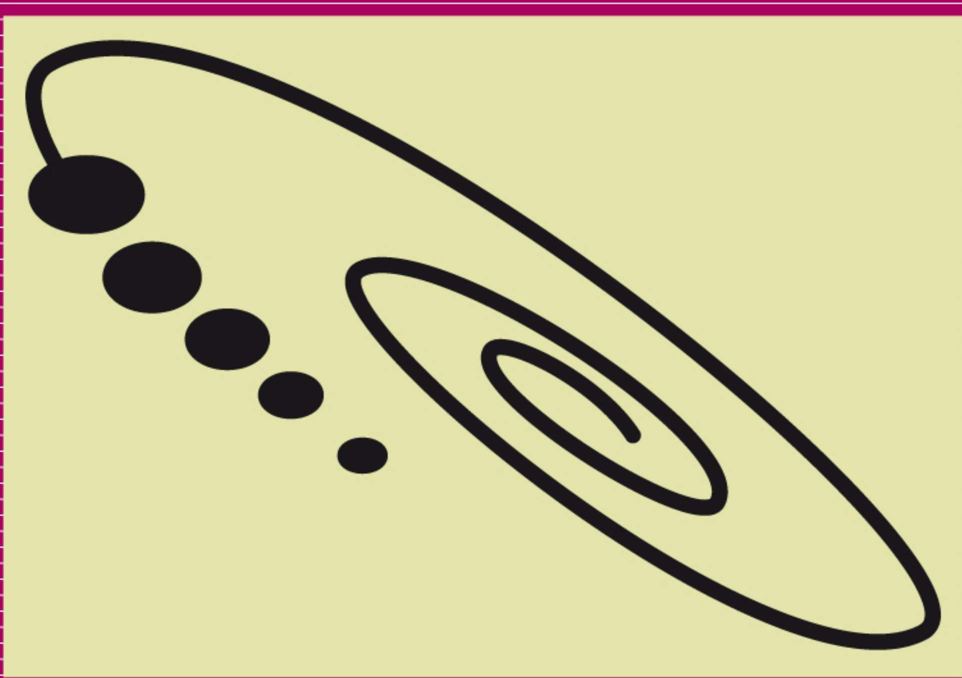
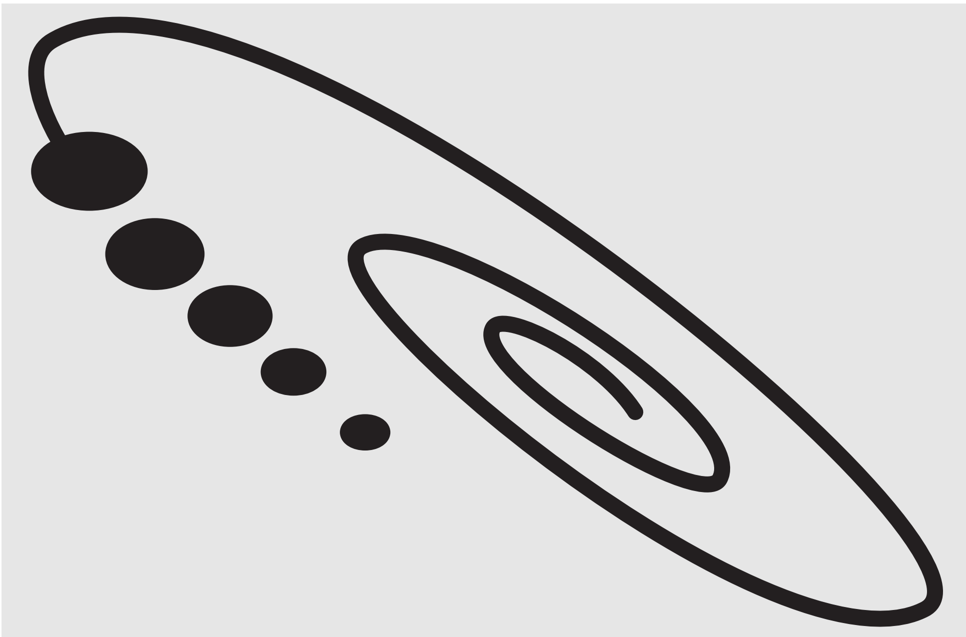
OINARRIZKO ALJEBRA



Iñaki Zurutuza

Elhuyar

OINARRIZKO ALJEBRA



Egilea: Iñaki Zurututza

Elhuyar

EUSKO JAURLARITZA
HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE ETA IKERKETA SAILA

GOBIERNO VASCO
DEPARTAMENTO DE EDUCACION, UNIVERSIDADES E INVESTIGACION

Liburu hau Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailaren laguntzaz argitaratu da.

ISBN: 978-84-92457-44-1

Euskara hainbeste maite
duten nire gurasoei

HITZAURREA

Bi izan dira liburu hau idazteko izan ditudan arrazoiak: lehenengoa, unibertsitatean, euskaraz irakasten diren irakasgaien artean, eta bereziki matematikako materialen artean, dagoen gabezia; bigarren, batxilergoan eta unibertsitatean urte askoren buruan izandako irakaskuntza-esperientzia liburu erabilgarri batean islatzeko nahia. Izan ere, urte askotako esperientzia horrek toki pribilegiatua ematen baitit ikasleek batxilergotik unibertsitatera jauzi egitean dituzten gabeziak eta premiak gertutik ezagutzeko.

Testu honetan aljebraren munduan sartzeko oinarriak ematen dira. Aljebrak eskatzen duen zehaztasun teorikoa alde batera utzi gabe, aljebraren alderdi praktikoa nabarmendu nahi izan da, horretarako testua 120 adibide, 180 ebatzitako ariketa eta proposatutako beste 360 ariketez hornituz. Gaien sekuentziazioari dagokionez, gai bakoitza aurrekoetan oinarrituz osatu da. Esan behar da baita, liburu hau behar bezala jarraitu ahal izateko ez dela beharrezkoa aurrez aljebra-ezagutzak izatea.

Liburua Zientzia eta Ingeniaritzako lehenengo kurtsoko ikasleei zuzenduta dago, aljebrako ikasturte arrunt bat garatzeko erabiltzen diren gai gehienak jaso baitira bertan. Egokitzapen batzuk eginda, aipatutako Zientzietako karreretan testuliburu gisa erabiltzeko material aproposa da.

Liburuko hamahiru gaiak honelaxe antolaturik garatu dira:

Lehenengoan, aljebran murgiltzeko aurreneko tresnak ematen dira. Bektore-espazioak eta horien arteko aplikazioak ongi ulertzeko behar diren kontzeptuak baino ez dira landu. Talde-teoria ez da aipatu, esaterako, eta gero erabili behar ez diren egiturak, idealarena adibidez, ez dira agertzen.

Bigarren eta hirugarren gaiek aljebraren mamia eratzen dute eta hor sartu da matrizearen kontzeptua lehenengo aldiz, homomorfismo bati lotua. Badirudi gaur egun modan jarri dela matrizeak hasieran eta modu independentean ematea; niri, ordea, modu klasikoan azaltzea didaktikoagoa iruditu zait. Bosgarren kapituluan modu abstraktuan definitzen dira, baina berehala aplikazioekin lotu dira eragiketak interpretatu ahal izateko.

Zazpigarren eta bederatzigarren kapituluetan geometria garatzen da. Dimentsio finituko espazioetara mugatzen da egilea eta espaziorik garrantzitsuenetan (R^2 eta R^3) egin dira problema gehienak. Erreferentzia-aldaketaren interpretazioari garrantzia eman nahi izan zaio. Koordenatu homogeneoak eta proiekzio-espazioak aurkeztu besterik ez dira egiten, ez baitzaio egileari egokia iruditu goian aipatutako ikasturtearen mailarako kontzeptu horiek gehiago garatzea.

Biderkadura eskalarra zortzigarren kapituluan sartu da eta ez da forma bilinealekin lotu, nahiz eta hamaikagarrenean, forma koadratikoak definitzeko garaian, forma bilinealak aipatzen diren. Honek ez du inolako arazorik sortzen eta, zertxobait laburragoa egin bazitekeen ere, ikasleentzat mesedegarria dela dirudi kontzeptu gehiegi ez pilatzea. Beste era batera esanda, egilearen ustez, beti ez zaio aurkezpen axiomatikoaren formalismoari jarraitu behar didaktika jokoan dagoenean.

Hamargarren kapituluan diagonaltze-prozesua azaltzen da. Aipatu prozesu horrek matrizeen itxura sinplifikatzeko unean jokatzen duen papera hamabigarren kapituluan erakusten da, forma triangeluar eta Jordan forma kanonikoekin batera. Hamaikagarren kapituluan diagonaltze horrezaz baliatu naiz konikak eta koadrikak sailkatzeko. Aldaera koadratikoen erredukzio-prozesuan egin diren erreferentzia--aldaketei interpretazio geometrikoa ematen zaie.

Bukatzeko, hamahirugarren kapituluan programazio lineala lantzen da. Gai hori batez ere ekonomialari eta ingeniariei zuzendua dago. Bi ezezaguneko kasua sakon lantzen da aipatu kapituluan eta bi baino gehiagoren kasua ere aurkezten da. Programazio linealaren funtsezko teoremaren frogapenik ez da egin, oso korapilatsua baita, baina nola aplikatzen den irakasten da. Gaur egun, software informatikoa erabiltzen da kasu horiek askatzeko, baina komenigarria da formalismo analitikoa ikustea aipatu programazioaren nondik norakoak ezagutzeko.

Eskerrak eman nahi dizkiot Nekane Ros irakasleari lan hau irakurri eta egindako iradokizunengatik, baita Gustavo Ochoa irakasleari ere berak utzitako material eta izan ditugun eztabaida aberatsengatik. Halaber, nire emazte Mari Jose ere aipatu beharrean nago bion denborari egindako lapurreta eta liburu hau idatzi dudan bitartean izandako pazientziarengatik.

AURKIBIDEA

1. KAPITULUA: MULTZOAK, ERAGIKETAK, APLIKAZIOAK

2. KAPITULUA: BEKTORE-ESPAZIOAK

3. KAPITULUA: APLIKAZIO LINEALAK

4. KAPITULUA: MATRIZEAK

5. KAPITULUA: DETERMINANTEAK

6. KAPITULUA: EKUAZIO LINEALAK

7. KAPITULUA: ESPAZIO AFINA

8. KAPITULUA: BEKTORE-ESPAZIO EUKLIDEARRA

9. KAPITULUA: ESPAZIO AFIN EUKLIDEARRRA

10. KAPITULUA: BALIO ETA BEKTORE KARAKTERISTIKOAK

11. KAPITULUA: FORMA KOADRATIKOAK

12. KAPITULUA: JORDAN FORMA KANONIKOAK

13. KAPITULUA: PROGRAMAZIO LINEALA

1. MULTZOAK, ERAGIKETAK, APLIKAZIOAK

1.1. DEFINIZIOA

Multzoa era askotara defini daiteke. Cantor-ek honela egin zuen:

1.1. DEFINIZIOA: Multzoa hau da: *ongi definituak eta diferentziagarriak diren objektu determinatu batzuen bilketa.*

Komenigarria da emandako definizioari xehetasun batzuk egitea. Izan ere, multzo bateko gaiek ondo definituta egon behar dute multzoaren elementuak direla kontsideratu baino lehen. Murrizketarik egingo ez bagenu, korapilo batean sartuko ginateke multzo guztiek osatutako multzoa hartzean. Multzo hori, multzo bat ere badenez, bere barruan egongo litzateke.

Horregatik lehenengo definizioari hiru baldintza eskatuko dizkiogu:

- Multzo batek objektu bat multzo horren barnekoa den ala ez definitu behar du.
- Multzo baten elementu guztiak desberdinak dira.
- Multzo bera ezin da talde horren barnekoa izan.

Multzoak letra larriak erabiliz eta multzoetako elementuak xeheen bitartez adierazi ohi dira. x elementua A multzokoa dela esateko, $\in$ ikurra erabiliko dugu, eta $x\in A$ idatziko dugu. Modu berean, barnekoa ez dela adierazteko, $x\notin A$ jarriko dugu.

Multzoen adierazpena

Multzo bat adierazteko bere elementu guztiak xehatu behar ditugu eta giltzen artean jarriko ditugu $\{\ \}$. Hori bi modutan egin daiteke:

- *hedaduraz*: elementu guztiak zehaztuz (Adib., A={a,b,c}).
- *ezaupidez*: elementu guztiek duten ezaugarri baten bitartez (Adib., A={hiruz zati daitezkeen zenbaki osoak}).

Multzoen berdintza

Bi multzo berdinak dira, baldin eta soilik baldin, beraien elementu guztiak berdinak badira. Hots: $A = B \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B \Rightarrow x \in B$ eta $y \in A$

1.2. AZPIMULTZOAK

1.2. DEFINIZIOA: C talde bat emanda, A multzoa C-ko azpimultzoa dela esaten da, bere elementu guztiak C-koak badira (multzo bat beste baten barne dagoela adierazteko $\subset$ ikurra erabiltzen da).

Beste modu batean esanda: $A \subset C \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in C$ (beraz, A multzoa C-ren azpimultzoa da)

Multzo osagarria

A multzoa C-ren azpimultzoa bada, bere osagarria (eta A' idatziko dugu) A azpimultzokoak ez diren C-ko elementuek eratzen duten azpimultzoari deritzo.

$$A' = \{x \in C / x \notin A\}$$

adibidea: $C = \{a, b, c, d, e, f\}$ bada eta $A = \{a, c\}$ bada, orduan, $A' = \{b, d, e, f\}$

Multzo hutsa

C multzo bat beti da bere buruarekiko azpimultzoa. Beraz, bere osagarria zein den galdetzeak badu zentzua. Agerikoa da elementurik gabe gelditu garela C' osatzeko. Multzo horri multzo hutsa deritzo (ϕ adierazten da) eta bere onarpenak abantaila aljebraikoak emango dizkigu.

Azpimultzoaren definiziotik multzo hutsa edozein multzoren azpimultzoa dela ondorioztatzen da.

Multzo baten zatidura-multzoa

C multzo baten zatidura-multzoa azpimultzo guztiek eratzen duten multzoa da eta P(C) idazten da.

adibidea: $C = \{a,b,c\}$ bada, $P(C) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ izango da bere zatidura-multzoa

1.3. MULTZOEN ARTEKO ERAGIKETAK

Bilketa

Bi multzoren arteko bilketa multzo batean edo bestean dauden gai guztiek osatzen duten multzoa da ($\cup$ ikurraren bidez adierazten da).

adibidea: $A = \{1,2\}$ eta $B = \{1,4,5,7\}$ badira, $A \cup B = \{1,2,4,5,7\}$ izango da.

Ebaketa

Bi multzoren arteko ebaketa multzo horietan bietan dauden gaiek osatutako multzoa da ($\cap$ ikurraren bitartez adierazten da).

adibidea: Aurreko adibidean $A \cap B = \{1\}$ izango litzateke.

Eragiketen propietateak

- Trukakorra: $A \cup B = B \cup A$ eta $A \cap B = B \cap A$

- Elkartze-legea: $.\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$

- Xurgatze-legea: $A \cup (A \cap B) = A$ eta $A \cap (A \cup B) = A$

- Banatze-legea: $\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$

- Edozein A multzorentzat: $\begin{Bmatrix} A \cap A = A & A \cup A = A \\ A \cap \phi = \phi & A \cup \phi = A \end{Bmatrix}$

- Morgan legeak: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ eta $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Multzo baten banaketa

Izan bedi C multzoa eta izan bitez A_i C-ko azpimultzo batzuk, non elkarrekiko disjuntuak diren. A_i horiek osatzen duten multzoari C multzoaren ***banaketa*** deritzo, azpimultzo horien bilketa C bada.

adibidea: C = {a,b,c,d,e,f,g} bada, bere banaketa honakoa izan zitekeen:
P (C) = {{a},{b,c},{d,e,f,g}}

horrela $\begin{cases} \{a\} \cap \{b,c\} = \phi \\ \{a\} \cap \{d,e,f,g\} = \phi \\ \{b,c\} \cap \{d,e,f,g\} = \phi \end{cases}$ alde batetik azpimultzo guztiak elkarrekiko disjuntuak direlako eta beraien bilketa $\{a\} \cup \{b,c\} \cup \{d,e,f,g\} = C$ multzoa delako.

Bistan denez, banaketa asko egin daitezke.

Disjuntuak ez badira baina beraien arteko bilketa C multzoa bada, multzo horiek C-ren *estalze* bat osatzen dutela esaten da

Multzoen kenketa

A eta B multzoen arteko kenketa A-B idazten da eta hauxe da:

$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$ ($\wedge$ ikurra "eta" adierazteko da)

1.4. MULTZOEN BIDERKADURA CARTESIARRA

1.3. DEFINIZIOA: A eta B multzoen arteko biderkadura cartesiarra beste multzo bat da (A x B idazten da), non bere elementuak bikoteak diren, lehenengoa A-koa eta bigarrena B-koa.

Hots: $AxB = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Bi bikotek, (a,b) eta (a',b'), berdinak izateko $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$ bete behar dute.

adibidea: Demagun A={a,b} eta B = {x,y,z} direla. Beraz, beraien biderkadura eskalarra AxB = {(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z)} da.

Agerikoa da AxB eta BxA desberdinak direla. Bakarrik A = B denean beteko da lege trukakorra eta AxA idatzi beharrean A^2 idatzi ohi da.

Hiru multzo edo hiru baino gehiago biderkatzen badira, biderkadura cartesiarraren multzoko gaiak hirukoteak edo n-koteak izango dira. Hain zuzen:

$$A_1 x\, A_2\, x \ldots\ldots x\, A_n = \{(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) \,/\, a_i \in A_i \;\; \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Grafoa

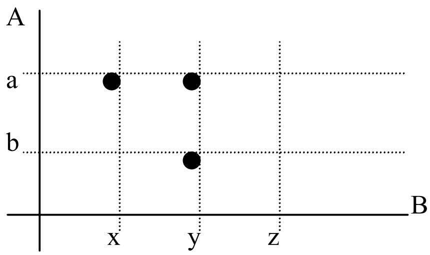
Biderkadura cartesiarraren multzoko edozein azpimultzori grafo deritzo.

adibidea: Aurreko adibidean, G grafo bat honakoa izan daiteke: G = {(a,x),(a,y),(b,y)}

AxB-ren grafo baten *a gai batekiko A-ren ebaketa,* grafo horretan a gai horrekin dauden B-ko gaiek osatzen duten multzoa da.

adibidea: G = {(a,x),(a,y),(b,y)} hartzen badugu, G-ren ebaketa b gaiarekiko {y} da eta a-rekiko {x,y}. Modu berean, x-rekiko {a} eta y-rekiko {a,b} lirateke.

Bi edo hiru multzoren biderkadura eskalarraren grafoak adierazteko ardatz cartesiarrak erabil daitezke, ardatz bakoitzera multzo bakoitzeko gaiak eramanez. Aurreko adibidean G grafoa ondoko grafiko honen bitartez adierazi ahal da.



1.5. ERLAZIOAK. BALIOKIDETASUN ETA ORDENAKOA. ZATIDURA-MULTZOA

Demagun AxB multzoan propietate bat definitzen dugula, eta gai batzuek soilik betetzen dutela. Elementu horiek G azpimultzo (grafo) bat osatuko dute. Elementu bat (x,y) $\in$ G bada, x eta y elementuek R erlazioa egiaztatzen dutela esan daiteke, eta xRy idazten da. Beraz, gauza bera da x y-rekin erlazionatuta dagoela esatea (xRy) eta (x,y) G-azpimultzo barnekoa dela esatea. Batzuek grafoa erlazioaren grafikoa dela diote.

Hau dena honela labur daiteke:

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in G \qquad \text{edo} \qquad G = \{(x, y) \in AxB / xRy\}$$

adibidea: Izan bitez $A = \{1,2\}$ eta $B = \{2,5,7\}$. Eta beraz:

$$AxB = \{(1,2),(1,5),(1,7),(2,2),(2,5),(2,7)\}$$

AxB-ren barruan honako erlazio hau definituko dugu: $x \in A$, $y \in B$ erlazionatuta daude (hots, xRy) $\Leftrightarrow$ x + y hiruz zati daiteke. Erlazio horri dagokion G grafoa (edo grafikoa) hauxe da: $G = \{(1,2),(1,5),(2,7)\}$

Gauza bera egin daiteke hiru edo hiru baino multzo gehiagoren arteko biderkadura cartesiarraren multzoan. Kasu horietan R(x,y,z) idatziko dugu, $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$ elementuen arteko erlazioa adierazteko.

ERLAZIO BITARRA

AxB biderkaduran A = B bada AxA multzoan definitzen den erlazioari, A-ren gaineko *erlazio bitarra* deritzo. Bere G grafoa AxA-ren barnean egongo da.

AxA multzoko gai guztiek erlazio bat betetzen badute (hots, G = AxA), identitatea dela esaten da.

Erlazioen bitarren propietateak:

- esaten da R erreflexiboa dela $xRx \quad \forall x \in A$ bada.
- esaten da R simetrikoa dela $xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x, y \in A$ bada.
- esaten da R antisimetrikoa dela $\forall x, y \in A, [xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ bada.
- esaten da R iragankorra dela $\forall x, y, z \in A, [xRy \wedge yRz] \Rightarrow xRz$ bada.

adibidea: Izan bedi $A = \{1,2,3,4\}$ multzoa eta defini dezagun R erlazioa honako era honetan: aRb $\Leftrightarrow$ a/b osoa bada. Esan zein propietate betetzen diren eta eman bere grafoa.

Ebaz.: Grafoa hauxe da: $G = \{(4,1),(4,2),(4,4),(3,1),(3,3),(2,1),(2,2),(1,1)\}$.

Bistan da erreflexiboa dela, zeren eta a/a = 1 (osoa) baita $\forall a \in A$
Ez da simetrikoa (esate baterako, 4R1 betetzen da, baina ez da 1R4 betetzen).
Antisimetrikoa da, zeren eta a/b eta b/a osoak badira, nahitaez a = b.
Iragankorra ere bada, zeren eta aRb eta bRc badira, hau da, a/b = n eta b/c = m badira (n eta m osoak), orduan a = b.n eta b = m.c dira, eta ondorioz, a = (m.c).n = (m.n).c $\Rightarrow$ a/c osoa da $\Rightarrow$ aRc.

BALIOKIDETASUN-ERLAZIOA

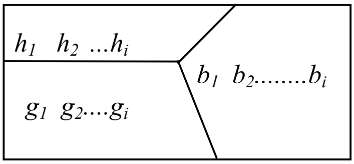
1.4. DEFINIZIOA: Erlazio bat erreflexiboa, simetrikoa eta iragankorra bada, *baliokidetasunekoa* dela esaten da.

Erlazio horrek *klaseetan* sailkatzen du multzoa, non elkarrekin erlazionatuta dauden elementuek klase bat osatzen duten.

adibidea: Demagun M dela gure lurraldeko biztanleek eratzen duten multzoa. Demagun biztanleen ilea horia, beltza edo gaztaina-kolorekoa izan daitekeela. Ilearen kolorea erlazio gisa har dezakegu M multzoan, eta bi biztanle erlazionatuta egongo dira bien ilearen kolorea bera bada.

M = {biztanle guztiak}

M



Hiru klase daude:
h = {ile horia dutenak}
b = {ile beltza " }
g = {gaztaina-koloreko ilea " }

ZATIDURA-MULTZOA

1.5. DEFINIZIOA: R baliokidetasun baten bitartez M multzoan sortutako klaseekin osatutako multzoari ***zatidura-multzoa*** deritzo eta M/R idazten da (x gai bakoitzari dagokion klasea $\overline{x}$ edo [x] edo x adierazten da).

Aurreko adibidean, M/R zatidura-multzoa hauxe da: M/R = {o, b, g}. Hiru klasez osatuta dago eta h, b eta g dira klase horien ordezkariak.

Agerikoa da baliokidetasun-erlazio batek A multzoan definitzen duen klase--multzoa A multzoaren banaketa bat dela, klaseak disjuntuak baitira eta gai guztiak klase batean daudenez klaseen bilketa A multzoa baita. Era berean, banaketa batean azpimultzo bakoitzean dauden gaiek klase bat eratzen dute honakoa suposatzen badugu: bi gai erlazionatuta daude, baldin eta soilik baldin azpimultzo berekoak badira. Beraz, aljebraren aldetik, berdin da multzo baten banaketa dela kontsideratzea edo baliokidetasun-erlazioa izatea.

ORDENA-ERLAZIOA

1.6. DEFINIZIOA: Erlazio bitar bat ***ordenakoa*** da erreflexiboa, antisimetrikoa eta iragankorra bada (≤ ikurraren bitartez adierazten da).

Ordena osoa: A multzoan R ordenako erlazio bat osoa da, baldin eta soilik baldin, $\forall a,b \in A \quad a \le b$ edo $b \le a$ gertatzen bada.

adibidea: N multzoan ordena-erlazioa honela defini daiteke:

$$\forall a,b \in N \quad a \le b \iff \exists c \in N \,/\, a + c = b$$

erraza da frogatzea ordena osoko erlazioa dela.

Ordena osoko erlazio bat *dentsoa* da, baldin eta $\forall a,b \in A$, non $a \ne b$ $(a \le b)$ diren, $\exists c \in A \,/\, a \ne c \ne b$ eta $a \le c \le b$ gertatzen bada.

Borneak: Izan bitez A multzo ordenatua eta S bere azpimultzoa, $S \subset A$. Horrela, $m \in A$ S azpimultzoko goiko (beheko) bornea dela esaten da, $x \le m$ $(x \ge m)$ bada $\forall x \in S$.

Goiko borneetatik txikienari **goi-mutur** esaten zaio eta SupS idazten da. S azpimultzoaren barnean badago, S-ko *maximo* deritzo.

Beheko borneeetatik handiari **behe-mutur** deritzo eta InfS idazten da. S azpimultzoaren barnean badago, S-ko *minimo* deritzo.

Erretikulua*:* A multzo ordenatuan edozein bikoterentzat ($\forall a,b \in A$) sup $\{a,b\}$ eta inf $\{a,b\}$ existitzen badira, erretikulua dela esan ohi da.

Ongi ordenatua: A multzoa ongi ordenatua dela esaten da, bere edozein azpimultzok minimoa badu.

1.6. APLIKAZIOAK

KORRESPONDENTZIAK

1.7. DEFINIZIOA: Izan bitez A eta B bi multzo eta G AxB biderketaren grafoa. Grafo horrek f korrespondentzia definitzen duela esaten da, non A abiaburu-multzoa eta B helburu-multzoa diren. Grafo horren elementu bat (x,y) bada (gogoratu $x \in A$ eta $y \in B$ direla), x-ren irudia y dela esaten da (eta x dela y-ren aurreirudia edo x-ari y dagokiola f korrespondentzian). Honela adierazten da:

$$f : A \to B \qquad\qquad y = f(x) \qquad \text{edo} \qquad x = f^{-1}(y)$$

f korrespondentzia (G grafoa) baten ***irudi-multzoa*** (Imf idatziko dugu) aurrekaria duten B-ko elementuek osatzen duten azpimultzoa da.

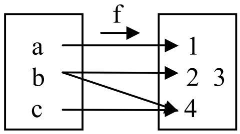
adibidea: Demagun A = {1,2,3} eta B = {a,b}. Beraz, AxB = {(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)}. Izan bedi G = {(1,a),(2,a)} (beste modu batean esanda: f (1) = a eta f (2) = a).

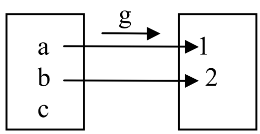
Kasu honetan irudi-multzoa honakoa da: Imf = {a}.

APLIKAZIOAK

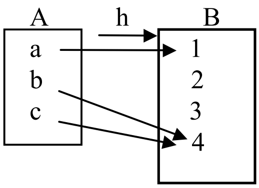
1.8. DEFINIZIOA: Korrespondentzia batean abiaburu-multzoko gai guztiei irudi bat eta soilik bat badagokie, ***aplikazio*** deritzo.

adibidea:





hauek ez dira aplikazioak, f kasuan b elementuak bi irudi dituelako eta g kasuan c elementuak irudirik ez duelako. Hurrengo korrespondentzia, aldiz, aplikazioa da:



Kasu honetan A-ren gai guztiek irudi bat eta soilik bat dute:

h (a) = 1
h (b) = 4
h (c) = 4

APLIKAZIO AZPIMARRAGARRIAK

Supraiektiboa: aplikazio bat supraiektiboa dela esaten da, helburu-multzoko gai guztiek aurreirudia badute (hau da, irudi-multzoa eta helburu-multzoa berdinak badira). Hots:

$$f : A \rightarrow B \text{ supraiektiboa da } \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \,/\, f(x) = y$$

Injektiboa: aplikazio bat injektiboa dela esaten da, irudi-multzoko gai guztiek aurreirudi bat soilik badute. Hots:

$$f : A \rightarrow B \text{ injektiboa da } \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Bijektiboa: aplikazio bati bijektiboa esaten zaio, supraiektiboa eta injektiboa bada.

APLIKAZIOEN KONPOSIZIOA

Demagun $f : A \to B$ eta $g : B \to C$ bi aplikazio direla.

1.9. DEFINIZIOA: g eta f aplikazioen arteko ***konposizioa*** (eta $g \circ f$ idazten da) ondoko $h : A \to C$ aplikazio hau da: $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

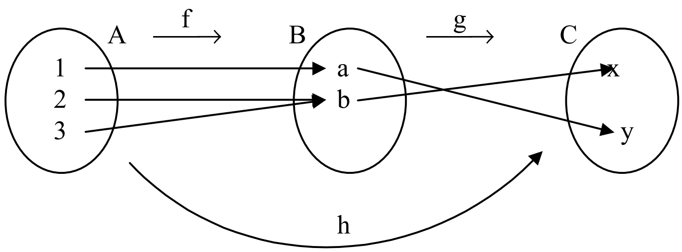
adibidea: Izan bitez $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$ eta $C = \{x,y,z\}$. Demagun f eta g aplikazioak hauek direla:

$$f : A \to B \begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = b \\ f(3) = b \end{cases} \quad \text{eta} \quad g : B \to C \begin{cases} g(a) = y \\ g(b) = x \end{cases}$$

Beraz, $h = g \circ f$ horrela izango da:

$$h(1) = (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = y.$$
$$h(2) = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = x.$$
$$h(3) = (g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = x.$$

Kontuan hartu lege trukakorra ez dela betetzen, esangurarik ez baitu.



ALDERANTZIZKO APLIKAZIOA

Abiaburu- eta helburu-multzoak A multzo bera badira, posible da aplikazio berezi bat, ***identitate-aplikazioa*** (I (x) idazten da), honela definitzea:

$$I_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

1.10. DEFINIZIOA: $f : A \to B$ eta $g : B \to A$ aplikazioek $g \circ f = I_A$ eta $f \circ g = I_B$ betetzen badute, g aplikazioa f-ren ***alderantzizkoa (edo elkarrekikoa)*** dela esaten da, eta f^{-1} idazten da. Beraz: $f^{-1} \circ f = I_A$ eta $f \circ f^{-1} = I_B$.

adibidea: Izan bedi $R^+ \to R^+$ $f(x) = x^2$ aplikazioa. Bere alderantzizkoa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ izango da, zeren eta $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ eta $f^{-1} \circ f = I$ egiaztatzen baita.

1.1. PROPOSIZIOA**:** $f : A \to B$ bijektiboa da $\Leftrightarrow$ f^{-1} existitzen da

Frog.:
$\Rightarrow$ f bijektiboa bada, defini dezagun f^{-1} aplikazioa era honetan:
$f^{-1} : B \to A$ $f^{-1}(y) = x \,/\, f(x) = y$ $\forall y \in B$. Definitutako funtzioa aplikazio bat da, zeren eta $\forall y \in B$ $f^{-1}(y)$ existitzen den, $f^{-1}(y) = x \in A \,/\, f(x) = y$, f supraiektiboa baita. Gainera $f^{-1}(y) = x$ irudi bakarra da f injektiboa delako (bi egongo balira, x eta x', $f(x) = f(x') = y$ izango litzateke eta f ez litzateke injektiboa izango).

$\Leftarrow$ f^{-1} existitzen bada f injektiboa da, zeren eta $f(x) = f(x') = y$ balitz, $f^{-1}(y) = x = x'$ izan beharko luke eta f^{-1} ez litzateke aplikazioa izango. Bistakoa da supra dela.

DESKONPOSIZIO KANONIKOA

Aplikazio kanonikoa: Izan bedi R baliokidetasun-erlazioa A multzoan eta izan bedi A/R dagokion zatidura-multzoa. A multzotik A/R multzora jarraian adierazen den moduan definitutako k aplikazioari aplikazio kanoniko deritzo:

$k : A \to A/R$ non $k(x) = \overline{x}$, hots, gai bakoitzari bere klasea dagokio.

(bistakoa da supraiektiboa dela).

Demagun $f : A \to B$ aplikazio bat dela. Orduan, A multzoan R baliokidetasun-erlazioa kontsideratu ahal da: bi gai erlazionatuta daude, baldin eta soilik baldin irudi bera badute (hots, $\forall x,y \in A$ $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$). Dakigunez, A/R multzoa klasez osatuta dago eta beste aplikazio bat, $g : A/R \to f(A)$, defini dezakegu horrela: $g(\overline{x}) = f(x)$ (agerikoa da g bijektiboa dela).

B taldeko identitate-aplikazioa i bada, f aplikazioa honela deskonposa daiteke:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & B \\ A/R \arrow[r, "g"] & f(A) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$f = i \circ g \circ k$ (deskonposizio kanonikoa)

Frogapena: $(i \circ g \circ k)(x) = (i \circ g)(k(x)) = (i \circ g)(\overline{x}) = i(g(\overline{x})) = i(f(x)) = f(x)$.

1.7. KONPOSIZIO-LEGEAK. HOMOMORFISMOAK

BARNEKOA

1.11. DEFINIZIOA: A azpimultzo batean, AxA multzotik A multzorako ($AxA \to A$) edozein aplikaziori ***barne-konposiziozko lege*** deritzo.

Barneko eragiketa dagoenean, edozein bikote ordenaturi (x,y) multzoko beste elementu bat (z) dagokiola esaten da, edo x eta y elementuen arteko eragiketa z dela. Hori dena labur adierazteko ikur bat asmatzen da, * adibidez, eta $x * y = z$ dela idazten da. Normalean + ikurra erabiltzen da ($x + y = z$) eta batuketa deitzen zaio. Multzo horrek bi barne-eragiketa baditu bigarrenari biderketa (. idazten da) deritzo.

Kontuan hartu $x + y$ eta $y + x$ eragiketek ez dutela nahitaez berdinak izan behar.

adibidea: Demagun $A = \{x,y,z\}$ multzoan batuketa bat definitzen dugula ondoko taularen bitartez (eragiketa-taula deritzo):

+	x	y	z
x	x	z	z
y	x	y	x
z	y	z	x

Hemen ikusten da $x + y = z$ eta $y + x = x$ direla, eta ondorioz, ez da lege trukakorra betetzen. (eragiketa hau trukakorra ez dela esaten da).

HOMOMORFISMOAK

1.12. DEFINIZIOA: Izan bitez A eta B, * eta ∇ barne-eragiketez, hurrenez hurren, hornitutako multzoak. Orduan, $f : (A, *) \to (B, \nabla)$ homomorfismo bat dela esaten da, $\forall x,y \in A \Rightarrow f(x * y) = f(x) \nabla f(y)$ bada.

- $A = B$ badira, *endomorfismo* deritzo
- f injektiboa bada, *monomorfismo* deritzo
- f supraiektiboa bada, *epimorfismo* deritzo
- f bijektiboa bada, *isomorfismo* deritzo
- $A = B$ eta f bijektiboa bada, *automorfismo* deitzen zaio

KANPOKOA

1.13. DEFINIZIOA: Izan bitez A eta K multzoak. A multzoan, $AxK \rightarrow K$ edozein aplikaziori ***kanpo-konposiziozko lege*** deritzo, non K eragile-multzoa den.

Normalean eragiketa hori adierazteko biderketa-ikurra erabiltzen da (. idazten da) eta kanpoko produktu deitzen zaio.

A taldeak + barne-eragiketa duela adierazteko (A, +) idazten da. Bi barne--eragiketak dituenean (A ; +, .) idazten da. Kanpo-eragiketa duenean, eragile-multzoa azpindizean jartzen da (A, $._K$). Biak baditu, + barnekoa eta . kanpokoa, (A ; +, $._K$) idazten da.

ERAGIKETA BATEN PROPIETATE NABARIAK

A multzo batean eragiketa asko defini ditzakegu, baina erabilgarriak izateko propietate jakin batzuk bete behar dituzte. Ondoko hauek dira azpimarragarrienak:

Elkartze-legea: $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall\, a,b,c \in A$

Trukakorra: $a + b = b + a \quad \forall\, a,b \in A$

Elementu neutroa: (A,+) multzoak elementu neutroa duela esaten da, baldin eta zero deritzon eta 0 idazten den gai bat existitzen bada, eta zeinentzat $a + 0 = a$ betetzen den $\forall a \in A$.

(A ; +, .) multzoaren bigarren eragiketak (biderketak) ere elementu neutroa badu, unitate deitzen zaio (zeroarekin ez nahasteko) eta 1 idazten da. Hots: $a \,.\, 1 = a$ beteko da $\forall\, a \in A$

Elementu simetrikoa: (A,+) multzoak zero baldin badu, elementu simetrikoaren propietatea betetzen dela esaten da, honako hau gertatzen bada:

$$\forall\, a \in A \quad \exists a' \,/\, a + a' = 0\ .$$

Era berean, 1 baldin badu, bigarren eragiketarekiko propietate simetrikoa duela esaten da, honako hau betetzen bada:

$$\forall\, a \in A\ \exists a' \,/\, a \,.\, a' = 1.$$

Lehenengo eragiketarekiko a gai baten simetrikoari *aurkako* deritzo (eta - a idazten da) eta bigarrenarekikoari *alderantzizko* deritzo (eta a^{-1} idazten da).

Banatze-legea ((A; +, .) taldean): bigarren eragiketa (.) lehenengoarekiko (+) banatzailea dela esaten da, ondoko hau betetzen bada:

$$z.(a + b) = z.a + z.b \quad \forall z \in K \text{ eta } \forall a,b \in A$$

1.8. EGITURA ALJEBRAIKOAK

Interesgarriak diren hainbat teoria fisiko eta matematikok multzo aljebraiko desberdinak erabiltzen dituzte, baina multzo horien barnean dauden eragiketek propietate komunak izaten dituzte. Orduan, abstrazioa egiten bada, multzo horien egiturak batera iker daitezke eta lortzen diren "*izaki*" aljebraikoak (ez ahaztu eragiketarik gabeko multzo batek ez duela inolako interesik eta egitura duen neurrian izaki erakargarri eta bizigarri bilakatzen dela aljebra eta zientziarentzat) arlo askotan aplikatzen dira (adibidez, "Talde-teoria" erabakigarri bihurtu zen "Oinarrizko partikulen fisika" garatzeko).

TALDEAK

Izan bedi (G,+) egitura (hots, G taldea eta + bere barruan definitutako barne--eragiketa)

1.14. DEFINIZIOA: (G,+) talde bat dela esaten da, ondoko propietate hauek betetzen badira:

- Elkartze-legea
- Elementu neutroa
- Elementu simetrikoa.

Horietaz gain trukatze-legea ere betetzen bada, talde trukakorra (edo abeldarra) esaten zaio.

(G,+) multzoan elkartze-legea betetzen bada, *erditalde* deritzo (eta elementu neutroa badu, erditalde unitarioa).

AZPITALDEAK

Izan bedi (G,+) taldea. Demagun $S \subset G$ (S ez dela hutsa suposatuko dugu).

S multzoa G-ren azpitaldea dela esaten da, (S,+) taldea bada.

Bistan denez, G taldea denez, S azpitaldea izateko nahikoa izango da ondoko baldintzak betetzea:

- $\forall x, y \in S \Rightarrow x + y \in S$ (hots, + eragiketa S-rekiko ere barnekoa izatea)

- $e \in S$ (G taldeko e elementu neutroa S-ren barnean izatea)
- $\forall x \in S \Rightarrow -x \in S$ (-x x-ren simetrikoa izatea)

Hiru baldintza horiek batean bil daitezke:

1.1.TEOREMA**:** G taldearen S azpimultzoa azpitaldea da $\Leftrightarrow \forall x,y \in S \Rightarrow x - y \in S$

Frogapena:

$\Rightarrow$ S azpitaldea bada, bere elementu guztiek S taldean bertan izango dute beren simetrikoa. Orduan, $\forall x,y \in S \Rightarrow x, -y \in S$, eta S taldea denez, $x + (-y) = x - y \in S$.

$\Leftarrow$ Demagun orain $\forall x,y \in S \Rightarrow x - y \in S$, non S multzoa G taldeko azpimultzoa den. S azpitaldea dela frogatu nahi dugu.

- $x,y \in S$ hipotesia edozein bikoterentzat betetzen da, eta ondorioz, baita x,x bikotearentzat ere. Orduan, $x - x \in S \Rightarrow e \in S$.
- Orain e,x bikotea ($x \in S$) hartuko da**.** Orduan, $e - x \in S \Rightarrow -x \in S$
- Demagun $x, y \in S$. Honenbestez, $-y \in S$. Orduan, x, -y bikoteari hipotesia aplikatzen badiogu: $x - (-y) \in S \Rightarrow x + y \in S$

ZATIDURA-TALDEA

G talde abeldar (trukakor) batean H azpitaldea bada, R baliokidetasun-erlazioa defini daiteke era honetan: $\forall a,b \in G \quad aRb \Leftrightarrow a - b \in H$.

Erraz froga daiteke R baliokidetasun-erlazioa dela. Ondorioz, zatidura-multzo bat definitzen da: G/H.

a'Ra gertatzen bada, orduan $a' - a = h \in H$, eta ondorioz, a elementuarekin erlazionatuta dauden a' elementuek $a' = a + h$ betetzen dute. Horregatik a gaiaren klasea $a + H$ adierazten da. Hots:

$$G/H = \{a + H \,/\, a \in G\}$$

Multzo horretara G barruko eragiketa eraman daiteke:

$$(a + H) + (b + H) = (a + b) + H \qquad (*)$$

eta erraz froga daiteke ez dagoela klase bakoitzeko ordezkariaren mende. Ikus dezagun: a'Ra eta b'Rb badira, $(a' + H) + (b' + H) = (a' + b') + H = (a + h_1 + b + h_2) + H = (a + b + h) + H$, eta emaitza hori eta (*) klase berekoak dira, zeren eta $(a + b + h) - (a + b) = h \in H$ baita.

Horrez gain, zatidura-multzora eramandako + eragiketarekin taldeko egitura hornitzen da. Hau da, (G/H, +) talde abeldarra da (ariketa gisa uzten da hori frogatzea)

TALDE MUGATUAK

1.15. DEFINIZIOA: Talde batek gai-kopuru finitua badu, mugatua dela esaten da. Kopuru horri taldearen ordena deritzo.

LAGRANGE TEOREMA: Izan bedi G talde finitu bat eta H bere azpitalde bat. Orduan, G/H zatidura-multzoak m klase baditu, ondoko hau beteko da:

G-ren ordena = H-ren ordena x m

Frog.: Agerikoa da, zeren eta klase guztiek elementu-kopuru bera baitute eta, partizio bat denez, haien bildura G taldea baita.

TALDE MONOGENOAK ETA ZIKLIKOAK

1.16. DEFINIZIOA: (G, +) talde bat bere gai baten bidez sortuta badago, *monogenoa* dela esaten da. Hau da, $a \in G$ existitzen bada, non $G = \{e, a, a^{-1}, a^2, a^{-2}, ..., a^n, a^{-n}, ...\}$ den (hemen, $a^n = a + a + ...^{n)} + a$ da).

adibidea: 3 zenbakiak sortzen duen $\{3n \ / \ n \in Z\}$ taldea monogenoa da, eta ikusten denez, Z-ko azpitaldea da (bistakoa da Z ere monogenoa dela, 1 elementuak sortutakoa).

1.17. DEFINIZIOA: Talde bat monogeno eta mugatua bada, *zikliko* deritzo.

adibidea: (C, .)-ko {1,-1,i,-i} azpimultzoa talde ziklikoa da eta bere elementu sortzailea i da.

ADIBIDE INTERESGARRI BAT: PERMUTAZIO-TALDEA (S_n)

Talde hau adibide gisa hartuko dugu. Hainbat teoria fisiko eta matematikotan erabiltzen da (esate baterako, determinanteak eraikitzeko erabili ahal da).

Izan bedi $G = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ multzo mugatu bat. G-tik G-ra doan edozein aplikazio bijektibori permutazio deritzo. $\alpha, \beta, \gamma, ...$ letren bitartez adieraziko dira.

$\alpha (a_{1)} = a_p$, $\alpha (a_{2)} = a_q$, ... $\alpha (a_{n)} = a_r$ permutazio bat da eta horrela ere adierazi ahal da:

$\alpha = \begin{pmatrix} a_p & a_q & \ldots\ldots & a_r \\ a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_n \end{pmatrix}$ non beheko lerroan beti G-ko elementuak dauden eta goikoan beren irudiak. Hain zuzen ere, permutazioaren natura goiko lerroko azpindizeetan dago, eta ondorioz, nahikoa da $\alpha = \begin{pmatrix} p & q & \ldots\ldots & r \\ 1 & 2 & \ldots\ldots & n \end{pmatrix}$ jartzea edo are laburrago: $\alpha = (p,q,\ldots\ldots,r)$.

Permutazio horiek multzo bat osatzen dute eta S_n idazten da. Permutazioek ez dute zerikusirik G talde horrekin; bakarrik n-ren mende daude eta, bistan denez, S_n multzoaren elementu-kopurua n! da.

Adibidez, n = 3 bada, S_3 taldeak sei permutazio (3!) izango ditu:

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ , \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

edo, modu laburrean, $S_3 = \{\alpha_1 = (1,2,3),\ \alpha_2 = (1,3,2),\ \alpha_3 = (2,1,3),\ \alpha_4 = (2,3,1),\ \alpha_5 = (3,1,2),\ \alpha_6 = (3,2,1)\}$.

S_n multzoan, aplikazioz osatuta dagoenez, barne-eragiketa bat kontsidera daiteke, aplikazioen konposizioa hain zuzen ere, eta $(S_n, \circ)$ talde bat dela erraz froga daiteke.

Esate baterako, S_3 taldean elementu neutroa α_1 izango da. Denek dute simetrikoa (adib., α_2 -ren simetrikoa α_2 bera da, edo α_4 -rena α_5 da). Elkartze-legea ere betetzen da eta horregatik esaten da S_n talde bat dela (kontuan hartu ez dela abeldarra, $\alpha_2 \circ \alpha_5 \neq \alpha_5 \circ \alpha_2$ adibidez).

Alderanzketak. Parekotasuna

α permutazio batean i,j elementuek, non $i < j$ den, *alderanzketa* bat eratzen dute, $\alpha(i) > \alpha(j)$ egiaztatzen bada.

Permutazio batean alderanzketa-kopurua bikoitia bada, parekotasuna +1 dela esaten da, eta bakoitia bada -1.

Adibidez, α_5 permutazioan:

- 1 eta 2-k alderanzketa eratzen dute, $\alpha_5(1) = 3 > \alpha_5(2) = 1$ baita

- 1 eta 3-k alderanzketa eratzen dute, $\alpha_5(1) = 3 > \alpha_5(3) = 2$ baita
- 2 eta 3-k ez dute alderanzketarik eratzen, $\alpha_5(2) = 1 > \alpha_5(3) = 2$ baita

Ondorioz, α_5 permutazioak bi alderanzketa ditu eta bere parekotasuna +1 izango da. Modu berean gainerakoen parekotasunak ikus daitezke (α_1, α_4 eta α_5 permutazioek +1 dute eta α_2, α_3 eta α_6 -k, aldiz, -1).

ERAZTUNAK. GORPUTZAK

Ikusitako taldeek eragiketa bakarra zuten. Orain ikusiko ditugunek bi barne--eragiketak izango dituzte. Lehen bezala, hainbat multzo interesgarrik propietate berdinak dituzte (adibidez, ezagutzen ditugun N, Z, Q, R, C zenbakien multzoek).

Propietate komun horiek betetzen dituzten multzoen ezaugarriak ikertzeko bi egitura, eraztunak eta gorputzak, definituko dira. Egitura horiek aurreko multzoei aplikatu ahal zaizkie.

Kontuan hartu bi eragiketa horiek + eta . ikurrez adierazten direla multzo guztietan, nahiz eta multzo bakoitzean eragiketak desberdinak izan. Horregatik hauen ezaugarriak eta terminologia bera orokortu egiten dira, askotan nahaste-borraste galanta sortuz. Beti kontuan hartu behar da zein multzotan ari garen eta zein diren kasu horretan eragiketen esanahia eta beren propietateak.

ERAZTUNA

1.18. DEFINIZIOA: Bi barne-eragiketak dituen A multzoa (A; +, .) *eraztun* bat da, ondoko baldintza hauek betetzen badira:

- (A,+) bikotea talde trukakorra da
- (A, .) bikoteak elkartze-legea du: $x.(y.z) = (x.y).z \quad \forall x, y, z \in A$
- Bigarren eragiketa (.) banatzailea da lehenengoarekiko (+). Hau da: $x.(y + z) = x.y + x.z \quad \forall x, y, z \in A$

Eraztun unitarioa: Bigarren eragiketak (.) elementu neutroa badu, eraztun unitarioa dela esaten da.

Eraztun trukakorra (abeldarra): Bigarren eragiketa trukakorra bada, eraztun abeldarra dela esaten da.

Adibiderik garrantzitsuena Z osoen multzoa da (horrez gain, Q, R eta C ere eraztun unitario eta trukakorrak dira).

Zeroren zatitzaileak: A eraztun batean, $a \in A$ elementuari zeroren zatitzaile deritzo, baldin eta $b \in A$, $b \neq 0$ existitzen bada, non $a.b = 0$ edo $b.a = 0$ den.

Z, Q, R eta C eraztunek ez dute zeroren zatitzailerik.

Osotasun-eraztuna: Zeroren zatitzailerik gabeko eraztuna da. Horrez gain, eraztuna abeldarra eta unitarioa bada, *osotasun-eremu* deritzo.

Eraztun baten ***karakteristika***: $1 + 1 + ...^{n)} + 1 = 0$ betetzen duen n ($\in$ N) txikienari karakteristika deritzo.

Ikusten denez, eraztuna izateko ez da bigarren eragiketarekiko propietate simetrikoa (alderantzizkoa) betetzea eskatzen. Z eraztunean, esate baterako, ez dago simetrikorik ($n \, . \, x = 1$ izateko $x = 1/n$ izan beharko luke, baina $1/n$ ez da zenbaki osoa). Baldintza hori eskatzen bada, beste egitura bat definitzen da: gorputzarena.

GORPUTZA

1.19. DEFINIZIOA: Bi barne-eragiketak dituen K talde bat (K; +, .) *gorputz* bat da, ondoko baldintza hauek betetzen badira:

- (K, +) talde trukakorra da:

$$\begin{array}{l}
\text{Elkartze - legea}: \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in K \\
\text{Elementu neutroa}: \quad \exists 0 \in K \,/\, x + 0 = x \quad \forall x \in K \\
\text{Elementu simetrikoa}: \quad \forall x \in K \quad \exists -x \in K \,/\quad x + (-x) = 0 \\
\text{Trukatze - legea}: \quad x + y = y + x \quad \forall x, y \in K
\end{array}$$

- (K-$\{0\}$, .) talde trukakorra da:

$$\begin{array}{l}
\text{Elkartze - legea}: \quad x.(y.z) = (x.y).z \quad \forall x, y, z \in K \\
\text{Elementu neutroa}: \quad \exists 1 \in K, (1 \neq 0) \,/\, x.1 = x \quad \forall x \in K \\
\text{Elementu simetrikoa}: \quad \forall x \in K (x \neq 0) \quad \exists x^{-1} \in K \,/\quad x.x^{-1} = 1 \\
\text{Trukatze - legea}: \quad x.y = y.x \quad \forall x, y \in K
\end{array}$$

- Produkuaren banatze-legea batuketarekiko: $x.(y + z) = x.y + x.z \qquad \forall x,y,z, \in K$

Definizio horretan produktua trukakorra izatea exigitu da, eta hori gertatzen ez bada, gorputza ez dela trukakorra esaten da (posiblea da alderantziz egitea, hots, produktuari ez exigitzea trukakortasuna gorputz izateko, eta betetzen badu, gorputz trukakorra deitzea).

Adibiderik garrantzitsuenak Q, R eta C dira.

Azkenik, azpieraztun eta azpigorputzak ere definitzen dira; eraztun eta gorputzen azpimultzoak dira, hurrenez hurren, eta eraztun- edo gorputz-egitura dute (esate baterako, Q arrazionalen multzoa R errealen azpigorputza da).

EBATZITAKO ARIKETAK

1. Izan bitez $A,B,C \subset E = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ multzoaren ondoko azpimultzoak: $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B= \{a,c,d,f,g\}$ eta $C = \{c,d,g,h\}$. Frogatu ondoko berdintzak:
a) $(A \cup B)' = A'\cap B'$ b) $(A\cap B)' = A'\cup B'$ c) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B) \cap(A\cup C)$

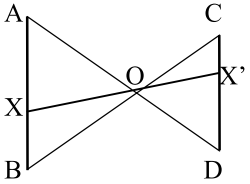
Ebaz.: a) $A \cup B = \{a,b,c,,d,e,f,g\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{h,i\}$. Baina $A' = \{f,g,h,i\}$ eta $B' = \{b,e,h,i\}$ dira. Beraz, $A'\cap B' = \{h,i\}$ f.n.g.b. (frogatu nahi genuen bezala).
b) $A\cap B = \{a,c,d\} \Rightarrow (A\cap B)' = \{b,e,f,g,h,i\} = A'\cup B'$ f.n.g.b.
c) $B\cap C = \{c,d,g\}$, $A \cup B = \{a,b,c,,d,e,f,g\}$ eta $A\cup C = \{a,b,c,d,e,g,h\}$ direnez, $A\cup(B\cap C) = \{a,b,c,d,e,g\}$ eta $(A\cup B) \cap(A\cup C) = \{a,b,c,d,e,g\}$ f.n.g.b.

2. Sinplifikatu ondoko adierazpenak, A, B eta C multzoak E multzoko azpimultzoak izanik:
a) $((A\cap B) \cap C) \cup ((A\cap B) \cap C') \cup (A'\cap B)$
b) $(A\cap(B\cap C')') \cup((A'\cup B') \cup C)'$

Ebaz.: a) $((A\cap B) \cap C) \cup ((A\cap B) \cap C') \cup (A'\cap B) = ((A\cap B) \cap (C\cup C')) \cup (A'\cap B) = ((A\cap B) \cap E) \cup (A'\cap B) = (A\cap B) \cup (A'\cap B) = (A\cup A') \cap B = E \cap B = B$
b) $(A\cap(B\cap C')') \cup((A'\cup B') \cup C)' = (A\cap(B'\cup C)) \cup((A'\cup B')' \cap C') = (A\cap(B'\cup C)) \cup((A\cap B) \cap C') = A\cap((B'\cup C) \cup (B\cap C')) = A\cap((B'\cup C) \cup (B'\cup C)') = A \cap E = A$

3. Frogatu segmentu guztiek, luzera desberdinekoak izan arren, puntu-kopuru bera dutela.

Ebaz.: Kontsidera ditzagun ondoko irudiko AB eta CD segmentuak. AB eta CD segmentuen artean bijekzioa dagoela frogatu behar da.



