SEMANTIKAKO ARIKETAK: BALIOZKOTASUNA ETA BALIOKIDETZAK

(1) Esan ze motatakoak diren ondoko formulak (justifikatu erantzuna)

a. $\forall x (Px \vee \neg Px)$
b. $\forall x Px \vee \forall x \neg Px$
c. $\forall x Px \wedge \forall x \neg Px$
d. $\forall x Px \rightarrow Pa$
e. $\forall x Px \rightarrow \exists x Px$
f. $Pa \rightarrow \exists x Px$
g. $Pa \rightarrow \forall x Px$
h. $\forall x (Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x Px \rightarrow \forall x Qx)$
i. $(\forall x Px \rightarrow \forall x Qx) \rightarrow \forall x (Px \rightarrow Qx)$
j. $(\exists x Px \rightarrow \exists x Qx) \rightarrow \forall x (Px \rightarrow Qx)$
k. $\forall x (Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\exists x Px \rightarrow \exists x Qx)$
l. $\forall x [Px \rightarrow (Qx \rightarrow Px)]$
m. $\forall x Rxx \rightarrow \forall x \exists y Rxy$
n. $\forall x \exists y Rxy \rightarrow \forall x Rxx$
o. $\forall x Px \rightarrow \exists x (Px \vee Qx)$
p. $\forall x Px \rightarrow \forall x (Px \vee Qx)$
q. $\exists x Px \rightarrow \exists x (Px \wedge Qx)$
r. $\exists x Px \rightarrow \exists x (Px \vee Qx)$
s. $(Pc \wedge Qc) \rightarrow \exists x (Qx \vee \neg Px)$
t. $(Pc \vee Qc) \rightarrow \exists x Qx$
u. $(Pc \vee Qc) \rightarrow \exists x (Px \vee Qx)$
v. $\forall x \exists y Rxy \rightarrow \exists y \forall x Rxy$
w. $\exists y \forall x Rxy \rightarrow \forall x \exists y Rxy$
x. $\exists x \neg (Px \wedge \neg Px)$

(2) Esan ea ondoko inferentziak logikoki baliozkoak diren (justifikatu erantzuna)

a. $\exists x (Px \wedge Qx) \vDash \exists x Px \wedge \exists x Qx$
b. $\exists x Px \wedge \exists x Qx \vDash \exists x (Px \wedge Qx)$
c. $\forall x (Px \vee Qx) \vDash \forall x Px \vee \forall x Qx$
d. $\forall x Px \vee \forall x Qx \vDash \forall x (Px \vee Qx)$
e. $\forall x (Px \rightarrow Qx); \exists x Px \vDash \exists x Qx$
f. $\forall x (Px \rightarrow Qx); \forall x (Qx \rightarrow Lx) \vDash \forall x (Px \rightarrow Lx)$
g. $\forall x (Px \rightarrow Qx); \exists x (Px \wedge Lx) \vDash \exists x (Qx \wedge Lx)$
h. $\neg \exists x (Px \wedge Qx) ; \forall x (Lx \rightarrow Qx) \vDash \neg \exists x (Px \wedge Lx)$
i. $\exists x \forall y Rxy \vDash \forall y \exists x Rxy$
j. $\forall x \exists y Rxy \vDash \exists y \forall x Rxy$
k. $\forall x (\neg Qx \rightarrow \neg Px); \forall x (Qx \rightarrow \neg Lx) \vDash \forall x (Px \rightarrow Lx)$
l. $\forall x [Px \rightarrow (Qx \vee Lx)]; \forall x (Qx \rightarrow Tx); \forall x (Lx \rightarrow Tx) \vDash \forall x (Lx \rightarrow Px)$
m. $\forall x (Px \rightarrow \exists y Rxy); \forall x (\exists y Rxy \rightarrow \exists y Ryx) \vDash \forall x (\exists y Ryx \rightarrow Px)$
n. $\forall x [(Px \vee Qx) \rightarrow Lx]; \exists x (Px \wedge Nx); \forall x (Lx \rightarrow Fx) \vDash \exists x (Nx \wedge Fx)$
o. $\forall x \forall y \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz]; \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx) \vDash \forall x Rxx$
p. $\forall x \forall y \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz] \vDash \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$
q. $\forall x (Px \vee Qx); \exists x \neg Px, \exists x \neg Qx; \forall x [(Px \wedge Qx) \rightarrow Lx] \vDash \exists x Lx$
r. $\exists x \forall y Rxy; \exists x Rxx \vDash \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx)$
s. $\forall x \exists y Rxy; \forall x (Rxx \leftrightarrow Px) \vDash \exists x Px$
t. $\forall x \exists y Rxy; \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx) \vDash \forall x \forall y \forall z [Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz]$

