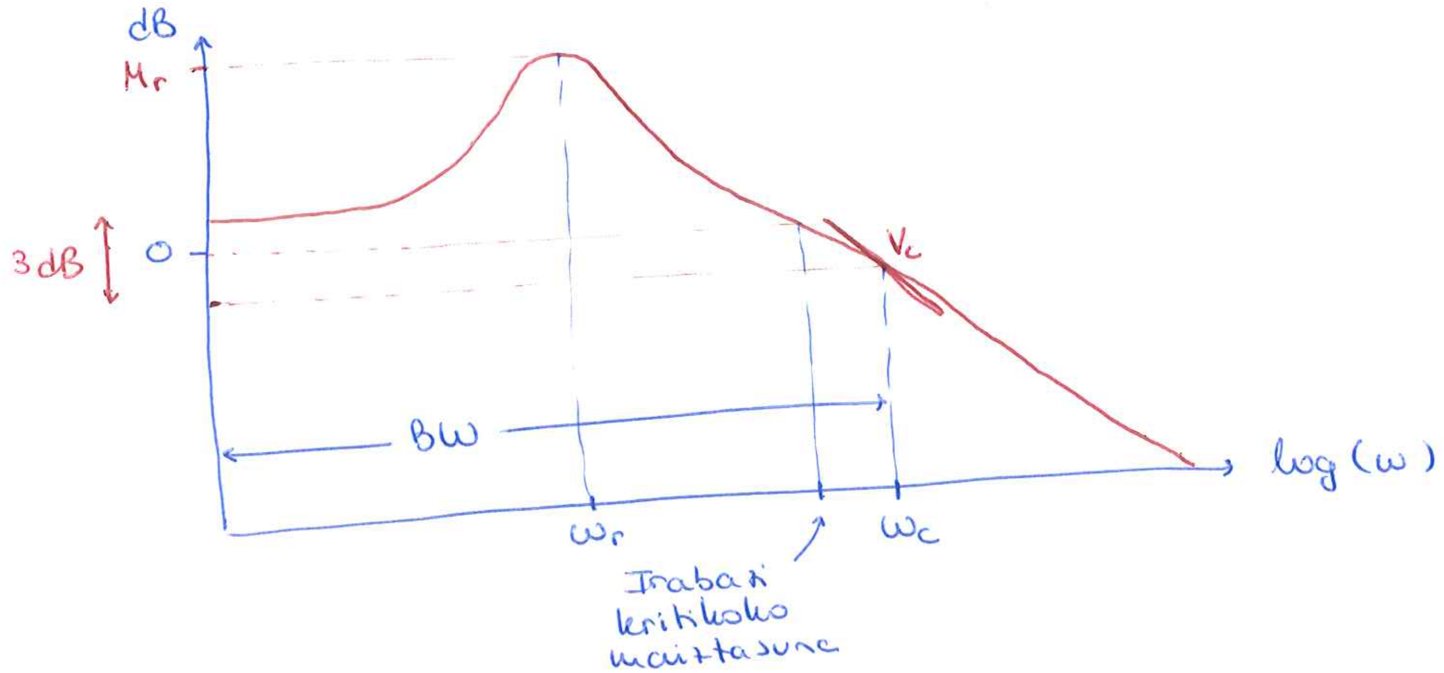
Atal honetan bigarren metodoa jorratuko dugu soilik.

