OPTIMIZAZIOA
ARIKETAK

Murrizketarik gabeko optimizazioko ariketak

1.- Kalkulatu funtzio hauen mutur lokalak:

a) $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$.

b) $f(x, y) = x^4 + y^2 + 4x$.

c) $f(x, y) = xy$.

d) $f(x, y) = 2x^2 - y$.

2.- Kontsidera ditzagun hiru funtzio hauek:

a) $f(x, y) = -x^4 - y^4$.

b) $f(x, y) = x^4 + y^4$.

c) $f(x, y) = x^3 + y^3$.

Frogatu $(0,0)$ puntua hiru funtzioentzako kritikoa dela eta hessiarra, puntu horretan, zero egiten dela. Funtzioak zuzenean aztertuz, frogatu $(0,0)$ puntua a) kasuan maximoa dela, b) kasuan minimoa eta c) kasuan ez dela ezer.

3.- Kalkulatu funtzio hauen mutur globalak:

a) $f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$.

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 35$.

4.- Demagun $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 4y$ funtzioa dela.

a) Kalkulatu funtzioaren mutur lokalak.

b) Lortutako mutur lokaletatik, baten bat globala da?

Optimizazioko ariketak berdintza-murrizketekin

5.- Kalkulatu dagozkien murrizketei baldintzatutako funtzio hauen mutur lokalak:

a) $f(x,y) = x + y$ funtzioa $x^2 + y^2 = 1$ ekuazioari baldintzatua.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ funtzioa $x^2 - y = 1$ ekuazioari baldintzatua.

c) $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$ funtzioa $y = 0$ ekuazioari baldintzatua.

d) $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ funtzioa $x + y = 2$ ekuazioari baldintzatua.

e) $f(x,y) = 10x + 8y - x^2 - 2y^2$ funtzioa $x + y = 4$ ekuazioari baldintzatua.

Optimizazioa multzoetan. Ariketak

6.- Kalkulatu funtzio hauen mutur globalak dagozkien multzoetan:

a) $f(x,y) = 2x + y$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y \le 4,\ x \ge 0,\ x + 2y \ge 4\}$.

b) $f(x,y) = x - y$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 \le x,\ x \le y + 2\}$.

c) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x - 2y \le 0,\ x \le 3,\ x - y \ge 0\}$.

d) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \ge x^2 - 1,\ y \le 3\}$.

e) $f(x,y) = 2x^2 - y^2 - 2x$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 1\}$.

f) $f(x,y) = y - x^2$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge y\}$.

g) $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \ge 0,\ x \ge y\}$.

h) $f(x,y) = y + (x+1)^2$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -2 \le x \le 2, -2 \le x + 2y \le 2\}$.

i) $f(x,y) = 4x + xy + y$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y^2 \le 2,\ x - y \ge 0\}$.

j) $f(x,y) = xy^2$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

k) $f(x,y) = (x+1)(y+2)$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \le 3,\ 2x \ge y,\ 2y \ge x\}$.

l) $f(x,y) = x(y+2)$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \le 6, x \ge 0, y \ge 0\}$.

m) $f(x,y) = xy$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y^2 \le 1,\ x - y \ge -1\}$.

Optimizazioaren aplikazioak. Ariketak

7.- Enpresa batek *A* eta *B* bi ondasun mota ekoizten ditu. *A* motako *x* unitate eta *B* motako *y* unitate fabrikatzeko eguneroko kostua $C(x,y)$ funtzioak ematen du:

$$C(x,y)=0,04x^2+0,01xy+0,01y^2+4x+2y+500.$$

Enpresak ekoizten duen guztia saltzen du, *A* motako unitate bakoitza 15 eurotan eta *B* motako unitate bakoitza 9 eurotan. Aurkitu enpresaren produkzioa mozkina maximizatu nahi badu.

8.- $y=f(K,L)=K^{1/2}L^{1/2}$ enpresa baten ekoizpen-funtzioa da, *K* kapitala eta *L* lana izanik. Lanaren prezio unitarioa $w_L=1$ bada eta kapitalarena $w_K=4$ bada, zenbat kapital eta lan unitate erabili beharko du enpresaren helburua kostu txikienarekin 2 unitate produzitzea bada?

9.- Enpresa batek 1 eta 2 ondasunak ekoizten ditu. Salmenta-prezio unitarioak $p_1=200\$$ eta $p_2=360\$$ dira, hurrenez hurren. Kostu funtzioa hau da:

$$C(q_1,q_2)=q_1^2+2q_1q_2+2q_2^2+10000.$$

Kalkulatu ondasun bakoitzetik ekoiztu behar dituen q_1 eta q_2 kantitateak mozkina maximizatzeko.

10.- Enpresa batek 1 eta 2 faktoreak erabiltzen ditu ondasun bat $z=f(x,y)=xy$ produkzio-funtzioaren bitartez ekoizteko, *x* eta *y* produkzioan erabilitako faktore kopuruak (kilogramotan) eta *z* ekoiztutako ondasun kopurua (kilogramotan) izanik. 1 faktorearen prezioa 30 € kilogramoko eta 2 faktorearena 10 € kilogramoko dira eta enpresaren aurrekontua 12000 eurokoa da.

a) Aurkitu enpresak erabili behar dituen 1 eta 2 faktoreen kantitateak produkzioa maximizatzeko aurrekontua gainditu gabe.

b) Merkatuaren arazoak direla eta, enpresak ezin badu 2 faktoretik 300 kg baino gehiago erabili, zein izango litzateke soluzioa?

11.- Kontsumitzaile batek 1 eta 2 ondasunak eros ditzake. 1 ondasunaren prezioa unitateko 2 eurokoa da eta 2 ondasunarena 4 eurokoa. Ondasun hauek erosteko aurrekontua 112koa da. x_1 eta x_2 1 eta 2 ondasunetatik kontsumitutako kantitateak dira, hurrenez hurren. Ondasun bakoitzetik zenbat gastatuko du kontsumitzaileak, $U(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 1$ funtzioak neurtzen duen baliagarritasuna maximizatu nahi badu?

12.- Kontsumitzaile batek 1 eta 2 ondasunak eros ditzake. Haren baliagarritasun funtzioa $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ da. 1 ondasunaren prezio unitarioa 2 da eta 2 ondasunarena 3. Bi ondasunen artean, gehienez, 360 euroko aurrekontua gasta dezake. 1 ondasunaren unitate bat kontsumitzeko ordu bat behar du, eta 2 ondasunaren unitate bat gastatzeko, aldiz, 4 ordu; guztira 280 ordu du ondasunak kontsumitzeko. Kalkulatu ondasun bakoitzetik erositako x_1 eta x_2 kantitateak baliagarritasuna maximizatzeko.

$U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ baliagarritasun-funtzio berria bada, aztertu soluzio hoberena aldatzen den.