(3) Esan ea ondoko baliokidetzak zuzenak diren (justifikatu erantzuna)

a. $\forall x\ (\neg Px \land Qx) \equiv \neg\exists x\ (Px \lor \neg Qx)$

b. $\neg\forall x\ (Px \rightarrow Qx) \equiv \exists x\ (Px \land \neg Qx)$

c. $\forall x\ (\neg Px \rightarrow Qx) \equiv \neg\exists x\ (\neg Px \land \neg Qx)$

d. $\exists x\ (Px \land Rxy) \equiv \neg\forall x(Px \rightarrow \neg Rxy)$

e. $\neg\forall x\exists y\ Rxy \equiv \exists x\forall y\ \neg Rxy$

f. $\neg\exists x\forall y\ Rxy \equiv \forall x\exists y\ \neg Rxy$

g. $\forall x\exists y\ (Px \rightarrow Rxy) \equiv \neg\exists x\forall y\ (Px \land \neg Rxy)$

h. $\forall x\neg\exists y\ (Px \rightarrow Rxy) \equiv \forall x\forall y\ (Px \land \neg Rxy)$

i. $\forall xPx \lor \forall xQx \equiv \forall x\ (Px \lor Qx)$

j. $\forall x\ (\neg Px \lor Qx) \equiv \neg\exists xPx \lor \forall xQx$

k. $\exists x\ (\neg Px \land \neg Qx) \equiv \neg\forall xPx \land \exists x\neg Qx$

l. $\exists x\ (Px \rightarrow Qx) \equiv \exists xPx \rightarrow \forall xQx$

m. $\forall x\ (Px \rightarrow Qc) \equiv \forall x\ Px \rightarrow Qc$

n. $\exists x\ (Px \rightarrow Qc) \equiv \exists xPx \rightarrow Qc$

o. $\forall x\ (Px \land Qx) \equiv \forall xPx \land \forall xQx$

p. $\forall x\ (Px \lor Qx) \equiv \forall xPx \lor \forall xQx$

q. $\exists x\ (Px \land Qx) \equiv \exists xPx \land \exists xQx$

r. $\exists x\ (Px \lor Qx) \equiv \exists xPx \lor \exists xQx$

s. $\forall x\ (Px \lor Pa) \equiv \forall xPx \lor Pa$

t. $\exists x\ (Px \land Pa) \equiv \exists xPx \land Pa$

u. $\forall x\ (Pa \rightarrow Px) \equiv Pa \rightarrow \forall xPx$

v. $\exists x\ (Pa \rightarrow Px) \equiv Pa \rightarrow \exists xPx$

w. $\forall x\ (Px \rightarrow Pa) \equiv \exists x\ Px \rightarrow Pa$

x. $\exists x\ (Px \rightarrow Pa) \equiv \forall xPx \rightarrow Pa$

(1)

a. Formula (ϕ) baliozkoa da egitura orotan. Suposa dezagun ezetz, badagoela E egitura bat ez duena ϕ baliozko egiten, $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash \neg\phi$. Hau da, E-k asetzen du $\exists x\ (Px \wedge \neg Px)$ formula. Horrela bada, badago E-ko D domeinuan gutxienez elementu partikular bat, a, $(Px \wedge \neg Px)$ formula asetzen duena eta, beraz $a \in P$ eta $a \notin P$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen duen egiturarik eta, beraz, ϕ baliokoa da egitura orotan (egia logikoa da).

b. Neutroa. $D = \{1,2\}$; $P^E = \varnothing$; $P^{E*} = \{1\}$

c. Ez dago ϕ formula asetzen duen egiturarik. Demagun badagoela E egitura bat, $E \vDash \phi$. ϕ konjuntzio bat denez, $E \vDash \forall x\ Px$ eta $E \vDash \forall x \neg Px$. Demagun D-ko elementu bat, a. E-k asetzen duenez $\forall x\ Px$, a-k asetzen du Px eta, beraz, $a \in P$. E-k asetzen duenez $\forall x \neg Px$, a-k asetzen du $\neg Px$ eta, betaz, $a \notin P$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen duen egiturarik eta, beraz, ϕ kontraesana da.