Izan bedi O puntua BC eta AD segmentuen arteko ebaketa-puntua. AB segmentuko X puntu bakoitzarentzat XOX' zuzena marrazten bada, f aplikazio bat definitu da, non AB segmentuko X puntu bakoitzari X' dagokion CD segmentuan. Bistakoa da $f(X) = X'$ bijektiboa dela.

4. A eta B Eren azpimultzoak badira, frogatu ondoko proposamen hauek:
a) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

b) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$
c) $(A \cap B')\cup(A'\cap B) = A\cup B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

Ebaz.: a) $\Rightarrow$ demagun $x\in A$, orduan $x \in A\cup B$, eta $A \cup B = A \cap B$ denez, $x \in A\cap B \Rightarrow x \in B$.
modu berean argudiatzen da $x\in B \Rightarrow x\in A$. Beraz, $A = B$
$\Leftarrow$ $A = B$ bada, orduan $A \cup B = A\cup A = A = A\cap A = A\cap B$
b) $\Rightarrow$ izan bedi $x\in A$, orduan $A\cap B = A$ denez $\Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B$.
$\Leftarrow$ Demagun $x\in A\cap B$, orduan $x\in A$. Demagun $x\in A$, $A \subseteq B$ denez, $\Rightarrow x\in B$, hots $x\in A\cap B$; beraz, $A = A\cap B$.
c) $\Rightarrow$ $A\cup B = (A \cap B')\cup(A'\cap B) = (A\cup(A'\cap B)) \cap (B'\cup(A'\cap B)) = ((A\cup A')\cap(A\cup B)) \cap ((B'\cup A')\cap(B'\cup B)) = (E \cap(A\cup B)) \cap ((B'\cup A')\cap E) = (A\cup B)\cap(B'\cup A') = (A\cup B) \cap (A\cap B)'$. Beraz, ezin da $x\in A\cap B$ existitu, zeren eta $x \in A\cup B$-n egongo litzateke, eta ondorioz, $(A\cap B)'$ multzoan ere bai. Baina hau ezinezkoa da $A\cap B$-n baitago. Ondorioz, $A\cap B = \varnothing$.

5. Izan bitez $C = \{x\in N \ / \ x \le 6\}$ eta $L= \{S \in P(C) \ / \ Kard\ S \ge 4\}$. L-an R erlazioa honela definitzen da: $SRS' \Leftrightarrow S\cap S' \neq \varnothing$. Esan baliokidetasun-erlaziorik badagoen eta hala bada adierazi zatidura-multzoa.

Ebaz.: Izan bitez $S,S'\in L$. $Kard(S\cap S') = KardS + KardS' - Kard(S\cup S')$, baina $Kard(S\cup S') \le 6$, $KardS \ge 4$, $KardS' \ge 4$, eta ondorioz, $Kard(S\cap S') \ge 4 + 4 - 6 = 2 \Rightarrow S\cap S' \neq \varnothing$ eta hau dena gertatzen da $\forall S,S' \in L$. Horrek L-ko elementu guztiak erlazionatuta daudela esan nahi du, hau da R erreflexiboa, simetrikoa eta iragankorra dela, eta ondorioz, baliokidetasunekoa da.

Zatidura-multzoa: (S) bada L/R-ko klase bat, $(S) = \{S'\in L \ / \ S'RS\} = L$, eta ondorioz, zatidura-multzoak klase bakar bat du, L hain zuzen ere.

6. Izan bedi $N^* = N \cup \{0\}$. Defini dezagun Q multzoan R erlazioa era honetara: $\forall x,y \in Q \quad xRy \Leftrightarrow \exists n \in N^* \ / \ y = x + n$. Aztertu zer nolako erlazioa den.

Ebaz.: *Erreflexiboa*: $\forall x \in Q \quad x = x + 0$ eta $0\in N^*$ denez $\Rightarrow xRx$ *(Bai)*

Simetrikoa: xRy bada $\Rightarrow \exists n \ / \ y = x + n$. Orduan, yRx izango balitz, $m\in N^*$ existituko litzateke, non $x = y + m$ den, eta ondorioz, $x = (x + n) + m \Rightarrow n + m = 0$, eta hori $n = m = 0$ bada bakarrik gerta daiteke, hots, $x = y$ badira. *(Ez)*

Antisimetrikoa: xRy eta yRx gertatzen badira, ikusitakoaren arabera $x = y$ bete beharko da. *(Bai)*

Iragankorra: xRy eta yRz badira $\Rightarrow$ $\exists n,m \in N^*$ / $y = x + n$ eta $z = y + m$.
Orduan, $z = x + n + m$ eta $n + m \in N^*$ denez, xRz beteko da. (*Bai*)

Beraz, ordena-erlazioa da. Horrez gain, ez da ordena osokoa, zeren eta 0,1 eta 0,2 zenbakiak, esate baterako, ez dauden erlazionatuta (ez da 0,2 = 0,1 + n betetzen inongo N^*-ko n-rentzat)

7. Esan zein kasutan diren aplikazioak R-tik R-ra doazen ondoko korrespondentziak. Kasu horietan aurkitu izate-eremua eta irudi-multzoa:

a) $f(x) = \cos x$ *b)* $f(x) = \arcsin x$ *c)* $y^2 = x$ *d)* $y = +\sqrt{4 - x^2}$

Ebaz.: a) $y = \cos x$ aplikazioa da, zeren eta x bakoitzak irudia du eta gainera irudi bakarra. Bere izate-eremua R osoa da eta bere irudi-multzoa $[-1,1]$ da.
b) $y = \arcsin x$ ez da aplikazioa, zeren eta x bakoitzari y asko dagozkio. Adibidez, $x = 0 \Rightarrow y = k\pi$ $(k \in Z)$
c) $y^2 = x$ ez da aplikazioa, zeren eta $y = \pm\sqrt{x}$ den eta x bakoitzari bi irudi dagozkio.
d) $y = +\sqrt{4 - x^2}$ aplikazioa da . Bere izate-eremua [-2,2] da eta bere irudi-multzoa ere [-2,2] da, zeren eta edozein y-rentzat ez da beti aurreirudia existitzen. Hori aztertzeko x y-ren arabera jarri beharko da: $y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ eta hor ikusten da $y \in [-2,2]$ tartean dagoela.

8. Izan bedi $f : Z - \{-1\} \to N$, $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \ \ bada \\ -2x - 3 & x < 0 \ \ bada \end{cases}$ *aplikazioa. Esan bijektiboa den.*

Ebaz.: *Injektiboa*: Demagun $f(x) = f(y)$. Orduan:

- $x,y \in Z^+ \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$
- $x,y \in Z^- \Rightarrow -2x - 3 = -2y - 3 \Rightarrow x = y$
- $x \in Z^+$, $y \in Z^-$ (edo alderantziz), orduan $f(x) = 2x$ ezin da $-2y - 3 = f(y)$-rekin berdindu, zeren eta bata bikoitia eta bestea bakoitia baitira. Ondorioz, injektiboa da.

Supra: Izan bedi $n \in N$. Bikoitia bada, $n = 2p$ da eta, beraz, $\exists p \in Z$ / $f(p) = 2p = n$. Bakoitia bada, $n = f(p)$ izateko $n = -2p - 3$ izango da $\Rightarrow$ $p = \dfrac{-n-3}{2}$ eta hori beti existituko da, zeren eta n = 2k + 1 denez, p = $\dfrac{-2k-1-3}{2} = \dfrac{-2k-4}{2} = -k-2$ izango da. Beraz, supra ere bada, eta ondorioz, baita bijektiboa ere.

*9. Izan bedi C = {1,3,5,7,9}. Defini dezagun * eragiketa horrela: a * b = a.b biderkaduraren unitatezko zifra. Aztertu bere propietateak eta esan (C, *) taldea den.*

Ebaz.: Eragiketaren taula eraikiko da

*	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
1	1	3	5	7	9
3	3	9	5	1	7
5	5	5	5	5	5
7	7	1	5	9	3
9	9	7	5	3	1

a) Ikusten denez, barne-eragiketa da.
b) Ikus ditzagun taldearen propietateak:
- Elkartze-legea: betetzen da, zenbaki horien arteko biderkaduraren elkarkortasunean oinarritzen baita.
- Elementu neutroa : 1 da.
- Elementu simetrikoa: ez, 5-ak ez duelako.
- Abeldartasuna: bai

Ondorioz, ez da taldea, simetrikoa ez baita betetzen (erditalde unitarioa eta abeldarra da).

10. Esan (N, +) $\xrightarrow{f}$ *(N, .) f (x) =* 2^x *funtzioa homomorfismoa den.*

Ebaz.: $f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$. Beraz, homorfismoa da.

*11. Izan bedi G = R - {1} multzoa eta ∀a,b∈G a * b = a + b - ab haren barnean definitzen den eragiketa. Aztertu barnekoa den eta esan (G, *) taldea den.*

Ebaz.: a) *Barnekoa*: a + b – ab R-koa da eta ezin da 1 izan, zeren eta bestela a + b - ab = 1 ⇒ a(1 - b) = 1 – b, eta orduan, edo a = 1 da edo b = 1 da, eta hori ez da posible G-koak baitira. Beraz, * barnekoa da.

b) *Elkartze-legea*: Alde batetik, (a * b) * c = (a + b - ab) * c = a + b - ab + c - (a + b - ab).c = a + b - ab + c - ac - bc + abc. Beste aldetik, a * (b * c) = a * (b + c - bc) = a + b + c - bc - a.(b + c - bc) = a + b +c - bc - ab - ac + abc, eta berdinak direla ikusten da.

Elementu neutroa: e * a = a ⇒ e + a - ea = a ⇒ e - ea = 0 ⇒ e.(1 - a) = 0 eta a ≠ 1 denez ⇒ e = 0

Elementu simetrikoa: $a * a' = 0 \Rightarrow a + a' - a.a' = 0 \Rightarrow a' = \dfrac{a}{a-1}$ eta beti existitzen da $a \neq 1$ baita.
Abeldartasuna: $a * b = a + b - ab = b + a - ba = b * a$

Ondorioz, (G, *) talde abeldarra da.

12. Izan bitez $(G, +)$ talde abeldarra, $H \subset G$ bere azpitaldea eta $A \subset G$ ondoko multzo hau: $A = \{x \in G \,/\, x^2 \in H\}$. Frogatu A ere G-ko azpitaldea dela.

Ebaz.: Izan bitez $x,y \in A \Rightarrow x^2, y^2 \in H \Rightarrow x^2 . (y^2)^{-1} \in H$ (H azpitaldea izateagatik) $\Rightarrow x.x.y^{-1}.y^{-1} \in H$ (abeldarra izateagatik) $\Rightarrow x.y^{-1}.x.y^{-1} \in H \Rightarrow (x.y^{-1})^2 \in H \Rightarrow x.y^{-1} \in A$.
Ondorioz, A azpitaldea da.

13. $(G, .)$ taldean $f: G \to G$ aplikazioa honela definitzen da: $f(x) = x^{-1}$ $\forall x \in G$.
a) Froga ezazu bijektiboa dela.
b) Froga ezazu isomorfismoa dela, baldin eta soilik G abeldarra bada.

Frog.: a) - Injektiboa: $f(x) = f(y) \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1} \Rightarrow x = y$
- Supra: $\forall y \in G \;\; \exists x \in G \,/\, x = y^{-1}$ eta $f(x) = f(y^{-1}) = (y^{-1})^{-1} = y$

b) - Isomorfismo bada, $x.y = f(x^{-1}).f(y^{-1}) = f(x^{-1}.y^{-1)} = f((y.x)^{-1}) = yx$, eta ondorioz, abeldarra da.
- G abeldarra bada, $f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}.x^{-1} = x^{-1}.y^{-1} = f(x).f(y) \Rightarrow$ homomorfismoa da.

14. Z eraztunean R_m (m kongruentzia-modulua) erlazioa definitzen da:
aRb $\Leftrightarrow$ m, (a – b)-ren zatitzailea bada (beste modu batean esanda: a eta b-k hondar bera ematen badute m-az zatitzean). Froga ezazu baliokidetasunekoa dela.
a) Kalkula itzazu Z / 6 -ren klaseak.
b) Izan bitez klaseen arteko eragiketa hauek: (a) + (b) =(a + b) eta (a).(b) = (a.b)
- Froga ezazu (Z/6 ; +, .) eraztuna dela eta aurkitu horren zeroren zatitzaileak.
- Froga ezazu Z/p osotasun-eraztuna dela, baldin eta soilik baldin p lehena bada.

Ebaz.: Baliokidetasuna:
- aRa, zeren eta m baita a - a = 0-ren zatitzailea (erreflexiboa)
- aRb $\Rightarrow \exists x \in Z \,/\, a - b = m.x \Rightarrow b - a = m.(-x) \Rightarrow$ bRa (simetrikoa)

- aRb eta bRc $\Rightarrow$ $\exists x,y\in Z$ / a - b = m.x eta b - c = m.y $\Rightarrow$ a - c = a - b + b - c = m.x + m.y = m.(x + y) $\Rightarrow$ aRb (hots, iragankorra da).

Ondorioz, R baliokidetasunekoa da.

a) Z/6 multzoak bost klase ditu:

(0) = {....-12,-6,0,6,12,18,...} (1) = {...-11,-5,1,7,13,...} (2) = {....,-10,-4,2,8,....}
(3) = {...,-9,-3,3,9,...} (4) = {...,-8,-2,4,10,...} (5) = {.....,-7,-1,5,11,...}

b) Eragiketen taulak ondoko hauek dira (klaseen ordezkari gisa 0,1,2,3,4,5 erabiliko dira, erosoak baitira klaseak izendatzeko):

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

.	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Tauletan eraztun unitarioa dela ikus daiteke:

+ *eragiketarekiko taldea da*:
- Elkartze-legea betetzen da, zeren eta definizioaren arabera Z-ren elkarkortasunean oinarritzen baita. Gauza bera esan daiteke abeldartasunari buruz (hori egiaztatzeko, nahikoa da taula simetrikoa dela diagonal nagusiarekiko egiaztatzea).
- Elementu neutroa 0 klasea da.
- Guztiek dute aurkakoa (- 0 = 0, - 1 = 5, - 2 = 4, ...)

. *eragiketarekiko elkartze-legea eta abeldartasuna betetzen dira* eta elementu unitarioa 1 klasea da.

Banatze-legea ere frogatzeko nahikoa da definizioa kontuan hartzea, zeren eta garbi ikusten baita Z-ren banakortasunetik ondorioztatzen dela.

Beraz, eraztun unitario eta abeldarra (trukakorra) da.

Bere zeroren zatitzaileak 2, 3 eta 4 dira, zeren eta 2.3 = 0 eta 3.4 = 0 baitira. Horrez gain, agerian gelditzen da ez dela gorputza, zeren eta 2,3 eta 4 klaseek ez baitute aurkakorik (zeroren zatitzaileek ezin dute aurkakorik izan).

- Kontsidera dezagun Z / p eraztuna.

  ⇒ osotasun-eraztuna bada, ez du zeroren zatitzailerik izango, eta ondorioz, ez dira x,y zenbaki osoak existituko, zeinentzat x.y = p den. Ondorioz, p lehena da.

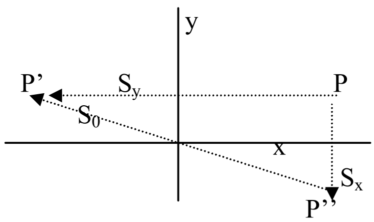
  ⇐ p lehena bada, ezin da p = x.y deskonposatu, eta ondorioz, ez dira zeroren zatitzaileak existituko. Ondorioz, osotasun-eraztuna da.

15. Izan bitez I, S_0, S_x eta S_y planoko ondoko aplikazio hauek:

- *I: identitatea*
- *S_0: jatorriarekiko simetria*
- *S_x: OX ardatzarekiko simetria*
- *S_y: OY ardatzarekiko simetria*

Egiaztatu lau elementu horiek G taldea eratzen dutela konposizioarekiko (G, ${}_0$).

Ebaz.: Taldea dela ikusteko, eragiketa-taula osatuko dugu:



Konposizio guztiak egin behar dira:

- $(S_0 \,{}_0\, S_x)(P) = S_0\,(S_x(P) = S_0\,(P'') = P' = S_y\,(P)$ eta denekin horrela egiten bada, ondoko taula hau aterako da:

0	**I**	**S_0**	**S_x**	**S_y**
I	I	S_0	S_x	S_y
S_0	S_0	I	S_y	S_x
S_x	S_x	S_y	I	S_0
S_y	S_y	S_x	S_0	I

Eta, taulan ikusten den bezala, taldea izateko propietate guztiak betetzen dira. Gainera abeldarra dela egiazta daiteke.

16. Izan bedi G = $\{a_1,a_2,..........,a_{14}\}$ 14 gaiz osatutako taldea. Esan ondoko azpimultzo hauetatik zein izan daitezkeen azpitaldeak:

S = $\{a_1,a_2\}$ F = $\{a_1,a_2,a_3\}$ R = $\{a_1,a_2,.....,a_7\}$ T = $\{a_1,a_2,\ldots\ldots,a_9\}$

Ebaz.: Lagrange-ren teoremaren arabera, G talde baten ordena bere edozein azpitaldeko ordenaren multiploa da. Hemen G-ren ordena 16 da, eta ondorioz, azpitalde izan daitezkeen bakarrak S (14 / 2 osoa da eta) eta R (14/7 osoa da eta) dira.

17. Izan bedi $f : R \rightarrow R \quad f(x) = x^2$ aplikazioa. Kalkulatu bere deskonposizio kanonikoa.

Ebaz.: f-k S baliokidetasun-erlazioa honela definitzen du:

$$xSy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Kalkula ditzagun klaseak. x elementu baten klasea [x] izendatzen bada:

$[x] = \{y \in R \;/\; y^2 = x^2\} = \{x, -x\}$ (bi gai ditu)

Orduan f-ren deskonposizio kanonikoa hauxe da: $f = i \circ h \circ g$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & R \\ R/S \arrow[r, "h"] & R^+ \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Non aplikazioak hauek diren:

$g(x) = [x]$
$h([x]) = x^2$
$i(x) = x$

18. Z eta Z/2 $= \{\overline{0}, \overline{1}\}$ batuketarekiko taldeak kontsideratu dira. Izan bedi $f\; Z \rightarrow Z/2$ ondoko aplikazio hau:

$f(x) = \overline{0}$ x bikoitia bada eta $f(x) = \overline{1}$ x bakoitia bada.
Froga ezazu f homomorfismoa dela eta adierazi bere deskonposizio kanonikoa.

Ebaz.: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dela frogatu behar da. Hiru kasu daude:

- x eta y bikoitiak dira. Orduan, x + y ere bikoitia da eta ondorioz:
  $f(x+y) = \overline{0}$ eta $f(x) + f(y) = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$
- x eta y bakotiak dira. Orduan, x + y bikoitia da eta ondorioz:
  $f(x+y) = \overline{0}$ eta $f(x) + f(y) = \overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$
- bata bakotia (x adibidez) eta bestea bikoitia. Orduan, x + y bakoitia da. Beraz:
  $f(x+y) = \overline{1}$ eta $f(x) + f(y) = \overline{1} + \overline{0} = \overline{1}$

Beraz, homomorfismoa da. Bere deskonposizio kanonikoa egiteko honakoa hartu behar da kontuan: $f(x) = f(y)$ bada, orduan $f(x - y) = 0$ da. Aurrerago ikusiko den bezala irudia zero duten bektoreek azpimultzo berezi bat osatzen dute, f-ren nukleo deritzona eta Kerf adierazten dena. Beraz, $x - y \in$ Kerf jarriko dugu eta $xSy \Leftrightarrow x - y \in$ Kerf jar daiteke. Zatidura-multzoa Z/S idatzi beharrean, Z/Kerf idatzi ohi da.

Bistakoa da Kerf $= \{x \in Z \;/\; f(x) = \overline{0}\} = \{\text{bikoitiak}\}$ dela, eta ondorioz, Z/Kerf zatidura--multzoak bi klase ditu: C_1 bikotiak eta C_2 bakoitiak. Deskonposizioa hauxe da: $f = i \circ h \circ p$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "P"'] & Z/2 \\ Z/\mathrm{Kerf} \arrow[r, "h"'] & \mathrm{Imf} = Z/2 \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

eta aplikazioak hauek dira:

$$p(x) = \begin{cases} C_1 & x \text{ bikoitia bada} \\ C_2 & x \text{ bakoitia bada} \end{cases}$$

h: $h(C_1) = \overline{0}$ eta $h(C_2) = \overline{1}$

i: identitatea.

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. *Frogatu ondoko baieztapen hauek:*
   a) $(A \cup B) \subset (A \cup C)$ *eta* $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ *badira* $\Rightarrow B = C$
   b) $(A' \cup B')' = A \cap B$

2. *Frogatu m elementuko multzo batean* 2^n *azpimultzo daudela (Newtonen binomioa erabili).*

3. $A = \{a,b\}$ *bada, idatzi* $P(A)$ *eta* $P(P(A))$.

4. *Ondoko A, B, C, D multzoak ZxZ-ko azpimultzoak badira, adierazi beren grafoak:*
   a) $A = \{(n,n) / n \in N\}$ b) $B = \{(x,x) / x \in Z\}$
   c) $C = \{(1,-2),(1,2)\}$ d) $D = \{(-2,x) / x \in N\}$

5. *Izan bedi* $f : R^+ \rightarrow R$ $f(x) = \dfrac{3x}{2+x}$ *aplikazioa. Kalkulatu aplikazio horren irudia eta esan injektiboa den.*

6. *R multzoan S erlazioa definitzen da:* $xSy \Leftrightarrow x = y$ *edo* $x + y = 5$. *Froga ezazu baliokidetasunekoa dela eta aurkitu zatidura-multzoa.*

7. *Planoko puntuetan R erlazioa definitzen da:* $ARB \Leftrightarrow OA = OB$, *non O puntu finkoa den. Frogatu baliokidetasunekoa dela eta aurkitu zatidura-multzoa.*

8. *N multzoan R erlazioa definitzen da:* $aRb \Leftrightarrow a$ *b-ren zatitzailea bada.*
   a) *Frogatu ordenakoa dela. Ordena osokoa da?*
   b) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *eta* $B = \{3,4,6,12\}$ *multzoen goiko eta beheko muturrak, maximo eta minimoak, aurkitu.*

9. *Izan bitez* $A,B,C \subset R$ *ondoko azpimultzoak:*
   a) $A = \{x \in R / 2 \leq x < 5\}$
   b) $B = \{x \in R / x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$
   c) $C = \{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} / m,n \in N\}$

   Kalkulatu: - goiko eta beheko borneak.
   - goiko eta beheko muturrak.
   - maximo eta minimoa (existitzen badira).

10. Demagun X eta Y A multzoko azpimultzoak direla eta $f : X \rightarrow Y$ aplikazio bat dela. Frogatu f injektiboa bada, orduan, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ betetzen dela.

11. Izan bitez E multzoa eta $f : P(E) \rightarrow R$ aplikazioa. f gehikorra dela esaten da $\forall A,B \in P(E)\ /\ A \cap B = \varnothing \ \Rightarrow\ f(A \cup B) = f(A) + f(B)$. Frogatu:

a) $f(\varnothing) = 0$.

b) $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B) \qquad \forall A,B \in P(E)$.

12. Demagun $h = g \circ f$. Frogatu:

a) h injektiboa da $\Rightarrow$ f injektiboa da.

b) h supra da $\Rightarrow$ g supra da.

c) h injektiboa eta f supra dira $\Rightarrow$ g injektiboa da.

d) h supra eta g injektiboa dira $\Rightarrow$ f supra da.

13. Aztertu R-tik R-ra doazen ondoko korrespondentziak (grafoen bitartez definituak) aplikazioak diren ala ez. Baiezko kasuetan aurkitu beren izate-eremu eta irudi--multzoak:

a) $G_1 = \{(x,y) / y = \sin x\}$ | *b) $G_2 = \{(x,y) / y^2 - x = 0\}$*

c) $G_3 = \{(x,y) / 2x + y = 1\}$ | *d) $G_4 = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 4\}$*

e) $G_5 = \{(x,y) / y = +\sqrt{1-x^2}\}$ | *f) $G_6 = \{(x,y) / y = \dfrac{+\sqrt{x+3}}{x-2}\}$*

14. Izan bitez $y_1 = x^2$ eta $y_2 = \sin x$ R-tik R-ra doazen aplikazioak. Mugatu beren izate-eremuak injektiboak izan daitezen.

15. Aztertu $f : R^2 \rightarrow R^2 \quad f(x,y) = (x, xy - y^3)$ aplikazioa injektiboa den.

16. Egin $f(x) = x^2$ funtzioaren deskonposizio kanonikoa.

17. Kalkulatu $f(x)$, $g(x) = x^2$ eta $(g \circ f)(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ direla jakinik.

18. Esan ondoko eragiketak barnekoak diren ala ez, eta aztertu beren propietateak (elkarkortasuna, abelkortasuna, ...):

a) N multzoan $a * b$ = a eta b-ren zatitzaile komunetan handiena.

b) " $a * b = 2a.b$

c) " $a * b = a^2.b$

*19. Izan bedi E multzoa eta P (E) bere zatidura-multzoa. P(E) multzoan * barne--eragiketa honela definitzen da:*

$\forall$A,B $\in$ P (E) A * B = $\begin{cases} A \cup B & A \cap B \text{ bada} \\ E & A \cap B \text{ "} \end{cases}$ Aztertu bere propietateak.

20. Izan bitez R –{0,1} → R – {0,1} ondoko aplikazio hauek: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = 1/(1-x)$, $f_5(x) = (x-1)/x$, $f_6(x) = x/(x-1)$.

- *a) frogatu G taldea osatzen dutela konposizioarekiko.*
- *b) frogatu* $H = \{f_1, f_4, f_5\}$ *bere azpitaldea dela eta kalkulatu G/H.*

21. (N ; +, .) multzoan, aztertu $a * b = a^b$ *eragiketa barnekoa den. Baiezkoa bada, aztertu bere propietateak.*

22. (R – {0}, $_o$*) talde bat dela suposatuz, frogatu* $A = \{ \frac{1+2x}{1+2y} \;/\; x,y \in Z\}$ *eta* $B = \{2^x.3^y \;/\; x,y \in Z\}$ *multzoak taldeak direla.*

23. Froga ezazu (Z, +) eta (Q, +) multzoak ez direla isomorfoak.

24. Izan bedi (C ; +, .) hirukotea, non C = {(a,b,c) / a,b,c∈ Q} den eta eragiketak ondoko hauek diren:

$$(a,b,c) + (a',b',c') = (a + a', b + b', c + c')$$
$$(a,b,c) . (a',b',c') = (a.c', 0, c.a')$$

- *a) Esan eraztun abeldarra den.*
- *b) Aztertu S = {(a,b,a) / a,b∈Q} multzoa C-ko azpieraztun abeldarra den.*

25. Frogatu polinomioen multzoa, batuketa eta biderketa arruntekin, eraztun abeldar eta unitarioa dela.

26. Frogatu R-tik R-ra doazen aplikazioek eratzen duten C multzoa ondoko bi eragiketekin eraztuna dela:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall f,g \in C$
- $(f.g)(x) = f(x).\, g(x) \quad$ "

27. Esan ondoko taldeen artean zein diren azpieraztunak edo azpigorputzak:

- *a) Oso bikoitiak*
- *b) Oso bakoitiak*
- *c)* $C = \{a + b\sqrt{2} \;/\; a,b \in Z\}$

28. Izan bedi $C = \{a + b.\sqrt{3} \;/\; a,b \in Z\}$ *multzoa.*

a) Frogatu R-ko azpieraztuna dela.
b) Esan R-ko azpigorputza den.
c) S erlazioa honela defini dezagun:

$(a + b.\sqrt{3})\ S(a' + b'\sqrt{3}) \Leftrightarrow$ *[a - a' eta b - b' bikoitiak badira].*

Frogatu baliokidetasunekoa dela eta aztertu bere zatidura-multzoa.

2. BEKTORE-
-ESPAZIOAK

Bektore-espazioaren egitura erabakigarria izan da matematika eta fisikaren garapenean. Adibiderik garrantzitsuenak plano eta espazio arruntak (R^2 eta R^3) dira eta adibide gehienak espazio horietan jorratuko dira Mekanika kuantikoan (fisika modernoaren oinarrian), adibidez, uhin-funtzioek bektore-espazioa osatzen dute eta Shrodinger-en ekuazioaren ebazpenetik sortzen dira.

2.1. DEFINIZIOA

Demagun V multzoan barne-eragiketa bat (+) eta kanpoko beste bat ($._k$, non K gorputz bat den) daudela.

2.1. DEFINIZIOA: $(V; +, ._K)$ hirukotea bektore-espazioa da (K gorputzaren gainekoa):

- (V, +) talde trukakorra bada.
- eta ondoko baldintzak betetzen badira:

$$\begin{cases} 1.x = x & (1 \quad K - \text{ren} \quad \text{unitatea} \quad \text{da}) & \forall x \in V \\ \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y & \forall \alpha \in K & \forall x, y \in V \\ (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x & \forall \alpha, \beta \in K & \forall x \in V \\ \alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x & \forall \alpha, \beta \in K & \forall x \in V \end{cases}$$

Bektore-espazio baten elementuei ***bektore*** deritze eta x, y, z, u, v, w, ... izendatzen dira, eta K gorputzaren gaiei *eskalar* eta α, β, γ, ... izendatzen dira.

K gorputz hori Q, R edo C bada, bektore-espazio arrazionala, erreala edo irudikaria dela, hurrenez hurren, esaten da.

Egitura horretan bi zero daudela kontuan hartu behar da, eskalarra, K gorputzarena, eta V bektore-espazioarena, eta biak 0 idazten dira askotan. Agertzen den testuinguruak esango digu zeini dagokion, baina araua zero bektorea adierazteko o (txikia) jartzea izango da eta zero eskalarrarentzat 0 (handia).

ADIBIDE NABARIA: R^n

Izan bedi $R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \ / \ x_i \in R\}$ multzoa, non ondoko eragiketak definitzen diren:

1. Barnekoa (+): $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
2. Kanpokoa ($._R$): $\alpha . (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha . x_1, \alpha . x_2, ..., \alpha . x_n)$

Erraz froga daiteke bektore-espazioa dela. Elementu neutroa (0, 0, ..., 0) bektorea da eta $(x_1, x_2, ..., x_n)$ bektorearen simetrikoa $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ izango da.
n = 2 bada, bektore-planoa dugu (R^2), eta n = 3 bada, espazio arrunta (R^3).

PROPIETATEAK

1. $0. x = o$ — Frog.: $0.x = (0 + 0).x = 0.x + 0.x \Rightarrow 0.x = o$

2. $\alpha.o = o$ — Frog.: $\alpha.o = \alpha.(o + o) = \alpha.o + \alpha.o \Rightarrow \alpha.o = o$

3. $\alpha.x = o \Rightarrow \alpha = 0$, hala $x = o$ — Frog.: $\alpha \neq 0$ orduan, $\exists \ \alpha^{-1}$ eta $\alpha^{-1} .(\alpha.x) = \alpha^{-1}. o$ $\Rightarrow (\alpha^{-1}. \alpha).x = o \Rightarrow 1.x = o \Rightarrow x = o$.

4. $- (\alpha.x) = (- \alpha).x = \alpha.(- x)$ — Frog.: $(- \alpha).x + \alpha.x = (- \alpha + \alpha).x = 0.x = o$, beraz, $(-\alpha).x = - \alpha.x$ izango da. Modu berean: $\alpha.(- x) + \alpha.x = \alpha.(- x + x) = \alpha.o = o$, beraz, $\alpha.(- x) = -\alpha.x$ da.

5. $x \neq o$ eta $\alpha.x = \beta.x \Rightarrow \alpha = \beta$ — Frog.: $\alpha.x - \beta.x = o \Rightarrow (\alpha - \beta).x = o \Rightarrow \alpha - \beta = 0$

6. $\alpha.x = \alpha.y$ eta $\alpha \neq 0 \Rightarrow x = y$ — Frog.: $\alpha.x - \alpha.y = o \Rightarrow \alpha.(x - y) = o \Rightarrow x - y = o$

2.2. BEKTORE-AZPIESPAZIOA

2.2. DEFINIZIOA: Demagun V bektore-espazio bat dela (K gorputzaren gainekoa) eta S bere azpimultzo bat. S V-ren bektore-azpiespazioa dela esaten da, S bera bektore--espazioa bada.

Argi dago o bektorea eta V azpiespazioa V-ko azpiespazioak direla (inpropioak deritze)
KARAKTERIZAZIOA: S V-ren azpiespazioa izateko nahikoa da ondoko bi baldintza hauek betetzea:

- S multzoa V-ren azpitaldea izatea. $(\forall x, y \in S \Rightarrow x - y \in S)$
- S egonkorra izatea kanpoko eragiketarekiko. $(x \in S$ eta $\alpha \in K \Rightarrow \alpha.x \in S)$

Bi baldintza horiek batean labur daitezke: $\forall \alpha,\beta \in K, \forall x,y \in S \Rightarrow \alpha.x + \beta.y \in S$

Hori da, hain zuzen ere, bektore-azpiespazioaren karakterizazioa.

adibidea: Demagun $S \subset R^2$ honela definiturik dagoela: $S = \{(a,b) / a - 2b = 0\}$ eta jakin nahi dugu R^2 -ren bektore-azpiespazioa den.

Izan bitez x = (a,b) eta y = (a',b') $\in$ S. Orduan, $\alpha.x + \beta.y = (\alpha.a, \alpha.b) + (\beta.a', \beta.b') = (\alpha.a + \beta.a', \alpha.b + \beta.b')$. Bektore hori S-ren barnekoa den jakiteko, $(\alpha.a + \beta.a') - 2.(\alpha.b + \beta.b') = 0$ egiaztatzen den ikusi behar da. Baina badakigu a - 2b = 0 eta a' - 2.b' = 0 direla. Ondorioz, $\alpha.a - 2.\alpha.b + \beta.a' - 2.\beta.b' = \alpha.(a - 2.b) + \beta.(a' - 2.b') = 0$. Beraz, S bektore-azpiespazioa da.

Oharra: hemendik aurrera bektore-espazioa aipatzen dugunean, K gorputzaren gainean dagoela suposatuko dugu.

BEKTOREEN ZATIDURA-ESPAZIOA

Demagun S V bektore-espazioko azpiespazio bat dela. Orduan, talde abeldarra denez, V/S zatidura-taldea definituta dago vRv' $\Leftrightarrow$ v - v' $\in$ S erlazioaren bitartez. Talde horren klaseak v + S adieraziko dira. Hots:

$$V/S = \{v + S / v \in V\}$$

Badakigu (V/S, +) V-ko talde abeldarra dela (27. or.). Defini dezagun kanpo--eragiketa bat era honetan: k. (v + S) = (k.v + S). Eragiketa hori V-ko kanpo--eragiketarekin bateragarria dela ikus daiteke, hots, eragiketa ez dagoela klase bakoitzaren ordezkariaren mende. Hori egiaztatzeko demagun vRw dela; orduan, w = v + s, non s $\in$ S, eta ondorioz:

k.(w + S) = k.(v + S), zeren eta k.(w + S) = (k.w + S) = (k.(v + s) + S) = (k.v + s' + S) = (kv + S).

Erraz froga daitezke (V/S, +) multzoan, jarritako kanpo-eragiketa horrekin, bektore-espazio izateko eskatzen diren lau axiomak betetzen direla.
Ondorioz, $(V/S ; +, ._K)$ bektore-espazioa da.

2.3. AZPIESPAZIOEN EBAKETA ETA BATUKETA

EBAKETA

Izan bedi V bektore-espazio bat eta U_i (i = 1....n) bere azpiespazioen familia bat.

2.3. DEFINIZIOA: U_i azpiespazioen *ebaketa* beren bektore komunek osatutako multzoa da ($\cap U_i$ idazten da)

2.1. PROPOSIZIOA.: $\cap U_i$ bektore-azpiespazioa da.

Frog.: Horrela da, zeren eta $x,y \in \cap U_i$ bada, orduan $\alpha.x + \beta.y \in U_i$ baita (horiek guztiak azpiespazioak direlako). Ondorioz, $\alpha.x + \beta.y \in \cap U_i$.

Denek gutxienez gai komun bat dute, zero bektorea hain zuzen ere, eta bi azpiespazio disjuntuak direla aipatzen dugunean, haien ebakidura zero bektorea dela ($U_i \cap U_j = o$) esaten ari gara.

BATUKETA

2.4. DEFINIZIOA: U_1 eta U_2 azpiespazioen batuketa lehenengoaren bektore baten eta bigarrenaren beste bektore baten arteko batuketaren bitartez adierazi ahal diren bektoreen multzoa da. Hots: $U_1 + U_2 = \{ x = x_1 + x_2 / x_1 \in U_1 \;\; x_2 \in U_2 \}$

2.2. PROPOSIZIOA: Batuketa bektore-azpiespazioa da.

Frog.: Izan bitez $x,y \in U_1 + U_2$. Orduan, $x = x_1 + x_2$ eta $y = y_1 + y_2$, non $x_1, y_1 \in U_1$ eta $x_2, y_2 \in U_2$ diren. Hartara, $\alpha.x + \beta.y = \alpha.(x_1 + x_2) + \beta.(y_1 + y_2) = \alpha.x_1 + \beta.y_1 + \alpha.x_2 + \beta.y_2$, baina $\alpha.x_1 + \beta.y_1 \in U_1$ eta $\alpha.x_2 + \beta.y_2 \in U_2$ azpiespazioak direlako. Beraz, $\alpha.x + \beta.y \in U_1 + U_2$ f.n.b. (frogatu nahi genuen bezala).

Batuketaren definizioa bi azpiespazio baino gehiagorentzat orokortu ahal da eta, era berean, batura bektore-azpiespazioa ere badela froga daiteke.

2.3. PROPOSIZIOA: U_i azpiespazio guztiak barne hartzen dituen azpiespaziorik txikiena $\sum U_i$ da.

Frog.: - Hasteko $U_j \subseteq \sum U_i$ dela frogatuko dugu. Demagun $u_j \in U_j$, orduan, $u_j = o + o + ...+ u_j + o + ...+ o$ (zero bektorea denetan baitago) egin ahal da, beraz, $u_j \in \sum U_i$

- Orain $\sum U_i$ txikiena dela ikusiko dugu. Demagun $U_i \subset S$ $\forall i$ (non S azpiespazio bat den). $\sum U_i \subset S$ frogatu nahi dugu. Izan bedi $x \in \sum U_i$ orduan, $x = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$, non $x_i \in U_i$, baina horiek denak S-ren barnean daude, eta ondorioz, haien batura, hots x, S-ren barnean egongo da. Beraz, $\sum U_i \subseteq S$.

BATUKETA ZUZENA

Demagun U_i $(i = 1,..., n)$ dela V espazioko azpiespazioen familia bat eta $\sum U_i$ horien batura. Badakigu batuketako edozein x bektore $x = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$ moduan jar daitekeela. Batzuetan posible da beste deskonposizio bat izatea, esate baterako, $x = x'_1 + x'_2 + \ldots\ldots + x'_n$. Hori argi ikusi ahal da ondoko adibidean:

adibidea: Kontsidera dezagun $V = R^3$ dela eta $U_1 = \{(a,0,c)\}$ eta $U_2 = \{(0,m,n)\}$ bere bi azpiespazioak. $U_1 + U_2 = \{(a,m,c+n)$ da. $x = (2,1,4)$ bektorea, adibidez, $U_1 + U_2$ azpiespazioaren barne dago eta hainbat eratan deskonposa dezakegu, adibidez $x = (2,0,1) + (0,1,3)$ edo $x = (2,0,5) + (0,1,-1)$.

2.5. DEFINIZIOA: $\sum U_i$ ***batuketa zuzena*** dela esaten da, bere bektore guztiek deskonposizio bakarra badute. Kasu horretan $\sum U_i = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus \ldots\ldots \oplus U_n$ idazten da.

Hori gertatzen bada, azpiespazioak *independenteak* direla esaten da.

2.1. TEOREMA: $\sum U_i$ zuzena da $\Leftrightarrow$ $o = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (non $x_i \in U_i$) $\Rightarrow x_i = o$ $\forall x_i$
Hau da: $\sum U_i$ zuzena da, baldin eta soilik baldin zeroren deskonposizio bakarra zeroz osatuta badago.

Frog.: $\Rightarrow$ demagun $\sum U_i$ zuzena dela. Bistan dago zero bektoreak $o = o + o \ldots\ldots + o$ deskonposizioa onartzen duela eta $\sum U_i$ –koa dela. Baina $\sum U_i$ batuketa zuzena denez, bere bektoreek deskonposizioa bakarra onartzen dute. Beraz, o bektoreak ez du bestelako deskonposiziorik.

$\Leftarrow$ Orain hipotesia $o = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (non $x_i \in U_i$) $\Rightarrow x_i = o$ $\forall x_i$ da.
Demagun batuketa ez dela zuzena, orduan $x \in \sum U_i$ bektorea existitzen da eta bi modutan deskonposa daiteke:
$x = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$ eta $x = x'_1 + x'_2 + \ldots\ldots + x'_n$ (non $x_i \in U_i$ eta $x'_i \in U_i$). Orduan $(x_1 - x'_1) + (x_2 - x'_2) + \ldots\ldots + (x_n - x'_n) = o$, baina hipotesiaren arabera $x_i - x'_i = 0$, eta ondorioz, $x_i = x'_i$, hots, deskonposizio bakarra dago. Beraz, zuzena da.

2.2. TEOREMA: $U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$ zuzena bada $\Rightarrow$ haien edozein batuketa ere zuzena izango da.

Frog.: Imagina dezagun haien r azpitalde (U_1,...., U_r) hartzen ditugula ($r < n$). Erosotasuna dela eta, lehenengoak direla suposatuko dugu (horrek ez dio orokortasunik kentzen frogapenari). Beraz, $S = U_1 + U_2 + ... + U_r$ zuzena dela frogatu nahi dugu. Demagun $x \in S$, eta bi deskonposizio onartzen dituela $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$ eta $x = x'_1 + x'_2 + ... + x'_r$. Orduan, $R = U_1 + ... + U_r + U_{r+1} + ... + U_n$ espazioko w eta w' bektoreak honela eraikitzen baditugu:
$w = x_1 + x_2 + ... + x_r + o + ... + o$ eta $w' = x'_1 + x'_2 + ... + x'_r + o + ... + o$ berdinak izango dira, $w = x + o + o + .. = x$ eta $w' = x + o + o + .. = x$ baitira, eta hipotesiaren arabera R batuketa zuzena denez, deskonposizio bakarra onartzen du eta ondorioz, $x_i = x'_i$ f.n.g.b. (frogatu nahi genuen bezala).

2.3. TEOREMA**:** $U_1 + U_2 + ... + U_n$ zuzena bada $\Rightarrow$ $U_i \cap U_j = \{o\}$ $\forall i \neq j$

Frog.**:** Demagun $\exists x \in U_i \cap U_j$ (non $x \neq o$ den). Aurreko teoremaren arabera $S = U_i + U_j$ zuzena da eta kontraesan batera iritsi gara, zeren eta **x** bektorea bi modutan adierazi ahal baita: $x = o_i + x$ eta $x = x + o_j$. Ondorioz, batuketa zuzena den S azpiespazioko x bektoreak bi deskonposizio izango lituzke. Beraz, $x = o$ izan daiteke soilik.

Elkarrekikotasuna ez da, oro har, betetzen baina bai kasu batzuetan:

- BI AZPIESPAZIOREN KASUA: kasu honetan 2.3. teoremaren elkarrekikotasuna egiaztatzen da. Hots:

$U_1 \cap U_2 = \{o\} \Rightarrow U_1 + U_2$ zuzena da

Frog.: Demagun $x = x_1 + x_2$ eta $x = x'_1 + x'_2$, non $x_1, x'_1 \in U_1$ eta $x_2, x'_2 \in U_2$.
Orduan $x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$ eta $o = (x_1 - x'_1) + (x_2 - x'_2)$ betetzen da. Hau da, $(x_1 - x'_1)$ eta $(x_2 - x'_2)$ aurkakoak dira. Baina $m = x_1 - x'_1$ bektorea U_1 -ean dago eta bere aurkakoak ($(x_2 - x'_2)$ aurrekoaren arabera) ere U_1 -ean egon beharko du. Honetaz aparte, $x_2 - x'_2$ bektorea U_2-koa ere bada. Beraz, $x_2 - x'_2 \in U_1 \cap U_2$. Hipotesitik $x_2 - x'_2 = o$ dela ondorioztatzen da, beraz, bere aurkakoa ere $x_1 - x'_1 = o$ da. Hortaz, $x_1 = x'_1$ eta $x_2 = x'_2$ dira, eta ondorioz, $U_1 \cap U_2$-ko bektore guztiek deskonposizio bakarra onartzen dute eta batuketa zuzena da.

2.4. AZPIESPAZIO BETEGARRIAK

2.6. DEFINIZIOA: Izan bitez V bektore-espazio bat eta U_1 eta U_2 bere bi azpiespazio. U_1 eta U_2 betegarriak direla esaten da, $V = U_1 \oplus U_2$ betetzen bada.

adibidea: $V = R^3$ bada eta $U_1 = \{(a,0,c) / a,c \in R\}$ eta $U_2 = \{(0,b,0) / b \in R\}$ badira, aztertu betegarriak diren.
$V = U_1 + U_2$ den eta $U_1 \cap U_2 = o$ den aztertu behar dugu:

- $V = U_1 + U_2$ dela frogatzeko, $\forall u \in V$ $u = w + v$ jar daitekeen (non $w \in U_1$ eta $v \in U_2$) ikusi behar dugu. Baina $u = (x,y,z) = (x,0,z) + (0,y,0)$ eta bistan denez, bata, $(x,0,z)$, U_1-ekoa da eta bestea, $(0,y,0)$, U_2 -koa.

- $U_1 \cap U_2 = o$ frogatzeko, u bektorea existitzen dela suposatuko dugu, non $u \in U_1 \cap U_2$ betetzen den. Orduan, bi modutan jarri ahal izango da: $u = (a,0,c)$ eta $(0,b,0)$, eta bektore bera denez, $a = b = c = 0$, hots, $u = o$.

2.5. AZPIESPAZIO MAXIMALAK

2.7. DEFINIZIOA: V bektore-espazio (K gorputzaren gaineko) baten U bektore--azpiespazio propio bat *maximala* dela esaten da, V ezik, beste azpiespazio baten barnean ez badago.

Demagun U maximala dela; orduan $v \in V$ bektoreak existitu behar du, non $v \notin U$ eta $k.v \notin U$ diren $\forall k \in K$. Ondorioz, $S\{v\} = \{k.v \mid k \in K\}$ azpiespazioa (v bektoreak sortutakoa) eta U betegarriak dira. Alde batetik, bistan dago $S\{v\} \cap U = \{o\}$ eta bakarrik $V = U + S\{v\}$ dela egiaztatu behar da.
Hori bistakoa da: $U + S\{v\}$ azpiespazioa da (2.2. proposizioa) eta U barruan du. Beraz, definizioaren arabera V izango da.

U eta $S\{v\}$ (hau da, v ($\neq o$) bektoreak sortutako azpiespazioa) bata bestearekiko betegarriak badira, orduan U maximala da. Ikus dezagun:

Hipotesiak $V = U \oplus S\{v\}$ dela dio. Demagun $U \subset W$ (non W V-ko azpiespazio bat den) eta izan bedi $w \in W$ eta $w \notin U$.
Orduan $w \in V$ denez, $w = u + k.v$ jarri ahal izango da, non $k \neq 0$ (bestela $w = u$ eta ezin da) eta $u \in U$ diren. Orduan, $v = (1/k).(w - u)$, beraz, $v \in W$, eta ondorioz, $S\{v\} \subset W$. Biak (U eta $S\{v\}$) W-koak dira, beraz, $U \oplus S\{v\} \subset W$ beteko da. Baina $U \oplus S\{v\} = V$ denez, $V = W$ izan beharko da. Ondorioz, U maximala da, zeren eta ez baita W existitzen, non $U \subset W$ den.

Hori dena ondoko proposizio honetan jasotzen da:

2.4. PROPOSIZIOA: Azpiespazio maximalak beti dira edozein bektorek sortutako azpiespazioarekiko betegarriak. Edo beste modu batean esanda:
U da V-ko azpiespazio maximala $\Leftrightarrow$ existitzen da $v \in V$ ($v \neq 0$) eta $v \notin U$ bektore bat, non $V = U \oplus S\{v\}$ den.

2.6. BEKTOREEN KONBINAZIO LINEALA

Demagun u_1, u_2, ..., u_n V bektore-espazio (K gorputzaren gaineko) baten bektoreak direla eta $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ K gorputz horren eskalarrak.

2.8. DEFINIZIOA: $x = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 +.....+ \alpha_n.u_n$ bektoreari bektore-sistema horren *konbinazio lineala* deritzo.

Bistan denez, bektore-sistema batean egin daitezkeen konbinazio linealalak mugagabeak dira.

ITXIDURA LINEALA

Bektore-sistema baten konbinazio linealek osatzen duten bektore-multzoari sistemaren *itxidura lineala* deritzo.

adibidea: R^3 espazioan (1,2,2) eta (-1,0,3) bektoreen itxidura lineala honakoa izango da:

$$S = \{\alpha.(1,2,2) + \beta.(-1,0,3) \;/\; \alpha,\beta \in R\} = \{(\alpha - \beta, 2.\alpha, 2.\alpha + 3.\beta) \;/\; \alpha,\beta \in R\}$$

2.5. PROPOSIZIOA**:** Itxidura lineala bektore-azpiespazioa da.

Frog.: Demagun u_1, u_2, ..., u_n V bektore-espazio (K gorputzaren gaineko) bateko bektoreak direla eta izan bedi S beren itxidura lineala: $S = \{\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ...+ \alpha_n.u_n \;/\; \alpha_y \in K\}$. Honakoa frogatu behar dugu: $\forall$ x,y $\in$ S eta $\forall$ m,n $\in$ K $\Rightarrow$ m.x + n.y $\in$ S.
Ikus dezagun:
Izan bitez $x = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ...+ \alpha_n.u_n$ eta $y = \alpha'_1.u_1 + \alpha'_2.u_2 + ...+ \alpha'_n .u_n$, orduan $m.(\alpha_1 .u_1 + \alpha_2 .u_2 + ...+ \alpha_n .u_n) + n. (\alpha'_1 .u_1 + \alpha'_2 .u_2 + ...+ \alpha'_n .u_n) = (m.\alpha_1 + n.\alpha'_1).u_1 + (m.\alpha_2 + n.\alpha'_2).u_2 +....... + (m.\alpha_n + n.\alpha'_n).u_n$.
Bistan denez S-ren barnean dago, bektore-sistema horren konbinazioa baita. Beraz, S bektore-azpiespazioa da.

2.7. MULTZO SORTZAILEA

Izan bitez V bektore-espazioa eta $\{u_1,u_2,......, u_n\}$ espazio horren bektore--sistema.

2.9. DEFINIZIOA: Bektore-sistema hori V-ko sistema *sortzailea* dela esaten da, V-ko edozein x bektore bektore-sistema horren konbinazio lineal bat bezala jarri ahal bada.

Hots: $\{u_1,u_2,......, u_n\}$ sistema V-ko sortzailea da $\Leftrightarrow \forall x \in V\ \exists \alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n \in K$ / $x = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 +....+ \alpha_n.u_n$.

adibideak:

a) R^2 espazioan (1,0) eta (0,1) sortzailea da, edozein (x,y) = x.(1,0) + y. (0,1) baita.
Era berean, (2,1) eta (1,-1) ere sortzailea da. Bektore bat emanda, (x,y), α eta β aurkitu behar ditugu, zeinentzat $(x,y) = \alpha.(2,1) + \beta.(1,-1)$ den. Argi dago existitzen direla eta $\left.\begin{array}{l} x = 2.\alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \end{array}\right\}$ direla sistemaren soluzioak.

Ebatzi ondoren $\alpha = \dfrac{x+y}{3}$ eta $\beta = \dfrac{x-2y}{3}$ dira.

b) R^3 espazioan (1,0,0), (0,1,0) eta (0,0,1) sistema sortzailea da, edozein bektore (x,y,z) = x.(1,0,0) + y (0,1,0) + z.(0,0,1) moduan jar baitaikete.
Hemen ere sistema sortzaileak mugagabeak dira, eta (1,1,2), (2,0,1) eta (1,-2,3) sistema, esate baterako, sortzailea dela froga daiteke, 3 ezezaguneko ekuazio-sistema bat ebatziz.

2.8. MENDEKOTASUN LINEALA ETA INDEPENDENTZIA LINEALA

INDEPENDENTZIA LINEALA (SISTEMA ASKEA)

2.10. DEFINIZIOA: $\{u_1,u_2,......, u_n\}$ bektore-sistema *linealki independentea* (*askea*) da $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 +....+ \alpha_n.u_n = o \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$

Bistan denez, o bektoreak ezin du parte hartu sistema aske batean ($\{o,u_1,......, u_n\}$ ez da aske $k.o + 0.u_1 +.....+ 0.u_n = o$ delako edozein k-rentzat).

adibidea: R^3 espazioan (0,1,1), (1,3,1), (2,3,-1) sistema askea den jakiteko, $\alpha.(0,1,1) +\beta.(1,3,1) + \gamma.(2,3,-1) = (0,0,0)$ berdintzatik $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ondorioztatzen den ikusi behar da.

Berdintza horrek ondoko sistema sortzen du: $\left.\begin{array}{l} \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{array}\right\}$ eta $\alpha = 3.\gamma$ eta $\beta = -2.\gamma$

ematen digunez, independenteak ez direla esango dugu.

Garbi dago $3\gamma.(0,1,1) - 2.\gamma.(1,3,1) + \gamma\,(2,3,-1) = (0,0,0)$ dela. Ondorioz, (2,3,1) = 2.(1,3,1) - 3.(0,1,1), hots, bata besteen konbinazio lineala da.

Askea ez den sistemari *linealki mendeko* (edo *dependente*) deritzo.

2.6. PROPOSIZIOA**:** Sistema bat mendekoa da, baldin eta soilik baldin sistema horren bektore bat, gutxienez, gainerakoen konbinazio lineala bada.

Frog.: $\Rightarrow$ $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ sistema mendekoa bada, orduan badago zero ez den α_i eskalar bat, zeinarentzat $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 +.....+ \alpha_y .u_i +....+ \alpha_n.u_n = o$ den, eta ondorioz, bakan daiteke:

$$u_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}u_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i}u_2 - .... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}u_n$$ frogatu nahi genuen bezala.

$\Leftarrow$ Haietako bat, u_i adibidez, besteen konbinazioa bada, hots, $u_i = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 +.....+ \alpha_{i-1} .u_{i-1} +.\alpha_{i+1} .u_{i+1}...+ \alpha_n u_n$ bigarren atalera eraman daiteke. Hau da: $o = \alpha_1.u_1 +.....- u_i +....+ \alpha_n.u_n$ eta eskalar horietako bat gutxienez ez da zero (α_i = -1 da eta).

Aipatzekoa da $\{u, v\}$ bi bektorez osatutako sistema batean, proportzionalak badira soilik direla mendekoak, beraz, bata bestearen multiplo bezala jarri ahal izango da: $u = \lambda.v$

2.9. OINARRIAK ETA DIMENTSIOA

2.11. DEFINIZIOA: V bektore-espazio baten $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ bektore-sistema bati ***oinarri*** deritzo sortzaile eta askea bada.

adibideak:

- R^2 espazioan

1. - {(1,0), (0,1)} oinarria da. Sortzailea dela ikusi baikenuen lehen, eta bistakoa da (1,0) eta (0,1) independenteak direla ez baitira proportzionalak.