13.- Mea baten ekoizlea den herrialde bat, urtero, 2000 tona mea baino gehiago eta 4000 tona baino gutxiago esportatzera behartuta dago. Produktuaren salmenta nazioarteko merkatuan egin daiteke, non tonako prezioa 2000 eurokoa den, edo bestela, ondoan dagoen herrialde batean sal dezakete, non tonako prezioa $p = 5000 - x$ den, x herri horretan saldutako tonak izanik. Herrialdeko gobernuak jakin nahi du ekoiztutako meatik zein kantitate salduko duen nazioarteko merkatuan (y) eta zein kantitate ondoko herrialdean (x), helburua sarrerak maximizatzea bada.

Programazio lineala

14.- Gatza saltzen duen enpresa bat bi gatzaga desberdinetik hornitzen da. Hilero, gehienez, *A* gatzagatik 600 tona gatz eta *B* gatzagatik 1400 tona gatz har dezake; gatz hauek nahasiz, kalitate desberdineko bi gatz-mota lor daitezke: lehen mailako gatzak 0,25 €/kg. balio du merkatuan eta bigarren mailakoak, ordea, 0,2 €/kg. Lehen mailako 1 tona gatz, *A* motako 0,2 tona eta *B* motako 0,8 tona gatz nahasiz lortzen da; eta 2. mailako 1 tona gatz, *A* motako 0,4 tona eta *B* motako 0,6 tona gatz nahasiz.

Aurkitu hilero prestatu behar diren 1. eta 2. mailako gatzen kantitateak sarrerak maximizatzeko.

15.- Abere batzuen janaria *A*, *B*, *C* eta *D* lau osagaiek osatzen dute. Abere bakoitzak egunero, gutxienez, 0,4 kg *A* osagai, 0,6 kg *B* osagai, 2 kg *C* osagai eta 1,7 kg *D* osagai behar ditu. Merkatuan, osagai hauek dituzten *M* eta *N* produktuak aurki daitezke non 1 kg *M*-k, 0,1 kg *A*, 0,1 kg *C* eta 0,2 kg *D* dituen, eta 1 kg *N*-k, 0,1 kg *B*, 0,2 kg *C* eta 0,1 kg *D* dituen. *M* produktuaren prezioa kilogramoko 10 eurokoa da eta *N*-rena 4 eurokoa da.

Aurkitu *M* eta *N* produktuen kantitateak eguneko eta abereko, abereen beharrak asetzen dituen kostua minimizatzeko.

16.- Enpresa inkestatzaile batek ikerketa bat kontratatuta du eskakizun hauekin: gutxienez, 1000 elkarrizketa egin behar dituzte (telefonoz edo pertsonalak). Hauetatik, gutxienez, 300ek pertsonalak izan behar dute. Gutxienez 500 (pertsonalak edo telefonoz eginak) gauez egin behar dira. Egunez egindako elkarrizketetatik gutxienez %60 telefonoz egin behar dira. Elkarrizketen kostuak hauek dira: eguneko elkarrizketa pertsonala, 8 €; gaueko elkarrizketa pertsonala, 8,4 €; telefonoz eginiko eguneko elkarrizketa, 4 € eta telefonoz eginiko gaueko elkarrizketa, 4,8 €. Planifikatu elkarrizketak kostua minimoa izan dadin.

17.- Petrolio banaketaz arduratzen den enpresa batek bi portu desberdinetan dauden G_1 eta G_2 gordelekuak ditu, hauen edukiera 140 eta 40 tona, hurrenez hurren, izanik. B_1 eta B_2 bezeroen eskakizunak 100 eta 50 tona, hurrenez hurren, dira. B_1 G_1-etik 60 kilometrotara dago eta G_2-tik 30 kilometrotara; B_2 G_1-etik 80 kilometrotara dago eta G_2-tik 20 kilometrotara. Garraioaren kostua tonako eta kilometroko *K* kantitate finkoa da. Nola banatuko dira eskakizunak kostua minimizatzeko?

18.- Artisau-enpresa batek zurezko markoak egiten ditu bi bukaera desberdinekin: kalitate arrunta eta kalitate handia. Marko horiek azoketako postuetan saltzen ditu, kalitate arruntekoa 20 eurotan eta kalitate handikoa 35 eurotan. Kalitate arrunteko marko bakoitzak 10 euroko kostua du (zura, pintura eta eskulana) eta kalitate handikoak, aldiz, 20 eurokoa.

Marko guztiak bi tailer desberdinetatik pasatzen dira: moldekatzea eta pintura. Ondoko taulan tailer bakoitzean marko bakoitzak ematen dituen orduak, hala nola tailer bakoitzaren gehienezko erabilgarritasuna dugu:

	Kalitate arrunta	Kalitate handia	Erabilgarritasuna
Moldekatzea	2 ordu/marko	2 ordu/marko	60 ordu/aste
Pintura	1 ordu/marko	3 ordu/marko	60 ordu/aste

Gainera, eskaria dela eta, kalitate arrunteko markoen produkzioa, gehienez, asteko 24 unitatera murriztu behar du enpresak eta, gutxienez, bi kalitatekoen artean 10 marko egin behar ditu.

a) Enpresak egiten duen guztia saltzen badu, formulatu eta ebatzi programazio linealeko problema astean mota bakoitzeko zenbat marko produzitu behar dituen aurkitzeko, mozkina maximizatuz.

b) Interesatuko litzaioke enpresari moldekatze-tailerrean ordu erabilgarri gehiago edukitzea? Hala bada, zenbat ordainduko luke, gehienez, aparteko ordu bakoitzarengatik?

c) Hasierako egoeran, kalkulatu noraino alda daitekeen kalitate handiko marko bakoitzaren kostua, kalitate arrunteko markoen kostua aldatu gabe, a) atalean lortutako soluzioa hoberena izaten jarraitzeko.

d) Kalkulatu mota bakoitzeko markoen produkzio-plangintza asteko kostua minimizatzeko.

19.- Fabrika batek aldagailuak eta motorrak egiten ditu. Fabrika hiru lantegitan zatituta dago. *A* lantegiak makinen zati aktiboak egiten ditu, aldagailuko 3 ordu eta motorreko ordu erdia erabiliz. *B* lantegiak makinen karkasak egiten ditu, aldagailuetarako nahiz motorretarako karkasako 4/3 ordu erabiliz. *C* lantegiari azkeneko muntaia dagokio, aldagailuko 4/3 ordu eta motorreko 2/3 ordu erabiliz.

a) Aldagailu bakoitzeko mozkina 80 eurokoa eta motor bakoitzekoa 60 eurokoa badira, eta lantegi bakoitzeko lanorduak astean, gehienez, 40 ordu badira, kalkulatu mozkina maximizatuko duen asteroko aldagailuen eta motorren produkzioa.

b) Lortutako produkzio hoberenean hiru lantegien lanordu posible guztiak erabiltzen dira?

c) Aldagailuen mozkina 80 eurotan mantentzen badute, zenbatekoa izan beharko luke motor bakoitzarenak, mozkin maximoa a)-n lortutako kantitateak eginez edo motorrak soilik eginez lortzeko.

d) B lantegian lanorduen mugarik ez balitz, aparteko orduak sartuz, zein izango litzateke mozkina maximizatuko duen asteko produkzioa?

