SEMANTIKAKO ARIKETAK: EGITURAK (BADESA, JANE ETA JANSANAREN *ELEMENTOS DE LÓGICA FORMAL*-ETIK)

(1) Demagun lehen mailako hizkuntza bat, zeinu propio bezala P eta Q predikatu monadikoak, Q eta S predikatu diadikoak eta c eta d konstante ez-logikoak dauzkana. Demagun ondoko egitura:

$E = \langle D, I \rangle$

$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$I(P) = \{1, 3, 5\}$ $\quad$ $I(Q) = \{2, 4\}$ $\quad$ $I(c) = 1$ $\quad$ $I(d) = 2$

$I(R) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,1\rangle\}$ $\quad$ $I(S) = \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,5\rangle\}$

Ondoko enuntziatuetatik zeintzuk dira egiazkoak E-n?

(a) $Pc \wedge Qc$
(b) $Pd \rightarrow Qc$
(c) $\exists x\, Px$
(d) $\exists x\, Px \wedge \exists x\, Qx$
(e) $\exists x\, (Px \wedge Qx)$
(f) $\forall x\, (Px \vee Qx)$
(g) $\forall x\, (Px \leftrightarrow \neg Qx)$
(h) $Rcd \wedge Sdc$
(i) $\exists x\, (Rcx \wedge Sxc)$
(j) $\exists x\, (Rcx \wedge Scx)$
(k) $\forall x\, (Px \rightarrow Rxd)$
(l) $\forall x\, (Px \rightarrow Rdx)$
(m) $\exists x \exists y\, (Px \wedge Qy)$
(n) $\exists x \exists y\, (Rxy \wedge Ryx)$
(o) $\exists x \exists y\, (Rcx \wedge Ryc)$
(p) $\exists x \exists y\, (Rxc \wedge Rcy)$
(q) $\forall x \forall y\, ((Px \wedge Rxy) \rightarrow Qy)$
(r) $\forall x \forall y\, ((Qx \wedge Rxy) \rightarrow Py)$

(2) Demagun lehen mailako hizkuntza bat, zeinu propio bezala P eta Q predikatu monadikoak, R eta S predikatu diadikoak eta c eta d konstante ez-logikoak dauzkana. Demagun ondoko egitura:

$E = \langle D, I \rangle$

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

$I(P) = \{1, 3\}$ $\quad$ $I(Q) = \varnothing$ $\quad$ $I(c) = 1$ $\quad$ $I(d) = 2$

$I(R) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,3\rangle\ \langle 2,3\rangle\}$ $\quad$ $I(S) = \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 1,1\rangle\}$

a. Ondoko enuntziatuetatik zeintzuk dira egiazkoak E-n?

(a) $Pc \vee Qd$
(b) $\neg Pd$
(c) $(Pc \wedge \neg Qd)$
(d) $(Pc \rightarrow \neg Qd)$
(e) $\exists x\, (\neg Qx \vee (Px \wedge Qx))$
(f) $\exists x\, (Px \wedge Qx)$
(g) $\forall x\, Qx \vee \exists x\, \neg Qx$
(h) $\forall x\, (Px \rightarrow Qx)$
(i) $\forall x\, (Qx \rightarrow \neg Px)$
(j) $\forall x\, Rcx$
(k) $\forall x\, Scx$

b. Ondoko enuntziatuetatik zeintzuk dira egiazkoak E-n?

(a) $\forall x \forall y\, (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$
(b) $\forall x \forall y\, (\neg Sxy \rightarrow \neg Rxy)$
(c) $\forall x\, (Rcx \rightarrow Scx)$
(d) $\forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow Sxy)$
(e) $\forall x \forall y \forall z\, ((Sxy \wedge Syz) \rightarrow Rxz)$
(f) $\forall x\, Rxx$
(g) $\forall x \forall y\, (Rxy \rightarrow Ryx)$
(h) $\forall x \forall y \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
(i) $\forall x \forall y\, (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$
(j) $\forall x\, \neg Sxx$
(k) $\forall x \forall y\, (Sxy \rightarrow Syx)$
(l) $\forall x \forall y \forall z\, ((Sxy \wedge Syz) \rightarrow Sxz)$
(m) $\forall x \forall y\, (Sxy \rightarrow \neg Syx)$
(n) $\forall x\, (Px \rightarrow \exists y\, Rxy)$
(o) $\forall x\, (Px \rightarrow \exists y\, Ryx)$
(p) $\forall x\, (Px \rightarrow \exists y\, (Sxy \wedge Ryx))$
(q) $\forall x\, (Qx \rightarrow \exists y\, (Px \vee Qy))$

3. Ondoko enuntziatu bakoitzarentzat aurkitu, posible bada, enuntziatua egiazko egiten duen E egitura bat eta enuntziatua faltsu egiten duen E* egitura bat. Ez bada posible, azaldu arrazoia.