2.- Modu berean, {(1,2), (2,0)} sistema ere oinarria da. Ikus dezagun:

a) Edozein bektore (x,y) = n.(1,2) + m.(2,0) moduan jar daiteke (hain zuzen, x = n + 2.m eta y = 2.n; beraz, n = y/2 eta m = (2x - y) / 4 dira).Ondorioz, sortzailea da.

b) m.(1,2) + n.(2,0) = (0,0) $\Rightarrow$ m +2n = 0 eta 2m = 0 $\Rightarrow$ m = n = 0; beraz, askea da (hori oso erraz ikusten da, propoportzionalak ez direla kontuan hartuz).

- R^3 espazioan

1.- {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)} bistakoa da oinarria dela.

2.- Modu berean, erraz froga daiteke {(1,0,-1),(2,1,0),(0,1,0)} sistema ere oinarria dela:

a) sistema sortzailea izateko edozein bektore (x,y,z) = m.(1,0,-1) +n.(2,1,0) + p.(0,1,0) moduan jarri ahal izango da.
Hori egiaztatzeko nahikoa da ondoko ekuazio-sistema ebaztea:

$$\left.\begin{array}{l} x = m + 2n \\ y = n + p \\ z = -m \end{array}\right\} \Rightarrow m = -z \quad n = \frac{x+z}{2} \quad p = \frac{2y - x - z}{2} \quad \text{ondorioz, sortzailea da.}$$

b) $m.(1,0,-1) + n.(2,1,0) + p.(0,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m + 2n = 0 \\ n + p = 0 \\ -m = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = n = p = 0$ eta,

ondorioz, askea da.

Bektore-espazio batean makina bat oinarri daude (infinituak) eta oinarri baten elementu-kopurua infinitua izan daiteke. Espazio batek kopuru finituko (mugatuko) oinarri bat badu, *dimentsio mugatukoa (finitukoa)* dela esan ohi da.

R^n bektore-espazioan {(1,0,...., 0), (0,1,...., 0), ..., (0,0,....., 1)} bektore-sistema oinarri bat da eta *oinarri kanoniko* deitzen zaio.

KOORDENATUAK

2.12. DEFINIZIOA: V espazioan $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ oinarri bat bada, edozein x bektore horrela jar daiteke: $x = \alpha_1 .u_1 + \alpha_2.u_2 +......+ \alpha_n.u_n$. Eskalar horiei oinarri horrekiko v-ren *koordenatuak* deritze.

adibidea: Aurreko adibidean, bektore baten koordenatuak {(1,0,-1), (2,1,0), (0,1,0)} onarriarekiko (m,n eta p izendatu ditugu) zein diren ikusi dugu. Esate baterako, (1.5,3) bektorearen koordenatuak m = -3, n = 2 eta p = 3 izango dira.

Ongi ulertu behar da oinarriz aldatzen badugu, bektorearen koordenatuak aldatu egingo direla, baina bektorea ez dela aldatzen. Aurreko adibidean bektore hori adierazteko modu asko dago:

(1,5,3) oinarri kanonikoarekiko
$(-3,2,3)_B$, non B = {(1,0,-1), (2,1,0), (0,1,0)} den.
…………………………………………………

Bistan denez, bektore baten koordenatuak idazten direnean, beharrezkoa da zein oinarritan ari garen adieraztea. Hori azpindize baten bitartez egingo da. Azpindizerik agertzen ez bada, oinarri kanonikoan ari garela suposatuko da.

2.4. TEOREMA: Oinarri batekiko bektore baten koordenatuak bakarrak dira

Frog.: Suposatuko dugu bi deskonposizio daudela: $x = \alpha_1 .u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_n.u_n$ eta: $x = \alpha'_1 .u_1 + \alpha'_2.u_2 + ... + \alpha'_n.u_n$, orduan:
$x - x = o = (\alpha_1 - \alpha'_1).u_1 + (\alpha_2 .- \alpha'_2).u_2 + ... + (\alpha_n .- \alpha'_n).u_n$ eta $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ askea denez, $\alpha_i = \alpha'_i \ \forall i$.

2.5. TEOREMA: Espazio baten oinarri guztien bektore-kopurua bera da.

Frog.: Demagun V espazioan bi oinarri daudela, $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ eta $B' = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$, non $m < n$. Orduan, $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ V-ren sortzailea denez, $u_1 = \alpha_1 .v_1 + \alpha_2.v_2 + ... + \alpha_m.v_m$, non α_i bat gutxienez ez den zero (bestela $u_1 = o$ litzateke). Demagun $\alpha_1 \neq 0$, orduan v_1 izango da $\{u_1, v_2, ..., v_m\}$ sistemaren konbinazio lineala eta $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ sortzailea denez, $\{u_1, v_2, ..., v_m\}$ sistemak ere sortzailea izan beharko du.

$\{u_1, v_2, ..., v_m\}$ sortzailea denez, $u_2 = \alpha_1 .u_1 + s_2.v_2 + ... + s_m.v_m$, non s_i bat gutxienez ez den zero (bestela $u_2 = \alpha_1 .u_1$). Demagun $s_2 \neq 0$, orduan v_2 izango da $\{u_1, u_2, v_3, ..., v_m\}$ sistemaren konbinazio lineala eta $\{u_1, v_2, ..., v_m\}$ sortzailea denez, $\{u_1, u_2, v_3, ..., v_m\}$ sistemak ere sortzailea izan beharko du.

Prozesu hori errepikatuz $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ sistema sortzailea dela frogatzera iritsiko da, eta ondorioz, u_{m+1} beraien konbinazio lineala izango da, baina hori ezinezkoa da u_i independenteak direlako (oinarri bat osatzen baitute). Ondorioz, $m = n$ bete beharko da (f.n.g.b).

2.13. DEFINIZIOA: Espazio baten edozein oinarriren bektore-kopuruari espazio horren *dimentsio* deritzo.

adibideak:
- R^2 bektore-planoaren dimentsioa 2 da.
- R^3 espazio arruntaren dimentsioa 3 da.
- R^n bektore-espazioaren dimentsioa n da.
- P_2 (x) 2. mailako edo txikiagoko polinomioek osatutako espazioaren dimentsioa 3 da.
- P_n (x) n-garren mailako edo txikiagoko polinomioek osatutako espazioaren dimentsioa n+1 da.

2.10. AZPIESPAZIOEN DIMENTSIOAK ETA OINARRIAK

Bistakoa da azpiespazio baten dimentsioa espazioarena baino txikiagoa dela. R^2 eta R^3 espazioetako azpiespazioak nolakoak diren aztertuko dugu.

1. Bektore-planoa (R^2)

Hemen existitzen diren azpiespazio propio bakarrak dimentsio bakarrekoak dira.

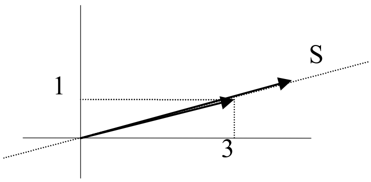
(a,b) bektore bat finkatuz gero, harekiko proportzionalak direnek azpiespazio bat eratzen dute: $S = \lambda.(a,b)$ hain zuzen, eta azpiespazio horren oinarri bat bere edozein bektore izan daiteke.

Ikusiko dugunez $S = \{\lambda.(a,b) \,/\, \lambda \in R\}$ azpiespazioa da:

Izan bitez $u,v \in S$ eta $n,m \in R$. Ikusi behar dena da $n.u + m.v$ S-koa den. Bektore horiek S-koak direnez, $u = \lambda.(a,b)$ eta $v = \alpha.(a,b)$ jar daiteke. Orduan:
$n.u + m.v = n.\ \lambda.(a,b) + m.\ \alpha.(a,b) = (n.\lambda + m.\alpha)\ .\ (a,b) = k.(a,b) \in S$.

Azpiespazio horiei *bektore-izpi* deritze.

adibidea: $S = \{\lambda.(3,1) \,/\, \lambda \in R\}$ azpiespazioa (3,1) bektorearekiko paraleloek osatzen dute. Ardatz cartesiarretan irudikapen grafikoa hauxe litzateke:



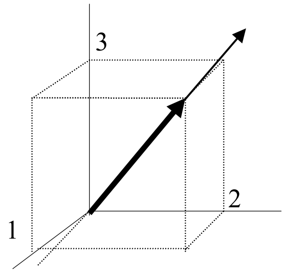
S sortzeko berdin dio (3,1) edo S-ko beste edozein hartzea, horregatik denak dira oinarriak.

2. Espazio arrunta (R^3)

Hemen bi azpiespazio-mota daude, dimentsio bakarrekoak (bektore-izpiak) eta bikoak (bektore-planoak).

- *Izpiak*: R^2 planoan gertatzen zen bezala, azpiespazio horiek bektore batekiko paraleloak direnekin eratzen dira.

adibidea: $S = \{\lambda.(1,2,3) \,/\, \lambda \in R\}$ azpiespazioaren irudikapena ondokoa litzateke:

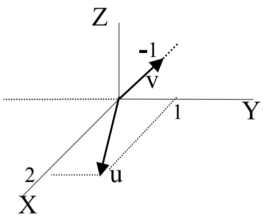


bistakoa da S azpiespazioa dela. Har ditzagun $x,y \in S$ ($x = \lambda.(1,2,3)$, $y = \lambda'.(1,2,3)$) eta $\alpha,\beta \in R$. Garbi dago $\alpha.x + \beta.y = (\alpha.\lambda + \beta.\lambda').(1,2,3) \in S$.

- *planoak:* bi dimentsiokoak dira, edozein bi bektore independenteren konbinazio linealaz osatuta.

adibidea: S = {m.(2,1,0) + n.(-1,0,0) / m,n $\in$ R} = {(2.m - n,m,0) / m,n $\in$ R}

oso erraz froga daiteke azpiespazioa dela. Bere bektore guztiak sistema cartesiar batean irudikatuko bagenitu, bi bektore horiek (u = (2,1,0) eta v = (-1,0,0)) eratutako planoaren barruan daudela ikusiko genuke (adibide honetan XY planoan).



Bi bektore horiek, u eta v, S-ko oinarri bat osatzen dute, baina modu berean, XY planoko edozein bi bektore independentek S-ko beste oinarri bat ere eratzen dute.

BEKTORE-SISTEMA BATEN HEINA

2.14. DEFINIZIOA: $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ bektore-sistema baten *heina* sistema horren bektore independenteen kopurua da.

Ondorioz, n dimentsioko bektore-espazio batean n bektorek osatutako sistema oinarria izango da, baldin eta soilik baldin bere heina n bada.

2.6. TEOREMA: V espazioko edozein U_1 eta U_2 azpiespaziorentzat honako hau betetzen da: $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim (U_1 + U_2) + \dim (U_1 \cap U_2)$.

Frog.: Demagun $m = \dim U_1$, $n = \dim U_2$, $p = \dim(U_1 \cap U_2)$ direla eta $B = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ $U_1 \cap U_2$ azpiespazioko oinarri bat dela. Honako hau frogatu nahi da: $\dim(U_1 + U_2) = m + n - p$. Badakigu $U_1 \cap U_2$ multzoa U_1 zein U_2 -ko azpiezpazioa dela eta, beraz, horientzat bi oinarri eraiki ahal dira B handituz:

$\{e_1, e_2, ..., e_p, u_{p+1}, ..., u_m\}$ oinarria U_1 -entzat
$\{e_1, e_2, ..., e_p, v_{p+1}, ..., v_n\}$ oinarria U_2 -rentzat

Bistan denez, $\{e_1, e_2, ..., e_p, u_{p+1}, ..., u_m, , v_{p+1}, ..., v_n\}$ sistema $U_1 + U_2$ azpiespazioko oinarria izango balitz, teorema frogaturik geldituko litzateke, zeren eta $p + (m - p) + (n - p) = m + n - p$ bektoreak baititu.

Beraz, sistema hori oinarri bat izateko ondoko bi baldintza hauek egiaztatu behar dira:
1. $\{e_1, e_2, ..., e_p, u_{p+1}, ..., u_m, , v_{p+1}, ..., v_n\}$ sistema sortzailea da.

Izan bedi $x \in U_1 + U_2$, orduan $x = x_1 + x_2$, non $x_1 \in U_1$ eta $x_2 \in U_2$ diren. Orduan, x_1 jar daiteke $\{e_1, e_2, ..., e_p, u_{p+1}, ..., u_m\}$ bektore-familiaren konbinazio lineal moduan eta x_2 jarri ahal da $\{e_1, e_2, ..., e_p, v_{p+1}, ..., v_n\}$ bektoreen konbinazio linealean, eta ondorioz, x jarri ahal izango da $\{e_1, e_2, ..., e_p, u_{p+1}, ..., u_m, , v_{p+1}, ..., v_n\}$ bektoreen konbinazio lineal gisa.

2. $\{e_1, e_2, ..., e_p, u_{p+1}, ..., u_m, , v_{p+1}, ..., v_n\}$ independentea da.

Suposa dezagun ez dela askea. Orduan, eskalar-familia bat existituko da, denak nuluak ez direnak, zeinentzat: $\alpha_1.e_1 +....+ \alpha_p.e_p + \beta_{p+1}.u_{p+1} +.....+ \beta_{m+1}.u_m = \lambda_{p+1}.v_{p+1} +.....+ \lambda_n.v_n$ eta λ-ren bat, gutxienez, ez da zero izango. Bestela lehenengo atala ere zero litzateke eta α_i eta β_i parametroen artean bat, gutxienez, zero ez denez, $\{e_1, e_2, ..., e_p, u_{p+1}, ..., u_m\}$ sistema ez litzateke independentea izango (eta hori ez da posible, oinarri bat baita).

Beraz, identitate horren bigarren atala U_2 azpiespazioko zero ez den bektore bat da. Modu berean, lehenengo atala U_1-ko bektore bera da. Ondorioz, bektore hori, $\lambda_{p+1}.v_{p+1} +.....+ \lambda_n.v_n$, $U_1 \cap U_2$ azpiespazioan dago eta $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ oinarrian jar daiteke: $\lambda_{p+1}.v_{p+1} +.....+ \lambda_n.v_n = k_1.e_1 +..... + k_p.e_p$. Baina hori ez da posible, zeren eta $\{e_1, e_2, ..., e_p, v_{p+1}, ..., v_n\}$ independenteak baitira (oinarria delako). Ondorioz, hipotesiak absurdora eraman gaitu. Sistema, beraz, independentea da.

2.1.KOROLARIOA: U_1 eta U_2 azpiespazioak independenteak dira (hau da, beraien batuketa zuzena da), baldin eta soilik baldin $\dim (U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ bada.

AZPIESPAZIO BETEGARRIEN DIMENTSIOAK

Gogoratu V-ko U_1 eta U_2 bi azpiespazio betegarriak direla, independenteak izateaz gain beraien batura V bada. Orduan agerikoa da:

$$\boxed{\dim V = \dim U_1 + \dim U_2}$$

2.11. OINARRI-ALDAKETA

Izan bitez V-ko bi oinarri: $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ eta $B' = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Orduan x bektore baten koordenatuak oinarri bakoitzarekiko desberdinak izango dira: $x = \alpha_1 .v_1 + \alpha_2.v_2 +......+ \alpha_n.v_n$ eta $x = \alpha'_1 .u_1 + \alpha'_2 .u_2 +......+ \alpha'_n.u_n$.

Bi koordenatu-sistema horien arteko lotura zein den aztertu behar dugu. Horretarako, u_i bektoreak B oinarrian adieraziko ditugu:

$$u_1 = a_{11} .v_1 + a_{12} .v_2 +........ + a_{1n} .v_n$$

$u_2 = a_{21}.v_1 + a_{22}.v_2 + \dots + a_{2n}.v_n$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$u_n = a_{n1}.v_1 + a_{n2}.v_2 + \dots + a_{nn}.v_n$

Argi dago $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \dots + \alpha_n.v_n = \alpha'_1.u_1 + \alpha'_2.u_2 + \dots + \alpha'_n.u_n$ beteko dela, eta berdintza horretan u_i ordezkatzen badira: $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \dots + \alpha_n.v_n = \alpha_1'.(a_{11}.v_1 + a_{12}.v_2 + \dots + a_{1n}.v_n) + \alpha_2'.(a_{21}.v_1 + a_{22}.v_2 + \dots + a_{2n}.v_n) + \dots + \alpha_n'.(a_{n1}.v_1 + a_{n2}.v_2 + \dots + a_{nn}.v_n)$.

Batugaiak modu komenigarrian elkartu ondoren honela geldituko da:

$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \dots + \alpha_n.v_n = (\alpha_1'.a_{11} + \alpha_2'.a_{21} + \dots + \alpha_n'.a_{n1}).v_1 + (\alpha_1'.a_{12} + \alpha_2'.a_{22} + \dots + \alpha_n'.a_{n2}).v_2 + \dots + (\alpha_1'.a_{1n} + \alpha_2'.a_{2n} + \dots + \alpha_n'.a_{nn}).v_n$ eta ondorioz,

$\alpha_1 = \alpha'_1.a_{11} + \alpha'_2.a_{21} + \dots + \alpha'_n.a_{n1}$
$\alpha_2 = \alpha'_1.a_{12} + \alpha'_2.a_{22} + \dots + \alpha'_n.a_{n2}$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\alpha_n = \alpha'_1.a_{1n} + \alpha'_2.a_{2n} + \dots + \alpha'_n.a_{nn}$

Ekuazio horiei *oinarri-aldaketaren* ekuazioak deritze.

ADIERAZPEN MATRIZIALA

Ikus daitekeen bezala, bi oinarri finkatuz gero, haien arteko erlazioa a_{ij} parametroetan dago eta eskalar horiek dira, hain zuzen ere, bi oinarri horiekiko bektore baten koordenatuen arteko lotura ematen digutenak. Kaxa batean jartzen badira:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Kaxa honi *oinarri-aldaketaren matrizea* deitzen zaio.

x bektorearen koordenatuak B oinarriarekiko $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ eta B' oinarriarekikoak $(\alpha'_1,\alpha'_2,\dots,\alpha'_n)$ zutabe moduan jartzen badira: $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ eta $X' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$, orduan,

oinarri-aldaketaren ekuazioak modu matrizialean jarri ahal dira:

$$X = P.X' \text{ , hau da: } \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

X-ko i-garren koordenatua lortzeko (α_i) P-ko i-garren errenkada eta X' zutabea biderkatu behar dira, gaiz gaiz, eta gero biderkadura guztiak batu: $\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}.\alpha'_k$

Alderantzizko matrizea: Alderantziz ere egin daiteke. Hots, X' bektorea X bektoretik atera eta koefizienteek osatzen duten matrizea P^{-1} izendatzen bada, $X' = P^{-1}.X$ jarriko da. 4. kapituluan ikusiko da P^{-1} matrizea nola atera daitekeen.

adibideak:

1. R^3 espazioan bi oinarri hauek hartuko ditugu: B = {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} (gogoratu oinarri horri kanoniko deritzola) eta B' = {(1,2,0),(0,-1,1),(1,1,2)}. Demagun u = (2,4,1) bektorearen koordenatuak B' oinarriarekiko zein diren jakin nahi dugula.

Hasteko, R^3-ko bektoreen izaera zenbakizkoa dela hartu behar da kontuan, eta hori dela medio dagoeneko oinarri kanonikoan adierazita daudela. Kasu honetan (2,4,1) dira, hain zuzen ere, bektore horren koordenatuak oinarri kanonikoarekiko. B'-rekiko koordenatuak (x,y,z) izendatzen baditugu, ondoko hau beteko da:

$$(2,4,1) = x.(1,2,0) + y.(0,-1,1) + z.(1,1,2)$$

eta ondorioz, 2 = x +z, 4 =2x -y + z eta 1 = y + 2z izango dira. Ekuazio-sistema hori askatu ondoren, x = 1, y = -1, z = 1 izango dira u-ren koordenatuak B'-rekiko eta $u = (1,-1,1)_{B'}$ moduan adieraz daiteke.

Matrizialki egiten bada:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ B'-tik B-ra pasatzeko matrizea da. $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ da eta X = P.X' ebatzi behar dugu. Hau da: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2 = x + z \\ 4 = 2x - y + z \\ 1 = y + 2z \end{matrix} \right\}$. Beraz, sistema hau da (aurrekoa bezalakoa) ebatzi behar dena.

2. P_2 (x) espazioan (2. mailako edo txikiagoko polinomioen espazioan) B = $\{1,x,x^2\}$ eta B' = $\{1,x-1,x^2-1\}$ oinarriak kontsideratuko ditugu.

Esate baterako, r (x) = $2x^2 + 5$ polinomioa hartuko da. Polinomio horren koordenatuak B oinarriarekiko (5,0,2) dira, eta B'-rekiko zein diren jakin nahi bada, hauxe egin behar da:

- Era analitikoan: $2x^2 + 5 = a.1 + b.(x - 1) + c.(x^2 -1)$, hots, $2x^2 + 5 = c.x^2 + b.x+(a - b -c)$ eta ondorioz, 2 = c, 0 = b, a - b - c = 5 $\Rightarrow$ c = 2, b = 0, a = 7, eta horrela idatziko da:

$$r(x) = 7.1 + 0.(x - 1) + 2.(x^2 - 1) \quad \text{edo} \quad r(x) = (7,0,2)_{B'}$$

- Era matrizialean: B-rekiko polinomioa $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ da eta P oinarri-aldaketaren matrizea ateratzeko nahikoa da B'-ko "bektoreak" B-rekiko adieraztea:

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zeren eta
$1 = 1.1 + 0.x + 0.x^2 = (1,0,0)$
$x - 1 = -1.1 + 1.x + 0.x^2 = (-1,1,0)$ betetzen diren
$x^2 -1 = -1.1 + 0.x + 1.x^2 = (-1,0,1)$

Beraz, r(x) polinomioa $X' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ moduan adierazten bada B' oinarriarekiko, lotura egingo da X = P.X' berdintzaren bitartez:

$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ eta hortik lehenengo ekuazio-sistema bera sortzen da.

Adibide honetan oso garbi ikusten da "zenbakizko" egitura hutsa ez duten hainbat multzok bektore-espazioko egitura izan dezaketela eta beren elementuak bektore-zutabe (edo -errenkada) moduan adieraz daitezkeela. Fisika kuantikoan, adibidez, partikula bat uhin baten bidez adierazten da eta horixe da uhinez osatutako dimentsio mugagabeko bektore-espazio (ℓ^2 adierazten da) baten bektorea. Partikula bektore-espazio horren oinarri baten konbinazio lineala da eta oinarriko uhin bakoitzari balio kuantiko (energia, momento lineala,....) bat dagokio, kuantifikatuta baitago.

EBATZITAKO ARIKETAK

1. Froga ezazu ondoko eragiketen bidez bi ordenako matrize karratuen multzoa (M_2) bektore-espazioa dela:

- *barrukoa + :* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$ $\forall a,a',b,b',c,c',d,d' \in K$

- *kanpokoa* $._K$ *:* $\alpha.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.a & \alpha.b \\ \alpha.c & \alpha.d \end{pmatrix}$ $\forall \alpha,a,b,c,d \in K$

Ebaz.:

A) (M_2, +) talde abelkorra da:

- Elkartze-legea:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+a'' & b'+b'' \\ c'+c'' & d'+d'' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+(a'+a'') & b+(b'+b'') \\ c+(c'+c'') & d+(d'+d'') \end{pmatrix} \underset{\text{betzetzen denez}}{\overset{\text{eta K-n elkartze-legea}}{=}} \begin{pmatrix} (a+a')+a'' & (b+b')+b'' \\ (c+c')+c'' & (d+d')+d'' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

- Elementu neutroa: $o = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ da, zeren eta $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ den.

- Aurkako elementua (simetrikoa): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elementuarena $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ da, zeren eta $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ baita.

- Trukakortasuna K gorputzaren trukakortasunetik ondorioztatzen da.

B) Iker dezagun orain $(M_2, \cdot_K)$:

- $1.\,v = v$

$$1.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.a & 1.b \\ 1.c & 1.d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- $\alpha.\,(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$

$$\alpha.\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \alpha.\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.a+\alpha.a' & \alpha.b+\alpha.b' \\ \alpha.c+\alpha.c' & \alpha.d+\alpha.d' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha.a & \alpha.b \\ \alpha.c & \alpha.d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha.a' & \alpha.b' \\ \alpha.c' & \alpha.d' \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \alpha.\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

- $(\alpha + \beta)\,.\,v = \alpha.v + \beta.v$

$$(\alpha+\beta).\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta).a & (\alpha+\beta).b \\ (\alpha+\beta).c & (\alpha+\beta).d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.a+\beta.a & \alpha.b+\beta.b \\ \alpha.c+\beta.c & \alpha.d+\beta.d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha.a & \alpha.b \\ \alpha.c & \alpha.d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta.a & \beta.b \\ \beta.c & \beta.d \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- $\alpha.(\beta.v) = (\alpha.\beta).v$

$$\alpha.\left(\beta.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \alpha.\begin{pmatrix} \beta.a & \beta.b \\ \beta.c & \beta.d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.\beta.a & \alpha.\beta.b \\ \alpha.\beta.c & \alpha.\beta.d \end{pmatrix} = (\alpha.\beta).\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2. Izan bitez $S_1 = \{(x,2x) \,/\, x\in R\}$ eta $S_2 = \{(x,x) \,/\, x\in R\}$ R^2 -ko bi bektore-azpiespazioak. Kalkulatu $S_1\cap S_2$ eta $S_1\cup S_2$ eta esan azpiespazioak diren ala ez.

Ebaz.: $S_1\cap S_2 = \{o\}$ da, zeren eta $(x,2x) = (y,y)$ izateko $x = y$ eta $2x = y$ bete behar baita eta, beraz, $2x = x \Rightarrow x = 0$. Bagenekien bezala azpiespazioa da.
$S_1\cup S_2 = \{(x,y) \,/\, y = 2x \text{ edo } y = x\}$. Bistan denez ez da azpiespazioa, batuketa ez baita barne-eragiketa $S_1\cup S_2$ azpimultzoan (adibidez $(1,2) + (1,1) = (2,3)$ eta hau ez da $S_1\cup S_2$-koa).

3. Esan (1,-2,3),(2,-2,0) eta (0,1,7) R^3-ko bektoreek oinarri bat eratzen duten eta, baiezko kasuan, aurkitu (-1,2,0) bektorearen koordenatuak B oinarri horretan.

Ebaz.: Badakigu R^3 -an hiru bektore-sistemek sortzaile bat osatzen dutela askeak badira. Ondorioz, haien independentzia aztertu behar da soilik.

$$a.(1,-2,3) + b.(2,-2,0) + c.(0,1,7) = (0,0,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+2b=0 \\ -2a-2b+c=0 \\ 3a+7c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = c = 0$$

Beraz, askea da, eta ondorioz oinarri bat. (-1,2,0) bektorearen koordenatuak (a,b,c) badira B oinarri horretan, (-1,2,0) = a.(1,-2,3) + b.(2,-2,0) + c.(0,1,7) beteko da $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -1=a+2b \\ 2=-2a-2b+c \\ 0=3a+7c \end{array}\right\} \Rightarrow a=-\frac{7}{10}, b=\frac{-3}{20}, c=\frac{3}{10} \Rightarrow (-1,2,0) = \left(\frac{-7}{10},\frac{-3}{20},\frac{3}{10}\right)_B$$

4. Aurkitu ondoko azpiespazioen oinarri bat eta eman beren dimentsioak:

a) $S = \{(x,3x) / x \in R\}$
b) $S = \{(x,2x,y) / x,y \in R\}$
c) $S = \{(m,n,2m - n) / m,n \in R\}$
d) $S = \{(x,y,z) / x - y = 2z , x,y,z \in R\}$
e) $S = \{(x+y+3z,2x+y+5z,2y+2z) / x,y,z \in R\}$
f) $S = \{(x,y,x-y,z) / x,y,z \in R\}$

Ebaz.: a) (x,3x) = x.(1,3) $\Rightarrow$ (1,3) oinarria da (dim S = 1).

b) (x,2x,y) = (x,2x,0) + (0,0,y) = x.(1,2,0) + y.(0,0,1) $\Rightarrow$ B = {(1,2,0), (0,0,1)} sistema sortzailea da. Oinarria da independenteak baitira (dim S = 2).

c) (m,n,2m - n) = (m,0,2m) + (0,n,-n) = m.(1,0,2) + n.(0,1,-1) $\Rightarrow$ B = {(1,0,2), (0,1,-1)} sistema sortzailea da. Oinarria da sistema askea dela eta (dim S = 2).

d) x - y = 2z $\Rightarrow$ x = y + 2z $\Rightarrow$ (y + 2z,y,z) = (y,y,0) + (2z,0,z) = y.(1,1,0) + z.(2,0,1) $\Rightarrow$ B = {(1,1,0), (2,0,1)} oinarria da (dim S = 2).

e) (x+y+3z,2x+y+5z,2y+2z) = (x,2x,0) + (y,y,2y) + (3z,5z,2z) = x.(1,2,0) + y.(1,1,2) + z.(3,5,2) $\Rightarrow$ B = {(1,2,0),(1,1,2),(3,5,2)} sistema sortzailea da. Orain askea den aztertuko da:

$$a.(1,2,0) + b.(1,1,2) + c.(3,5,2) = (0,0,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+3c=0 \\ 2a+b+5c=0 \\ 2b+2c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ eta soluzio-kopuru}$$

mugagabea du: $(-2\lambda,-\lambda,\lambda)$ $\forall\lambda\in R$, beraz, ez da sistema askea (bata beste bien konbinazio lineal gisa jar daiteke; hau da, lehenengo biak, adibidez, S-ren sistema sortzailea dira). Oinarri bat finkatzeko nahikoa izango da (1,2,0) eta (1,1,2) hartzea, zeren eta horiek independenteak diren eta sortzailea (dim S = 2).

f) (x,y,x-y,z) = (x,0,x,0) + (0,y,-y,0) = x.(1,0,1,0) + y.(0,1,-1,0). Beraz, B = {(1,0,1,0), (0,1,-1,0)} sortzailea da eta independenteak direnez, oinarri bat da (dim S = 2)

5. Izan bitez S_1 eta S_2 {(1,2,0), (-1,1,1)} eta {(2,0,2), (0,-1,3)} sistemek, hurrenez hurren, sortutako azpiespazioak. Kalkulatu $S_1 + S_2$ eta $S_1 \cap S_2$ azpiespazioentzat oinarri bat.

Ebaz.: - $S_1 \cap S_2$ espazioan egongo dira a.(1,2,0) + b.(-1,1,1) = c.(2,0,2) + d.(0,-1,3) ekuazioa betetzen duten bektoreak. Hemendik honako ekuazio-sistema hau ondorioztatzen da:

$\left.\begin{array}{l} a - b = 2c \\ 2.a + b = -d \\ b = 2.c + 3.d \end{array}\right\} \Rightarrow$ a = c, b = - c, d = - c, eta ondorioz, $S_1 \cap S_2$ azpiespazioa ondoko hau da: $S_1 \cap S_2 = \{c.(1,2,0) - c.(-1,1,1)\} = \{c.(2,1,-1) \ / \ c \in R\}$ eta bere oinarri bat (2,1,-1) bektorea da (beraz, dim $S_1 \cap S_2$ = 1).

- Lehenengo, S_1+S_2 espazioaren dimentsioa aztertuko dugu. Badakigu dim (S_1+S_2) + dim $(S_1 \cap S_2)$ = dim S_1 + dim S_2 dela $\Rightarrow$ dim $(S_1 + S_2)$ = 2 + 2 -1 = 3.
Beste alde batetik, {(1,2,0),(-1,1,1),(2,0,2),(0,-1,3)} bektore-sistema, S_1+S_2 espazioaren sortzailea da, zeren eta $S_1 +S_2$ -ko edozein bektore [a.(1,2,0) + b.(-1,1,1)] (S_1-ko bektorea) + [c.(2,0,2) + d.(0,-1,3)] (S_2-ko bektorea) jarri ahal beharko baita. Nahikoa da lau bektore horietatik hiru independente hartzea oinarri bat izateko. Esate baterako, erraz froga daiteke (1,2,0) (-1,1,1) (2,0,1) independenteak direla, eta ondorioz, oinarri bat osatzen dute (kasu horretan, gainera, $S_1 +S_2 = R^3$ da).

6. Kalkulatu zein diren (2,0,1) bektorearen koordenatuak {(1,0,1),(-3,1,1), (2,1.0)} oinarriarekiko, oinarri-aldaketaren adierazpen matriziala erabiliz.

Ebaz.: P oinarri-aldaketaren matrizea ateratzeko bi oinarrien arteko lotura jarri behar da. Hemen lehenengo oinarria oinarri kanonikoa da: B = {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} eta bigarrena B' = {(1,0,1),(-3,1,1), (2,1.0)} emandakoa. Bektore horiek dagoeneko adierazita daude B-rekiko, ondorioz, P = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ izango da matrize-aldaketa.

Emandako u = (2,0,1) bektorea B-rekiko adierazita dago, eta bere koordenatuak B'-rekiko u = $(x,y,z)_{B'}$ badira,

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ beteko da. Ondorioz, $\left.\begin{array}{l} 2 = x - 3y + 2z \\ 0 = y + z \\ 1 = x + y \end{array}\right\} \Rightarrow$ x = 7/6, y = - 1/6,

z = 1/6. Beraz, u = $(7/6,-1/6,1/6)_{B'}$.
(agerikoa da 7/6.(1,0,1) – 1/6.(-3,1,1) + 1/6.(2,1,0) = (2,0,1) izan beharko duela).

7. Izan bedi S u (1,2,3) eta v (2,3,5) bektoreek sortzen duten azpiespazioa. Kalkulatu R azpiespazio betegarri bat S-rekiko.

Ebaz.: Bistan denez, S-ren dimentsioa bi da eta R aurkitzeko nahikoa izango da S-tik kanpoko w bektore bat aurkitzea, horrek sortzen duen dimentsio bateko R azpiespazioa betegarria izango baita S-rekiko (beste modu batera esanda, S azpiespazio maximala denez, 2.4. proposizioaren arabera w bektorea existitzen da, non $R^3 = S \oplus \{\lambda.w\}$ den).
Hori egiteko S-ko bektore guztiak nolakoak diren aztertuko dugu. Demagun $(x,y,z) \in S$. Orduan, a eta b existitzen dira, non (x,y,z) = a.(1,2,3) + b.(2,3,5) den eta ondoko sistema ebatziko da a eta b ateratzeko:

$\left.\begin{array}{l} a + 2b = x \\ 2a + 3b = y \\ 3a + 5b = z \end{array}\right\} \Rightarrow$ eta soluzioa izateko (a = -3x + 2y , b = 2x – y) x + y = z bete behar da
(hona hemen S adierazteko beste modu bat; S = {(x,y,z) / x + y = z}.

Beraz, nahikoa izango da baldintza hori betetzen ez duen edozein bektore hartzea, esate baterako w = (1,0,0), eta orduan R = $\{(x,0,0) / x \in R\}$ betegarria izango da S-rekiko. Hau da, $R^3 = S \oplus R$.

8. Izan bedi F = {R-tik → R-ra f(x) funtzio jarraituen multzoa}. Kontsidera ditzagun F-ren bi azpiespazio hauek: U = {f∈F / f (0) = f (1) = 0} eta V = {f (x) = ax + b / a,b,x∈R}. Frogatu F = U⊕V dela.

Ebaz.: Lehenengo $U \cap V = \{o\}$ dela ikusiko dugu. Izan bedi $f \in V$; orduan f (x) = ax + b eta U-ko izango balitz $\left.\begin{array}{l} a.0 + b = 0 \\ a.1 + b = 0 \end{array}\right\}$ beteko litzateke, hau da, a = b = o, eta funtzioa f (x) = o litzateke. Beraz, bektore komun bakarra o bektorea da.

Orain F-ko edozein funtzio U-ko baten eta V-ko beste baten arteko batuketa gisa jarri ahal dela ikusiko dugu. Nahikoa da f (x) horrela adieraztea:

f (x) = g (x) + h (x) non $\begin{cases} g(x) = f(x) - f(0) - x.(-f(0) + f(1)) \\ h(x) = f(0) + x.(-f(0) + f(1)) \end{cases}$ diren.

Argi dago g (x) U-koa dela (g(0) = g(1) = 0 baita) eta eta h (x) V-koa (funtzio afina)

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Izan bedi V R-tik R-ra doazen funtzioek osatutako multzoa. Froga ezazu jarraian definitzen diren eragiketekin $(V;+,\cdot_R)$ *hirukotea bektore-espazioa dela.*

$+ : \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall f,g \in V$ *eta* $\forall x \in R$

$\cdot_R : \quad (m.f)(x) = f(m.x) \qquad \forall f \in V$ *eta* $\forall m,x \in R$

Horrez gain, froga ezazu horien ondoko azpimultzoak azpiespazioak direla:
- funtzio bakoitiek eratutakoa.
- funtzio polinomikoek “
- funtzio jarraituek “

2. Esan ondoko multzo hauetatik zein diren bektore-espazioak:

a) $a_{11} = a_{22} = 0$ *duten bi ordenako matrize karratuak eragiketa arruntekin.*
b) $a_{11} = a_{22} = 1$ “ “ “ “
c) R^2 *bi eragiketa hauekin:* $(a,b) + (a',b') = (a+a'+1, b+b'+1)$ *eta* $m.(a,b) = (m.a, m.b)$
d) $A = \{a + b\sqrt{2} \ / \ a,b \in Q\}$ *errealeko eragiketa arruntekin.*

3. Kasu bakoitzean bektore-espazioko eragiketekin esan zein diren bektore--azpiespazioak:

a) $A \subset R^2 \quad A = \{(x,3y) \ / \ x,y \in R\}$
b) $A \subset R^3 \quad A = \{(x,y,z) \ / \ x-y = 0, \ x + y - z = 0)$
c) $A \subset R^3 \quad A = \{(x,y,z) \ / \ x + y = 1\}$
d) $A \subset P_3(x)$ *(3. maila edo txikiagoko polinomioak)*
$A = \{p(x) = ax^2 + b \ / \ a + b = 1\}$
e) $A \subset R^4 \quad A = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \ / \ x_1 + 2x_2 = 1$ *eta* $x_3 - x_4 = 1\}$

4. Kontsidera dezagun bi ordenako matrize karratuen M_{22} *multzoa, non bi eragiketa hauek definitzen diren:*

- barrukoa $+ : \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$

- kanpokoa $\cdot_K : \quad m.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m.a & m.b \\ m.c & m.d \end{pmatrix}$

Izan bitez $S_1 = \{A \in M_{22} \ / \ a_{11} = 0\}$ *eta* $S_2 = \{A \in M_{22} \ / \ a_{22} = -a_{11}$ *eta* $a_{12} = a_{21}\}$.

a) Egiaztatu S_1 *eta* S_2 M_{22}*-ko azpiespazioak direla.*
b) Aurkitu $S_1 \cap S_2$ *eta* $S_1 \cup S_2$ *eta esan azpiespazioak diren ala ez.*

5. V espazioan S baldin bada $\{x_1,x_2,....., x_n\}$ bektoreek osatutako sistema eta $R = \{y_1= x_1,\ y_2 = x_1+x_2,\ ...., y_n= x_1+x_2+....+x_n\}$ beste sistema bat, froga ezazu R askea dela baldin eta soilik baldin S askea bada.

6. Lehenengo ariketako espazioan S bektore-sistema kontsideratzen da: $S = \{y_1 = x,\ y_2 = \sin x,\ y_3 = \cos x,\ y_4 = \sin^2 x,\ y_5 = \cos^2 x,\ y_6 = \sin(x + \pi/3)\}$.

a) Kalkulatu S-k sortzen duen azpiespazioaren heina eta bere oinarri bat.
b) S-ko bektore bakoitzaren koordenatuak oinarri horretan.
c) Esan ondoko bektoreak espazio horren barne dauden: $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\sin x/2$, $\sin^3 x$.

7. Ondoko sistemetan aztertu zein diren askeak eta esan zein diren oinarriak:

a) R^2-an (1,2) eta (2,5)
b) R^3-an (1,1,0),(1,2,2) eta (1,0,-2)
c) R^4-an (1,2,2,0),(0,1,1,0),(-1,1,1,2) eta (2,2,2,-2)
d) $P_2(x)$-an $-x$, $2x-1$ eta $x^2 + 3x - 2$.
e) $P_3(x)$-an 2, $3 - 2x^3$, $2 - 3x + 2x^2$ eta $4x^3 - 2x^2 + 3x - 6$.

8. Kalkulatu ondoko azpiespazioen oinarri bat eta haien dimentsioak:

a) $S = \{(a,b,a-b,2a) / a,b\in R\}$
b) $S = \{(x,y,z) / x + y = 2,\ x- 2y = 1\}$
c) $S = \{(s,t,z,u) / s - t = 0,\ s + 2u = z\}$
d) $S = \{(x,2x,0,y,z) / x + y = 3z \}$

9. Izan bitez S_1 eta S_2 $\{(1,2,1,0), (-1,1,1,1)\}$ eta $\{(2,-1,0,1), (1,-1,3,7)\}$ sistemek, hurrenez hurren, sortutako azpiespazioak. Kalkula ezazu S_1+S_2 eta $S_1\cap S_2$ azpiespazioen oinarri bat.

10. Esan ondoko ariketetan zein kasutan den zuzena emandako azpiespazoen arteko batura (hots, $V = S_1 \oplus S_2 \oplus ......$):

a) $S_1 = \{(x,0)\}$, $S_2 = \{(x,2x)\}$ R^2 - espazioan
b) $S_1 = \{(x,0)\}$, $S_2 = \{(0,2x)\}$ R^2 - epazioan
c) $S_1 = \{(x,y,0)\}$, $S_2 = \{(x,2x,y)\}$ R^3 - espazioan
d) $S_1 = \{(x,y,x - y)\}$, $S_2 = \{(x, y,z) / 3x - y = 0,\ 5x - z = 0\}$ R^3 - espazioan
e) $S_1 = \{(x,x, z,z)\}$, $S_2 = \{(x,2x,-x,z)\}$ R^4- espazioan
f) $S_1 = \{(x,y,x - y,2x\}$, $S_2 = \{(x,x,-x,y)\}$ R^4 - espazioan
g) $S_1 = \{(x,2x,0, 0\}$, $S_2 = \{(0,0,x,0)\}$, $S_3 = \{(0,0,0,x)\}$ R^4 - espazioan.

11. Izan bedi $S = \{(x,y,z) / x + y + z = 0\}$ R^3-ko bektore-azpiespazioa. Aurkitu bere azpiespazio betegarriren bat.

12. Izan bitez S eta T R^3-ko ondoko bi bektore-azpiespazioak: S-ko ekuazio parametrikoak hauexek dira: x = a+b, y = b + c , z = a + 2b + c. Eta T-ko ekuazio inplizitua x - y + 2z = 0 da. Kalkula ezazu:

a) S, T, S + T eta S ∩ T espazioen oinarriak.
b) S + T espazioaren azpiespazio betegarriren bat.

13. Kalkulatu (1,1,2) bektorearen koordenatuak B' = {(1,1,1,),(-1,01),(1,2,4)} oinarriarekiko.

14. Kontsidera ditzagun R^2-ko ondoko oinarri hauek: B = {(1,2),(-1,3)} eta B' = {(1,1),(-3,1)}. Kalkulatu oinarri-aldaketaren matrizea eta aplikatu $(1,2)_B$ bektorari B'-rekiko koordenatuak ateratzeko.

15. Izan bitez R^3-ko ondoko B eta B' oinarriak: B = $\{u_1,u_2,u_3\}$ eta B' = $\{v_1,v_2,v_3\}$ non

$$\begin{cases} u_1 = 2v_1 + v_2 - v_3 \\ u_2 = 2v_3 \\ u_3 = -3v_1 + 5v_2 \end{cases}$$

diren. Kalkulatu oinarri-aldaketa eta x = $(2,-3,2)_B$ bektorearen kordenatuak B' oinarriarekiko.

16. Kontsidera ditzagun R^4espazioan B oinarri kanonikoa eta B' = $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ oinarria eta demagun oinarri-aldaketaren matrizea $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ *dela. Kalkulatu (2,3,1,5) bektorearen koordenatuak B'-rekiko.*

17. Esan ondoko matrize hauetatik zein izan daitezkeen oinarri-aldaketaren matrizeak:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

3. APLIKAZIO LINEALAK

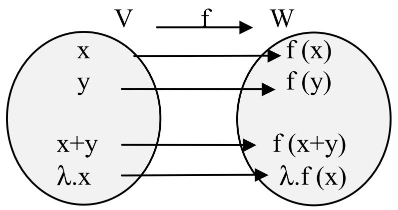
3.1. DEFINIZIOA

Demagun V eta W dimentsio finituko bi bektore-espazio (K gorputzaren gainekoak) direla eta f V-tik W-rako aplikazio bat dela ($f : V \rightarrow W$).

3.1. DEFINIZIOA: f aplikazio lineala (edo homomorfismoa) dela esaten da, ondoko hauek betetzen badira:

- $f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x,y \in V$
- $f(\lambda.x) = \lambda.f(x) \qquad \forall \lambda \in K$

Bi baldintza horiek batean bil daitezke: $f(\alpha\, x + \beta.y) = \alpha.f(x) + \beta.f(y) \quad \forall \alpha\beta \in K$ eta $\forall x,y \in V$



Aljebraren ikuspuntutik, berdin dio eragiketak espazio batean edo bestean egitea, espazio bateko emaitza bestearen irudia (edo aurreirudia) izango baita.

Horregatik, aplikazio linealek eragiketak gordetzen dituztela esaten da.

Homomorfismoari, bijektiboa bada, *isomorfismo* deitzen zaio. W = V bada, isomorfismoari *automorfismo* deritzo (bijektiboa ez bada, *endomorfismo* deritzo).

adibidea: Egiaztatu $f : R^2 \rightarrow R^3 \quad f(x,y) = (x,0,x - y)$ lineala dela. Ikus dezagun:
$f(\alpha.(x,y) + \beta.(x',y')) = f(\alpha.x + \beta.x', \alpha.y + \beta.y') = (\alpha.x + \beta.x', 0, \alpha.x + \beta.x' - (\alpha.y + \beta.y')) = (\alpha.x, 0, \alpha.(x - y)) + (\beta.x', 0, \beta.(x' - y')) = \alpha.(x, 0, x - y) + \beta.(x',0,x' - y') = \alpha.f(x,y) + \beta.f(x',y')$. Ondorioz, lineala da.

PROPIETATEAK

1. *$f(o_V) = o_W$*

   Frog.: Nahikoa da $f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$ berdintzan $\lambda = 0$ hartzea

2. *$f(-v) = -f(v)$*

   Frog.: $o = f(o) = f(v + (-v)) = f(v) + f(-v) \Rightarrow f(-v) = - f(v)$

3. *$S \subset V$ eta S azpiespazioa bada, orduan $f(S)$ W-ko azpiespazioa da ($f(S) \subset W$)*

   Frog.: Izan bitez $u,v \in f(S)$; orduan $\exists x,y \in S \,/\, f(x) = u$ eta $f(y) = v$. Honako hau ikusi behar da: $\alpha.u + \beta.v \in f(S) \;\; \forall \alpha,\beta \in K$.
   $\alpha.u + \beta.v = \alpha.f(x) + \beta.f(y) = f(\alpha.x + \beta.y)$ (lineala baita) eta hori f(S)-ren barnean dago, $\alpha.x + \beta.y$ bektorea S-koa delako.

4. *$S \subset W$ eta S azpiespazioa bada, orduan $f^{-1}(S)$ V-ko azpiespazioa da ($f^{-1}(S) \subset V$)*

   Frog.: Izan bitez $u,v \in f^{-1}(S)$, orduan $\exists x,y \in S \,/\, u = f^{-1}(x)$ eta $v = f^{-1}(y)$ edo, beste modu batera esanda, $x = f(u)$ eta $y = f(v)$.
   Honako hau ikusi behar da: $\alpha.u + \beta.v \in f^{1}(S) \; \forall \alpha\beta \in K$. Hots $\exists z \in S \,/\, f^{1}(z) = \alpha.u + \beta.v$ edo $f(\alpha.u + \beta.v) = z$. Nahikoa da $z = \alpha.x + \beta.y$ hartzea, zeren eta $f(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v)$ (f lineala da eta) $= \alpha.x + \beta.y = z$.

5. *$\{u_1,u_2,......,u_n\}$ V-ko mendeko bektore-sistema bada, orduan $\{f(u_1), f(u_2),....., f(u_n)\}$ W-ko mendeko sistema izango da.*

   Frog.: Hipotesiaren arabera α_i eskalarrak existitzen dira, denak zero ez direnak, zeinentzat $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 +....+ u_n.\alpha_n = o$ den. Orduan, $f(\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 +....+ u_n.\alpha_n) = f(o) = o$ bete beharko da eta, lineala denez, $\alpha_1.f(u)_1 + \alpha_2.f(u_2) +.....+ \alpha_n.f(u_n) = o$ izango da, non α-ren bat, gutxienez, zero ez den. Hortaz, $\{f(u_1), f(u_2),.....,f(u_n)\}$ sistemak mendekoa izan beharko du.

6. *$\{u_1,u_2,......,u_n\}$ V-ko S azpiespazio baten sistema sortzailea bada, orduan $\{f(u_1), f(u_2),.....,f(u_n)\}$ sistema (S)-ko sortzailea izango da.*

   Frog.: Izan bedi $w \in f(S)$. Orduan, $\exists u \in S \,/\, f(u) = w$. Baina u bektorea honela jarri ahal da: $u = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 +....+ u_n.\alpha_n$ eta $w = f(u) = f(\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 +....+ u_n.\alpha_n) = \alpha_1.f(u_1) + \alpha_2.f(u_2) +....+ \alpha_n.f(u_n)$.
   Beraz, $\{f(u_1),f(u_2),.....,f(u_n)\}$ f(S)-ren sortzailea da.

Kontuan hartu bektore-sistema independente baten irudiek ez dutela zertan sistema independentea osatu.

adibidea: $f : R^2 \rightarrow R^3 : f(x,y) = (x,x)$ aplikazio lineala da eta (1,0) eta (2,1) bektoreak independenteak dira, baina beren irudiak $f(1,0) = (1,1)$ eta $f(2,1) = (2,2)$ mendekoak dira.

3.2. IRUDIA ETA NUKLEOA

3.2. DEFINIZIOA: Izan bedi $f: V \to W$ aplikazio lineal bat. Aplikazio lineal baten irudia eta nukleoa honela definitzen dira:

IRUDIA: $f(V)$ azpiespazioari f-ren irudia deritzo eta Im f idazten da. Hau da:
$\text{Im } f = \{w \in W / \exists f^{-1}(w)\}$
NUKLEOA: Irudia zero duten V-ko bektoreek osatzen dute eta Ker f idazten da. Hau da: $\text{Ker } f = \{x \in V / f(x) = o\}$ (Ker, kernel = nukleoa, ingelesetik dator).

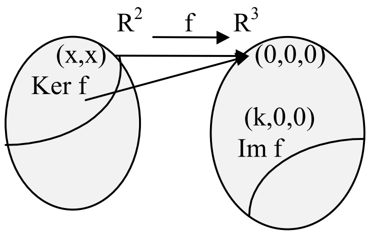
3.1. PROPOSIZIOA: Im f eta Ker f, hurrenez hurren, V-ko eta W-ko azpiespazioak dira.

Frog.: Im f azpiespazioa dela aurreko hirugarren propietatetik ondorioztatzen da (V bera V-ko azpiespazioa denez, f (V) W-ko azpiespazioa izango da).
Ker f azpiespazioa dela frogatzeko nahikoa da laugarren propietatea kontsideratzea, Kerf o-ren aurreirudia baita (kontuan hartu o bektorea W-ko bektore-azpiespazio berezia dela, berak bakarrik osatzen duena).

adibidea: Izan bedi $R^2 \to R^3$ $f(x,y) = (x-y,0,0)$ aplikazioa. Erraz ikus daiteke lineala dela. Im f, Ker f eta beren oinarriak kalkulatuko ditugu:

$\text{Im } f = \{(x-y,0,0) / x,y \in R\}$. Agerikoa da $(x-y,0,0) = (x,0,0) + (-y,0,0) = x.(1,0,0) + y.(-1,0,0)$ dela eta, ondorioz, $\{(1,0,0),(-1,0,0)\}$ bektore-sistema Im f-ren sortzailea da. Bi bektore horiek mendekoak direnez, haietako bat, (1,0,0) esate baterako, sortzailea ere izango da eta, ondorioz, bere oinarria. Beraz, Im f-ren dimentsio bat da.

$\text{Kerf} = \{(x,y) / f(x,y) = (0,0,0)\}$, baina $f(x,y) = (x-y,0,0) = (0,0,0)$ eta ondorioz, $x-y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{Ker } f = \{(x,x) / x \in R\}$. Bere oinarri bat kalkulatzeko $(x,x) = x.(1,1)$ jarriko dugu. (1,1) bektoretik sortzen dela ikusten da. Beraz, (1,1) oinarri bat eta Ker f-ren dimentsio bat izango da.



Bistan denez, aplikazio lineal hori ez da injektiboa ((1,1) eta (2,2) bektoreek, adibidez, irudi bera dute: (0,0,0)) ezta sobreiektiboa ere ((1,1,0) bektoreak, adibidez, ez du aurreirudirik).

APLIKAZIO LINEAL BATEN DESKONPOSIZIO KANONIKOA

Demagun $f : V \to W$ aplikazio lineala dela. Bere nukleoa azpiespazioa da eta, 2.2-an ikusi zen bezala, badakigu $V/\mathrm{Ker}\, f$ beste bektore-espazio bat dela (zatidura-espazioa, hain zuzen ere), non bere klaseak $v + \mathrm{Ker}\, f$ (edo $[v]$) adierazten diren. Bi elementu, x eta y, klase berekoak dira, $x - y \in \mathrm{Ker}\, f$ bada. Orduan, $f(y - x) = o \Rightarrow f(y) - f(x) = o \Rightarrow f(x) = f(y)$, hau da, klase bakoitzeko gai guztiek irudi bera dute. Klaseko ordezkaria v bada, klase horren edozein bektoreren irudia $f(v)$ da.
Aurrekoari esker, g aplikazioa $V/\mathrm{Ker}\, f$ espaziotik $\mathrm{Im} f$ espaziora honela defini daiteke: $g([v]) = f(v)$.
Agerikoa da g bijektiboa dela eta, ondorioz, $g : V/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ isomorfismoa dela. Bi azpiespazio horiek isomorfoak direla esaten da ($V/\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Im}\, f$ idazten da).
Ondorioz, $V/\mathrm{Ker}\, f$ eta $\mathrm{Im}\, f$ azpiespazioek dimentsio bera dute.

Ikusitakoaren arabera ondoko deskonposizio hau egin daiteke:

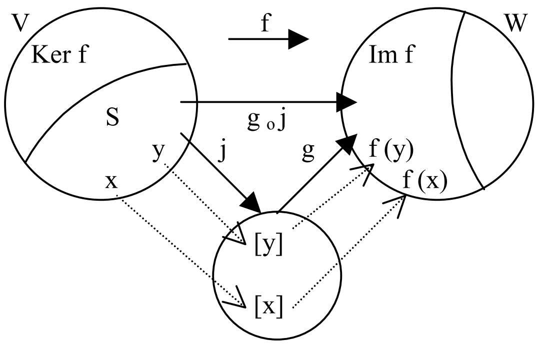
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & W \\ V/\mathrm{Ker}f \arrow[r, "g"] & \mathrm{Im}f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$$f = i \circ g \circ h$$

$h : \quad V \to V/\mathrm{Ker}f \quad : \quad h(v) = [v]$.
Hau supraiektiboa da.
$g : \quad V/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}\, f \quad : g([v]) = f(v)$
Hau bijektiboa da.
$i : \mathrm{Im}\, f \to W$ identitatea : $i(f(v)) = f(v)$
Hau injektiboa da.

