3 Aldagai askoko optimizazioa

3.1 Kontzeptu eta emaitza orokorrak

3.1.1 Aldagai askoko optimizazioko problemen planteamendu orokorra

Optimizazioko problemak honela azal daitezke: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funtzioa eta $X \subset \mathbb{R}^n$ multzoa (*f* funtzioa *X* multzoan definituta dago) hartuz, aurkitu *X* multzoan funtzioak har dezakeen balio handiena eta txikiena, hala nola balio horiek zein puntutan hartzen dituzten. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funtzioa ***helburu funtzioa*** deituko dugu, *X* multzoa ***multzo egingarria*** eta $\boldsymbol{x} \in X$ puntua ***soluzio egingarria***.

Optimizazioko problema desberdinak ditugu *X* soluzio egingarrien multzoaren arabera:

- *X* funtzioaren existentzi eremu osoa denean, ***murrizketarik gabeko optimizazioa***.
- *X* berdintasun ekuazioen bitartez definitua dagoenean, ***optimizazioa berdintza-murrizketekin***.
- *X* multzoa berdintza edo/eta desberdintza-murrizketekin definitua dagoenean, ***optimizazioa multzoetan***.
- Helburu funtzioa eta murrizketa guztiak linealak direnean, ***programazio lineala***.

3.1.2 Mutur lokalak eta globalak

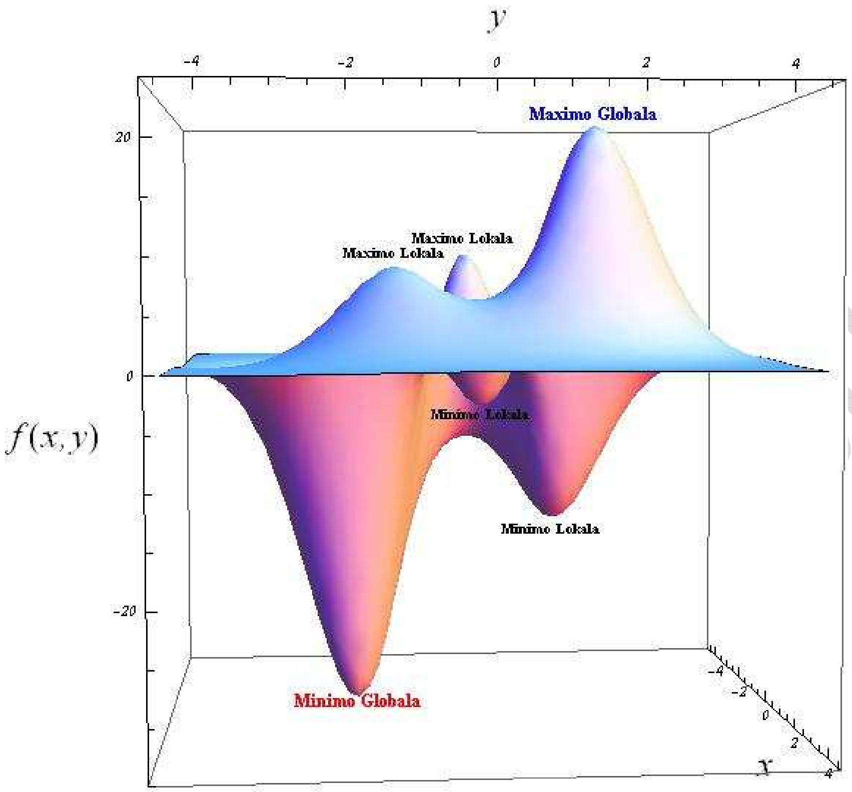
Demagun $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funtzioa eta $X \subset \mathbb{R}^n$ multzoa direla. Funtzioari balio maximoa edo minimoa ematen dion $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ puntua ***maximo*** edo ***minimo globala*** deituko dugu eta funtzioaren balio maximoa edo minimoa, hurrenez hurren, honela adieraziko ditugu:

$$\max_{x \in X} f(\boldsymbol{x}) \text{ eta } \min_{x \in X} f(\boldsymbol{x}).$$

- $\bar{x} \in X$ puntua *X* multzoan *f*-ren ***maximo globala*** dela esango dugu, edozein $x \in X$ puntutarako $f(\bar{x}) \geq f(x)$ betetzen bada.
- $\bar{x} \in X$ puntua *X* multzoan *f*-ren ***minimo globala*** dela esango dugu, edozein $x \in X$ puntutarako $f(\bar{x}) \leq f(x)$ betetzen bada.
- $\bar{x} \in X$ puntua *X* multzoan *f*-ren ***maximo lokala*** dela esango dugu, existitzen bada $\bar{x}$ puntuko ingururik, $B(\bar{x})$, non edozein $x \in B(\bar{x})$ puntutarako $f(\bar{x}) \geq f(x)$ betetzen den.
- $\bar{x} \in X$ puntua *X* multzoan *f*-ren ***minimo lokala*** dela esango dugu, existitzen bada $\bar{x}$ puntuko ingururik, $B(\bar{x})$, non edozein $x \in B(\bar{x})$ puntutarako $f(\bar{x}) \leq f(x)$ betetzen den.

3.1.3 Mutur globalen existentzia. Weierstrass-en teorema

X multzo trinkoan *f* funtzioa jarraitua bada, orduan, existitzen dira *f*-ren maximo eta minimo globalak *X* multzoan.



3.1.4 Ebazpen grafikoa helburu-funtzioaren setra-kurben bitartez

Helburu funtzioaren sestra-kurbak aztertzen, optimizazioko problema errazak grafikoki ebatziko ditugu.

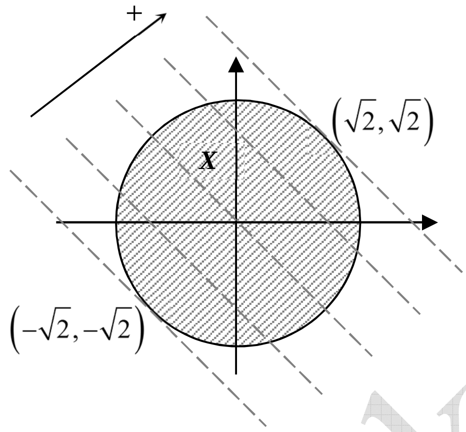
Adibidea: Kalkulatu $f(x,y)=x+y$ funtzioaren mutur lokalak eta globalak $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le 4\}$ multzoan.

Azterketa grafikoa egin ondoren, $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ minimo global hertsia eta $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ maximo global hertsia direla ondorioztatzen dugu. Puntu horiek problemaren simetriagatik lortuko ditugu edo, bestela, tangentziaren baldintza erabiliz. Baldintza hori honela lortzen da: grafikoan argi geratzen denez, soluzio hoberenean, $x^2+y^2=4$ zirkunferentziaren zuzen ukitzaileak, helburu funtzioaren sestra-kurben malda bera du. Helburu funtzioaren sestra-kurben $(x+y=k)$ malda -1 da eta zirkunferentziaren zuzen ukitzailearen malda (x,y) puntuan:

$$m=\frac{-f_1(x,y)}{f_2(x,y)}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}.$$

Beraz, tangentziaren baldintza $\dfrac{x}{y} = 1$ da.

$x^2 + y^2 = 4$ ekuazio betetzen duenez: $2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ eta horrela maximo globala $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ eta minimo globala $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.