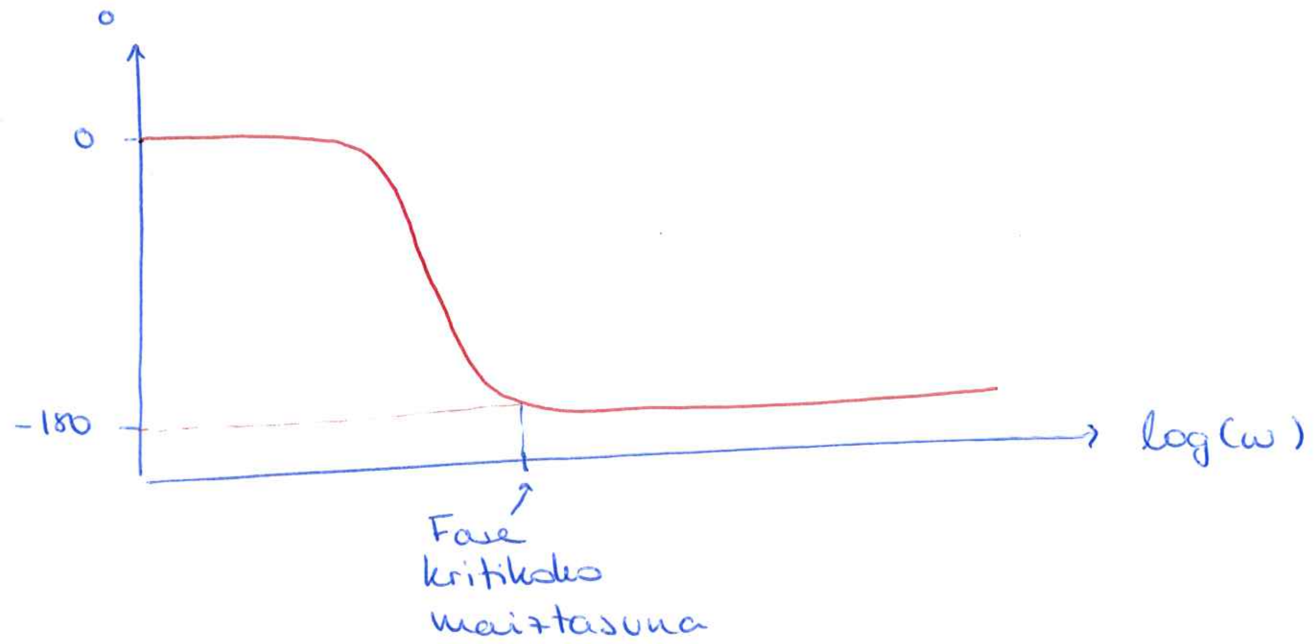
5.2 Maiztasuneko espezifikazioak

Denboraren eremuan egin bezala (3. atala), maiztasunaren eremuan sistema baten espezifikazioak eman behar dira:

- Banda-zabalera, BW edo BZ.
- Ebaki-maiztasuna, ω_c edo ω_g
- Ebaki-abiadura, ω_c puntuan magnitudeak duen malda, v_c edo v_g
- Erresonantzia-maiztasuna, ω_r
- Erresonantzia-magnitudea, $M_r = |G(j\omega_r)|$
- Irabazi kritikoko maiztasuna, $|G(j\omega)| = 0$ dB egiten dunekoa.
- Fase kritikoko maiztasuna, $Arg(G(j\omega)) = -180°$ egiten dunekoa

Magnitude guztiak ondorengo diagraman laburbiltzen dira:





5.2.1. Bigarren ordenako sistema.

Izan bedi

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \leftrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

transferentzia-funtzioaz ezaugarritutako sistema.

Argi dago

$$|G(j\omega)| = \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{-1/2}$$

$$\mathrm{Arg}(G(j\omega)) = -\arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n}}$$

dugula. Hemendik espezifikazio guztiak lor daitezke:

$$\omega_g = \omega_n \sqrt{(1-2\delta^2) \pm \sqrt{1+(1-2\delta^2)^2}}$$

$$V_g = \left. \frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_g} = \left. \frac{-2\frac{\omega^3}{\omega_n^3} + 2(1-2\delta^2)\frac{\omega}{\omega_n}}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{3/2}} \right|_{\omega=\omega_g}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2} \quad , \quad \delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sim 0.707 \text{ bada}$$