> 3.2. PROPOSIZIOA: Izan bedi S $\mathrm{Ker}\, f$-ren azpiespazio betegarri bat, hau da, $V = S \oplus \mathrm{Ker}\, f$. Orduan, $j : S \to V/\mathrm{Ker}\, f$ aplikazioa $j(u) = [u]$ isomorfismoa da.

Frog.: Izan bitez x,y S-ko bi bektoreak, orduan $x - y \in S$ izango da (azpiespazioa delako).
Ikusiko dugunez, j isomorfismoa da:



- Injektiboa: demagun $j(x) = j(y)$ dela. Orduan $[x] = [y] \Rightarrow f(x - y) = o \Rightarrow x - y \in \mathrm{Ker}\, f$ izango litzateke. Baina $x - y$ S-koa ere bada $\Rightarrow x - y = o \Rightarrow x = y$. Ondorioz, injektiboa da.
- Supra: agerikoa da.
- j lineala da: ez da hemen egingo, gero kasu orokorrean errepikatuko delako (3.3. PROP.)

Ondorioz, $g_o j : S \to Imf$ isomorfismoa da (g eta j isomorfismoak direlako) eta S eta Im f isomorfoak dira (beraz, dim S = dim Im f). Beste alde batetik, dim V = dim S + dim Ker f da (betegarriak baitira) - Beraz, korolario hau ondorioztatzen da:

3.1. KOROLARIOA: dim V = dim Ker f + dim Im f

Emaitza garrantzitsu hori berriro ere ondoko proposizio honen kasu partikular bat gisa ikusiko da.

3.3. PROPOSIZIOA: S eta R V espazioko azpiespazio betegarriak badira, hau da, $V = S \oplus R$, orduan V/R eta S isomorfoak dira (baita V/S eta R ere).

Frog.: Defini dezagun $f : S \to V/R$ honela: $\forall v \in S$ $f(v) = v + R$ (bere klasea). Ikusiko dugunez isomorfismoa da:

- f lineala da: $s,s' \in S$ eta $k,k' \in K$ badira, orduan, alde batetik, $f(k.s + k'.s') = k.s + k'.s' + R$ eta, bestetik, $k.f(s) + k'.f(s') = k.(s + R) + k'.(s' + R) = ks + R + k'.s' + R = k.s + k'.s' + R$ ($R + R = R$ baita. Ez ahaztu $v + R$ jartzen denean, R horrekin bere edozein bektore adierazten ari garela, eta R-ko bi bektoreren arteko batura R-koa da).

- f injektiboa da: demagun $v,w \in S$ eta $f(v) = f(w)$, orduan $v + R = w + R$, eta ondorioz, $v - w \in R$. Baina $v - w \in S$ eta R eta S betegarriak direnez, $R \cap S = \{o\}$ da, eta ondorioz, $v - w = o$, hots, $v = w$.

- f supraiektiboa da: V/S-ko bektore guztiek S-ko aurreirudia duten ikusi behar da. $w \in V/R$ bada, $w = u + R$ izango da, non $u \in V$ den. Baina $V = S \oplus R$ denez, $u = s+r$ moduan jar daiteke, non $s \in S$ eta $r \in R$ diren, eta ondorioz, $w = s + r + R = s + R$, eta horrek $f(s) = w$ dela esan nahi du.

3.2. KOROLARIOA: S V-ko azpiespazioa bada, dim (V/S) = dim V - dim S

Frog.: Demagun R dela S-rekiko azpiespazio betegarri bat (hots, $V = S \oplus R$), orduan dim V = dim S + dim R. Baina V/S eta R isomorfoak dira (3.3.PROP.), eta ondorioz, beren dimentsioak berdinak dira, beraz, dim V = dim S + dim (V/S) frogatu nahi genuen bezala.

Hortik lehen ikusi den 3.1.Korolarioa, hau da, dim Ker f + dim Im f = dim V, ondorioztatzen da:
Ker f V-ko azpiespazioa denez, aurreko korolarioa aplika daiteke: dim (V/Ker f) = dim V - dim Ker f, baina bestalde badakigu (V/Ker f) eta Im f isomorfoak direla, eta ondorioz, horien dimentsioek berdinak izan beharko dute.

3.4. PROPOSIZIOA: f aplikazio lineala injektiboa da $\Leftrightarrow$ Ker f = {o}

Frog.: $\Rightarrow$ demagun f (x) = o. Orduan f (x) = f (o) eta injektiboa denez $\Rightarrow$ x = o.
$\Leftarrow$ demagun f (x) = f (y) $\Rightarrow$ f (x - y) = o eta Ker f = {o} denez $\Rightarrow$ x - y = o, eta ondorioz, x = y . Beraz, injektiboa da.

3.1. TEOREMA: f : V $\rightarrow$ W aplikazio lineala injektiboa da $\Leftrightarrow$ dim Im f = dim V

Frog.: $\Rightarrow$ $\{u_1,u_2,.....,u_n\}$ V-ko oinarria bada, $\{f(u_1), f(u_2,),.....,f(u_n)\}$ Im f-ren sortzailea izango da (6. propietatea). Gainera, independenteak dira, zeren eta bestela haietako bat, adib. $f(u_1)$, gainerakoen konbinazio moduan jarri ahal baita, hots:
$f(u_1) = \sum\alpha_i.f(u_i)$ $(i \neq 1) = f(\sum\alpha_i.u_i)$ eta injektiboa denez, $u_1 = \sum\alpha_i.u_i$, baina hori ez da posible oinarria baita. Beraz, $\{f(u_1), f(u_2,),.....,f(u_n)\}$ bektore-sistema Im f-ko oinarria da eta bere dimentsioa V-koa, hau da, n.
$\Leftarrow$ Orain hipotesia dim Im f = dim V dela izango da. Demagun f ez dela injektiboa, orduan $\exists x \in$ Ker f / $x \neq o$ (3.4.PROP.). Beraz, posible da V-ko oinarri bat osatzea, non x bektorea barruan dagoen: $\{x, e_2, e_3,....., e_n\}$. Horien irudiak $\{f(x), f(e_2),...., f(e_n)\}$ Im f-ren sistema sortzailea izango dira (6. propietatea), baina f (x) = o denez, $\{f(e_2),....,f(e_n)\}$ ere sortzailea izango da. Baina hori ez da posible dim Im f < dim V izan beharko bailuke eta hori hipotesiaren aurka doa. Ondorioz, f injektiboa da.

3.3. KOROLARIOA: f : V $\rightarrow$ W aplikazio lineal bat injektiboa da $\Leftrightarrow$ V-ko oinarri baten irudia Im f-ko oinarria da.

Frog.: $\Rightarrow$ izan bedi $\{e_1, e_2, ...,e_n\}$ V-ko oinarri bat. Orduan $\{f(e_1),f(e_2),....,f(e_n)\}$ W-ko oinarria izango da, zeren eta $m_1.f(e_1) + m_2.f(e_2) + ...+ m_n. f(e_n) = o \Rightarrow f(m_1.e_1 +.....+ m_n.e_n) = o \Rightarrow m_1.e_1 +.....+ m_n.e_n = o$, f injektiboa baita, eta nahitaez $m_1 = ... = m_n = 0$ izan beharko dute $\{e_1, e_2, ...,e_n\}$ sistema askea delako
$\Leftarrow$ demagun orain V-ko $\{e_1, e_2, ...,e_n\}$ oinarriaren irudiek W-ko $\{f(e_1),f(e_2),....,f(e_n)\}$ oinarria osatzen dutela. Orduan dim V = dim Im f da eta aurreko teoremaren arabera f injektiboa da.

Askotan Im f-ren dimentsioari f-ren *heina* deritzo.: **dim Im f = Hein f** (edo **He f**).

3.4. KOROLARIOA: f : V $\rightarrow$ W aplikazio lineal bat bijektiboa bada (isomorfismoa), dim V = dim W da.

Frog: V-ko dimentsioa n bada, aurreko korolarioaren arabera, n ere izango f (V) espazioaren dimentsioa. Baina f bijektiboa denez, f (V) = W izango da, eta ondorioz, dim W = n .

3.5. PROPOSIZIOA: Demagun $f : V_n \to W_n$ aplikazio lineal bat dela. Orduan:
$$f \text{ injektiboa da } \Leftrightarrow f \text{ supra da}$$

Frog.**:** $\Rightarrow$ demagun f injektiboa dela. Izan bedi $\{e_1, e_2, ...,e_n\}$ V-ko oinarri bat. Orduan $\{f(e_1),f(e_2),....,f(e_n)\}$ Im-ko oinarri bat izango da (3.3. Korolarioa) eta bere dimentsioa n denez, Imf = W izango da. W-ko bektore guztiek aurreirudia badutela egiaztatu behar da. Izan bedi $y\in W$; $y = a_1 f(e_1)+ a_2.f(e_2) +......+ a_n.f(e_n) = f(a_1.e_1 +....+a_n.e_n)$ jarri ahal da, baina $x = a_1.e_1 +....+a_n.e_n$ V-ko bektore bat da, eta ondorioz $f(x) = y$, hau da, x da y-ren aurreirudia, beraz, f supraiektiboa da.
$\Leftarrow$ demagun orain f supra dela. Suposa dezagun $f(x) = f(y)$ dela. Orduan $f(x - y) = o$ eta $x \neq y$ bada, dim Ker f = p > 0. Baina supra bada, dim Im f = dim W_n = n, eta ezin da dim V = dim Ker f + dim Im f bete, zeren eta $n \neq p + n$. Ondorioz, $x = y \Rightarrow$ f injektiboa da.

3.3. FORMA LINEALAK

Aplikazio lineal batean bigarren bektore-espazioa K gorputza baldin bada (hau da, $f : V \to K$), aplikazio linealari forma lineal deritzo:

3.3. DEFINIZIOA: Izan bedi V K gaineko bektore-espazio bat eta $f : V \to K$ aplikazio bat. f forma lineala dela esaten da, honakoak betetzen badira:

- $f(u + v) = f(u) + f(v) \qquad \forall u,v \in V$
- $f(\lambda.u) = \lambda.f(u) \qquad \forall\lambda\in K , \forall u\in V$

adibidea: Izan bedi $f : R^2 \to R$ ondoko hau: $f(x,y) = x - 2y$. Oso erraza da f forma lineala dela frogatzea:

- $f[(x,y) + (x',y')] = f[(x + x',y + y')] = x + x' – 2.(y + y')] = (x – 2y) + (x' – 2y')$
  $= f[(x,y)] + f[(x',y')]$
- $f[\lambda.(x,y)] = f[(\lambda x,\lambda y)] = \lambda x - 2\lambda y = \lambda.(x – 2y) = \lambda.f(x,y)$

3.2. TEOREMA: $U\subset V$ azpiespazio maximala bada, nulua ez den f forma lineal bat $f : V \to K$ existitzen da, non bere nukleoa U den. Eta $f : V \to K$ forma lineal bat bada ($f \neq o$), bere nukleoa V-ko azpiespazio maximala da.

Frog.: $\Rightarrow$ U maximala bada, $V = U \oplus, S\{v_0\}$, non $v_o\notin U$ den (2.4.PROP.). Ondorioz, V-ko edozein v bektore $v = u + m.v_0$ moduan adierazi ahal da (m v bektore bakoitzari dago lotua, eta bistan denez, v U-koa bada, m = 0 izan beharko du).

Kontsidera ditzagun orain ondoko bi aplikazio hauek:

1) $p : V \to S\{v_0\}$ honela definitua: $p(v) = m.v_0$
   erraza da egiaztatzea p lineala dela eta bere nukleoa U dela.
2) $h : S\{v_0\} \to K$ honela definitua: $h(m.v_0) = m$

$f = h_o p$ (hori da beraien konposizioa) definitzen bada, bistakoa da $f : V \to K$ forma lineala dela, non bere nukleoa Ker f = U den. Ikus dezagun: $x \in U$ ($x = x + 0.v_0$) bada, $f(x) = h(p(x)) = h(0.v_0) = 0$ betetzen da, eta $x \notin U$, orduan, $x = m.v_0$ (non $m \neq 0$ den) eta $f(x) = h(m.v_0) = m \neq 0$.

$\Leftarrow$ demagun orain $f : V \to K$ forma lineal bat dela ($f \neq o$). $f \neq o$ denez, $v_0 \in V$ existituko da, non $f(v_0) = 1$ den. Orduan, $\text{Ker } f \cap S\{v_0\} = \{o\}$. $V = \text{Ker } f + S\{v_0\}$ dela frogatuko balitz, Ker f eta $S\{v_0\}$ betegarriak lirateke eta $S\{v_0\}$ bektore batetik sortutakoa denez, Ker f maximala izango litzateke. Ikus dezagun:
$v \in V$ edozein bektore honela jar daiteke: $v = v_0. f(v) + (v - v_0 .f(v))$, non $v_0.f(v) \in S\{v_0\}$ (ez ahaztu f(v) eskalar bat dela) eta $v - v_0.f(v) \in \text{Ker } f$ (zeren eta $f(v - v_0 .f(v)) = f(v) - f(v_0).f(v) = f(v) - f(v) = 0$ baita). Ondorioz, $V = \text{Ker } f + S\{v_0\}$ betetzen da.

AZPIESPAZIO MAXIMALEN EKUAZIOAK

Ikusitakoaren arabera, U azpiespazioa maximala dela esan daiteke, baldin eta soilik baldin, f forma lineal bat existitzen bada, zeinarentzat $U = \text{Ker } f = \{v \in V \ / \ f(v) = 0\}$ den.

$f(v) = 0$ erlazioari U-ren ekuazio deritzo.

Orain datorkigun galdera hauxe da: U azpiespazio horrek ba al du beste ekuaziorik? Beste modu batean esanda, ba al dago U = Ker g betetzen duen beste g forma lineal bat?
Garbi dago $\forall m \in K$ $m.f(v) = 0$ ekuazioak ere U-ren ekuazioak direla, zeren eta U = Ker f bada, U = Ker (m.f) beteko da. Ondoko proposizioan beste era bateko forma linealak dauden aztertzen da.

3.6. PROPOSIZIOA: Izan bedi $f(v) = o$, U azpiespazio maximalaren ekuazioa. Demagun $g(v) = o$ ere U azpiespazioaren ekuazioa dela. Orduan $g = m.f$

Frog.: Demagun U = Ker f = Ker g . U maximala denez, v_0 ($\neq o$ eta $v_0 \notin U$) bektore bat existitzen da, non $V = U \oplus S\{v_0\}$ den. Orduan $f(v_0) \neq 0$ eta $g(v_0) \neq 0$ dira, eta $\lambda = g(v_0) / f(v_0)$ eskalarra definitzen bada, h forma lineal berri bat defini daiteke honela: $h = g - \lambda f$. Erraza da h forma lineala dela frogatzea eta gainera edozein bektoreren irudia zero da (hots $h = o$ da). Ikus dezagun:
Alde batetik, $h(v_0) = g(v_0) - \lambda.f(v_0) = 0$ da (λ ordezkatuz). Horrez gain, $h(u) = g(u) - \lambda.f(u) = 0 - \lambda.0 = 0 \ \ \forall u \in U$.

Orduan, $\forall v \in V$ $u \in U$ eta $m \in K$ existitzen dira, non $v = u + m.v_0$ den eta $h(v) = h(u) + m.h(v_0) = 0 + m.0 = 0$. Ondorioz, h = o da eta $g - \lambda.f = o \Rightarrow g = \lambda.f$

3.4. APLIKAZIO LINEAL BATEN KARAKTERIZAZIOA

Aplikazio lineal bat definitzeko aurreko adibideetan egin dugun bezala egin daiteke, hots, bektore orokor baten irudia emanez. Halaber, beste modu batean ere egin ahal da,V-ko oinarri baten irudiak emanez, hain zuzen. Ikus dezagun:

Izan bedi $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ V-ko oinarri bat. Orduan, f aplikazio lineal bat definitzeko nahikoa da $\{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)\}$ ematea. Hori egiaztatzeko V-ko edozein x bektoreren irudia definituta dagoen aztertu beharko dugu. Egiazta dezagun:

Izan bedi $x \in V$. $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ V-ko oinarria denez, α_i eskalarrak existitzen dira, non x bektorea $x = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ...+\alpha_n.\, u_n$ moduan jarri ahal den. Ondorioz, $f(x) = f(\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ...+\alpha_n.\, u_n) = \alpha_1.f(u_1)+ \alpha_2.f(u_2)+ ....+\alpha_n.\, f(u_n)$. Beraz, f (x) zeharo finkatuta dago.

Ondorioz, V-tik (n dimentsiokoa) W-ra (m dimentsiokoa) f-aplikazio lineal bat definitzeko nahikoa da bi espazio horien bi oinarri (B V-koa eta B' W-koa) finkatzea, eta lehenengo oinarrien irudiak bigarrenarekiko adieraztea. Suposatzen badugu beren oinarri horiek $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ (V-koa) eta $B' = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ (W-koa) direla, f-ren definizioa ondoko ekuazio hauen bitartez eman daiteke:

$$
\begin{aligned}
f(u_1) &= \alpha_{11}.w_1 + \alpha_{21}.w_2 + ...+\alpha_{m1}.w_m \\
f(u_2) &= \alpha_{12}.w_1 + \alpha_{22}.w_2 + ...+\alpha_{m2}.w_m \\
&\text{...} \\
f(u_n) &= \alpha_{1n}.w_1 + \alpha_{2n}.w_2 + ...+\alpha_{mn}.w_m
\end{aligned}
$$

Kontuan hartu behar da aplikazioaren izaera α_{ij} koefizienteetan dagoela eta ez hautatutako oinarrietan. Oinarriz aldatzen bada, koefiziente horiek aldatu egingo dira, baina aplikazioaren izaera ez da aldatuko (hau da, bektoreen irudiak ez dira aldatzen).

3.5. APLIKAZIO LINEAL BATEN MATRIZEA

Ikusitako koefizienteak kaxa batean kokatu ahal dira eta kaxa horri hautatutako bi oinarriekiko f-ren matrize deritzo (F idazten da). Kokatze hori era batera edo bestera egin daitezke eta testu honetan honela egitea erabaki da:
Bektore bakoitzaren irudiari dagozkion koefizienteak zutabeetan jarriko dira
Modu berean, $x = x_1.u_1 + x_2.u_2 + ...+x_n.u_n$ bektorea adierazteko zutabe bateko matrizea (X idazten da) erabiltzen da:

$$F = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}_{m.n} \quad \text{eta} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Hauek dira f eta x-ren adierazpen matrizialak.

Letra larriak erabiltzen dira izendatzeko.

matrizearen beheko izkinan m.n jarri da. Horrekin m errenkada eta n zutabeko matrizea dela adierazten da.

Lengoaia matriziala ere erabili ahal da bektore baten irudia, f (x), kalkulatzeko.

Ikus ditzagun f (x) kalkulatzeko ditugun moduak:

1. Era analitikoan:

$f(x) = f(x_1.u_1 + x_2.u_2 + ...+x_n.u_n) = x_1.f(u_1)+ x_2.f(u_2)+ ....+x_n.f(u_n) = x_1.(\alpha_{11}.w_1 + \alpha_{21}.w_2 + ...+\alpha_{m1}.w_m) + x_2.(\alpha_{12}.w_1 + \alpha_{22}.w_2 + ...+\alpha_{m2}.w_m) + ... + x_n.(\alpha_{1n}.w_1 + \alpha_{2n}.w_2 + ...+\alpha_{mn}.w_m) = (x_1.\alpha_{11} + x_2.\alpha_{12} +....+ x_n.\alpha_{1n}).w_1 + (x_1.\alpha_{21} + x_2.\alpha_{22} +....+ x_n.\alpha_{2n}).w_2 + ...+ (x_1.\alpha_{m1} + x_2.\alpha_{m2} +....+ x_n.\alpha_{mn}).w_m$

2. Era matrizialean:

$$F.X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}.x_1 + \alpha_{12}.x_2 + ... + \alpha_{1n}.x_n \\ \alpha_{21}.x_1 + \alpha_{22}.x_2 + ... + \alpha_{2n}.x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}.x_2 + ... + \alpha_{mn}.x_n \end{pmatrix}$$

Beraz, f (x) bektorearen i-garren koordenatua F-ko i-garren errenkada eta X zutabea gaiz gaiz biderkatuz eta gero emaitzak batuz lortzen da, hots, y = f (x) bada:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}.x_k$$

adibidea: Izan bedi f aplikazio lineala $f: R^4 \to R^2$ $B = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ oinarriaren irudiak ondokoak izanik:

$f(1,1,1,1) = (2,3)$ $f(1,1,1,0) = (1.-1)$
$f(1,1,0,0) = (0,2)$ $f(1,0,0,0) = (1,4)$ Kalkulatu $f(x)$, $x = (1,2,-1,3)$ izanik.
Ebazpena: x bektorea R^4 espazioko B oinarriarekiko jarri beharko da (kanonikoan dago) eta horretarako $(1,2,-1,3) = a.(1,1,1,1) + b.(1,1,1,0) + c.(1,1,0,0) + d.(1,0,0,0)$ ebatzi beharko da:

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c + d \\ 2 &= a + b + c \\ -1 &= a + b \\ 3 &= a \end{aligned}$$

eta ekuazio-sistema hori ebatziz, $a = 3$, $b = -4$, $c = 3$, $d = -1$ ateratzen dira.

Beraz, : $x = (3,-4,3,-1)_B$ da.

f-ren matrizea, R^4-ko B oinarriarekiko eta R^2-ko oinarri kanonikoarekiko, $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ izango da eta $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ da.

f (x) era matrizialean kalkulatuko da:

$$F.X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 + 1.(-4) + 0.3 + 1.(-1) \\ 3.3 + (-1).(-4) + 2.3 + 4.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

eta emaitza R^2-ko oinarri kanonikoarekiko dago adierazita. Posible da, baita ere, R^4-ko oinarri kanonikoaren bektoreen irudiak aurrez kalkulatzea eta, orduan, bi espazioko oinarri kanonikoekiko matrizea izango dugu. Ondoren matrize hori emandako x bektoreari aplikatuko litzaioke.

Batzuek matrizearen errenkadak eta zutabeak alderantziz jartzea eta x bektorea errenkada moduan jartzea erabaki ohi dute. Horrela egiten bada, irudia kalkulatzeko bektorea aurrean jarri behar da:

$$X.F = (3,-4,3,-1).\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (1,15)$$

3.6. APLIKAZIO LINEALEN ARTEKO ERAGIKETAK

Kontsidera dezagun V eta W (biak K gorputzaren gainekoak) espazioen arteko aplikazio linealek osatutako multzoa (L [V,W] idatziko da). Egitura aljebraikoa eman dakioke eragiketa batzuk definituz.

BATUKETA

3.4. DEFINIZIOA: Hemendik aurrera f,g aplikazioak L [V,W] multzokoak izango dira. Beraien arteko batuketa honela definitzen da:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in V$$

Ikusiko dugunez barne-eragiketa da, hots, $f + g \in L[V,W]$. Horretarako lineala dela egiaztatu behar da: $(f + g)(\alpha.u + \beta v) = f(\alpha.u + \beta v) + g(\alpha.u + \beta v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v) + \alpha.g(u) + \beta.g(v) = \alpha.(f(u) + g(u)) + \beta.(f(v) + g(v)) = \alpha.(f + g)(u) + \beta.(f + g)(v)$. Lineala da, beraz.

Batuketaren propietateak:

1. Elkartze-legea: $(f + g) + h = f + (g + h) \qquad \forall f,g,h \in L[V,W]$

Frog.: $[(f + g) + h](u) = (f + g)(u) + h(u) = (f(u) + g(u)) + h(u) = f(u) + (g(u) + h(u))$ (bektore horiek W-koak direlako eta W espazioan, bektore-espazioa denez, elkartze-legea betetzen da) $= f(u) + (g + h)(u) = [f + (g + h)](u)$.

2. Elementu neutroa: $\exists\, o \in L[V,W] \ / \ o + f = f \qquad \forall f \in L[V,W]$

Frog.: Nahikoa da zero aplikazioa honela definitzea:
$o(u) = o_W \ \ \forall u \in V$, zeren eta $(o + f)(u) = o(u) + f(u) = o + f(u) = f(u)$, hots, $o + f = f$ da.

3. Elementu simetrikoa . $\forall f \in L[V,W] \quad \exists -f \ / \ f + (-f) = o$

Frog.: Nahikoa da -f honela definitzea: $(-f)(u) = -f(u) \ \ \forall u \in V$, eta orduan $(-f + f)(u) = (-f)(u) + f(u) = -f(u) + f(u) = o$. Beraz, $-f + f = o$ da.

4. Lege trukakorra: $f + g = g + f \qquad \forall f,g \in L[V,W]$

Frog.: $(f + g)(u) = f(u) + g(u) = g(u) + f(u)$ (zeren eta W espazioan, bektore-espazioa denez, lege trukakorra betetzen baita) $= (g + f)(u)$.

Ondorioz, (L [V,W] ; +) bikotea talde trukakorra da.

BATUKETAREN ADIERAZPEN MATRIZIALA

F eta G badira, hurrenez hurren, f eta g-ri dagozkien matrizeak oso erraz froga daiteke f + g aplikazioari dagokion matrizea bi matrize horien elementuen arteko batuketak eginez lortzen dela.

Ikus dezagun:

Izan bitez $F = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ eta $G = \begin{pmatrix} \beta_{111} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$ f et g

aplikazioei dagozkien matrizeak. Orduan, f + g aplikazioari dagokiona hauxe izango da:

$$F + G = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1m} \\ \alpha_{21} + \beta_{22} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \cdots & \alpha_{2n} + \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m12} & \alpha_{m2} + \beta_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

Hori frogatzeko nahikoa da bi aplikazio horien arteko baturaren matrizea kalkulatzea emandako definizioarekin.

KANPOKO BIDERKETA

3.5. DEFINIZIOA: K gorputzaren gaineko V bektore-espazio batean kanpo-eragiketa bat defini daiteke, K gorputz hori eragile gisa erabiliz, honako modu honetan:

$$(\lambda.f)\,(u) = \lambda.f\,(u) \qquad \forall\lambda \in K \quad \text{eta} \quad \forall u \in V$$

$\lambda.f$ lineala dela ikusiko dugu: $(\lambda.f)\,(a.u + b.v) = \lambda.f\,(a.u + b.v) = \lambda.(a.f\,(u) + b.f\,(v)) = \lambda.a.f\,(u) + \lambda..b.f\,(v) = a.\ \lambda.f\,(u) + b.\ \lambda.f\,(v) = a.(\lambda.f)\,(u) + b.(\lambda.f)\,(v)$.

Biderketaren propietateak:

1. *$1.f = f \quad \forall f \in L[V,W]$ (1K gorputzeko unitatea da)*

   Frog.: $(1.f)\,(u) = 1.\ f\,(u) = f\,(u)$ (W bektore-espazioa baita).

2. *$\alpha.(f + g) = \alpha.f + \alpha.g \qquad \forall\alpha\in K$ eta $\forall f,g \in L[V,W]$*

   Frog.: $[\alpha.(f + g)]\,(u) = \alpha.[(f + g)\,(u)] = \alpha.(f\,(u) + g\,(u)) = \alpha.f\,(u) + \alpha.g\,(u) = (\alpha.f)\,(u) + (\alpha.g)\,(u) = (\alpha.f + \alpha.g)\,(u)$.

3. *$(\alpha + \beta).f = \alpha.f + \beta.f \qquad \forall\alpha\beta \in K$ eta $\forall f \in L[V,W]$*

   Frog.: $[\ (\alpha + \beta).f\ ]\,(u) = (\alpha + \beta).f\,(u) = \alpha.f\,(u) + \beta.f\,(u) = (\alpha.f + \beta.f)\,(u)$.

4. $\alpha.(\beta.f) = (\alpha.\beta).f \quad \forall\alpha\beta \in K \quad eta \quad \forall f \in L[V,W]$

Frog.: $(\alpha.(\beta.f))\,(u) = \alpha.(\beta.f)\,(u) = \alpha.(\beta.f\,(u)) = (\alpha.\beta).f\,(u)$

Ondorioz, $(L[V,W]\ ;\ +,\ ._{K})$ hirukotea bektore-espazio trukakorra da.

ADIERAZPEN MATRIZIALA

Erraz froga daiteke $\lambda.f$ aplikazioari dagokion matrizea hauxe dela:

$$F = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \text{ bada,} \quad k.F = \begin{pmatrix} \lambda.\alpha_{11} & \lambda.\alpha_{12} & \cdots & \lambda.\alpha_{1m} \\ \lambda.\alpha_{21} & \lambda.\alpha_{22} & \cdots & \lambda.\alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda.\alpha_{n1} & \lambda.\alpha_{n2} & \cdots & \lambda.\alpha_{nm} \end{pmatrix} \text{ izango da.}$$

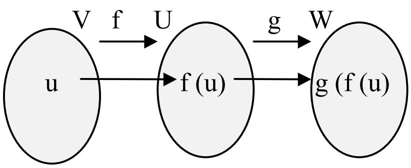
KONPOSIZIOA

3.6. DEFINIZIOA: Demagun $f : V \to U$ eta $g : U \to W$ bi aplikazio lineal direla eta V,U eta W espazioak K gorputzaren gainean daudela. Orduan V-tik W-ra beste aplikazio bat defini daiteke (konposizio deritzona) horrela:

$$g \circ f :\ V \to W \qquad (g \circ f)\,(u) = g\,(f\,(u)) \qquad \forall u \in V$$

Aplikazio horri g eta f-ren arteko konposizio deritzo. Ikusiko dugun bezala lineala da:

$(g \circ f)\,(\alpha.u + \beta.v) = g\,(f\,(\alpha.u + \beta.v)) = g\,(\alpha.f\,(u) + \beta.f\,(v)) =$
$= \alpha.g\,(f\,(u)) + \beta.g\,(f\,(v)) = \alpha.(g \circ f)\,(u) + \beta(g \circ f)\,(v)\ .$



Kontuan hartu alderantziz egiteak ez duela inolako zentzurik, hots $f \circ g$,, zeren eta g-ren irudiak W-ean baitaude eta ez V-n.

ADIERAZPEN MATRIZIALA

Demagun V,U eta W espazioen dimentsioak n, p eta m direla (hurrenez hurren). Kontsidera dezagun f eta g aplikazioei dagozkien F eta G matrizeak ondokoak direla:

$$F = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}_{p.n}$$

$f : V_n \rightarrow U_p$ aplikazioari p errenkada eta n zutabeko matrizea dagokio.

$$G = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mp} \end{pmatrix}_{m.p}$$

$g : U_p \rightarrow W_m$ aplikazioari m errenkada eta p zutabeko matrizea dagokio:

orduan, $g \circ f : V_n \rightarrow W_m$ aplikazioari ondoko m errenkada eta n zutabeko matrizea dagokiola ikus daiteke oso erraz:

$$G.F = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} \beta_{1i}.\alpha_{i1} & \sum_{i=1}^{p} \beta_{1i}.\alpha_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{p} \beta_{1i}.\alpha_{in} \\ \sum_{i=1}^{p} \beta_{2i}.\alpha_{i1} & \sum_{i=1}^{p} \beta_{2i}.\alpha_{i2} & & \sum_{i=1}^{p} \beta_{2i}.\alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} \beta_{mi}.\alpha_{i1} & \cdots & \cdots & \sum \beta_{mi}.\alpha_{in} \end{pmatrix}_{m.n}$$

G.F matrizeko i-garren errenkadako eta j-garren zutabeko gaia ondoko hau izango da :

$$\sum_{k=1}^{p} \beta_{ik}.\alpha_{kj}$$

adibidea: Demagun $f : R^2 \rightarrow R^4$ eta $g : R^4 \rightarrow R^3$ aplikazioak ondoko hauek direla: f (x,y) = (x,x-y,0,2x) eta g (x,y,z,t) = (x+y,z.3t). Kalkula dezagun $(g \circ f)$ (2,3).

Bi modutan egingo dugu:

1. Era analitikoan: $(g \circ f)$ (2,3) = g (f (2,3)) = g (2,-1,0,4)) = (1,0,12)

2. Era matrizialean: oinarri kanonikoak erabiltzen baditugu hiru espazioetan, f eta g aplikazioen matrizeak ateratzeko honako hau egingo dugu:

f (1,0) = (1,1,0,2)
f (0,1) = (0,-1,0,0)

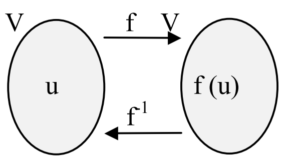
g (1,0,0,0) = (1,0,0)
g (0,1,0,0) = (1,0,0)
g (0,0,1,0) = (0,1,0)
g (0,0,0,1) = (0,0,3)

orduan $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ eta $G.F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ dira, eta ondorioz,

$(g_o f)$ (2,3) egiteko $G.F. \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ egin beharko da: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$.

ALDERANTZIZKO APLIKAZIOA

Demagun hiru espazio horiek berdinak direla, hau da, V = U = W . Izan bedi f V-ko automorfismo bat. Orduan, alderantziz egiteak badu zentzua, eta aplikazioak aztertu genituenean egin genuen bezala, f-ren alderantzizkoa f^{-1} aplikazioa dela esaten da, $f_o f^{-1} = f^{-1}{}_o f = I$ betetzen bada.



$(f^{-1}{}_o f)(u) = I(u) = u$ beteko da .
Beraz, $f^{-1}(f(u)) = u$ izango da f^{-1} funtzioaren definizioa.

f^{-1} aplikazioari dagokion F^{-1} matrizea f-ri dagokion F matrizetik atera daiteke. Nola egiten den matrizeei dagokien kapituluan (4-garrenean) ikusiko da.

f^{-1} aplikazioa lineala da. Ikus dezagun:

demagun $f^{-1}(a.y + a'.y') = z$ dela eta $f^{-1}(y) = x$ eta $f^{-1}(y') = x'$ direla. Orduan $f(a.x + a'.x') = a.f(x) + a'.f(x') = a.y + a'.y' = f(z)$, eta ondorioz, $z = a.x + a'.x'$. Beraz, $f^{-1}(a.y + a'.y') = z = a.x + a'.x' = a.f^{-1}(y) + a'.f^{-1}(y')$.

Kontuan hartu behar da aplikazio batek bijektiboa izan behar duela alderantzizkoa izan dezan.

OINARRI-ALDAKETA

Izan bedi $f : V \rightarrow W$ aplikazio lineal bat. Espazio horien bi oinarri finkatuz gero f aplikazioari F matrizea nola egoki dakiokeen aztertu da. Agerikoa da F matrizea desberdina izango dela bi oinarri horiek aldatzen badira. Bi matrize horien arteko lotura hurrengo kapituluan aztertuko da.

EBATZITAKO ARIKETAK

1. Izan bedi $f : R^2 \to R^2$ $f(x,y) = (x + y, x - y)$ aplikazioa. Egiaztatu endomorfismoa dela eta esan ea automofismoa den.

Ebaz.: Endomorfismoa (aplikazio lineala) izateko ondoko hauek bete behar dira:

- $f((x,y) + (x',y')) = f(x + x', y + y') = (x + x' + y + y', x + x' - y - y') =$
$(x + y, x - y) + (x' + y', x' - y') = f(x,y) + f(x',y')$.

- $f(k.(x,y)) = f(kx,ky) = (kx + ky, kx - ky) = k.(x + y, x - y) = k.f(x,y)$.

Beraz, endomorfismoa da. Automorfismoa izateko bijektiboa izan behar du.

- injektiboa: demagun $f(x,y) = f(x',y')$. Orduan, $(x+y,x-y) = (x'+y',x'-y')$ eta ondorioz $\left.\begin{array}{l} x + y = x'+y' \\ x - y = x'-y' \end{array}\right\} \Rightarrow x = x', y = y'$, eta ondorioz, injektiboa da.

Hori aztertzeko beste modu bat Ker f kalkulatzea da (o bada, injektiboa baita): $f(x,y) = (0,0)$ egiten bada, orduan $(x + y, x - y) = (0,0) \Rightarrow x + y = 0$ eta $x - y = 0$, eta ondorioz, $x = y = 0 \Rightarrow$ Ker f = {o}, eta ondorioz, injektiboa da.

- Supra: edozein (x,y) bektorek aurreirudia du. Nahikoa da $x = a + b$ eta $y = a - b$ egitea. Orduan, $a = \dfrac{x+y}{2}$ eta $b = \dfrac{x-y}{2}$ ateratzen dira eta $f(a,b) = (x,y)$

Beraz, automorfismoa da.

2. Izan bitez S eta R V-ko bektore-azpiespazioak. Kontsidera dezagun ondoko aplikazio lineal hau: $f : RxS \to V$: $f(u, w) = u + w$ $\forall u \in R, \forall w \in S$. Frogatu:

a) Ker f = {(u,-u) / $u \in R \cap S$}
b) Ker f $\cong R \cap S$ ($\cong$ ikurrak isomorfismoa adierazten du)
c) Im f = S + R

Ebaz.: a) Izan bitez $f(u,w) = o \Rightarrow u + w = o \Rightarrow u = -w$. Baina u R-koa da eta -w denez, S-koa ere bada $\Rightarrow$ Ker f = {(u,-u) / $u \in R \cap S$}.

b) Ker f eta $R \cap S$ espazioen arteko isomorfismoa agerikoa da, $u \in R \cap S$ bektore bakoitzari Ker f –ko (u.,-u) bektore bakarra baitagokio, eta alderantziz.

c) Demagun $x \in \text{Im } f$, orduan $x = u + v$, non $u\in R$ eta $w\in S$ diren. Ondorioz, $x\in S+R$ da. Suposa dezagun orain $x \in S+R$, orduan $x = u + w$, non $u\in R$ eta $w\in S$, eta ondorioz, $x = f(u,w)$, hots, $x\in \text{Im } f$. Hau da, $S + R \subseteq \text{Im} f$ eta $\text{Im } f \subseteq S + R \Rightarrow \text{Im } f = S + R$.

3. Kalkulatu f (x,y,z) = (x + 2y, -3z) aplikazio linealaren nukleo eta irudia eta determinatu horien oinarriak.

Ebaz.: - Nukleoa: $(x + 2y, -3z) = (0,0) \Rightarrow x + 2y = 0, -3z = 0 \Rightarrow x = -2y, z = 0$, eta ondorioz, $\text{Ker } f = \{(-2y,y,0) \ / \ y\in R\}$. Bere oinarri bat aurkitzeko nahikoa da honakoa kontuan hartzea: $(-2y,y,0) = y.(-2,1,0)$ dela; ondorioz, dimentsio batekoa da. Bere oinarri bat $(-2,1,0)$ bektorea izan daiteke.

- Irudia: $\text{Im } f = \{(x + 2y,-3z) \ / \ x,y,z \in R\}$ eta oinarri bat finkatzeko nahikoa da honakoa kontuan hartzea: $(x + 2y, -3z) = (x.0) + (2y,0) + (0,-3z) = x\,(1,0) + y\,(2,0) - 3\,(0,1)$. Hiru bektore horiek sistema sortzaile bat osatzen dute, baina ez da askea. Nahikoa da $(1,0)$ eta $(0,1)$ hartzea (bi dimentsiokoa), zeren eta horiek, hirurek sortzen duten espazio bera sortzen baitute.

4. Kontsidera dezagun $\left.\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= x - 4y + z \\ z' &= -x - 3y + z \end{aligned}\right\}$ *ekuazioek determinatzen duten R^3-ko f endomorfismoa. Kalkulatu:*

a) Ker f

b) Izan bedi S azpiespazio bat, non $R^3 = \text{Ker} f \oplus S$ den. Kalkulatu S-ko oinarri bat.

c) Egiaztatu S-ko oinarriaren irudiek Im f-ko oinarri bat osatzen dutela.

Ebaz.: a) f-ren matrizea $F=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ da, zeren eta $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = F.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ den. Orduan Ker f kalkulatzeko $F.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ egingo da $\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned} 0 &= 2x - y \\ 0 &= x - 4y + z \\ 0 &= -x - 3y + z \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 2x\,,\ z = 7x$

Ondorioz, $\text{Ker } f = \{(x, 2x, 7x) \ / \ x\in R\}$ eta bere oinarri bat $u_1 = (1,2,7)$ da.

b) S Ker f-ren betegarria bada, dimentsio bikoa da, eta bere oinarri bat finkatzeko nahikoa dugu Ker f-ko ez diren u_2 eta u_3 bi bektore independenteak hartzea. Agerikoa da $u_2 = (1,0,0)$ eta $u_3 = (0,1,0)$ izan daitezkeela. Ondorioz, S-ko oinarri bat bi bektore horiek osatzen dute.

c) Badakigu Im f dimentsio bikoa dela, zeren eta dim Ker f + dim Imf = dim R^3 betetzen den.

Im f = $\{(2x - y, x - 4y + z, -x - 3y + z) / x,y,z\in R\} = \{(2x,x,-x) + (-y,-4y,-3y) + (0,z,z)\}$ = $\{x(2,1,-1) + y(-1,-4,-3) + z(0,1,1)\}$ eta hiru bektore horiek Imf sortzen dute.

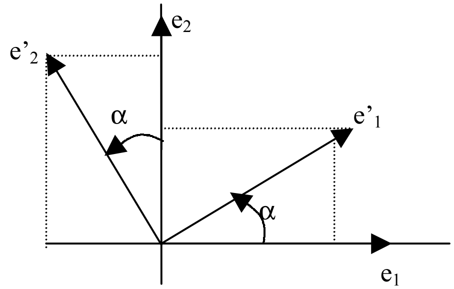
Badakigu ez direla independenteak (irakurlearentzat uzten da egiaztapen hori), bestela Imf-ren dimentsioa 3 izango litzateke. Haietako bi hartzen badira oinarri gisa, esate baterako (2,1,-1) eta (0,1,1), orduan, Im f = $\{\alpha(2,1,-1) + \beta(0,1,1) / \alpha,\beta\in R\} = \{(2\alpha, \alpha+\beta, -\alpha + \beta)\}$ izango da.

Beste alde batetik $f(u_2) = f(1,0,0) = (2,1,-1)$ da eta $f(u_3) = f(0,1,0) = (-1,-4,-3)$ da. Argi dago $f(u_1)$ eta $f(u_2)$ Imf-koak direla eta independenteak direnez, Imf-ko oinarri bat osatuko dute.

5. Izan bedi $f : R^2 \to R^2$ endomorfismoa $f(u) = v$, non v bektorea u bektorea α gradu biratzetik lortzen den. Kalkulatu:

a) f-ren matrizea oinarri kanonikoarekiko.
b) f(2,5) angelua 30º-koa bada
c) Izan bedi g β-graduko beste biraketa bat. Kalkulatu f eta g aplikazioen arteko konposizioaren matrizea.

Ebaz.: a) Izan bitez $e'_1 = f(e_1)$ eta $e'_2 = f(e_2)$. Biraketak modulua mantentzen du eta ondorioz, $|e'_1| = |e'_2| = 1$.



Grafikoko triangeluetan agerian jartzen da honako hau:

$$e'_1 = \cos\alpha.e_1 + \sin\alpha.e_2$$
$$e'_2 = -\sin\alpha.e_1 + \cos\alpha.e_2$$

f-ren matrizea, beraz, ondoko hau da:

$$F = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

b) (x,y) bektore baten irudia (x',y') kalkulatzeko era matrizialean egin daiteke:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ eta ondorioz:}$$

$$f(2,5) = \begin{pmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \frac{5}{2} \\ 1 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

c) Era matrizialean egingo da. Ikusi da funtzio linealen konposizioa matrizeen arteko biderkaduraren bitartez adierazten dela:

$$(g_{o} f)(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\beta.\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta b\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Agerian gelditzen da α eta β graduko bi biraketen konposizio linealari $\alpha+\beta$ graduko biraketa dagokiola.

6. Izan bitez $B_1 = \{u_1,u_2\}$ eta $B_2 = \{v_1,v_2, v_3\}$ R^2 eta R^3-ko oinarriak. Izan bedi $f(u_1) = - v_1 + 2v_3$ eta $f(u_2) = v_1+ 2v_2 - 3v_3$ bitartez definitutako f aplikazioa.
Izan bitez $B'_1 = \{2u_1, 4u_1 - u_2\}$ eta $B'_2 = \{v_1-5v_2 + 2v_3, 4v_2 - v_3, 3v_1 + 3v_2\}$ beste bi oinarri.

a) Kalkulatu f-ren F matrizea B_1 eta B_2 oinarriekiko.
b) Kalkulatu f-ren F' matrizea B'_1 eta B'_2 oinarriekiko.
c) Kalkulatu f(x), x = $(2,-1)_{B_1}$ bada.
d) Izan bedi x' x-ren adierazpena B'_1 oinarriarekiko. Kalkulatu F'.x' eta egiaztatu F.x dela, baina beste oinarri batean.
e) Kalkulatu x + 2y = 0 ekuazioak determinatzen duen R^2-ko S azpiespazioaren irudia.

Ebaz.: a) Oinarriaren irudiak matrizearen zutabeak direnez: $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ da.

b) izan bitez $\begin{cases} e_1 = 2u_1 \\ e_2 = 4u_1 - u_2 \end{cases}$ eta $\begin{cases} w_1 = v_1 - 5v_2 + 2v_3 \\ w_2 = 4v_2 - v_3 \\ w_3 = 3v_1 + 3v_2 \end{cases}$

f (e_i) kalkulatu behar dira eta $\{w_i\}$ oinarriarekiko adierazi behar dira:

- f (e_1) = f $(2u_1)$ = 2.f(u_1) = 2.(-1,0,2) = (-2,0,4) = a.w_1 + b.w_2 + c.w_3 = a.(1,-5,2) + b.(0,4,-1) + c.(3,3,0) eta ondoko sistema ebatzi behar da:

$$\left.\begin{array}{l} -2 = a + 3c \\ 0 = -5a + 4b + 3c \\ 4 = 2a - b \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ a = 9, b = 14, c = -11/3}$$

- f (e_2) = f $(4u_1 - u_2)$ = 4.f(u_1) – f (u_2) = (-4,0,8) – (1,2,-3) = (-5,-2,11) = a.w_1 + b.w_2 + c.w_3 = a.(1,-5,2) + b.(0,4,-1) + c.(3,3,0) eta ondoko sistema ebatzi behar da:

$$\left.\begin{array}{l} -5 = a + 3c \\ -2 = -5a + 4b + 3c \\ 11 = 2a - b \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ a = 47/2, b = 36, c = -19/2}$$

eta ondorioz, aplikazioaren matrizea B'_1 eta B'_2 oinarriekiko honako hau da:

$$F' = \begin{pmatrix} 9 & 47/2 \\ 14 & 36 \\ -11/3 & -19/2 \end{pmatrix}$$

c) $f(x) = f(2,-1)_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ eta horiek dira f (x)-ren koordenatuak B_2 oinarriarekiko.

d) x bektorea B'_1 oinarrian adierazten bada: $(2,-1) = a.e_1 + b.e_2 = a.(2,0) + b.(4,-1)$ eta $\left.\begin{array}{l} 2 = 2a + 4b \\ -1 = -b \end{array}\right\} \Rightarrow$ sistema ebatziz, a = -1, b = 1. Beraz, $x' = (-1,1)_{B'_1}$ (horrek x bektorearen koordenatuak B'_1 oinarriarekiko adierazten du).

Orain F'x' kalkulatuko da.

Bere irudia F' erabiliz kalkulatzen bada, aterako den bektorea B'_2 oinarriarekiko adierazita egongo da:

$F'.x' = \begin{pmatrix} 9 & 47/2 \\ 14 & 36 \\ -11/3 & -19/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/2 \\ 22 \\ -35/6 \end{pmatrix}$. Bektore hori B_2 oinarrian adierazten bada, Fx atera beharko da:

$(29/2,22,-35/6) = 29/2.(1,-5,2) + 22.(0,4,-1) - 35/6.(3,3,0) = (-3,-2,7)$ espero genuen bezala.

e) $x + 2y = 0$ ekuazioak determinatzen duen azpiespazioa $S = \{(-2y, y) / y \in R\}$ da. Bere oinarri bat $v = (-2,1)$ da. f (S) kalkulatzeko nahikoa da f (v) kalkulatzea, zeren eta oinarri baten irudiak f (S)-ren sistema sortzailea baitira.

$F(v) = F.v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$. Bektore hori F (S)-ren sortzailea da, eta ondorioz, $f(S) = \{ k(3,2,-7) / k \in R\}$ izango da.

7. Izan bedi R^2-ko f endomorfismoa $f(e_1) = ae_1 + 2e_2$, $f(e_2) = 3e_1 + 2e_2$, non $\{e_1,e_2\}$ oinarri bat den. Esan automorfismoa den a parametroaren arabera.

Ebaz.: Badakigu oinarri baten irudiek Imf-ko sistema sortzaile bat osatzen dutela. Hemen irudiak (a,2) eta (3,2) dira eta oinarria izateko independenteak izan behar dute:

- $a \neq 3$ bada, orduan independenteak dira, eta ondorioz, Imf 2 dimentsiokoa da $\Rightarrow$ dim Ker f = 0 $\Rightarrow$ Ker f = {o} $\Rightarrow$ f injektiboa da eta automorfismoa da.

- $a = 3$ bada, orduan dim Im f = 1 $\Rightarrow$ dim Ker f = 1 $\Rightarrow$ Ker f $\neq$ o $\Rightarrow$ ez da injektiboa eta ez da automorfismoa.

8. Izan bedi $P_2\ (x)$ 2. mailako edo txikiagoko polinomioen espazioa eta izan bedi M bi ordenako matrize simetrikoen multzoa (hau da, M = $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$*, a,b,c* $\in$ *R). Kontsidera dezagun $P_2(x) \to M$ ondoko aplikazio lineala:* $f\,(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & a+b+c \end{pmatrix}$

a) Kalkulatu f-ren matrizea bi espazioko oinarri kanonikoekiko
b) Kalkulatu Kerf eta Imf eta beren bi oinarri.
c) Kalkulatu $f^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ *eta* $f^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *existitzen badira.*

Ebaz.: a) oinarri kanonikoak honako hauek dira: $\{e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2\}$ P_2 (x)-ena (edozein $ax^2 + bx + c$ polinomioaren koordenatuak oinarri horrekiko (c,b,a) izango dira) eta $\{\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ M-rena.

Orduan, oinarriaren irudiak hauek dira:

- $f\,(e_1) = f\,(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = v_2 + v_3$
- $f\,(e_2) = f\,(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = v_2 + v_3$
- $f\,(e_3) = f\,(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v_1 + v_3$

Beraz, f-ren matrizea $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ da.

b) f-ren **nukleoa** kalkulatzeko nahikoa da $f\,(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ exijitzea:

$$\begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ c = -\,b$$

. Beraz, Ker f = { bx – b / b$\in$R} da. Bere dimentsioa bat da, zeren eta bere oinarriak polinomio bat baitu: x – 1.

Egindakoa era matrizialean ere egin daiteke. Kontuan hartu behar da M-ren zeroak (hau da $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) hiru koordenatuak dituela oinarri horrekiko, eta hirurak zero direla. Ondorioz, nukleoa kalkulatzeko ondoko hau idatziko da (kontuan izan polinomioaren koordenatuak (c,b,a) direla):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 0 \\ c + b = 0 \\ c + b = 0 \end{array} \right\}$$ eta ikusten den bezala emaitza bera ateratzen da.

Orain Im f kalkulatuko da. $\text{Imf} = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & a+b+c \end{pmatrix} = a. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Beraz, hiru matrize horiek Imf-ren sistema sortzaile bat osatzen dute, baina bi berdinak direnez, ondoko sistema hau $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \}$ oinarri bat izango da.

c) $m = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ matrizea Imf-koa izateko $p = ax^2 + bx + c$ polinomio bat aurkitu behar da, non $f(p) = m$ den.

Hau da: $\begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Hemendik ondoko sistema ondorioztatzen da: $a = 2$, $b + c = 3$, $a + b + c = 5 \Rightarrow c = 3 - b$ eta ikusten den bezala soluzio asko daude: $f^{-1}(m) = \{2x^2 + bx + 3 - b \,/\, b \in R\}$ (beraz, f^{-1} ez da aplikazioa).

$n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bada, $f^{-1}(n)$ ez da existitzen (hau da, ez dago Imf-ren barnean), ateratzen den sistemak ez baitu soluziorik: $a = 2$, $b + c = 1$, $a + b + c = 0$.

9. Izan bedi $U = \{(x,2x,y) \,/\, x,y \in R\}$ R^3-ko azpiespazioa. Kalkulatu $f: R^3 \to R$ forma lineala, non bere nukleoa U den.

Ebaz.: 3.2. teoreman ikusi den bezala egin daiteke. Horretarako U-k azpiespazio maximala izan behar du. Argi dago $\{(1,2,0), (0,0,1)\}$ U-ren sistema sortzailea delako gertatzen dela hori, eta ondorioz, dimentsio bikoa da.

$v_0 = (1,0,0)$ bektorea, adibidez, ez da U-koa eta berak sortutako azpiespazioari $S\{v_0\}$ deitzen bazaio, orduan R^3 espazioa $R^3 = U \oplus S\{v_0\}$ moduan deskonposa daiteke. Beraz, R^3-ko edozein bektore $w\,(a,b,c) = u\,(x,2x,y) + m.v_0$ jar daiteke (hau da, $(a,b,c) = (x,2x,y) + (m,0,0) = (x + m,2x,y)$). Beraz, f forma lineala honela eraiki daiteke: $f = h \circ p$, non:

$$p : R^3 \to S\{v_0\} \; : \; p(w) = mv_0 \quad \text{eta} \quad h : S\{v_0\} \to R \; : \; h(m.v_0) = m.$$

Beraz, f (a,b,c) = m existituko da. Baina (a,b,c) = (x + m, 2x, y) denez, $\left.\begin{array}{l} a = x + m \\ b = 2x \\ c = y \end{array}\right\} \Rightarrow m = a - b/2$ da . Ondorioz, f (a,b,c) = a - b/2 da bilatutako forma lineala

Horrez gain, 3.6. proposizioaren arabera forma lineala bakarra da proportzionaltasun konstantea salbu.

10. Izan bedi $P_2[x]$ 2. maila edo txikiagoko polinomioen bektore-espazioa eta kontsidera dezagun ondoko aplikazio hau: $f(q(x)) = q(x+1)$ $\forall q(x) \in P_2[x]$. Egiaztatu endomorfismoa dela eta esan automorfismoa den.

Ebaz.: Argi dago $q(x) = ax^2 + bx + c$ bada, orduan $q(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ izango dela.

Ikusiko dugunez lineala da: izan bitez q eta h $\begin{cases} q(x) = ax^2 + bx + x \\ h(x) = a'x^2 + b'x + c' \end{cases}$ bi polinomioak.

$f(\alpha.q(x) + \beta.h(x)) = f(\alpha.(ax^2 + bx + c) + \beta.(a'x^2 + b'x + c')) = f((\alpha.a + \beta.a').x^2 + (\alpha.b + \beta.b').x + \alpha.c + \beta.c') = (\alpha.a + \beta.a').(x+1)^2 + (\alpha.b + \beta.b').(x+1) + \alpha.c + \beta.c' = \alpha.a.(x+1)^2 + \alpha.b.(x+1) + \alpha.c + \beta.a'.(x+1)^2 + \beta.b'.(x+1) + \beta.c' = \alpha.(a.(x+1)^2 + b.(x+1) + c) + \beta.(a'.(x+1)^2 + b'.(x+1) + c') = \alpha.f(q(x)) + \beta.f(h(x))$, eta ondorioz, f endomorfismoa (aplikazio lineala) da.

Automorfismoa izateko injektiboa izan beharko du. Ikus dezagun:
Demagun $f(q(x)) = f(h(x))$ dela. Orduan, $a.(x+1)^2 + b.(x+1) + c = a'.(x+1)^2 + b'.(x+1) + c'$ beteko da $\Rightarrow a.x^2 + (2a + b).x + (a + b + c) = a'.x^2 + (2a' + b').x + (a'+b'+c')$ eta bi polinomioak berdinak dira, baldin eta soilik baldin, beren koefizienteak berdinak badira $\Rightarrow \begin{cases} a = a' \\ 2a + b = 2a' + b' \\ a + b + c = a' + b' + c' \end{cases} \Rightarrow a = a', b = b', c = c' \Rightarrow q(x) = h(x)$. Ondorioz, f injektiboa da (hau da, automorfismoa).