20.- Enpresa batek, A eta B lehengaiak erabiliz, $K1$ eta $K2$ bi produktu konposatu egiten ditu. $K1$en tona bat egiteko, tona bat A eta tona bat B behar du eta $K2$ren tona bat egiteko, tona bat A eta bi tona B. Enpresak, egunero, 700 tona A eta 1200 tona B erabil dezake. Gainera, ekoizpen prozesuak ez du uzten $K1$en produkzioa ekoizpen totalaren % 75 baino gehiago izaten. $K1$ produktu konposatuaren prezioa tonako 2000 euro da eta $K2$rena 3000 euro.

a) Formulatu eta ebatzi programazio linealeko problema, enpresak eguneroko sarrera maximizatu nahi badu.

b) Aurreko atalean lortutako soluzio hoberena aldatu gabe, zein izan daiteke $K1$en preziorik handiena? (problemaren beste datuak finkoak mantentzen dira).

c) Interesatuko litzaioke enpresari B lehengaiaren tona gehiago eskuratzea? Hala bada, B lehengaiaren tona bakoitzeko, gehienez, zenbat ordainduko luke?

21.- Baserritar batek behi-ustiapenean dihardu. Behien elikadura alpapa eta erremolatxa da. Alpapa tona bakoitzean A motako elikagaiaren 20 unitate eta B motako elikagaiaren 30 unitate daude eta erremolatxa tona bakoitzean, A motako elikagaiaren 30 unitate eta B motako elikagaiaren 25 unitate. Baserrian, egunero beharrezkoa den A motako elikagaiaren unitateak 600 dira eta B motako elikagaiarenak, 800. Alpapa tona batek 250 balio du eta erremolatxa tona batek 200. Hauxe eskatzen da:

a) Baserritarrarentzako kostua minimoa izateko egunero erosi behar diren alpapa eta erremolatxa tona kopurua.

b) Abereen dietan A motako elikagaia gehitu nahi bada, hasierako soluzio hoberena aldatu gabe, zenbatetan egin daiteke?

c) Zein izango litzateke soluzio hoberena erremolatxaren prezioa 300ra garestitzen bada?

22.- Nekazari batek 1000 hektarea ditu garia eta garagarra landatzeko. Tona bat gari lortzeko 2 hektarea behar ditu eta tona bat garagar lortzeko hektarea bat. Tona bat gari lortzeko, kostua ongarrietan, hazietan, makinarian etab. 120 eurokoa da eta tona bat garagar lortzeko kostua, 30 eurokoa. Nekazariaren aurrekontua 42000 eurokoa da. Bestalde, Administrazioak ez dio uzten 800 hektarea baino gehiago erabiltzen garagarra landatzeko, eta prezioak garirako 200 eurotan tonako eta garagarrerako 130 eurotan tonako finkatu ditu. Sarrera handiena lortzeko, zenbat hektarea utziko dio laborantza bakoitzari?

Interesatuko litzaioke nekazariari landa gehiago alokatzea? Hala bada, zenbat hektarea alokatuko luke eta zein preziotan? Administrazioak haziak, ongarriak, etab. erosteko kostu txikiko maileguak eskaintzen baditu, interesatuko litzaioke nekazariari eskatzea?, zergatik? Administrazioak gariaren produkzioa handiagoa izatea nahi izango balu, garagarraren prezioa 60ra tonako jaistea, politika egokia izango litzateke?, zergatik? Prezio berri hau finkatuko balu, interesatuko litzaioke nekazariari aipatutako maileguak hartzea?

23.- Meatze enpresa batek lignitoa eta antrazita ekoizten ditu. Ekoiztutako guztia sal dezake. Saldutako lignito tona bakoitzeko mozkina 20 eurokoa da eta antrazitakoa, berriz, 40 eurokoa. Ekoizpen prozesuak hiru fase ditu: mearen mozketa, aukeraketa eta garbiketa. Lignito nahiz antrazita tona bat ekoizteko fase bakoitzean dauden makinak erabiltzea ezinbestekoa da, hurrengo taulan jasotzen diren denboren arabera (ordutan neurtuta). Bertan, makina bakoitzaren asteko edukiera (erabilgarritasun ordu kopuru maximoa) ere ematen da:

	Ebaketa	Aukeraketa	Garbiketa
Lignitoa	3	0	4
Antrazita	4	4	2
Edukiera	60	48	48

a) Enpresak mea bakoitzetik asteko zenbat tona ekoiztuko ditu helburua mozkinak maximizatzea bada?

b) Antrazitaren tonako mozkina aldatzen ez badute, zenbatekoa izan beharko luke lignitoaren tona bakoitzaren mozkina garbiketa faseko makineriaren edukiera agortzeko?

c) Enpresa prest legoke faseren batean duen ordu edukiera handitzeko? Horrela balitz, zenbat ordu eta zer preziotan?

d) Eskaria kontuan hartuz, asteko lignitoaren tona kopuruak ezin badu antrazitarenak 4 tonatan baino gehiagotan gainditu, zer gertatuko litzateke problemaren soluzio hoberenarekin?

24.- Demagun problema hau dela:

$$\text{Max } (20x + ay)$$
$$\begin{cases} 2x + y \leq 50 \\ x + y \leq 34 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

a) Kalkulatu problemaren soluzio hoberena $a = 10$ denean.

b) Kalkulatu problemaren soluzio hoberena $a \geq 0$ balio ezberdinetarako.

c) x astero *A* produktutik ekoiztutako tonak eta y astero *B* produktutik ekoiztutako tonak badira, formulatu murrizketa hauek:

i) *B*-ren produkzioa, gehienez, produkzio totalaren %70 izan behar da.

ii) *A*-ren produkzioa, gutxienez, *B*-rena bezain beste izan behar da eta gehienez *B*-ren bikoitza.

Murrizketarik gabeko optimizazioko ariketak. Erantzunak

1.-

a) (1,0) puntua minimo lokala da.

b) (−1,0) puntua minimo lokala da.

c) Funtzioak ez du mutur lokalik.

d) Funtzioak ez du mutur lokalik.

2.-

a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \le 0 = f(0,0)$.

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(0,0) = 0 \le f(x,y)$.

c) $f(1,0) = 1 > 0 = f(0,0)$ eta $f(-1,0) = -1 < 0 = f(0,0)$.

3.-

a) (5,8) puntuan maximo globala lortzen da.

b) (3,-4) puntuan minimo globala lortzen da.

4.-

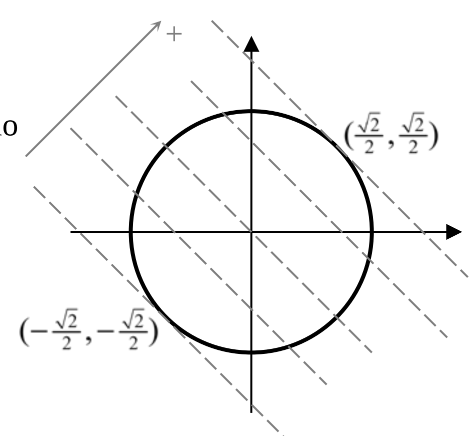
a) (1,1) minimo lokala da.

b) Ez da globala.

