Probabilitateen kalkulua

5. gaia

Momentuak:

Definizioa

Def:

I.b. X z.a. non $\mu = EX < \infty$ den. Orduan X z.a.-ren <u>bariantza</u> X-ren 2 ordeneko momentu zentratua da, hau da,

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

$Var(X) = \sigma^2$ bezala adieraziko dugu

Def:

I.b. X z.a. non $\mu = EX < \infty$ den. Orduan, X z.a.-ren <u>desbideratze estandarra</u> bariantzaren erro karratu positiboa da, hau da,

$$DE(X) = \sqrt{Var(X)} = \sigma$$

Oharrak:

Bariantzaren oharrak:

① Bariantza X-ren unitate karratuetan neurtzen da, desbideratze estandarra ordea X-ren unitate berdinetan

② X-ren bariantzak, X-k itxarotako balioarekiko dauzkan itxarotako desbideratze karratua neurtzen du

③ X aldagaiaren bariantza, beraren n balioetako laginaren bariantzaren limitetzat har daiteke ($n \to \infty$)

2025/3/24 17:38

Demagun X z.a. direla non $\mu = E[X] < \infty$ den. Orduan, ondoko propietateak betetzen dira:

① $\text{Var}(X) \geq 0$

② $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

③ $E(X^2) \geq (E(X))^2$

④ $\text{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow X = k$ (k tea)

⑤ $\text{Var}(kX) = k^2 \text{Var}(X) \quad \forall k \in \mathbb{R}$.

⑥ $\text{Var}(X+k) = \text{Var}(X) \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Zorizko aldagai diskretuen bariantzaren adibideak

① $X = k$ (k tea) $\Rightarrow \text{Var}(X) = 0$

② X: Bin $(1, p)$ p Parametroko Bernoulliren banaketa

$$\text{Var}(X) = pq$$

③ X: Bin (n, p) p parametroko banaketa binomiala

$$\text{Var}(X) = npq$$

④ X: $U(x_1, \dots, x_n)$ n puntutan uniformea

$$\text{Var}(X) = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n^2}$$

⑤ X: p parametroko banaketa geometrikoa $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

⑥ X: BN(n, p) $p \in (0,1) \Rightarrow \text{Var}(X) = \frac{nq}{p^2}$

⑦ X: $p(\lambda)$ non $\lambda > 0 \Rightarrow \text{Var}(X) = \lambda$

2025/3/24 17:38

Zoriztko aldagai jarraituen bariantzaren adibideak

① $X: U(a,b) \Rightarrow Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

② $X: \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

③ $X: N(0,1) \Rightarrow Var(X) = 1$

④ $X: N(a,b) \Rightarrow Var(X) = b^2$

⑤ $X: I^1(a,h) \Rightarrow Var(X) = \frac{h}{a^2}$

⑥ $X: B(p,q) \Rightarrow Var(X) = \frac{p \cdot q}{(p+q)^2 (p+q+1)}$

⑦ $X: \chi_n^2 \Rightarrow Var(X) = 2n$

⑧ $X: t_n \Rightarrow Var(X) = \frac{n}{n-2} \quad (n>2)$

Kobarianza eta korrelazioa

Def:

I.b. X eta Y z.a., non $E X < \infty$ eta $E Y < \infty$ diren. Orduan, X eta Y-ren arteko kobarianza ondoko erara definitzen da:

$$Cov(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

Def:

I.b. X eta Y z.a., non $E X < \infty$ eta $E Y < \infty$ eta $0 < Var(X) < \infty$ eta $0 < Var(Y) < \infty$ diren. Orduan, X eta Y-ren arteko korrelazio linealaren koefizientea ondoko erara definitzen da:

$$\rho_{XY} = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}}$$

2025/3/24 17:38

Oharrak:

- X eta Y z.a. korrelazio gabeak dira beraien arteko kobariantza zero denean
- X eta Y-ren arteko korrelazio linealaren koefizientea, beraien n balio etako laginaren korrelazio linealaren koefizientearen (r_{XY}) limitetzat har daiteke ($n \to \infty$)

Propietateak:

- $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- X eta Y korrelazio gabeak $\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y) \Leftrightarrow \rho_{XY}=0$
- X eta Y askeak $\Rightarrow$ X eta Y korrelazio gabeak
- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$. Ondorioz:
  - $X_1, \dots, X_n$ z.a. izanda:
    $$Var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j)$$
  - $X_1, \dots, X_n$ z.a. askeak izanda
    $$Var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$
- $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y)$
- $|\rho_{XY}| \le 1$

2025/3/24 17:39

Aldagaien estandarizazioa:

Def:

I.6. X zorizko aldagaia, non $EX < \infty$ eta $0 < Var(X) < \infty$ diren. Orduan, X-ren aldagai estandarizatua edo tipifikatua ondoko erara definitzen da:

$$X^* = \frac{X - \bar{t}X}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Propietateak:

- $X^* = 0$
- $Var(X^*) = 1$
- $\rho_{XY} = \rho_{X^*Y^*} = E(X^*Y^*)$
- $\rho_{XY} = 1 \Leftrightarrow X^* = Y^* \Leftrightarrow \exists a > 0$ eta $\exists b \in \mathbb{R}$: $Y = aX + b$
- $\rho_{XY} = -1 \Leftrightarrow X^* = -Y^* \Leftrightarrow \exists a < 0$ eta $\exists b \in \mathbb{R}$: $Y = aX + b$

2025/3/24 17:39