3.2 Murrizketarik gabeko optimizazioa

3.2.1 Mutur lokalerako lehen ordenako baldintza beharrezkoak

$f(x, y)$ $C^1(E)$ klaseko funtzioa da eta $(\bar{x}, \bar{y})$ E-ren barne-puntua. f funtzioak $(\bar{x}, \bar{y})$ puntuan maximo edo minimo lokala lortzeko

$$f_x(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \text{eta} \quad f_y(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

betetzea beharrezkoa da. Baldintza beharrezko hau betetzen duten puntuak f-ren *puntu kritikoak* deituko ditugu.

Adibidea: $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2y^2$

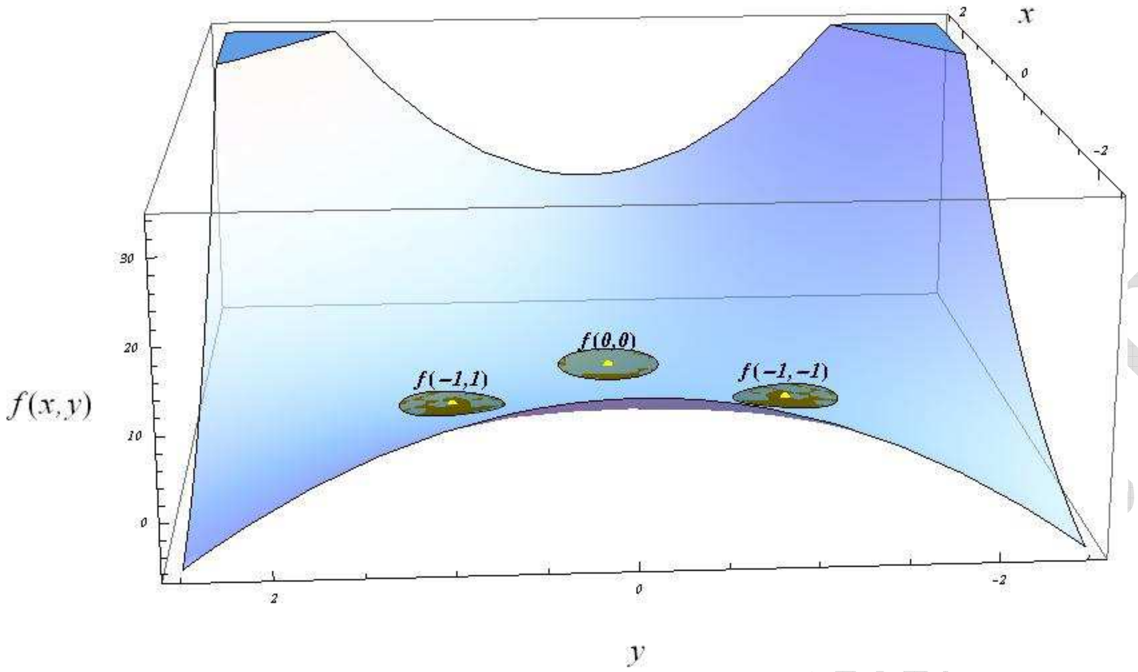
$f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2y^2$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ da. Baldintza beharrezkoa aplikatuko dugu puntu kritikoak aurkitzeko (existitzen badira):

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x + 2y^2 = 0. \\ f_y(x, y) = 4xy + 4y = 0 \Rightarrow 4y(x+1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ edo } x = -1. \end{cases}$$

$y = 0 \Rightarrow x = 0.$
$x = -1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1.$

Beraz, $(0, 0)$, $(-1, 1)$ eta $(-1, -1)$ dira f-ren puntu kritikoak



3.2.2 Mutur lokalerako bigarren ordenako baldintza nahikoak

Demagun $U \subset \mathbb{R}^2$ multzo irekia eta $f: U \to \mathbb{R}$, $C^2(U)$ klaseko funtzioa direla. *f*-ren hessiarra $(x,y) \in U$ puntuan determinante hau da:

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}.$$

Mutur lokalerako baldintza nahikoak

$f(x,y)$, $C^2(E)$ klaseko funtzioa da eta $(\bar{x},\bar{y})$ *f*-ren puntu kritikoa.

i) $H_f(\bar{x},\bar{y}) > 0$ eta $f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) < 0$ betetzen bada, orduan $(\bar{x},\bar{y})$ puntua *f*-ren maximo lokala da.

ii) $H_f(\bar{x},\bar{y}) > 0$ eta $f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) > 0$ betetzen bada, orduan $(\bar{x},\bar{y})$ puntua *f*-ren minimo lokala da.

iii) $H_f(\bar{x},\bar{y}) < 0$ betetzen bada, orduan $(\bar{x},\bar{y})$ puntua ez da *f*-ren muturra.

Adibideko puntu kritikoetan aztertuko ditugu baldintza nahikoak:

$$\left.\begin{aligned} f_{11}(x,y) &= 2 \\ f_{12}(x,y) &= 4y \\ f_{22}(x,y) &= 4x+4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 4y \\ 4y & 4x+4 \end{vmatrix} = 8x + 8 - 16y^2 .$$

$H_f(0,0) = 8 > 0$ eta $f_{11}(0,0) = 2 > 0$ denez, $(0,0)$ minimo lokala da.

$H_f(-1,1) = -16 < 0$ denez, $(-1,1)$ ez da muturra.

$H_f(-1,-1) = -16 < 0$ denez, $(-1,-1)$ ez da muturra.