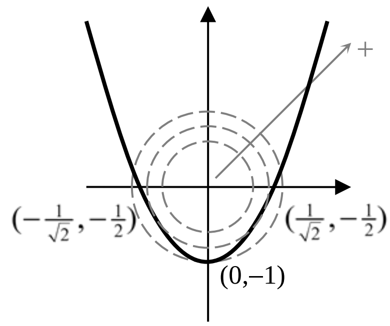
Optimizazioko ariketak berdintza murrizketekin. Erantzunak

5.-

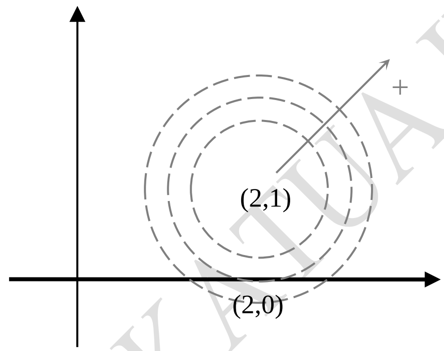
a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ puntua *f*-ren *g* murrizketarekiko maximo lokala da eta $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ minimo lokala.



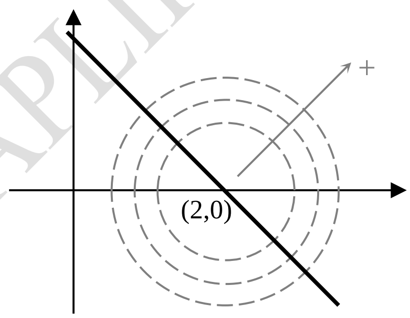
b) (0,–1) puntua *f*-ren *g* murrizketarekiko maximo lokala da eta $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},-\frac{1}{2}\right)$ eta $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\frac{1}{2}\right)$ minimo lokalak.



c) (2,0) puntua *f*-ren *g* murrizketarekiko minimo lokala da.



d) (2,0) puntua *f*-ren *g* murrizketarekiko minimo lokala da.

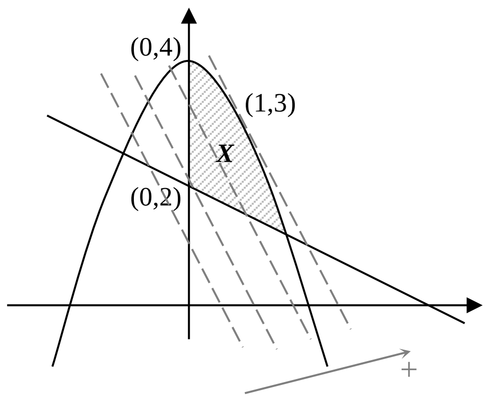


e) (3,1) puntua *f*-ren *g* murrizketarekiko maximo lokala da.

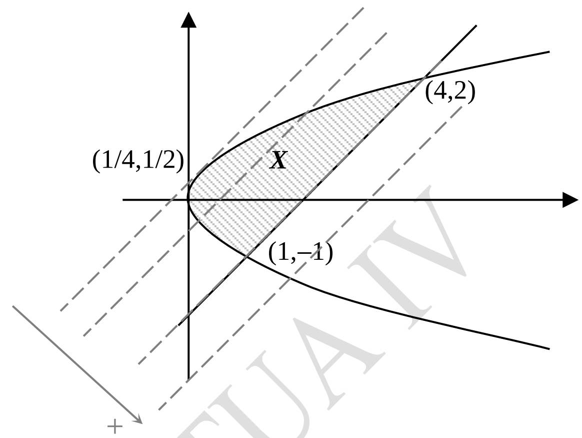
Optimizazioa multzoetan. Erantzunak

6.-

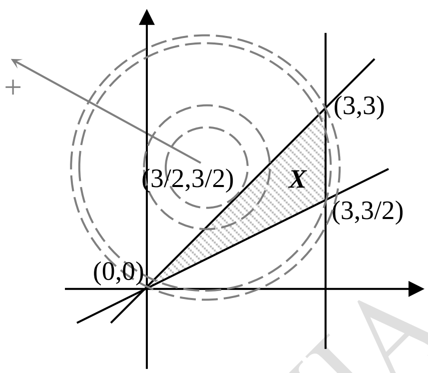
a)



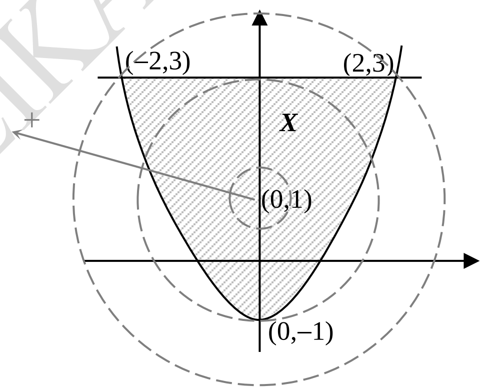
b)



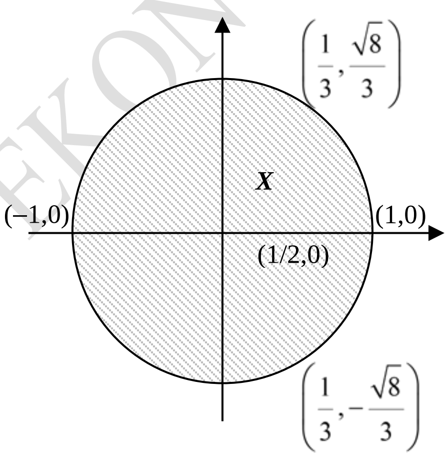
c)



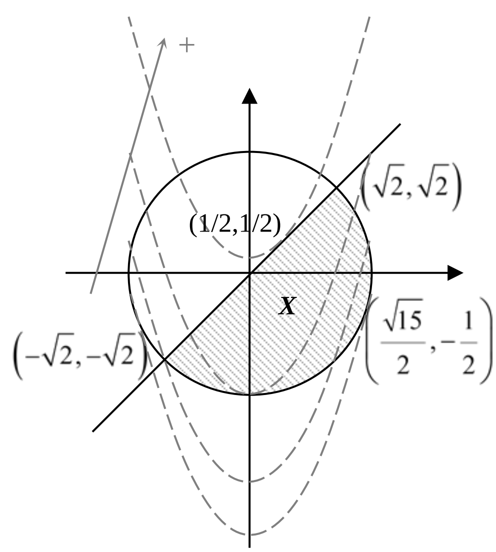
d)



