

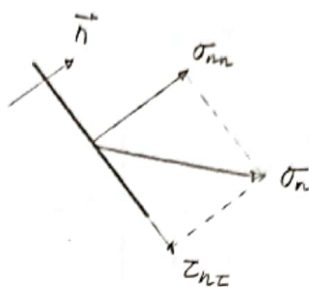
TEMA 2: TENSIONES

- CONCEPTO DE TENSION:

$\sigma_{nn}$ : TENSION NORMAL

$\tau_{nt}$ : TENSION TANGENCIAL

$\vec{n}$ : VECTOR UNITARIO NORMAL DE PLANO



$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

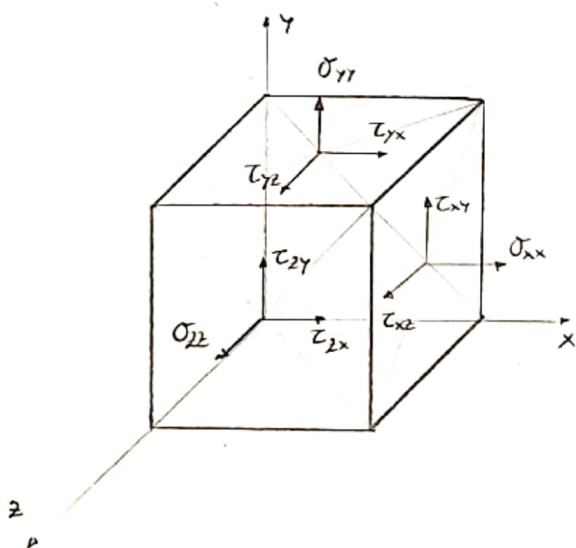
- CAMPO DE TENSIONES:

[FORMULA DE CAUCHY]:  $\vec{\sigma}_n = \sigma_x \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z$

(ADECUADO A NUESTRO CONVENIO): ADB:  $\sigma_x = \sigma_{xx} \vec{e}_1 + \tau_{xy} \vec{e}_2 + \tau_{xz} \vec{e}_3$

1. SUBINDICE: PLANO

2. SUBINDICE: DIRECCION



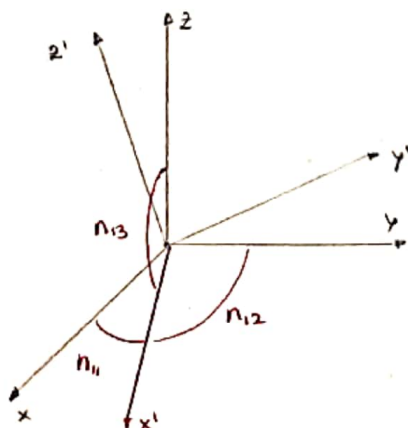
$$\begin{pmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$$\{\sigma_n\} = [T_{ij}] \cdot \{n_j\}$$

$[T_{ij}]$  = MATRIZ DE TENSIONES

- TENSIONES ASOCIADAS A CARAS VISTAS  $\oplus$
- CARAS OCULTAS, MISMAS TENSIONES  $\ominus$
- RECIPROCIDAD TENSIONES TANGENCIALES  
 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  ;  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  ;  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$
- $[T_{ij}]$  ES SIMETRICO

- CAMBIO DE BASE



COSENOS DIRECTORES ( $n_{ij} = \cos \alpha$ )

	x	y	z
x'	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{13}$
y'	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{23}$
z'	$n_{31}$	$n_{32}$	$n_{33}$

$$[N] = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \text{ (ORTONORMAL)}$$

$$[T'_{ij}] = [N][T_{ij}][N]^T$$

## - TENSIONES PRINCIPALES:

- [DEF]: CUANDO EL VECTOR TENSION TENGA UNICAMENTE COMPONENTE NORMAL, RESPECTO A UN SISTEMA DE REFERENCIA ESPECIFICO.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

• ECUACION CARACTERISTICA  
• TENSIONES PRINCIPALES ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ )

### • DIRECCIONES PRINCIPALES:

- [DEF]: VECTORES ASOCIADOS A TENSIONES PRINCIPALES.

[2.ECU] 
$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[1.ECU] 
$$n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2 = 1$$

### • CASOS DE TENSIONES PRINCIPALES:

CASO 1)  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \rightarrow$  SOLO 1 S.R. CONTIENE D.P.

CASO 2)  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3 \rightarrow$  CUALQUIER PAR DE DIRECCIONES ORTOGONALES DE UN S.R. CONTENIDAS EN EL PLANO ⊥ A  $\sigma_3$  SON D.P.



CASO 3)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \rightarrow$  CUALQUIER S.R. CONTIENE D.P.  
ESTADO HIDROSTATICO.

### • INVARIANTES DE $[T_{ij}]$

1) EJES (x,y,z)  $[T_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

1.1)  $I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$

1.2)  $I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix}$

1.3)  $I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$

2) EJES (1,2,3)  $[T_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

2.1)  $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

2.2)  $I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$

2.3)  $I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$

3) FORMULA GENERAL:  $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$

4) CASOS: 4.1)  $I_3 = 0$  BIAXIAL O PLANO 4.2)  $I_2 = I_3 = 0$  UNIAXIAL

- TENSIÓN TANGENCIAL MÁXIMA : (NO EXTREMA)

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

- TENSIONES OCTAEDRICAS :

• [DEF]: AQUELLOS PLANOS QUE PASAN POR EL ORIGEN Y SU VECTOR NORMAL FORMA EL MISMO ANGULO CON LOS TRES EJES, EN UN S.R. DE D.P.

1) COSENO DIRECTORES:  $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{3}$

2) TENSION NORMAL OCTAEDRICA:  $\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3}$

3) TENSION TANGENCIAL OCTAEDRICA:  $\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{2I_1^2 - 6I_2}$$

- TENSIÓN MEDIA Y TENSIÓN DE DESVIACIÓN:

• MATRIZ DESVIADORA  $[T_{ij}]_d$ : ESPECIFICA LA DESVIACIÓN DEL ESTADO DE TENSIONES RESPECTO DE LA TENSIÓN MEDIA.

$$[T_{ij}]_d = [T_{ij}] - \sigma_m [I]$$

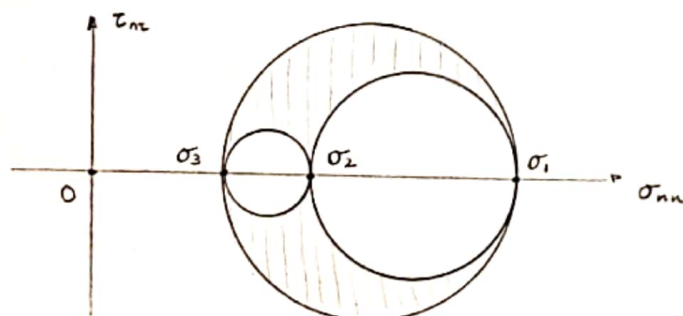
• MATRIZ HIDROSTATICA  $\sigma_m [I]$ : CARACTERISTICA DEL ESTADO TENSIONAL HIDROSTATICO. ( $\sigma = \sigma_m = -p$  EN CUALQUIER DIRECCIÓN)

