Probabilitateen kalkulua

3. gaia

Zorizko bektoreak

Def.:

Demagun X eta Y $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p. e. -n definituriko z.a. direla. Orduan (X,Y) zorizko bektorea ondoko erara definitzen da:

$$\begin{aligned} (X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

Def:

I.b. (X,Y) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e.-n definituriko zorizko bektorea. Orduan, (X,Y)-ri elkarturiko gertaerak ondokoak dira:

$$((X,Y) \in B) = (X,Y)^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}^2$$

Teorema:

Demagun (X,Y) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e.-n definituriko zorizko bektorea dela. Orduan, $\forall B \in \mathcal{B}^2$: $(X,Y)^{-1}(B) = \{(X,Y) \in B\} \in \mathcal{F}$

Korolarioa:

Demagun (X,Y) zorizko bektorea eta g funtzio neurgarria ondoko erara definituta daukagula:

$$\begin{tikzcd} (\Omega, \mathcal{F}, P) \arrow[r, "(X,Y)"] \arrow[dr, "g(X,Y)"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Orduan, $g(X,Y)$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e-n definituriko z.a. da

Zorizko aldagai biren baterako banaketa

Def.:

z.b.

Demagun $(X,Y)(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e.-n definituriko zorizko bektorea dela. Orduan, (X,Y) zorizko bektorearen probabilitate-banaketa edo X eta Y aldagaien baterako probabilitate-banaketa, ondoko erara definitzen da:

$$P_{(X,Y)}: (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2) \longrightarrow [0,1]$$
$$B \longmapsto P_{(X,Y)}(B) = P(\{(X,Y) \in B\}) = P((X,Y)^{-1}(B))$$

P_X eta P_Y bazter probabilitate banaketa funtzioak deitzen dira

Teorema:

Demagun $(X,Y)(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e.-n definituriko z.b. dela. Orduan, $P_{(X,Y)}$ baterako probabilitate banaketa $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$ espazioan definituriko probabilitate-neurria da.

Ondorioak:

1. $P_{(X,Y)}$ baterako probabilitate-banaketa ezagutuz: $\forall A \in \mathcal{B}$:
$P_X(A) = P_{(X,Y)}(A \times \mathbb{R}) \qquad P_Y(A) = P_{(X,Y)}(\mathbb{R} \times A)$

2. P_X eta P_Y bazter probabilitate banaketak ezagutu arren, $P_{(X,Y)}$ baterako probabilitate-banaketa ezin da zehaztu.

Zorizko aldagai askeak

Def.:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e.-n definitutako $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zorizko aldagaien familia askea da, honi lotutako gertaera-familia askea baldin bada. Alegia, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zorizko aldagai askeak $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}: \{(X_n \in B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ askeak.

2025/3/24 16:34

Teorema:

Demagun $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e-n definituriko zorizko aldagai askeen familia eta $\{g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio neurgarrien familia direla. Orduan, $\{g_n(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ zorizko aldagai askeen familia da.

Teorema:

I.b. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e-n askeak diren ondoko X_{ij} zorizko aldagaiak eta g_i funtzio neurgarriak:

$$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1k_1}$$
$$X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2k_2}$$
$$\ldots$$
$$g_1 : \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}$$
$$g_2 : \mathbb{R}^{k_2} \to \mathbb{R}$$
$$\ldots$$

Orduan $g_1(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1k_1}), g_2(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2k_2}), \ldots$ zorizko aldagai askeak dira

Zorizko bektore diskretuak

Def:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e-n definitutako (X, Y) zorizko bektore diskretua da baldin eta Irudi (X,Y) multzo zenbakigarria bada, hau da,

$$\text{Irudi}(X,Y) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots\}$$

Orduan,

$(X = x_1, Y = y_1), (X = x_2, Y = y_2), \ldots, (X = x_n, Y = y_n), \ldots$

gertaera familiak Ω-ren partikela osatzen du

2025/3/24 16:34

Def.:
(X,Y) zoriko bektorearen probabilitate-legea ondoko erara definituriko aplikazioa da ($f_{(X,Y)} = P_{(X,Y)}$):

$$f(X,Y): \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$$
$$(x,y) \longmapsto f_{(X,Y)}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

Propietateak:

① $f_{(X,Y)}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \notin \text{Irudi}(X,Y)$

$f_{(X,Y)}(x,y) = P(X=x, Y=y) \quad \forall (x,y) \in \text{Irudi}(X,Y)$

② $\forall B \in \mathcal{B}$ ondokoa betetzen da:

$$P((X,Y) \in B) = P\Big(\bigcup_{(x_i,y_i)\in B} (X=x_i, Y=y_i)\Big) = \sum_{(x_i,y_i)\in B} P(X=x_i, Y=y_i) =$$
$$= \sum_{(x_i,y_i)\in B} f_{(X,Y)}(x_i,y_i)$$

③ Proiekzioak:

$\text{Irudi}(X) = \pi_1(\text{Irudi}(X,Y))$

$\text{Irudi}(Y) = \pi_2(\text{Irudi}(X,Y))$

$$\forall a \in \text{Irudi}(X) \quad f_X(a) = \sum_{y \in \text{Irudi}(Y)} f_{(X,Y)}(a,y)$$

$$\forall b \in \text{Irudi}(Y) \quad f_Y(b) = \sum_{x \in \text{Irudi}(X)} f_{(X,Y)}(x,b)$$

Teorema:
Demagun X eta Y $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ p.e-n definituriko aldagai diskretuak direla. Orduan,

X eta Y askeak dira $\iff f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$
$\forall x \in \text{Irudi}(X), \forall y \in \text{Irudi}(Y)$

2025/3/24 16:34

Zorizko bektore jarraituak

Def:

$(X,Y):(\Omega,F,P)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ zorizko bektorea absolutuki jarraitua (edo soilik jarraitua) da, baldin eta $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ funtzioa existitzen bada ondokoak betetzen direlarik:

① $f(x,y)\geq 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

② $P((X,Y)\in B)=\iint_B f(x,y)\,dx\,dy \quad \forall B\in\mathcal{B}^2$

$f(x,y)$ funtzioa, (X,Y) zorizko bektorearen dentsitate bidimentsionala edo X eta Y-ren bateranko dentsitate-funtzioa deitzen da. Batzutan $f_{(X,Y)}$ adierazten da

Propietateak

X eta Y-ren baterako dentsitate-funtzioak ondoko bi propietateak betetzen ditu:

① $f(x,y)\geq 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

② $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = P((X,Y)\in\mathbb{R}^2)=P(\Omega)=1$

Def:

I.b. (X,Y) $f_{(X,Y)}(x,y)$ dentsitate funtzioa duen zorizko bektore jarraitua. Orduan,

- X-ren dentsitate funtzioa: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ da
- Y-ren dentsitate funtzioa: $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$ da

f_X eta f_Y bazter dentsitate funtzioak dira.

Teorema

Demagun X eta Y $(\Omega,\mathcal{F},P)$ p.e-n definituriko z.a. jarraituak direla. Orduan,

X eta Y z.a askeak $\iff f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

2025/3/24 16:35

Zorizko aldagai jarraituen arteko baturaren banaketa

Teorema

Biz (X,Y) zorizko bektorea eta $f(x,y)$ bere dentsitate-funtzioa: Orduan, $Z=X+Y$ aldagaiaren dentsitate-funtzioa ondokoa da:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx \quad \left(\text{edo } f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy\right.$$

Korolarioa:

Bira X eta Y z.a. askeak eta $f_X(x)$ eta $f_Y(y)$ beraien dents. funtzioak hurrenez hurren. Orduan, X eta Y-ren baterako dents. funtzioa:

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ da, eta ondorioz, $Z=X+Y$-ren dents. funtzioa:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx$$

Korolarioa (orokorrean)

Bira $X_1, \dots, X_n$ z.a. jarraiki askeak non $X_1: \Gamma(a,k_1), \dots, X_n: \Gamma(a,k_n)$. Orduan,

$X_1+\dots+X_n = \Gamma(a, k_1+\dots+k_n)$

Zorizko bektoreen adibideak:

- Banaketa multinomiala

$$\boxed{X: M_n(n, p_1, \dots, p_r)}$$

$$P((X_1, \dots, X_r)=(x_1, \dots, x_r))=\frac{n!}{x_1!\cdot x_2!\cdot \dots \cdot x_r!}\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot \dots \cdot p_r^{x_r}$$

- Oharra

$X_i = Bin(n, p_i)$

- Aldagai anitzeko banaketa normala ($n=2$)

$$\boxed{(X,Y): N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\cdot \frac{(x-\mu_X)\cdot(y-\mu_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\right]}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}$ $\sigma_X, \sigma_Y > 0$ $|\rho| < 1$

- Oharrak:

$X: N(\mu_X, \sigma_X)$ eta $Y: N(\mu_Y, \sigma_Y)$

X eta Y askeak $\Rightarrow \rho = 0$

Zorizko aldagaien arteko erlazioak:

① Demagun, $Z_1, \dots, Z_n$ z.a. askeak non $Z_i: N(0,1)$ $\forall i = 1, \dots, n$. Orduan,

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 : \chi_n^2$$

② Demagun Z eta Y z.a. askeak non $Z: N(0,1)$ eta $Y: \chi_n^2$ diren. Orduan,

$$\frac{Z}{\sqrt{Y/n}} : t_n$$

③ Demagun X eta Y z.a. askeak non $X: \chi_{n_1}^2$ eta $Y: \chi_{n_2}^2$. Orduan,

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2} : F_{n_1, n_2}$$

- Oharra: $P(F_{n_1,n_2} < A) = P(F_{n_1,n_2} > 1/A)$

2025/3/24 16:35

④ Demagun, $X_1, \dots, X_n$ z.a. askeak non $X_i : \Gamma(a, k_i)$ $\forall i = 1, \dots, n$. Orduan,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i : \Gamma(a, k_1 + \dots + k_n)$$

⑤ Demagun, $X_1, \dots, X_n$ z.a. askeak direla non $X_i : P(\lambda_i)$ den. Orduan,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i : P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

2025/3/24 16:35