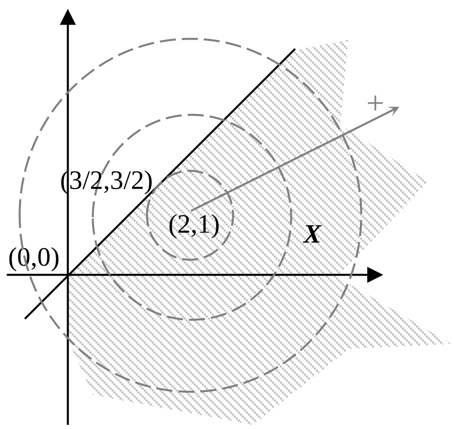
e)



f)

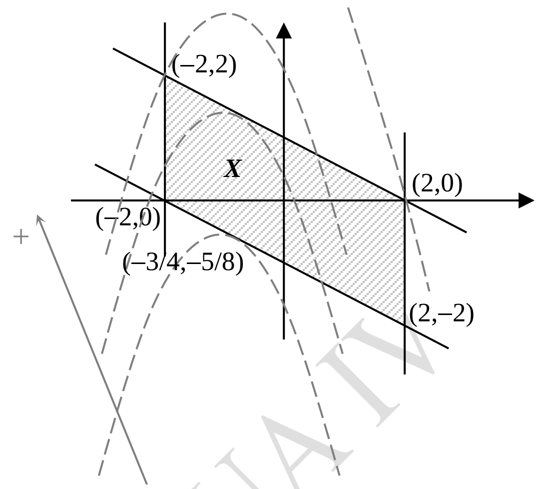


g)



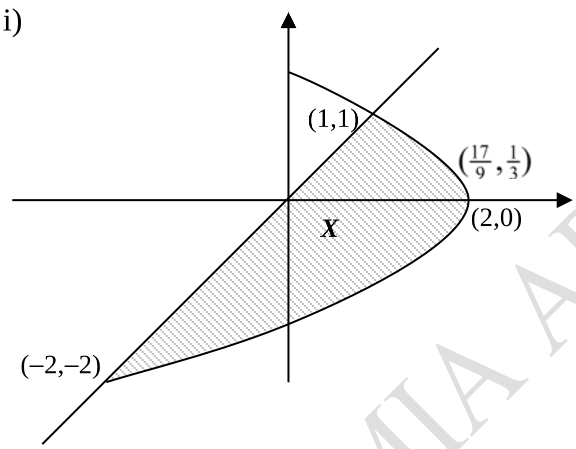
(3/2,3/2)
(2,1)
X
(0,0)
+

h)



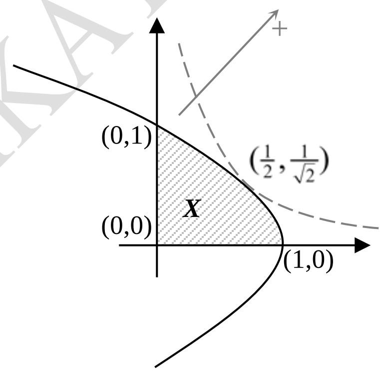
(−2,2)
X
(2,0)
(−2,0)
(−3/4,−5/8)
(2,−2)
+

i)



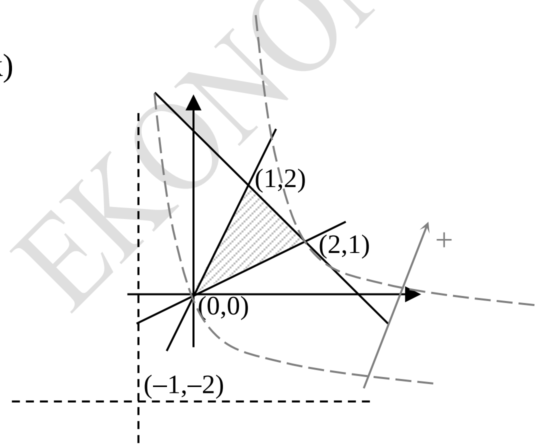
(1,1)
$\left(\frac{17}{9},\frac{1}{3}\right)$
(2,0)
X
(−2,−2)

j)



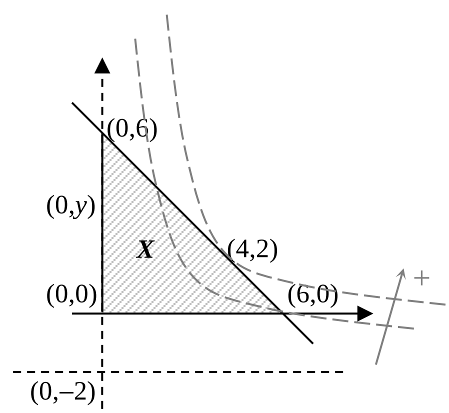
+
(0,1)
$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
X
(0,0)
(1,0)

k)



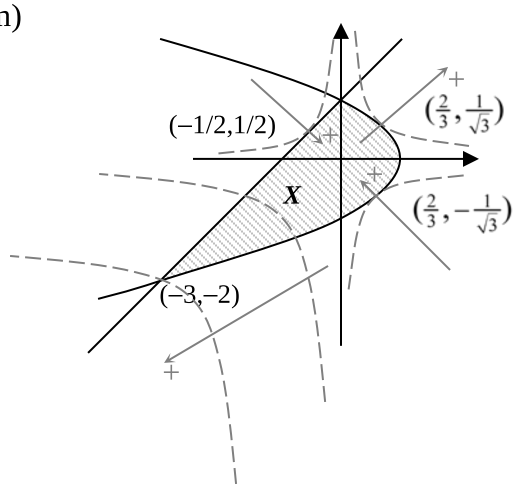
(1,2)
(2,1)
+
(0,0)
(−1,−2)

l)



(0,6)
(0,y)
X
(4,2)
(0,0)
(6,0)
+
(0,−2)

m)



Optimizazioaren aplikazioak. Erantzunak

7.- Mozkin-funtzioa hau da eta ahurra da:

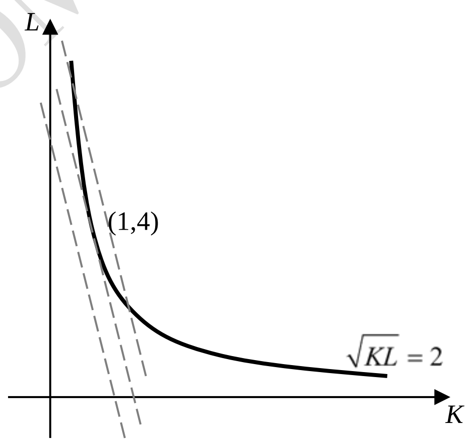
$$\Pi(x,y)=15x+9y-C(x,y)=-0,04x^2-0,01xy-0,01y^2+11x+7y-500\,.$$

Enpresak mozkina maximizatzen du 100 unitate *x* eta 300 unitate *y* ekoizten dituenean.

8.- Kostu-funtzioa: $C(K,L)=4K+L$.

2 unitate produzitu nahi badu: $f(K,L)=K^{1/2}L^{1/2}=2$.

$(K,L)=(1,4)$.

