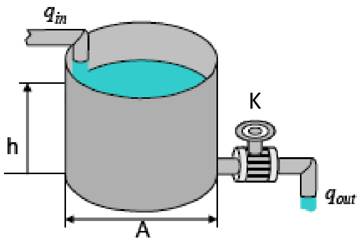
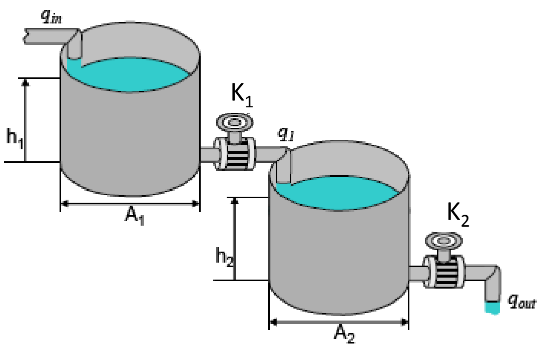
TEMA 2 MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS

1. Para obtener el modelo matemático del proceso de la figura, se utiliza el esquema de la derecha. Suponiendo que el flujo de descarga es laminar, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.



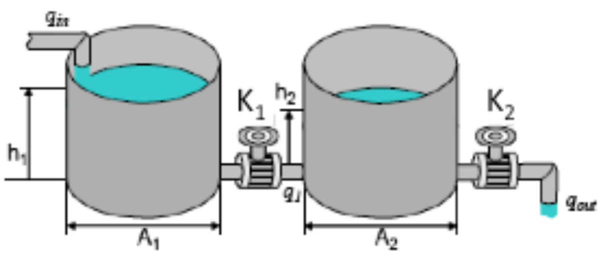
2. En la figura se representan dos depósitos cilíndricos de sección transversal constante situados verticalmente en serie, que descargan por gravedad. Al depósito superior entra un caudal $q_{in}(t)$, éste depósito superior descarga un caudal $q_1(t)$ sobre el inferior y éste a su vez descarga un caudal $q_{out}(t)$ en un depósito colector. El caudal de descarga depende del nivel alcanzado por el líquido en el depósito.



A. Obtener el modelo matemático que represente el comportamiento dinámico del proceso de la figura, suponiendo que el régimen es laminar. Suponiendo que se desea conocer la evolución del nivel del tanque 2 ante variaciones en el caudal de entrada, q_{in}, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.

B. Si el flujo de descarga es turbulento, la relación existente entre el caudal de descarga y el nivel en cada uno de los depósitos es no lineal. Obtener el modelo lineal aproximado en los alrededores de un punto nominal de operación.

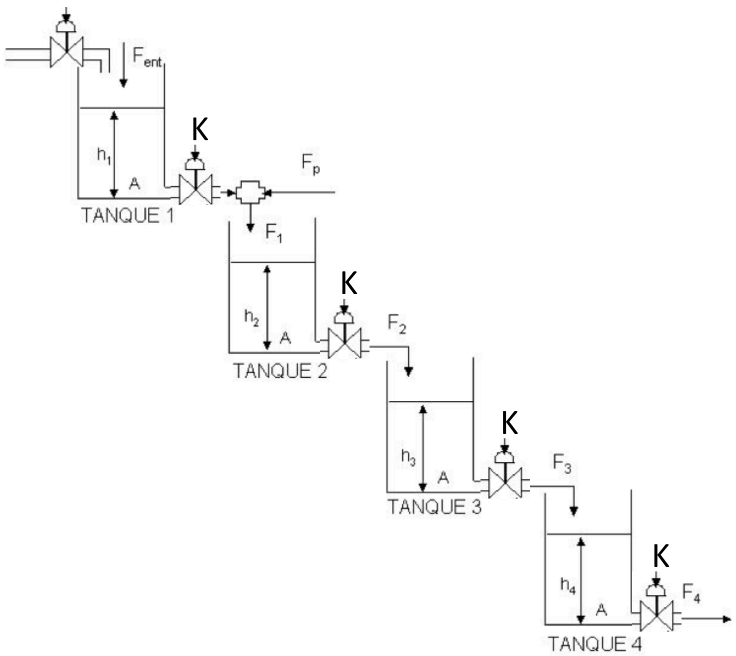
3. Sea el sistema de la figura, constituido por dos tanques conectados en serie.