11. Izan bitez $U_1, U_2, \ldots, U_n$ V bektore-espazio baten azpiespazioak. Froga ezazu ondoko hau: $\dim(U_1 + U_2 + \ldots + U_n) \leq \dim U_1 + \ldots + \dim U_n$.

Ebaz.: Defini dezagun f aplikazio bat $(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n)$ espaziotik V-ra era honetan: $f(u_1, \ldots, u_n) = u_1 + \ldots + u_n$, non $u_i \in U_i$ den. Oso erraza da aplikazio lineala dela frogatzea, eta ondorioz, dim (U_1 x U_2 x.......x U_n) = dim Imf + dim Kerf. Baina Imf = (U_1 + U_2 +.......+ U_n) da eta ondorioz:

$$\dim (U_1 + U_2 + \dots + U_n) = \dim (U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n) - \dim \operatorname{Ker} f$$

Beste alde batetik, argi dago dim (U_1 x U_2 x.......x U_n) = dim U_1 + ...+ dim U_n dela, eta ondorioz:

$$\dim (U_1 + U_2 + \dots + U_n) \le \dim U_1 + \dots + \dim U_n$$

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. *Esan ondoko aplikazioak linealak diren, eta esan zein kasutan diren automorfismoak edo isomorfismoak:*

   a) $f: R^2 \to R^2$: $f(x,y) = (2x - y, 3y)$
   b) $f: R^2 \to R^4$: $f(x,y) = (2x - y, 3y, 0, x - y)$
   c) $f: R^2 \to R^2$ $\quad f(e_1) = e_1 - 3e_2$, $f(e_2) = o$
   d) $f: R^3 \to R^2$: $f(x,y,z) = (x + y, y - z)$
   e) $f: R^3 \to R^3$ $\quad f(x,y,z) = (x, 3x + y, 2x - y + z)$
   f) $f: R^3 \to R$: $f(x,y,z) = x - z$
   g) $f: R^4 \to R^4$ $\quad f(x,y,z,t) = (x + z - 3t, x + y, y + 2z + t, 3z - 2t)$
   h) $f: R^4 \to R^4$ $\quad f(x,y,z,t) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + t)$
   i) $f: R^3 \to P_2(x)$: $f(a,b,c) = ax^2 + bx + c$ *($P_2(x)$ 2. mailako edo txikiagoko polinomioen multzoa da).*

2. *Izan bedi f V-ko endomorfismoa, non f^2 identitatea den. Izan bitez R eta S ondoko azpiespazio hauek:* $R = \{x \in V \,/\, f(x) = x\}$ *eta* $S = \{x \in V \,/\, f(x) = -x\}$. *Frogatu* $V = R \oplus S$ *dela.*

3. *Kalkulatu aurreko kasuetan aplikazio lineal bakoitzaren irudia eta nukleoa (egiaztatu* $\dim Kerf + \dim Imf = \dim V$*) .*

4. *Izan bedi* $f: R^3 \to R$ $\; f(x,y,z) = x - y + z$ *aplikazioa.*

   a) *Egiaztatu forma lineala dela.*
   b) *Kalkulatu Kerf eta egiaztatu R^3-ko azpiespazio maximala dela.*
   c) *Kalkulatu forma lineal horren ekuazioa.*

5. *Izan bedi* $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $f: R^4 \to R^2$ *aplikazio lineal baten matrizea oinarri kanonikoekiko. Kalkulatu:*

   a) *(1,1,2,3) bektorearen irudia.*
   b) *Bere matrizea R^2-ko kanoniko eta R^4-ko {(2,1,1,0),(1,1,1,1),(0,1,3,1), (3,1,-3,1)} oinarriekiko.*
   c) *Bere heina.*
   d) *Ker f eta Im f.*

6. Izan bedi $f: P_2(x) \to P_2(x)$ $f(ax^2+bx+c) = bx^2 + a$ aplikazioa. Kalkulatu:

a) Bere matrizea $\{1, x-1, x^2\}$ oinarriarekiko.
b) $2x^2 - 3x + 2$ polinomioaren irudia.
c) Esan $2x^2 - 3x + 1$ polinomioa irudi-multzokoa den.
d) Ker f eta Im f.

7. Izan bitez $f: R^4 \to R^2$ eta $g: R^2 \to R^3$ ondoko aplikazio hauek:
$f(x, y, z, t) = (x - y, 2z)$ eta $g(x,y) = (2x, y, x - y)$. Kalkulatu:

a) $3.g$ aplikazioaren matrizea.
b) $g \circ f$ aplikazioaren matrizea.

8. Ondoko endomorfismoetan esan zein kasutan existitzen den alderantzizkoa eta kalkulatu kasu bakoitzean:

a) $f: R^2 \to R^2$ $f(x,y) = (x, x- y)$
b) $f: R^2 \to R^2$ $f(x,y) = (x, 2x)$
c) $f: R^3 \to R^3$ $f(x,y,z) = (x, 2y, x + z)$
d) $f: R^3 \to R^3$ $f(x,y,z) = (x, z, x)$

***9.** Izan bedi f R^3-ko endomorfismo bat, non bere nukleoa (1,2,-1) bektoreak sortzen duen. Horrez gain, $f(2,3) = (-1,1)$ eta $f^{-1}(-1,4) = (4,0)$ dira. Kalkulatu Ker$f$ eta Imf azpiespazioen oinarriak.*

10. Izan bedi $P_3(x)$ 3. maila edo txikiagoko polinomioen bektore-espazioa. Kontsidera dezagun f polinomio bakoitzari bere deribatua egokitzen dion endomorfismoa.
a) Kalkulatu f-ren matrizea $B = \{2, x, x^2-2, x^3 + x + 3\}$ oinarriarekiko.
b) Kalkulatu Ker f eta Im f eta beren dimentsioak.
c) Kalkulatu $f^{-1}(3x^2 - x + 2)$ era matrizialean eta integrazioa erabiliz.

11. Kalkulatu m parametroaren arabera zein kasutan $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & m \end{pmatrix}$ matrizea R^3-ko automorfismoa den.

12. Izan bedi $f: V_3 \to W_3$ $f(e_1) = u_1 - 2u_2 + u_3$, $f(e_2) = 3u_1 + u_2 + 4u_2$, $f(e_3) = -u_1 - 5u_2 - 2u_3$ definitutako aplikazio lineala, non $\{e_1, e_2, e_3\}$ eta $\{u_1, u_2, u_3\}$ V_3 eta W_3-ko oinarriak diren, hurrenez hurren.

a) Kalkulatu f-ren matrizea bi oinarri horiekiko.
b) Ker f eta Im f azpiespazioen dimentsioak.

c) *Izan bedi* $R = \{(x, y, x+3y) \ / \ x,y \in R\}$ W_3*-ko azpiespazioa. Kalkulatu* $f^{1}(R)$.

13. *Izan bitez ondoko homomorfismo hauek* $f: R^4 \to R^3$ $f(x,y,z,t) = (2x - 3y + 4z, 3x + y, -x - 4y + 4z)$ *eta* $g: R^3 \to R^2$ $g(x,y,z) = (x - y, y + 2z)$ *eta izan bedi* $h = g_o f$ *beraien konposizioa.*

a) *Kalkulatu h-ren matrizea.*
b) *Kalkulatu* $h(S)$, *non* $S = \{(x,y\,z,t) \ / \ x + y + z = 0\}$ *den.*
c) *Kalkulatu Ker h.*

14. *Izan bedi* R^4*-ko f endomorfismoa, non nukleoaren ekuazioa* $2x - y + z - t = 0$ *den. Horrez gain,* $f(1,2,1,0) = (0,1,0,1)$ *da.*

a) *Kalkulatu f-ren matrizea oinarri kanonikoarekiko.*
b) *Esan automorfismoa den.*
c) *Kalkulatu* $f(S)$, $S = \{(x,2x,y,x) \ / \ x,y \in R\}$ *azpiespazioa izanik.*

15. *Kalkulatu ondoko U azpiespazio maximalei dagozkien forma linealak, non nukleoa U azpiespazio bera den:*

a) $U = \{(x,3x) \ / \ x \in R\}$
b) $U = \{(x,y,z) \ / \ z - 3x = 0\}$
c) $U = \{(x, y,z, x - y + 2z) \ / \ x,y,z \in R\}$

4. MATRIZEAK

Orain arte matrizearen kontzeptua bitan aipatu da, bata bektore-espazio baten oinarri-aldaketari lotuta eta bestea aplikazio linealak adierazteko. Bietan matrizea n.m zenbakiz osatutako kaxa zen, n errenkada eta m zutabetan kokatuak. Beste zenbait arlotan ere interesgarria izaten da bi aldagai anizkoitz daudenean matrize gisa erabiltzea, informazioaren mamia eramanez eta gainerakoa kenduz (ahal eta ikur gutxien erabiltzeko asmoz). Hori gertatzen da, adibidez, ekuazio linealen sistema bat matrize baten bidez adierazten denean, non errenkada eta zutabe bakoitzak zein ekuazio eta zein aldagai diren, hurrenez hurren, adierazten duten.

Matrizeak Arthur Cayleyek sortu zituen 1.858 urtean Cambridgen eta erabakigarriak izan dira arlo askotan, matematikan, informatikan, ekonomian... eta, batez ere, gaur egungo fisikaren teoriaren garapenean.

Aurrekoari jarraituz, matrizeak modu abstraktu batean definitzea komeni izaten da, beren propietateak aztertzea eta gero testuinguru bakoitzean behar den bezala aplikatzea.

4.1. DEFINIZIOA

4.1. DEFINIZIOA: Izan bitez I eta J N-ko bi multzo finitu: I = {1,2,...,m} eta J = {1,2,....,n} eta K gorputz bat. Orduan, edozein $I \times J \rightarrow K$ aplikaziori m bider n ordenako matrize deritzo.

Aplikazioari α deitzen bazaio eta α_{ij} erabiltzen bada (i,j)-ren irudia adierazteko:

$(1,1) \rightarrow \alpha_{11}$ $(1,2) \rightarrow \alpha_{12}$ .... $(i,j) \rightarrow \alpha_{ij}$

(α_{ij}) jarriko dugu matrizea izendatzeko eta α_{ij} irudi guztiak ondoko kaxa honetan bezala jarriko dira:
α_{ij} i-garren errenkadan eta j-garren zutabean kokatua dagoena da.

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}_{m.n}$$

- i finkatzen bada, j aldatuz matrizearen i-garren *errenkada* sortzen da: $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$.

- Modu berean, j finkatuz eta i aldatuz j-garren *zutabea* lortzen da: $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}$.

Diagonal nagusia: $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{pp}$ gaiek eratzen dutena da, non $p = \min(m,n)$ den.

Azpimatrizea: matrize batean errenkada eta zutabe batzuk kendu ondoren gelditzen den matrizea da.

adibidea: Kontsidera dezagun $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ matrizea. Diagonal nagusiko gaiak 2, -2 eta –3 dira. Bere azpimatrize batzuk $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ izan daitezke.

MATRIZE-MOTA BATZUK

- *Matrize karratua*: m = n bada, n bider n matrizea dela esaten da, edo n ordenakoa.

- *Errenkada eta zutabe matrizeak*: errenkada bakarra eta zutabe bakarra, hurrenez hurren, osatutako matrizeak dira:

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) \quad \text{eta} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}$$

- *Matrize triangeluarra*: goi-triangeluarra dela esaten da diagonal nagusiaren azpian dauden gai guztiak zero badira. Hots, $\alpha_{ij} = 0 \ \forall i > j$. Modu berean, behe-triangeluar deritzo diagonal nagusiaren gainekoak zero badira ($\alpha_{ij} = 0 \ \forall i < j$).

- *Matrize diagonala*: diagonal nagusian ez dauden gai guztiak zero badira.

- *Matrize eskalarra*: diagonala izateaz gain, diagonaleko gai guztiak berdinak badira.

- *Matrize baten matrize iraulia*: A matrize bateko errenkadak eta zutabeak trukatzen badira, lortutako matrizeari A-ren iraulia deritzo (A^T idazten da). Bistan denez, A^T matrizearen gaiak β_{ij} motakoak direnean, eta A-koak α_{ij} motakoak, $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ beteko da.
- *Matrize simetrikoa*: $A = (\alpha_{ij})$ simetrikoa da $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $\forall i,j$. Bistan dago simetrikoa izateko karratua izan beharko duela. Horrez gain, A simetrikoa bada, $A = A^T$ beteko da.
- *Matrize antisimetrikoa*: $A = (\alpha_{ij})$ antisimetrikoa da $\alpha_{ij} = - \alpha_{ji}$ $\forall i,j$. Bistan dago diagonal nagusiko gaiek zero izan beharko dutela. Horrez gain, $A = - A^T$ beteko da.

4.2. $M_{m.n}$ (K) MATRIZEEN MULTZOA. ERAGIKETAK

K gorputzeko m bider n gaiz osatutako matrizeen multzoa $M_{m.n}$ (K) idatziko da (edo $M_{m.n}$ soilik) eta n ordenako matrize karratuen multzoa M_n (K) (edo M_n).

ERAGIKETAK

4.2.DEFINIZIOA**:** **Batuketa** aplikazio linealetan ikusi zen bezala definitzen da. Izan bitez F, G$\in M_{m.n}$, $F = (\alpha_{ij})$ eta $G = (\beta_{ij})$; orduan, $F + G = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$ izango da.

$$F = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \text{ eta } G = \begin{pmatrix} \beta_{11_1} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \text{ badira, orduan:}$$

$$F + G = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1m} \\ \alpha_{21} + \beta_{22} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \cdots & \alpha_{2n} + \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m12} & \alpha_{m2} + \beta_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

Kontuan hartu behar da batuketa definitu ahal izateko bi matrizeek errenkada- eta zutabe-kopuru bera izan behar dutela. Hau da, F eta G matrizeek $M_{m.n}$-koak izan behar dute.

($M_{m.n}$, +) talde abeldarra da:

- Elkartze-legea: $(F + G) + H = F + (G + H)$ $\forall F,G,H \in M_{m.n}$
- Lege trukakorra (abeldarra): $F + G = G + F$ $\forall F,G \in M_{m.n}$
- Elementu neutroa: $a_{ij} = 0$ $\forall i,j$ gaiak dituen matrizeari O matrize deitzen zaio eta agerikoa da $O + F = F$ $\forall F\in M_{m.n}$ betetzen dela.

- Aurkako elementua (simetrikoa): edozein $F = (a_{ij})$ matrizerentzat $-F = (-a_{ij})$ existitzen da, non $F + (-F) = O$ den.

Propietate horiek frogatzea irakurlearen esku uzten da (frogapen hau K gorputzaren egituran oinarritzen da).

4.3. DEFINIZIOA: $k \in K$ eta $F = (a_{ij}) \in M_{m.n}(K)$ izanik, k.F (**biderketa eskalarra)** beste matrize bat da, eta honela definitzen da: $k.F = (k.a_{ij})$.

Kanpo-eragiketa bat $(._K)$ definitu da eta erraz froga daitezke ondoko propietate hauek: $\forall k,t \in K$ eta $\forall F,G \in M_{m.n}$:

- $k.(F + G) = k.F + k.G$
- $(k + t).F = k.F + t.F$
- $(k.t).F = k.(t.F)$
- $1.F = F$ (1 K-ko unitatea izanik)

Ondorioz, $(M_{m.n} \ ; +, ._K)$ hirukotea K gaineko bektore-espazioa da.

adibidea: Kontsidera dezagun $M_{2.2}$ espazioa. Aztertu bere dimentsioa eta eman oinarri bat.

Agerikoa da edozein $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrize honela jar daitekeela:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eta ondorioz, lau matrize horiek

$M_{2.2}$ espazioaren sistema sortzaile bat osatzen dute. Gainera,

$$a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = b = c = d = 0$$

beraz, sistema askea da. Ondorioz, oinarri bat osatzen dute (4 dimentsiokoa). Oinarri horri oinarri kanoniko deritzo.

4.4. DEFINIZIOA: **Biderketa** aplikazio linealetan egin zen bezala definitzen da. Izan bitez $F = (\alpha_{ij}) \in M_{p.n}$ eta $G = (\beta_{ij}) \in M_{m.p}$; orduan, $G.F = \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_{ik}.\alpha_{kj} \right) \in M_{m.n}$ izango da.

Hau da,

$$F = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}_{p.n} \quad \text{eta} \quad G = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mp} \end{pmatrix}_{m.p} \quad \text{badira,}$$

$$G.F = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} \beta_{1i}.\alpha_{i1} & \sum_{i=1}^{p} \beta_{1i}.\alpha_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{p} \beta_{1i}.\alpha_{in} \\ \sum_{i=1}^{p} \beta_{2i}.\alpha_{i1} & \sum_{i=1}^{p} \beta_{2i}.\alpha_{i2} & & \sum_{i=1}^{p} \beta_{2i}.\alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} \beta_{mi}.\alpha_{i1} & \cdots & \cdots & \sum \beta_{mi}.\alpha_{in} \end{pmatrix}_{m.n} \quad \text{izango da.}$$

Kontuan hartu biderketa gauzatzeko lehenengo matrizearen zutabe-kopuruak eta bigarrenaren errenkada-kopuruak berdinak izan behar dutela.

Bistan denez, A eta B matrizeen arteko biderketa edozein ordenatan egiteko, horiek karratuak eta orden berekoak izan beharko dute. Kasu horretan ere AB eta BA biderkadurek ez dute zertan berdinak izan.

Propietateak: (ariketa gisa uzten da propietate hauek frogatzea)

- (A.B).C = A.(B.C)
- (A + B).C = A.B + A.C
- C.(A + B) = C.A + C.B
- k.(A.B) = (k.A).B = A.(k.B)

4.3. M_n (K) MATRIZE KARRATUEN ERAZTUNA

Matrize karratuen bektore-espazioan biderketa barne-eragiketa da, $F_n.G_n$ biderkadura matrize karratua ere bai baita (n ordenakoa) eta $M_n(K)$-ren barnean baitago. Ondorioz, multzo honetan bi barne-eragiketa daude eta ondoko hauek betetzen dira:

- (M_n, +) talde abeldarra da.
- (M_n, .) erditaldea da (elkartze-legea betetzen delako).
- biderketa banatzailea da batuketarekiko.

Ondorioz, *(M_n ; +, .) eraztun bat da*. Propietateak:

1.- Eraztun unitarioa da $I_n = (a_{ij})$ matrizea $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \quad \text{bada} \\ 0 & i \neq j \quad " \end{cases}$ moduan definitzen bada (I_n-ri **unitate matrize** edo **identitate matrize** deritzo), agerikoa da $A.I_n = I_n.A = A$ $\forall A \in M_n$ izango dela.

2.- Ez da abeldarra: oro har, $A.B \neq B.A$

adibidea: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ desberdinak dira.

A matrize karratu bati **p ordenako nilpotente** deitzen zaio p zenbakirik txikiena bada, non $A^p = 0$ den.

MATRIZE ERREGULARRAK

4.5. DEFINIZIOA: A matrize bat **erregularra** (alderanzgarria) dela esaten da A^{-1} matrize bat existitzen bada, non $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$ den (A^{-1} matrizeari A-ren alderantzizkoa deritzo)

Erregularrak ez direnei **singular** deritze. Erregularrentzat ondoko propietate hauek betetzen dira:

a) A eta B erregularrak badira, A.B ere erregularra izango da eta bere alderantzizkoa $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ izango da.
Frog.: $(A.B).(A.B)^{-1} = A.B.B^{-1}.A^{-1} = A.(B.B^{-1}).A^{-1} = A.I.A^{-1} = A.A^{-1} = I$
Modu berean, $(A.B)^{-1}.(A.B) = I$ izango da.

b) A.B erregularra bada, A eta B ere erregularrak izango dira, eta $A^{-1} = B.(A.B)^{-1}$ eta $B^{-1} = (A.B)^{-1}.A$ izango dira.

Frog. : $\left.\begin{array}{l} A.B.(A.B)^{-1} = A.B.B^{-1}.A^{-1} = A.I.A^{-1} = A.A^{-1} = I \\ \text{modu berean } B.(A.B)^{-1}.A = I \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} = B.(A.B)^{-1}$

adibidea: Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa.

Ebaz.: Izan bedi $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{pmatrix}$ bere alderantzizkoa.

Definizioa aplikatuz $A.A^{-1} = I$ beteko da; hau da,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \; a + m = 1,\ g = 1,\ p = 1,\ b + n = 0,\ c + p = 0,$$

$h = f = m = n = 0$, eta ondorioz, A^{-1} ondoko hau da:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ eta } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{egiazta daiteke.}$$

Oharra: A matrize baten alderantzizkoa kalkulatzeko prozedurak aurrerago ikusiko dira, argi baitago adibide honetan erabilitakoa ez dela batere komenigarria zenbait kasutan (zenbakiak hain errazak ez direnean edota ordena handitzen denean).

AZTARNA

4.6. DEFINIZIOA: Izan bedi $A = (a_{ij}) \in M_n$ matrize karratu bat. A matrizearen **aztarna** (eta trA idazten da) diagonal nagusiko elementuen batura da. Hau da: $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

4.1.TEOREMA: Izan bitez $A, B \in M_n$ eta $k \in K$; orduan, ondoko hauek beteko dira:

- $tr(A + B) = trA + trB$
- $tr(kA) = k.trA$
- $tr(AB) = tr(BA)$

Teorema hori frogatzea irakurlearen esku uzten da (nahikoa da definizioa erabiltzea).

4.1. KOROLARIOA: Izan bitez $A,B \in M_n$, non A erregularra den.
Orduan, $trB = tr(A^{-1}.B.A)$ izango da.

Frog.: Izan bedi $N = A^{-1}B$; orduan, $tr(A^{-1}.B.A) = tr(NA) = tr(AN) = tr(AA^{-1}B) = trB$ izango da.

adibidea: Kalkulatu $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen aztarna eta frogatu hori eta $A^{-1}.B.A$ matrizearen aztarna bera dela. (hartu A aurreko adibidetik).

Ebaz.: trB = 4. Kalkula dezagun orain $A^{-1}BA = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A^{-1}BA) = 4$

4.4. MATRIZEEN BALIOKIDETASUNA

MATRIZE BALIOKIDEAK

4.7. DEFINIZIOA: Demagun $A,B \in M_{m.n}$ (K). A eta B **baliokideak** direla esaten da $P \in M_n$, $Q \in M_m$ matrize karratu eta erregularrak existitzen badira, non $B = Q^{-1}.A.P$ betetzen den.

4.1. PROPOSIZIOA: Definitutako erlazioa baliokidetasunekoa da.

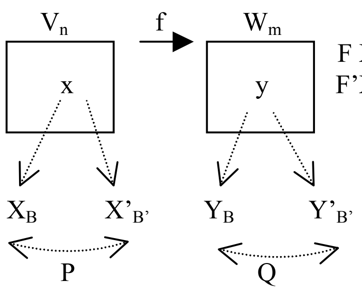
Frog.:
a) Erreflexiboa: $A = I_m^{-1}.A.I_n$ betetzen baita.

b) Simetrikoa: $B = Q^{-1}.A.P$ bada, $B.P^{-1} = Q^{-1}.A.P.P^{-1} \quad \Rightarrow \quad Q.B.P^{-1} = Q.Q^{-1}.A.P.P^{-1} = A$ izango da.

c) Iragankorra: $B = Q^{-1}.A.P$ eta $A = R^{-1}.C.S$ badira, $B = Q^{-1}.R^{-1}.C.S.P = (R.Q)^{-1}.C.(S.P)$ izango da, eta, beraz, A eta C baliokideak izango dira.

Interpretazioa: oinarri-aldaketari dagokion aplikazio lineal baten matrizearen aldaketa

Demagun $f: V_n \rightarrow W_m$ aplikazio lineala dela ($f(x) = y$, non $x \in V$, $y \in W$). Bi oinarri finkatzen badira, $B_v = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ V-koa eta $B_W = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ W-koa, eta $F = (a_{ij})$ bada f aplikazioari dagokion matrizea, oinarri horietan x bektore baten irudia $F X = Y$ izango da, non X eta Y diren x eta y-ri oinarri horietan dagozkien zutabe-bektoreak.



$F X = Y$
$F'X' = Y'$

Beste bi oinarri hartzen badira, $B'_V = \{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ eta $B'_W = \{w_1', w'_2, ..., w'_m\}$, orduan f aplikazioari eta x,y bektoreei F', X' eta Y' matrizeak egokituko zaizkie eta $F'.X' = Y'$ jarri ahal izango da. Baina badakigu espazio bakoitzeko oinarri-aldaketa bakoitzari matrize bat dagokiola eta P eta Q badira, orduan: $X = P.X'$ eta $Y = Q.Y'$.

Beraz, $F.X = Y \Rightarrow F.P.X' = Q.Y' \Rightarrow Y' = Q^{-1} F P X' = F'.X' \Rightarrow F' = Q^{-1} F P$

Eta honakoa azpimarratu behar da: bi matrize baliokideak badira, f aplikazio lineal bati lotuta daudela oinarri desberdinetan. Hori egiaztatzeko nahikoa da aurreko arrazoiketa ikustea eta alderantziz egitea.

adibidea: Demagun $f : R^2 \rightarrow R^3$ aplikazioa $f(x,y) = (x, 2x, x + 2y)$ dela. Kontsidera dezagun F f-ren matrizea dela bi espazioko oinarri kanonikoekiko eta G f-ri dagokiona beste B eta B' oinarri hauekiko: $B = \{(1,1),(-1,0)\}$ eta $B' = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$. Egiaztatu $G = Q^{-1} F P$ betetzen dela, P eta Q espazio bakoitzeko oinarri-aldaketaren matrizeak izanik.

Ebaz.:

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0) = (1,2,1) \\ f(0,1) = (0,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} f(1,1) = (1,2,3) = x.(1,1,1) + y.(1,1,0) + z.(1,0,0) \\ f(-1,0) = (-1,-2,-1) = r.(1,1,1) + s.(1,1,0) + t.(1,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ll} x = 3 & r = -1 \\ y = -1 & s = -1 \\ z = -1 & t = 1 \end{array} \qquad \text{eta ondorioz, } G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

P eta Q kalkulatzea erraza da: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Q^{-1} kalkulatzeko $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ eta $e_3 = (0,0,1)$ bektoreak $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ eta $v_3 = (1,0,0)$ bektoreen arabera jarri beharko dira:

$$\begin{array}{l} v_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ v_2 = e_1 + e_2 \\ v_3 = e_1 \end{array} \quad \text{Ondorioz,} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} e_1 = v_3 \\ e_2 = v_2 - v_3 \\ e_3 = v_1 - v_2 \end{array} \Rightarrow \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

eta $Q^{-1} F P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = G$ egiaztatzen da.

M_n espazioan bi matrizeren baliokidetasuna egin nahi bada, oinarri-aldaketa bakar bati lotzen zaio, ikusiko den bezala matrize bakoitza V_n-ko endomorfismo bati lotzen baita. Antzekotasuna deitzen zaio sortzen den erlazioari.

MATRIZEEN ANTZEKOTASUNA

4.8. DEFINIZIOA: Demagun $F,G \in M_n(K)$, hots, bi matrize karratu direla. **Antzekoak** direla esaten da $P \in M_n(K)$ matrize erregularra existitzen bada, non $G = P^{-1}.F.P$ den.

Bistan denez, matrizeen antzekotasuna baliokidetasun-kasu berezi bat da eta bistan dago baliokidetasun-erlazioa dela.

Horren interpretazioa agerian gelditzen da $f : V_n \to V_n$ aplikazio lineala (endomorfismoa) kontsideratzen bada. Izan bitez $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ oinarri bat eta F f-ri B oinarrian dagokion matrizea. Orduan, $v \in V$ bektorearen irudia $w \in V$ bada, $w = F.v$ jarri ahal izango da (baldin eta suposatzen bada v, w zutabe-bektore bezala daudela).

Izan bedi $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ beste oinarri bat. Ikusi dugu jada oinarri--aldaketa hori P matrize baten bidez adierazi ahal dela. Orduan, f-ri eta v eta w bektoreei, hurrenez hurren, dagozkien matrizeak oinarri horrekiko G, v' eta w' badira, honako hauek beteko dira:

$w' = G.v'$ (*) alde batetik eta $v = P.v'$ $w = P.w'$ bestetik. Ondorioz,

$w = F.v \Rightarrow P.w' = F.P.v' \Rightarrow w' = P^{-1}.F.P.v$ eta (*)-rekin konparatuz $\Rightarrow G = P^{-1}.F.P.$

adibidea: Izan bitez $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ eta $B' = \{e'_1 = (1,1), e'_2 = (-1,0)\}$ R^2-ko bi oinarriak eta izan bedi $f(x,y) = (x, x - y)$ endomorfismoa. F, G, P eta P^{-1} matrizeak kalkulatuko ditugu $G = P^{-1}.F.P$ erlazioa egiaztatzeko.

$$\left.\begin{aligned} f(1,0) &= (1,1) \\ f(0,1) &= (0,-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ da f-ren matrizea B oinarriarekiko eta

$$\left.\begin{aligned} f(1,1) &= (1,0) = -e'_2 \\ f(-1,0) &= (-1,-1) = -e'_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ izango da B'-rekikoa.

v bektorearen koordenatuak B-rekiko (x,y) badira eta (x',y') B'-rekikoak, ondokoa beteko da:

$$x.e_1 + y.e_2 = x'.e'_1 + y'.e'_2 \Rightarrow (x,y) = x'.(1,1) + y'.(-1,0) \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= x' - y' \\ y &= x' \end{aligned}\right\}$$ eta ondorioz,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

P^{-1} kalkulatzeko x', y' x, y-ren arabera jarriko dira: $\left.\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x + y \end{aligned}\right\} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

eta: $P^{-1}.F.P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$ G betetzen da.

Matrizeen antzekotasunaren propietateak:

1. $P^{-1}(A + B)P = P^{-1}AP + P^{-1}BP$
2. $P^{-1}(k.A)P = k.(P^{-1}AP)$
3. $P^{-1}(A.B)P = (P^{-1}AP).(P^{-1}BP)$
4. $P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1}$

propietate horiek aplikazio linealen propietatetik ondorioztatzen dira.

4.2. PROPOSIZIOA: A eta B antzeko bi matrize badira, trA = trB betetzen da.

Frog.: A eta B antzekoak badira P matrize erregular bat existitzen da, non $A = P^{-1}BP$ den. 4.1 korolarioaren arabera, $trA = tr(P^{-1}BP) = trB$.

Oharra: kontuan izan elkarrekikoa ez dela nahitaez bete behar.

4.5. MATRIZE IRAULIA

4.9. DEFINIZIOA: $A = (a_{ij})$ m.n ordenako matrize baten **iraulia** $A^T = (b_{ij})$ n,m matrizea da, non $b_{ij} = a_{ji}$ den $\forall i,j$.

Hots, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m.n}$ bada, $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n.m}$ izango da.

Propietateak (laugarrena bakarrik frogatuko da):

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(k.A)^T = k.A^T$
4. $(A.B)^T = B^T . A^T$

Frog.: Izan bitez $A = (a_{ij})_{m.n}$, $B = (b_{ij})_{n.p}$, $A.B = (c_{ij})_{m.p}$, $(A.B)^T = (h_{ij})_{p.m}$ eta $B^T.A^T = (g_{ij})_{p.m}$.

Orduan, $h_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} . b_{ki} = g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} . a_{jk}$ izango da.

4.3. PROPOSIZIOA: A erregularra bada, A^T ere erregularra da, eta gainera, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ izango da.

Frog.: A erregularra bada, A^{-1} existitzen da, eta $(A^{-1})^T .A^T = (A.A^{-1})^T = I^T = I$ izango da.

4.4. PROPOSIZIOA: Bi matrize A eta B baliokideak badira, hau da, $B = Q^{-1} A P$ bada, beraien irauliak ere baliokideak izango dira, eta $B^T = P^T A^T (Q^T)^{-1}$ izango da.

Frog.: Demagun $B = Q^{-1} A P$ dela, eta P eta Q erregularrak direla. Orduan, $B^T = P^T A^T (Q^{-1})^T = P^T A^T (Q^T)^{-1}$ izango da. Beraz, B^T eta A^T baliokideak dira (bi matrize erregularrak, P^T eta Q^T (P eta Q erregularrak baitira), existitzen direlako).

4.5. PROPOSIZIOA: Bi matrize karratu antzekoak badira, hau da $B = P^{-1} A P$, beraien irauliak ere antzekoak izango dira eta $B^T = P^T A^T (P^T)^{-1}$.

Frog.: Demagun $B = P^{-1} A P$ dela eta P erregularra dela. Orduan, $B^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^T)^{-1}$ izango da, eta ondorioz, B^T eta A^T antzekoak dira.

MATRIZE SIMETRIKOAK ETA ANTISIMETRIKOAK

Esan genuen bezala, A matrizea simetrikoa da $A = A^T$ gertatzen bada, eta antisimetrikoa $A = - A^T$ gertatzen bada. Agerikoa da $A + A^T$ matrizea simetrikoa dela (zeren eta $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$ baita) eta $A - A^T$ antisimetrikoa. Edozein matrize bi matrizeen arteko batuketa batean deskonposa daiteke, non bata simetrikoa eta bestea antisimetrikoa diren:

$$A = (A + A^T) / 2 + (A - A^T) / 2$$

Gainera, aldi berean simetrikoa eta antisimetrikoa den matrize bakarra matrize nulua da (zeren eta $A + A^T = 0$ baita $\Rightarrow A + A = 0 \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow A = 0$), eta hartara, $M_n (K)$ espazioko simetrikoaz eta antisimetrikoaz osatutako azpiespazioak betegarriak direla esan genezake (Ikus 52. or.). Ondorioz, egin dugun deskonposizioa egin daitekeen bakarra da.

4.6. MATRIZE BATEN HEINA

Orain arte heina hitza bi testuingurutan atera zaigu. Alde batetik, bektore-sistema baten heina sistema horren bektore independenteen kopurua zen (edo sortzen duten espazioaren dimentsioa). Bestetik, $f : V \to W$ aplikazio linealearen heina Im f espazioaren dimentsioa zen.

$A_{m.n} = (a_{ij})$ matrizeko errenkadak K^n espazioaren bektoreak izango balira bezala kontsidera daitezke ($a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n})$ esate baterako). Modu berean, zutabeak K^m espazioko bektoreak dira.

A matrizearen *errenkada-heina* (r izendatuko dugu) errenkada-bektoreen sistemaren heina da.

Agerikoa da $r \leq m$ izango dela, gehienez m baitaude, eta gainera, $r \leq n$ izango da, sortzen duten espazioa K^n-ren barruan baitago eta ezin da horren dimentsioa baino handiagoa izan.

A matrizearen *zutabe-heina* (r' izendatuko dugu): zutabe-bektoreen sistemaren heina da eta, lehen bezala, r' ezin da n eta m baino handiagoa izan.

4.2. TEOREMA: A eta A' matrizeak baliokideak badira, haien zutabe-heinak (baita errenkadetakoak ere) berdinak dira.

Frog.: Izan bedi $f : K^n \to K^m$ aplikazio lineala eta $A_{m.n}$ dagokion matrizea $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ eta $B' = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ oinarriekiko.
Izan bedi $f (e_i) = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$, hots, A-ko i-garren zutabea. Zutabe-heina $\{f (e_1), f(e_2), ..., f (e_n)\}$ bektore-sistemaren heina izango da. Baina horiek Im f-ren sistema sortzailea dira, eta ondorioz, bere heina Im f-ren dimentsioa izango da (hots, f-ko heina). Gauza bera beste bi oinarri desberdin hartzen badira A'-ko zutabeekin. Hau da, Imf-ren dimentsioa ez dago hautatutako oinarrien mende. Beraz, A eta A' matrizeen zutabe-heina berdinak izango dira.

4.3. TEOREMA: $A_{m.n} = (a_{ij})$ matrizearen zutabe-heina r bada, baliokidea izango da $M = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ matrizearekiko (non I_r r ordenako matrize-unitatea den).

Frog.: Demagun $f : K^n \to K^m$ dela A matrizeari dagokion aplikazio lineala. Bere heina r denez, bere nukleoaren dimentsioa n - r izango da (zeren eta dim K^n = dim Ker f + dim Im f baita). Beraz, oinarri bat $B = \{e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n\}$ existituko da, non $e_{r+1}, ...,$ e_n bektoreak Ker f -koak diren, eta ondorioz, $f (e_{r+1}) = ... = f (e_n) = o$.

Kasu honetan $v_1 = f(e_1)$, $v_2 = f(e_2)$, ..., $v_r = f(e_r)$ bektoreek Imf espazioaren sistema sortzailea osatzen dute, eta K^m espazioan beste bektore batzuk v_{r+1}, ..., v_m existituko dira, zeinentzat $B' = \{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_m\}$ K^m-ko oinarri bat den.

B eta B' oinarriekiko f-ren matrizea honako hau da:

$$\begin{array}{l} f(e_1) = v_1 \\ f(e_2) = \quad v_2 \\ .... \\ f(e_r) = \qquad\qquad\qquad v_r \\ \\ f(e_{r+1}) = o \\ .... \\ f(e_n) = \quad o \end{array} \quad \Rightarrow \quad M = \begin{array}{c@{}c} & \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}}^{r} \\ \begin{array}{c} r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Ondorioz, A eta M f-ren matrizeak dira bi oinarri-sistema desberdinekiko, eta baliokideak dira.

Oharra: *Kontuan izan egindako frogapena irudi-espazioan (K^m) hartutako oinarrian oinarritu dela eta ezin dela gauza bera egin $K^m = K^n$ baldin bada. Hots, egindakoak ez du balio matrize karratuentzat (hemen ez daude bi oinarri desberdin espazio bakoitzean, espazio bera baita). Beste era batera esanda, ez dago ziurtatuta edozein matrize karraturentzat diagonal antzeko bat aurki dezakegula. Hau, hain zuzen ere, bederatzigarren kapituluan aztertuko da.*

4.4. TEOREMA: $A_{m.n} = (a_{ij})$ matrizearen errenkada-heina s bada, baliokidea da $M = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearekiko (non I_s s ordenako unitate matrizea den).

Frog.: Aurreko teoremaren arabera A^T zutabe-heina s delako existitzen da $M = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrize baliokidea, eta ondorioz, existitzen dira P eta Q erregularrak, zeinentzat $A^T_{n.m} = Q^{-1}_n M_{n.m} P_m$ betetzen den. Bi atalen iraulia egiten bada:

$(A^T)^T = (Q^{-1}_n M_{n.m} P_m)^T \Rightarrow A = P^T.M^T (Q^{-1})^T \Rightarrow A = P^T.M^T (Q^T)^{-1} \Rightarrow M^T = (P^T)^{-1} A\, Q^T$ hots, M^T eta A baliokideak dira. M^T-ren heina s denez, (4.2. teorema) A-ren zutabe--heinak s ere izan beharko du. Ondorioz, A eta M baliokideak dira.

4.5. TEOREMA: Edozein matrizerentzat bere errenkada-heina eta zutabe-heina berdinak dira. (ondorioz, heina A = heina A^T)

Frog.: Demagun r eta s direla A-ren zutabe-heina eta errenkada-heina, hurrenez hurren. Aurreko bi teoremen arabera A baliokidea da $\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizeekiko eta baliokidetasun-erlazioak lege iragankorra betetzen duenez, bi matrize horiek ere baliokideak izango dira. Beraz, beraien zutabe-heinek berdinak izan beharko dute. Lehenengoarena s eta bigarrenarena r direnez $r = s$ ondorioztatzen da.

MATRIZE BATEN HEINA: Hemendik aurrera matrizeetan heina bakarrik esango da (eta ez errenkada-heina edo zutabe-heina) eta he A idatziko da.

4.2. KOROLARIOA: Izan bitez $A,B \in M_{n.m}(K)$. A eta B baliokideak izango dira, baldin eta soilik baldin beren heinak berdinak badira.

Frog:: Izan bitez he $A = r$ eta he $B = s$. Hartara, baliokideak dira, hurrenez hurren, $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizeekiko. Baina A eta B baliokideak direnez, hauek ere baliokideak izango dira (lege iragankorrarengatik). Baina badakigu hauek baliokideak direla, baldin eta soilik baldin $r = s$ bada.

HEIN BIDEZKO SAILKAPENA

Ikusi dugun bezala $M_{n.m}(K)$ multzoko matrizeen arteko baliokidetasun-erlazioa heinaren bitartez karakterizatuta gelditzen da. Baliokideak diren matrizeek hein bera dute eta heina $\leq \min(n,m) = k$ denez, $k + 1$ klase daudela esan daiteke, zero heina ere existitzen dela kontsideratzen bada (zero matrizearena).

$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizeari klase bakoitzeko ordezkari kanoniko deritzo.

4.6. TEOREMA: $A \in M_n(K)$ matrize karratua erregularra da $\Leftrightarrow$ he $A = n$

Frog.: $\Rightarrow$ A erregularra bada, K^n-ko oinarri batean berari dagokion f_A aplikazio lineala supraiektiboa da, hots, $f_A(K^n) = K^n$. Ondorioz, he $A =$ he $f = \dim f(K^n) = \dim K^n = n$.
$\Leftarrow$ he $A = n$ bada, he $f_A = \dim f(K^n) = n$ izango da, eta ondorioz, f supra da eta K^n -ren dimentsioa n denez, injektiboa ere izango da. Beraz, erregularra da.

4.3. KOROLARIOA: $A \in M_n(K)$ matrize karratua erregularra izango da $\Leftrightarrow$ bere zutabe-bektoreak (errenkada-bektoreak) independenteak badira.

4.7. OINARRIZKO ERAGIKETAK MATRIZEETAN

$\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ bektore-sistema baten heina ez da aldatzen ondoko aldaketa hauek egiten badira:

- *bi bektoreren arteko trukaketa*
- *u_i bektorea $\alpha.u_i$ bektoreaz ordezkatzea ($\alpha \neq 0$)*
- *u_i bektorea $u_i + k.u_j$ bektoreaz ordezkatzea*

Matrize baten zutabeak (edo errenkadak; hemendik aurrera zutabeei dagozkien propietateak errenkadei ere badagozkiela onartuko dugu) bektoreak direnez, aurreko eragiketak egiten zaizkienean **oinarrizko eragiketak** egiten zaizkiela esango da eta matrizearen heina ez da aldatuko. Hori aprobetxatuko da bai matrizeen heina kalkulatzeko baita alderantzizko matrizea kalkulatzeko ere.

4.8. HEINAREN KALKULUA

$A = (a_{ij})_{n.m}$ matrizearen heina kalkulatzeko ondoko eragiketak egingo dira:

($n \leq m$ dela suposatuko dugu. Alderantziz balitz, A^T-ren heina egingo litzateke)

1. $a_{11} = 0$ bada lehenengo errenkada, $a_{i1} \neq 0$ duen i-garren errenkadarekin trukatzen da, eta (1,1) tokian zero ez dagoen matrizean ondoko pausoak ematen dira (lehenengo zutabeko gai guztiak zero badira ken dezakegu, zero zutabeak ez baitu heina handituko, eta bigarren zutabearekin prozesu bera egingo litzateke).

2. $a_{j1} \neq 0$ duen errenkadan $- a_{11} / a_{j1}$ zenbakiaz biderketa eginez eta lehenengo errenkada batuz, (j,1) tokiko gaia zero izango da. Lehenengo zutabeko zero ez diren elementuekin prozesu hori errepikatuz, ondoko matrize baliokide hau aterako da:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}_{n.m}$$

3. $\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$ azpimatrizeko lehenengo zutabean 2. pausoan egindakoa

errepikatzen da $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2m} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$ matrizea ateratzeko.

prozesu hori diagonal nagusiaren azpiko gai guztiak zero egin arte errepikatzen da eta bukaeran honako matrize hau geldituko da:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} & d_{1r+1} & \cdots & d_{1m} \\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{2r} & d_{2r+1} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & d_{rr+1} & \cdots & d_{rm} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrize honen heina r izango da, zero errenkada-bektoreek ez baitute heina ematen.

Gauza bera egin daiteke, adierazitakoa zutabeei aplikatu beharrean errenkadei aplikatuta.

adibidea: Kalkulatu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

1. Errenkadei E_1, E_2 eta E_3 deitzen bazaie, lehenengo zutabean zeroak egiteko ondoko bi oinarrizko eragiketak egingo ditugu:

- E_2 ordezkatuko dugu $2.E_2 - E_1$ bektorearekin
- E_3 ordezkatuko dugu $2.E_2 + E_1$ bektorearekin

2. Gero 2. zutabean zeroak (bat) egiteko $E_3 - E_2$ egingo dugu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{2:2.E_2-E_1 \\ 3:2.E_3+E_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3:E_3-E_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ eta}$$

ondorioz, matrize horren heina 2 izango da.

4.9. ALDERANTZIZKO MATRIZEAREN KALKULUA

4.6. PROPOSIZIOA: A matrize karratu bati egindako E oinarrizko eragiketa E(A) eran adierazten bada, E(A) = E(I).A egiaztatzen da (I matrize unitatea da)

Frog.: Frogapena egingo da E eragiketaren hiru kasuetarako:

a) E eragiketa *trukaketa denean*: i eta j-garren errenkadak trukatzen badira:

$$E(I).A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} . \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = E(A)$$

b) E eragiketa *i-garren errenkada bider k eskalarraz* egiten denean:

$$E(I).A = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k.a_{i1} & \dots & k.a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = E(A)$$

c) E eragiketa i-garren errenkadari k aldiz j-garrena gehitzen zaionean:

$$E(I).A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} . \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \dots & a_{in}+ka_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = E(A)$$

4.7. PROPOSIZIOA: Izan bitez $E_1, E_2, \dots\dots, E_n$ A matrize batean egindako oinarrizko eragiketak.
$E_n (E_{n-1} (\dots\dots E_2 (E_1 (A))\dots)) = I$ egiaztatzen bada, $A^{-1} = E_n (E_{n-1} (\dots\dots E_2 (E_1 (I))\dots)$ betetzen da.

Frog.: Demagun bi eragiketak (E_1 eta E_2) behar direla A matrizetik I matrizera pasatzeko, hots $E_2 (E_1 (A)) = I$ dela. Frogatu nahi da $A^{-1} = E_2 (E_1 (I))$ dela. Aurreko proposizioaren arabera badakigu $E_1 (A) = E_1 (I).A$ dela, eta ondorioz, $E_2 (E_1 (I).A) = I$ da $\Rightarrow E_2 (I).E_1 (I).A = I \Rightarrow A^{-1} = E_2 (I).E_1 (I)$ eta bi matrize horien arteko biderketa konposizioaren matrizea da, hots, $A^{-1} = E_2 (E_1 (A)$.
Prozesua errepikatu egingo litzateke n eragiketa behar badira identitatera iristeko.
Prozesu hori gauzatzeko, praktikan, A matrizea eta identitatea elkarrekin jartzen dira eta A matrizean egiten den eragiketa bakoitza I matrizean ere egin egiten da aldi berean A identitate matrize bilakatu arte.

adibidea: Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa.

Ebaz.: Pauso bakoitzean egindako eragiketak jarriko dira aurrean. E1, E2 eta E3 hiru lerroak dira eta aurrean parentesian adieraziko da zein errenkadatan ari garen:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2{:}\,E2-3.E1 \\ 3{:}\,E3-E1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) 3{:}\,2E3-E2 \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2{:}\,2E2+E3 \\ 1{:}\,4E1-E3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 4 & -4 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow 1{:}2E1+E2$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1{:}\,E1/8 \\ 2{:}\,E2/8 \Rightarrow \\ 3{:}\,E3/8 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1/8 & 3/8 & -2/8 \\ 0 & 1 & 0 & -5/8 & 1/8 & 2/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & -1/8 & 2/8 \end{array}\right) \text{eta}$$

ondorioz, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/8 & -2/8 \\ -5/8 & 1/8 & 2/8 \\ 1/8 & -1/8 & 2/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}.\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1}.A = I$ dela egiazta dezakegu:

$$\frac{1}{8}.\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

modu berean froga daiteke $A.A^{-1}$ ere I dela.

EBATZITAKO ARIKETAK

1. Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *eta* $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *matrizeak. Kalkulatu X matrizea* $A.(X-2I) = AB + A^3$ *betetzen bada.*

Ebaz.: A matrizea erregularra da, bere heina 2 baita; beraz, A^{-1} existitzen da eta bider matrize hori, ezkerreko albotik, egin ahal da:

$$A^{-1}.A.(X - 2I) = A^{-1}.(AB + A^3) \Rightarrow X - 2I = B + A^2 \Rightarrow X = B + A^2 + 2I \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Frogatu n ordenako edozein matrize, simetrikoa eta antisimetrikoa diren bi matrizeren arteko batura bezala adieraz daitekeela. Aplikatu ondoko A matrizeari:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ebaz.: Izan bedi A n ordenako matrize bat. Demagun $A = S + R$ jartzen dugula, non S simetrikoa (hau da, $S^T = S$) eta R antisimetrikoa ($R^T = -R$) diren.

$A^T = (S + R)^T = S^T + R^T = S - R$ eta $\left.\begin{array}{l} A = S + R \\ A^T = S - R \end{array}\right\}$ sistema ebazten bada, S eta R hauek izango dira: $S = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$ eta $R = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$.

Emandako matrizean: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -4 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrizea. Kalkulatu* A^n *kontuan izanik* $A - I$ *matrizea nilpotentea dela.*

Ebaz.: Froga dezagun A – I nilpotentea dela:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Beraz, 3 ordenako nilpotentea da.

$B = A - I$ egiten bada: $A^n = (B + I)^n = \binom{n}{0} . B^n + \binom{n}{1} B^{n-1} . I + \binom{n}{2} B^{n-2} . I^2 + \ldots\ldots. +$
$\binom{n}{2} B^2 . I^{n-2} + \binom{n}{1} B . I^{n-1} + \binom{n}{0} . I^n$ eta B^n zero da $n > 2$ den kasu guztietan:

$$A^n = \frac{n.(n-1)}{2} . B^2 + n.B + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n.(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n.(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Kontsidera dezagun 2 ordenako matrize-multzoaren $S = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} / \ a,b,c \in R \}$ *azpimultzoa (matrize simetrikoak). Frogatu bektore-azpiespazioa dela.*

Ebaz.: 2 ordenako matrize karratuek bektore-espazioa eratzen dutela badakigunez, nahikoa izango da S bere azpiespazioa dela egiaztatzea.

$$\alpha . \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} - \beta . \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - \beta a' & \alpha b - \beta b' \\ \alpha b - \beta b' & \alpha c - \beta c' \end{pmatrix}$$ eta hau S-koa denez, egiaztatuta dago.

5. Izan bitez R eta S bektore-azpiespazio hauek:

$$S = \{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ b & b & c \end{pmatrix} / \ a,b,c \in R \} \ \ eta \ R = \{ \begin{pmatrix} m & n & n \\ m & n & n \\ m & n & 2n \end{pmatrix} / \ m,n \in R \}.$$

Kalkulatu oinarri bat S, R, $S \cap R$ *eta* $S+R$ *azpiespazioentzat.*

Ebaz.: Lehenengoz, S eta R matrizeen sistema sortzaileak aterako dira:

- S : $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ b & b & c \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eta hiru matrize hauek S-ko oinarri bat eratzen dute (bere dimentsioa, beraz, 3 da).

- R : $\begin{pmatrix} m & n & n \\ m & n & n \\ m & n & 2n \end{pmatrix} = m.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta bi matrize hauek R-ko oinarri bat eratzen dute (dim R = 2).

- S∩R: matrize batek, ebakidurakoa izateko, bietan egon behar du eta hori beteko da $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ b & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n & n \\ m & n & n \\ m & n & 2n \end{pmatrix}$ gertatzen denean. Hemendik sistema bat sortzen da:

a = m , a = n , b = n, b = m , c = 2n. Beraz, S∩R = $\left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & 2a \end{pmatrix} / a \in R \right\}$ eta bere oinarri bat $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea da (dim S∩R = 1).

- S+R: bere dimentsioa jakiteko kontuan hartu dim S + dim R = dim (S∩R) + dim (S+R) betetzen dela. Beraz, dim (S+R) = 3 + 2 – 1 = 4. Bere oinarria kalkulatzeko kontuan hartu S eta R-ko oinarrietan aurkitu diren bost matrizeek (S+R)-ko sistema sortzaile bat eratzen dutela. Baina (S + R)-ko dimentsioa 4 denez, linealki mendekoak dira, hau da, a, b, c, d, e eskalarrak (zero ez direnak) existitzen dira, non:

$$a.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{den,}$$

eta hemendik a = d, a = e, 0 = b + e, 0 = b + d, 0 = c + 2e ⇒ d = a, e = a, b = -a, c = -2a, eta argi dago a = 1 hartzen bada, esate baterako, lehenengo matrizea lau horien konbinazio lineala izango dela. Ondorioz, lau matrize horiek (S + R)-ko oinarri bat eratzen dute.

6. *Izan bedi* $S = \{\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & 2a & 2b \end{pmatrix} / a,b \in R\}$ M_{2x3}*-ko bektore-azpiespazioa.*

a) *Kalkulatu bere oinarri bat*
b) *Frogatu S espazioa isomorfoa dela* R^2 *espazioarekiko.*
c) *Izan bedi* $B = \{e_1, e_2\}$ *aurkitutako oinarria eta izan bitez* $M= (2,-3)_B$ *eta* $N = (1,4)_B$ *bi matrizeak. Kalkulatu* $2M – 3N$ *matrizea.*

Ebaz.: a) $\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & 2a & 2b \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ondorioz, S-ko oinarri bat $B = \{e_1\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, e_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\}$ izango da.

b) S eta R^2 espazioen arteko $f\left(\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & 2a & 2b \end{pmatrix}\right) = (a,b)$ isomorfismoa defini daiteke, non matrize bakoitzari bere koordenatuak B oinarriarekiko egokitzen zaizkion. Orain, homomorfismoa dela ikusiko dugu:

$f\left(m\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & 2a & 2b \end{pmatrix} + n.\begin{pmatrix} a' & a' & 0 \\ b' & 2a' & 2b' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} ma+na' & ma+na' & 0 \\ mb+nb' & 2ma+2na' & 2mb+2nb' \end{pmatrix}\right) =$
$(ma + na’,mb + nb’)=$ $(ma, mb)+ (na’, nb’) =m.(a,b)+ n.(a’,b’)$ $=$ $m.f\left(\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & 2a & 2b \end{pmatrix}\right)$
$+ n.f\left(\begin{pmatrix} a' & a' & 0 \\ b' & 2a' & 2b' \end{pmatrix}\right)$, beraz, homomorfismoa da.

Injektiboa da, zeren eta $f\left(\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & 2a & 2b \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a' & a' & 0 \\ b' & 2a' & 2b' \end{pmatrix}\right)$ bada, $(a,b) = (a’,b’)$ izango da. Ondorioz, $a = a’$ eta $b = b’$.
Supraiektiboa dela agerikoa da.