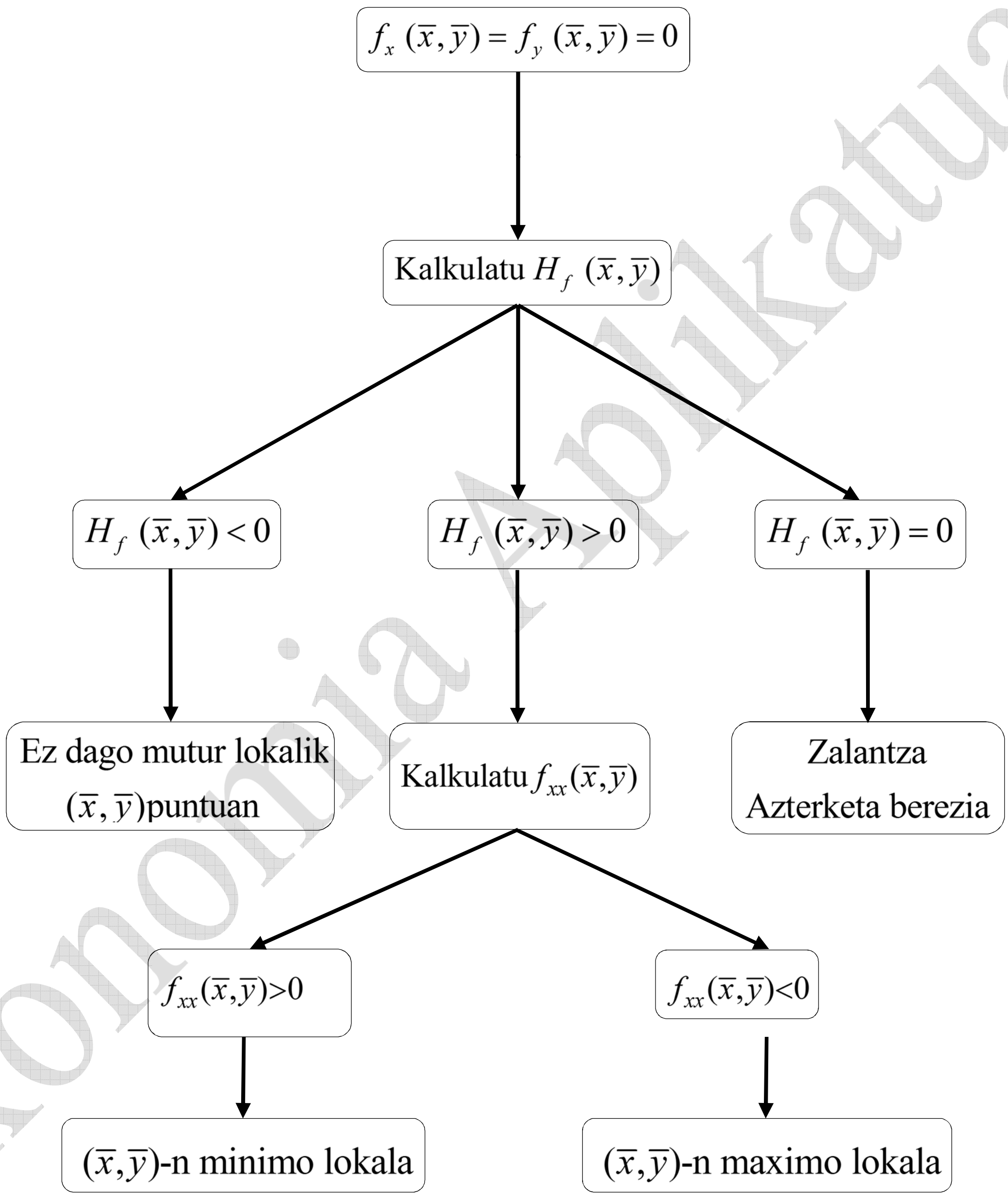
Orduan, $(0,0)$ puntua *f*-ren minimo lokal bakarra da eta ez dago maximorik.

Optimizazioa murrizketarik gabe

Demagun $f \in C^2(E)$ eta $(\overline{x}, \overline{y}) \in \text{int}(E)$

***f* funtzioaren mutur lokalak**

$$H_f(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\overline{x}, \overline{y}) & f_{xy}(\overline{x}, \overline{y}) \\ f_{xy}(\overline{x}, \overline{y}) & f_{yy}(\overline{x}, \overline{y}) \end{vmatrix}$$



3.2.3 Funtzio ganbilak eta ahurrak. Programazio ganbilaren oinarrizko teorema

$f \in C^2(E)$ izanik eta E irekia eta ganbila:

i) *f funtzioa ganbila* da E multzoan, baldin eta soilik baldin, edozein $(x, y) \in E$ puntutarako $H_f(x, y) \geq 0$, $f_{xx}(x, y) \geq 0$ eta $f_{yy}(x, y) \geq 0$.

ii) *f funtzioa ahurra* da E multzoan , baldin eta soilik baldin, edozein $(x, y) \in E$ puntutarako $H_f(x, y) \geq 0$, $f_{xx}(x, y) \leq 0$ eta $f_{yy}(x, y) \leq 0$.

Programazio ganbilaren oinarrizko teorema

Demagun $f \in C^2(E)$, E multzo ganbila eta $(\bar{x}, \bar{y})$ E multzoko barne-puntua:

i) f funtzioa *ganbila* bada E-n eta $(\bar{x}, \bar{y})$ puntuan minimo lokala lortzen bada, minimo globala izango da.

ii) f funtzioa *ahurra* bada E-n eta $(\bar{x}, \bar{y})$ puntuan maximo lokala lortzen bada, maximo globala izango da.

adibidea: Kalkulatu $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y - 3$ funtzioaren mutur globalak.

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ funtzioaren puntu kritikoak aurkituko ditugu:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ f_2(x, y) = 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2. \end{cases}$$

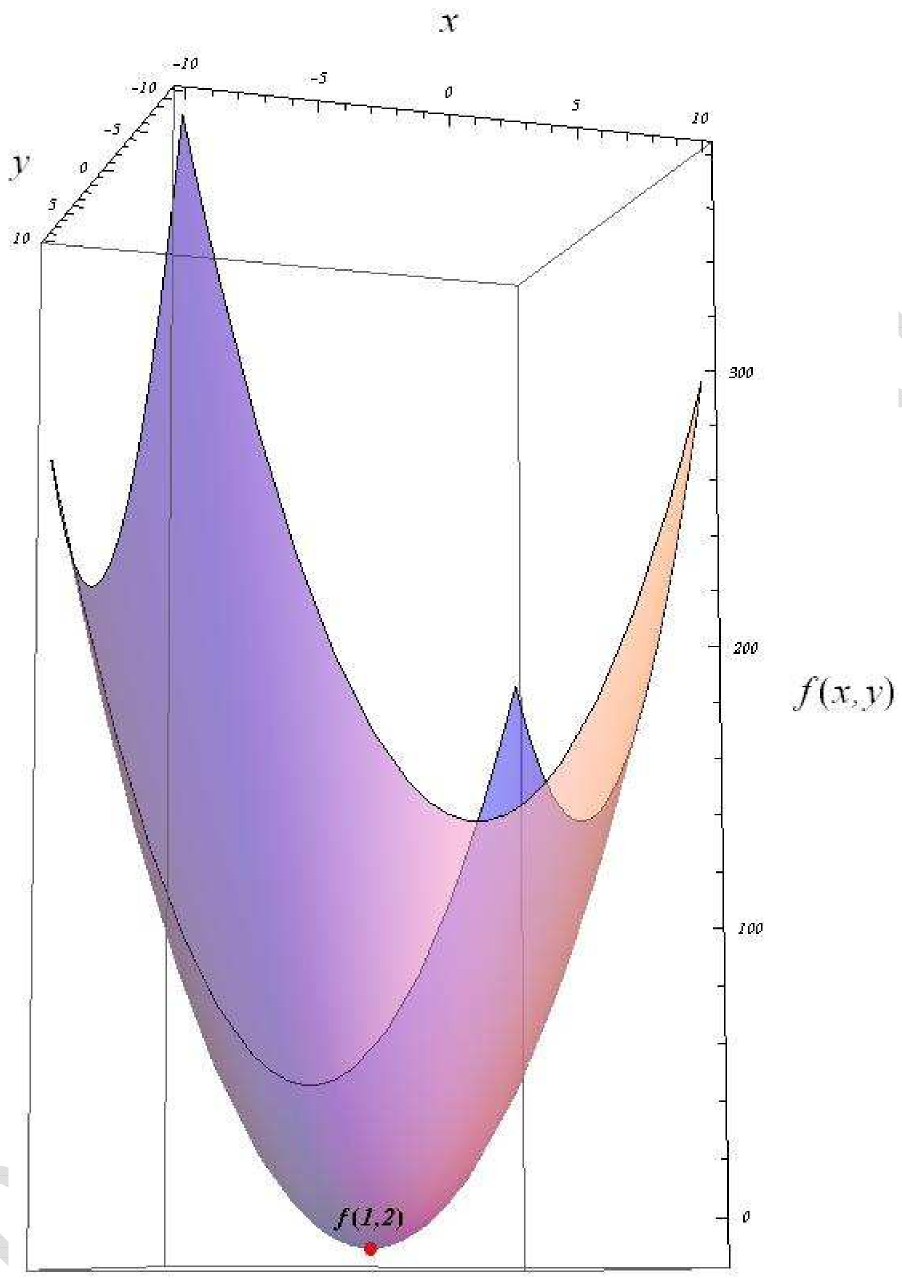
Beraz, $(1, 2)$ puntua da f-ren puntu kritiko bakarra. Azter ditzagun baldintza nahikoak:

$$\left.\begin{array}{l} f_{11}(x, y) = 4 \\ f_{12}(x, y) = 0 \\ f_{22}(x, y) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Horrela, $H_f(1, 2) = 8$ eta $f_{11}(1, 2) = 4$. Hortaz, (1,2) puntua minimo lokala da.