$$M_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$BW = \omega_g$$

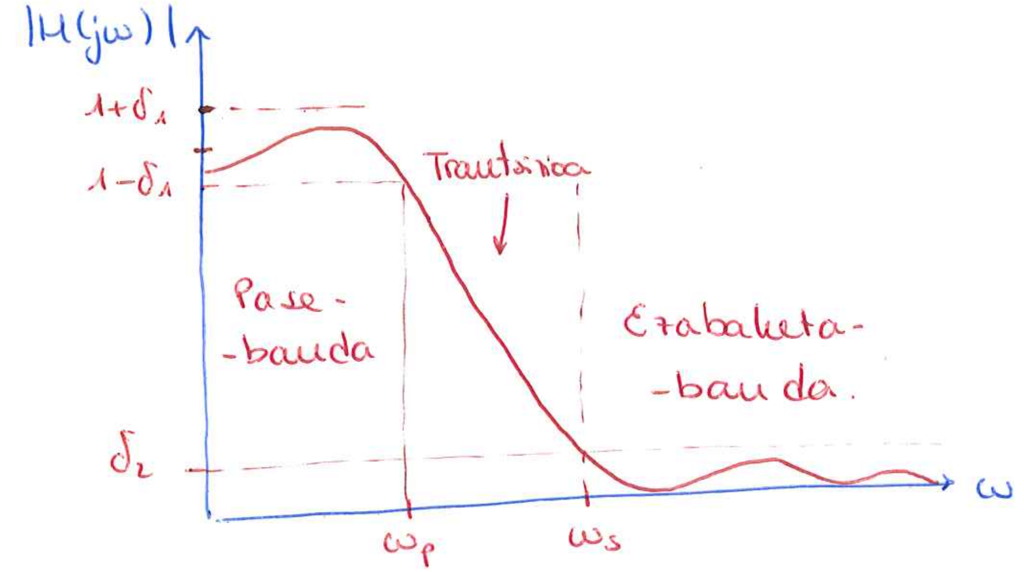
5.3 Iragazketa

Seinale baten maiztasun osagaien magnitudeko edo faseko aldaketa edota erabaketari iragazketa esaten diogu. Bi motako iragazkiak ditugu:

maiztasun-erantzunaren forma doitzekoak eta maiztasun-banda aukeratzekoak.

Iragazki bat bere tolerantziek definitzen dute: onartzen duen kizkurdura pase-banda eta ezabaketa-bandan (δ_1 eta δ_2) eta trantsizioaren banda-zabalera (ω_p eta ω_s tartea).

Ezaugarriok ondorengo eskeman laburbiltzen dira:



Iragazkiak ere beste irizpide batzuen arabera sailka daitezke:

- <u>Bandaren arabera</u>: Behe-pasekoak, banda-pasekoak edo goi-pasekoak.
- <u>Denbora-errealari dagokionez</u>: Ideala edo ez-ideala.
- <u>Diseinuaren arabera</u>: Analogikoa edo digitala;

Butterwoth, Chebysev, Elliptics... motakoak;
IIR edo FIR delakoak eta abar.

5.4 Bode diagramak

LTI sistema bat ondorengo transferentzia-funtzioaren bidez ezaugarritu ahal da:

$$H(s) = K \cdot \frac{\prod_i (s+z_i)}{\prod_i (s+p_i)} \cdot \frac{\prod_k (s^2+zb_k s+zc_k)}{\prod_k (s^2+pb_k s+pc_k)}$$

Atal honetan, TF-aren ezaugarriak gure sistemaren dinamikan nola sortzen diren aztertuko dugu Bode diagrama erabiliz. Bode diagrama asintotikoak egingo ditugu; hots, hurbilketak.