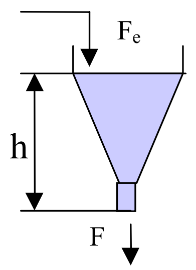
Se pide:

A. Obtener el modelo matemático del comportamiento dinámico del proceso.
B. Suponiendo que se desea conocer la evolución del nivel del tanque 2 ante variaciones en el caudal de entrada, q_{in}, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.
C. En este caso las dos capacidades interaccionan. Comparar los resultados con el ejercicio anterior.

4. Sea el proceso continuo de mezclado de la figura, compuesto por cuatro tanques situados a distinta altura, de tal forma que la salida del primer tanque alimenta al segundo, la del segundo al tercero y la del tercero al cuarto. El segundo tanque recoge además un caudal de líquido, F_P, procedente de otro proceso. Los tanques son idénticos, de área transversal A=1 m^2 y resistencia al flujo K. Las características del orificio de salida hacen que en el punto de operación correspondiente a un caudal nominal de 3 l/s, la altura que alcanza el nivel del líquido en el tanque 4 sea de 1 m. Hallar un modelo linealizado alrededor del punto de operación que relacione el caudal de salida del tanque 4 con respecto a las variables de entrada F_{ent} y F_p. Con objeto de controlar dicho caudal, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.



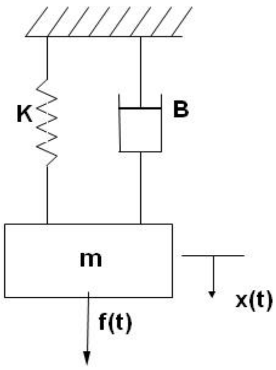
5. Sea el tanque cónico de la figura. Hallar el modelo dinámico linealizado alrededor del punto de operación (Fe_0,F_0,h_0). Nota: Considerar un régimen turbulento donde la relación entre el caudal y la altura es no lineal $F = K \cdot h^{1/2}$. El otro término no lineal lo introduce la geometría cónica $V = B \cdot h^3$. Con objeto de controlar el nivel del tanque, identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.



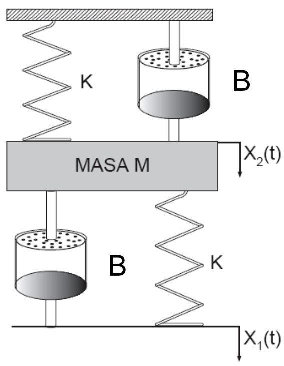
6. El sistema mecánico de la figura está formado por una masa m, un muelle cuya constante elástica es K y un amortiguador cuya constante de fricción viscosa es B.

A. Hallar el modelo matemático del sistema que relacione el desplazamiento x(t) de la masa m con la fuerza f(t) que se aplica sobre ella.

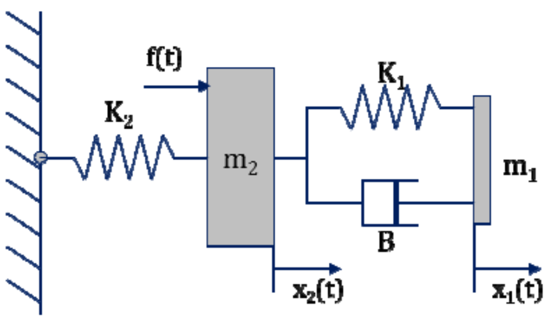
B. Partiendo del modelo obtenido, encontrar el desplazamiento x(t) cuando la fuerza que se le aplica f(t) es 3N, y los valores de los parámetros del sistema son los siguientes: masa m=0.1Kg; constante elástica del muelle K= 4N/m y la constante de fricción viscosa B=0,4 N/m/s



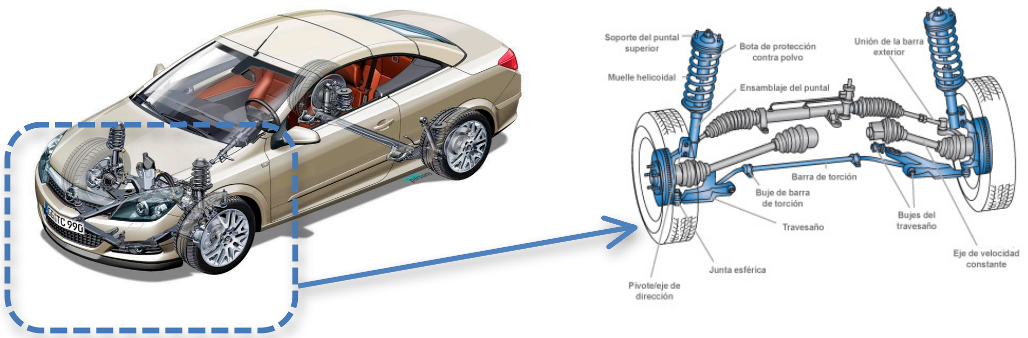
7. Dado el sistema mecánico de la figura, hallar el modelo matemático que relacione el desplazamiento $X_2(t)$ de la masa M con respecto al desplazamiento $X_1(t)$.