Gainera, edozein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puntutarako $f_{11}(x, y) > 0$, $f_{22}(x, y) > 0$ eta $H_f(x, y) > 0$ direnez, f ganbila da $\mathbb{R}^2$ osoan eta ondorioz, $(1, 2)$ puntua minimo globala da.

$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y - 3$



3.3 Optimizazioa berdintza-murrizketekin

3.3.1 Ebazpen-metodoa aldagai-aldaketaren bidez

Problema ebazteko emango dugun lehen metodoa, aldagai aldaketarena da eta honetan datza: murrizketaren aldagai bat beste aldagaien funtzio moduan askatu eta helburu funtzioan ordezkatu. Ondoren, geratzen dena ebatzi, murrizketarik gabeko optimizazioko problema baita.

Adibidea: Ebatzi problema hau:

$$\begin{array}{l} \min\ ((x-1)^2 + y^2) \\ x - y = 3 \end{array}$$

$x - y = 3$ murrizketan *y* aldagaia askatuko dugu, $y = x - 3$ lortuz.
Helburu funtzioan ordezkatuko dugu:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + (x-3)^2 = 2x^2 - 8x + 10 .$$

Modu horretan, murrizketarik gabeko aldagai bateko problema geratzen da. Beraz, minimizatu behar dugun funtzioa hauxe da:

$$h(x) = 2x^2 - 8x + 10 .$$

$h \in C^2(\mathbb{R})$ da eta maximoa edo minimoa izateko hautagaiak (puntu kritikoak) $h'(x) = 4x - 8 = 0$ berdintzaren soluzioak dira, hau da, $x = 2$.
$x \in \mathbb{R}$ puntu guztietarako $h''(x) = 4 > 0$ denez, *h* funtzioa $\mathbb{R}$ osoan ganbila da, eta beraz, $x = 2$ puntuan minimo globala lortzen du. Orduan, *f* funtzioak $(2,-1)$ puntuan $x - y = 3$ murrizketak baldintzatutako minimo globala lortzen du, zeren eta $x = 2$ bada, $y = 2 - 3 = -1$ baita.

3.3.2 Mutur lokalerako lehen ordenako baldintza beharrezkoak

Demagun

$$\begin{array}{l} \text{opt } f(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{array}$$

problema dela, $f(x, y)$ eta $g(x, y)$ funtzioak $C^1(E)$ klasekoak izanik eta *E*-ko barne-puntua den $(\overline{x}, \overline{y})$ puntuan $g_x(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$ edo $g_y(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$ da. *f* funtzioak $(\overline{x}, \overline{y})$ puntuan $g(x, y) = 0$ murrizketari baldintzatutako mutur lokala lortzeko ondokoa beharrezkoa da:

$\overline{\lambda}$ existitu behar da non:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = f_x(\bar{x},\bar{y}) - \lambda g_x(\bar{x},\bar{y}) = 0 \\ \mathcal{L}_y(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = f_y(\bar{x},\bar{y}) - \lambda g_y(\bar{x},\bar{y}) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = -g(\bar{x},\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

Baldintza beharrezko horiek betetzen dituzten puntuak *f*-ren *puntu kritikoak* dira.

Adibidea:

$$\begin{gathered} \text{opt } (x^2 - y) \\ y + 2x + 5 = 0 \end{gathered}$$

Kalkulatu problemari elkartutako funtzio lagrangearraren puntu kritikoak.

Funtzio lagrangearra osatuko dugu: $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 - y - \lambda(y + 2x + 5)$.

Eta deribatuak zerora berdindu ondoren, sortzen den sistema ebatziko dugu:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2x - 2\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= -1 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= -(y + 2x + 5) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; x = -1,\; y = -3 \text{ eta } \lambda = -1.$$

Ondorioz, $\mathcal{L}$-ren puntu kritiko bakarra $(-1,-3,-1)$ da.

3.3.3 Mutur lokalerako bigarren ordenako baldintza nahikoak

Demagun problema hau dugula:

$$\begin{gathered} \text{opt } f(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{gathered}$$

non $f(x,y)$ eta $g(x,y)$ funtzioak $C^2(E)$ klasekoak eta $(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda})$ puntua $\mathcal{L}$-ren puntu kritikoa izanik.

i) Ondokoa betetzen bada:

$$\Delta(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{xy}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{x\lambda}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) \\ \mathcal{L}_{yx}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{yy}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{y\lambda}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) \\ \mathcal{L}_{\lambda x}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{\lambda y}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) \end{vmatrix} > 0,$$

f funtzioak $(\bar{x},\bar{y})$ puntuan $g(x,y) = 0$ murrizketari baldintzatutako maximo lokala lortzen du.

ii) Ondokoa betetzen bada:

$$\Delta(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{xy}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{x\lambda}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) \\ \mathcal{L}_{yx}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{yy}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{y\lambda}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) \\ \mathcal{L}_{\lambda x}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{\lambda y}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}) \end{vmatrix} < 0,$$

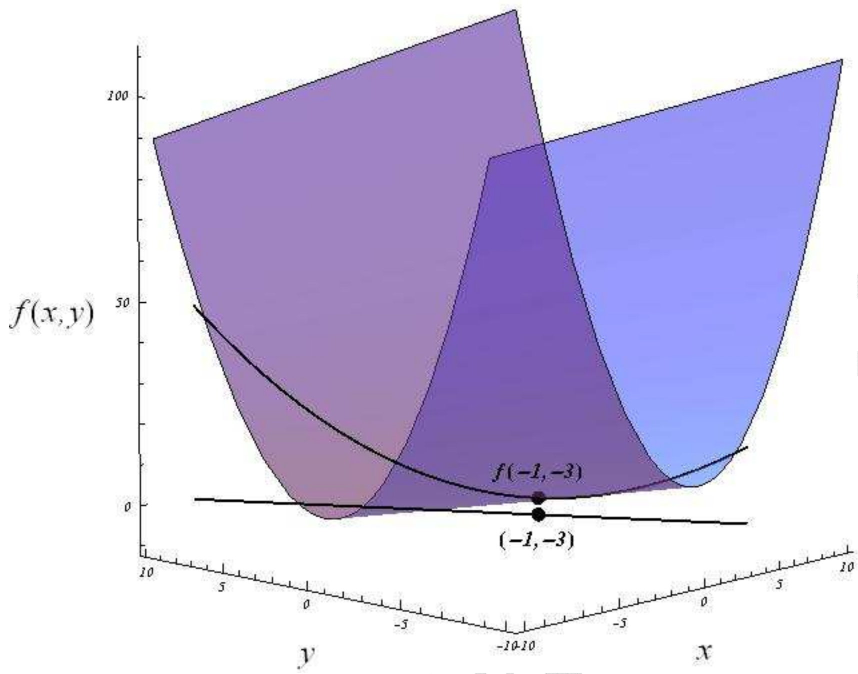
f funtzioak $(\bar{x},\bar{y})$ puntuan $g(x,y) = 0$ murrizketari baldintzatutako minimo lokala lortzen du.