d. ϕ formula baliozkoa da egitura orotan. Suposa dezagun badagoela ϕ asetzen ez duen E egitura bat; ϕ baldintza bat denez, $E \vDash \forall x\ Px$ eta $E \nvDash Pa$. Bigarrenagatik, D-n dagoen a elementua ez dago P-ren hedaduran, $a \notin P$. Baina E-k $\forall x\ Px$ asetzen badu, horrek esan nahi du D-ko elementu orok asetzen duela Px; a D-ko elementua denez, a-k asetzen du Px eta $a \in P$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik, ϕ baliozkoa da egitura orotan eta, beraz, egia logikoa da.

e. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun badagoela ϕ asetzen ez duen E egitura bat, hau da, $E \vDash \forall x\ Px$ eta $E \nvDash \exists x\ Px$. E-k ez duenez $\exists x\ Px$ asetzen, ez dago elementurik D-n P-ren hedaduran dagoena, hau da, $P = \varnothing$. Baina hori horrela bada E-k ezin du ase $\forall x\ Px$ (suposatu dugunaren kontra), asetzen badu D-ko edozein a elementurentzat $a \in P$, D ezin da hutsa izan, eta beraz, P ere ez da hutsa izango. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik eta, beraz, ϕ baliozkoa da egitura orotan (egia logikoa da).

f. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash Pa$ eta $E \nvDash \exists x\ Px$. E-k ez duenez $\exists x\ Px$ asetzen, ez dago D-ko elementurik P-ren hedaduran, $P = \varnothing$. Baina E-k Pa asetzen duenez, $a \in P$, eta beraz $P \neq \varnothing$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen agiturarik eta, beraz, baliozkoa da egitura orotan (egia logikoa da).

g. Neutroa. $D = \{1,2\}$; $a^{E,E*} = 1$ $P^E = \varnothing$; $P^{E*} = \{1\}$

h. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash \forall x\ (Px \rightarrow Qx)$, $E \vDash \forall x Px$ eta $E \nvDash \forall x Qx$. E-k ez duenez $\forall x Qx$ asetzen, badago D-ko a elementu bat ez dena Q, $a \notin Q$, eta E-k $\forall x Px$ asetzen duenez, D-ko elementu guztiak dira P, a barne, eta horregatik $a \in P$. E-k $\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$ asetzen duenez, D-ko elementu orok , a barne, asetzen du $Px \rightarrow Qx$, eta horregatik $a \notin P$ edo $a \in Q$. Kontraesanera iritsi garenez, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik, ϕ baliozkoa da egitura orotan eta, beraz, egia logikoa da.

i. Neutroa. $D = \{1,2\}$ $P^E = \varnothing$; $Q^E = \{1\}$; $P^{E*} = \{1\}$ $Q^{E*} = \varnothing$

j. Neutroa. $D = \{1,2\}$; $P^E = \{1\}$; $Q^E = \{1,2\}$; $P^{E*} = \{1\}$; $Q^{E*} = \{2\}$

k. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash \forall x\ (Px \rightarrow Qx)$, $E \vDash \exists x\ Px$ eta $E \nvDash \exists x\ Qx$. E-k $\exists x\ Px$ asetzen duenez, badago D-ko elementu bat, a, P dena eta beraz $a \in P$. E-k ez duenez $\exists x\ Qx$ asetzen, ez dago D-ko elementurik Q denik eta, beraz, $a \notin P$. E-k $\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$ asetzen duenez, D-ko elementu orok (a barne) asetzen du $Px \rightarrow Qx$ eta, beraz, $a \notin P$ edo $a \in Q$. Kontraesanera iritsi garenez, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik, eta ϕ baliozkoa da egitura orotan (egia logikoa da).

l. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$. Horrela bada, ez dago D-n elementurik $Px \rightarrow (Qx \rightarrow Px)$ asetzen duenik eta, beraz, D-ko edozein a elementurentzat $a \in P$ baina a-k ez du asetzen $Qx \rightarrow Px$. Beraz, $a \in Q$ eta $a \notin P$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik eta ϕ baliozkoa da egitura orotan (egia logikoa da).

m. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash \forall x\ Rxx$ eta $E \nvDash \forall x \exists y\ Rxy$. E-k ez duenez $\forall x \exists y\ Rxy$ asetzen, bere ukazioa asetzen du eta, beraz, $\exists x \forall y\ \neg Rxy$ asetzen du. Hau da, badago D-n a elementu bat, D-ko edozein b elementurentzat $\langle a,b \rangle \notin R$, eta a=b izan daitekeenez, $\langle a,a \rangle \notin R$. E-k $\forall x\ Rxx$ asetzen duenez, D-ko edozein elementurentzat, a barne, bere buruarekin R erlazioan dago eta, beraz $\langle a,a \rangle \in R$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik, ϕ baliozkoa da egitura orotan, eta egia logikoa da.

n. Neutroa. $D = \{1,2\}$; R^E: $\{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,1 \rangle\}$; $R^{E*} = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$

o. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash \forall x\ Px$ eta $E \nvDash \exists x\ (Px \vee Qx)$—hau da, $E \vDash \forall x\ (\neg Px \wedge \neg Qx)$. Beraz, D-ko edozein a elementuk asetzen du $(\neg Px \wedge \neg Qx)$ formula, eta $a \notin P$ eta $a \notin Q$. E-k $\forall x\ Px$ asetzen duenez, D-ko elementu oro (a barne) P da, eta horregatik $a \in P$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik, eta ϕ baliozkoa da egitura orotan (egia logikoa da).

p. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash \forall x Px$ eta $E \nvDash \forall x\ (Px \vee Qx)$—eta, beraz, $E \vDash \exists x\ (\neg Px \wedge \neg Qx)$. Azkenekoagatik, badago E-n elementu bat, a, $(\neg Px \wedge \neg Qx)$ asetzen duena eta, beraz, $a \notin P$ eta $a \notin Q$. E-k $\forall x Px$ asetzen duenez, D-ko elementu guztiek asetzen dute Px, a-k barne, eta, beraz $a \in P$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik, eta ϕ baliozkoa da egitura orotan (egia logikoa da).

q. Neutroa. $D = \{1,2\}$; $P^E = \{1,2\}$; $Q^E = \{1\}$; $P^{E*} = \{1\}$; $Q^{E*} = \{2\}$

r. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash \exists x Px$ eta $E \nvDash \exists x\ (Px \vee Qx)$—hau da, $E \vDash \forall x\ (\neg Px \wedge \neg Qx)$. E-k $\exists x\ Px$ asetzen duenez, badago D-n elementu bat, a, Px asetzen duena eta, beraz, $a \in P$. E-k $\forall x\ (\neg Px \wedge \neg Qx)$ asetzen duenez, D-ko edozein elementuk, a-k barne, asetzen du $(\neg Px \wedge \neg Qx)$ formula eta, beraz, $a \notin Q$ eta $a \notin P$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik, eta ϕ baliozkoa da egitura orotan (egia logikoa da).

s. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash Pc \wedge Qc$ eta $E \nvDash \exists x\,(Qx \vee \neg Px)$—hau da, $E \vDash \forall x\,(\neg Qx \wedge Px)$. Azkenekoagatik, D-ko elementu orok, c barne, asetzen du $(\neg Qx \wedge Px)$ formula eta, beraz, $c \notin Q$ eta $c \in P$. E-k $Pc \wedge Qc$ asetzen duenez, $c \in P$ eta $c \in Q$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik, eta ϕ baliozkoa da egitura orotan (egia logikoa da).

t. Neutroa. $D = \{1,2\}$, $c^{E,E^*} = 1$; $P^E = \{1\}$; $Q^E = \{1,2\}$; $P^{E^*} = \{1,2\}$; $Q^{E^*} = \varnothing$

u. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash Pc \vee Qc$ eta $E \nvDash \exists x\,(Px \vee Qx)$—hau da, $E \vDash \forall x\,(\neg Px \wedge \neg Qx)$. Azkenekoagatik, D-ko elementu orok, c barne, asetzen du $(\neg Px \wedge \neg Qx)$ formula, eta $c \notin P$ eta $c \notin Q$. Baina E-k $Pc \vee Qc$ asetzen duenez, $c \in P$ edo $c \in Q$, bietako bat gutxienez. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik eta, beraz, ϕ baliozkoa da egitura orotan (egia logikoa da).