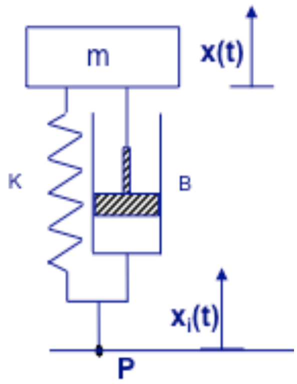
8. El sistema de la figura representa un absorbedor de energía. La masa m_1 es relativamente pequeña y está unida a la masa principal m_2 a través de un muelle de constante k_1 y un amortiguador de constante B, con objeto de reducir vibraciones en el desplazamiento x(t) de la masa m por acción de la fuerza f(t). Hallar el modelo matemático que relaciona el desplazamiento x(t) de la masa m_2 con la fuerza externa f(t) aplicada.



9. Sea el sistema de suspensión de un automóvil. Para obtener su modelo matemático se realiza las siguientes hipótesis:



- Considerar únicamente la suspensión lineal en el eje vertical del vehículo.
- Suponer que el sistema de suspensión se reparte por igual entre las cuatro ruedas del vehículo, con lo que el problema se reduce a calcular el sistema de suspensión en una rueda.

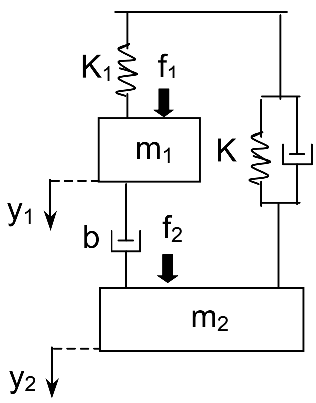


Se pide:

A. Identificar las variables significativas de dicho sistema.
B. Obtener el modelo matemático del sistema de suspensión simplificado.

10. Sea el sistema mecánico de la figura, donde:

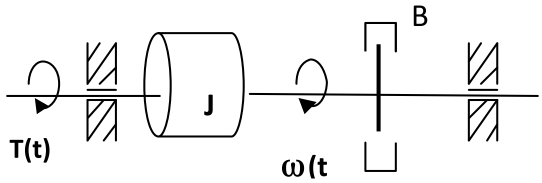
- $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son los desplazamientos desde la posición de equilibrio de ambas masas ($y_1(t) > y_2(t)$)
- $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos fuerzas externas, y las condiciones iniciales se consideran nulas.



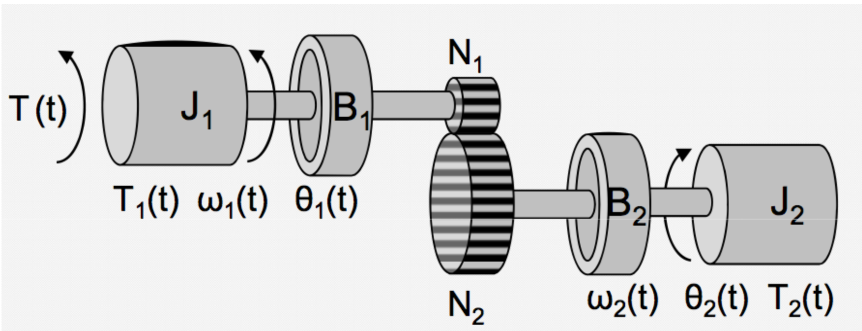
Calcular:

A. Ecuaciones diferenciales que constituyen su modelo matemático.
B. Construir el diagrama de boques siendo $\mathbf{f_1}$ y $\mathbf{f_2}$ las entradas del sistema e $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$ las salidas de este.

11. Sea el sistema de la figura, consistente en una carga inercial y un amortiguador de fricción viscosa. Obtener el modelo matemático que relaciona la velocidad angular ω(t) con el par aplicado T(t).