5.4.1. Irabazia.

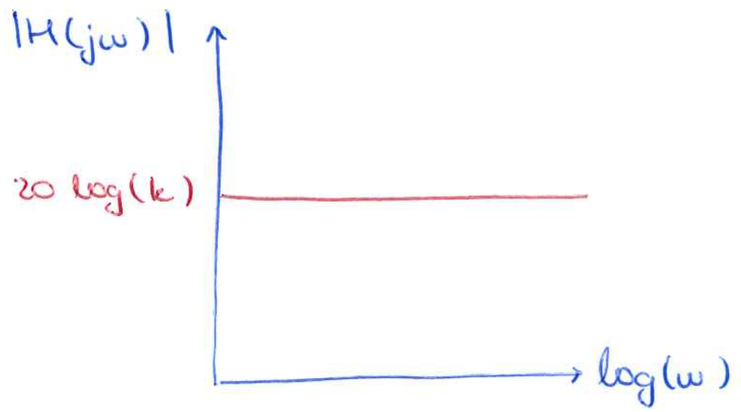
$$H(s) = k$$

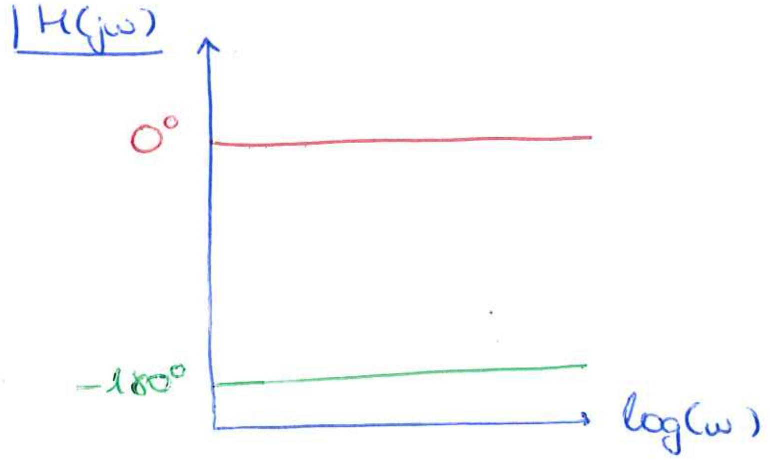
konstantea bada.

Magnitudea: $|H(j\omega)| = 20 \log K$

Fasea: $\underline{/H(j\omega)} = \begin{cases} 0^\circ, & K \geq 0 \text{ bada} \\ -180^\circ, & K < 0 \text{ bada.} \end{cases}$

Berat:





5.4.2. Polo sinplea

$$H(s) = \frac{a}{s+a}$$

badugu,

Magnitudea: $|H(jw)| = \dfrac{a}{\sqrt{w^2 + a^2}}$

Fasea: $\underline{|H(jw)} = -\arctan(w/a)$

Hurbilketa asintotikoak eginez:

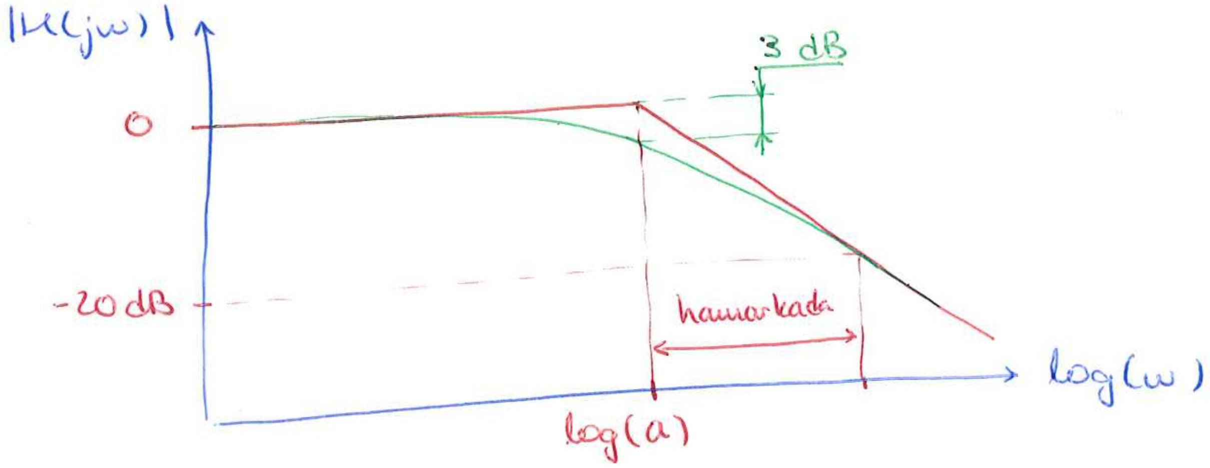
$w \to 0$ denean, $|H(jw)| = 20\log(1) = 0$ dB eta