• TENSION MEDIA  $\sigma_m$ :  $\sigma_m = \sigma_{oct}$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3}$$

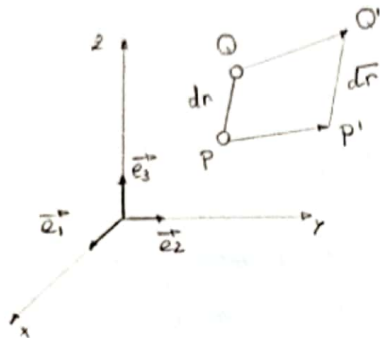
- DIAGRAMA CIRCULOS DE MOHR:

• [DEF]: LOS VECTORES TENSIÓN CORRESPONDIENTES A LOS INFINITOS PLANOS QUE PASAN POR UN PTO P SON SUSCEPTIBLES DE UNA REPRESENTACIÓN PLANA EN FUNCION  $(\sigma_m, \tau_{xz})$



# TEMA 3: DEFORMACIONES

## - DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES UNITARIAS



- $PP'$  y  $QQ'$  VECTORES DESPLAZAMIENTO
- $u = \bar{x} - x$ ;  $v = \bar{y} - y$ ;  $w = \bar{z} - z$  COMPONENTES
- $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$ ;  $\frac{\partial v}{\partial x} = v_x$ ;  $\frac{\partial w}{\partial x} = w_x$  DERIVADAS
- $d\bar{r}^2 - dr^2$  DEFORMACIÓN DEL CUERPO
  - CASO 1:  $d\bar{r}^2 - dr^2 = 0$  MOVIMIENTO DE SOLIDO RIGIDO
  - CASO 2:  $d\bar{r}^2 - dr^2 \neq 0$  CUERPO DEFORMADO

• COMPONENTES UNITARIAS DE LA DEFORMACIÓN (E):

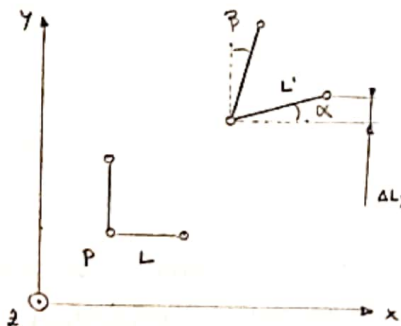
$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= u_x + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2 + w_x^2) & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_y + v_x + u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y) \\ \epsilon_{yy} &= v_y + \frac{1}{2}(u_y^2 + v_y^2 + w_y^2) & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(u_z + w_x + u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z) \\ \epsilon_{zz} &= w_z + \frac{1}{2}(u_z^2 + v_z^2 + w_z^2) & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(v_z + w_y + w_y u_z + v_y v_z + w_y w_z) \end{aligned}$$

## - PEQUEÑAS DEFORMACIONES

• CDEF: DERIVADAS DESPRECIABLES

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= u_x & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_y + v_x) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \epsilon_{yy} &= v_y & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(u_z + w_x) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \epsilon_{zz} &= w_z & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(v_z + w_y) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \end{aligned}$$

$\epsilon = \frac{d\bar{r} - dr}{dr}$  DEFORMACIÓN LONGITUDINAL  
 $\gamma = 2\epsilon$  DEFORMACIÓN ANGULAR

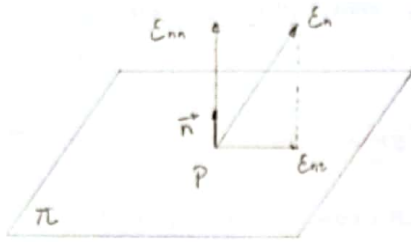


$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = 2\epsilon_{xy}$$

### APROXIMACIONES

$$\left[ \begin{array}{l} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \\ \tan \theta \approx \theta \end{array} \right] \quad \tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{\Delta L_y}{L}$$

- ANALISIS



$\epsilon_{nn}$ : DEFORMACIÓN LONGITUDINAL UNITARIA

$\epsilon_{nz}$ : DEFORMACIÓN TRANSVERSAL UNITARIA

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon_{nn} \oplus \text{ALARGAMIENTO} \\ \epsilon_{nn} \ominus \text{ACORTAMIENTO} \end{array} \right| \quad \gamma_{nz} = 2 \epsilon_{nz}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_{nz} \end{array} \right\} = [D_{ij}] \{n\}$$

$[D_{ij}]$  = TENSOR DE DEFORMACIÓN

- DEFORMACIONES PRINCIPALES:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - E & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} - E & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_{zz} - E \end{vmatrix} = 0$$

• ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

• DEFORMACIONES PRINCIPALES ( $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ )

- DIRECCIONES PRINCIPALES:

[2 ECU]

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon_i & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} - \epsilon_i & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_{zz} - \epsilon_i \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[1 ECU]  $n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2 = 1$

- INVARIANTES: (EJES [1,2,3])

$$[D_{ij}] = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

$J_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$

$J_2 = \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1$

$J_3 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$

- CAMBIO UNITARIO DE VOLUMEN (e):

$$e = \frac{\Delta V}{V_i} = \frac{V_f - V_i}{V_i}$$

$e = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$

DEFORMACIÓN VOLUMÉTRICA

- MATERIALES ISOTROPICOS:

- [DEF]: COINCIDEN LAS D.P. DE TENSIONES Y DEFORMACIONES

- TENSOR DE DEFORMACIONES:

$$[D_{ij}] = [D_{ij}]_d + [D_{ij}]_e$$

$[D_{ij}]_d$ : MATRIZ DESVIADORA  $\rightarrow$  DISTORSIÓN

$[D_{ij}]_e$ : MATRIZ ESFERICA  $\rightarrow$  DILATACIÓN

- ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD :

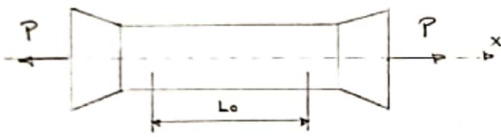
• [DEF] : LOS DESPLAZAMIENTOS DEBEN SER COMPATIBLES CON LAS RESTRICCIONES IMPUESTAS, EN EL CONJUNTO.