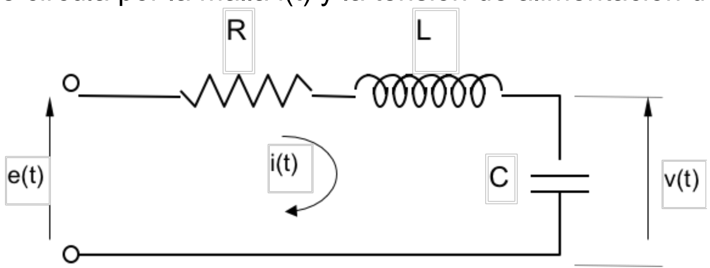
12. Dado el sistema motor-engranaje-carga de la figura, obtener el modelo matemático que relaciona el ángulo de giro del eje de carga θ_2(t) con el par aplicado T(t).



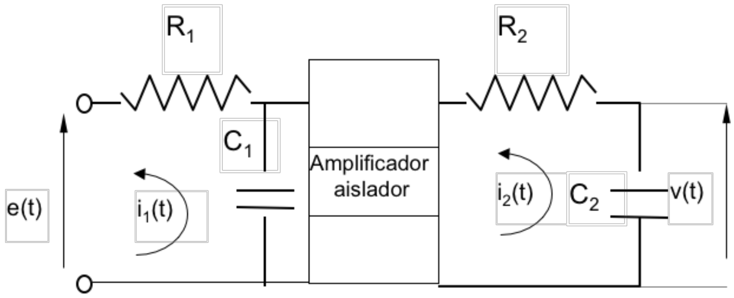
Nota: Considerar que en un engranaje ideal se cumple:

- La relación entre el radio y el número de dientes es: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2}$
- Los desplazamientos lineales de las ruedas son iguales: $\theta_1 \, r_1 = \theta_2 \, r_2$
- No hay pérdida de energía en el engranaje : $\theta_1 \, T_1 = \theta_2 \, T_2$
- Luego se puede escribir: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{T_1}{T_2}$

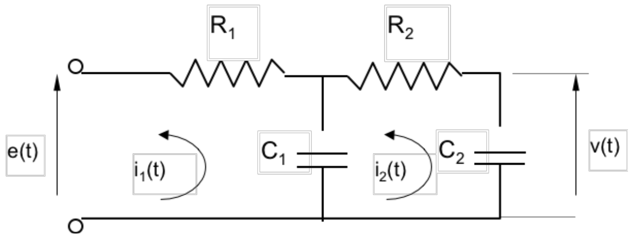
13. Sea el circuito de la figura, formado por una resistencia, una bobina y un condensador. Obtener el modelo matemático que representa la relación entre la intensidad que circula por la malla i(t) y la tensión de alimentación del circuito e(t).



14. Sea el circuito de la figura. Cuando la impedancia de entrada del segundo elemento es infinita, la salida del primer elemento no resulta afectada por la conexión al segundo elemento. Obtener el modelo matemático que representa la relación entre las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$ y la tensión de alimentación del circuito e(t).



15. Sea el circuito de la figura. Obtener el modelo matemático que representa la relación entre las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$ y la tensión de alimentación del circuito e(t).



16. El sistema de la figura representa un motor de corriente continua. Este sistema convierte energía eléctrica en energía mecánica que se utiliza para mover una carga generando un par T(t) [N.m] en el eje motor y por tanto, un movimiento angular en el eje motor de aceleración $d\omega(t)/dt$ [rad/s^2] y velocidad $\omega(t)$ [rad/s]. Es posible excitar este tipo de motores aplicando una tensión a la entrada del circuito del inducido e(t) o al circuito de campo $e_f(t)$.

Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema son:

- El flujo magnético que genera el estator y atraviesa el rotor está generado por el circuito de campo, siendo proporcional a la corriente de campo $i_f(t)$:
$$\phi(t) = K_f i_f(t)$$

- El par generado en el motor se supone aproximadamente proporcional al flujo magnético y a la corriente de inducido $i_i(t)$:
$$T(t) = K_i \phi(t) i_i(t)$$

- Por lo que combinando ambas ecuaciones:
$$T(t) = K_i K_f i_f(t) i_i(t)$$

  donde, para tener un modelo lineal, se supone o $i_f(t)$=cte (motor controlado por inducido) o $i_i(t)$=cte (motor controlado por campo).