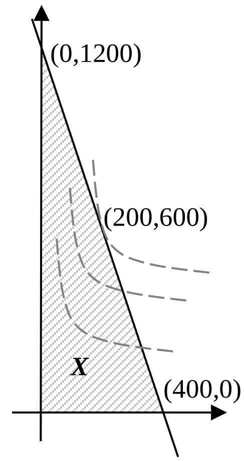


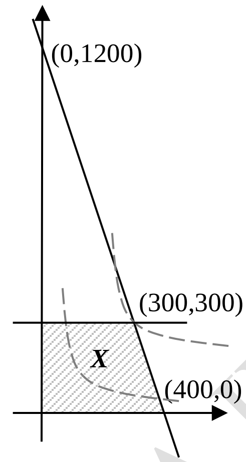
9.- 20 unitate q_1 eta 80 unitate q_2 ekoizten dituenean lortzen du mozkin handiena.

10.-

a) $\max(xy)$

$$\begin{cases} 30x + 10y \le 12000 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$





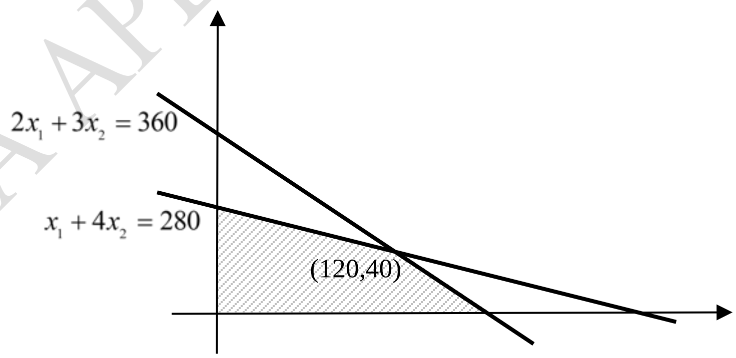
Beraz, 1 faktoretik 200 kg eta 2 faktoretik 600 kg erabiliz, enpresak maximizatzen du ekoizpena (120000 kg).

b) Kasu horretan, irudian ikusten denez, soluzioa (300,300) da.

11.- $(x_1, x_2) = (56, 0)$.

12.- Aurrekontua: $2x_1 + 3x_2 \le 360$

Denbora: $x_1 + 4x_2 \le 280$

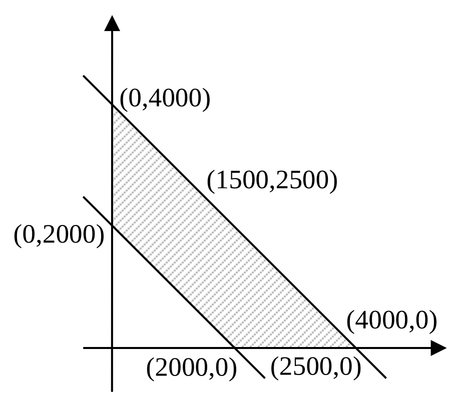


$(x_1, x_2) = (120, 40)$ $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ denean.

$(x_1, x_2) = (120, 40)$ $U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ denean.

13.- $\max\,[(5.000 - x)x + 2.000y]$

$$\begin{cases} 2.000 \le x + y \le 4.000 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

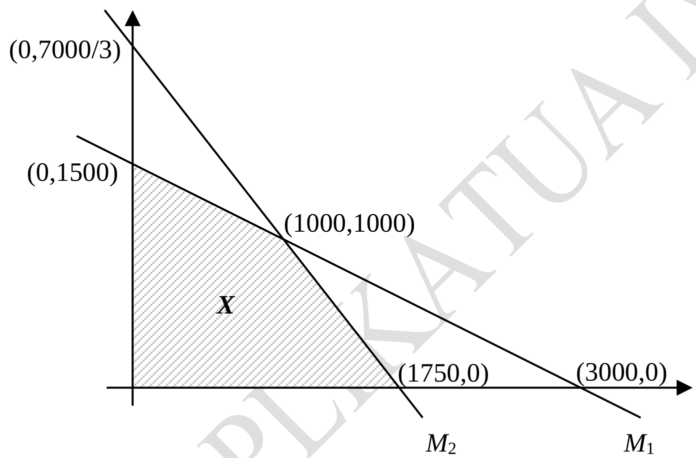


Maximoa: $(1500, 2500)$, hau da, ondoko herrialdean 2500 tona eta nazioarteko merkatuan 1500 tona salduko ditu.

Programazio lineala. Erantzunak

14.- x_1 1. mailako gatza tonatan eta x_2 2. mailako gatza tonatan badira:

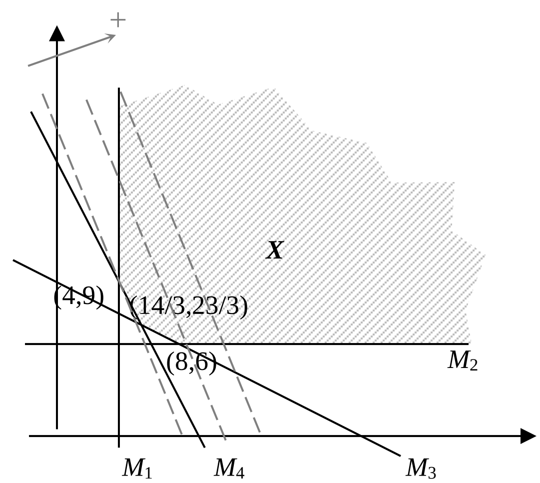
$$\max\ 250x_1 + 200x_2$$
$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,4x_2 \leq 600 \\ 0,8x_1 + 0,6x_2 \leq 1400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Soluzio hoberena (1000,1000) puntuan.

15.- x_1 *M* produktua (kg) eta x_2 *N* produktua (kg) badira,

$$\min 10x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 0,1x_1 \geq 0,4 \\ 0,1x_2 \geq 0,6 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 \geq 2 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 \geq 1,7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Soluzio hoberena (4,9) da eta balio hoberena 76 euro.

16.- x_1: elkarrizketak telefonoz eta egunez

x_2: elkarrizketak telefonoz eta gauez

x_3: elkarrizketak pertsonalak eta egunez

x_4: elkarrizketak pertsonalak eta gauez

$$\min 4x_1 + 4{,}8x_2 + 8x_3 + 8{,}4x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1000 \\ x_3 + x_4 \geq 300 \\ x_2 + x_4 \geq 500 \\ 0{,}6x_3 \leq 0{,}4x_1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

17.- $x_{11} : G_1 \to B_1 \quad x_{12} : G_1 \to B_2 \quad x_{21} : G_2 \to B_1 \quad x_{22} : G_2 \to B_2$.

Gordelekuetan dauden tona kopuruak: $x_{11} + x_{12} \leq 140$ tona .

$x_{21} + x_{22} \leq 40$ tona .

Bezeroek eskatzen dutena: $x_{11} + x_{21} = 100$ tona .

$x_{12} + x_{22} = 50$ tona .

Helburu funtzioa: $\min k(60x_{11} + 30x_{21} + 80x_{12} + 20x_{22})$.