TEMA 4 : SOLIDO ELASTICO

- ECUACIONES CONSTITUTIVAS :

TENSIONES  $\xleftrightarrow{E, C.}$  DEFORMACIONES

- ENSAYO DE TRACCION :

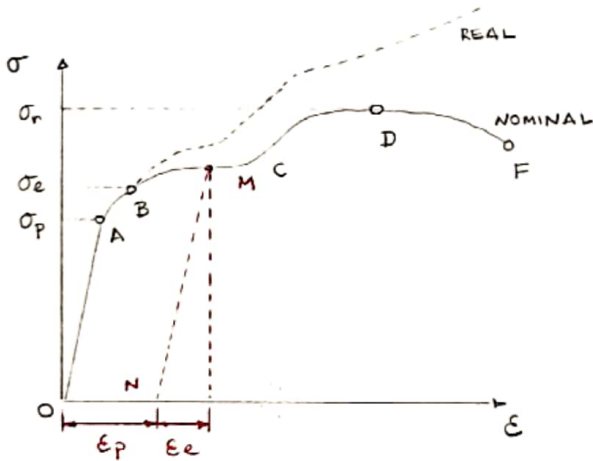


a)  $\sigma_{xx} = \frac{P}{A_0}$   $A_0$  : SECCION RECTA INICIAL

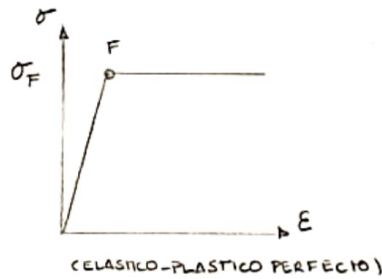
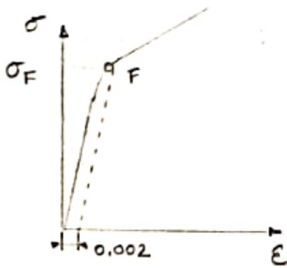
$\sigma_{xx} = \frac{P}{A}$  : TENSION REAL

b)  $\epsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L_0}$   $L_0$  : LONGITUD INICIAL  
INGENIERIL

$\epsilon_{xx} = \ln \frac{L}{L_0}$   
REAL

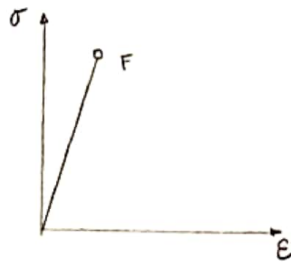
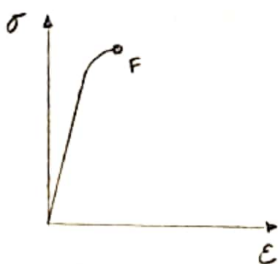


- $\sigma_p$  : LIMITE DE PROPORCIONALIDAD
- $\sigma_e$  : LIMITE ELASTICO
- OA : TRAMO ELASTICIDAD LINEAL
- OB : TRAMO ELASTICO
- $\sigma_r$  : TENSION DE ROTURA
- DF : CUELLO DE ESTRICCION
- PLASTICIDAD :  $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$



- MATERIALES DUCTILES (DEFORMAN)

•  $\sigma_F$  : TENSION DE FLUENCIA.  
LIMITE ELASTICO PRACTICO :  $\epsilon_f = 0,2\%$



- MATERIALES FRAGILES (ROMPEN)

- LEY DE HOOKE GENERALIZADA:  $\{\sigma\} = [C_{ij}] \{\epsilon\}$

$C_{ij}$ : COEFICIENTES ELASTICOS  $\Rightarrow U_0$  (ENERGIA DE DEFORMACIÓN)  $\neq K \cdot \Delta l$

- ECUACIONES DE LAME':

• ANISÓTROPOS: CUERPO SIN SIMETRÍA  $\rightarrow C \equiv 21$

• ORTÓTROPOS: SIMETRÍA CON 3 PLANOS  $\perp$   $\rightarrow C \equiv 9$

• ISÓTROPOS: SIMETRÍA INDEPENDIENTE DEL SR.  $\rightarrow C \equiv 2$

• CASO ISÓTROPICO:  $C \equiv 2$  COEFICIENTES ELASTICOS DE LAME' ( $G, \lambda$ )

• ECUACIONES DE LAME':

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2G \epsilon_{xx} \quad \tau_{xy} = 2G \epsilon_{xy}$$

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} : \text{DILATACIÓN CÚBICA UNITARIA}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2G \epsilon_{yy} \quad \tau_{xz} = 2G \epsilon_{xz}$$

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} : \text{MODULO DE YOUNG}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2G \epsilon_{zz} \quad \tau_{yz} = 2G \epsilon_{yz}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} : \text{COEFICIENTE DE POISSON}$$

• ECUACIONES DE HOOKE:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xz}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}$$

- DEFORMACIONES Y TENSIONES DE ORIGEN TERMICO:

• DEFORMACIÓN UNITARIA TERMICA:  $\epsilon^T = \alpha \Delta T$

- EXPANSIÓN/CONTRACCIÓN PURA:  $\epsilon_{xx}^T = \epsilon_{yy}^T = \epsilon_{zz}^T = \alpha \Delta T$

$$\epsilon_{xy}^T = \epsilon_{xz}^T = \epsilon_{yz}^T = 0$$

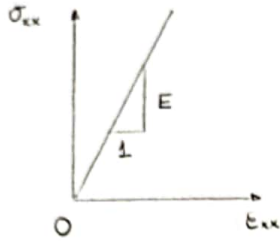
- COEFICIENTE DE DILATACIÓN LINEAL ( $\alpha$ )

- PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN:

• [DEF]: EL ESTADO DE EQUILIBRIO DEBIDO A VARIAS ACCIONES EXTERIORES ES IGUAL A LA SUPERPOSICIÓN DE LAS SOLUCIONES QUE CORRESPONDEN A CADA ACCIÓN EXTERIOR ACTUANDO INDEPENDIENTEMENTE.

