Analisi Matematikoa

Segidak $\mathbb{R}$ multzoan

Eragiketak. Indeterminazioak. Ebazpen-metodoak

December 5, 2016

Aurkibidea

3. Gaia
Segidak $\mathbb{R}$ multzoan

3.3 Segiden arteko eragiketak eta limiteak. Indeterminazioak

3.1. Definizioa. $\{a_n\}$*eta*$\{b_n\}$ *segidak emanik, honela definitzen dira bien arteko eragiketak:* $\{a_n\} \to a$ *eta* $\{b_n\} \to b$ *direla pentsatuko dugu:*

- *Batuketa/Kenketa:*

  $\{a_n\} \pm \{b_n\} = \{a_n \pm b_n\}.$

$+$	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
a	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$-$	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
a	$+\infty$	$a-b$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

- *Biderketa:* $\{a_n\} \times \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}.$

x	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$0<b$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$a<0$	$+\infty$	$0<ab$	0	$ab<0$	$-\infty$
$a=0$	?	0	0	0	?
$0<a$	$-\infty$	$ab<0$	0	$0<ab$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

- *Zatiketa:* $\{a_n\} \div \{b_n\} = \{\frac{a_n}{b_n}\}, b_n \neq 0.$

$\div$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$0<b$	$+\infty$
$-\infty$	?	$+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	?
$a<0$	0	$0<a/b$	$\pm\infty$	$a/b<0$	0
$a=0$	0	0	?	0	0
$0<a$	0	$a/b<0$	$\pm\infty$	$0<a/b$	0
$+\infty$	?	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	?

- *Logaritmoa:* $\log_k\{a_n\} = \{\log_k a_n\}, k>0, a_n>0.$

$\log_k a_n$	$a=0$	$0<a$	$+\infty$
$0<k<1$	$+\infty$	$\log_k a$	$-\infty$
$1<k$	$-\infty$	$\log_k a$	$+\infty$

- *Esponentziala:* $k^{a_n} = \{k^{a_n}\}, k>0.$

k^{a_n}	$-\infty$	a	$+\infty$
$0<k<1$	$+\infty$	k^a	0
$k=1$	1	1	1
$1<k$	0	k^a	$+\infty$

- *Berreketa:* $\{a_n^{\{b_n\}}\} = \{a_n^{b_n}\}, a_n>0.$

$a_n^{b_n}$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$0<b$	$+\infty$
$a=0$	$+\infty$	$+\infty$	?	0	0
$0<a<1$	$+\infty$	a^b	1	a^b	0
$a=1$	?	1	1	1	?
$1<a$	0	a^b	1	a^b	$+\infty$
$+\infty$	0	0	?	$+\infty$	$+\infty$

Propietatea Oro har, hau beteko da:
Segiden arteko eragiketen limitea=segideen limiteen arteko eragiketak
Indeterminazioak

1. $\infty - \infty$
2. $0 \cdot \infty$
3. $\frac{0}{0}$
4. $\frac{\infty}{\infty}$

5. 1^{∞}
6. 0^0
7. ∞^0

3.4 Indeterminazioak ebazteko metodoak

3.4.1 Baliokidetasuna

3.2. Definizioa. *$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segida baliokideak dira $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ bada; kasu horretan, honela idatziko dugu: $\{a_n\} \sim \{b_n\}$.*

3.3. Propietatea. *$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segida baliokideak badira, limite bera dute.*

($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ ez dira baliokideak).

3.4. Adibidea. *$\{\frac{1}{n}\} \to 0$, $\{\frac{1}{n^2}\} \to 0$, baina $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{1/n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \neq 1$, beraz, ez dira baliokideak.*

3.5. Definizioa.

1. *$\{a_n\}$ segida infinitesimala da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bada.*
   - (a) $\{a_n\} \sim \{\sin a_n\} \sim \{\tan a_n\} \sim \{\arcsin a_n\} \sim \{\arctan a_n\}$.
   - (b) $\{1 - \cos a_n\} \sim \{\frac{(a_n)^2}{2}\}$.
   - (c) $\{a_n\} \sim \{\ln(1 + a_n)\}$.
   - (d) *Aurreko baliokidetzan, $b_n = 1 + a_n$ eginez, hau idatz dezakegu: $\{b_n - 1\} \sim \{\ln b_n\}$.*
2. *$\{a_n\}$ segida infinitua da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ bada.*
   - (a) $\{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0\} \sim \{a_k n^k\}$.
   - (b) *Stirling-en baliokidetza: $\{n\} \sim \{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\}$.*

Infinituen ordenak Lau infinitu-mota bereiz ditzakegu, limitera hurbiltzeko abiaduraren arabera
$\{(\ln a_n)^q\} <<< \{(a_n)^p\} <<< \{k^{a_n}\} <<< \{(a_n)^{r a_n}\}, q, p, r > 0$ eta $k > 1$ izanik.