- Por otro lado, el circuito de inducido (rotor):
$$e(t) = R_i i_i(t) + L_i \frac{di_i(t)}{dt} - e_b(t)$$

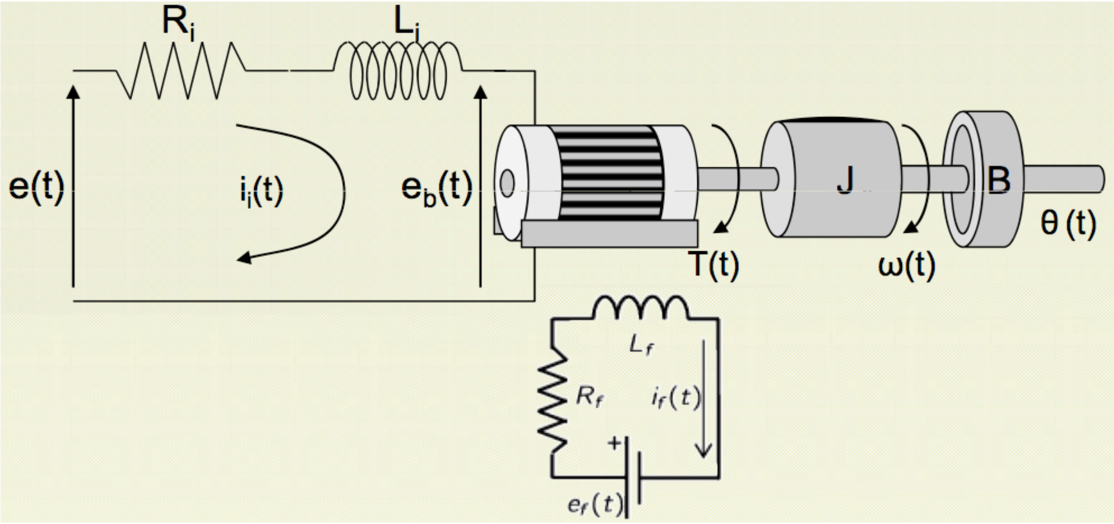
  donde eb(t) es la fuerza contraelectromotriz que se genera cuando circula corriente por el inducido del rotor. Esta tensión es proporcional a la velocidad del eje $\omega(t)$:
$$e_b(t) = K_b \omega(t)$$

- El circuito de campo, responsable de generar el flujo Φ(t):

$$e_f(t) = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt}$$

- Por último el par generado en el motor T(t) se emplea para accionar el sistema mecánico unido al eje con su inercia J y fricción viscosa B:

$$T(t) = J.\frac{dw(t)}{dt} + B.w(t)$$



El objetivo de control es que el motor gire a una determinada velocidad,

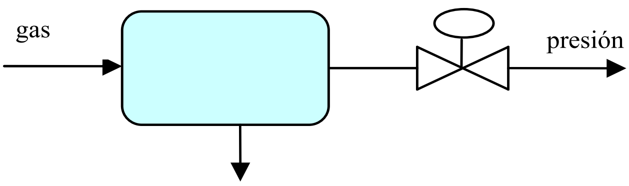
A. Si el motor va a ser **controlado por inducido,** identificar las variables significativas y obtener el modelo de control que relaciona la posición del eje del motor θ(t) con respecto a la tensión de alimentación e(t). Recordar que en este caso if(t)=cte, y por tanto la ecuación de par queda:

$$T(t) = K_m i_i(t), siendo\ K_m = K_i K_f i_f$$

B. Si el motor va a ser **controlado por campo,** identificar las variables significativas y obtener el modelo de control que relaciona la posición del eje del motor θ(t) con respecto a la tensión de alimentación e(t). Recordar que en este caso i_i(t)=cte, y por tanto la ecuación de par queda:

$$T(t) = K_m i_f(t), siendo\ K_m = K_i K_f i_i$$

17. Sea el sistema de almacenamiento de un cierto gas, cuya presión se puede regular manipulando la línea de salida, tal y como ilustra refleja la figura:



El punto de operación del sistema corresponde a una presión de 3 bar en el depósito de almacenamiento, cuando la señal a la válvula es del 30 %. La presión en el interior del tanque es muy sensible a cambios en la temperatura del producto de entrada. Se sabe que la relación entre la temperatura (en ºC) del gas que llega al dispositivo de almacenamiento y la presión en bar en el mismo, viene dada por:

$$1800\frac{dp}{dt} = (-3p^2 + 30)T(t - 0.4) - 30$$

Hallar un modelo linealizado que relacione la presión con la temperatura alrededor del punto de operación.