(a) $\forall x\,(Px \leftrightarrow \neg Qx)$
(b) $\forall x \forall y\,(Rxy \lor Ryx)$
(c) $\forall y\,(\forall x\, Px \leftrightarrow Py)$
(d) $\forall x\,(Px \rightarrow \forall y\, Py)$
(e) $\exists x\, Px \rightarrow \forall y\, Py$
(f) $\exists x\,(Px \rightarrow \forall y\, Py)$
(g) $\forall x \forall y\, Rxy \rightarrow \forall x \forall y\, Ryx$
(h) $\forall x \forall y\,(Rxy \rightarrow Ryx)$
(i) $\forall x \forall y\, Rxy \rightarrow \forall z\, Rzz$
(j) $\forall x\,(Rxc \leftrightarrow \neg Rxx)$

4. Bitez ondoko enuntziatuak

(1) $\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$
(2) $\forall x\,(Qx \rightarrow Lx)$
(3) $\exists x\, \neg Px$
(4) $\exists x\, \neg Qx$
(5) $\forall x\, Lx$

Existitzen badira, bila itzazu egiturak, zeinetan:

(a) (2), (3) eta (4) enuntziatuak egiazkoak diren eta gainontzekoak faltsuak
(b) (2) eta (3) enuntziatuak egiazkoak diren eta gainontzekoak faltsuak
(c) (1), (2) eta (4) enuntziatuak egiazkoak diren eta gainontzekoak faltsuak
(d) (1), (3) eta (5) enuntziatuak egiazkoak diren eta gainontzekoak faltsuak
(e) (1), (3) eta (4) enuntziatuak egiazkoak diren eta gainontzekoak faltsuak
(f) Enuntziatu guztiak egiazkoak diren
(g) Enuntziatu guztiak faltsuak diren

Ez badago halako egiturarik, azaldu zergatik.

(1)

(a) F
(b) E
(c) E
(d) E
(e) F
(f) E
(g) E
(h) E
(i) E
(j) F
(k) F
(l) F
(m) E
(n) F
(o) E
(p) E
(q) F
(r) E

(2) a.

(a) E
(b) E
(c) E
(d) E
(e) E
(f) F
(g) E
(h) F
(i) E
(j) F
(k) E

b.

(a) F
(b) F
(c) E
(d) F
(e) F
(f) F
(g) F
(h) F
(i) F
(j) F
(k) F
(l) E
(m) F
(n) E
(o) F
(p) F
(q) E

3. Ondoko enuntziatu bakoitzarentzat aurkitu, posible bada, enuntziatua egiazko egiten duen E egitura bat eta enuntziatua faltsu egiten duen E* egitura bat. Ez bada posible, azaldu arrazoia.

(a) $\forall x\,(Px \leftrightarrow \neg Qx)$
D = {1, 2}
E: P = {1}, Q = {2}
E*: P = {1,2}, Q = {1}

(b) $\forall x \forall y\,(Rxy \vee Ryx)$
D = {1, 2}
E: R = {<1,2>, <1,1>, 2,2>}
E*: R = ∅

(c) $\forall y\,(\forall x\, Px \leftrightarrow Py)$
D = {Hirukiak}
E: P = {x∈D|x-ek hiru alde}
E*: P = {x∈D|x isoszelea da}

D = {1,2}
E: P = {1,2,3}
E*: P = {1,2}

(d) $\forall x\,(Px \rightarrow \forall y\, Py)$
D = {Pertsonak}
E: P = {x∈D|x ugaztuna da}
E*: P = {x∈D|x futbolista da}

(e) $\exists x\, Px \rightarrow \forall y\, Py$
D = {1,2}
E: P = ∅
E*: P = {1}

(f) $\exists x\,(Px \rightarrow \forall y\, Py)$

Formula baliozkoa da egitura guztietan. Demagun edozein E egitura: edo E-ko D domeinuko elementu guztiak P-ren hedaduran daude edo badago gutxienez elementu bat ez dagoena P-ren hedaduran (ez dago hirugarren aukerarik). Elementu guztiak P-ren hedaduran badaude, orduan edozein elementuk asetzen du Px→∀yPy formula, edozein elementurentzat egia baita D-ko elementu guztiak P direla (formularen atzekaria), eta badagoenez gutxienez elementu bat formula asetzen duena, enuntziatua egiazkoa da E-n. Bestalde, baldin badago gutxienez elementu bat ez dagoena P-ren hedaduran, orduan badago gutxienez elementu bat (P-ren hedaduran ez dagoen elementu hori) Px→∀yPy formula asetzen duena, aurrekaria ez baitu asetzen, eta beraz enuntziatua egiazkoa izango da D-n. Edozein egituratan baliozkoa denez, formula egia logiko bat da.