- CONSTANTES ELASTICAS

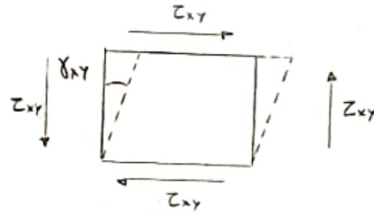
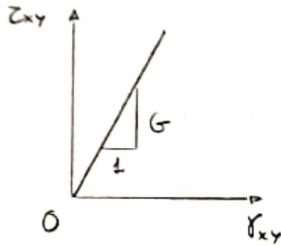
• ENSAYO DE TRACCIÓN:



•  $E = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}}$  : MODULO DE ELASTICIDAD A LA TRACCIÓN (YOUNG)

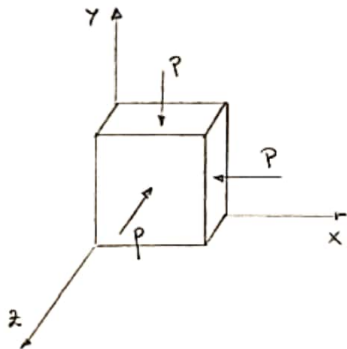
•  $\nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = -\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}}$  : CONTRACCIÓN TRASVERSAL (POISSON)

• CORTADURA PURA:



•  $G = \frac{\tau_{xy}}{2\epsilon_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}$  : MODULO DE ELASTICIDAD A LA TORSIÓN

• ESTADO HIDROSTATICO:



$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P \\ \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

$\nu \leq 0,5$

•  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{(1-2\nu)}{E} P$

•  $e = -\frac{3(1-2\nu)}{E} P$

•  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  : MODULO DE ELASTICIDAD VOLUMETRICO

•  $e = -\frac{P}{K}$

TEMA 5: PROBLEMA ELASTICO ELASTICIDAD PLANA.

- ESTADO DE DEFORMACIÓN PLANA:

• [DEFJ]: EN UNA DIRECCIÓN; GEOMETRIA Y CARGA NO VARIAN.

$\epsilon_{zz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{yz} = 0 \iff \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \iff \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$

• [REPRES.]:

$[D_{ij}] = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [T_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

• [N PRINCIPL]:

$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$  [PLANO]       $\sigma_3 = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  [EJE Z]



- ESTADO TENSIONAL PLANO :

• [DEF]: TENSIONES INDEPENDIENTES DEL TERCER EJE.

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

• [REPRES]:

$$[T_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [D_{ij}] = \begin{pmatrix} E_{xx} & E_{xy} & 0 \\ E_{xy} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & E_{zz} \end{pmatrix}$$

• [EN PRINCIP]:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad [\text{PLANO}] \quad \sigma_3 = 0 \quad [\text{EJE Z}]$$

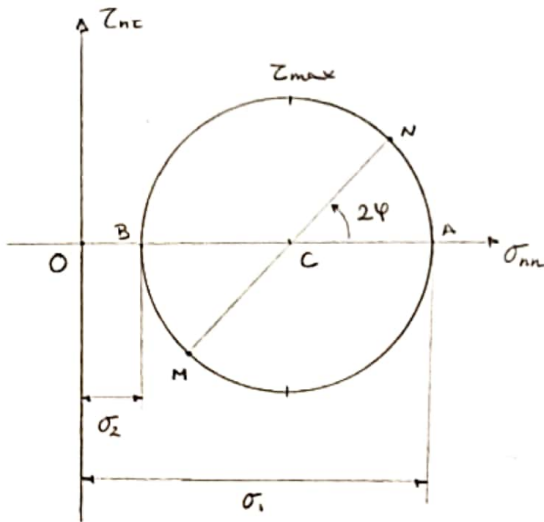
• [COMP. INTRINSECAS]:

$$\sigma_{nn} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\psi \quad \tau_{nt} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\psi$$

• [CIRCULO DE MOHR]:

- Z SIGNO: HACE GIRAR EL ELEMENTO DE FORMA HORARIA  $\odot \oplus$   
 " " " " " " ANTIHORARIA  $\ominus \ominus$

- Z max: SIEMPRE ES IGUAL AL RADIO (r) DEL CIRCULO DE MAYOR DIAMETRO.



$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$OC = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

$$\tan 2\psi = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2}$$

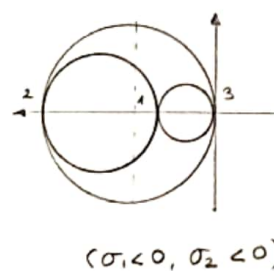
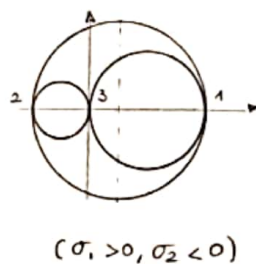
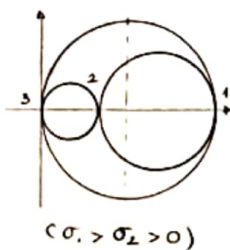
$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2}$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_1 + \sigma_2 = k_1 \cdot l$$

$$\tau_{max} = r$$

- DIAGRAMA GENERAL:

• [DEF]: 3 PLANOS (TENSION PLANA:  $\sigma_3 = 0$ )



- ESTADO DE TENSION Y DEFORMACION PLANA:  $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy}$  (CASO PARTICULAR)

# TEMA 6: TEORIAS DE FALLO

- INTRO: TEORIAS DE FALLO ESTATICO

- FALLO POR DEFORMACION PLASTICA (DUCTILES, FLUENCIA PLASTICA)
- FALLO POR ROTURA (FRAGILES)

• TENSION EQUIVALENTE ( $\sigma_{eq}$ ):

- [DEFJ]: LA TENSION QUE EN UN ESTADO UNIAXIAL PROPORCIONARIA LA MISMA RESISTENCIA QUE EL ESTADO MULTIAXIAL QUE SE ESTA CONSIDERANDO.  $\sigma_{eq} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

- RANKINE:

• TENSION NORMAL MAXIMA:  $\sigma_{max} = \sigma_f$

• [DEFJ]: NO FALLO

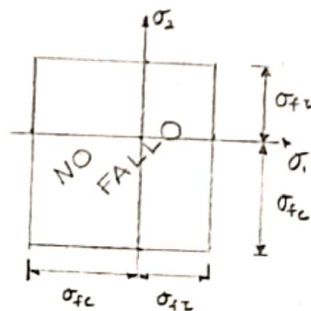
$$\sigma_{eq} < \sigma_{ft} \quad (\text{TRACCION})$$

$$|\sigma_{eq}| < \sigma_{fc} \quad (\text{COMPRESION})$$

• TEORIA PARA MATERIALES FRAGILES, YA QUE NO CAPTA BIEN EL COMIENZO DE AFLUENCIA PLASTICA.