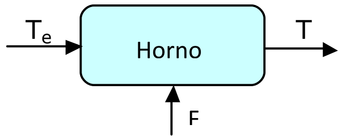
18. Encontrar una aproximación lineal de las siguientes funciones en términos de las variables de desviación:

A. $f(x, y) = y^2 x + 2x + \ln y$

B. $f(x, y) = \frac{3\sqrt{x}}{y} + 2\, sen\, xy$

C. $f(x, y) = y^x$

19. Sea un horno de calentamiento de un material que entra a temperatura Te y sale a temperatura T. Para que el material alcance la temperatura final deseada se manipula el caudal F de fluido calefactor. El sistema debe diseñarse para trabajar en un punto de operación en que el material entra a 10 ºC y sale a 40 ºC, aunque se debe tener en cuenta que la temperatura de entrada de material puede variar de forma significativa y puede medirse.



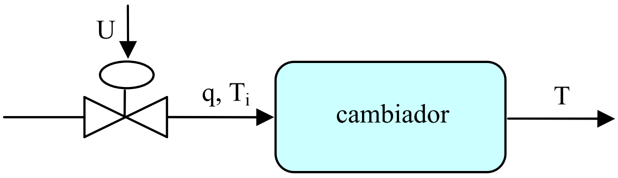
Por otro lado se sabe que la relación entre la temperatura de entrada del material Te (ºC), la temperatura de salida del material T (ºC,) y el caudal de combustible F (kg/min) viene dada por la expresión:

$$(5 + 3F)\frac{dT}{dt} + 2T^2 = 3FT + T_e$$

Se pide:

A. Identificar las variables significativas.
B. Obtener un modelo linealizado del proceso para el punto de operación dado.

20. El sistema de la figura representa un intercambiador de calor. Este contiene un sistema de calefacción interno no manipulable que calienta un caudal de agua q desde una temperatura Ti a una temperatura T.



La relación de la temperatura de salida T (en ºC) con la señal de entrada a la válvula U (en % de apertura) y con la temperatura del líquido de entrada Ti (en ºC) viene dada por la siguiente expresión:

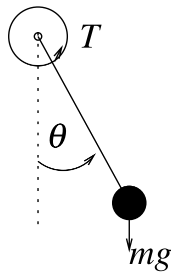
$$3\frac{dT}{dt} = -6T + 8{,}8U^2 + 2T_i \qquad \text{(tiempo en minutos)}$$

En el punto nominal de operación, la temperatura de entrada es de 10ºC y la temperatura de salida es de 40ºC.

Obtener, para el punto de operación dado, un modelo lineal que relacione la temperatura de salida con la apertura de válvula y con la temperatura de la corriente de entrada.
Identificar las variables significativas y obtener el modelo de control.

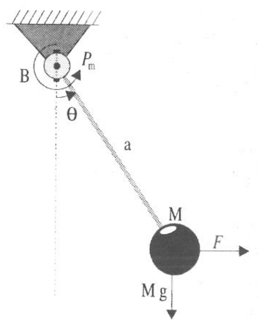
21. La ecuación que describe la dinámica del péndulo de la figura viene dada por:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta} + \frac{T}{l}$$



donde m es la masa de la bola, l es la longitud del brazo, θ es el ángulo entre la vertical y el brazo, g es la aceleración de la gravedad, k es coeficiente de fricción y T el momento de par aplicado (entrada). Calcular el sistema linealizado alrededor de un punto de operación.

22. La siguiente figura representa un péndulo, cuya varilla tiene una masa despreciable y longitud 1m. En su extremo sujeta una bola de masa 100 gr, sometida a la acción de la gravedad ($g=10\ m/s^2$) y a la fuerza puntual F(t) en dirección horizontal. Además se aplica un par motor $P_m(t)$, al que se oponen la inercia del conjunto péndulo-bola ($J=1\ N\cdot m\cdot s^2/rad$) y el rozamiento en el eje de giro ($B=2\ N\cdot m\cdot s/rad$).



Se pide:

a) Obtener el modelo matemático de este péndulo (es decir, la relación entre $\theta(t)$, $P_m(t)$ y F(t)).
b) Obtener el valor del par motor para que el sistema se encuentre en equilibrio cuando $\bar{\theta} = 30º$ y $\bar{F} = 0\ N$.
c) Linealizar el modelo matemático del sistema que relacione la salida $\Theta(t)$ para una entrada $P_m(t)$ conocida, alrededor de dicho punto de operación.