v. Neutroa. $D = \{1,2,3\}$; $R^E = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,2\rangle\}$; $R^{E^*} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$

w. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash \exists y \forall x\, Rxy$ eta $E \nvDash \forall x \exists y\, Rxy$—hau da, $E \vDash \exists x \forall y\, \neg Rxy$. Hau da, badago D-n elementu bat, a, D-ko edozein b elementurentzat $\langle a,b\rangle \notin R$. E-k $\exists y \forall x\, Rxy$ asetzen duenez, badago D-ko elementuren bat, b, D-ko edozein elementurekin, a barne, Rxb erlazioan dagoena eta, beraz, $\langle a,b\rangle \in R$. Kontraesanera iritsi garenez, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik, ϕ baliozkoa da egitura orotan, eta egia logikoa da.

x. Ez dago ϕ formula asetzen ez duen egiturarik. Demagun $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash \forall x\,(Px \wedge \neg Px)$. Beraz, D-ko edozein elementuk, a barne, asetzen du $(Px \wedge \neg Px)$ formula eta, beraz, $a \in P$ eta $a \notin P$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago ϕ asetzen ez duen egiturarik, ϕ baliozkoa da egitura orotan eta egia logikoa da.

(2)

a. Baliozkoa da. Demagun badagoela E egitura bat, premisa asetzen duena eta ondorioa ez. $E \vDash \exists x\,(Px \wedge Qx)$ eta, beraz, badago D-n gutxienez elementu bat, a, $(Px \wedge Qx)$ asetzen duena. Baina $E \nvDash \exists x\,(Px \wedge Qx)$ eta, beraz, $E \vDash \forall x\, \neg(Px \wedge Qx)$, D-ko elementu guztiek, a barne, asetzen dute $\neg(Px \wedge Qx)$ baina, horrela bada, a-k ez du asetzen $(Px \wedge Qx)$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago egiturarik premisa baliozko egiten duena eta ondorioa ez, eta argudioa baliozkoa da.

b. Ez da baliozkoa. $D = \{1,2\}$; $P = \{1\}$, $Q = \{2\}$

c. Ez da baliozkoa. $D = \{1,2\}$; $P = \{1\}$, $Q = \{2\}$

d. Baliozkoa da. Demagun badagoela E egitura bat, $E \vDash \boldsymbol{\Gamma}$ (premisak) eta $E \nvDash \phi$ (ondorioa). E-k ez duenez ϕ asetzen, $\neg\phi$ asetzen du, hau da, $\exists x\,(\neg Px \wedge \neg Qx)$ eta, beraz, badago D-ko elementu bat, a, $(\neg Px \wedge \neg Qx)$ asetzen duena, eta $a \notin P$ eta $a \notin Q$. Baina orduan badago D-ko elementu bat Px asetzen ez duena,eta $E \nvDash \forall x\, Px$, eta badago D-ko elementu bat Qx asetzen ez duena, eta $E \nvDash \forall x Qx$ eta, beraz, suposatu dugunaren kontra, $E \nvDash \forall x Px \vee \forall x Qx$. Kontraesanera iritsi gara eta, absurdorako erredukzioz, ez dago egiturarik premisa baliozko egiten duena eta ondorioa ez, eta argudioa baliozkoa da.

e. Baliozkoa da. Demagun badagoela E egitura bat, $E \vDash \boldsymbol{\Gamma}$ eta $E \nvDash \phi$, hau da, $E \vDash \forall x \neg Qx$, eta D-ko edozein a elementu $a \notin Q$. Bestalde, $E \vDash \exists x\, Px$ eta, beraz, badago D-ko elementu bat, a adibidez, P dena. E-k $\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$ asetzen duenez, D-ko edozein elementurentzat, a barne, Px asetzen badu Q asetzen du, eta a-k P asetzen duenez, a-k asetzen du Q, $a \in Q$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago premisak asetzen dituen baina ondorioa asetzen ez duen egiturarik, eta argudioa baliozkoa da.