• EQUIRESISTENTE:

$$\sigma_{fc} = \sigma_{ft}$$



- SAINT-VENANT:

• DEFORMACION LONGITUDINAL UNITARIA MAXIMA:  $\epsilon_{max} = \frac{\sigma_f}{E}$

• [DEFJ]: NO FALLO

$$\epsilon_{eq} \cdot E < \sigma_{ft} \quad (\text{TRACCION})$$

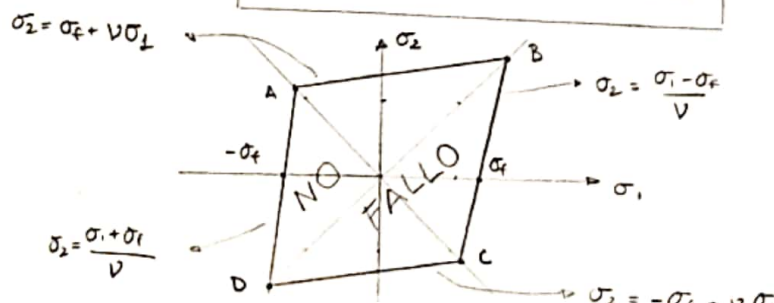
$$|-\epsilon_{eq} \cdot E| < \sigma_{fc} \quad (\text{COMPRESION})$$

A  $(\frac{\sigma_2}{1+\nu}, \frac{\sigma_1}{1+\nu})$

B  $(\frac{\sigma_2}{1-\nu}, \frac{\sigma_1}{1-\nu})$

C  $(\frac{\sigma_2}{1+\nu}, -\frac{\sigma_1}{1+\nu})$

D  $(-\frac{\sigma_2}{1-\nu}, -\frac{\sigma_1}{1-\nu})$



- TRESCA :

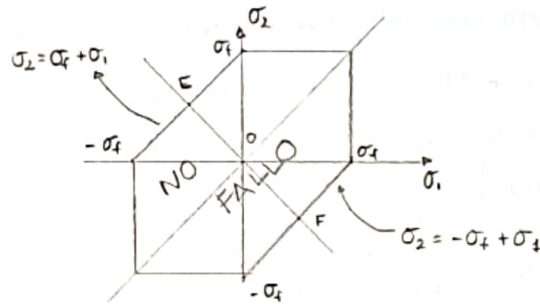
• TENSIÓN TANGENCIAL MÁXIMA:  $\tau_{max} = \frac{\sigma_f}{2}$

• [DEF]: NO FALLO

$$\tau_{eq} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} < \frac{\sigma_f}{2}$$

•  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \neq f(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) \rightarrow$  TRESCA = TRESCA'

• MATERIALES DUCTILES SOBRETUDO



• EF DIAGONAL DE CORTADURA

$\sigma_1 = -\sigma_2$  CORTADURA PURA

- BELTRAMI Y HAIGH :

• ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ABSORBIDA POR UNIDAD DE VOLUMEN:

$$U_0 = \frac{\sigma_f^2}{2E}$$

• [DEF]: NO FALLO

$$U_0 = \frac{\sigma_{ij} \epsilon_{ij}}{2} < \frac{\sigma_f^2}{2E}$$

• MATERIALES NO-ISOTROPOS

- VON MISES :

• ENERGÍA DE DISTORSIÓN ABSORBIDA POR UNIDAD DE VOLUMEN:

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_f^2$$

• TENSIÓN TANGENCIAL OCTAEDRICA:  $\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f$

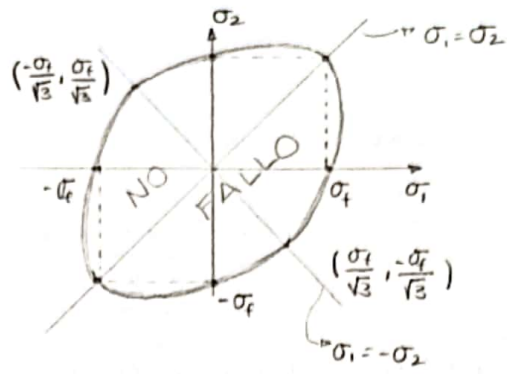
• [DEF]: NO FALLO

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} < \sigma_f$$

$$[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2]^{1/2} < \sigma_f \quad (\sigma_3 = 0)$$

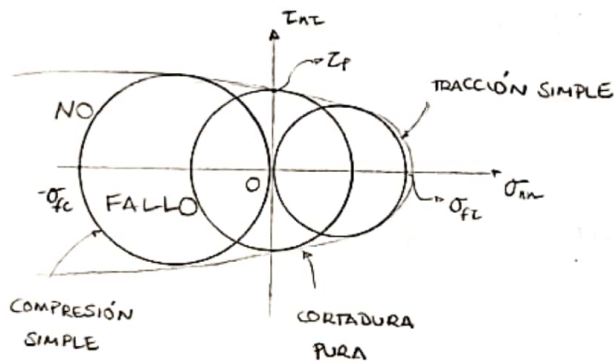
$$[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2]^{1/2} < \sigma_f \quad (\sigma_3 = 0)$$

•  $U_d = U_0 - U_0$  (DEFORMACIÓN TOTAL - DILATACIÓN PURA)

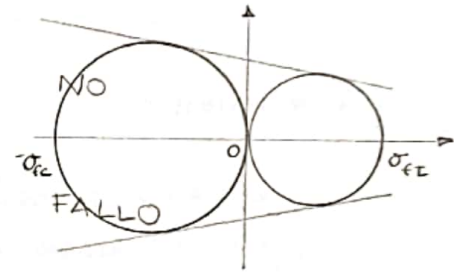


- MOHR :

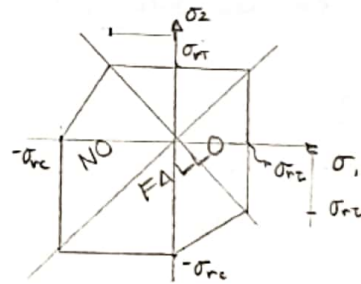
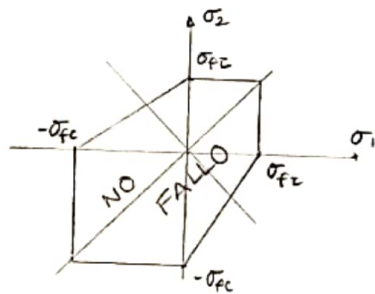
- DESARROLLADA A PARTIR DE TODAS LAS ANTERIORES.
- CURVA INTRINSECA: CURVA ENVOLVENTE DEL LOS MAYORES CIRCULOS DE MOHR CORRESPONDIENTES A LOS INSTANTES EN LOS QUE SE PRODUCEN LOS FALLOS.