Adibidea: aurreko problemarekin jarraituz puntua kritikoan aztertuko dugu:

$$\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix}\mathcal{L}_{xx}(x,y,\lambda) & \mathcal{L}_{xy}(x,y,\lambda) & \mathcal{L}_{x\lambda}(x,y,\lambda)\\ \mathcal{L}_{yx}(x,y,\lambda) & \mathcal{L}_{yy}(x,y,\lambda) & \mathcal{L}_{y\lambda}(x,y,\lambda)\\ \mathcal{L}_{\lambda x}(x,y,\lambda) & \mathcal{L}_{\lambda y}(x,y,\lambda) & \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(x,y,\lambda)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{vmatrix}.$$

$$\Delta(-1,-3,-1)=\begin{vmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-2<0.$$

Beraz, f funtzioak $(-1,-3)$ puntuan $y+2x+5=0$ murrizketari baldintzatutako minimo lokala lortzen du.



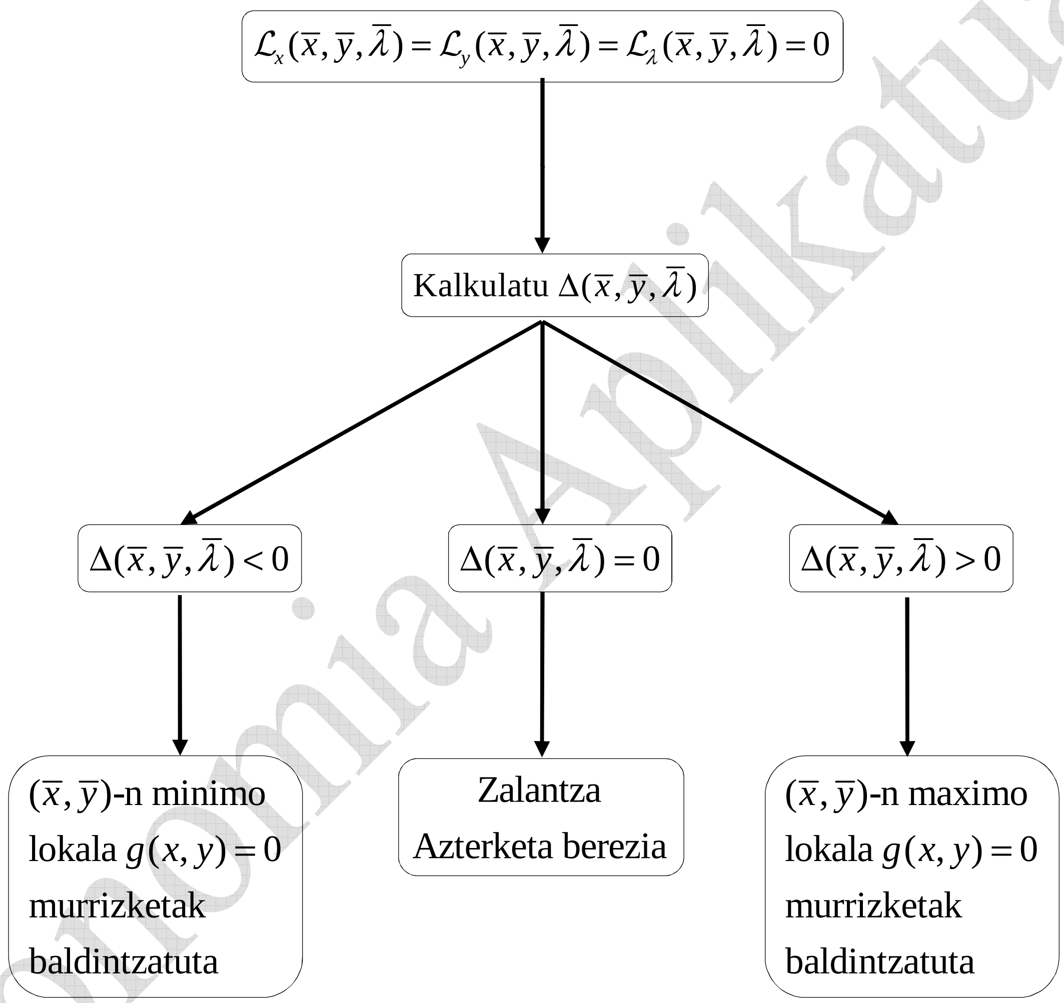
Optimizazioa berdintza-murrizketekin

Demagun $f \in C^2(E)$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{int}(E)$ eta $g_x(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ edo $g_y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$

***f* funtzioaren mutur lokalak *g*(*x*,*y*)=0 murrizketak baldintzatuta**

$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

$$\Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{x\lambda}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \\ \mathcal{L}_{xy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{yy}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{y\lambda}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \\ \mathcal{L}_{x\lambda}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) & \mathcal{L}_{y\lambda}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) & 0 \end{vmatrix}$$



3.4 Optimizazioa multzoetan: ebazpen grafikoa eta analitikoa

3.4.1. Sestra-kurbak erabiliz

Orokorrean, ondoko prozedura jarraituko dugu:

1. urratsa: X, soluzio egingarrien multzoa, irudikatuko dugu. Trinkoa den eta funtzioa bertan jarraitua den aztertuko dugu, Weierstrass-en teoremaren arabera, mutur globalen existentzia ziurtatzea posible den aztertzeko.

2. urratsa: Helburu funtzioaren sestra-kurbak irudikatuko ditugu eta hazkunde-norabidea zehaztuko dugu.

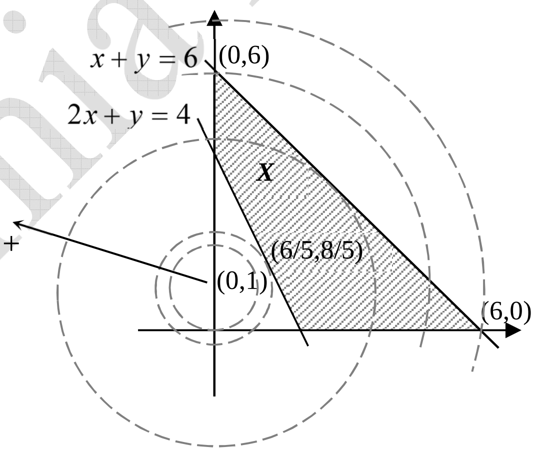
3. urratsa: Sestra-kurben laguntzarekin, X multzoan f funtzioaren mutur hautagaiak kokatuko ditugu.

4. urratsa: Aurreko urratsean lortutako puntuak kalkulatuko ditugu, mutur lokalerako baldintza beharrezkoak erabiliz (murrizketa bati baldintzatuak edo baldintzatu gabeak, kasuaren arabera).