f. Baliozkoa da. Demagun badagoela E egitura bat $E \vDash \boldsymbol{\Gamma}$ eta $E \nvDash \phi$, beraz, E-k asetzen du $\exists x\,(Px \wedge \neg Lx)$, eta badago D-ko elementu bat, a adibidez, $a \in P$ eta $a \notin L$. E-k $\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$ asetzen duenez, D-ko edozein elementu, a barne, Q-ren hedaduran dago P-ren hedaduran badago, eta $a \in Q$. E-k $\forall x\,(Qx \rightarrow Lx)$ asetzen duenez, D-ko edozein elementu, a barne, Q-ren hedaduran badago L-ren hedaduran dago, eta $a \in L$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago premisak asetzen dituen baina ondorioa asetzen ez duen egiturarik, eta argudioa baliozkoa da.

g. Baliozkoa da. Demagun $E \vDash \boldsymbol{\Gamma}$ eta $E \nvDash \phi$, hau da, $E \vDash \neg\exists x\,(Qx \wedge Lx)$, eta ez dago elementurik D-n $(Qx \wedge Lx)$ asetzen duenik. $E \vDash \exists x\,(Px \wedge Lx)$ eta, beraz, badago D-n elementuren bat, a adibidez, $(Px \wedge Lx)$ asetzen duena, eta $a \in P$ eta $a \in L$. $E \vDash \forall x\,(Px \rightarrow Qx)$ eta, beraz, D-ko edozein elementuk, a-k barne, asetzen du $(Px \rightarrow Qx)$ eta P-ren hedaduran dagoen elementu oro badago Q-ren hedaduran, $a \in Q$, eta a Q-ren hedaduran dagoenez eta L-ren hedaduran dagoenez, a-k asetzen du $(Qx \wedge Lx)$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago premisak asetzen dituen eta ondorioa asetzen ez duen egiturarik, eta argudioa baliozkoa da.

h. Baliozkoa da. Demagun E egitura bat ϕ ondorioa asetzen ez duena eta, beraz, badago D-n elementu bat, a adibidez, $(Px \wedge Lx)$ asetzen duena, eta $a \in P$ eta $a \in L$. E-k asetzen du $\forall x\,(Lx \rightarrow Qx)$ eta, beraz, D-ko elementu oro, a barne, L-ren hedaduran badago Q-ren hedaduran dago, eta $a \in Q$. a P-ren eta Q-ren hedaduran dagoenez, a-k asetzen du $(Px \wedge Qx)$. E-k asetzen du $\neg\exists x\,(Px \wedge Qx)$ eta, beraz, ez dago D-n $(Px \wedge Qx)$ asetzen duen elementurik. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago egiturarik premisak asetzen dituena baina ondorioa ez, eta argudioa baliozkoa da.

i. Baliozkoa da. Demagun $E \vDash \boldsymbol{\Gamma}$ eta $E \nvDash \phi$ eta, beraz, $E \vDash \exists y \forall x\, \neg Rxy$. Horrela bada, badago D-ko elementu bat, a, D-ko edozein b elementu hartuta $\langle b,a\rangle \notin R$. Baina $E \vDash \boldsymbol{\Gamma}$ eta, beraz, badago b elementu bat D-n D-ko edozein elementurentzat, a barne, $\langle b,a\rangle \in R$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago premisak asetzen dituen eta ondorioa asetzen ez duen egiturarik, eta argudioa baliozkoa da.