CASO DUCTIL



CASO FRAGIL



- SELECCIÓN DE TEORÍAS :

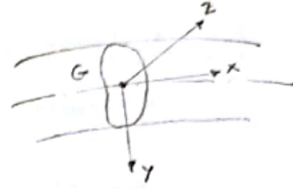
- NO-EQUIRRESISTENTES ( $\sigma_{fC} \neq \sigma_{fT}$ ) : MOHR
- EQUIRRESISTENTES ( $\sigma_{fC} = \sigma_{fT}$ ) :
  - FALLO POR ROTURA (FRAGILES) : RANKINE
  - FALLO POR DEFORMACIÓN (DUCTILES) :
    - VON MISES
    - TRESCA (MÁS CONSERVADORA)

# TEMA 7: INTRO A LA RESISTENCIA

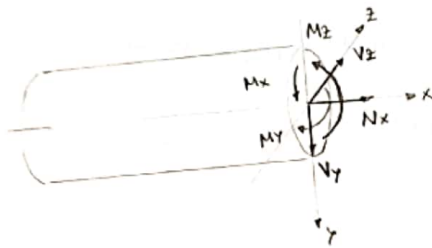
## - PIEZA PRISMÁTICA: ESFUERZOS Y TENSIONES, NAVIER

• PIEZA PRISMÁTICA:

• [EDEF]: VOLUMEN ENGENDRADO POR UNA SUPERFICIE PLANA AL MOVERSE A LO LARGO DEL EJE O DIRECTRIZ DE LA PIEZA.



• ESFUERZOS:



$$N_x = \int \sigma_{xx} dA \quad \text{CARGA AXIAL}$$

$$V_y = \int \tau_{xy} dA$$

$$V_z = \int \tau_{xz} dA$$

} ESFUERZOS CORTANTES

$$M_x = \int (z_{xy} y - z_{xy} z) dA \quad \text{MOMENTO TORSOR}$$

$$M_y = \int \sigma_{xx} z dA$$

$$M_z = \int \sigma_{xx} y dA$$

} MOMENTOS FLECTORES

• NAVIER:

• [EDEF]: SECCIONES PLANAS Y NORMALES AL EJE GEOMETRICO DE LA BARRA ANTES DE LA DEFORMACIÓN, PERMANECEN IGUAL DESPUES DE LA DEFORMACIÓN.

## - ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS:

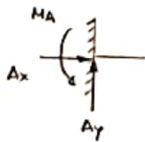
• GRADO DE HIPERESTÁTICIDAD:

$$\text{REACCIONES - ECUACIONES (N=3)} = r$$

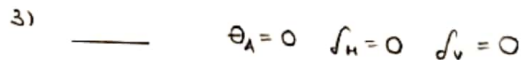
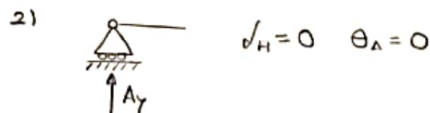
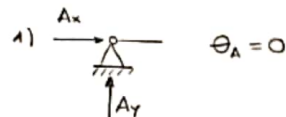
$r=0$  ISOSTÁTICO

$r < 0$  HIPERESTÁTICO

• RESOLUCIÓN:

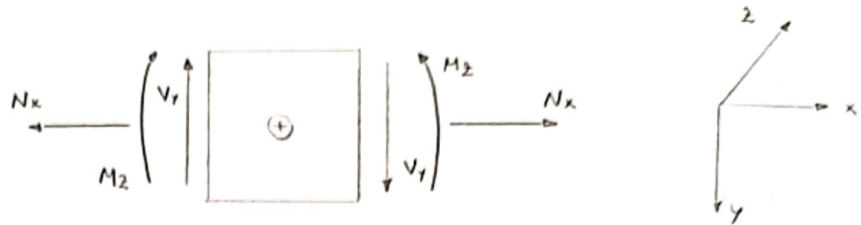


⇔



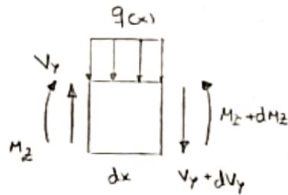
- DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

• POSITIVIDAD:



- 1) CARGAS VERTICALES HACIA ABAJO ⊕
- 2) MOMENTOS EXTERIORES HORARIOS ⊕

- ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQ. PARA PIEZAS PRISMATICAS



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y - (V_y + dV_y) - q(x)dx = 0 \rightarrow \frac{dV_y}{dx} = -q$$

$$\sum M_o = 0 \rightarrow M_2 + V_y dx - q(x)dx \frac{dx}{2} - (M_2 + dM_2) = 0 \rightarrow \frac{dM_2}{dx} = V_y$$

1) q = kx :  $V_y$  LINEAL (x)     $M_2$  CUADRATICO (x<sup>2</sup>)

2) q = 0 :  $V_y$  KTE (n)     $M_2$  LINEAL (x)

3) q PUNTUAL :  $V_y$  SALTO  $\equiv$  q     $M_2$  VERTICE

4)  $V_y = 0 \iff M_2 \equiv$  (MAX O MIN)     $V_y$ :  $\oplus \rightarrow \ominus$  : MAX ;  $\ominus \rightarrow \oplus$  : MIN ;  $M_2$

5) APOYO EXTREMO  $M_{EXT} = 0 \iff M_2 = 0$

6) GRAFICA  $M_2$  : CONTINUA: DERIVABLE:

- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

- 1) DIBUJAR LAS REACCIONES
- 2) CORTE NECESARIOS EN LA VIGA:
  - a) ZIG Y DECH DE  $F_{EXT}$ , INCLUIDAS  $R_{APOYOS}$
  - b) IZQ Y DECH. DE  $M_{EXT}$ , INCLUIDOS  $M_{EMPOTRA}$
  - c) INTERIOR DE  $q(x)$  DIFERENTE
  - d)  $q(x)$  TRIANGULARES, CORTE EN CADA  $\triangleleft$
  - e) ENTRE 2  $q_i(x)$ , HAY UNA ZONA SIN  $q(x)$ , CORTE EN LA ZONA NULA.
  - f) CORTE EN LA SEPARACIÓN DE  $q(x)$  Y  $q$  (PIO)
- 3) CALCULAR LAS REACCIONES MEDIANTE LAS ECUACIONES DE LA ESTÁTICA
- 4) ESTUDIO ANALITICO, GRAFICOS. CALCULA VALOS DE ESFUERZOS INTERNOS

- ROTULAS INTERMEDIAS :

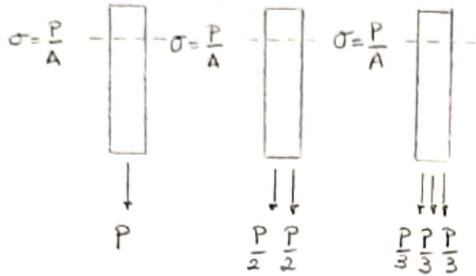
$M_{ROT} = 0$

$\sum H = 0$  EN LA ROT.

$\nu$  (GRUPO DE HIPERESTATICIDAD)  $\equiv$  N ROTULAS

[PROBLEMA RESOLUBLE]

- SAINT-VENANT



$\sigma = k/r$

- COEFICIENTE DE SEGURIDAD

PRESIÓN ADMISIBLE:  $\sigma_{admis} = \frac{\sigma_{lim}}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots, k$ )

- EROSION
- AMBIENTE
- ...