$M = (2,-3)_B$ eta $N = (1,4)_B$ matrizeak izanik, $X = 2M – 3N$ matrizea kalkulatzeko nahikoa da R^2-an eragitea (isomorfoak baitira): $X = 2.(2,-3) - 3.(1,4) = (1,-18)$ eta era matrizealean $x = (1,-18)_B = 1.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 18.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -18 & 2 & -36 \end{pmatrix}$

7. Izan bitez $f : R^2 \to R^4$ *homomorfismo hau:* $f(x,y) = (2x, - y, 3x + 4y, 3y)$. *Izan bitez* $B = \{u_1 (1,3), u_2 (2,-1)\}$ *eta* $B’ = \{v_1 (1,1,1,1), v_2 (1,1,1,0), v_3 (1,1,0,0), v_4 (1,0,0,0)\}$ R^2 *eta* R^4 *espazioen oinarriak.*

a) Kalkulatu f-ren F matrizea bi espazioko oinarri kanonikoekiko *b) Kalkulatu f-ren F' matrizea B et B'oinarriekiko*

c) *Izan bedi x = (2,4) bektorea. Kalkulatu bere irudia F eta F' matrizeak erabiliz eta egiaztatu emaitza bera dela.*

d) *Frogatu F eta F' baliokideak direla eta aurkitu Q eta P matrizeak, non F' = Q^{-1}.F.P den.*

Ebaz.: a) f (1,0) = (2,0,3,0) eta f (0,1) = (0,-1,4,3), eta ondorioz, F = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) f (u_1) = f (1,3) = (2,-3,15,9) = a(1,1,1,1) + b(1,1,1,0) + c(1,1,0,0) + d(1,0,0,0) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = a+b+c+d \\ -3 = a+b+c \\ 15 = a+b \\ 9 = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = 9,\ b = 6,\ c = -18,\ d = 5 \Rightarrow f(u_1) = (9,6,-18,5)_{B'}$$

f(u_2) = f (2,-1) = (4,1,2,-3) = a(1,1,1,1) + b(1,1,1,0) + c(1,1,0,0) + d(1,0,0,0) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 4 = a+b+c+d \\ 1 = a+b+c \\ 2 = a+b \\ -3 = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = -3,\ b = 5,\ c = -1,\ d = 3 \Rightarrow f(u_2) = (-3,5,-1,3)_{B'}$$ eta ondorioz,

f-ren matrizea B eta B' oinarriekiko F' = $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 5 \\ -18 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ da.

c) f(x) = f (2,4) = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}$ F matrizea aplikatuz. F' aplikatzeko x(2,4) bektorea B oinarrian adierazi behar da: (2,4) = a.(1,3) + b.(2,-1) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = a + 2b \\ 4 = 3a - b \end{array}\right\} \Rightarrow$ a = 10/7, b = 2/7, beraz, x (2,4) = x' (10/7, 2/7)$_B$ eta bere irudia F'.x'= $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 5 \\ -18 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -26 \\ 8 \end{pmatrix}$ eta B' oinarrian adierazita dago

Bektore hori F.x dela egiaztatzeko nahikoa da oinarri kanonikora eramatea:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -26 \\ 8 \end{pmatrix} = 12.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 26\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}$$ espero genuen bezala.

d) R^2 espazioan egindako oinarri-aldaketaren matrizea P = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ da (u_1=e_1 + 3e_2, u_2 = 2e_1 – e_2 baitira) eta R^4-an Q = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrize horren alderantzizkoa kalkula daiteke ondoko ekuazio sisteman e_i bektoreak v_i bektoreen mende jarriz:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ v_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ v_3 = e_1 + e_2 \\ v_4 = e_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad e_1 = v_4\,,\; e_2 = v_3 - v_4,\; e_3 = v_2 - v_3,\; e_4 = v_1 - v_2 \qquad \Rightarrow$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beraz: $F' = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 5 \\ -18 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1}.F.P$ betetzen da egiazta daiteken bezala. Ondorioz, F eta F' baliokideak dira.

8. Izan bedi $f : R^4 \rightarrow R^3$ $f(x,y,z,t) = (x + 2y,\ 2z + 4t,\ x - 3y + z)$ aplikazioa.

a) Kalkulatu f-ren F matrizea oinarri kanonikoekiko

b) Kalkulatu F-ren heina.

c) Kalkulatu Imf eta frogatu dim Imf = he F dela.

Ebaz.: a) f (1,0,0,0) = (1,0,1), f (0,1,0,0) = (2,0,-3), f (0,0,1,0) = (0,2,1), f (0,0,0,1) = (0,4,0), eta ondorioz, $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3:E3-E1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{trukatuz}]{\text{E3etaE2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ bere heina, beraz, 3 da.

c) $\operatorname{Im} f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2z+4t \\ x-3y+z \end{pmatrix} = x. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y. \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t. \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

horrek esan nahi du lau bektore horiek Im f-ko sistema sortzailea osatzen dutela (R^4-ko oinarri baten irudiak baitira). Agerian dago ez direla independenteak.

Har ditzagun lehenengo hiruak: a.(1,0,1) + b.(2,0,-3) + c.(0,2,1) = (0,0,0) $\Rightarrow$ a + 2b = 0, 2c = 0, a –3b + c = 0 $\Rightarrow$ a = b = c = 0. Ondorioz, sistema askea da, beraz, oinarri bat eratzen dute eta dim Im f = 3 = he F.

9. Izan bedi $f: R^4 \rightarrow R^4 \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *matrizearen bitartez definitutako endomorfismoa.*

a) Esan injektiboa ala supraiektiboa den.
b) Kalkulatu $Ker\,f$ *eta* Imf *eta beraien bi oinarri.*
c) Eraiki R^4*-ko* $B = \{u_1,u_2,v_3,v_4\}$ *oinarri bat, non* $\{u_1,u_2\}$ *nukleoko oinarri bat den, eta kalkulatu f-ren F' matrizea B oinarriarekiko.*
d) Kalkulatu oinarri-aldaketaren matrizea (P) eta egiaztatu $F' = P^{-1}.F.P$ *dela.*

Ebaz.: a) injektiboa den jakiteko nahikoa dugu matrizearen heina kalkulatzea, zeren eta He F = dim Imf = 4 bada soilik izango baita injektiboa.

Heina kalkulatzeko Gauss-en metodoa erabiliko da (oinarrizko eragiketak):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3:E3-E1 \\ 4:E4+E1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3:E3-E2 \\ 4:E4-E1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beraz, He F = 2, eta ondorioz, ez da injektiboa (ezta supraiektiboa ere).

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+z=0 \\ -y+3z+t=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad z = -2x, \quad t = y + 6x \quad \Rightarrow$$

Beraz, Ker f $=\{(x,y,-2x,y+6x)\ /\ x,y \in R\}$ da. Bere oinarri bat $\{u_1(1,0,-2,6), u_2(0,1,0,1)\}$ izan daiteke, zeren eta $(x,y,-2x,y+6x) = x.(1,0,-2,6) + y.(0,1,0,1)$ baita.

$$\text{Im f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+z \\ -y+3z+t \\ 2x-y+4z+t \\ -2x-y+2z+t \end{pmatrix} = x.\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ eta}$$

lau bektore horiek Imf-ren sistema sortzailea dira eta independenteak bi bakarrik direnez (dim Im f = 2 baita) lehenengo biak har daitezke.

c) R^4-ko oinarri bat Ker f-ko oinarria handituz eraikitzeko nahikoa da Ker f-tik kanpoko bi bektore independente hartzea: $v_3(1,0,0,0)$ eta $v_4(0,1,0,0)$ adibidez.

Orduan, f-ren matrizea B = {$u_1(1,0,-2,6)$, $u_2(0,1,0,1)$, $v_3(1,0,0,0)$, $v_4(0,1,0,0)$} oinarriarekiko kalkulatzeko, beraien irudiak kalkulatu behar dira eta B oinarrian bertan adierazi:

$$\begin{aligned}
f(u_1) &= f(1,0,-2,6) = (0,0,0,0)\\
f(u_2) &= f(0,1,0,1) = (0,0,0,0)\\
f(v_3) &= f(1,0,0,0) = (2,0,2,-2)\\
f(v_4) &= f(0,1,0,0) = (0,-1,-1,-1)
\end{aligned}$$

Baina irudi horiek B oinarrian jarri behar dira F' ateratzeko.

$$\begin{pmatrix}2\\0\\2\\-2\end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\6\end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2 = a + c\\ 0 = b + d\\ 2 = -2a\\ -2 = 6a + b\end{array}\right\} \Rightarrow \ a = -1,\ b = 4,\ c = 3,\ d = -4$$

ondorioz, $f(v_3) = -u_1 + 4u_2 + 3v_3 - 4v_4 = (-1,4,3,-4)_B$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\6\end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}0 = a + c\\ -1 = b + d\\ -1 = -2a\\ -1 = 6a + b\end{array}\right\} \Rightarrow a=1/2,\ b = -4,\ c = -1/2,\ d = 3$$

ondorioz, $f(v_4) = ½.u_1 - 4u_2 - ½.v_3 + 3v_4 = (1/2,-4,-1/2,3)_B$

Beraz, $F' = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 1/2\\ 0 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 3 & -1/2\\ 0 & 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$ izango da, oinarriaren irudiak matrizearen zutabeak baitira.

d) Oinarri-aldaketaren matrizea $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ da eta bere alderantzizkoa kalkulatzeko oinarrizko eragiketak errenkadetan egingo ditugu:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{3:E3+2E1 \\ 4:E4-6E1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4:E4-E2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4:E4+3E3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2:E2+E4 \\ 1:2E1-E3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1:E1/2 \\ 3:E3/2 \\ 4:E4.(-1)}} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

beraz, alderantzizko matrizea $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ da.

Erraz egiazta daiteke $F' = P^{-1}.F.P$ dela.

10. Biderkatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *eta* $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ *matrizeak blokeak erabiliz.*

Ebaz.: Blokeak hartzen dira zeroez osatuta daudenak kontsideratuz. Kasu honetan blokeak honela egin daitezke:

$$A = \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} M & N \\ \hdashline P & Q \end{array}\right) \text{ eta } B = \left(\begin{array}{ccc:cc} 4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -2 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} R & S \\ \hdashline T & F \end{array}\right)$$

$$\text{Beraz, } A.B = \left(\begin{array}{c:c} M & N \\ \hdashline P & Q \end{array}\right) . \left(\begin{array}{c:c} R & S \\ \hdashline T & F \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} MR + NT & MS + NF \\ \hdashline PR + QT & PS + QF \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 4 & 0 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 6 & 7 & -12 & 24 \\ 2 & 3 & 3 & -3 & 10 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Ikusten den bezala zeroak dituzten matrizeak hartu dira blokeak egiteko, O.X = O dela aprobetxatzeko baina modu egokian biderkagarriak izateko. Hau da, M 3x2 ordenakoa denez, R 2xp hartu beharko da. Halaber, T 3x3 denez, p 3 izango da.

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *eta* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrizeak. Kalkulatu M matrizea* $M.A - B = I$ *bada.*

2. Kalkulatu 2 ordenako X eta Y matrizeak, ondoko ekuazio-sistemaren soluzioa direla jakinda: $X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $2X + 4Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *matrizea. Kalkulatu* A^n.

4. Kalkulatu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *matrizearekin trukatzen diren matrizeen multzoa. Egiaztatu bektore-azpiespazioa dela eta kalkulatu oinarri bat.*

5. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *matrizea. Egiaztatu nilpotentea dela.*

6. Egiazta ezazu A matrizea idenpotentea den kasuetan (hau da, $A^2 = A$*)* $I - A$ *ere idenpotentea dela, eta gainera, identitatea ez bada* $AB = BA = 0$ *dela edozein B matrizerentzat.*

7. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *matrizea. Kalkulatu* A^n.

8. Izan bedi $S = \left\{ \begin{pmatrix} m & n & m-n \\ 0 & 2n & m \\ p & p+m & p-m+2n \end{pmatrix} \Big/ \ m,n,p \in R \right\}$ M_3*-ko azpiespazioa. Kalkulatu bere oinarri bat eta bere dimentsioa.*

9. Izan bitez $S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2a+b \end{pmatrix} / \ a,b,c \in R\}$ *eta* $T = \{\begin{pmatrix} m & 2m \\ m+n & m-n \end{pmatrix} / \ m,n \in R\}$ *azpiespazioak. Kalkulatu S, T,* $S \cap T$ *eta S+T azpiespazioen dimentsioak eta oinarri bat.*

10. Bilatu $M_2(K)$ *espazioko A eta B matrizeak, non AB ez den simetrikoa.*

11. Izan bedi A matrize erregular bat. Frogatu, indukzio-metodoa erabiliz, A^n *ere erregularra dela eta kalkulatu bere alderantzizkoa.*

12. Kalkulatu ondoko matrizeen heina:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. Izan bedi $f : R^5 \rightarrow R^2$ $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *matrizearen bitartez definitutako aplikazioa.*

a) Esan supraiektiboa den.
b) Kalkulatu Ker f eta Imf eta haien bi oinarri.
c) Eraiki R^5*-eko* $B = \{u_1,u_2,u_3,u_4,v\}$ *oinarri bat, non* $\{u_i\}$ *nukleoko oinarri bat den eta kalkulatu f-ren F' matrizea B eta B' = {(1,2),(-1,1)} oinarriekiko.*
d) Kalkulatu espazio bakoitzeko oinarri-aldaketaren matrizea (P eta Q) eta egiaztatu $F' = Q^{-1}.F.P$ *dela.*

14. Izan bedi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ *matrizea* $f : R^4 \rightarrow R^3$ *aplikazioari dagokion matrizea bi espazioko oinarri kanonikoekiko. Kalkulatu bere heina (r) eta bi espazioko beste* *bi oinarri, non aplikazioaren matrizea oinarri berri horiekiko* $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *itxura duen (I_r r ordenako identitate matrizea da). (4.3. teoreman eraikitako prozedura erabili).*

15. Froga ezazu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *eta* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *ez direla antzekoak.*

16. Frogatu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ez dela antzekoa identitate matrizearekiko, nahiz eta aztarna berdinak izan. Frogatu R^2-ko $f(x,y)= (x + 3y, 2x + 5y)$ endomorfismoarentzat ezin dela oinarri bat aurkitu, non matrizea* $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *moduan jar daitekeen.*

17. Esan zein kasutan diren erregularrak ondoko matrizeak (m parametroaren arabera) eta kasu horietan kalkulatu alderantzizkoa:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & m \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ m & 3 & -2 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & m & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & m & 4 \end{pmatrix}$

18. Egiaztatu $A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrizea erregularra dela eta kalkulatu bere alderantzizkoa.*

5. DETERMINANTEAK

5.1. SARRERA

Gai honen aurkezpena egiteko bi modu daude; bata, determinantearen definizio orokorra ematea da permutazio-taldea (Ikus 1.8. arloa) erabiliz, eta bestea, (hain zuzen guk erabiliko duguna) bigarren eta hirugarren ordenako matrizeen determinantearen definizioa eman eta gero n ordenako matrizeentzat orokortzea da.

PERMUTAZIO-TALDEA ERABILIZ

Permutazio-taldea (S_n) erabiliz horrela litzateke:

Demagun A= (a_{ij}) n ordenako matrize karratu bat dela. Kontsidera dezagun S_n permutazio-taldea, non α_i bere n! elementuak diren. Gogora dezagun $\alpha_i = (\alpha_i(1), \alpha_i(2), ..., \alpha_i(n))$ gisa adierazten dela, eta izan bedi $\sigma(\alpha_i)$ bere parekotasuna (edo signadura), hau da, $\sigma(\alpha_i)$ = (-1) alderanzketen kopurua.

5.1. DEFINIZIOA: $M_n \to R$ determinante aplikazioa, det izenekoa (|A| ere idazten da), honela definitzen da:

$$\det A = |A| = \sum_{\alpha \in S_n} \sigma(\alpha).a_{1\alpha(1)}.a_{2\alpha(2)}.......a_{n\alpha(n)}$$

2. ordenakoa: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bada, det A aurkitzeko S_2 taldeko permutazioak behar ditugu. $S_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ da, non $\alpha_1 = (1,2)$ den (gogoratu honek $\alpha_1(1) = 1$ eta $\alpha_1(2) = 2$ direla esan nahi duela) eta $\alpha_2 = (2,1)$ den (hots, $\alpha_2(1) = 2$ eta $\alpha_2(2) = 1$).

- α_1 permutazioak ez du alderanzketarik, eta ondorioz, $\sigma(\alpha_1) = (-1)^0 = 1$

- α_2 permutazioak alderanzketa bat du. Beraz, $\sigma(\alpha_2) = (-1)^1 = -1$

$$\det A = |A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

3. ordenakoa: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ bada, det A aurkitzeko S_3 aztertu behar da.

Talde horrek 3! = 6 gai ditu: $S_3 = \{(123),(132),(213),(231),(312),(321)\}$ eta bakoitzaren alderanzketak kalkulatuz gero, honakoa lortzen da:

$$\det A = |A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}$$

Ikusten denez, ordena handitzen denean permutazio-kopurua ere dezente handitzen da eta maneiaezin bilakatzen da (n = 4 bada, 4! = 24 gai daude) eta horregatik beste era batera egiten da.

adibideak: Kalkulatu |A| eta |B|, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ izanik.

|A| = 2.4 - 1.3 = 5
|B| = 1.2.1 + 3.4.1 + (-2).0.(-2) - (-2).2.1 - 3.0.1 - 1.4.(-2) = 2 + 12 + 4 +8 = 26

Hirugarren ordenako batugaiak lortzeko Sarrus erregela erabiltzen da.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ hiru biderketa hauek, 1.2.1 , 3.4.1. eta 0.(-2).(-2), dira positiboak eta

beste hiru hauek $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ -2.2.1 , 3.0.1 eta 1.4.(-2) negatiboak.

5.2. 2x2 eta 3x3 DETERMINANTEEN DEFINIZIOAK

5.2. DEFINIZIOA**: 2x2 DETERMINANTEA**

Izan bedi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 2. ordenako matrize bat. Hartara, A-ren determinantea honela definitzen da: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Definizio horretan oinarrituta hirugarren ordenako determinantea definitzen da:

5.3. DEFINIZIOA**: 3x3 DETERMINANTEA**

Izan bedi A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; orduan, det A horrela definitzen da:

$$\det A = |A| = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Oso erraz ikus daiteke honen garapena bat datorrela permutazio-taldea erabiliz egindako definizioarekin, eta Sarrus erregela erabil dezakegula.

5.3. MINORE OSAGARRI ETA ADJUNTUA

MINOREA (edo minore osagarria): A matrize bateko i-j **minorea** (M_{ij} idatziko da) i errenkada eta j zutabea kenduz gero gelditzen den matrizea da.

Aurreko adibidean, hau da, A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizean, M_{11} = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, M_{12} = $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eta M_{13} = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ izango lirateke, eta beraien determinanteak erabiliz, A-ren determinantea $|A| = a_{11}.|M_{11}| - a_{12}.|M_{12}| + a_{13}.|M_{13}|$ moduan jar daiteke.

ADJUNTUA: i-j gaiaren adjuntua honako hau da: $A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$

Horren arabera |A| horrela jar daiteke: $|A| = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} = \sum_{i=1,2,3} a_{1i}.A_{1i}$

5.4. nxn DETERMINANTEA

5.4. DEFINIZIOA: Izan bedi A nxn ordenako matrize bat. Orduan, A-ren determinantea honela definitzen da:

$$\det A = |A| = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}.A_{1n} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}.A_{1i}$$

garapen horri ***errenkada bateko adjuntuen garapena*** deritzo. Gero ikusiko den bezala emaitza bera ateratzen da beste edozein errenkada (edo zutabe) hartzen bada garapen hori egiteko.

adibidea: Kalkulatu |A|, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ izanik. Esandakoaren arabera:

$$|A| = 2.\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2.(-3-6) - (18-1) - 3.(54-3) = -18 - 17 - 153 = -188.$$

adibide honetan ikusten den bezala 4. ordenako matrize baten determinantea kalkulatzeko 3. ordenako lau determinante kalkulatu behar dira. Modu berean, 5. ordenako matrize baten determinanteak 4. ordenako bost determinante kalkulatzea eskatzen du, hots, 3. ordenako 20 determinante kalkulatzea. Zorionez, badaude teknika batzuk hori saihesteko eta teknika horiek kapitulu honetan aurkeztuko dira.

Matrize triangeluarra

Goi-triangeluar (behe-triangeluar) deitzen zaio diagonal azpiko (goiko) gai guztiak zero badira: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

5.1. PROPOSIZIOA: A triangeluarra bada, det A = |A| = $a_{11}.a_{22}........a_{nn}$ izango da.

Frog.: Lehenengo zutabearen adjuntuen garapena egiten bada:

$$|A| = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{(berriro lehenengo zutabearen garapena eginez)} =$$

$$a_{11}.a_{22}.\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33}....... \text{(prozesua errepikatuz)}$$

5.5. PROPIETATEAK

5.1.TEOREMA: Matrize baten determinantea ez da aldatzen adjuntuen garapena egitean lehenengo errenkada hartu beharrean beste edozein errenkada edo zutabe hartzen bada. Hots,

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} \text{ , non } i = 1.......n \text{ izan daitekeen.}$$

Frog.: Errenkadekin egingo dugu bakarrik, zutabeekin berdin egiten baita. Ikusi nahi dugu det A kalkulatzeko berdin dela lehenengo edo i-garren errenkada hartzea, hots,
$a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + ...+ a_{1n}.A_{1n} = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + ...+ a_{in}.A_{in} \qquad \forall i = 1,2,.....,n$

Indukzio-metodoa erabiliko da:

$n = 2$ bada, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, eta $|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$ da. Bigarren errenkadatik garatzen bada, $a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} = a_{21}.(-1)^{2+1}.a_{12} + a_{22}.(-1)^{2+2}.a_{11} = |A|$ izango da. Ondorioz, $n = 2$ denean betetzen da.

Demagun n -1 ordenako matrizeetan egiaztatzen dela. Hori onartuz, n ordenakoetan ere betetzen dela frogatu behar da. Horretarako, lehenengo eta i-garren garapenetan ateratzen diren batugaiak alderatzen hasiko gara:

Lehenengo errenkadatik egindako garapenean batugai arbitrario bat honako hau da: $a_{1k}.A_{1k} = a_{1k}.(-1)^{1+k}|M_{1k}| = (-1)^{1+k}.a_{1k}.|M_{1k}|$. Kontuan hartu garapen horretan batugai hori dela a_{1k} agertzen den toki bakarra.

Badakigu M_{1k} n-1 ordenako matrizea dela. Beraz, indukzio-hipotesiaren arabera $|M_{1k}|$ kalkulatzeko A-ko i-garren errenkadatik gara daiteke (M_{1k} -ko (i-1)-garren errenkada da). Garapen horren batugai bat $a_{is}.B_{is}$ da (non B_{is} den a_{is} -ren adjuntua $|M_{1k}|$-ren garapenean). Gai hori izango da a_{is} agertzen den gai bakarra. Ondorioz, hori aurrekoan ordezkatzen bada $(-1)^{1+k}.a_{1k}.a_{is}.Bis$ (*) izango da $a_{1k}.a_{is}$ agertzen den leku bakarra.

Orain i-garren errenkadatik hasten bagara batugai bat honako hau da:
$a_{is}.A_{is} = (-1)^{i+s} a_{is}.|M_{is}|$. Orain $|M_{is}|$ lehenengo errenkadatik garatzen bada batugai bat $(-1)^{i+s}.a_{il}.a_{1k}.C_{1k}$ (**) izango da, non C_{1k} a_{1k}-ren adjuntua den $|M_{is}|$-ren garapenean (eta $a_{is}.a_{1k}$ agertzen den leku bakarra da).

Frogatzen bada (*) = (**) dela, frogatutzat eman daiteke, zeren eta bi garapenetan (lehenengo eta i-garren errenkadetatik egindakoetan) $a_{1k}.a_{il}$ elementua agertzen den leku bakarrak baitira. k eta s arbitrarioak direnez, bi garapen horiek batugai guztiak berdinak izan beharko dituzte.

Ikus dezagun zein diren M_{1k} eta M_{is}, aipatutako B_{is} eta C_{1k} matrizeak zein diren ikusi ahal izateko:

M_{1k} matrizea $M_{1k} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{is} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ da.

M_{is} matrizea $M_{is} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1,s-1} & a_{1,s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k} & \cdots & a_{i-1,s-1} & a_{i-1,s+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k} & \cdots & a_{i+1,s-1} & a_{i+1,s+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ da.

M_{1k} matrizean i-garren errenkada eta s-garren zutabea kenduz gero gelditzen den n-2 ordenako matrizeari P deitzen bazaio, $B_{is} = (-1)^{i+s}.|P|$ izango da.

Baina M_{il} matrizean lehenengo errenkada eta k-garren zutabea kentzen badira, gelditzen den matrizea P matrize bera da. Ondorioz, $C_{1k} = (-1)^{1+k}.|P|$ da. Beraz,
$(*) = (-1)^{1+k}.a_{1k}.a_{ils}.B_{is} = (-1)^{1+k}.(-1)^{i+s}.a_{1k}.a_{is}.|P| = (-1)^{1+k+i+s}.a_{1k}.a_{is}|P|$
$(**) = (-1)^{i+s}.a_{is}.a_{1k}.C_{1k} = (-1)^{i+s}.(-1)^{1+k}.a_{1k}.a_{is}.|P| = (-1)^{1+k+i+s}.a_{1k}.a_{is}.|P|$ frogatu nahi zen bezala.

Horrez gain, frogapen honetan erabilitako i-k ez du eraginik izan. Horrek teorema honen frogapena osatu du.

5.2. PROPOSIZIOA: Demagun A matrizeak zeroz osatutako errenkada (edo zutabe) bat duela. Orduan, bere determinantea zero da.

Frog.: Demagun A matrize baten i-garren errenkada zeroz eratuta dagoela. Orduan, |A| kalkulatzeko errenkada horretatik garatuz: $|A| = 0.A_{i1} + 0.A_{i2} + ... = 0$.

5.3. PROPOSIZIOA: Errenkada (edo zutabe) bat konstante batez biderkatzen bada, bere determinantea ere konstante horretaz biderkatuta gelditzen da.

Frog.: Demagun A matrizeko i-garren errenkada c konstanteaz biderkatzen dela. Izan bedi B gelditzen den matrizea. Orduan,

$|B| = c.a_{i1}.A_{i1} + c.a_{i2}.A_{i2} + ...+ c.a_{in}.A_{in} = c.(a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + ...+ a_{in}.A_{in}) = c.|A|$

5.4.PROPOSIZIOA: bi errenkada (zutabe) trukatzen badira, determinantea zeinuz aldatzen da.

Frog.: Hasteko, A matrizeko hurrenez hurreneko bi errenkadak direla trukatzen ditugunak suposatuko da: i-garrena eta (i+1)-garrena. Izan bedi B gelditzen den matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \text{ bada,} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \text{ izango da.}$$

det A kalkulatzeko i-garren errenkadatik garatzen bada:

$|A| = a_{i1}.A_{i1} + ...+ a_{in}.A_{in}$, non $A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$ den. Hemen M_{ij} matrizea A matrizean i-garren errenkada eta j-garren zutabea kenduz gero gelditzen dena da.

det B kalkulatzeko (i+1)-garren errenkadatik garatzen bada,

$|B| = a_{i1}.B_{i+1,1} +.......+ a_{in}.B_{i+1,n}$ izango da, non $B_{i+1,j} = (-1)^{i+1+j}.|M_{ij}|$ den (aurreko M_{ij} bera ateratzen baita). Baina $B_{i+1,j} = (-1)^{i+1+j}.|M_{ij}| = - (-1)^{i+j}.|M_{ij}| = - A_{ij}$ izango da, eta ondorioz, $|A| = -|B|$.

Orain demagun i-garren eta j-garren errenkadak trukatzen ditugula (non $i < j$ den). i-garrena j-garren tokian uzteko j – i trukaketa egin behar da eta egin ondoren j-garrena j-1-garren lekuan gelditzen da. Gero errenkada hori i-garren lekura eramateko (j –1) -1 trukaketa egin behar da. Osoan (j-i) + (j-i –1) aldaketa egin behar dira, eta ondorioz, $|B| = (-1)^{2j-2i-1}|A| = -|A|$ izango da.

5.5. PROPOSIZIOA: A matrize batek bi errenkada (zutabe) berdinak baditu, orduan, $|A| = 0$ izango da.

Frog.: i-garren eta j-garren errenkadak berdinak badira, nahiz eta trukatu matrizea ez da aldatzen. Baina 5.4. proposizioaren arabera determinantea zeinuz aldatzen denez, $|A| = -|A|$ izan beharko da, beraz, $2.|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$.

5.6. PROPOSIZIOA: errenkada (zutabe) bat beste baten multiploa bada $\Rightarrow |A| = 0$.

Frog.: Demagun j-garren errenkada honako hau dela: $(a_{j1} \ a_{j2} ...... a_{jn}) = (k.a_{i1} \ k.a_{i2} ...... k.a_{in})$; orduan, $|A| = k.|B|$ (5.3. proposizioa), non B matrizeak bi errenkada berdinak dituen, eta ondorioz, $|A| = k.0 = 0$.

adibidea: Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ matrizea. Bigarren errenkada lehenengoaren bikoitza da, eta ondorioz, $|A| = 0$.

5.1. LEMA: izan bitez A eta B bi matrize berdinak, j-garren zutabea izan ezik, hots,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2j} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & & b_{2j} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & b_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eta izan bedi $C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & & a_{2j}+b_{2j} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj}+b_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$

orduan, $|C| = |A| + |B|$ izango da.

Frog.: $|C| = (a_{1j} + b_{1j}).A_{1j} + ...+ (a_{nj} + b_{nj}).A_{nj} = a_{1j}.A_{1j} + ...+ a_{nj}.A_{nj} + b_{1j}.A_{1j} + ...+ b_{nj}.A_{nj} = |A| + |B|$.

5.7.PROPOSIZIOA: Errenkada bati beste errenkada baten multiploa gehitzen bazaio determinantea ez da aldatzen.

Frog.: Demagun B matrizea ateratzen dela A matrizean j-garren errenkadari k aldiz i-garrena gehituz. Orduan,

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+k.a_{i1} & \cdots & a_{jn}+k.a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ k.a_{i1} & \cdots & k.a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} =$$

$|A| + 0 = |A|$.

Teorema hauek determinanteak kalkulatzeko erabil daitezke. Matrizeen heina kalkulatzeko egiten den bezala posible da, hemen ere, zeroak egitea diagonal nagusiaren azpian eta berehalako determinante bat gelditiko da.

adibidea: Kalkulatu ondoko determinantea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2: \mathrm{E2}-3\mathrm{E1} \\ 4: \mathrm{E4}+2\mathrm{E1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \ \text{eta} \ 3 \\ \text{trukatuz} \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2: 7.\mathrm{E2} \\ 4: 2.\mathrm{E4} \end{pmatrix} -\frac{1}{14}. \begin{vmatrix} 1. & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 14 & 28 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 14 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \left(4: \mathrm{E4}-\mathrm{E2}\right) -\frac{1}{14}. \begin{vmatrix} 1. & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 14 & 28 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -26 & -9 \end{vmatrix} = (2 : \mathrm{E2} / 7) \ -$$

$$\frac{7}{14}. \begin{vmatrix} 1. & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -26 & -9 \end{vmatrix} = (4:\mathrm{E4}-26\mathrm{E3}) -\frac{1}{2}. \begin{vmatrix} 1. & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -87 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.1.2.(-1).(-87) = -87$$

Agerikoa da modu askotara gara daitekeela. Esate baterako adjuntuen garapena erabiliz edo zero batzuk egin ondoren adjuntuen garapen bat aplikatuz. Aurreko adibidean $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = (Sarrus erabiliz) -7 + 6 - (84 + 2) = - 87 egin izan bagenu askoz azkarragoa izango zatekeen.

> 5.8.PROPOSIZIOA: Errenkada baten gaiak eta beste edozein baten adjuntuen arteko biderketen batura zero da. Hots, $a_{i1}.A_{j1} + a_{i2}.A_{j2}+......+ a_{in}.A_{jn} = 0$ $\quad$ i = j bada.

Frog.: Izan bitez $A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$ eta $B = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$

B matrizea A bezala definitu da, j-garren errenkada izan ezik, non hor i-garren errenkada errepikatu den.
$a_{i1}.A_{j1} + a_{i2}.A_{j2}+......+ a_{in}.A_{jn}$ = det B da, bi matrize horiek j-garren errenkadaren adjuntuak berdinak dituztelako. Baina $|B| = 0$ da bi errenkada berdinak baititu.

5.9. PROPOSIZIOA: $|A| = |A^T|$

Frog.: Indukzio-metodoa erabiliz egingo da. Hasieran n = 2 den kasua ikusiko da:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = |A^T|$$

beraz, tesia n = 2 denean betetzen da. Suposa dezagun n-1 kasurentzat betetzen dela. Suposizio horretatik abiatuta n kasurentzat ere betetzen dela frogatu behar da.

$$\text{Izan bitez } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ eta } |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$|A|$ lehenengo errenkadatik garatzen bada eta $|A^T|$ lehenengo zutabetik

($|A| = a_{11}A_{11}+ ....+ a_{1n}.A_{1n}$ eta $|A^T| = a_{11}.B_{11} +........+ a_{1n}.B_{1n}$) $A_{1k} = B_{1k}$ dela (edozein k = 1,2,....n) frogatu behar da. Biak idazten badira:

$$A_{1k} = (-1)^{1+k}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad B_{1k} = (-1)^{1+k}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{22} & a_{32} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2,k-1} & a_{3,k-1} & \cdots & a_{n,k-1} \\ a_{2,k+1} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{n,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

bistan dago determinante horien matrizeak elkarrekiko adjuntuak direla. n-1 ordenakoak direnez, indukzio-hipotesiak bi determinante horiek berdinak direla esaten digu. Ondorioz, $|A| = |A^T|$ izango da.

MATRIZE ANTISIMETRIKOAK

A nxn ordenako matrizea antisimetrikoa bada (hots, $A^T = -A$), $|A| = (-1)^n .|A|$ betetzen da. Ikus dezagun: $|A| = |A^T| = |-A|$ eta 5.3. proposizioa n aldiz erabiliz (errenkada guztiak bider (-1) eginez) $= (-1)^n .|A|$.

Bistan denez, n bakoitia bada, $|A| = -|A|$ gelditzen da $\Rightarrow |A| = 0$.

> 5.2. TEOREMA: A_n matrize goi-triangeluarra bada,
> A erregularra da $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Frog.: $\Rightarrow$ erregularra bada, bere heinak n izan beharko du (4.6. teorema), eta ondorioz, ezin da a_{ii} zero izan inongo i-rentzat (bestela heina < n litzateke). Beraz,
$|A| = a_{11}.a_{22}.....a_{nn} \neq 0$ da.
$\Leftarrow$ $|A| \neq 0$ bada, $a_{11}.a_{22}.....a_{nn} \neq 0$ izango da. Ondorioz, $a_{ii} \neq 0$ ($\forall$i) eta bere heina n da. Beraz, erregularra da (4.6. teorema).

5.6. MATRIZE ELEMENTALAK

Gogora dezagun 4.7 arloan matrize batean egin ahal diren ondoko eragiketa hauei **oinarrizko eragiketa** deitu zitzaiela:

- bi errenkadaren (zutaberen) arteko trukaketa : $l_i \leftrightarrow l_j$ (1)
- errenkada bat k konstante batez biderkatzea : $k.l_i$ (2)
- errenkada bati beste baten multiplo bat gehitzea. : $l_i + k.l_j$ (3)

> 5.5. DEFINIZIOA: I identitate matrizetik oinarrizko eragiketak eginez sortzen diren matrizeei **matrize elemental** deitzen zaie (E_i izendatuko dira).

Esate baterako, E_1 izan daiteke $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ I_4 identitatetik sortu da, bigarren eta laugarren errenkadak trukatzetik.

Zein den egiten den eragiketa, (1), (2) edo (3), lortutakoaren determinantea hauxe izango da (ikusi ditugun propietateen arabera):

-	-1	(1) kasuan
-	k	(2) “
-	1	(3) “

5.2. LEMA: Matrize elementalen alderantzizkoak ere elementalak dira.

Frog.: (1) kasuan, E eragiketa i eta j trukatzea bada, $E^{-1} = E$ da.

(2) " E eragiketa i-garren errenkadan bider k egitea bada, E^{-1} errenkada berean bider 1/k egitea izango da. Beraz, E^{-1} ere elementala da.

(3) " E eragiketa i-garrenean j-garrena bider k gehitzea bada, E^{-1} errenkadan i-garrenari j-garrena bider k kentzea izango da. Beraz, hau ere elementala da.

5.3. LEMA: $E \in M_n$ matrize elemental bat bada, $|E.A| = |E|.|A| \quad \forall A \in M_n$ izango da.

Frog.: Dauden hiru kasuak kontsidera ditzagun:

- E (1)-garren motakoa bada, A matrizean i eta j errenkadak trukatuz lortzen den matrizea E.A da, eta ondorioz, $|E.A| = - |A|$, baina $|E| = - |I| = -1 \Rightarrow |E.A| = |E|.|A|$

- E (2)-garren motakoa bada, E.A matrizea A matrizean i-garren errenkada k biderkatzetik sortzen da. Ondorioz, $|E.A| = k.|A|$, baina $|E| = k.|I| = k \Rightarrow |E.A| = |E|.|A|$

- E (3)-garren motakoa bada, $E = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ izango da. Beraz,

$$E.A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \dots & ka_{ii}+a_{ij} & \dots & ka_{ij}+a_{ij} & \dots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & a_{ni} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

izango da. Hau bi matrizetan deskonposa daiteke: $EA = M + A$. Beraz, 5.1. leman ikusi den bezala $|EA| = |M| + |A|$ izango da. Baina $|M| = 0$ da (errenkada bat bestearen multiploa delako). Beraz, $|EA| = |A|$ da, eta kasu honetan $|E| = |I| = 1$ da. Ondorioz, $|E.A| = |E|.|A|$.

5.3. TEOREMA: A_n erregularra da $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

Frog.: $\Rightarrow$ demagun A erregularra dela. Suposa dezagun E_1, E_2, ... E_k direla A matrizea T triangeluar moduan jartzeko egin behar diren oinarrizko eragiketak, hots, $T = E_1.E_2......E_k.$ A. Orduan, $A = E_k^{-1}.....E_2^{-1}.E_1^{-1}T$ moduan jarri ahal da, non E_i^{-1} ere elementalak diren (5.2. lema). Ondorioz, $|A| = |E_k^{-1}|.....|E_2^{-1}|.|E_1^{-1}|.|T|$ (5.3. lema). Baina A erregularra denez, bere heina n da. Beraz, T matrizeak ez du diagonal nagusian zerorik izango (Ikus 106 or.). Ondorioz, $|T| \neq 0$ eta matrize elementalen determinanteak zero ez direnez $\Rightarrow |A| \neq 0$.
$\Leftarrow$ demagun orain $|A| \neq 0$. Orduan, $|T| =|E_1|.|E_2|......|E_k|.|A| \neq 0$ eta bere heinak n izan beharko du, beraz, erregularra da.

KOROLARIO GARRANTZITSUA

Izan bedi $\{u_1,u_2,.......u_n\}$ n dimentsioko bektore-espazio baten bektore-sistema bat. Izan bitez a_{ij} beraien koordenatuak B oinarri batean, hots, $u_i = (a_{i1},a_{i2},.......,a_{in})$ eta izan bedi A bektore horiek eratzen duten nxn ordenako matrizea. Orduan,

$$\{u_1,u_2,.......u_n\} \text{ askea da } \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Frog.: 4.3. korolarioaren arabera A matrizea erregularra da eta aurreko teorema aplikatzetik ondorioztatzen da.

Emaitza honek oso garrantzi handia du geometria analitikoan oso erabilgarria baita bektore-sistemen mendekotasun lineala aztertzeko. Ondoko proposizioa ondorioztatzeko ere aplikatuko da (bertan matrize baten heina nola kalkula daitekeen ikusiko da).

adibidea: Esan (1,2,1), (1,0,1) eta (0,2,0) bektore-sistema askea den.

Ebaz.: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - (0 + 0 + 2) = 0 \text{ ; ondorioz, ez da askea.}$$

5.10. PROPOSIZIOA: A matrize baten heina determinantea zero ez duten minore osagarrien arteko minorerik handienaren ordena da.

Frog.: Demagun A-ren heina r dela. Horrek esan nahi du r errenkada-bektore independente daudela. Erosotasuna dela eta, lehenengo r-ak direla suposatuko da.

Beste aldetik, oinarrizko eragiketa eginez lortutako matrizearen heina berdina da eta 120. orrialdean ikusi zen bezala determinantea zero ez duen minore osagarri handienaren ordena r izango da.
Agerian dago beste minore handiago bat osatzeko zeroz osatutako errenkada eta zutabe bat gehitu behar zaiola, eta zeroz osatutako bektoreak ez du heina aldatzen.

adibidea: Kalkulatu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -11 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

Ebaz.: Zeroak egingo dira diagonal nagusiaren azpian:

$$\begin{matrix} 2{:}E2-2.E1 \\ 4{:}E4-E1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -14 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 3{:}E3+E2 \\ 4{:}E4-2.E2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eta hemen, dagoeneko, determinantea zero ez duen 3. ordenako minore bat dagoela ikusten da, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ minorea hain zuzen ere. Beraz, A-ren heina 3 da.

5.11. PROPOSIZIOA**:** Izan bitez $A,B \in M_n$. Orduan, $|A.B| = |A|.|B|$ izango da.

Frog.:

- $|A| = 0$ bada, bere heina (r) n baino txikiagoa izango da. Izan bitez E'_1, E'_2, ... E'_k A matrizea T triangeluar bezala jartzeko egin behar diren oinarrizko eragiketak (hots, $T= E'_1.E'_2.,....E'_k.A$) eta $E_1,E_2,....E_k$ beraien alderantzizkoak (hots, $A = E_K......E_2.E_k.T$). Orduan, T matrizeak (r+1)-garren errenkadatik aurrera gainerako n-r errenkadak zeroz osatuta izango ditu. Ondorioz, $|T| = 0$ izango da.
Horrez gain, T.B matrizeari ere gauza bera gertatuko zaio, beraz, $|T.B| = 0$. Baina $|A.B| = |E_K.....E_2 .E_k .T.B| = |E_K|......|E_2|.|E_k|.|T.B| = 0$ eta tesia egiaztatu egiten da (gauza bera gertatzen da $|B| = 0$ bada).

- Demagun orain $|A| \neq 0 \neq |B|$. Kasu honetan A-ren heina n da, eta erregularra denez, I_n matrizera eraman daiteke oinarrizko eragiketak eginez (Ikus 108 or.). Beraz, $A= E_1 .E_2. .... E_n.I_n$ eta $|A.B| = | E_1 .E_2. .... E_n.I_n.B| = | E_1 .E_2. .... E_n.B| = |E_1 |.|E_2|..... |E_n|.|B| = |E_1.E_2. .... E_n.I_n|.|B| = |A|.|B|$.

5.12. PROPOSIZIOA**:** A erregularra bada, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Frog.: $I = A.\ A^{-1}$ eta $|I| = 1$, beraz, $1 = |I| = |A.A^{-1}| = |A|.|A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}| = 1/\ |A|$

5.7. MATRIZE ORTOGONALAK

5.6.DEFINIZIOA: A matrize erregular bati *ortogonal* deitzen zaio $A^{-1} = A^T$ betetzen bada.

Matrize horien determinantea $\pm$ 1 da. Ikus dezagun:

$1 = |I| = |A.A^{-1}| = |A|.|A^{-1}| = |A|.|A^T| = |A|^2 \Rightarrow |A| = \pm\ 1$

5.8. MATRIZE ADJUNTUA

5.7. DEFINIZIOA: Matrize baten adjuntuekin matrize bat eratzen bada, i-garren errenkadako adjuntuak i-garren zutabean jarriz $\forall$i, sortutako matrizeari **matrize adjuntu** deitzen zaio:

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

adibidea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ bada, adj $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ izango da, zeren

eta $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -\ 3$, $A_{21} = -1.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -\ (-6) = 6$ eta abar baitira.

5.9. ALDERANTZIZKO MATRIZEA

Hemen, determinanteak erabiliz, matrize baten alderantzizkoa kalkulatzeko beste modu bat ikusiko da.

5.13. PROPOSIZIOA**:** A erregularra bada, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A$ da.

Frog.: A. A^{-1} = I den ikusi behar da. Ikus dezagun zein den A.adj A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

non $b_{ij} = (a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; ..... \;\; a_{in}) . \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix} = \begin{cases} |A| & i = j \quad \text{bada} \\ 0 & i \neq j \quad '' \end{cases}$ 5.8. proposizioan ikusi zen bezala.

Beraz, $\dfrac{1}{|A|}.A.\text{adj}A = \dfrac{1}{|A|} . \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = I \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{|A|}.A.\text{adj}A = I$ eta A^{-1} matrizeaz ezkerretik biderkatuz $\Rightarrow$ $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A$ frogatu nahi zen bezala.

adibidea: Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa.

Ebaz.: Aurreko adibidean A matrize horren adjuntua kalkulatu da:

$\text{adj}A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ zen eta $|A| = -1$ denez,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \bullet \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ izango da.}$$

Egiazta dezagun $A.A^{-1} = I$ dela: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

modu berean, $A^{-1}.A = I$ dela ere egiazta daiteke.

EBATZITAKO ARIKETAK

1. Kalkulatu ondoko determinantea Sarrus erabiliz eta bigarren zutabeko adjuntuen garapena eginez $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

Ebaz.: a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 6 - (0 - 1 + 4) = -6$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6$

2. Kalkulatu x $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 80^3$ *dela jakinda.*

Ebaz.:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[4:E4-x.E3]{\substack{2:E2-x.E1 \\ 3:E3-x.E2}} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x^4 \\ 0 & 0 & 1-x^4 & 0 \\ 0 & 1-x^4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \text{Lehenengo zutabeko adjuntuetatik garatuz} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-x^4 \\ 0 & 1-x^4 & 0 \\ 1-x^4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(1-x^4)^3 = 80^3 \text{ ; beraz, } x^4 - 1 = 80 \Rightarrow x = \pm 3.$$

3. Kalkulatu $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{vmatrix}$

Ebaz.: 2:E2 -E1, 3:E3 - E1 eta 4:E4 - E1 eginez honako hau geldituko da:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x \\ 0 & y-x & z-x & z-x \\ 0 & y-x & z-x & t-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x \\ 0 & 0 & z-y & z-y \\ 0 & 0 & z-y & t-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x \\ 0 & 0 & z-y & z-y \\ 0 & 0 & 0 & t-z \end{vmatrix} =$$

x.(y-x).(z-y).(t-z).

4. Kalkulatu Vandermonde-ren ondoko determinantea $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$.

Ebaz.: $\begin{matrix} 2:E2-x.E1 \\ 3:E3-x.E2 \\ 4:E4-x.E3 \end{matrix}$ egiten bada,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & t-x \\ 0 & y^2-yx & z^2-zx & t^2-tx \\ 0 & y^3-y^2x & z^3-z^2x & t^3-t^2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y.(y-x) & z.(z-x) & t.(t-x) \\ y^2.(y-x) & z^2.(z-x) & t^2.(t-x) \end{vmatrix} =$$

$$(y\text{-}x).(z\text{-}x).(t\text{-}x)\,.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{vmatrix} = (y\text{-}x).(z\text{-}x).(t\text{-}x).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & t-y \\ 0 & z^2-zy & t^2-ty \end{vmatrix} =$$

$$(y\text{-}x).(z\text{-}x).(t\text{-}x).\begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z.(z-y) & t.(t-y) \end{vmatrix} = (y\text{-}x).(z\text{-}x).(t\text{-}x).(z\text{-}y).(t\text{-}y).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & t \end{vmatrix} =$$

(y-x).(z-x).(t-x).(z-y).(t-y).(t-z).

5. Kalkulatu zein den ondoko bektore-sistemaren heina m parametroaren arabera:
{ (m,1,2,0),(1,0,0,2), (2,(1-m),0,1), (1,0,2,3) }

Ebaz.:

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1-m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[4:mE4-E1]{\substack{2:E2-E4 \\ 3:E3-2E4}} \begin{pmatrix} m & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1-m & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 2m-2 & 3m \end{pmatrix}$$

Kontuan izan $m.E_4$ - E_1 egin ahal izateko $m \neq 0$ bete beharko dela, bestela gelditzen den errenkada-bektoreen sistema ez da jatorriarekiko baliokidea izango, E_4 bektorea desagertu egiten baita.
Kasu partikular hori, m = 0 denean, aparte aztertu beharko da.

$$\xrightarrow{\text{E2 eta E4 trukatuz}} \begin{pmatrix} m & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2m-2 & 3m \\ 0 & 1-m & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3:E3+E2.(1-m)} \begin{pmatrix} m & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2m-2 & 3m \\ 0 & 0 & -2m^2+4m-6 & 3m-3m^2-5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Bukatzeko 4-an honakoa egingo da: $(-2m^2 + 4m - 6).E4 + 2.E3$ (hau edozein m-rentzat egin daiteke, $-2m^2 + 4m - 6$ ez delako sekula zero egiten).

$$\rightarrow \begin{pmatrix} m & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2m-2 & 3m \\ 0 & 0 & -2m^2+4m-6 & -3m^2+3m-5 \\ 0 & 0 & 0 & -4m^2+2m-4 \end{pmatrix}$$

horren determinantea $-m.(-2m^2 + 4m - 6).(-4m^2 + 2m - 4)$ da eta hori ez da zero egiten, m = 0 balioarentzat salbu. ***Ondorioz, heina 4 dela esan daiteke m = 0 ez bada.*** Kasu hori aparte aztertuko da; m = 0 bada,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{E1 eta E4 trukatuz.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2: E2 - E1 \\ 3: E3 - 2.E1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{trukatuz}]{\text{E2 eta E4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3:\text{E3-E2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4:-3\text{E4}+\text{E3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Beraz, bere determinantea 12 da eta bere heina 4 da kasu honetan ere.

Kontuan hartu behar da egin diren pausuak ez direla bide bakarra. Pausu horiek egin ahal diren askoren arteko bide bati dagozkienak dira. Gainera, kasu honetan hasi baino lehen E_1 eta E_4 trukatzen badira esate baterako, ez da beharrezkoa izango $m = 0$ kasu partikular bezala aztertzea. Ondorioz, ebazpena askoz motzagoa da.

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Kalkulatu ondoko determinanteak

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin 2a \\ \sin b & \cos b & \sin 2b \\ \sin c & \cos c & \sin 2c \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -1 & y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 & y \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 9 & 4 \\ 8 & 1 & 27 & 8 \end{vmatrix}$ *h)* $\begin{vmatrix} x+y & z & z \\ x & y+z & x \\ y & y & x+z \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$ *dela suposatuz kalkulatu ondoko determinanteak:*

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & d & e \\ i & h & g \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} a-2c & b & c \\ d-2f & e & f \\ g-2i & h & i \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-5g & 2e-5h & 2f-5i \\ g & h & i \end{vmatrix}$

3. Esan ondoko matrizeak erregularrak diren eta kasu horietan kalkulatu beren alderantzizkoak:

$$a)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\qquad b)\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\qquad c)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\qquad d)\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 5 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$e)\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad f)\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}\qquad g)\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3 & 2\\ -3 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\qquad h)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix}$$

4. Kalkulatu ondoko sistemetatik m-ko zein baliorentzat diren bektore-sistema askeak:

a) {(1,2),(3,m)}
b) {(m,2),(8,m)}
c) {(1,2,1),(2,0,m),(-1,2,0)}
d) {(2,m,0),(1,1,-1),(0,3,m)}
e) {(m,1-m,-1-m),(1,2,3),(2-m,m+3,m+7)}

5. Izan bitez $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ *eta* $B=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$. *Kalkulatu:*

a) $|A|$, $|B|$ *eta* $|A.B|$ *eta frogatu* $|A.B|=|A|.|B|$ *dela.*
b) $|A^{-1}|$ *eta frogatu* $1/|A|$ *dela.*

6. Kalkulatu ondoko matrizeen heina, minore osagarriren determinanteak erabiliz (5.10. proposizioa):

$$a)\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\qquad b)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}\qquad c)\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\qquad d)\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -3 & 1\\ -2 & -7 & 0\end{pmatrix}$$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *g)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *i)* $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 12 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ *j)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6. EKUAZIO LINEALAK

6.1. DEFINIZIOA

6.1. DEFINIZIOA: Ondoko egitura duen berdintzari **ekuazio lineal** deritzo:

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + ... + a_n.x_n = c$$

Hemen a_i eta c koefizienteak ezagunak dira eta x_i ezezagunak (denak K gorputz batekoak). Ekuazioa ebaztea emandako ekuazioa betetzen duten x_1, x_2, ..., x_n balioak aurkitzea da. n balio horiek ekuazioaren soluzio bat eratzen dute. Agerikoa da soluzio asko daudela (infinitu), n –1 askatasun-gradu (parametro) baitaude. Indeterminatua dela esan ohi da. Hala ere, 'indeterminatua' ez da oso hitz egokia, zeren eta infinitu soluzio daudela adierazi beharrean, soluzioa determinatzeko (aurkitzeko) gauza ez garela ematen baitu.

adibidea: Ebatzi $2x + 3y + z = 1$ ekuazioa.
Ebaz.: Hemen hiru ezezagun daudenez, bat beste bien arabera bakanduko da. Edozein bakan liteke, baina erosoagoa denez, z bakanduko dugu: $z = 1 – 2x – 3y$.
Ekuazio horren soluzio orokorra (hots, ebazpen guztien multzoa) hainbat eratara adierazi ahal da:

- $\{(x,y,z) / 2x + 3y + z = 1\}$

- $(x, y, 1 – 2x – 3y)$, non x eta y askeak diren.

- $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 1 - 2x - 3y \end{array}\right\} x, y \in K$

Soluzio partikular bat aurkitzeko nahikoa da bi parametroei balioak ematea, adibidez $x = 1$ eta $y = 0$ hartzen badira, orduan (1, 0, -1) soluzioa dugu.

6.2. EKUAZIO LINEALEN SISTEMAK

6.2. DEFINIZIOA: n ezezaguneko m ekuazio linealen sistema bat hauxe izango da:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \ldots + a_{1n}.x_n = c_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \ldots + a_{2n}.x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \ldots + a_{mn}.x_n = c_m \end{array}\right\}$$

non $a_{ij} \in K$ sistemaren koefizienteak diren eta $c_i \in K$ gai independenteak (askeak) diren.

Sistema bat ebaztea bere ekuazio guztientzat ebazpen komunak aurkitzea da. Esate baterako $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{array}\right\}$ sisteman, ekuazio bakoitzak infinitu soluzio ditu, (x,2x) eta (x,3-x), hurrenez hurren, (geometrikoki interpretatzen badira bi zuzenak dira), baina sistemak, aldiz, soluzio bakarra du (1,2) (bi zuzen horien ebakidura-puntuaren koordenatuak, hain zuzen ere).

BEKTORE-IDAZKERA ETA IDAZKERA MATRIZIALA

Sistema bektore-lengoaia edo lengoaia matriziala erabiliz adieraz daiteke:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{badira,}$$

sistema beste era honetara idatz daiteke:

$A_1.x_1 + A_2.x_2 + \ldots\ldots + A_n.x_n = C$ ***bektore-adierazpena***

$A.X = C$ ***adierazpen matriziala***

6.3. SISTEMA BALIOKIDEAK

Bi sistema baliokideak dira soluzio berdinak badituzte.

6.1.TEOREMA: Sistema batean, ekuazio bat bera eta gainerakoen konbinazio lineal batez ordezkatzen bada, sortutako sistema baliokidea da aurrekoarekiko.

Frog.: Demagun i-garren ekuazioa ordezkatzen dela $k_1.(a_{11}.x_1 +.......+ a_{1n}.x_n) + k_2.(a_{21}.x_1 + ...+ a_{2n}.x_n) + ... + k_i.(a_{i1}.x_1+ ....+ a_{in}.x_n) + ...+ k_m.(a_{m1}.x_1 +......+ a_{mn}.x_n) = k_1.c_1 + k_2.c_2 +.......+k_i.c_i +......+ k_m.c_m$ ekuazioaz, non $k_i \neq 0$ den. Beraz, hau bigarren sistemaren i-garren ekuazioa izango da.