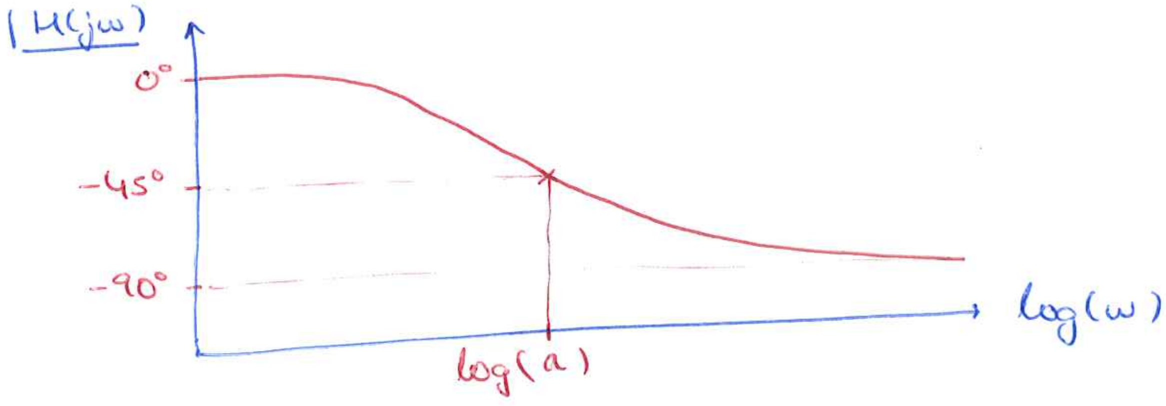
$\angle H(j\omega) = 0°$ dugu.

$\omega \to \infty$ denean, $|H(j\omega)| = 20\log(a/\omega) = 20\log a - 20\log(\omega)$, -20 dB/h maldako zuzena dugu eta $\angle H(j\omega) = -90°$.

$\omega = a$ denean, $|H(j\omega)| = 20\log(1/\sqrt{2}) \sim -3$ dB da eta $\angle H(j\omega) = -45°$.