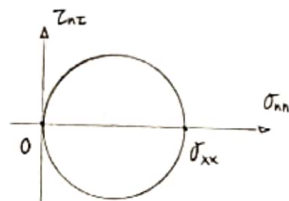
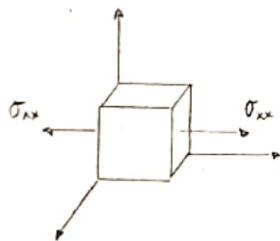
$\sigma_{lim} =$  DUCTIL :  $\sigma_F$   
FRAGIL :  $\sigma_R$

$n \leq \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{admis}}$

TEMA 8 : ESFUERZO AXIAL SIMPLE

[DEF]: CUANDO LOS ESFUERZOS RESULTANTES EN CUALQUIER SECCIÓN TRANSVERSAL SE REDUCEN EXCLUSIVAMENTE A UN ESFUERZO NORMAL  $N_x$ .

- ESTADO TENSIONAL EN TRACCIÓN O COMPRESIÓN SIMPLE:



$\sigma_1 = \sigma_{xx} = \frac{N_x}{A}$

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

- DEFORMACIÓN EN TRACCIÓN O COMPRESIÓN SIMPLE.

[CARACTERÍSTICAS]:  $\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$   $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$   $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{xz} = 0$

- ALARGAMIENTO:  $\delta_x = \frac{N_x L_x}{EA}$  [APLICABLE:  $N_x = kx$ ;  $E = k/r$ ;  $AS = k/rL$ ]

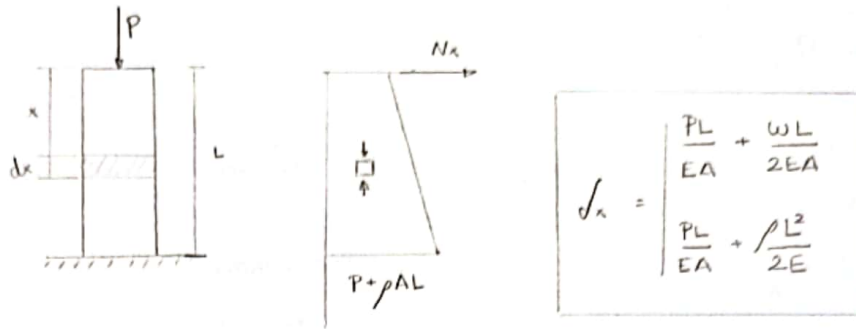
- FLEXIBILIDAD:  $f = \frac{L}{EA}$  [DESPLAZAMIENTO ORIGINADO POR UNA CARGA UNIDAD]

- RIGIDEZ:  $K = \frac{EA}{L}$  [FUERZA NECESARIA PARA PRODUCIR UN ALARGAMIENTO UNIDAD]

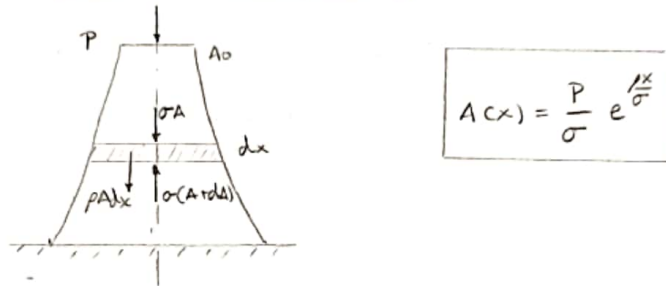
- SOLIDO IRREGULAR:  $\delta_x = \sum \delta_{xi} = \sum \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$

$f = \frac{1}{K}$

- INFLUENCIA DEL PROPIO PESO :



$\sigma = \sigma_{adm}$  EN CUALQUIER A



- SISTEMAS HIPERESTATICOS :

- 0) HACER LA SUPOSICIÓN QUE QUERAMOS
- 1) ECUACIONES DE EQUILIBRIO.
- 2) COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIÓN.

EN LOS EJERCICIOS EN DONDE EXISTEN VARIAS BARRAS UNIDAS, ROMPEMOS LA UNIÓN, LA QUE LE PERMITE A LA BARRA ALARGARSE O ACORTARSE EN SU DIRECCIÓN ORIGINAL. POSTERIORMENTE, CON UNA PERPENDICULAR A LA DEFORMACIÓN DE CADA BARRA, LLEGAMOS AL PUNTO FINAL SUPUESTO DONDE LAS BARRAS VUELVEN A QUEDAR UNIDAS. EN LA FIGURA QUE SE FORMA TENDREMOS QUE PLANTEAR LA COMP. DE DEFOR.

3) LEYES DE COMPORTAMIENTO. (✓)

- TENSIONES INICIALES Y TENSIONES TERMICAS

TENSIONES INICIALES: [CDEFJ]: APARECEN EN LOS ELEMENTOS DE LA ESTRUCTURA ANTES DE APLICAR LAS CARGAS. PUEDEN SER BUSCADAS O POR ERROR. (HORMIGON PRETENSADO)

TENSIONES TERMICAS: [CDEFJ]: TIENEN SU ORIGEN EN UNA VARIACION DE TEMPERATURA.

ALARGAMIENTO:  $\int \epsilon = \alpha L \Delta T$



# TEMA 9: TEORÍA GENERAL DE LA FLEXIÓN. TENSIONES

## - FLEXIÓN DEFINICIÓN:

- FLEXIÓN PURA:  $M_2 \neq 0, V_y = 0, N_x = 0$
- FLEXIÓN SIMPLE:  $M_2 \neq 0, V_y \neq 0, N_x = 0$
- FLEXIÓN COMPUESTA:  $M_2 \neq 0, N_x \neq 0$

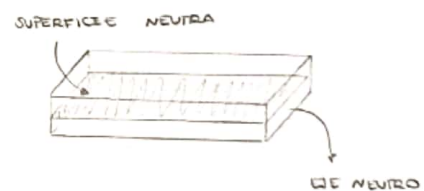
## - FLEXIÓN PURA EN BARRAS PRISMÁTICAS. LEY DE NAVIER.

• [DEF]:  $M_2 = KI$

- HIPÓTESIS DE CÁLCULO:
- a) VIGA RECTA SIMÉTRICA
  - b) MATERIAL HOMOGÉNEO, ISÓTROPICO Y ELÁSTICO LINEAL
  - c) SECCIONES TRANSVERSALES PERMANECEN PLANAS Y PERPENDICULARES A LA DIRECTRIZ.
  - d) PEQUEÑAS DEFORMACIONES

### • LÍNEA NEUTRA:

• [DEF]: FIBRA QUE NO EXPERIMENTA VARIACIÓN DE LONGITUD ALGUNA, POR TANTO, NO ESTÁ SOMETIDA A NINGUNA TENSION; FIBRA NEUTRA. SUPERFICIE ENGENDRADA POR LAS FIBRAS; SUPERFICIE NEUTRA. LA INTERSECCIÓN ENTRE SUPERFICIE NEUTRA Y SECCIÓN TRANSVERSAL; LÍNEA NEUTRA.



