Probabilitateen kalkulua

4. gaia

Itxaropen matematikoa

Definizioa:

Def:

Demagun X zorizko aldagai diskretua dela non Irudi $(X) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Orduan, X-ren batezbestekoa edo itxaropen matematikoaren definizioa hauxe da:

$$EX = \sum_{i \geq 1} x_i P(X_i = x_i) = \sum_{i \geq 1} x_i f_X(x_i)$$

Serie hau finitua izateko ondoko baldintzetako bat bete behar du:

- $x_i \geq 0 \ \forall i$
- Seriea absolutuki konbergentea da. Hots $\sum_{i \geq 1} |x_i| P(X_i = x_i) < \infty$

Def:

Biz X f dentsitate funtzioa duen zorizko aldagai jarraitua. Orduan, X-ren batatezbestekoa edo itxaropen matematikoa ondokoa da:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx$$

suposatuz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) \, dx < \infty$ dela

Zorizko aldagai diskretuen itxaropenaren adibideak:

- $X \equiv k$ (konstantea)

$$EX = \sum_{i \geq 1} x_i P(X = x_i) = k \cdot 1 = k$$

- X: Bin $(1, p)$ p parametroko Bernoulliren banaketa:

$$EX = \sum_{i \geq 1} x_i P(X = x_i) = 1 \cdot P(X=1) + 0 \cdot P(X=1) = 1 \cdot p = p$$

- X: $U(x_1, \dots, x_n)$ (n puntutan uniformea)

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

2025/3/24 17:14

- $X: Bin(n,p)$

$$EX=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)=\sum_{k=1}^{n} k\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{n} k\cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} p^k q^{n-k}=n\cdot p\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{(k-1)!}p^{k-1}q^{n-k}=$$

$$=n\cdot p\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}=n\cdot p\cdot\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}p^l q^{(n-1-l)}=$$

$$=n\cdot p\cdot(p+q)^{n-1}=n\cdot p$$

- X: p parametroko banaketa geometrikoa

$$EX=\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p\,q^{k-1}=$$

$$=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1}=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=1/p$$

- $X: BN(n,p)$ $p\in(0,1)$

$$EX=\frac{nq}{p}$$

- $X: \mathcal{P}(\lambda)$ non $\lambda>0$

$$EX=\lambda$$

Zorizko aldagai jarraituen itxaropenaren adibideak

- $X: U(a,b)$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

- $X: \mathcal{E}(\lambda)$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda}$$

- $X: N(0,1)$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}=0$$

- $X: N(a,b)$
  $EX = a$
- $X: \Gamma(a,k)$ $a,k>0$
  $EX = \frac{k}{a}$
- $X: \beta(p,q)$ $p,q>0$
  $EX = \frac{p}{p+q}$
- $X: \chi_n^2$
  $X: \Gamma(1/2, n/2) \Rightarrow EX = \frac{n/2}{1/2} = n$
- $X: Cauchy(t_1)$
  EX ez da existitzen
- $X: t_n$ $n>1$
  $EX = 0$
- $X: F_{n_1,n_2}$
  $EX = \frac{n_2}{n_2-2}$ $n_2>2$

Zoritzko aldagai diskretu baten gaineko funtzioa:

Demagun $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pe-n definituriko z.a. diskretua, non $Irudi(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ eta $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio neurgarria diren. Orduan, $g(X)$-ren batezbestekoa edo itxaropen matematikoa hauxe da:

$$E(g(X)) = \sum_{i\geq 1} g(x_i) P(X=x_i) = \sum_{i\geq 1} g(x_i) f(x_i)$$

$\sum_{i\geq 1} |g(x_i)| P(X=x_i) < \infty$ dela suposatuz

2025/3/24 17:14

Zorizko aldagai jarraitu baten gaineko funtzioa

Demagun X $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e.-n definituriko z.a jarraitua, f bere dents. funtzioa eta $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio neurgarria izanik. Orduan $g(X)$-ren batezbestekoa edo itxaropen matematikoa hauxe da:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \, dx$$

baldin eta $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) < \infty$ betetzen bada