Beraz,





5.4.3. Zero sinplea

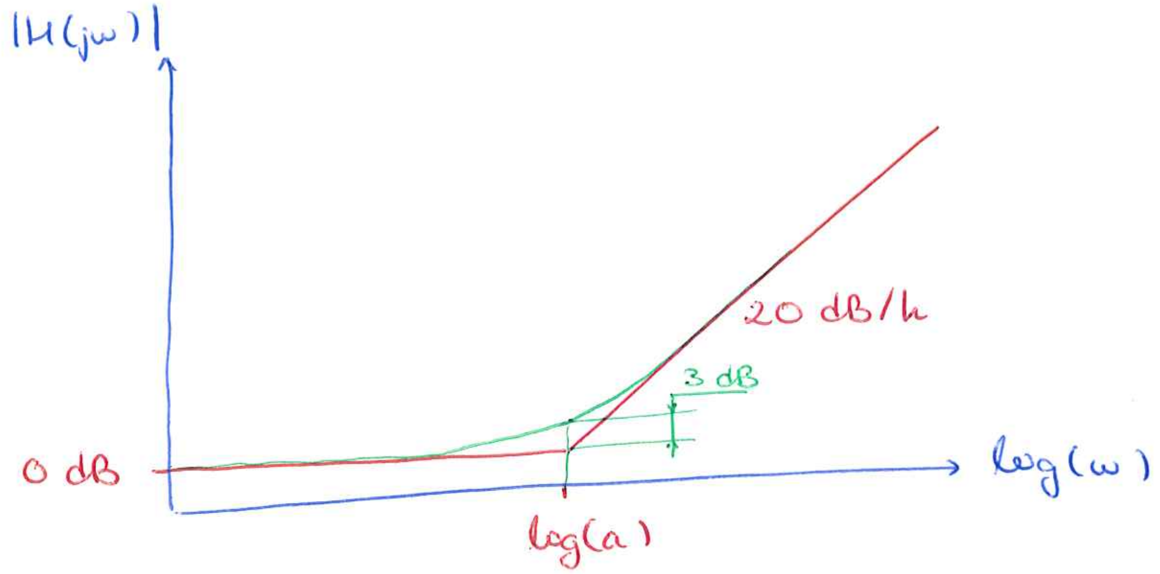
$$H(s) = \frac{s+a}{a}$$

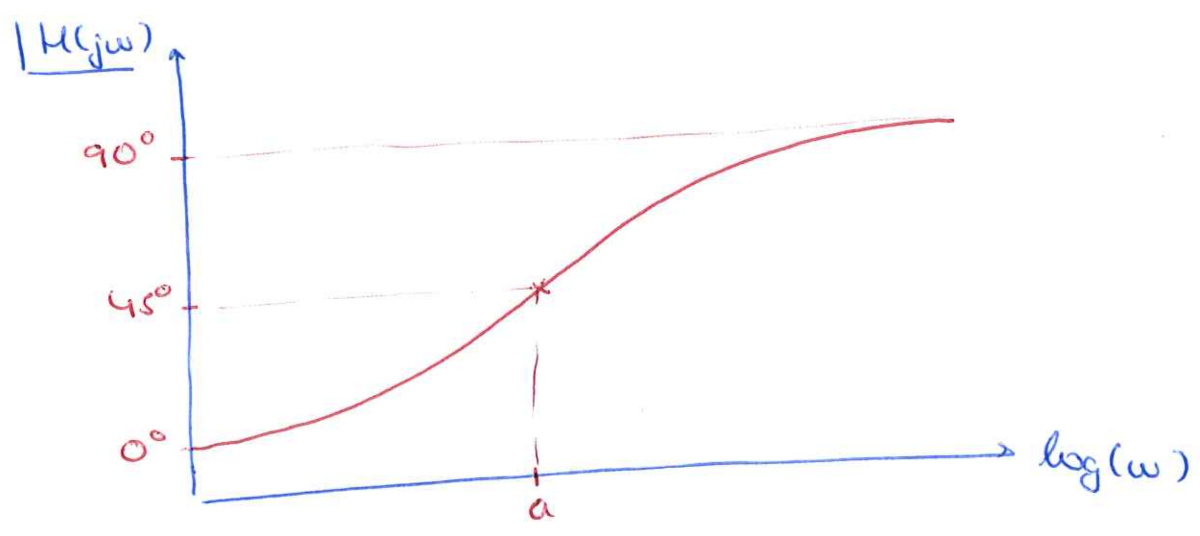
badugu.

Magnitudea: $|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+a^2}}{a}$

Fasea: $\angle H(j\omega) = \arctan(\omega/a)$

daukagu, hots, polo sinplearen ispilua:





5.4.4. Polo konplexu konjokatuak

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

bada, 5.2.1 ataleko emaitzetik abiatuz,

$\omega \to 0$ denean, $|H(j\omega)| = 0$ dB eta $\underline{|H(j\omega)} = 0°$ dugu.