j. $D = \{1,2,3\}$; $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

k. Ez da baliozkoa. D = {1,2}, P = {1}, Q = {1}, L = {2}

l. Ez da baliozkoa. D = {1,2,3}; P = {1,2} Q = {1}, L = {2,3}, T = {1,2,3}

m. Ez da baliozkoa. D = {1,2,3}, P = {1}, R = {‹1,2›, ‹1,3›, ‹3,1›}

n. Baliozkoa da. Demagun $E \models \mathbf{\Gamma}$ eta $E \not\models \phi$ eta, beraz $E \models \forall x\ \neg(Nx \wedge Fx)$—ez dago D-n $(Nx \wedge Fx)$ formula asetzen duen elementurik. E-k $\mathbf{\Gamma}$ premisak asetzen dituenez, $\exists x\ (Px \wedge Nx)$ asetzen du, eta badago D-n gutxienez elementu bat, a, $(Px \wedge Nx)$ asetzen duena, eta, beraz, $a \in P$ eta $a \in N$. E-k asetzen du $\forall x\ [(Px \vee Qx) \to Qx]$ eta, $a \in P$ denez, a-k asetzen du $(Px \vee Qx)$, eta horregatik $a \in L$. E-k $\forall x\ (Lx \to Fx)$ asetzen duenez, L-ren hedaduran dagoen D-ko elementu oro F-ren hedaduran dago, eta, beraz, $a \in F$. $a \in N$ eta $a \in F$ eta, beraz, a-k asetzen du $(Nx \wedge Fx)$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, ez dago premisak asetzen dituen baina ondorioa asetzen ez duen egiturarik eta, beraz, argudioa baliozkoa da.

o. Ez da baliozkoa. D = {1,2,3}. R = {‹1,2›, ‹2,1›, ‹1,1›, ‹2,2›}

p. Ez da baliozkoa. D = {1,2,3} R = ‹1,2›, ‹2,3›, ‹1,3›

q. Ez da baliozkoa. D {1,2,3}; P = {1}, Q = {2,3}, L = ∅

r. Ez da baliozkoa. D = {1,2,3}. R = {‹1,1›, ‹1,2›, ‹1,3›}

s. Ez da baliozkoa. D = {1,2,3}; P = ∅ R = {‹1,2›, ‹2,1›, ‹3,1›}

t. Ez da baliozkoa. D = {1,2,3} R = {‹1,2›, ‹2,3›, ‹3,1›, ‹1,1›, ‹2,2›, ‹3,3›}

(3)

a. $\forall x\ (\neg Px \wedge Qx) \equiv_{(\text{Def. }\forall)} \neg\exists x\ \neg(\neg Px \wedge Qx) \equiv_{(\text{DeMorgan})} \neg\exists x\ (Px \vee \neg Qx)$

b. $\neg\forall x\ (Px \to Qx) \equiv_{(\text{Def. }\neg\forall)} \exists x\ \neg(Px \to Qx) \equiv_{(\text{Def. }\to)} \exists x\ (Px \wedge \neg Qx)$

c. $\forall x\ (\neg Px \to Qx) \equiv_{(\text{Def. }\forall)} \neg\exists x\ \neg(\neg Px \to Qx) \equiv_{(\text{Def. }\to)} \neg\exists x\ (\neg Px \wedge \neg Qx)$

d. $\exists x\ (Px \wedge Rxy) \equiv_{(\text{Def. }\exists)} \neg\forall x\ \neg(Px \wedge Rxy) \equiv_{(\text{Def. }\wedge)} \neg\forall x(Px \to \neg Rxy)$

e. $\neg\forall x\exists y\ Rxy \equiv_{(\text{Def. }\neg\forall)} \exists x\neg\exists y\ Rxy \equiv_{(\text{Def. }\neg\exists)} \exists x\forall y\ \neg Rxy$

f. $\neg\exists x\forall y\ Rxy \equiv_{(\text{Def. }\exists)} \forall x\neg\forall y\ Rxy \equiv_{(\text{Def. }\neg\forall)} \forall x\exists y\ \neg Rxy$

g. $\forall x\exists y\ (Px \to Rxy) \equiv_{(\text{Def. }\forall)} \neg\exists x\neg\exists y\ (Px \to Rxy) \equiv_{(\text{Def. }\neg\exists)} \neg\exists x\forall y\ \neg(Px \to Rxy) \equiv_{(\text{Def. }\to)} \neg\exists x\forall y\ (Px \wedge \neg Rxy)$

h. $\forall x\neg\exists y\ (Px \to Rxy) \equiv_{(\text{Def. }\neg\exists)} \forall x\forall y\ \neg(Px \to Rxy) \equiv_{(\text{Def. }\to)} \forall x\forall y\ (Px \wedge \neg Rxy)$

i. Ez dira baliokideak. Ondoko E egituran, D = {1,2,3}; P^E = {1,2}; Q^E = {2,3}, $E \models \forall x\ (Px \vee Qx)$ baina $E \not\models \forall xPx \vee \forall xQx$.