Funtzioen itxaropenaren adibideak

- $g(x) = x^k$ non $k \in \mathbb{N}$ eta $g(x) = |x|^\alpha$ non $\alpha \geq 0$
- X-ren jatorriarekiko k ordenako momentua
  $a_k = EX^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- X-ren jatorriarekiko α ordenako momentu absolutua
  $\beta_\alpha = E|X|^\alpha, \ \forall \alpha \geq 0$
- X-ren c-rekiko k ordenako momentua
  $E(X-c)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ eta $c \in \mathbb{R}$
- X-ren Batezbestekoarekiko k ordenako momentua
  $c = \mu = E(X) \Rightarrow E(X-\mu)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Zorizko aldagai diskretuen funtzioaren itxaropena

Demagun (X,Y) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e.-n definituriko z.b. diskretua, non $Irudi\,(X,Y) = \{(x_1,y_1), \dots, (x_n,y_n), \dots\}$ eta $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzio neurgarria diren. Orduan, $g(X,Y)$-ren batezbestekoa edo itxaropen matematikoa hauxe da:

$$E(g(X,Y)) = \sum_{j \geq 1} \sum_{i \geq 1} g(x_i, y_j) \, P((X,Y) = (x_i, y_j)) =$$

$$= \sum_{j \geq 1} \sum_{i \geq 1} g(x_i, y_j) \, f(x_i, y_j)$$

baldin eta $\sum_{j \geq 1} \sum_{i \geq 1} |g(x_i, y_j)| \cdot f(x_i, y_j) < \infty$ betetzea bada

2025/3/24 17:15

Hainbat zorizko aldagai jarraituen funtzioaren itxaropena

Demagun (X,Y) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ probabilitate espazioan definituriko zorizko bektore jarraitua, f bere baterako dentsitate funtzioa eta $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzio neurgarria izanik. Orduan $g(X,Y)$-ren batezbestekoa edo itxaropen matematikoa hau da:

$$E(g(X,Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$\iint_{\mathbb{R}^2} |g(x,y)|\, f(x,y)\, dx\, dy < \infty$ dela suposatuz

Zorizko aldagaien funtzioen adibideak:

- $E(X+Y)$ kalkulatzeko:
  - $X+Y$ diskretua bada:

    $$E(X+Y) = \sum_x \sum_y (x+y)\, P(X=x, Y=y)$$

  - $X+Y$ jarraitua bada:

    $$E(X+Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x+y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

  - Edozein kasutan:

    $$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

- $E(XY)$ kalkulatzeko:
  - XY diskretua bada:

    $$E(XY) = \sum_x \sum_y (xy)\, P(X=x, Y=y)$$

  - XY jarraitua bada:

    $$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} (xy)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

  - X eta Y askeak badira

    $$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

2025/3/24 17:15

Itxaropen matematikoaren propietateak:

1) I.b. X z.a. non $P(X \geq 0) = 1$. Orduan:

- $EX \geq 0$
- $EX = 0 \Leftrightarrow X = 0$

2) X z.a. non $EX < \infty$. Orduan $|EX| \leq E|X|$

3) X z.a. eta $k \in \mathbb{R}$. Orduan $E(kX) = k \cdot EX$

4) Chebyshev-Markov-en desberdintza: X z.a. non $EX^2 < \infty$. Orduan,

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{EX^2}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Orokorrean

$EX^2 < \infty$ eta $\alpha > 0$. Orduan

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{EX^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \quad \forall \varepsilon > 0$$

5) Demagun X eta Y z.a. direla non $EX < \infty$ eta $EY < \infty$. Orduan:

- $E(XY) < \infty$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

6) Demagun X eta Y aldagai askeak direla non $EX < \infty$ eta $EY < \infty$ diren. Orduan:

- $E(XY) < \infty$
- $E(XY) = E(X)E(Y)$

7) Cauchy-Schwartz-en desberdintza: Demagun X eta Y z.a. askeak direla non $EX < \infty$ eta $EY < \infty$ diren. Orduan:

$$E|XY| \leq (EX^2)^{1/2} \cdot (EY^2)^{1/2}$$

edo

$$(E|XY|)^2 \leq EX^2 \cdot EY^2$$

2025/3/24 17:15