5. urratsa: Hautagaien artean mutur globalak emango ditugu. Zalantza dugunean, hautagaiak funtzioan ordezkatuko ditugu eta balio handiena lortzen duena maximo globala izango da, eta balio txikiena lortzen duena minimo globala.

Adibidea: Aurkitu $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ funtzioaren mutur globalak $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \leq 6,\ 2x + y \geq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ multzoan.

1. urratsa:



X multzo trinkoan f funtzioa jarraitua denez, Weierstrass-en teoremaren arabera, existitzen dira f-ren maximo eta minimo globalak X multzoan.

2. urratsa: setra-kurbak irudikatu ondoren funtzioaren hazkunde-norabidea zehaztuta dugu.

3. urratsa: Sestra-kurben laguntzarekin, X multzoan f funtzioaren mutur globalak kokatzen ditugu. Hain zuzen, Maximo globala (6,0) puntuan lortzen dela ikusten dugu. Zalantza balego hautagaiak hartuko genituzke. Adibidez, gure kasuan irudiak garbi erakusten du, baina horrela ez balitz,

zalantza (6,0) eta (0,6) artean egongo da. Kasu horretan biak gordetzen ditugu azkeneko urratsean maximoa zein den aztertzeko.

Minimo globalari dagokionez, hautagai bakarra dugu, funtzioaren sestra-kurba eta $2x+y=4$ zuzenak ukitzaileak diren puntuan lortzen da. Puntu hori modu analitikoan hurrengo urratsean kalkulatuko dugu. Kasu honetan, mutur baldintzatuen teoriarekin.

4. urratsa: ukitzailea lortu $2x+y=4$ ekuazioari baldintzatutako mutur lokalerako baldintza beharrezkoekin:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+(y-1)^2-\lambda(2x+y-4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-2\lambda=0\Rightarrow\lambda=x\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2(y-1)-\lambda=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2y-2-x=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=2x+y-4=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{6}{5},\ y=\frac{8}{5},\ \lambda=\frac{6}{5}.$$

Beraz, $\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$ da, hautagai hori, hau da, minimo globala.

5. urratsa. Hautagaien arten mutur globalak eman

Minimo globala: kasu honetan ez dago dudarik hautagai bakarra genuen eta. Horrela, $\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$ puntuan lortzen du funtzioak minimo globala ***X*** multzoan.

Maximo globala: garbi ez genuelako bi hautagaiak hartu baditugu, maximo lokalen artean funtzioaren balio handiena ematen duena: $f(6,0)=36$ eta $f(0,6)=25$, hortaz, $(6,0)$ puntuan lortzen du funtzioak maximo globala ***X*** multzoan.

3.4.2. Sestra-kurbak erabili gabe

Baina funtzio baten sestra-kurbak irudikatzea oso zaila edo ezinezkoa denean edo sestra kurbez baliatzen ez garenean, azterketa analitikoa erabiliko dugu. **Orokorrean**, ondoko prozedura jarraituko dugu:

1. urratsa: X, soluzio egingarrien multzoa, irudikatuko dugu.

2. urratsa: Weierstrass-en teorema aplikatuko dugu X multzoan mutur globalen existentzia ziurtatzeko.

3. urratsa: Mutur ez baldintzatuen teoriaren baldintza beharrezkoak betetzen dituzten hautagaietatik $int(X)$ multzoan daudenekin geratuko gara.

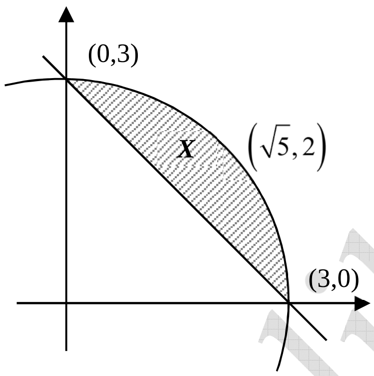
4. urratsa: Multzoaren $fr(X)$ definitzen duten murrizketekin lan egingo dugu orain. Mutur baldintzatuen teoriaren baldintza beharrezkoak betetzen dituzten hautagaietatik $fr(X)$

multzoan daudenekin, baina ebaki-puntuak ez direnekin, geratuko gara.

5. urratsa: 3. eta 4. urratsetan lortutako puntuak eta murrizketen arteko ebaki-puntuak funtzioan ordezkatuko ditugu eta balio handiena duena maximo globala izango da eta balio txikiena duena, minimo globala.

Adibidea: Aurkitu $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 9,\, x+y \geq 3\}$ multzoan $f(x,y) = x^2 - y^2 + 8y$ funtzioaren mutur globalak.

1. urratsa



2. urratsa. X trinkoan (itxia eta bornatua) f funtzioa jarraitua denez, X multzoan f funtzioaren maximo eta minimo globalak existituko dira.

3. urratsa: ez baldintzatutako mutur lokalerako baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x = 0 \\ f_y(x,y) &= -2y+8 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0,\ y = 4.$$

Sistema horren soluzio bakarra $(0,4)$ da, baina ez dago $int(X)$ multzoan; beraz, X-ren barnealdean ez dago muturrik.

4. urratsa: $fr(X)$ definitzen duten bi murrizketa ditugu:

(1) $x^2+y^2=9$ zirkunferentzia eta

(2) $x+y=3$ zuzena

Horiekin mutur baldintzatuen teoriaren baldintza beharrezkoa aplikatuko dugu:

(1) $x^2+y^2=9$ zirkunferentziaren ekuazioari baldintzatutako mutur lokalerako baldintza beharrezkoak:

Funtzio lagrangearra $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + 8y - \lambda(x^2+y^2-9)$ da eta

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2x - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= -2y + 8 - 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2+y^2-9) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{5},\ y = 2,\ \lambda = 1.$$

Beraz, sistema horren soluzio bakarra $(\sqrt{5},2,1)$ da eta $fr(X)$ multzokoa denez, baina ebaki-puntua ez, mutur hautagai modura gordeko dugu.

(2): $x+y=3$ zuzenaren ekuazioari baldintzatutako mutur lokalerako baldintza beharrezkoak:

Funtzio lagrangearra $\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2-y^2+8y-\lambda(x+y-3)$ da eta

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda=0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=-2y+\lambda=0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=-(x+y-3)=0 \end{cases}$$

Eta sistema horrek ez du soluziorik.

5. urratsa. 3. eta 4. Urratsetan lortutako hautagaiei (3,0) eta (0,3) ebaki puntuak erantsiko dizkiogu eta guztiak funtzioan ordezkatzen ditugu:

$$f(\sqrt{5},2)=17\,,\quad f(3,0)=9 \quad \text{eta} \quad f(0,3)=15\,.$$

Orduan, funtzioak $(3,0)$ puntuan minimo globala lortzen du eta $(\sqrt{5},2)$ puntuan maximo globala.

3.5 Programazio linealaren hastapenak

3.5.1 Programazio linealeko problemen planteamendua eta formulazioa

Programazio linealeko problema berdintza edo desberdintza murrizketak dituen optimizazioko problema da, helburu funtzioa eta murrizketak adierazten dituzten funtzio guztiak linealak izanik. Demagun $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n aldagai direla eta $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ balio multzoa dela. Programazio linealeko problema bat, modu orokorrean, honela formulatuko dugu:

$$\text{opt } (c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n)$$
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots . + a_{1n} x_n \odot_1 b_1 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \ldots . + a_{mn} x_n \odot_m b_m \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

b_i eta a_{ij} $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, n$ $\mathbb{R}$ multzoko balioak eta $\odot$ ikurra berdin- edo desberdin-zeinua $(=,\ \geq,\ \leq)$ izanik.