j. Ez dira baliokideak. Ondoko E egituran D = {1,2,3} P^E = {1,2} Q^E = {1,2} $E \models \forall x\ (\neg Px \vee Qx)$ baina $E \not\models \neg\exists xPx \vee \forall xQx$

k. Ez dira baliokideak. Ondoko E egituran D = {1,2,3} P^E = {1,2}, Q^E = {1,3} $E \models \neg\forall xPx \wedge \exists x\neg Qx$ baina $\not\models \exists x\ (\neg Px \wedge \neg Qx)$

l. Ez dira baliokideak. Ondoko E egituran D = {1,2,3} P^E = {1,2,3}; Q^E = {1,2} $E \models \exists x\ (Px \to Qx)$ baina $E \not\models \exists xPx \to \forall xQx$

m. Ez dira baliokideak. Ondoko E egituran D = {1, 2, 3,}, c^E = 1; P^E = {2}; Q^E = {3} $E \models \forall xPx \to Qc$ baina $E \not\models \forall x\ (Px \to Qc)$

n. Ez dira baliokideak. Ondoko E egituran D = {1,2,3}, c^E = 1, P^E = {2}, Q^E = {3} $E \models \exists x\ (Px \to Qc)$ baina $E \not\models \exists xPx \to Qc$

o. $\forall x\ (Px \wedge Qx) \equiv_{(\forall\text{ distr. }\wedge)} \forall xPx \wedge \forall xQx$

- Demagun badagoela E egitura bat, $E \models \forall x\ (Px \wedge Qx)$ eta $E \not\models \forall xPx \wedge \forall xQx$, hau da, $E \models \exists x\neg Px \vee \exists x\neg Qx$ eta, beraz, badago a elementu bat $a \notin P$ edo badago a elementu bat $a \notin Q$. Lehenengoagatik, E-ko domeinuko elementu orok, a-k barne, asetzen du $(Px \wedge Qx)$ formula, eta $a \in P$ eta $a \in Q$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, $\forall x\ (Px \wedge Qx) \models \forall xPx \wedge \forall xQx$.
- Demagun badagoela E egitura bat, $E \models \forall xPx \wedge \forall xQx$ eta $E \not\models \forall x\ (Px \wedge Qx)$, hau da, $E \models \exists x\ \neg(Px \wedge Qx)$. Badago D-ko elementu bat, a adibidez, $\neg(Px \wedge Qx)$ formula asetzen duena, eta a-k ez du asetzen $(Px \wedge Qx)$. E-k $\forall xPx \wedge \forall x Qx$ asetzen duenez, bi konjuntoak asetzen ditu, eta D-ko elementu orok (a barne) Px asetzen du eta Qx asetzen du. $a \in P$ eta $a \in Q$ eta, beraz, a-k asetzen du $(Px \wedge Qx)$. Kontraesanera iritsi garenez, absurdorako erredukzioz, $\forall xPx \wedge \forall xQx \models \forall x\ (Px \wedge Qx)$
- $\forall x\ (Px \wedge Qx) \models \forall xPx \wedge \forall xQx$ eta $\forall x\ Px \wedge \forall x\ Qx \models \forall x\ (Px \wedge Qx)$, beraz, $\forall x\ (Px \wedge Qx) \equiv \forall xPx \wedge \forall xQx$.

p. i-ren iguala da.

q. Ez dira baliokideak. Ondoko E egituran D = {1,2,3}, P^E = {1}, Q^E = {3} $E \models \exists xPx \wedge \exists xQx$, baina $E \not\models \exists x\ (Px \wedge Qx)$

r. $\exists x\ (Px \vee Qx) \equiv_{(\exists\text{ distr. }\vee)} \exists xPx \vee \exists xQx$

s. $\forall x\ (Px \vee Pa) \equiv_{(\forall\text{ esp.})} \forall xPx \vee Pa$

t. $\exists x\ (Px \wedge Pa) \equiv_{(\exists\text{ esp.})} \exists xPx \wedge Pa$

u. $\forall x\ (Pa \to Px) \equiv_{(\forall\text{ esp.})} Pa \to \forall xPx$

v. $\exists x\ (Pa \to Px) \equiv_{(\exists\text{ esp})} Pa \to \exists xPx$

w. $\forall x\ (Px \to Pa) \equiv_{(\exists\text{ esp})} \exists x\ Px \to Pa$

x. $\exists x\ (Px \to Pa) \equiv_{(\forall\text{ esp.})} \forall xPx \to Pa$