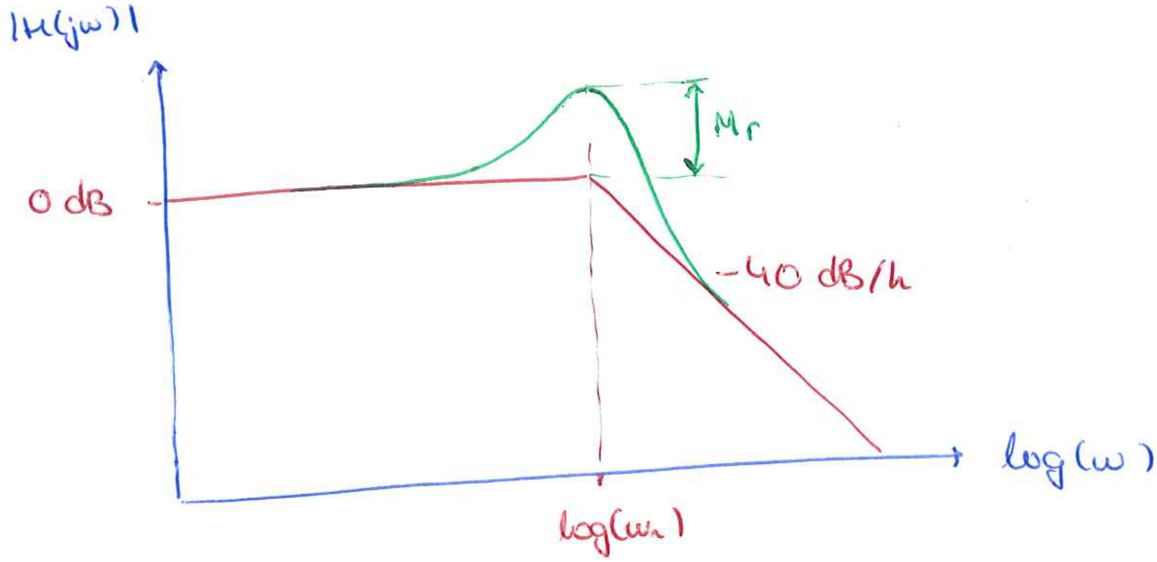
$\omega \to \infty$ denean, $|H(j\omega)| = 20\log(\omega_n^2) - 20\log(\omega^2)$, -40 dB/h hamarkadako maldako zuzena dugu eta $\underline{|H(j\omega)} = -180°$

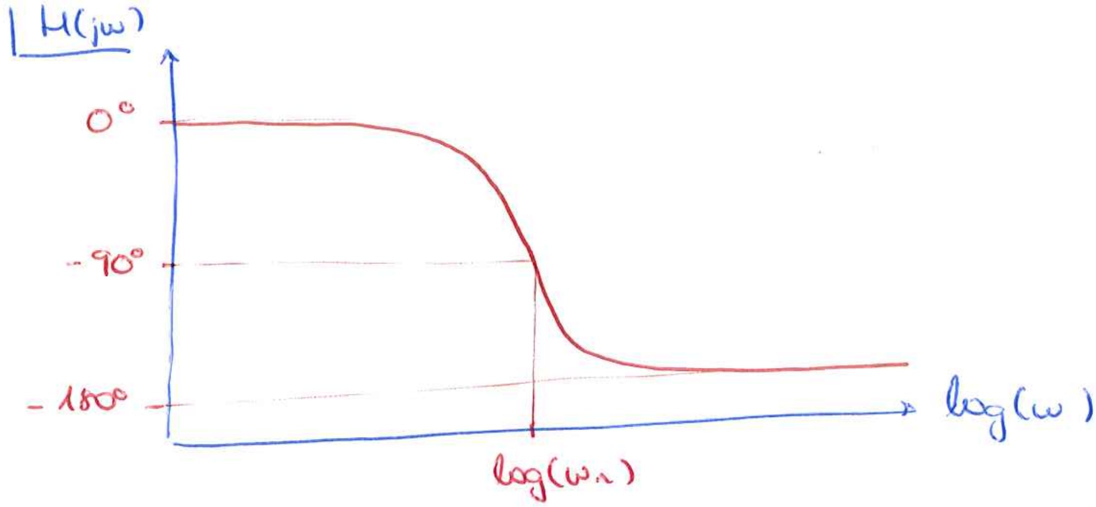
$\omega = \omega_n$ denean bi aukera dugu:

→ $\delta > 1/\sqrt{2}$ bada, $|H(j\omega)| = 20\log\left(\frac{1}{2\delta}\right)$ da.

→ $\delta \leq 1/\sqrt{2}$ bada, erresonantzia izango dugu, $M_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$ magnitudekoa. Hurbilketa on batean, $\omega_r \sim \omega_n$ izango da (pixkat txikiagoa) eta $M_r \sim 20\log(1/2\delta)$.

Biak ala biak $\underline{|H(j\omega)} = -90°$ da.