Bi sistemek soluzio berdinak dituztela frogatu nahi da. Duten desberdintasun bakarra i-garren ekuazioa da. Lehenengo sistemari F eta bigarrenari G deituko diegu.

- demagun $(s_1, s_2,......, s_n)$ F-ko soluzioa dela. Hau da, $a_{i1}.s_1+ ....+ a_{in}.s_n = c_i$ betetzen da $i = 1…..m$ balioentzat. Orduan, ekuazio guztien soluzioa denez, nahikoa da ikustea G-ko i-garren ekuazioaren soluzioa dela G sistemaren soluzioa izateko. Hau da,

$k_1.(a_{11}.s_1 +.......+ a_{1n}.s_n) + ... + k_i.(a_{i1}.s_1+ ....+ a_{in}.s_n) + ...+ k_m.(a_{m1}.s_1 +......+ a_{mn}.s_n) = k_1.c_1 +.......+ k_i.c_i +......+ k_m.c_m$

Baina hau agerikoa da, zeren eta lehenengo ataleko $(a_{11}.s_1 +.......+ a_{1n}.s_n)$ eta gainerako parentesiak $c_1, ..., c_m$ baitira.

- era berean, $(s_1, s_2,......, s_n)$ G-ko soluzioa bada, $k_1.(a_{11}.s_1 +.......+ a_{1n}.s_n) + k_2.(a_{21}.s_1 + ...+ a_{2n}.s_n) + ... + k_i.(a_{i1}.s_1+ ....+ a_{in}.s_n) + ...+ k_m.(a_{m1}.s_1 +......+ a_{mn}.s_n) = k_1.c_1 + k_2.c_2 +.......+k_i.c_i +......+ k_m.c_m$ beteko da.
Baina $(a_{j1}.s_1 +.......+ a_{jn}.s_n) = c_j$ denez, $\forall j \neq i \Rightarrow k_1.c_1+....+ k_{i-1}.c_{i-1}+ k_i.(a_{i1}.s_1+ .....+ a_{in}.s_n) + ...+ k_m.c_m = k_1.c_1 + k_2.c_2 +.......+k_i.c_i +......+ k_m.c_m \Rightarrow k_i.(a_{i1}.s_1+......+ a_{in}.s_n) = k_i.c_i$ eta $k_i \neq 0$ denez, $a_{i1}.s_1+ a_{12}.s_2 +......+ a_{in}.s_n = c_i$. Ondorioz, F sistemako soluzioa da.

Beraz, baliokideak dira.

6.4. SOLUZIOEN EXISTENTZIA

Orain zein kasutan existitzen diren soluzioak, eta gainera, zenbat dauden aztertu behar da. Horretarako terminologia berezia erabili ohi da:

- sistema *bateragarria* da soluzioak daudenean
- “ *bateraezina* da soluziorik ez dagoenean
- “ *determinatua* da soluzio bakar bat duenean.
- “ *indeterminatua* da infinitu soluzio dituenean.
- “ *homogeneoa* da gai independenteak zero direnean ($c_i = 0 \quad \forall i$)

Kontuan hartu, gero ikusiko dugun bezala, sistema batek ezin duela soluzio-kopuru mugatua izan 0 eta 1 izan ezik (hau da, 0, 1 edo infinitu ditu).

ROUCHE-FRÖBENIUS TEOREMA

Izan bitez $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ eta $AZ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$

n ezezagun eta m ekuazioko sistema baten koefiziente-matrizea eta matrize zabaldua (horrela deritzo A matrizetik gai askeen zutabearekin zabalduz sortzen delako), hurrenez hurren, eta izan bitez r eta r' beraien heinak (he A = r eta he AZ = r'). Orduan,

> 6.2. TEOREMA (ROUCHE-FRÖBENIUS)
>
> 1. $r \neq r'$ $\Rightarrow$ sistema bateraezina da.
>
> 2. $r = r'$ $\Rightarrow$ sistema bateragarria da. Kasu honetan gerta daiteke:
>
>   - $r = n$ $\Rightarrow$ determinatua da
>   - $r < n$ $\Rightarrow$ indeterminatua da eta $\infty^{n - r}$ soluzio daude (n - r parametro)

Frog.:

1. demagun $r \neq r'$ dela. Orduan, ezin da $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ bektorea A_i bektoreen konbinazio lineal modura jarri. Ondorioz, ezin da $(s_1,s_2,....,s_n)$ soluzio bat existitu, zeren eta existituko balitz $C = s_1.A_1 +.......+ s_n.A_n$ beteko bailitzateke, eta hori ez dela posible esan dugu oraintxe bertan. Beraz, bateraezina da.

2. demagun orain $r = r'$ dela. Horrek esan nahi du C bektorea A_i bektoreen konbinazio lineal bezala jar daitekeela, hau da, $C = s_1.A_1 +.......+ s_n.A_n$. Bistan denez, konbinazio horren koefizienteek $(s_1,s_2,....,s_n)$ sistemaren soluzio bat osatzen dute. Beraz, bateragarria da. Orain bi kasu daude:

a) $n = r$

Badakigu $C = s_1.A_1 +.......+ s_n.A_n$ betetzen dela eta $(s_1,s_2,....,s_n)$ soluzioetako bat dela. Suposatzen bada $(t_1,t_2,....., t_n)$ beste soluzio bat dela, orduan, $C = t_1.A_1 +.......+ t_n.A_n$ beteko da eta bi ekuazio hauek kentzen badira:

$$C = s_1.A_1 + ...+ s_n.A_n$$
$$\underline{- C = - (t_1.A_1 + ...+ t_n.A_n)}$$

$0 = (s_1 - t_1).A_1 + ...+ (s_n - t_n).A_n \quad \Rightarrow \quad s_i - t_i = 0 \quad \forall i$ zeren eta A_i bektore--sistema askea den (bere heina n baita). Ondorioz, $s_i = t_i$, da eta, beraz, soluzio bakarra dago. Hau da, determinatua da.

b) Demagun orain $r < n$ dela. Erosotasunagatik suposatuko da lehenengo r bektoreak $(A_1,.....A_r)$ direla askeak direnak (honek ez dio orokortasunik kentzen frogaketari).

Orduan, $A_{r+1} = K.L. (A_1,...A_r)$ (K.L. jartzen dugu konbinazio lineala adierazteko)
$A_{r+2} = K.L. (A_1,...A_r)$
....
$A_n = K.L. (A_1,...A_r)$
$C = K.L. (A_1,...A_r)$ (ez ahaztu $C = K.L. (A_1,A_2,....A_r,A_{r+1},....A_n)$)

eta edozein $s_{r+1}, s_{r+2},........, s_n \in K$ parametroentzat $s_1,.....s_r$ balioak existituko dira, non ondoko hau betetzen den:

$$C - s_{r+1}.A_{r+1} - s_{r+2}.A_{r+2} -.......- s_n.A_n = K.L. (A_1,...A_r) = s_1.A_1 + ...+ s_r.A_r .$$

Edo $\quad s_1.A_1 + ...+ s_r.A_r + s_{r+1}.A_{r+1} + s_{r+2}.A_{r+2} +.......+ s_n.A_n = C$

Hau da, $s_{r+1}, s_{r+2},........, s_n$ parametroak finkatuz gero (eta edozein izan daitezke) $s_1,.....s_r$ determinatuak izango dira eta denek, $(s_1,s_2,...s_r,s_{r+1},....s_n)$, sistemaren soluzio bat eratzen dute. Ondorioz, infinitu soluzio daude eta parametro askeen kopurua n - r denez, ∞^{n-r} soluzio daudela esaten da.

6.5. GAUSS METODOA

ROUCHE teorema aplikatu ahal izateko koefiziente-matrizearen heina zein den jakin behar da. Hori egiteko zeroak egingo dira diagonal nagusiaren azpian. Horretarako, matrizeari oinarrizko zenbait eragiketa aplikatu behar zaizkio eta kontuan hartu behar da eragiketa bat aplikatzen den bakoitzean sortutako ekuazio-sistema berria aurrekoarekiko baliokidea dela. Beraz, lan horrekin bi helburu gauzatzen ari gara, bata heina aurkitzea eta bestea sistemaren itxura sinplifikatzea ebazpen-prozesua errazteko. Prozedura honi Gauss metodoa deritzo.

adibidea: Eztabaidatu eta ebatzi ondoko sistema hau: $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + z - t = 3 \\ 2x + 4y + 3z - 4t = 5 \\ x + 2z + 3t = 1 \end{array}\right\}.$

Ebaz.: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2:\ E2-\ E1 \\ 3:\ 2E3-\ E1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right)$ 3:E3 + 3E2 $\rightarrow$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 5 \end{array}\right)$ eta determinantea zero ez duen 3 ordenako minore bat dagoenez,

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ hain zuzen, bere heina hiru da.

Matrize zabalduaren heina ere 3 denez, sistema bateragarria da eta $3 = r < n = 4$ indeterminatua da ($\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzio izango ditu). Beraz, soluzioa parametro baten arabera adieraziko da.

Ebazteko $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z-t=3 \\ y+2z-3t=2 \\ 9z-2t=5 \end{array}\right\}$ lortutako sistema baliokidea kontsideratuko da.

t aldagaia parametro gisa hartzen bada, $z = (5+2t) / 9$, $y = 2 + 3t - 2z = 8/9 + 23t/9$ eta $x = (3 + t - z - 3y) / 2 = -1/9 - 31t/9$ izango da soluzioa. Hau da,

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{9} - \dfrac{31}{9}.t \\ y = \dfrac{8}{9} + \dfrac{23}{9}.t \\ z = \dfrac{5}{9} + \dfrac{2}{9}.t \\ t = t \end{array}\right. \quad , \text{non } t \in K$$

Oharra: kontuan hartu heina kalkulatzean oinarrizko zenbait eragiketa egiten direla zeroak lortzeko (eta horrekin batera sistema baliokide eta erosoago bat lortzen dela). Baina eragiketa horiek errenkadetan egin behar dira eta ez zutabeetan, bestela sistema erabat aldatzen baita eta ez da baliokidea ateratzen. Nahasketa hori heina atera nahi dugun egoeratik dator, zeren eta heina kalkulatzeko bost axola zeini aplikatzen dizkiogun eragiketa horiek (errenkadei edota zutabeei).

Ohar hau egiaztatzeko ondoko adibidea landuko dugu:

adibidea: Izan bedi $\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$ sistema. Bere soluzioa x = 1, y = - 1 da.

Bere matrizea $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ da eta lehenengo zutabeari bigarrena gehitzen bazaio, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ aterako da. Horri dagokion sistemaren soluzioa, hots, $\left.\begin{array}{l} -y = 2 \\ 2x + y = 0 \end{array}\right\}$ sistemarena, y = - 2, x = 1 da. Bistan denez, ez da lehenengoarekiko baliokidea.

Batzuetan parametro batzuk daude sistemetan, eta orduan, parametro horien arabera eztabaidatu eta ebatzi behar da.

adibidea: Eztabaidatu eta ebatzi ondoko sistema hau: $\left.\begin{array}{l} x + z + 2t = -1 \\ 2x + y + 3z + t = 2 \\ -y - z + 3t = 2m - 2 \end{array}\right\}$ m parametroaren arabera.

Ebaz.: Matrize zabaldua jartzen bada eta zeroak egiten badira:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 2m-2 \end{array}\right) \text{2:E2} - \text{2E1} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 2m-2 \end{array}\right) \text{3:E3} + \text{E2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m+2 \end{array}\right).$$

EZTABAIDA: Bistan dago A matrizeko 3 ordenako minore guztiek determinantea zero dutela, baina 2 ordenako batek, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hain zuzen, ez du determinantea zero. Ondorioz, bere heina r = 2 da.

AZ matrizearen (matrize zabalduaren) heina 3 izateko 2m + 2 ≠ 0 baldintza bete behar da, hots, m ≠ -1. Orduan, sistemaren eztabaida horrela laburtuko litzateke:

- $m = -1$ bada, $r = 2 = r'$ $\Rightarrow$ sistema bateragarria da.
  Gainera, $2 = r < n = 4$ denez, indeterminatua da eta $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzio du (bi parametroren arabera).
- $m \neq -1$ bada, $2 = r \neq r' = 3$ $\Rightarrow$ sistema bateraezina da.

EBAZPENA: $m = -1$ bada, sistema hauxe da: $\left.\begin{array}{r} x + z + 2t = -1 \\ y + z - 3t = 4 \end{array}\right\}$, hau da, zeroak egin ondoren gelditzen den sistema baliokidea.

z eta t parametro gisa hartzen badira, $y = 4 - z + 3t$ eta $x = -1 - z - 2t$ izango dira.

Hots, soluzio osoa hauxe izango da: $\begin{cases} x = -1 - z - 2t \\ y = 4 - z + 3t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$, non $z, t \in K$

SISTEMA HOMOGENEOAREN KASUA

Sistema homogeneoa bada, C bektorea zero bektorea da eta $r' = r$ betetzen da, beraz, bateragarria da. Horrez gain, agerikoa da kasu hauetan beti (0,0,......,0) soluzio bat dela (nabaria deritzo) eta sistema karratua bada (ekuazioen kopurua = ezezagunen kopurua, hots, $m = n$), Rouche-Frobenius teorema ondoko esaldian adieraz daiteke:

> 6.1. PROPOSIZIOA: Sistema homogeneo karratu batek, soluzio nabaria ez ezik, soluzio gehiago izateko determinanteak zero izan behar du.

Frog.: Bere determinantea zero izango ez balitz $r = n$ beteko litzateke, eta orduan, sistema determinatua litzateke, hots, soluzioa bakarra izango luke, hau da, soluzio nabaria bakarrik.

adibidea: Esan zenbat soluzio dituen ondoko ekuazio-sistema honek:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 4z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\}.$$

Ebaz.: Homogeneoa eta karratua denez, nahikoa da bere determinantea kalkulatzea:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 -3 - (-8 + 1) = 0$ $\Rightarrow$ indeterminatua da (infinitu ditu, ∞^1, parametro baten arabera, zeren eta $r = 2$ denez $n - r = 1$ izango baita).

6.6. CRAMER SISTEMA

6.3. DEFINIZIOA: Ekuazio-sistema bat CRAMER sistemakoa dela esaten da ondoko baldintza hauek betetzen baditu:

- ekuazio- eta ezezagun-kopuru berdina du: $m = n$
- sistemaren A matrizea erregularra da (hots, $|A| \neq 0$)

Erregularra denez, $heA = n$ izango da eta ROUCHE-FRÓBENIUS teoremaren arabera soluzio bakarra izango du. Soluzio hori aurkitzeko ondoko erregela aplika daiteke:

CRAMER ERREGELA

CRAMER sistema baten soluzioa $x_1 = \dfrac{|M_1|}{|A|}, x_2 = \dfrac{|M_2|}{|A|}, \ldots\ldots, x_n = \dfrac{|M_n|}{|A|}$ da,

non M_i matrizea A matrizean i-garren zutabean C zutabea ordezkatuz lortzen den.

Frog.: Kontsidera dezagun ondoko sistema lineala eta izan bedi A bere matrizea**:**

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}.x_n = c_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}.x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}.x_n = c_n \end{array}\right\} \quad \text{eta} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

hemen, adibidez, $M_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ izango litzateke eta bere determinantea lehenengo zutabeko adjuntuetatik garatuz: $|M_1| = c_1.\ A_{11} + c_2.\ A_{21} + \ldots\ldots + c_n.A_{n1}$.

Orokorrean: $|M_i| = c_1.A_{1i} + c_2.A_{2i} + \ldots\ldots + c_n.A_{ni} \qquad \forall i = 1\ldots\ldots n$

Sistema idazkera matrizialean jartzen bada, $A.X = C \Rightarrow X = A^{-1}.C$ eta $|A| \neq 0$ direnez,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A) .C = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Beraz,

$$x_1 = (A_{11}.c_1 + A_{21}.c_2 + \dots\dots + A_{n1}.c_n) / |A| = \frac{|M_1|}{|A|}$$

....

$$x_i = (A_{1i}.c_1 + A_{2i}.c_2 + \dots\dots + A_{ni}.c_n) / |A| = \frac{|M_i|}{|A|}$$

....

$$x_n = (A_{1n}.c_1 + A_{2n}.c_2 + \dots\dots + A_{nn}.c_n) / |A| = \frac{|M_n|}{|A|}$$

adibidea: Ebatzi ondoko sistema hau: $\left.\begin{array}{l} 2x - y + 2z = 1 \\ x + 3y + z = 0 \\ -x - y + 4z = 2 \end{array}\right\}$

Ebaz.: Karratua denez, n = m = 3 da. Cramer sistemakoa den jakiteko |A| kalkulatu behar da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 1 - 2 - (-6 - 4 - 2) = 35 \neq 0.$$ Beraz, Cramer sistemakoa da.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{35} = \frac{-1}{35} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{35} = \frac{-5}{35} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{35} = \frac{16}{35}$$

EBAZPENA ALDERANTZIZKO MATRIZEA ERABILIZ

Gogora dezagun ekuazio-sistema modu matrizialean idatzi ahal dela: AX = C Cramer sistemakoa bada, soluzioa $X = A^{-1}.C$ eginez kalkulatzen da. Baina ez dago nahitaez Cramer erregelak egiten duen bezala egin beharrik. Alderantzizko matrizea beste modu batean kalkulatzen bada (unitate matrizean oinarrizko eragiketak eginez edo kalkulagailuz, esate baterako), nahikoa izango da gero $A^{-1}.C$ egitea soluzioa aurkitzeko (ikus ebatzitako 4. ariketa).

EBATZITAKO ARIKETAK

1. *Eztabaidatu eta ebatzi ondoko sistema hau*: $\left.\begin{array}{r} x-y+t=1 \\ 2y+z-3u=0 \\ x+y+4z-u=2 \\ 2x-2y+3z+t+2u=3 \end{array}\right\}$

Ebaz.:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} 3{:}E3-E1 \\ 4{:}E4-2E1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$3{:}E3-E2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) 4{:}E4-E3 \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eztabaida: r = 3 = r' $\Rightarrow$ sistema bateragarria da.
3 = r < n = 5 denez, indeterminatua da, eta n - r = 2 denez, soluzioa bi parametroren arabera jarri ahal izango da.

Ebazpena: sistema baliokidea hauxe da: $\left.\begin{array}{r} x-y+t=1 \\ 2y+z-3u=0 \\ 3z-t+2u=1 \end{array}\right\}$ eta z eta u parametro gisa erabiltzen badira (erosotasunagatik), soluzioa ondoko hau izango da:

$$\left\{\begin{array}{l} x=2-\frac{7}{2}z-\frac{1}{2}u \\ y=-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}u \\ z=z \\ t=-1+3z+2u \\ u=u \end{array}\right. \text{, non } z,u \in K.$$

2. Eztabaidatu eta ebatzi ondoko sistema hau $\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ 2x+y=0 \\ x-y=1 \\ 2x+3y=2 \end{array}\right\}$

Ebaz.: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots 2 \\ 2 & 1 & \vdots 0 \\ 1 & -1 & \vdots 1 \\ 2 & 3 & \vdots 2 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} \text{2: E2 -2E1} \\ \text{3: E3 –E1} \\ \text{4: E4 -2E1} \end{array}$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots 2 \\ 0 & 3 & \vdots -4 \\ 0 & 0 & \vdots -1 \\ 0 & 5 & \vdots -2 \end{pmatrix}$ eta $2 = r \neq r' = 3$ denez, bateraezina da.

3. Eztabaidatu eta ebatzi m parametroaren arabera ondoko sistema hau:

$$\left.\begin{array}{l} mx+my=2m+2 \\ 2x+(m+1)y+(m-1)z=m^2-2m+9 \\ (1-m)x+(2m+1)y+(2m+2)z=m \end{array}\right\}$$

Ebaz.: Sistema karratua denez (n = 3 = m), nahikoa da bere determinantea zero non den kalkulatzea. Horrela jakingo dugu zein balio aztertu behar diren bereziki.

$\begin{vmatrix} m & m & 0 \\ 2 & m+1 & m-1 \\ 1-m & 2m+1 & 2m+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 2 & m-1 & m-1 \\ 1-m & 3m & 2m+2 \end{vmatrix} = m. \begin{vmatrix} m-1 & m-1 \\ 3m & 2m+2 \end{vmatrix}$ =m.[(m - 1).(2m + 2) - (m - 1).3m] = m.(m - 1).(2m +2 - 3m) = m.(m - 1).(2 - m) eta zero egiten da m = 0, 1 eta 2 denean.

- Lehenengo kasua: $m \neq 0,1,2$ denean.

Cramer sistema da eta ekuazio-sistema *bateragarria eta determinatua* da. Dagoen soluzio bakarra Cramer erregela erabiliz kalkulatuko da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2m+2 & m & 0 \\ m^2-2m+9 & m+1 & m-1 \\ m & 2m+1 & 2m+2 \end{vmatrix}}{m.(m-1).(2-m)} = \frac{(-2m^3+m^2-8m-6)}{m(2-m)} =$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2m+2 & 0 \\ 2 & m^2-2m+9 & m-1 \\ 1-m & m & 2m+2 \end{vmatrix}}{m.(m-1).(2-m)} = \frac{2m^3-3m^2+6m+10}{m(2-m)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & m & 2m+2 \\ 2 & m+1 & m^2-2m+9 \\ 1-m & 2m+1 & 1-m \end{vmatrix}}{m(m-1).((2-m)} = \frac{-3m^3+4m^2-11m-2}{m(2-m)}$$

2. kasua m = 0 denean

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$ eta ikusten denez, r = 2 da eta r’ = 3 $\Rightarrow$ *bateraezina*

3. kasua m = 1 denean

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \to r = 2 = r' < n = 3 \Rightarrow$$

Bateragarria eta indeterminatua (∞^1)

sistema baliokidea hauxe da: $\left.\begin{array}{r} x+y=4 \\ 3y+4z=1 \end{array}\right\}$ eta y parametro gisa erabiliz gero, soluzioa honako hau izango da: $\left\{\begin{array}{l} x=4-y \\ y=y \\ z=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}y \end{array}\right.$, non $y \in K$.

4. kasua m = 2 denean

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 2: E2-E1 \\ 3: 2E3+E1 \end{array} \quad \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 12 & 12 & 10 \end{array}\right) \quad 3:E3 - 12E2 \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -26 \end{array}\right) \text{eta } 2 = r \neq r' = 3 \text{ denez} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textit{bateraezina}}$$

4. Kalkulatu eta ebatzi ondoko sistema hau: $\left.\begin{array}{r} x + z = 1 \\ 2x - y - z = 0 \\ x + 3y - z = 2 \end{array}\right\}$.

Ebaz.: Karratua denez, Cramer sistemakoa izango da baldin eta bere determinantea zero ez bada.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 - (-1 - 3) = 11.$ Ondorioz, Cramer sistemakoa da, hau da, bateragarria eta determinatua. Soluzioa aurkitzeko bi era daude:

a) Cramer erregela erabiliz:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{6}{11} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{7}{11} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{11} = \frac{5}{11}$$

b) lengoaia matriziala erabiliz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eta matrize horren alderantzizkoa kalkulatzeko bere adjuntua kalkulatu behar da:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \text{adj}A\,/11 = \frac{1}{11} . \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Beraz,}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 6/11, y = 7/11, z = 5/11$$

5. Eztabaidatu eta ebatzi parametroen arabera ondoko sistema hau:

$$\left.\begin{aligned} ax + by + z &= c \\ x + ay + bz &= 0 \\ ax + by + az &= c^2 \end{aligned}\right\} .$$

Ebaz.: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & c \\ 1 & a & b & 0 \\ a & b & a & c^2 \end{array}\right)$ 2: aE2 – E1 (hau egin daiteke $a \neq 0$ bada) 3:E3 – E1 $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & c \\ 0 & a^2 - b & ab - 1 & -c \\ 0 & 0 & a - 1 & c^2 - c \end{array}\right)$

Matrizearen heina r = 3 izateko $a.(a^2 - b).(a - 1)$ ezin da zero izan. Kasu horretan sistema bateragarria eta determinatua da. Cramer sistema arrunta da eta ez dugu ebatziko (soluzioa a, b eta c parametroen arabera adierazita geldituko da). Gainerako kasuetan:

$\boxed{\textbf{1.kasua}\text{: } a = 0}$ denean, sistema $\left.\begin{aligned} by + z &= 0 \\ x + bz &= 0 \\ by &= c^2 \end{aligned}\right\}$ da. Bi kasu daude:

1) b = 0 eta c = 0 dira $\Rightarrow$ z = x = 0. Sistema bateragarria eta indeterminatua da. Soluzioa honela adierazi ahal da: (0,y,0), non $y \in K$ den ($c \neq 0$ bada, bateraezina da).

2) $b \neq 0$ izatea $\Rightarrow$ sistema bateragarria eta determinatua da, eta soluzioa ondoko hau da, $y = c^2 / b$, $z = - c^2$, $x = b.c^2$.

$\boxed{\textbf{2.kasua}\text{: } a = 1}$ denean.

Matrizea hauxe da $\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & c \\ 0 & 1 - b & b - 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & c^2 - c \end{pmatrix}$ eta bi aukera daude:

1) b = 1 bada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & c^2 - c \end{pmatrix} \Rightarrow$ c zein den bi kasu daude:

- c = 0 bada, r = r’ = 1 < 3 = n $\Rightarrow$ *bateragarria eta indeterminatua* da (∞^2)
  Soluzioa z = - x - y denez, (x, y, x - y) adierazi ahal da
- $c \neq 0$ bada, $1 = r \neq r' = 2$ $\Rightarrow$ *bateraezina*

2) $b \neq 1$ bada, r = 2 bada eta c zein den, bi kasu daude:

- $c^2 - c = 0$ bada, (hau da, c = 0 edo 1 bada) $\Rightarrow$ r = r’ = 2 $\Rightarrow$ *bateragarria eta indeterminatua* da (∞^1). Sistema baliokidea hauxe da:

$$\left.\begin{array}{l} x + by + z = c \\ (1-b)y + (b-1)z = -c \end{array}\right\}$$ eta z parametro gisa erabiltzen bada, soluzioa hau da:

$$x = \frac{c}{1-b} - (1+b).z \qquad y = \frac{c}{b-1} + z \qquad z = z$$

- $c^2 - c \neq 0$ bada, $2 = r \neq r' = 3$ da, eta sistema *bateraezina* da.

3. kasua $b = a^2$ denean, matrizea hauxe da $\left(\begin{array}{ccc:c} a & a^2 & 1 & c \\ 0 & 0 & a^3-1 & -c \\ 0 & 0 & a-1 & c^2-c \end{array}\right)$

eta bi kasu daude:

1) a = 1 denean $b = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$; b = 1 kasua aztertuta dago eta b = -1 bada, eztabaida berdina egin behar da (lehen c-ren arabera egindakoa bezalakoa)

2) $a \neq 1 \Rightarrow r = 2$ eta sistemaren eztabaida c baliopean dago.

- c = 0 bada, $\left(\begin{array}{ccc:c} a & a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$ r' = 2 da eta sistema *bateragarria eta indeterminatua* da. Sistema baliokidea hauxe da $\left.\begin{array}{r} ax + a^2y + z = 0 \\ (a-1).z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 0$ eta $a \neq 0$ denez (kasu hori egina dago), x = -a.y. Ondorioz, soluzioa (-ay, y, 0) moduan adierazi ahal da, non $y \in K$ den.

- c = 1 bada, $\left(\begin{array}{ccc:c} a & a^2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^3-1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$ eta r' = 3 da $\Rightarrow$ *bateraezina*

6. Kalkulatu m (m,1,2.0), (1,0,m,1),(3,m,0,-1) bektoreak mendekoak izateko.

Ebaz.: Mendekoak izateko, x,y,z eskalarrek existitu behar dute (gutxienez batek ez du zero izan behar), non x (m,1,2,0) + y.(1,0,m,1) + z.(3,m,0,-1) = (0,0,0,0) den.

Beraz, ondoko sistema hau ebatzi behar da:

$$\left.\begin{array}{l} mx+y+3z=0 \\ x+mz=0 \\ 2x+my=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x=-mz \\ y=z \\ \left.\begin{array}{l} m(-mz)+z+3z=0 \\ 2.(-mz)+m.z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (4-m^2)z=0 \\ -mz=0 \end{array}\right\} \end{array}$$

$m \neq 0, \pm 2$ bada, $z=0 \Rightarrow x=y=0$ da. Ondorioz, sistema independentea da.
$m=0$ bada, $4z=0 \Rightarrow z=0=x=y$ da. Ondorioz, independenteak dira.
$m=\pm 2$ bada, $\pm 2.z=0 \Rightarrow z=0=x=y$ da. Beraz, kasu honetan ere independenteak dira.
Ondorioz, m guztientzat independenteak dira.

7. *Eztabaidatu eta ebatzi n parametroaren arabera ondoko sistema hau:*

$$\left.\begin{array}{r} nx-3y-z+t=0 \\ x+y+nz-2t=0 \\ x+6y+7z-7t=0 \end{array}\right\}$$

Ebaz.: Sistema homogeneoa da, eta ondorioz, bateragarria. Gainera, heina ezin da 3 baino handiagoa izan, eta n = 4 denez, infinitu soluzio egongo dira (indeterminatua). Soluzioak kalkulatzeko sistemaren matrizeari Gauss metodoa aplikatuko zaio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & n & -2 \\ 1 & 6 & 7 & -7 \\ n & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3:E3-nE1]{2:E2-E1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & n & -2 \\ 0 & 5 & 7-n & -5 \\ 0 & -3-n & -1-n^2 & 1+2n \end{pmatrix} \xrightarrow{3:5E3+(n+3).E2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & n & -2 \\ 0 & 5 & 7-n & -5 \\ 0 & 0 & 16+4n-6n^2 & -10+5n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & n & -2 \\ 0 & 5 & 7-n & -5 \\ 0 & 0 & (-6n-8)(n-2) & 5(n-2) \end{pmatrix}$$

Beraz, hiru kasu daude $(-6n-8).(n-2) \neq 0$ denean (hau da, n –4/3 edo 2 ez denean) eta $(-6n-8).(n-2)=0$ denean:

- **$n \neq 2, -4/3$** denean, heina 3 izango da. Beraz, $n-r=1$ da (∞^1) eta soluzioak honako hauek dira:

$$x=\frac{15}{6n+8}t \qquad y=\frac{7n+1}{6n+8}t \qquad z=\frac{5}{6n+8}t$$

- $n = -4/3$ denean, matrizea honela gelditzen da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4/3 & -2 \\ 0 & 5 & 25/3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -50/3 \end{pmatrix}$$ eta ikusten den bezala $r = 3$ da. Hau da, $n - r = 1$.

Beraz, indeterminatua da (∞^1 soluzio) eta soluzioak parametro bakar baten arabera jarriko dira:

- $-50/3.t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0.$
- $5y + 25/3.z - 5t = 0 \quad \Rightarrow \quad y = - 5/3.z$
- $x + y - 4/3z - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4/3z + 5/3z = 3z$

Hau da, $(x,y,z,t) = z.(3, -5/3, 1, 0)$, non $z \in R$ den.

- **n = 2** denean, matrizea honela gelditzen da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ eta ikusten den bezala $r = 2$ da. Hau da, $n - r = 2$.

Beraz, indeterminatua da (∞^2 soluzio) eta soluzioak bi parametroren arabera adieraziko dira.

- $5y + 5z - 5t = 0 \quad \Rightarrow \quad y = t - z$
- $x + y + 2z - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = - z - t + 2$

Hau da, $(x,y,z,t) = (-z - t + 2, t - z, z, t)$, non z,t $z \in R$ diren.

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Eztabaidatu eta ebatzi ondoko sistema hauek:

a) $\left.\begin{aligned} x-y+2z&=1\\ 2x+y+z&=3\\ -x+4y-5z&=4 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x+2z&=3\\ y-z&=1\\ 2x-3y+7z&=3 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 2x+t&=2\\ z-3t&=1 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} x-y+2z+3t+2u&=1\\ 2x+y-3z+3u&=0\\ x+5y-12z-9t&=-3 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} 3x+y+z&=1\\ x-y+2z&=0\\ x+3y-3z&=1\\ -8y+10z&=-2 \end{aligned}\right\}$ f) $\left.\begin{aligned} 2x+z&=0\\ y+3z&=0\\ x-4y&=0 \end{aligned}\right\}$

2. Esan Cramer sistemak diren, eta hala badira, ebatzi honako hauek Cramer erregela erabiliz eta alderantzizko matrizea erabiliz:

a) $\left.\begin{aligned} x-2y&=3\\ 2x+3y&=1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x-3y+2z&=1\\ 3x+2y+z&=0\\ y-z&=4 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x+3y-z&=2\\ 4x-y+2z&=1\\ 2x+10y-5z&=3 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} x+y-2z&=1\\ y-t&=2\\ x+2z+3t&=0\\ 3y-z&=2 \end{aligned}\right\}$

3. Eztabaidatu eta ebatzi parametroen arabera ondoko sistema hauek:

a) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ x-2y+az&=b\\ -2x+y+3z&=5 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 4x-2y+mz&=6\\ x+y-3z&=0\\ -x-3y+2z&=6 \end{aligned}\right\}$

c) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x-ay+3z=4 \\ 3x-3y+4z=7 \\ 5x-(a+b)y+7z=8+b \end{array}\right\}$$

d) $$\left.\begin{array}{r} x-my+z=0 \\ x-y-z=0 \\ y+z=0 \\ 2x-y-nz=0 \end{array}\right\}$$

e) $$\left.\begin{array}{r} mx+y+z=n \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right\}$$

f) $$\left.\begin{array}{r} ax+2y+3z+u=6 \\ x+3y-z+2u=b \\ 3x-ay+z=2 \\ 5x+4y+3z+3u=9 \end{array}\right\}$$

g) $$\left.\begin{array}{l} 2.(a+1)x+3y+az=a+4 \\ (4a-1)x+(a+1)y+(2a-1)z=2a+2 \\ (5a-4)x+(a+1)y+(3a-4)z=a-1 \end{array}\right\}$$

h) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=a \\ x+y+z=b \\ x+y+z=c \end{array}\right\}$$

4. Kalkulatu a eta b parametroen arteko erlazioa ondoko sistemak soluzio nabaria ez ezik soluzio gehiago ere izan ditzan:

$$\left.\begin{array}{r} ax-y+z-t=0 \\ x-y-3z+t=0 \\ 2x-by+z-2t=0 \\ x+y-bz+t=0 \end{array}\right\}$$

5. Kalkulatu a, b eta c parametroen arteko erlazioa ondoko sistema bateragarria izan dadin:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y=5 \\ 2x+y=b \\ 3x+y+c-a=0 \end{array}\right\}$$

7. ESPAZIO AFINA

Bigarren hezkuntzako ikasleek plano eta espazio arrunteko zuzenak eta planoak erabiltzen dituzte, nahiz eta kontzeptu horien egitura erabat finkatuta ez egon. Puntu, zuzen eta planoen kontzeptuaz intuitiboki jabetzen dira eta ematen diren definizio eta propietateek entitate geometriko erabilgarri bat eratzen dute, non ideia analitiko bakoitzari irudi grafiko bat egokitzea posible den.

Kapitulu honen helburua kontzeptu horiek formalizatzea eta geometria modu axiomatiko baten bitartez aurkeztea da. Hala ere, plano eta espazio arrunteko irudi grafikoak erabiltzen jarraituko dugu zenbait ideia hobeto ulertzeko.

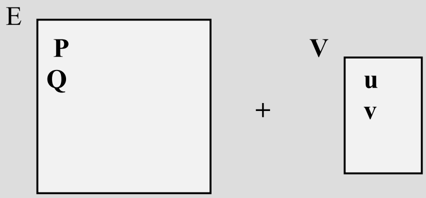
7.1. DEFINIZIOA

7.1. DEFINIZIOA: Izan bedi E multzo bat, non $+_V$ kanpo-eragiketa bat dagoen (V K gorputzaren gaineko bektore-espazioa da) eta ondoko bi propietate hauek betetzen diren:

1. $\forall P,Q \in E \quad \exists v \in V \,/\quad Q = P + v$

2. $\forall P \in E$ eta $\forall u,v \in V$ ondokoa betetzen da:

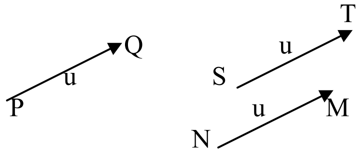
$$(P + u) + v = P + (u + v)$$



Orduan, $(E, +_V)$ **espazio afina** dela esan ohi da eta bere elementuei puntu deritze (bere dimentsioa V-koa da)

7.2. BEKTORE ASKEAK: ExE ESPAZIOA

Lehenengo axiomaren arabera E-ko edozein bi punturi bektore bat dagokie (Q = P + v betetzen duen v bektorea). Baina posible da puntu-bikote askori v bektore bera egokitzea.



Ondorioz, bikoteen multzoan, hots, ExE = {PQ, NM, ST, ...} multzoan, R erlazioa definitu ahal da bektore berari lotuta dauden bikote guztiak baliokide eginarazteko.
ExE multzoan PQ eta NM bikoteak erlazionatuta daude, baldin eta soilik baldin bi bikote horiei bektore bera badagokie.

ExE espazioan R erlazioa baliokidetasunekoa da (frogatzea irakurlearen esku uzten da) eta erlazio horrek klasez zatituko du ExE multzoa. Zatidura-multzoa $\frac{\text{ExE}}{\text{R}}$ idazten da eta bere gaiak izendatzeko $\overline{\text{PQ}}$ erabiltzen da (edo besterik gabe PQ).

$\frac{\text{ExE}}{\text{R}} = \{\text{PQ} \;/\; \text{P,Q} \in \text{E}\}$ zatiketa-multzoan NM bikotea PQ klaseko elementua da, baldin eta soilik baldin dagozkien bektoreak berdinak badira, hau da, $\begin{cases} \text{M} = \text{N} + \text{v} \\ \text{Q} = \text{P} + \text{w} \end{cases} \Rightarrow \text{v} = \text{w}$ betetzen bada.

$\frac{\text{ExE}}{\text{R}}$ multzoari bektore-espazioaren egitura eman dakioke modu arruntean V-ko bektore-egitura eramanez. Hori ikusteko f aplikazioa defini dezagun:

$\text{f} : \frac{\text{ExE}}{\text{R}} \to \text{V}$, non $\text{f}(\text{PQ}) = \text{v} \;/\; \text{Q} = \text{P} + \text{v}$. f bijektiboa den:

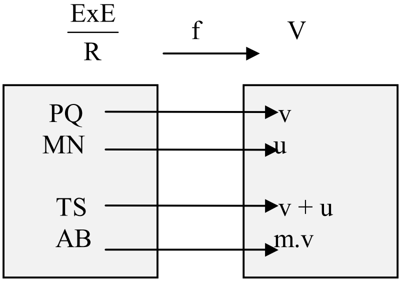
- *injektiboa*: agerikoa da, zeren eta f(PQ) = f (RS) bada, $\Rightarrow \begin{cases} \text{Q} = \text{P} + \text{v} \\ \text{S} = \text{R} + \text{v} \end{cases} \Rightarrow \text{PQ} = \text{RS}$

- *supra*: V-ko edozein v bektoreri $\frac{\text{ExE}}{\text{R}}$-ko PQ klase bat dagokio. Hau 7.1. definizioko lehenengo axiomak ziurtatzen du, zeren eta E-ko edozein M puntu hartuz gero M + v zerbait aterako baita ($+_{\text{V}}$ kanpo-eragiketa da eta); demagun M + v = N dela. Beraz, f (MN) = v da eta MN bikotea klase batean egongo da.

Ondorioz, f^{-1} existitzen da eta V-ko egitura $\frac{ExE}{R}$ multzora eramango du. Horretarako nahikoa da $\frac{ExE}{R}$ espazioan barneko eta kanpoko bi eragiketa hauek definitzea:

- *Barne-eragiketa*: PQ + MN = TS da, non TS = f^{-1}(v+ u) eta $\begin{cases} v = f(PQ) \\ u = f(MN) \end{cases}$ diren.

- *Kanpo-eragiketa*: m. PQ = AB da, non AB = f^{-1} (m.v) den.



f^{-1} aplikazioak (f nola definitu den ikusita dela medio) $\frac{ExE}{R}$ multzoari V-k duen bektore-espazioko egitura eramango dio eta hemendik aurrera berdin izango da bataz edo besteaz aritzea isomorfoak baitira. Hau da, Q = P + v bada, berdin izango da PQ edo v jartzea.

($\frac{ExE}{R}$; +, $\cdot_K$), beraz, bektore-espazioa da emandako eragiketekin eta bere bektoreei bektore aske deritze (ExE-ko elementuei, aldiz, bektore finko deitzen zaie, nahiz eta bektore-espaziorik ez osatu).

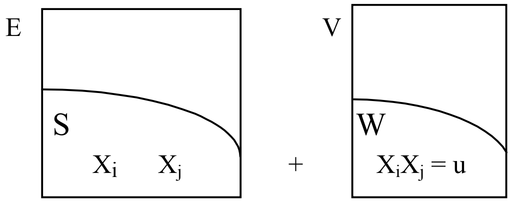
Espazio afin garrantzitsuenak ***planoa*** (dagokion bektore-espazioa R^2 denean) eta ***espazio arrunta*** (dagokion bektore-espazioa R^3 denean) dira.

PROPIETATEAK

1. *PP = o* $\forall P \in E$ Frog.: Demagun v dela P + v = P betetzen duena. Bigarren axiomaren arabera (P + v) + o = P + (v + o); beraz, P + o = P + v = P $\Rightarrow$ v = o
2. *PQ = - QP* $\forall P,Q \in E$ Frog.: Demagun Q = P + v eta P = Q + w direla; orduan, P = (P + v) + w = P + (v + w) eta aurrekoaren arabera v + w = o $\Rightarrow$ v = - w.
3. *AB + BC = AC* $\forall A,B,C \in E$ Frog.: Demagun $\begin{cases} B = A + u \\ C = B + v \\ C = A + w \end{cases}$; orduan, A + w = B + v $\Rightarrow$ A + w = (A + u) + v $\Rightarrow$ A + w = A + (u + v) $\Rightarrow$ w = u + v (f.n.z.b.)

7.3. AZPIESPAZIO AFINA (edo BARIETATE LINEALA)

7.2. DEFINIZIOA: Izan bedi $(E,+_V)$ espazio afin bat eta $S \subset E$. Esaten da S E-ko azpiespazio afin bat dela $W = \{X_iX_j \,/\, X_i,X_j \in S\}$ V-ko bektore-azpiespazioa bada.



Beste modu batera esanda:
S azpiespazio afina da $\Leftrightarrow$ V-ko W bektore-azpiespazioa existitzen da, non:
- $\forall\, X_i,X_j \in S \;\Rightarrow\; X_iX_j \in W$ *
- $\forall X_i \in S$ eta $\forall u \in W \Rightarrow X_i + u \in S$ **

7.1. PROPOSIZIOA: S azpiespazio afina bada eta P, berriz, bere puntu bat, dagokion W bektore-azpiespazioa hauxe da: $U = \{PX \,/\, X \in S\}$.

Frog.: $W = \{X_iX_j \,/\, X_i,X_j \in S\}$ eta $U = \{PX \,/\, X \in S\}$ berdinak direla ikusiko dugu:
- $W \subseteq U$: izan bedi $X_iX_j \in W$ eta izan bedi v, non $X_1 + v = X_j$ den.
Orduan, $A = P + v$ S-koa izango da (**). Beraz, $PA = X_iX_j \Rightarrow X_iX_j \in U$.
- $U \subseteq W$: izan bedi $PX \in U$. P eta X S-koak direnez, PX W-koa da (*).

KARAKTERIZAZIOA

Aurreko proposizioaren arabera $(E, +_V)$ espazio afin baten S azpiespazio afinak erabat definituta gelditzen dira P puntu bat eta W azpiespazio bat emanez:

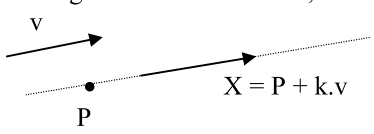
$$S = \{P + u \,/\, u \in W\}$$

W bektore-azpiespazioari S-ren ***noranzko*** deritzo eta bere dimentsioa S-ren dimentsioa da.

- Zero dimentsioko barietate linealak *puntuak* dira ($P + \{o\} = P$ baitira).

- Bat dimentsioko barietateei *zuzen* deritze:

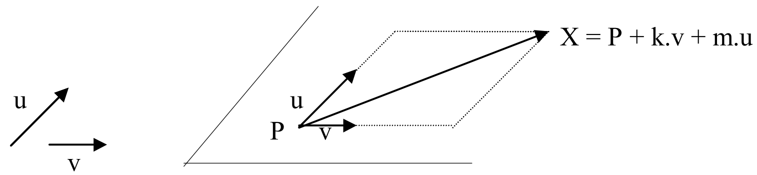
Izan bitez S dimentsioko barietate lineal bat eta W dagokion bektore-azpiespazioa. Bat dimentsiokoa denez, bere oinarria v bektore bakarrarekin adierazi ahal da eta gainerako bektore guztiek k.v itxura dute, hau da, $W = \{k.v \,/\, k \in K\}$.



Bektore hauek paraleloak direla esaten da. P puntu bat finkatuz gero gainerako puntu guztiak (hau da, $X = P + k.v$) lerrokatuak egongo dira, zuzen bat osatuz.

- Bi dimentsioko barietateei *plano* deritze:

Kasu honetan, W = {k.v + m.u / k,m $\in$ K} bi dimentsiokoa da eta bere edozein oinarri u,v bi bektoreez osatuta dago. S-ko P puntu bat finkatuz gero, gainerakoak P + k.v + m.u eginez sortzen dira eta planokideak izango dira.



- n dimentsioko barietateak X = P + $k_1.u_1$ + $k_2.u_2$ + ...+ $k_n.u_n$ adieraziko dira, non {u_1, ...u_n} bektore-sistema aske bat den (W-ko oinarri bat) eta P E-ko edozein puntu.

Gehienetan S = P + W idazten da. Kontuan hartuz P + W horrekin P puntuari W-ko bektoreak gehitzen zaizkiola adierazten dela (eta ez W azpiespazio bezala)

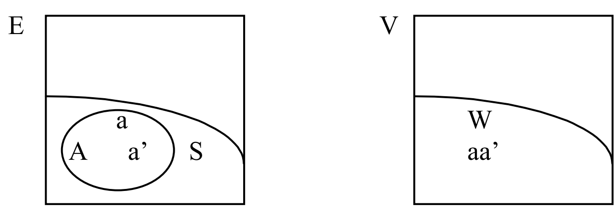
PUNTU-FAMILIA BATEN BIDEZ SORTUTAKO AZPIESPAZIO AFINA

Izan bedi A multzoa (E ; $+_V$) espazio afinaren azpimultzoa. Kontsidera ditzagun A barnean duten E-ko azpiespazio afin guztiak. Familia hori ez da hutsa, zeren eta gutxienez, E multzoa familia horrena baita. Izan bedi S familia horren azpiespazio afin bat. S = a + U adierazi ahal izango da, non a A-ko edozein puntu den eta U$\subset$V bere noranzkoa.

A-ko beste a' puntu bat hartzen bada, aa' $\in$ U izango da. Orduan, U-k barruan izango ditu A-ko aa' puntu-bikote guztiei dagozkien bektoreak.

A-ko puntu-bikote guztiei dagozkien bektoreak barruan dituen U bektore--azpiespazioa bada, A-ko edozein a punturentzat S = a + U azpiespazio afinak barruan izango du A.

Ondorioz, A-ko puntu-bikote guztiei dagozkien bektoreek sortutako bektore--azpiespazioa W baldin bada (hau da, W-ren sistema sortzailea {aa' / a,a'$\in$A} da), W aa' bikoteak barruan dituen bektore-azpiespaziorik txikiena izango da. Ondorioz, $\forall$a$\in$A, S = a + W azpiespazio afina izango da, eta gainera, A barruan dituen azpiespazio afinik txikiena. S azpiespazio afin hori A-tik sortutakoa dela esaten da.



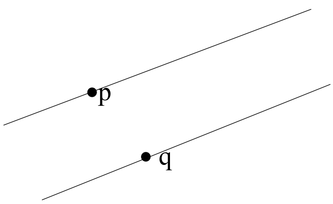
AZPIESPAZIO AFINAK BALIOKIDETASUN-KLASE BEZALA

Izan bedi $(E\ ;\ +_V)$ espazio afina eta $U \subset V$ bektore-azpiespazioa. Defini dezagun ondoko R erlazioa hau:

$$\forall p,p' \in E \qquad p\ R\ p' \iff pp' \in U$$

erlazio hau baliokidetasunekoa da:

- $p\ R\ p$ zeren eta $pp = o \in U$
- $p\ R\ p' \Rightarrow pp' \in U \Rightarrow p'p \in U \Rightarrow p'\ R\ p$
- $p\ R\ p'$ eta $p'\ R\ p'' \Rightarrow pp' \in U$ eta $p'p'' \in U \Rightarrow pp'' = pp' + pp'' \in U$ $\Rightarrow p\ Rp''$.



U noranzkoa duen azpiespazio afin bakoitza baliokidetasun-klase bat da. Esate baterako, p puntuaren klasea $p' = p + U = \{p' \mid p' = p + u, u \in U\}$ da.

U bat dimentsiokoa bada ($U = \{\lambda.u\}$) orduan klase guztiak zuzen paraleloak dira.

PUNTU INDEPENDENTEAK

Izan bedi F r dimentsioko E_n espazio afin baten azpiespazio afina. Izan bedi W_r dagokion bektore-azpiespazioa (noranzkoa) eta $\{v_1, ..., v_r\}$ bere oinarri bat. Hots,

$$F = O + \lambda_1.v_1 + ... + \lambda_r.v_r \text{ non } \lambda_i \in K \text{ den.}$$

1 dimentsioko $\lambda_1.v_i$ azpiespazioei V_i deitzen bazaie, aurrekoa honela ere adierazi ohi da:

$$F = O + V_1 + ... + V_r$$

Izpi bakoitzetik puntu bat hartzen bada, $\left.\begin{array}{l} P_1 = O + \lambda_1.v_1 \\ .... \\ P_r = O + \lambda_r.v_r \end{array}\right\}$ lortzen den $\{P_1, ..., P_r\}$

puntuak independenteak direla esaten da eta $\{O, P_1, ..., P_r\}$ puntuak ere independenteak direla esaten da. Horrez gain, F azpiespazio afina erabat finkatzen dute:

$$F = \{X \mid X = O + \lambda_1.OP_1 + ... + \lambda_r OP_r\}$$

X puntu bat F-koa izateko $\{OX, OP_1, ..., OP_r\}$ bektore-sistemak mendekoa izan behar du, eta ondorioz, $\{XO, XP_1, ...,XP_r\}$ ere mendekoa izango da, $OP_i = OX + XP_i$ baita.
Bi puntu independenteak dira desberdinak badira, hiru lerrokatuta ez badaude eta lau planokideak ez badira.

Horrek esan nahi du zuzen bat finkatzeko, esate baterako, nahikoa dela bi puntu independente (desberdinak), O eta P, finkatzea: $X = O + \lambda.OP$.
Plano bat finkatzeko hiru puntu independente (lerrokatuta ez izatea) behar dira, O,P,Q adibidez: $X = O + \lambda_1.OP + \lambda_2.QP$.

7.4. HIPERPLANOAK

Izan bedi E espazio afin bat eta V K gorputzaren gaineko dagokion bektore--espazioa. Demagun F E-ren azpiespazio afin bat dela eta U dagokion noranzkoa. Hau da, $F = P + U$.

7.3. DEFINIZIOA: F *hiperplano*a dela esaten da U bektore-azpiespazioa maximala baldin bada.

Ondorioz, hiperplanoak azpiespazio afin maximalak dira (hau da, ez dira beste azpiespazio baten barnean egongo, E espazioan izan ezik). V-ren dimentsioa n bada, bere azpiespazio maximalen dimentsioa, eta ondorioz hiperplanoena, n - 1 izango da.

7.1.TEOREMA**:** $F = P + U$ edozein hiperplanori $f : V \rightarrow K$ forma lineal ($f \neq o$) bat dagokio, non $F = \{X \in E / f(PX) = 0\}$ den eta, aldi berean, $f : V \rightarrow K$ forma lineal bat bada eta $P \in E$, orduan, $F = \{X \in E / f(PX) = 0\}$ hiperplano bat da.

Frog.: $\Rightarrow$ F hiperplanoa denez U azpiespazio maximala da. 3.2 teoremaren arabera, zero ez den f forma lineal bat existituko da, non f-ren nukleoa U den.
Hots, $U = \text{Ker } f = \{u \in V / f(u) = 0\}$.
Beste aldetik, $F = P + U$ da, hots, $F = \{X / X = P + u \quad u \in U\}$, baina $u = PX$ eta $f(PX) = f(u) = o$ denez $\Rightarrow F = \{X / f(PX) = 0\}$.

$\Leftarrow$ alderantziz, $f : V \rightarrow K$ forma lineal bat bada, 3.2 teoremaren arabera, $U = \text{Ker } f$ V-ko azpiespazio maximala da eta $F = P + U = \{X \in E / PX \in U\} = \{X \in E / f(PX) = 0\}$ hiperplano bat da.

EKUAZIOA

Izan bedi F = P + U hiperplano bat eta f dagokion forma lineala, hots, $F = \{X\in E \,/\, f(PX) = 0\}$. Orduan, $f(PX) = 0$ erlazioari hiperplanoaren ekuazio deritzo.

PX bektorea $B = \{e_1, e_2, ...e_n\}$ oinarriarekiko jartzen bada, $PX = x_1.e_1 +......+ x_n.e_n$ orduan, $f(PX) = 0$ ekuazioa $x_1.f(e_1) +......+ x_n.f(e_n) = 0$ gelditzen da eta $f(e_i) = a_i$ deituz $x_1.a_1 +.....+x_n.a_n = 0$ idatz daiteke.

3.6. proposizioaren arabera, azpiespazio maximal baten ekuazio guztiak $m.f(v) = 0$ dira (non $m\in K$ den), eta ondorioz, hiperplanoaren ekuazioak $m.f(PX) = 0$ izango dira.

Kontuan hartu $Q \in E$ edozein punturentzat QX = QP + PX dela, nahiz eta Q puntu hori F hiperplanokoa ez izan. Beraz, f (QX) = f (QP) + f (PX), eta f (QP) = a egiten bada, $F = \{X\in E \,/\, f(PX) = 0\} = \{X\in E \,/\, f(QX) = a\}$ eta bere ekuazioa f (QX) = a moduan ere idatzi ahal izango da.

7.5. AZPIESPAZIO AFINEN EBAKETA

7.4. DEFINIZIOA: Izan bitez S_i (i = 1.....p) E-ko azpiespazio afinen familia bat. Beraien **ebakidura** $\cap S_i$ idazten da eta ondoko hau da: $\cap S_i = \{x \,/\, x\in S_i \ \forall i\}$.

Argi dago ebakidurak ez duela zertan beti azpiespazio afina izan (ebakidura, adibidez, hutsa izan daiteke).

7.2. PROPOSIZIOA: Izan bitez S = P + U eta R = Q + W $(E\, ; +_V)$ espazio afin baten bi barietateak. Orduan, $S \cap R \neq \phi \iff PQ\in U + W$

Frog.: $\Rightarrow$ demagun $S \cap R \neq \phi$ dela. Izan bedi $M\in S \cap R$, orduan M = P + u eta M = Q + w, eta ondorioz, $PQ = PM + MQ = u - w \in U + W$
$\Leftarrow$ alderantziz, $PQ\in U + W$ bada, u eta w existitzen dira, non PQ = u - w den. Orduan, M = P + u puntua S-koa da eta M = P + u = P + (w + PQ) = (P + PQ) + w = Q + w denez, R-koa ere izango da. Beraz, $S \cap R \neq \phi$ izango da.

adibidea: Aztertu X = P(1,0,2) + m.(1,,1,2) eta X = Q(0,1,0) + n.(1,2,1) zuzenek elkar ebakitzen duten (7.7. puntuan ikusiko da nola jartzen zaizkien koordenatuak puntuei).