(g) $\forall x \forall y\, Rxy \rightarrow \forall x \forall y\, Ryx$

Formula baliozkoa da egitura guztietan. Demagun badagoela E egitura bat D domeinu batekin formula faltsutzen duena; formularen aurrekaria egiazkoa izango da E-n eta atzekaria faltsua. Atzekaria faltsua bada E-n, horrek esan nahi du D-ko elementu guztiak ez daudela euren artean R erlazioan, badagoela gutxienez D-ko bi elementurekin (elementu bera izan daitezke) osatutako bikote ordenatu bat ez dena R-ko elementua. Hori horrela bada, formularen aurrekaria ere faltsua izango da, ez baita egia domeinuko elementu guztiak R erlazioan daudela euren artean. Baina aurrekaria egiazkoa dela suposatu dugunez, kontraesanera iritsi gara: ez dago formula faltsutu dezakeen egiturarik eta, beraz, egia logikoa da.

(h) $\forall x \forall y\,(Rxy \rightarrow Ryx)$
D = {1,2}
E: R = {<1,2>,<2,1>}
E*. R = {<1,2>}

(i) $\forall x \forall y\ Rxy \rightarrow \forall z\ Rzz$

Formula baliozkoa da egitura guztietan. Demagun badagoela E egitura bat D domeinu batekin formula faltsutzen duena; formula baldintza bat denez, bere aurrekaria egiazkoa izango da E-n eta atzekaria faltsua. Atzekaria faltsua denez, badago D-ko elementu bat (x, adibidez) bere buruarekin osatzen duen bikote ordenatua (<x,x>) ez dena R multzoko kide. Hori horrela bada, orduan faltsua da domeinuko elementu guztiekin osatu ditzakegun bikote ordenatu guztiak R-ren hedaduran daudenik eta, beraz, formulako aurrekaria faltsua da E-n. Baina aurrekaria egiazkoa dela suposatu dugunez, kontraesanera iritsi gara: ez dago formula faltsutu dezakeen egiturarik, formula baliozkoa da egitura orotan eta, beraz, egia logikoa da.

(j) $\forall x\ (Rxc \leftrightarrow \neg Rxx)$

Ez dago formula asetzen duen egiturarik. Demagun E egitura bat, domeinu bezala zenbaki arrunten multzoa dena. Demagun c-konstante logikoak 1 zenbakia denotatzen duela: 1-ek ezin du $Rxc \leftrightarrow \neg Rxx$ formula ase. Bi aukera daude, edo <1,1> bikote ordenatua R multzoko kide da, edo ez da (ez dago hirugarren aukerarik). Baldin bada, orduan bibaldintzaren aurrekaria egiazkoa da, eta atzekaria faltsua (bibaldintza faltsua). Ez bada, orduan bibaldintzaren aurrekaria faltsua da, eta atzekaria egia (bibaldintza faltsua). 1-ek ez duenez formula asetzen, faltsua da domeinuko edozein elementuk formula asetzen duela. Beraz, ez dago enuntziatua asetzen duen egiturarik, eta formula kontraesan bat da.

4.

(a) P = {1,2}, Q = {1}, L = {1, 3}

(b) Ez dago baldintza horiek betetzen dituen egiturarik. (4) faltsua bada, horrek esan nahi du egiturako domeinuko elementu guztiak Q-ren hedaduran daudela. (2) egiazkoa bada, orduan domeinuko elementu guztiak L-ren hedaduran egongo dira. Baina hori horrela bada, orduan (5) automatikoki egiazkoa da.

(c) Ez dago baldintza horiek betetzen dituen egiturarik. (3) faltsua bada, orduan domeinuko elementu guztiak P-ren hedaduran daude. (1) egiazkoa bada, orduan domeinuko elementu guztiak Q-ren hedaduran daude, eta (2) egiazkoa bada, L-ren hedaduran ere bai. Baina orduan ez dago domeinuko elementurik Q-ren hedaduran ez dagoenik, eta (4) faltsua da.

(d) Ez dago baldintza horiek betetzen dituen egiturarik. (5) egiazkoa bada, orduan domeinuko elementu guztiak L-ren hedaduran daude. Baina orduan (2) ezin da faltsua izan, domeinuko edozein elementuk $Qx \rightarrow Lx$ asetzen baitu L-ren hedaduran dagoen heinean.

(e) P = {1,2}, Q = {1,2}, L = {1,3}

(f) P = {1}, Q = {1}, L = {1, 2, 3}

(g) Ez dago baldintza horiek betetzen dituen egiturarik. (4) faltsua bada, orduan domeinuko elementu guztiak Q-ren hedaduran egongo dira. Baina orduan automatikoki (1) egiazkoa izango da, domeinuko elementu orok Qx asetzen duen heinean $Px \rightarrow Qx$ formula ere aseko duelako.