5.4.5. Zero konplexu konjokatuak

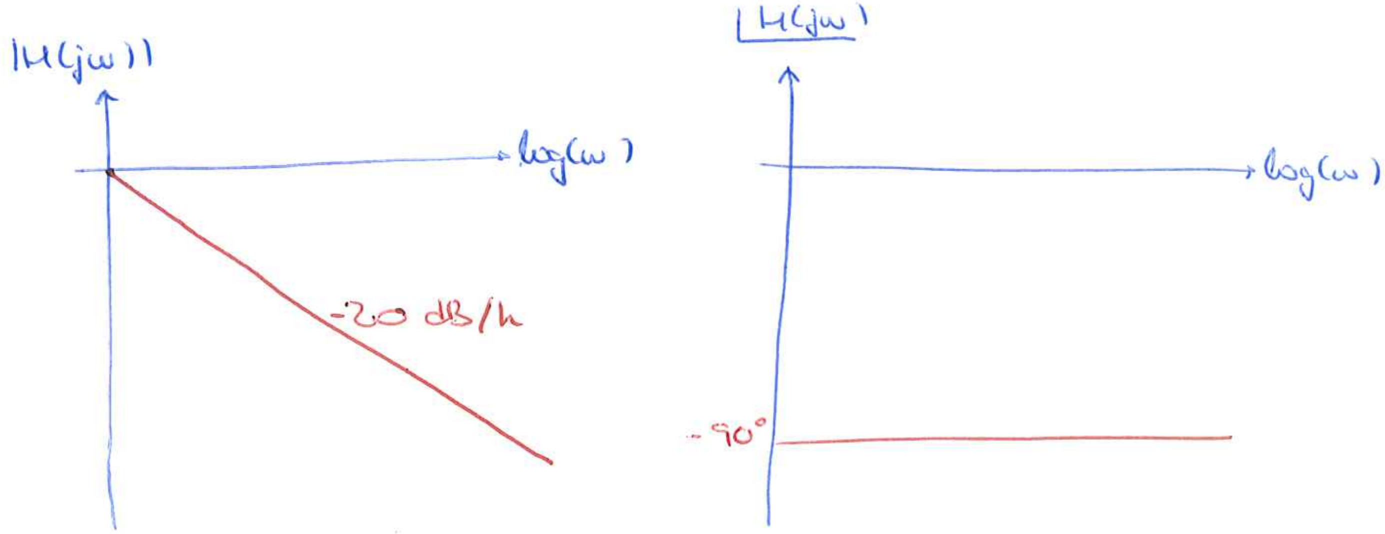
$$H(s) = \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

bada. polo konplexu konjokatuen ispilua dugu, $\omega \to 0$ denean berdin baina $\omega \to \infty$ denean 40 dB/h-ko maldako magnitudea eta 180°-ko fasea. Bestalde, erresonantziak magnitudea jaisten du.

5.4.6. Poloa jatorrian

$$H(s) = 1/s$$

bada, zuzenean -20 dB/h-ko zuzena marraztuko dugu magnitudean, irabazi kritikoko maiztasuna adieraziz:



5.4.7. Banda zabaleraren aukeraketa

Jatorrian polorik ez badugu, gure banda zabalera aukeratzeko irizpidea -3 dB-rena izango da. Bestela, irabazi kritikoko maiztasuna hartuko dugu ebaki-maiztasun gisa.

Horrez gain, laginketa maiztasuna

$$\omega_s = 20\,\omega_c$$

hartuko dugu.

5.4.8. Bode diagrama asintotikoa egiteko urratsak

1. Transferentzia-funtzioa doitu, bai poloak eta zeroak identifikatzeko, bai aurreko azpiataletako teoriaz baliatzeko.

2. Sailkatu polo eta zeroak eragina maiztasun txikienean dutenetik handienean dutenetara.

3. Indikatu magnitude asintotikoa (erresonantziekin batera egitekotan) eta fasea (puntu jakinen kalkulua komenigarria da).

* Ohartu, esaterako, zero baten ostean polo bat badago, magnitudea 20 dB/h maldako zuzen bat izatetik 0 dB/h maldako zuzen bat izatera pasako dela, EZ -20 dB/h MALDAKO ZUZENA.