Programazio linealeko problemetan definizio hauek topatuko ditugu:

Erabaki-aldagaiak: kontrolatzen ditugun aldagaiak dira: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Murrizketak: n erabaki-aldagaietan dauden limiteak m baliabideen mugen ondorioz. Berdintza edo desberdintza moduan idazten dira, parametro hauen arabera: a_{ij}, i baliabidearen kontsumitutako kopurua j jardueraren unitateko, eta b_i, i baliabidearen erabilgarritasuna ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$). Hauei $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ ez-negatibotasun murrizketak eransten zaizkie.

Helburu funtzioa: Optimizatu nahi den funtzio lineala. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erabaki-aldagaien menpe da, eta c_j j $(j = 1, \ldots, n)$ jarduera unitate batean handitzen dugunean, helburu funtzioak jasotzen duen eragina da.

Aurreko ataletan egin bezala, *soluzio egingarria* murrizketa guztiak batera betetzen dituen puntu oro da eta *X soluzio egingarrien multzoa* da**.**

Eta soluzio egingarrien artean helburu funtzioari balio hoberena ematen dioten puntuak *soluzio hoberenak* dira**.**

Adibidea: Gatza saltzen duen enpresa bat bi gatzaga desberdinetik hornitzen da. Hilero, gehienez, *A* gatzagatik 600 tona gatz eta *B* gatzagatik 1400 tona gatz har dezake; gatz hauek nahasiz, kalitate desberdineko bi gatz-mota lor daitezke: lehen mailako gatzak 0,25€/kg. balio du merkatuan eta bigarren mailakoak, ordea, 0,2€/kg. Lehen mailako 1 tona gatz, *A* motako 0,2 tona eta *B* motako 0,8 tona gatz nahasiz lortzen da; eta 2. mailako 1 tona gatz, *A* motako 0,4 tona eta *B* motako 0,6 tona gatz nahasiz.

Aurkitu hilero prestatu behar diren 1. eta 2. mailako gatzen kantitateak sarrerak maximizatzeko.

Programazio linealeko problema planteatuko dugu:

x_1: 1. Mailako gatzetik prestatutako tonak hilean

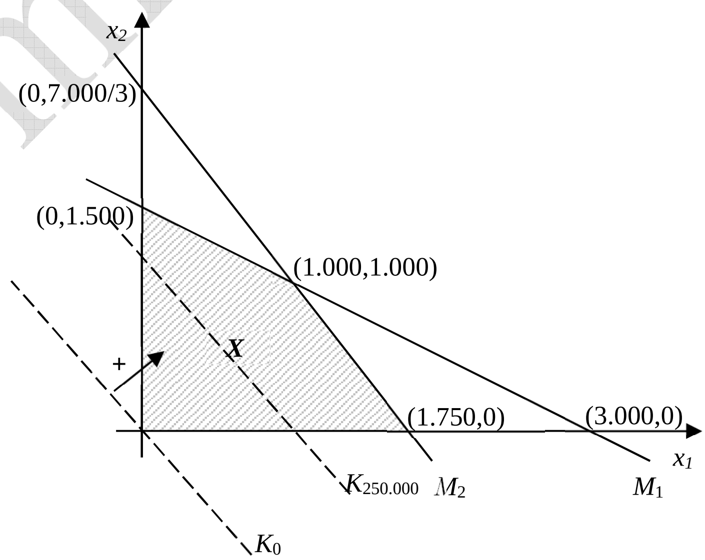
x_2: 1. Mailako gatzetik prestatutako tonak hilean

$$\max\ (250x_1 + 200x_2)$$
$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,4x_2 \leq 600 & (M_1) \\ 0,8x_1 + 0,6x_2 \leq 1.400 & (M_2) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.5.2 Ebazpen grafikoa

Atal honetan programazio linealeko problemak metodo grafikoaren bitartez ebatziko ditugu. *X*, soluzio egingarrien multzoa, irudikatuko dugu eta bertan problemaren soluzio hoberena bilatuko dugu. Argi dago ebazpen metodo hori bi aldagaiko problementzako soilik erabiliko dugula.

Helburu funtzioaren sestra-kurbak erabiliz, funtzioaren balio handiena (1.000,1.000) puntuan lortzen dela eta 450.000 euroko balioa lortzen duela ondorioztatzen dugu.



3.5.3 Programazio linealeko oinarrizko teoremak

• X, programazio linealeko problema baten soluzio egingarrien multzoa, ganbila da.

• Programazio linealeko problema baten soluzio hoberenen multzoa ganbila da.

• Programazio linealeko problema baten soluzio hoberena existitzen bada, horietako bat, gutxienez, problemaren soluzio egingarrien multzoko erpina da.

Aurreko emaitzak soluzioa duen (X itxia eta bornatua delako) programazio linealeko problemaren ebazpena ahalbidetzen du, X multzoko erpin guztiak helburu funtzioan ordezkatuz.
Programazio linealeko problemek ez dute beti soluzioa. Hiru aukera daude:

1. $X = \varnothing$ bada, orduan ez da existitzen soluzio hoberena.
2. $X \neq \varnothing$ da baina helburu funtzioa X multzoan ez dago goi-bornatua (maximoko problema bada) edo behe-bornatua (minimoko problema bada). Orduan, problemak ez du soluziorik.
3. Existitzen da problemaren soluzio hoberena (bat bakarrik edo infinitu soluzio izan daiteke).

3.5.4 Sentikortasun analisia

Aldaketak baliabideen erabilgarritasunetan. Itzal prezioak

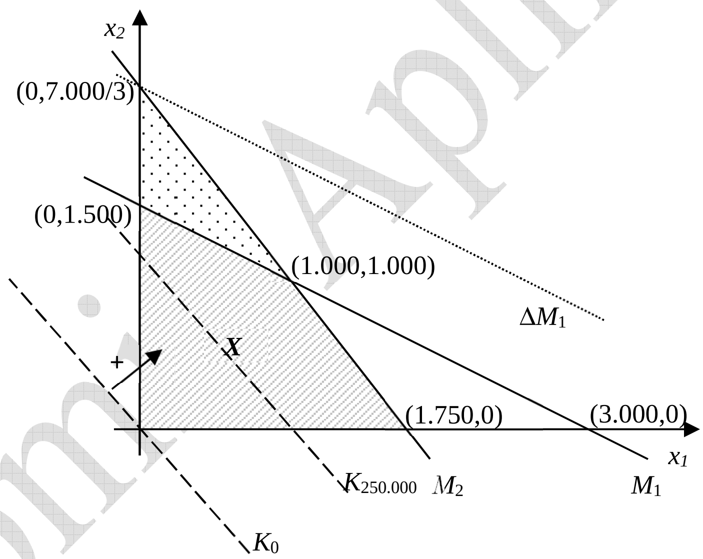
Sentikortasun analisian egiten ohi den galdera hauxe da: murrizketa baten gai independentearen aldaketa marjinalak duen eragina helburu funtzioaren balio hoberenean.
Murrizketa baten baliabidea unitate bat aldatzeak dakarren balio hoberenaren aldaketa da murrizketa horri elkartutako *itzal prezioa*.
Soluzio egingarri batek murrizketa berdintzarekin betetzen badu, bertan *murrizketa asea* dela esango dugu, eta desberdintzarekin betetzen badu, *asegabea* dela esango dugu.
Baliabide bat soluzio hoberenean urria bada, dagokion murrizketa asea da. Horrela, bere erabilgarritasuna unitate bat handituko genuke, horrek balio hoberena hobetuko balu.
Itzal prezioa baliabidearen unitate gehiago bakoitzeko ordainduko genukeen prezioa da (enpresaren aukera-kostua baliabidearen erabilgarritasuna handitzen ez badu).
Murrizketa *asegabe* baten itzal prezioa soluzio hoberenean zero da, baliabide hori oparoa delako.