Problema horrela geratzen da:

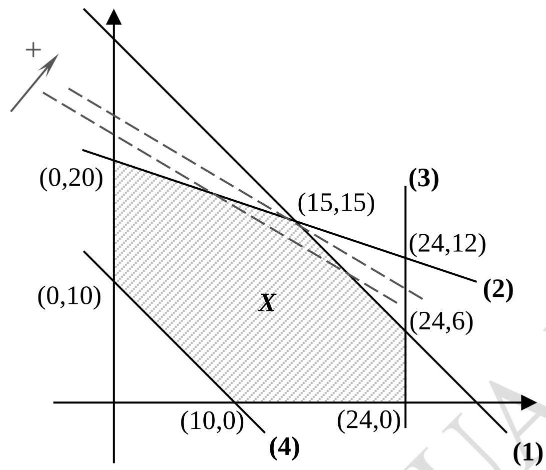
$$\min k(60x_{11} + 30x_{21} + 80x_{12} + 20x_{22})$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 140 \\ x_{21} + x_{22} \leq 40 \\ x_{11} + x_{21} = 100 \\ x_{12} + x_{22} = 50 \\ x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0 \end{cases}$$

Eta $x_{21} = 100 - x_{11}$ eta $x_{22} = 50 - x_{12}$ direnez,

$$\min k(30x_{11} + 60x_{12} + 400)$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 140 \\ x_{11} + x_{12} \geq 110 \\ x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0 \end{cases}$$

18.- a) x kalitate arrunteko markoak eta y kalitate handiko markoak badira:

$$\max\ (10x+15y)$$
$$\begin{cases} 2x+2y\le 60 & (1)\\ x+3y\le 60 & (2)\\ x\le 24 & (3)\\ x+y\ge 10 & (4)\\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$$



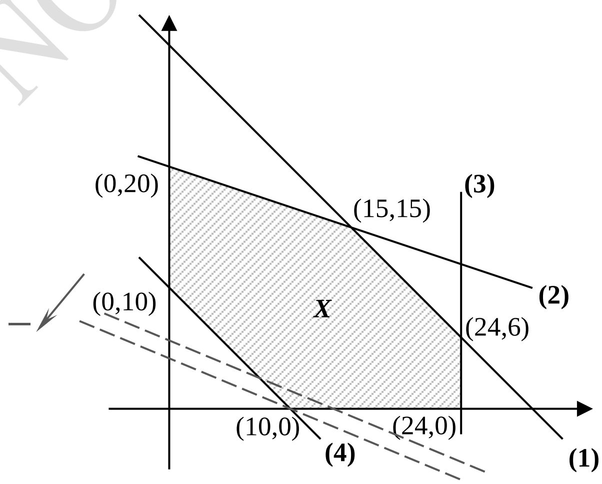
Soluzio hoberena (15,15) da. Hau da, enpresak 15 kalitate arrunteko marko eta 15 kalitate handiko marko ekoiztuko ditu eta mozkina 375 € izango da.

b) $\lambda = \dfrac{15}{4} = 3{,}75$ € / ordu .

Beraz, gehienez, 12 ordu gehiago hartuko ditu eta orduko, gehienez, 3,75 € ordainduko du.

c) Mozkina $(20-10)x+(35-k)y$ da, non $k=20$ kalitate handiko markoen kostua den. Kalitate handiko markoen kostua 5 eta 25 artean dagoen bitartean, soluzio hoberena (15,15) izango da $5\le k\le 25$.

d) $\min\ (10x+20y)$ izanik, soluzio hoberen berria (10,0) da.

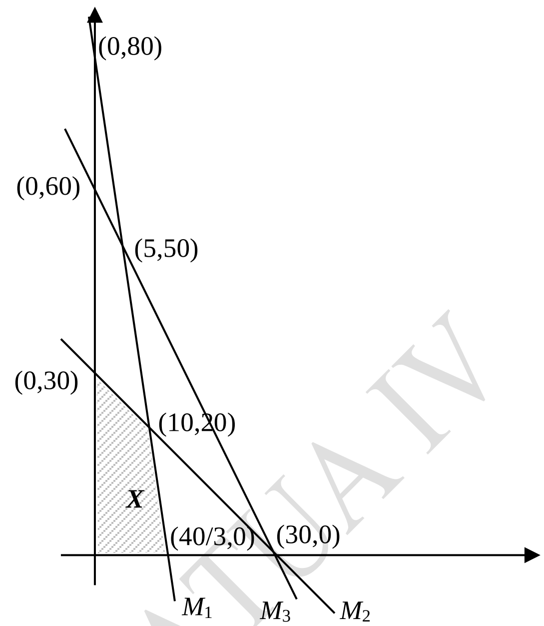


19.- x_1: aldagailu kopurua

x_2: motor kopurua

$$\max 80x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 40 \\ \frac{4}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \le 40 \\ \frac{4}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \le 40 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



a) (10,20) soluzio hoberena da.

b) Ez, hirugarren lantegiaren ordu guztiak ez dira erabiltzen, lantegi honen orduak baliabide oparoa da, lehen eta bigarren lantegien orduak, ostera, baliabide urriak dira.

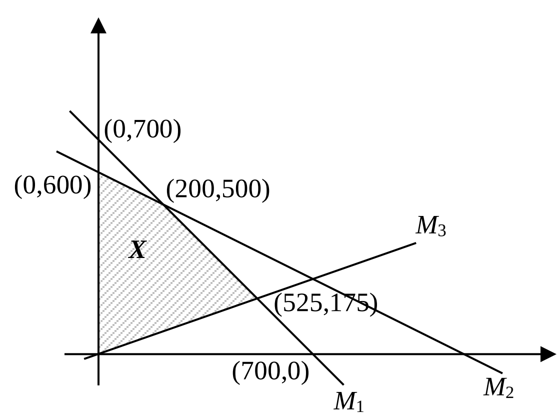
c) m_m motorren mozkina bada: $m_f = -\frac{80}{m_m} = -1 = m_2$; hau da, $m_m = 80\,€$.

d) Irudian M_2 desagertzen bada (sar ditzakegu nahi ditugun ordu kopurua) soluzio hoberen berria (0,60) puntuan kokatzen da.

20.- a) x_1 $K1$ produktuaren tona kopurua eta x_2 $K2$ produktuaren tona kopurua badira,

$$\max(2000x_1 + 3000x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 700 \\ x_1 + 2x_2 \le 1200 \\ x_1 \le 3x_2\ [x_1 \le 0,75(x_1 + x_2)] \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$



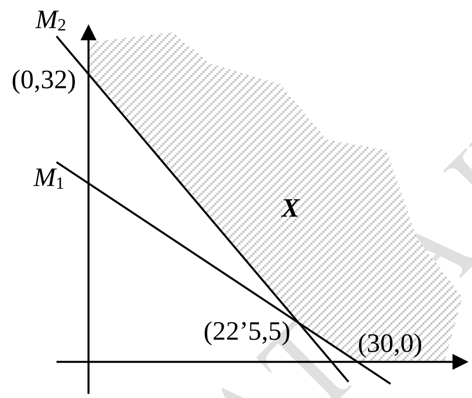
Soluzio hoberena (200,500). Hau da, enpresak 200 tona $K1$ eta 500 tona $K2$ ekoizten baditu, bere sarrera maximizatzen du: $f(200,500) = 1900000\,€$.

b) $K1$ produktuaren preziorik handiena 3000 € da.

c) B lehengaiaren 200 tona, gehienez, eskuratuko du eta tonako 1000 €, gehienez, ordainduko du.