Polinomioen arteko zatiduraren limitea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + ... + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \infty & k > l \\ \frac{a_k}{b_l} & k = l \\ 0 & k < l \end{cases}$$

3.6. Printzipioa. *Segida baten gai orokorraren adierazpenean agertzen den biderkagai edo zatitzaile bat bere baliokide batez ordezka daiteke segidaren limitea aldatu gabe.*

3.7. Adibidea. $\dfrac{\sqrt[n]{10}-1}{\sqrt[n]{100}-1}$ *segidaren limitea kalkulatuko dugu.*

$\sqrt[n]{10} = 10^{\frac{1}{n}} \to 1$

$\sqrt[n]{100} = 100^{\frac{1}{n}} \to 1$; *beraz,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{10}-1}{\sqrt[n]{100}-1} = \frac{0}{0}$ *indeterminazioa da.*

$\{\sqrt[n]{10}-1\} \sim \{\ln \sqrt[n]{10}\}$

$\{\sqrt[n]{100}-1\} \sim \{\ln \sqrt[n]{100}\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{10}-1}{\sqrt[n]{100}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \sqrt[n]{10}}{\ln \sqrt[n]{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln 10}{\frac{1}{n}\ln 100} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 10}{\ln 10^2} = \frac{\ln 10}{2\ln 10} = \frac{1}{2}.$$

3.4.2 Stolz-en irizpideak

3.8. Teorema. $\{a_n\}$ *eta* $\{b_n\}$ *segidek baldintza hauek betetzen badituzte:*

1. $\{b_n\}$ *hertsiki monotonoa bada,*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ *existitzen bada eta*
3. *hauetako bat ere betetzen bada:*
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$,
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$,

Stolz-en irizpideak dio berdintza hau beteko dela:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

3.9. Adibidea. $\{\frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{\ln n}\}$ *segidaren limitea kalkulatuko dugu.*

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$

$b_n = \ln n$ *hertsiki gorakorra eta* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$

$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}$

$b_{n+1} - b_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{\ln \frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{\frac{n+1}{n} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Ondorioz, $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$ *da.*

3.4.3 e zenbakiaren erabilpena

$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$

$e^k = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{k}{n+l})^{n+p}.$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow e = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{1/a_n}.$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n}.$

3.4.4 Cauchy-ren segidak

3.10. Definizioa. $\{a_n\}$ *Cauchy-ren segida da, ondorio baldintza betetzen badu:*
$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p, q \geq n_0(\varepsilon) \qquad d(a_p, a_q) < \varepsilon$

3.11. Teorema. *Cauchy-ren irizpidea segidetarako:* $\mathbb{R}$ *multzoan, segida bat konbergentea da baldin eta soilik baldin Cauchy-ren segida bada.*

3.5 Ariketak

5.Kalkula itzazu gai orokor hauek dituzten segiden limiteak:

9)$(\frac{3+2n^2}{3n+n^2})^{\frac{n^3+2n}{n^2-5}} \rightarrow (\frac{\infty}{\infty})^{\frac{\infty}{\infty}}$ Segida honen limitea kalkulatzeko, bitan banatuko dugu segida, horrela bi $\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazio izanik.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{3+2n^2}{3n+n^2} \rightarrow \frac{2}{1} = 2$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n}{n^2-5} \rightarrow \frac{1}{0} = \infty$

Ondorioz, osorik honela geratuko litzateke: $2^\infty = \infty$

15)$n - \ln$
$\lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{\ln n}{n}) \to \infty \times (1-0) = \infty$

35)$\frac{1}{n^2}(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + ... + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}})$

$a_n = 1(2 + 3^2 + 4^3 + ... + (n+1)^n)$
$b_n = n^2(1 + 2 + 3 + ... + n^{n-1})$
$\exists ? \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$

Stolz-en metodoa erabiliz:
$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{n^n \cdot 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln n}{n\ln n + \ln 2n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+2}{2n+1})(\frac{n+2}{n+1})^n =$
$= \lim_{n\to\infty} (\frac{n+2}{2n+1})(1 + \frac{1}{n+1})^n = \frac{1}{2} \cdot e = \frac{e}{2}$

6.Froga ezazu hurrengo segida errepikaria konbergentea dela eta kalkula ezazu bere limitea:

1)$a_1 = 1$ eta $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

$\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...\}$

$\{2^{1/2}, 2^{1/2} \times 2^{1/4}, 2^{1/2} \times 2^{1/4} \times 2^{1/8}, ...\}$

$\{2^{1/2}, 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}, ...\}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$, hau da, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + ...$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

Aurretik ondorioztatu dugunez, r, arrazoia, hau da, errepikatzen den zatia, $\frac{1}{2}$ da.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + (\frac{1}{2})^n = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$

$a_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$ bada, $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(2^{1-\frac{1}{2^n}}) = 2^{1-0} = 2$.