Adibidean: taula honetan soluzio hoberenean murrizketa bakoitzaren egoera (asea edo asegabea) zein den azaltzen da.

	Murrizketa	$x_1 = 1.000,\ x_2 = 1.000$	egoera
A gatzagako murrizketa	$0,2x_1 + 0,4x_2 \leq 600$	$0,2x_1 + 0,4x_2 = 600$	Asea
A gatzagako murrizketa	$0,8x_1 + 0,6x_2 \leq 1.400$	$0,8x_1 + 0,6x_2 = 1.400$	Asea

Lehen eta bigarren baliabideak (A gatzago eta B gatzagako erabilgarritasuna hilean) soluzio hoberenean erabat kontsumitzen dira eta horregatik, pentsa dezakegu baliabide horien kantitate gehiago eskuratzen bada, agian, helburu funtzioaren balioa handitzen dela.

A gatzagan hilean 600 tona izan ordez, $600 + a$ ($a > 0$) dugula suposatzen dugu. Planteatzen dugun problema hau da: noraino haz daiteke *a* soluzio hoberenaren balioa hobetuz?



Grafikoki ikusten dugu $0,2x_1 + 0,4x_2 = 600$ zuzena (M_1, lehen murrizketa) lekuz alda dezakegula soluzio egingarrien multzoan eraginik eduki ez arte, hau da, (0,7.000/3) punturaino (ΔM_1).

a–ren balio handiena lortzeko (0,7.000/3) puntua $0,2x_1 + 0,4x_2 = 600 + a$ murrizketan ordezkatuz, hau lortzen dugu: $a = 1.000/3$ eta (0, 7.000/3) puntuan helburu funtzioak hartzen duen balioa 1.400.000/3 dela. Hau da, A gatzagako tona erabilgarriak hilean 600etik 2.800/3era handitzen dugunean, mozkina $f(1000,1000) = 450.000$ € izatetik $f(0, 7.000/3) = 1.400.000/3$ € izatera pasatzen da. Horrela, lehen murrizketaren gai independentearekiko balio hoberenaren hazkunde-tasa (beste baldintza guztiak mantentzen diren bitartean) lor dezakegu:

$$\lambda_1 = \frac{f(0,7.000/3) - f(1.000,1.000)}{2.800/3 - 600} = \frac{\frac{1.400.000}{3} - 450.000}{\frac{2.800}{3} - 600} = \frac{\frac{50.000}{3}}{\frac{1.000}{3}} = 50€/\text{tona}.$$

$\lambda_1 = 50$ €/ordu lehen murrizketaren itzal prezioa da. Hau da, enpresak, gehienez, 1800/3 tona estra erosiko lituzke A gatzagan eta, gehienez, 50 euro ordainduko luke tona bakoitzeko.

Bigarren murrizketaren kasuan, aurreko pausuak jarraituz, mozkina (3.000,0) puntuan lortutakoa arte, 750.000 €, hazten da. Orduan,

M_2: $0,8x_1 + 0,6x_2 \leq 1.400 + b$.

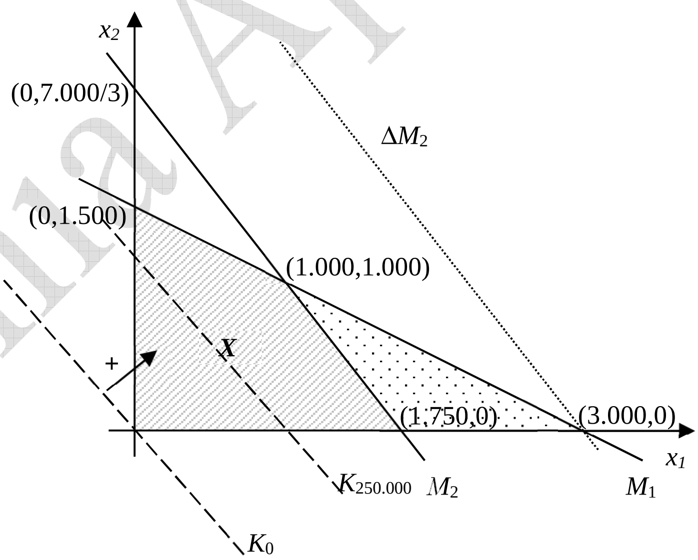
Soluzioa hoberena: (1.000,1.000) $\rightarrow$ (3.000,0).

Baliabidearen hazkundea: $b = 0 \rightarrow b = 1.000$.

Balio hoberena: 450.000 € $\rightarrow$ 750.000 €.

$$\lambda_2 = \frac{f(3.000,0) - f(1.000,1.000)}{2.400 - 1400} = \frac{750.000 - 450.000}{1.000} = 300 \text{ €/tona}.$$

Enpresak, gehienez, 1.000 tona estra erosiko lituzke B gatzagan eta, gehienez, 300 euro ordainduko luke tona bakoitzeko.



Helburu funtzioaren koefizienteen aldaketak

Helburu funtzioaren $c_j \ (j=1,2)$ koefizienteen aldaketek funtzioaren sestra-kurben maldan eragina dute, eta agian, soluzio hoberenaren aldaketan ere.

Adibidean: lehen murrizketaren malda $m_1 = \dfrac{-0,2}{0,4}$ da eta bigarren murrizketarena $m_2 = \dfrac{-0,8}{0,6}$.

Bestalde, m_f helburu funtzioaren sestra-kurben malda $-\infty$ eta 0ren artean dago (ohartu m_f malda, prezio positiboen arteko zatidura negatiboa dela). m_f desberdinetarako (hots, prezioren bat aldatzen bada), zein izango da soluzio hoberena? $-\infty < m_f < \dfrac{-0,8}{0,6}$ bada, soluzio hoberena (1.750,0) da; $m_f = \dfrac{-0,8}{0,6}$ bada, soluzio hoberena (1.750,0) eta (1.000,1.000) arteko segmentua da; $\dfrac{-0,8}{0,6} < m_f < \dfrac{-0,2}{0,4}$ bada, soluzio hoberena (1.000,1.000) da; $m_f = \dfrac{-0,2}{0,4}$ bada, soluzio hoberena (1.000,1.000) eta (0,1500) arteko segmentua da; eta $\dfrac{-0,2}{0,4} < m_f \le 0$ bada, soluzio hoberena (0,1.500) da.

$$-\infty \xleftrightarrow{(1.750,0)} m_2 = \frac{-0,8}{0,6} \xleftrightarrow{(1.000,1.000)} m_1 = \frac{-0,2}{0,4} \xleftrightarrow{(0,1.500)} 0$$