• [E]: PROPORCIONAL A LA DISTANCIA A LA FIBRA NEUTRA ( $y$ ):

$$\epsilon_{xx} = \frac{y}{\rho} \equiv k \cdot y \quad ; \quad \sigma_{xx} = \frac{E y}{\rho} \equiv E k \cdot y \quad ; \quad k \text{ CURVATURA}$$

$\rho$  RADIO DE CURV.

-  $y > 0$  TRACCIÓN (ALARG.)

-  $y < 0$  COMPRESIÓN (ACORT.)

### • LEY DE NAVIER:

• [DEF]: DISTRIBUCIÓN  $\sigma_{xx}$  RESPECTO  $M_2$  EN UNA SECCIÓN DE VIGA.

$$\sigma_{xx} = \frac{M_2 y}{I_2}$$

- FALTA DE SIMETRÍA; SE CUMPLE NAVIER TAMBIÉN SI EL EJE Y ES PRINCIPAL DE INERCIA DE LA SECCIÓN.

### TENSIÓN MÁXIMA:

- [DEF]: SE PRODUCE EN LOS PUNTOS DE LA SECCIÓN MÁS DISTANTES DEL EJE NEUTRO. ( $y_{max}$ )

TENSIÓN MÁXIMA  $\sigma_{xx_{max}} = \frac{M_z y_{max}}{I_z} = \frac{M_z}{W_z}$  | MÓDULO RESISTENTE  $W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$

- $W_z_{max}$ :  $I_z \uparrow \Leftrightarrow$  A PÍO MÁS LEJANO POSIBLE

ADB: MAYOR RENDIMIENTO GEOMÉTRICO

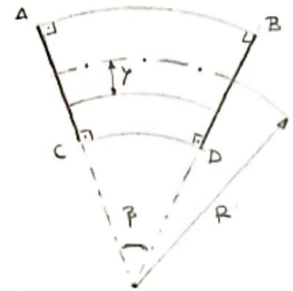


### DEFORMACIONES TRANSVERSALES. ANTICLÁSTICA.

- $\epsilon_{zz} = \epsilon_{yy} = -v \frac{y}{\rho}$  (DESPRECIABLES)

- CURVA TRANSVERSAL: ANTICLÁSTICA

$$-\epsilon_{zz} = -v \frac{y}{\rho} = -\frac{y}{R} \quad [R = \frac{\rho}{v}]$$



### FLEXIÓN SIMPLE. FÓRMULA DE COLIGNON.

- [DEFJ]:  $M_z \neq 0, V_y \neq 0, N_x = 0$

- TENSIONES NORMALES:  $\sigma_{xx} = \frac{M_z \cdot y}{I_z}$  (LEY DE NAVIER)

- TENSIONES TANGENCIALES:

- HIPÓTESIS:

a)  $z \parallel V_y$

b) DISTRIBUCIÓN LINEAL EN b



$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{b I_z} \quad (\text{FÓRMULA DE COLIGNON})$$

- TENSIÓN MÍNIMA:  $\tau_{min} = 0$  EXTREMOS SECCIÓN ( $y_{max}$ )

## - TENSIONES PRINCIPALES EN FLEXIÓN SIMPLE

	MAX	MIN
$\sigma_{xx}$	$y_{max}$	L.N.
$Z_{xy}$	L.N.	$y_{max}$

• COMPROVAR LIMITE DE ADMISIÓN:

a) DE FORMA INDEPENDIENTE:

$$\sigma_{xx \max} \leq \sigma_{adm}$$

$$Z_{xy \max} \leq Z_{adm}$$

b) DE FORMA COMBINADA:

• TENSIONES PRINCIPALES  $\rightarrow$  MOHR  $\rightarrow$  T. FALLO

• CASO DOBLE T:



MÁS DESFAVORABLE

## TEMA 10: TEORIA GENERAL DE LA FLEXIÓN. DEFORMACIÓN

- INTRO:

• CURVA ELÁSTICA: REPRESENTA EL EJE DE LA PIEZA PRISMÁTICA EN LA CONFIGURACIÓN DEFORMADA

• FLECHA: DESPLAZAMIENTO TRANSVERSAL DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE LA SECCIÓN

• PENDIENTE O GIRO: GIRO QUE EXPERIMENTA LA SECCIÓN EN LA DEFORMACIÓN. ANGULO FORMADO POR LA  $T_{\theta}$  A LA CURVA Y EL EJE X.

- CURVA ELÁSTICA:

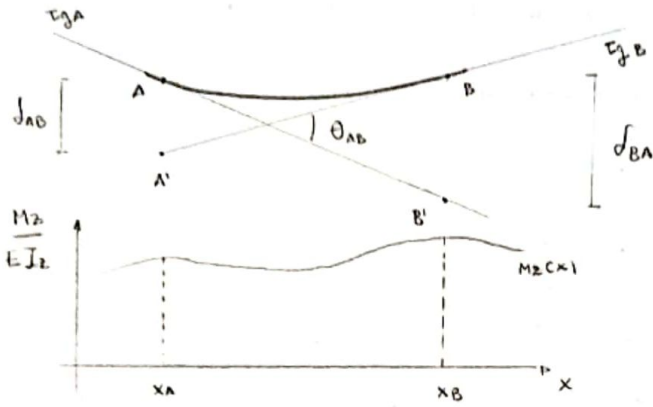
• ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA CURVA ELÁSTICA:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_z}{EI_z}$$

1) INTEGRACIÓN:  $\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1 = \frac{P}{EZ_2} (Lx - \frac{x^2}{2})$

2) INTEGRACIÓN:  $y = \int \left[ \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1 \right] dx + C_2 = \frac{P}{EI_z} \left( \frac{Lx^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right)$

- METODO DEL AREA DE MOMENTOS, TMA-S DE MOHR



1) TMA DE MOHR [x=L]

$$\theta_{AB} = \theta_B - \theta_A = \frac{PL^2}{2EI_2} \quad \left[ \theta_{AB} = \frac{1}{EI_2} \int_{x_A}^{x_B} M_2 dx \right]$$

2) TMA DE MOHR [x=L]

$$\delta_{AB} = \frac{PL^3}{3EI_2} \quad \left[ \delta_{AB} = \frac{1}{EI_2} \int_{x_A}^{x_B} M_2 (x - x_A) dx \right]$$

↑  
PRO ELASTICA

↑  
PRO TANGENTE