21.- x_1 alpapa tonak eta x_2 erremolatxa tonak badira,

$$\min 250x_1 + 200x_2$$
$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \geq 600 \\ 30x_1 + 25x_2 \geq 800 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



a) Soluzio hoberena (0,32) da.

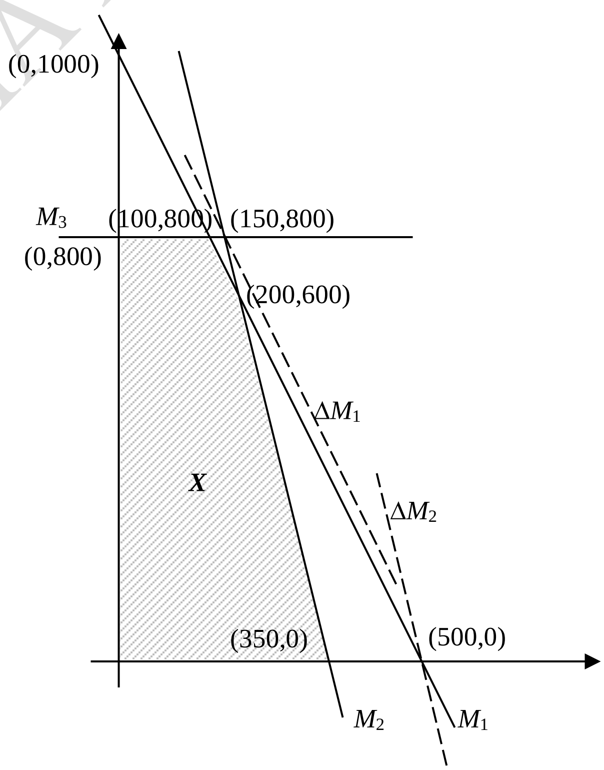
b) Soluzio hoberena ez da aldatuko eta dietan A motako elikagaiak presentzia handiagoa izango du: 600 unitatetik 960 unitatera.

c) Soluzio hoberena (22'5,5) izango da.

22.- x_1: garia tonatan

x_2: garagarra tonatan

$$\max 200x_1 + 130x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 120x_1 + 30x_2 \leq 42000 \\ x_2 \leq 800 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Nekazariak sarrerak maximizatu nahi baditu, 200 hektarea (100 tona) gariarekin eta 800 hektarea (800 tona) garagarrarekin landatuko du.

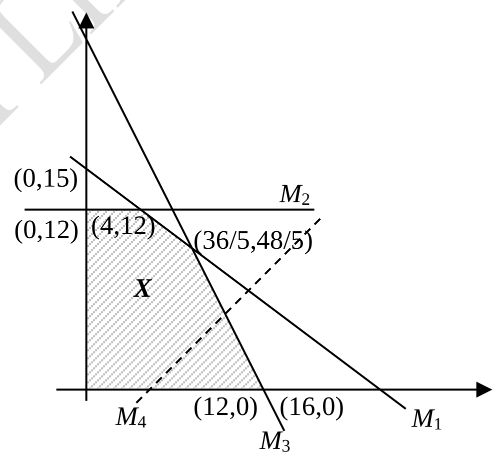
Landa gehiago alokatuko zuen? Interesatuko litzaioke 100 ha gehiago alokatzea eta gehienez 100 €/ha ordainduko luke.

Aurrekontuaren murrizketa bigarrena da eta ez zaio batere interesatzen edozein motatako mailegurik eskatu.

Garagarraren prezio berria 60 €/tona bada: helburu funtzio berria: $f(x_1, x_2) = 200x_1 + 60x_2$ eta soluzio hoberen berria (200,600) da.
Egoera berri horretan, mailegua eskatzea interesatu litzaioke: 18000 € gehiago eskatzea eta gehienez %33 ordainduko luke (kasu horretan maileguaren amortizazioa ere lortzen du).

23.- x_1 lignito tonak eta x_2 antrazita tonak.

$$\max 20x_1 + 40x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 60 \\ 4x_2 \le 48 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 48 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



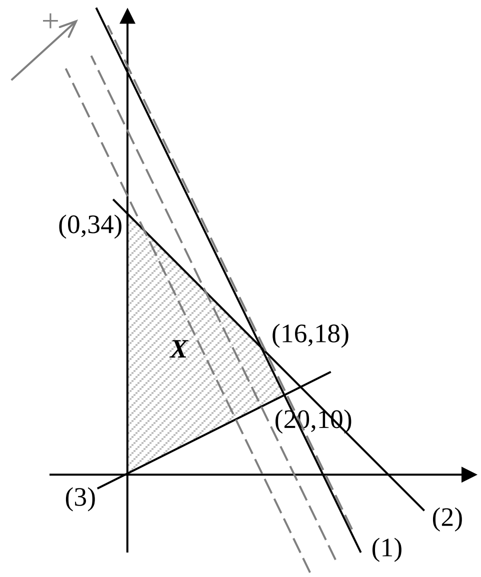
a) Soluzio hoberena (4,12) eta balio hoberena 560 €-koa da.

b) $m_f = -\frac{m_l}{40} \le -\frac{3}{4}$, hau da, $m_l \ge 30$ denean (m_l lignitoren mozkina izanik).

c) Mozketaren fasean prest egongo litzateke 6 ordu sartzeko gehienez 20/3 euro orduko prezioan. Aukeraketaren fasean prest egongo litzateke 12 ordu sartzeko gehienez 10/3 euro orduko prezioan eta garbiketa fasean ez zaio interesatzen.

d) $x_1 - x_2 \le 4$ da M_4 murrizketa berria, eta (4,12) puntuak soluzio egingarria izaten jarraitzen duenez, berak izan behar du soluzio hoberena.

24.-



a) $a=10$ bada, soluzio hoberena $\overline{(16,18)(20,10)}$ segmentu osoan dago.

b) $a>20$ bada, soluzio hoberena $(0,34)$ da.

$a=20$ bada, soluzio hoberena $\overline{(0,34)(16,18)}$ da.

$10<a<20$ bada, soluzio hoberena $(16,18)$ da.

$a=10$ bada, soluzio hoberena $\overline{(16,18)(20,10)}$ da.

$a<10$ bada, soluzio hoberena $(20,10)$ da.

c) i) $y \le 0,7(x+y) \Rightarrow 7x-3y \ge 0$.

ii) $x \ge y$ eta $x \le 2y$.