Ebaz.: Nahikoa da PQ = (-1,1,-2) bektorea, u(1,1,2) eta v(1,2,1) bektoreen konbinazio lineala den ala ez aztertzea (hau da, $PQ\in U+V$ betetzen den).

Horretarako hiru bektoreen determinantea kalkulatuko dugu:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ eta ondorioz, } PQ \notin U + W \Rightarrow \text{ ez dute elkar ebakitzen.}$$

7.3 PROPOSIZIOA: $S_i = P_i + U_i$ azpiespazio afinen ebakidura hutsa ez bada, $\cap S_i$ beste azpiespazio afin bat da, $\cap S_i = P + \cap U_i$ hain zuzen ere, non P ebakidura horren puntu bat den.

Frog.: Izan bedi $x \in \cap S_i$. Orduan, $u \in U_i$ $(\forall i)$ existitzen da, non $x = P + u$ den. Beraz, $u \in \cap U_i$, eta ondorioz, $x \in P + \cap U_i$.
Alderantziz, $x \in P + \cap U_i$ bada, $x = P + u$ izango da, non $u \in \cap U_i$, eta ondorioz, $x \in P + U_i = S_i$ i guztientzat $\Rightarrow$ $x \in \cap S_i$.

7.1. KOROLARIOA: $S_1 = P + U$ eta $S_2 = Q + W$ bi azpiespazio afinek noranzko betegarriak badituzte (hots, $V = U + W$ eta $U \cap W = \{o\}$), orduan, puntu komun bat dute eta puntu bakarra da.

Frog.: Bistan denez, PQ bektorea V espaziokoa da, eta ondorioz, $PQ \in U + W$, eta 7.2. proposizioaren arabera $S_1 \cap S_2$ ez da hutsa izango.
Demagun $A \in S_1 \cap S_2$ dela; 7.3. proposizioaren arabera $S_1 \cap S_2 = A + U \cap W$ da, baina $U \cap W = \{o\}$ denez, $S_1 \cap S_2 = A + \{o\} = A$ da. Hots, A puntu bakarra du.

Egoera hau gertatzen da, esate baterako, plano afinean, paralelo ez diren bi zuzenen artean edo espazio afinean, paraleloak ez diren zuzen eta plano baten artean.

7.6. AZPIESPAZIO AFINEN BATUKETA

Orokorrean azpiespazio afinen bildura ez da azpiespazio bat izango (espazioan,adibidez, zuzen eta plano baten bildura ez da barietate bat izango, zuzena planoaren barruan dagoenean salbu).

7.5. DEFINIZIOA: $S_1, S_2, \ldots, S_n$ azpiespazio afinen **batura** S_i guztiak barruan dituen azpiespaziorik txikiena da. $\sum_{i=1}^{n} S_i$ idazten da.

Esate baterako, planoan, paraleloak ez diren bi zuzenen arteko batura plano osoa da. Espazioan, elkar ebakitzen duten bi zuzenen arteko batura plano bat da, baina elkar ebakitzen ez badute, batura espazio osoa da. Ikusten den bezala, azpiespazioen ebakidura hutsa izan ala ez izan emaitza zeharo desberdinak lortzen dira.

7.4. PROPOSIZIOA: $S_i = P_i + U_i$ azpiespazioen ebakidura hutsa ez bada eta ebakidura horren puntu bat P puntua bada, beraien batura $\sum_{i=1}^{n} S_i = P + \sum_{i=1}^{n} U_i$ azpiespazio afina da.

Frog.: $R = P + \sum_{i=1}^{n} U_i$ izendatzen bada, $\sum_{i=1}^{n} S_i \subset R$ eta $R \subset \sum_{i=1}^{n} S_i$ betetzen direla frogatu behar da.

$\Rightarrow$ demagun $X \in S_i$ dela; orduan, $X = P_i + u_i \quad \forall i = 1, ..., n$ izango da, non $u_i \in U_i \subset \sum_{i=1}^{n} U_i$ den, eta ondorioz, $X \in R$; hots, $S_i \subset R$. Orduan, $\cup S_i \subset R$ izango da.

Baina $\cup S_i \subset \sum_{i=1}^{n} S_i$ zeren eta hau $\cup S_i$ barruan duen azpiespaziorik txikiena baita.

Beraz, $\begin{cases} \cup S_i \subset \sum S_i \\ \cup S_i \subset R \end{cases}$ gertatzen dira eta $\sum_{i=1}^{n} S_i$ txikiena denez, $\sum_{i=1}^{n} S_i \subset R$ bete beharko da.

$\Leftarrow$ demagun orain $X \in R$. Orduan, $X = P + u_1 + u_2 + ...+ u_n$ da, non $u_i \in U_i$ den. Har dezagun orain $y_i = P + u_i$. Orduan, $y_i \in S_i$, eta ondorioz, $y_i \in \sum_{i=1}^{n} S_i$. Beraz, u_i dago $\sum_{i=1}^{n} S_i$ azpiespazioko noranzkoaren barne $\forall i$, eta ondorioz, $u_1 + ...+ u_n$ ere horren barne dago. Beraz, $X \in \sum_{i=1}^{n} S_i$ frogatu nahi zen bezala.

DIMENTSIOAREN FORMULA

7.5. PROPOSIZIOA: S_1 eta S_2 ebakidura hutsa ez duten bi barietate linealak badira, orduan $\dim S_1 + \dim S_2 = \dim (S_1 + S_2) + \dim (S_1 \cap S_2)$

Frog.: $S_1 = P + U_1$ eta $S_2 = P + U_2$ badira, aurreko proposizioetan ikusi den bezala, $(S_1 + S_2)$ eta $(S_1 \cap S_2)$ azpiespazioen noranzkoak $U_1 + U_2$ eta $U_1 \cap U_2$ dira, hurrenez hurren, eta $\dim (U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2)$ betetzen denez, frogatuta dago.

Kontuan hartu behar da bi azpiespazio horien ebakidura hutsa bada, proposizioa ez dela betetzen (S_1 eta S_2 espazioan batak bestea ebaki gabe gurutzatzen diren bi zuzen badira, orduan dim S_1 = dim S_2 = 1, dim $(S_1 + S_2) = 3$ eta dim $(S_1 \cap S_2) = 0$ izango dira).

7.7. ERREFERENTZIA-SISTEMAK

Orain arte esandakoak edozein ordenako sistemarentzat balio du, baina hemendik aurrera dimentsio finituko espazioekin jorratuko da.

Izan bedi E (V_n, K) espazio afin bat eta demagun O$\in$ E puntu bat eta $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ V-ko oinarri bat finkatzen ditugula. Posible da ondoko g, h eta i aplikazioak definitzea:

- $g : E \to \dfrac{ExE}{R}$: $g(P) = OP \quad \forall P \in E$
- $h : \dfrac{ExE}{R} \to V$: $h(OP) = v \quad / \quad P = O + v$
- $i : V \to K^n$: $i(v) = (k_1, k_2, ..., k_n)$, non $v = k_1.e_1 + k_2.e_2 + ... + k_n.e_n$

Beraz, $f = i_o h_o g$ aplikazioa E-tik $\to K^n$-ra joango da.

7.6. PROPOSIZIOA: $f = i_o h_o g$ aplikazioa bijektiboa da.

Frog.:
a) g bijektiboa da:

1. Injektiboa: demagun g (P) = g (Q). Orduan, OP = OQ eta PQ = PO + OQ = - OQ + OQ = o $\Rightarrow$ P = Q.

2. Supra: Izan bedi AB $\in \dfrac{ExE}{R}$. Orduan, $\exists v \in V$ / B = A + v. Bektore hori O puntuari gehitzen bazaio (C = O + v), sortzen den OC bektorea AB klasekoa da (AB $\approx$ OC). Ondorioz, v bektore bat aurkitu da, non g (v) = AB = OC den.

b) h bijektiboa da: 7.2. puntuan frogatu da.

c) i bijektiboa da: bektore bakoitzari bere koordenatuak oinarri batean egokitzea bijektiboa dela frogatuta dago 3. kapituluan.

Horrek puntu bakoitzari, era biunibokoan, koordenatuak egokitzeko aukera ematen du (P puntu bakoitzari OP bektorearenak, hain zuzen)

ERREFERENTZIA-SISTEMA

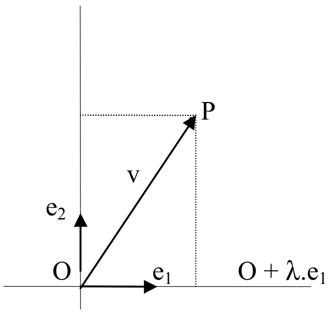
7.6. DEFINIZIOA: $O \in E$ puntu finko batez eta $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ V-ko oinarri batez osatutako sistemari ***erreferentzia-sistema*** deritzo. $R = \{O ; \{e_1, e_2, ...e_n\}\}$ idazten da.

O puntuari ***erreferentzia-jatorri*** deitzen zaio.

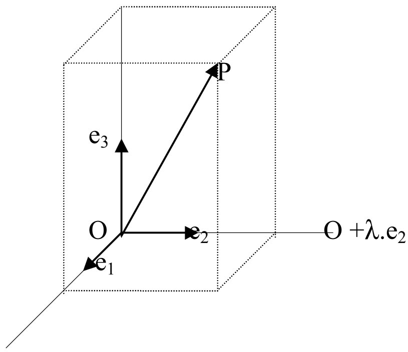
Beraz, O puntu bat eta $B =\{e_1, e_2, ...e_n\}$ oinarri bat finkatuz gero, E-ko edozein P punturi $(k_1, k_2, ..., k_n)$ eskalarrak dagozkio, eta alderantziz. Eskalar horiei P puntuaren koordenatuak $R = \{O ; \{e_1, e_2, ...e_n\}\}$ erreferentziarekiko deritze eta ikusi den bezala OP bektorearen koordenatuak B-rekiko besterik ez dira.

$O + \lambda.e_i$ zuzenei erreferentzia horren ***ardatz cartesiar*** deritze.

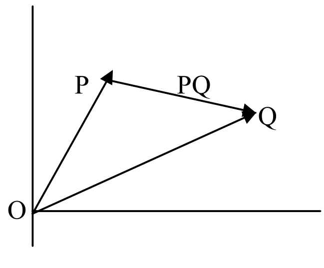
R^2-an



R^3-an



7.7. PROPOSIZIOA: P eta Q puntuen koordenatuak $P (p_1, p_2, ..., p_n)$ eta $Q (q_1, q_2, ..., q_n)$ badira, PQ bektorearenak $(q_1 - p_1, q_2 - p_2, ..., q_n - p_n)$ dira.



Frog.: Argi dago OQ = OP + PQ dela.
Baina $OP = (p_1, p_2, ..., p_n)$ eta $OQ = Q (q_1, q_2, ..., q_n)$ direnez $\Rightarrow$
$PQ = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, ..., q_n - p_n)$

7.8. ZUZEN, PLANO ETA HIPERPLANOEN EKUAZIOAK

$R = \{O\ ;\ B = \{e_1, e_2, ...e_n\}\}$ erreferentzia emanda, azpiespazioen ekuazioak ondokoak izango dira:

ZUZENAK

Lehen zuzen baten ekuazioa X = P + W dela ikusi da, non $W = \{k.v\ /\ k\in K\}$ den. Demagun X eta P puntuen koordenatuak R erreferentziarekiko $(x_1, x_2, ..., x_n)$ eta $(p_1, p_2, ..., p_n)$ direla eta $(v_1, v_2, ..., v_n)$ v bektorearenak B-rekiko. Orduan, ekuazio hori honela idatzi ahal izango da:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + k.v_1 \\ x_2 = p_2 + k.v_2 \\ .... \\ x_n = p_n + k.v_n \end{cases} \qquad \textit{EKUAZIO PARAMETRIKOAK}$$

eta k bakantzen bada ekuazio guztietan:

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \cdots\cdots = \frac{x_n - p_n}{v_n} \qquad \textit{FORMA JARRAITUA}$$

non $v_i = 0$ bada bere zenbakitzailea ere zero dela suposatzen den $(x_i = p_i)$.

Azter dezagun orain zuzenaren ekuazioa gehien erabiltzen diren espazio afinetan, hau da, plano eta espazio arrunta (R^2 eta R^3) kasuetan:

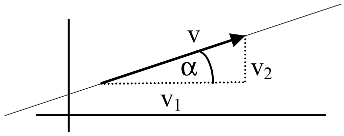
a) $\mathbf{V = R^2}$ bada eta $(x_1,x_2) = (x,y)$ eta $P\ (p_1,p_2) = (a,b)$ idazten badira:

$$\begin{cases} x = a + k.v_1 \\ y = b + k.v_2 \end{cases} \quad \text{edo} \quad \frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} \quad \text{edo} \quad Ax + By + C = 0$$

(non $A = v_2$, $B = -v_1$ eta $C = bv_1 - av_2$ diren). Hauek planoko zuzen baten ekuazioa adierazteko moduak dira. Azken ekuazio honi *inplizitu* deitzen zaio.

Ekuazio inplizituan y bakantzen bada ($B \neq 0$ denean), $y = -\frac{A}{B}.x - C$ geratzen da eta bi modu hauetan ere jar daiteke:

$$y = mx + n \qquad \text{edo} \qquad (y - b) = m.(x - a)$$



m-ri *malda* deritzo eta bistan dago $m = v_2 / v_1 = tg\alpha$ dela.

Ikusi den bezala zuzen bat finkatzeko P puntu bat eta v noranzkoa eman behar dira, baina modu berean nahikoa da P (p_1,p_2) eta Q (q_1,q_2) bi puntu ematea, zeren eta $Q = P + k.v$ bete behar denez, $PQ = v$ izango baita. Ondorioz, zuzenaren noranzkoa $(q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ bektorea da. Beraz, honela ere idatz daiteke:

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2}$$

b) $\mathbf{V = R^3}$ bada, eta $(x_1,x_2, x_3) = (x,y,z)$ eta P $(p_1,p_2,p_3) = (a,b,c)$ idazten badira:

$$\begin{cases} x = a + k.v_1 \\ y = b + k.v_2 \\ z = c + k.v_3 \end{cases} \quad \text{edo} \quad \frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3} \quad \text{edo} \quad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

PLANOAK

Era berean, $X = P + W$ (non $W = \{k.v + m.u \;/\; k,m \in K\}$ den) planoaren ekuazioak ondoko hauek izango dira:

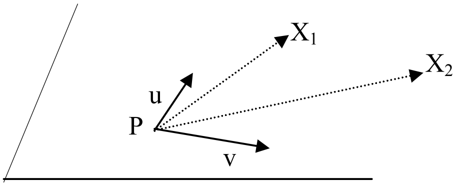
$$\begin{cases} x_1 = p_1 + k.v_1 + m.u_1 \\ x_2 = p_2 + k.v_2 + m.u_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = p_n + k.v_n + m.u_n \end{cases} \qquad \text{EKUAZIO PARAMETRIKOAK}$$

$\mathbf{V = R^3}$ bada, $(x_1,x_2,x_3) = (x,y,z)$ eta $(p_1,p_2,p_3) = (a,b,c)$ eginez, planoaren ekuazio

parametrikoak $\begin{cases} x = a + k.v_1 + m.u_1 \\ y = b + k.v_2 + m.u_2 \\ z = c + k.v_3 + m.u_3 \end{cases}$ izango dira. Sistema honetan k eta m desagerraraziz gero, $Ax + By + Cz + D = 0$ ekuazio inplizitua izango dugu.

Ikusi den bezala plano bat finkatzeko P puntu bat eta v,u bi bektore independente behar dira. P,Q bi puntu eta v bektore batekin (PQ-rekiko proportzionala ez dena) ere nahikoa da plano bat determinatzeko, zeren eta u = PQ eginez P puntu bat eta v,u sistema aske bat izango baititugu. Modu berean P,Q,R lerrokatuta ez dauden hiru puntuekin ere plano bat determinatzen da, v = PQ eta u = PR eginez.

Beste alde batetik, kontuan hartu planoko X puntu guztiek X = P + k.v + m.u erlazioa bete behar dutela. Ondorioz, PX bektorea u eta v-ren arteko konbinazio lineal bat izango da, hots, {PX,u,v} sistema mendekoa da. Beraz, eratzen duten determinanteak (3 ordenakoak) zero izan beharko du.



Gainera, baldintza hori planoko puntuentzat bakarrik betetzen da. Beraz, ekuazio inplizitua ateratzeko modurik errazena $\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$ egitea izango da.

Horrez gain, $u = PQ = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ eta $v = PR = (r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$ baldin badira, ekuazioa honako hau izango da:

$$\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \\ r_1-p_1 & r_2-p_2 & r_3-p_3 \end{vmatrix} = 0$$

HIPERPLANOAK

Era berean, $X = P + W_{n-1}$ (non $W = \{k_1.v_1 + ... + k_{n-1}.v_{n-1} \ / \ k_i \in K\}$ den) hiperplanoaren ekuazioak ondoko hauek izango dira:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + k_1.v_{11} + k_2.v_{21} + ... + k_{n-1}.v_{n-1,1} \\ x_2 = p_2 + k_1.v_{12} + k_2.v_{22} + ... + k_{n-1}.v_{n-1,2} \\ .... \\ x_n = p_n + k_1.v_{1n} + ... + k_{n-1}.v_{n-1,n} \end{cases}$$

non $(v_{i1}, v_{i2}, ...,v_{in})$ $\forall i = 1.....n-1$ v_i bektorearen koordenatuak diren hautatutako erreferentziaren oinarriarekiko.

Hiperplano baten parametrorik gabeko ekuazioa izateko kontuan hartu behar da F hiperplanoari $f : V_n \rightarrow K$ forma lineal bat dagokiola, non $F = \{X \in E_n \ / \ f(PX) = 0\}$ den (edo bestela, $F = \{X \in E_n \ / \ f(OX) = a_0\}$, non $-a_0 = f(OP)$ den).

$R = \{O \ ; \ \{e_1, e_2, ...e_n\}\}$ erreferentzia batekiko $PX = (x_1 - p_1, ..., x_n - p_n)$ bada, $f(PX) = 0$ ekuazioa beste modu honetara idatzi ahal izango da:
$f(PX) = f[(x_1 - p_1).e_1 + ... + (x_n - p_n).e_n] = 0$ eta $f(e_i) = a_i$ deituz

$(x_1 - p_1).a_1 + ... + (x_n - p_n).a_n = 0$ gelditzen da, edo

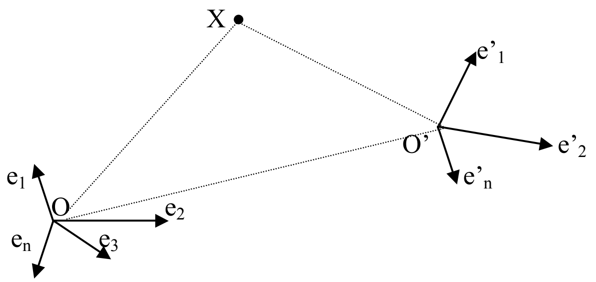
$$a_0 + a_1.x_1 + ... + a_n.x_n = 0 \qquad \text{EKUAZIO INPLIZITUA}$$

non $a_0 = - a_1.p_1 - ....- a_n.p_n$ den.

7.9. ERREFERENTZIA-ALDAKETA

Demagun $R = \{O \; ; B\{e_1, e_2, ...e_n\}\}$ eta $R' = \{O' \; ; B'\{e'_1, e'_2, ...e'_n\}\}$ bi erreferentzia-sistema kontsideratzen direla, non $e'_i = (\lambda_{i1}, ..., \lambda_{in})_B$ den.

Demagun $(a_1, ..., a_n)$ direla O'-ren koordenatuak R-rekiko (beraz, OO' bektorearenak B-rekiko), eta $(x_1, ...,x_n)$ eta $(x'_1, ...,x_n')$ direla X puntuaren koordenatuak R eta R'-rekiko, hurrenez hurren (beraz, OX eta O'X bektorearenak B eta B'-rekiko).



OX = OO' + O'X betetzen da. Baina
$OX = (x_1 .....,x_n)_B$
$OO' = (a_1, ..., a_n)_B$
$O'X = (x'_1 ....., x'_n)_{B'} = x'_1.e'_1 + ...+ x'_n.e'_n =$
$x'_1.(\lambda_{11}, ..., \lambda_{1n})_B + ... +$
$x'_n. (\lambda_n, ..., \lambda_{nn})_B$ dira.

Beraz, $(x_1 .....,x_n)_B = (a_1, ..., a_n)_B + x'_1.(\lambda_{11}, ..., \lambda_{1n})_B + ... +x'_n. (\lambda_n, ..., \lambda_{nn})_B$ eta hemendik:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + \lambda_{11}.x'_1 + ...+\lambda_{n1}.x'_n \\ x_2 = a_2 + \lambda_{12}.x'_1 + ...+\lambda_{n2}.x'_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_n + \lambda_{1n}.x'_1 + ...+\lambda_{nn}.x'_n \end{array}\right\} \quad \textit{Erreferentzia-aldaketaren ekuazioak}$$

adibidea: Izan bedi P puntua, non bere koordenatuak (2,1,0) diren $R = \{O; B\{e_1,e_2,e_3\}\}$ erreferentziarekiko (hau $P(2,1,0)_R$ adierazten da).
Izan bedi $R' = \{O'(1,4,3)_R; (1,1,1)_B, (1,0,0)_B, (-1,1,0)_B\}$ beste erreferentzia bat, non O'-ren koordenatuak R-rekiko (1,4,3) diren.
Kalkulatu P puntuaren koordenatuak R'-rekiko.

Ebaz.: OP = OO’ + O’P $\Rightarrow$ (2,1,0) = (1,4,3) + x.(1,1,1) + y.(1,0,0) + z.(-1,1,0) eta ondorioz,

$$\left.\begin{array}{l} 2 = 1 + x + y - z \\ 1 = 4 + x + z \\ 0 = 3 + x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -3 \\ z = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(-3,4,0)_{\Re'}$$

7.10. PARALELOTASUNA. POSIZIO ERLATIBOA

7.7. DEFINIZIOA: Izan bedi E (+ ; $\cdot_V$) espazio afin bat eta izan bitez F = P + U eta G = Q + W bere bi azpiespazio afin.

F eta G paraleloak dira, baldin eta soilik baldin U eta W azpiespazioek honakoa betetzen badute: U W-ko azpiespazioa da edo W U-ko azpiespazioa da.

R^3 espazioan aurrekoa aplikatzen bada:

- P + U eta Q + W zuzenak paraleloak dira U = W bada.
- P + U zuzena eta Q + W planoa paraleloak dira $U \subset W$ bada.
- P + U eta Q + W planoak paraleloak dira U = W bada.

7.8. PROPOSIZIOA: F = P + U eta G = Q + W barietate linealak paraleloak badira, hauetako bat gertatuko da: ez dute puntu komunik edo bata bestearen barnean dago.

Frog.: Demagun $R \in F \cap G$ dela ; orduan, F = R + U eta G = R + W moduan jarri ahal dira eta paraleloak direnez (edo $U \subset W$ edo $W \subset U$), $R + U \subset R + W$ edo $R + W \subset R + U$ frogatu ahal dira nahi zen bezala.

PLANOAN

Bi zuzenen ebaketa

Izan bitez ondoko bi zuzen hauek: ax + by + c = 0 eta a’x + b’y + c’ = 0.

Zuzen horiek puntu komunik baduten aztertzeko, nahikoa da Rouche-Fröbenius bitartez ekuazio-sistema eztabaidatzea:

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ badira, ondoko hiru kasu hauek gerta daitezke:

- he M = he M’ = 2 Puntu komun bat dute. *Ebakitzaileak* dira.
- he M = 1, he M’ = 2 Ez dute puntu komunik. *Paraleloak* dira.

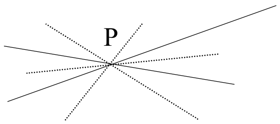
- he M = 1 = he M' = 1 Infinitu soluzio daude. Zuzen *bera* dira.

Zuzen-sorta

7.8. DEFINIZIOA: Izan bitez $ax + by + c = 0$ eta $a'x + b'y + c' = 0$ bi zuzen desberdinen ekuazioak. Beraien ***zuzen-sorta*** $\alpha.(ax + by + c) + \beta.(a'x + b'y + c') = 0$ $(\forall \alpha\beta \in K)$ ekuazio gisa duten zuzenen multzoa da.

Zuzen-sortaren egitura aztertuko da. Bi kasu daude:

1. Zuzenak ebakitzaileak badira, P puntu komun bakarra dute eta zuzen-sorta P puntu horretatik pasatu diren zuzen guztiez osatuta izango da. Hori egiaztatzeko bi gauza ikusi behar dira; alde batetik, itxura hori $(\alpha.(ax + by + c) + \beta.(a'x + b'y + c') = 0)$ duten zuzenak P puntutik pasatzen direla eta, bestetik, P puntutik pasatu den edozein zuzen itxura horrekin adieraz daitekeela.



- $P(p_1,p_2)$ puntuak $a.p_1 + b.p_2 + c = 0$ eta $a'.p_1 + b'.p_2 + c' = 0$ erlazioak betetzen ditu. Ondorioz, $\alpha.(ap_1 + bp_2 + c) + \beta.(a'p_1 + b'p_2 + c') = 0$ beteko da.

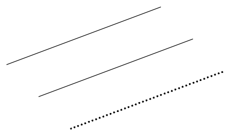
- Demagun orain $s : a''x + b''y + c'' = 0$ zuzena ere P puntutik pasatzen dela. Zuzen horren beste puntu bat Q bada $(Q \neq P)$, ondoko bi erlazioak beteko dira:

$$\left.\begin{array}{l} a''p_1 + b''p_2 + c'' = 0 \\ a''q_1 + b''q_2 + c'' = 0 \end{array}\right\} \text{ eta ondorioz, } a''(p_1 - q_1) + b''(p_2 - q_2) = 0 \qquad (*)$$

Badakigu $\alpha.(ap_1 + bp_2 + c) + \beta.(a'p_1 + b'p_2 + c') = 0$ betetzen dela. Ikusi behar dena da ea α eta β existitzen diren, non $\alpha.(aq_1 + bq_2 + c) + \beta.(a'q_1 + b'q_2 + c') = 0$ den (orduan zuzen-sortaren ekuazioa s zuzenaren ekuazioa ere izango baita, P eta Q s-koak direlako). Bi erlazio hauek kentzen badira: $(\alpha a + \beta a').(p_1 - q_1) + (\alpha b + \beta b').(p_2 - q_2) = 0$ eta hau betetzeko, (*) erlazioa kontuan hartuz, nahikoa da honako hau exijitzea:

$$\left.\begin{array}{l} a'' = \alpha.a + \beta.a' \\ b'' = \alpha.b + \beta.b' \end{array}\right\} \Rightarrow$$ eta sistema honek soluzio bat emango du α eta β-rentzat bere $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ matrizearen heina 2 baita (paraleloak ez direlako).

2. Paraleloak badira, zuzen-sorta berarekiko paraleloak diren zuzen guztiez osatuta dago. Ikus dezagun:



Kasu honetan $ax + by + c = 0$ eta $a'x + b'y + c' = 0$ norabide-bektore bera dutenez, $a' = ka$ eta $b' = kb$ beteko dira eta zuzen-sortaren ekuazioa ondoko hau izango da:
$\alpha.(ax + by + c) + \beta.(kax + kby + c') = 0 \Rightarrow$
$(\alpha + \beta')ax + (\alpha + \beta')by + \alpha c + \beta c' = 0$ non $\beta' = \beta k$ den eta zuzen hori eta $ax + by + c = 0$ paraleloak dira, $(\alpha + \beta').a/a = (\alpha + \beta').b/ b$ baita.

Hiru zuzenen ebaketa

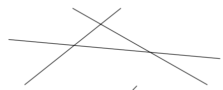
Izan bitez $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ eta $a''x + b''y + c'' = 0$ hiru zuzenak. Osatzen duten ekuazio-sistemaren matrizeak hauek dira:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} \text{ eta handitua } M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

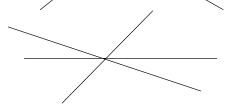
Ez ahaztu M-ko errenkadek norabide-bektoreak adierazten dituztela (-b,a)

Rouche Fröbeniusi jarraituz, ondoko kasu hauek gerta daitezke:

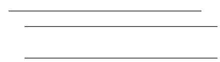
- he M = 2, he M' = 3. Sistema bateraezina da.
  Ez dago puntu komunik.



- he M = he M' = 2. Bateragarria eta determinatua da.
  Puntu batean ebakitzen dute elkar.



- he M = 1, he M' = 2. Bateraezina da.
  Baina heM = 1 denez, hirurak paraleloak dira.

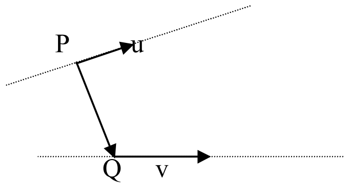


- he M = he M' = 1. Hirurak zuzen bera dira.

ESPAZIOAN

Bi zuzenen ebaketa

Izan bitez $X = P + \alpha.u$ eta $X = Q + \beta.v$ bi zuzenen ekuazioak.

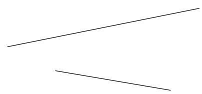


Kontsidera dezagun u (u_1,u_2,u_3), v (v_1,v_2,v_3) eta PQ $(q_1 - p_1,\ q_2 - p_2,\ q_3 - p_3)$ bektoreek osatzen duten 3x3 ordenako M matrizea.

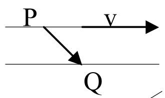
$$M = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Ondoko kasu hauek gerta daitezke:

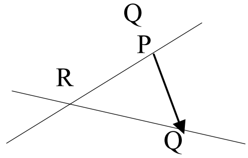
- he M = 3 bada, u,v eta PQ ez dira planokideak izango. Beraz, ebaki gabe gurutzatzen dira.



- he M = 2 bada, bi kasu daude:

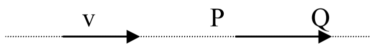


a) u $= \lambda.$v bada, paraleloak dira



b) u $\neq \lambda.$v bada, R puntuan ebakitzen dute elkar PQ bektorea u eta v-k eratzen duten planoan dagoelako.

- he M = 1 bada, zuzen bera dira.



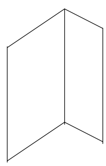
Bi planoren ebaketa

Izan bitez ax +by + cz + d = 0 eta a'x + b'y + c'z = 0 bi planoren ekuazioak. Sistemari dagozkion matrizeak hauek dira:

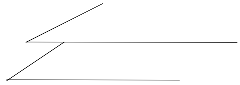
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad M' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

Gerta daitezkeen kasuak hauek dira:

- he M = he M' = 2. Sistema bateragarria eta indeterminatua da. Zuzen batean ebakitzen dute elkar



- he M = 1, he M’ = 2. Sistema bateraezina da.
  Planoak paraleloak dira.



Kontuan hartu: he M = 1 bada $\Rightarrow$ (a’,b’,c’) = λ.(a,b,c) $\Rightarrow$ a’/a = b’/b = c’/c

- he M = he M’ = 1. Sistema bateragarria eta indeterminatua da, baina bi parametroren arabera. Beraz, plano bera dira.

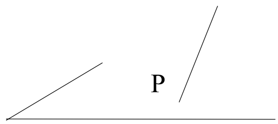
Plano eta zuzenaren ebaketa

Izan bitez $\left.\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right\}$ zuzen baten ekuazioa eta a’’x +b’’y + c’’z +d’’ = 0 plano batena. Badakigu $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ matrizearen heina 2 dela (bestela ez litzateke zuzen bat adieraziko). Orduan, sistemaren matrizeak hauek dira:

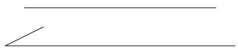
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad M' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

Beraz, hau gerta daiteke:

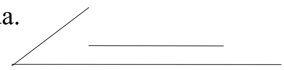
- he M = he M’ = 3. Sistema bateragarria eta determinatua
  P puntuan ebakitzen dute elkar.



- he M = 2, he M’ = 3. Sistema bateraezina.
  Paraleloak dira.



- he M = he M’ = 2. Sistema bateragarria eta indeterminatua.
  Zuzena planoaren barnean dago.



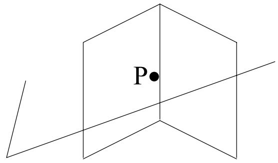
Hiru planoren ebaketa

Izan bitez ax + by + cz + d = 0,a’x + b’y + c’z + d’ = 0 eta a’’x + b’’y + c’’z + d’’= 0 hiru planoren ekuazioak. Sistemari dagozkion matrizeak hauek dira:

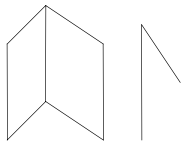
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \text{ eta } M' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

eta ondoko kasu hauek gerta daitezke:

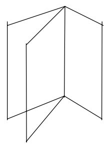
- he M = he M' = 3. Sistema bateragarria eta determinatua.
  P puntuan ebakitzen dute elkar.



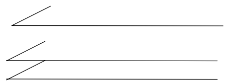
- he M = 2, he M' = 3. Sistema bateraezina. Bi planok zuzen batean ebakitzen dute elkar eta hirugarrena paraleloa da zuzen horrekiko.



- he M = he M' = 2. Sistema bateragarria eta indeterminatua.
  Hirurek zuzen batean ebakitzen dute elkar.



- he M = 1, he M' = 2. Sistema bateraezina.
  Hiru planoak paraleloak dira.



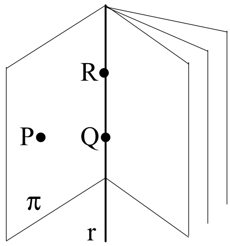
- he M = he M' = 1. Sistema bateragarria eta indeterminatua.
  Hiru planoek bat egiten dute

Plano-sorta

7.9. DEFINIZIOA: $ax + by + cz + d = 0$ eta $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ *bi planoren **plano--sorta*** hauxe da: $\alpha.(ax + by + cz + d) + \beta.(a'x + b'y + c'z + d') = 0$ ekuazio gisa ($\forall \alpha\beta \in K$) duten planoek osatzen duten multzoa.

Bi plano-sorta mota daude: planoek elkar ebakitzen dutenean eta planoak paraleloak direnean.

- *planoek elkar ebakitzen dute*: izan bitez Q eta R bi plano horiek sortzen duten r zuzeneko bi puntu. Orduan, $\alpha.(ax + by + cz + d) + \beta.(a'x + b'y + c'z + d') = 0$ planoak ere bi puntu horiek izango ditu barnean, zeren eta $aq_1 + bq_2 + cq_3 + d = 0 = a'r_1 + b'r_2 + c'r_3 + d'$ betetzen den.



Ondorioz, plano-sortako plano guztiak r zuzen horretatik pasatzen dira.

Alderantziz, orain ikusiko dugu r zuzen horretatik pasatu den edozein π plano $a''x + b''y + c'' + d'' = 0$ plano-sortakoa dela, hots, $\alpha.(ax + by + cz + d) + \beta.(a'x + b'y + c'z + d') = 0$ moduan jar daitekeela, hau da, α eta β existitzen direla modu horretan jarri ahal izateko.

Kontsidera ditzagun P (r zuzenetik kanpokoa) eta Q (r zuzenekoa) π plano horren puntuak. Ikusi nahi da P puntua ere sortakoa dela, zeren eta orduan, R,Q eta P π planokoak eta sortakoak batera lirateke, eta ondorioz, π planoa sortakoa litzateke. Orduan, ondoko ekuazio hauek beteko dira $\left.\begin{aligned} a''p_1 + b''p_2 + c''p_3 + d'' = 0 \\ a''q_1 + b''q_2 + c''q_3 + d'' = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$a''.(p_1 - q_1) + b''.(p_2 - q_2) + c''.(p_3 - q_3) = 0.$

Horrez gain, $\alpha.(aq_1 + bq_2 + cq_3 + d) + \beta.(a'q_1 + b'q_2 + c'q_3 + d') = 0$ da eta α eta β existitzen diren ikusi nahi dugu, zeinentzat $\alpha.(ap_1 + bp_2 + cp_3 + d) + \beta.(a'p_1 + b'p_2 + c'p_3 + d') = 0$ betetzen den. Bi ekuazio hauek kentzen badira:

$(\alpha a + \beta a').(p_1 - q_1) + (\alpha b + \beta b').(p_2 - q_2) + (\alpha c + \beta c').(p_3 - q_3) = 0$ eta aurreko ekuazioarekin alderatuz gero, α eta β existitzen direla egiaztatzeko nahikoa da ondoko ekuazioak betetzea:

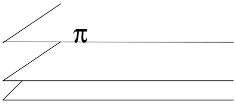
$$(*) \qquad \left.\begin{aligned} a'' &= \alpha.a + \beta.a' \\ b'' &= \alpha.b + \beta.b' \\ c'' &= \alpha.c + \beta.c' \end{aligned}\right\}$$ eta sistema honen matrizeei M eta M' deituz:

$M = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$ eta $M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ agerikoa da M-ren heina 2 dela (bestela jatorrizko bi planoak paraleloak lirateke bi planoren ebaketan ikusi den bezala). M'-ren heina 2 da (bestela hiru planoek ez lukete elkar ebakiko zuzen batean, hiru planoren ebaketan frogatu den bezala, eta hori hipotesiaren aurka egongo litzateke).7

Ondorioz, (*) sistema horrek soluzio bat du (hots, α eta β) zeren eta bere matrizeen heinak he M = he M' = 2 (ezezagunen kopurua) baitira.

Ondorioz, zuzen horretatik pasatzen diren plano guztiak plano-sortan daude eta, aldi berean, zuzen horretatik pasatzen den edozein plano sortakoa da.

- *Planoak paraleloak dira*: orduan, a'/a = b'/b = c'/c betetzen da. Plano-sortako edozein π planoren ekuazioa honako hau da: $\alpha.(ax + by + cz + d) + \beta.(a'x + b'y + c'z + d') = 0$ edo $(\alpha a + \beta a').x + (\alpha b + \beta b').y + (\alpha c + \beta c').z + \alpha.d + \beta.d' = 0$



agerikoa da: $(\alpha a + \beta a')/a = (\alpha b + \beta b')/b = (\alpha c + \beta c')/c$. Beraz, π plano hori emandako birekiko paraleloa da.

Ondorioz, emandako bi plano horiekiko paraleloak diren plano guztiak plano-sorta horretan daude eta, aldi berean, paraleloa den edozein plano sortakoa da.

7.11. BARIZENTROA

Izan bitez $P_1, P_2, \ldots, P_n$ E espazio afin baten n puntu eta $k_1, \ldots, k_n$ K gorputzeko n eskalar (non $k_1 + \ldots + k_n \neq 0$ den). Izan bedi O edozein puntu.

7.10. DEFINIZIOA: $G = O + \dfrac{1}{k_1 + \ldots + k_n}.(k_1.OP_1 + \ldots + k_n.OP_n)$ puntuari $k_1, \ldots, k_n$ pisuz, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ puntuen ***barizentro*** deritzo.

Definizio hori ez dago O puntua hautatzearen baitan. Demagun beste edozein O' puntu hartzen dela. Orduan, barizentroa honakoa litzateke:

$$G' = O' + \frac{1}{k_1 + \ldots + k_n}.(k_1.O'P_1 + \ldots + k_n.O'P_n)$$

baina GG' = GO + OO' + O'G' = OO' + (O'G' - OG) moduan jar daiteke. Beraz,

$$GG' = OO' + \frac{1}{k_1 + \ldots + k_n}.(k_1.(O'P_1 - OP_1) + \ldots + k_n(O'P_n - OP_k)).$$

Baina $O'P_i - OP_i = O'P_i + P_iO = O'O$ direnez:

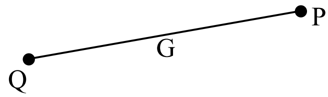
$$GG' = OO' + \frac{1}{k_1 + \ldots + k_n}.(k_1 + \ldots + k_n).O'O = OO' + O'O = OO = o \Rightarrow G = G'$$

O puntu gisa G barizentroaren puntu bera hartzen bada, ondoko erlazio honen bitartez geldituko da definituta: $k_1.GP_1 + k_2.GP_2 + \ldots + k_n.GP_n = o$

ERDIKO PUNTUA

- P eta Q bi puntuen erdiko puntua pisu berdineko haien barizentroa da:

$$k.GP + k.\,GQ = o \quad \Rightarrow \quad GP + GQ = o$$

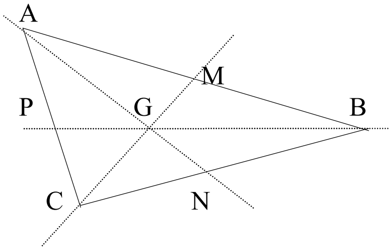


Erreferentzia batean P,Q eta G puntuen koordenatuak P (p_1,p_2), Q (q_1,q_2) eta G (g_1,g_2) badira:

$$(p_1 - g_1, p_2 - g_2) + (q_1 - g_1, q_2 - g_2) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} p_1 - g_1 + q_1 - g_1 = 0 \\ p_2 - g_2 + q_2 - g_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$g_1 = \frac{p_1 + q_1}{2} \quad \text{eta} \quad g_2 = \frac{p_2 + q_2}{2}$$

- A, B eta C hiru puntuen barizentroa ondoko hau izango da:

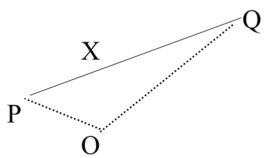


G = 1/3 .(OA + OB + OC) (1,1,1 pisuz).
Edo GA + GB + GC = o betetzen duena

G-tik pasatu diren erpin bakoitzetik marraztutako hiru zuzenei triangeluko *erdibidekoak* deritze.
Gainera, AG = 2/3.AN (eta BG = 2/3.BP, CG = 2/3.CM). Hori erraz froga daiteke eta irakurlearen esku uzten da.

SEGMENTUA

P eta Q puntuek mugatzen duten segmentua ondoko puntuen multzoa da:
X = P + k.PQ, non $k \in [0,1]$ den. ([P,Q] adieraziko da)



O edozein puntu hartuz, puntu horiek honela adieraz daitezke: X = O + OP + k.(OQ - OP) = O + (1 - k).OP + k.OQ non $k \in [0,1]$ den.

Beste modu batera esanda:
[P,Q] = O + (1-k).OP + k.OQ , non $k \in [0,1]$ den

Beraz, [P,Q] segmentua, (1-k) eta k pisuz, P eta Q puntuen barizentroen multzoa da.

7.12. KOORDENATU HOMOGENEOAK

Kontsidera dezagun E espazio afina V_n espazioari lotuta (K gorputzaren gainean) eta izan bedi R = {O; e_1, e_2, ... e_n} erreferentzia cartesiar bat. Izan bitez (x_1, ..., x_n) X puntu bakoitzari dagozkion koordenatu cartesiarrak R-rekiko.

7.11. DEFINIZIOA: Ondoko n + 1 koordenatuei ***koordenatu homogeneo*** deritze:

$$\begin{aligned} x'_0 &= m \\ x'_1 &= m.x_1 \qquad \text{non } m\in K \quad m \neq 0 \text{ edozein eskalar den} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n &= m.x_n \end{aligned}$$

Ikusi den bezala (x_1, ..., x_n) koordenatu cartesiarrak dituen X puntu bakoitzari (x'_0,x'_1, ..., x'_n) = (m,m.x_1, ..., m.x_n) koordenatu homogeneoak era unibokoan egoki ahal zaizkio, m proportzionaltasun konstantea salbu, eta alderantziz, (x'_0, x'_1, ..., x'_n) koordenatu homogeneoak dituen puntuari (x'_1 /x_0, ..., x'_n/x_0) koordenatu cartesiarrak egokitzen zaizkio.

7.13. AZPIESPAZIO AFINEN EKUAZIO HOMOGENEOAK

Kontsidera dezagun E espazio afina V_n espazioari lotuta (K gorputzaren gainean). Izan bedi F bere r dimentsioko azpiespazio afin bat. Badakigu r + 1 puntu independenteaz (P_0, P_1, ..., P_r) determinatuta dagoela eta X puntu bat F-koa izateko XP_0, XP_1, ..., XP_r bektoreek mendekoak izan behar dutela, hots, k_0, k_1, ..., k_r eskalarrak existitzen direla, zeinentzat:

$$k_0.XP_0 + \ldots\ldots + k_r.XP_r = o \text{ , non } k_i \neq 0 \quad i \text{ batentzat gutxienez.}$$

Erreferentzia batekiko puntu horien koordenatuak X (x_1, ..., x_n), P_j (p^j_1, ..., p^j_n) (j = 0,1, ...r) badira, aurreko ekuazioa honela jarri ahal da:

$$k_0.(p^0_1 - x_1,p^0_2 - x_2, \ldots\ldots, p^0_n - x_n) +\ldots\ldots+ k_r .(p^r_1 - x_1, \ldots\ldots,p^r_n - x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$$

Beraz, $k_0 .(p^0_i - x_i) + \ldots\ldots + k_r .(p^r_i - x_i) = 0 \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$, eta ondorioz,

$$(k_0 + k_1 +\ldots\ldots+k_r).x_i = k_0.p^0_i + k_1 .p^1_i +\ldots\ldots+ k_r.p^r_i \qquad (*)$$

Baina $k_0 + k_1 +\ldots\ldots+k_r \neq 0$ (bestela $k_0 = - k_1 -\ldots\ldots-k_r$ eta (*)-an ordezkatuz: $0 = k_1 .(p^1_i - p^0_i) + \ldots\ldots+ k_r .(p^r_i - p^0_i) \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow k_1.P_0P_1 + \ldots\ldots+ k_r .P_0.P_r = o \Rightarrow$ P_0, P_1, ..., P_r mendekoak izango lirateke) eta $k_j /(k_0 + k_1 +\ldots\ldots+k_r) = z_j$ eginez:

$$x_i = z_0 .p^0_i + \ldots\ldots + z_r .p^r_i \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n \quad (\text{non } z_0 + \ldots\ldots+ z_r = 1 \text{ den})$$

Orain, P_j $(p^j_1, ..., p^j_n)$ puntuaren koordenatu homogeneoak $(q^j_0, q^j_i, ..., q^j_n)$ badira, $p^j_i = q^j_i / q^j_0$ denez, X puntua F-koa izateko ondoko hau bete behar da:

$$x_i = z_0.q^0_1/q^0_0 + ...+ z_r.q^r_i / q^r_0$$

baina X-en koordenatu homogeneoak $(x'_0, x'_1, ..., x'_n)$ badira, $x'_i = x'_0.x_i$ denez, $b_j = x'_0 .z_j / q^j_0$ eginez, aurrekoa era honetan idatzi ahal da:

$$x'_i = x'_0.x_i = b_0.q^0_i + ... + b_r .q^r_i \qquad i = 1,2,.......,n$$

eta lehenengo koordenatuarentzat $b_i.q^i_0 = x'_0.z_i$ dela eta $z_0 + ...+ z_r = 1$ dela kontuan hartzen bada, $x'_0 = x'_0.(z_0 + ...+ z_r = 1) = x'_0.z_0 +.......+ x'_0.z_r = b_0.q^0_0 +......+ b_r.q^r_0$ moduan jar daiteke.

Aurrekoa laburtuz, P_0, P_1, ..., P_r puntu independenteetatik pasatzen den r dimentsioko azpiespazio afinaren ekuazio parametriko homogeneoak ondoko hauek dira:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda.x'_0 = b_0.q_0^0 + b_1.q_0^1 + ... + b_r.q_0^r \\ \lambda.x'_1 = b_0.q_1^0 + b_1.q_1^1 + ... + b_r.q_1^r \\ .... \\ \lambda.x'_n = b_0.q_n^0 + b_1.q_n^1 + ... + b_r.q_n^r \end{array}\right\}$$

λ parametroa jarri da puntu baten koordenatu homogeneoak erabat definituta gelditzen direla adierazteko (proporzionaltasun konstantea salbu).

eta b_i parametroak aldatuz azpiespazio afinaren puntu guztiak sortzen dira. Zuzen bat finkatzeko bi puntu beharko dira eta plano bat finkatzeko hiru.

7.14. ZUZENAREN EKUAZIO CARTESIAR ETA HOMOGENEOEN ARTEKO LOTURA

Har dezagun P eta Q puntuek eratzen duten zuzena. Demagun haien koordenatu cartesiarrak $P(p_1, ..., p_n)$ eta $Q(q_1, ..., q_n)$ direla eta $P(1, p'_1, ..., p'_n)$ eta $Q(q'_1, ..., q'_n)$ haien koordenatu homogeneoak. Zuzen horren edozein X punturen koordenatu cartesiar eta homogeneoak hurrenez hurren $(x_1, ..., x_n)$ eta $(1, x'_1, ..., x'_n)$ baldin badira, zuzenaren ekuazioak ondoko hauek izango dira:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda.x'_0 = b_0.1 + b_1.1 \\ \lambda.x'_1 = b_0.p'_1 + b_1.q'_1 \\ .... \\ \lambda.x'_n = b_0.p'_n + b_1.q'_n \end{array}\right\} \text{EKUAZIO HOMOGENEOAK} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 = p_1 + \alpha.(q_1 - p_1) \\ .... \\ x_n = p_n + \alpha.(q_n - p_n) \end{array}\right\} \text{EKUAZIO CARTESIARRAK}$$

Erraza da frogatzea zein den bi ekuazioen parametroen arteko lotura (nahikoa da homogeneoetan ekuazio guztiak lehenengoaz zatitzea) eta aurkitutako erlazioa hauxe da: $\alpha = \dfrac{b_1}{b_0 + b_1}$ (*)

adibidea: Demagun E_2-an ari garela eta P (1,2) et Q (3,0) puntuek eratzen duten azpiespazioaren (zuzen bat, jakina) ekuazio homogeneoak atera nahi ditugula.

Beraien koordenatu homogeneoak P (1,1,2) eta Q (1,3,0) dira, $m = q_0 = p_0 = 1$ hartuz. Orduan, ekuazio homogeneoak ondoko hauek dira:

$$\left.\begin{aligned} \lambda.x'_0 &= b_0.1 + b_1.1 \\ \lambda.x'_1 &= b_0.1 + b_1.3 \\ \lambda.x'_2 &= b_0.2 + b_1.0 \end{aligned}\right\}$$

eta zuzen horren edozein puntu ateratzeko nahikoa da (b_0, b_1) parametroei edozein balio ematea.

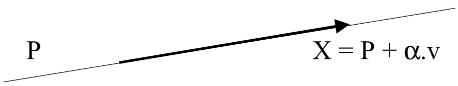
eta dagozkion ekuazio cartesiarrak hauek dira: $\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2.\alpha \\ x_2 &= 2 - 2.\alpha \end{aligned}\right\}$

Puntu bat ateratzeko nahikoa da b_0 eta b_1 finkatzea. Adibidez $b_0 = 2$, $b_1 = 3$ hartzen badira $x'_0 = 1$ dela exijituz, $\lambda = 2 + 3 = 5$ da, eta ondorioz, $x'_1 = 11/5$, $x'_2 = 4/5$ izango dira, eta lortzen den puntuak (1,11/5,4/5) koordenatu homogeneoak izango ditu. Puntu horri dagozkion koordenatu cartesiarrak ateratzeko nahikoa da (*)-an $b_0 = 2$, $b_1 = 3$ egitea; orduan, $\alpha = 3/5$ da eta $x_1 = 11/5$, $x_2 = 4/5$ ateratzen dira espero genuen bezala.

7.15. INFINITUKO PUNTUAK. ESPAZIO PROIEKTIBOAK

Dakigun bezala, zuzen baten ekuazioa, P (p_1, ..., p_n) puntutik pasatzen dena eta v (v_1, ..., v_n) norabide-bektorea duena, ondoko hau da:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \alpha.v_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= p_n + \alpha.v_n \end{aligned}\right\}$$

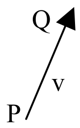


eta α parametroa infinutura eramaten badugu, x_i koordenatu batek, gutxienez, infinitura joko du, zeren eta v_i bat behintzat ez baita zero, eta lortzen den n-kotea ez dago errealez osatuta. Horrek erakusten du ezin dela infinituko puntu bat koordenatu cartesiarrak erabiliz definitu. Hemen koordenatu homogeneoak jokoan sartzen dira, zeren eta horien bitartez infinituko puntua defini baitaiteke.

Aurrean P eta Q puntuetatik pasatu den zuzen baten ekuazio homogeneoak ondoko hauek direla ikusi da:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda.x'_0 = b_0.1 + b_1.1\\ \lambda.x'_1 = b_0.p'_1 + b_1.q'_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda.x'_n = b_0.p'_n + b_1.q'_n\end{array}\right\}\text{ eta }\ \alpha = \frac{b_1}{b_0 + b_1}\ \text{ adierazpenetik }\ b_0 + b_1 = \frac{b_1}{\alpha}\ \text{ da.}$$

Orduan $\frac{\lambda}{b_1} = \beta$ eginez eta $b_0\,.p'_i + b_1\,.q'_i = b_0.p'_i + b_1.(v_i + p'_i) = b_1.v_i + (b_0 + b_1).p'_i = b_1\,.(v_i + p'_i\,/\alpha)$ kontuan hartuz, ekuazioak honela jar daitezke:



$$\left.\begin{array}{l}\beta.x'_0 = \dfrac{1}{\alpha}\\ \beta.x'_1 = \dfrac{p'_1}{\alpha} + v_1\\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\\ \beta.x'_n = \dfrac{p'_n}{\alpha} + v'_n\end{array}\right\}$$

Orain $\alpha \to \infty$ egiten bada lortzen den (n +1)-kotea $(0,v_1,......,v_n)$ da. Garbi dago ez direla E_n-ko puntu baten koordenatu homogeneoak (lehenengo koordenatua zero ez delako). Elementu berri honi *infinituko puntua* deritzo.

Ikusi den bezala zuzen bakoitzari infinituko puntu bat dagokio, bere norabideak finkatzen duena hain zuzen ere, eta bi zuzen paraleloak badira, dagokien puntua puntu bera da.

Beraz, bi puntu-mota daude, lehenengo koordenatua zero ez dutenak (E_n espazio afinekoak) eta zero dutenak. Horiek guztiek osatzen duten multzoari espazio afin handitua edo ***espazio proiektiboa*** E'_n deitzen zaio. Ikusi den bezala multzo horretan bi puntuen koordenatuak proportzionalak badira puntu bera da. Baina puntu horiek R^{n+1} bektore-espazioaren elementuak dira, eta ondorioz, (n+1)-kote batekiko proportzionalak diren (k+1)-kote guztiek espazio horren dimentsio bateko azpiespazio bat eratzen dute. Beraz, E'_n-ko puntuen eta R^{n+1}-ko azpiespazioen artean bijekzio bat dago, $(\lambda.x'_0,\ \lambda.x'_1,\ ....,\ \lambda.x'_n)$ koordenatu homogeneoak dituen $x \in E'_n$ puntu bakoitzari R^{n+1}-ko $V\{x\}$ dimentsio bateko azpiespazio bat dagokio, $(x'_0,\ x'_1,\ ......,\ x'_n)$ bektoreak sortzen duena hain zuzen.

Horrek denak alderantziz egitea ere iradokitzen du, eta V_{n+1} bektore-espazio bat emanda $P(V_{n+1})$ espazio proiektiboa egokitzea dimentsio bateko azpiespazioen bitartez, hots,

$$P\ (V_{n+1}) = \{V\{v\}\ /\ v \in V_{n+1}\}$$

eta P(V)-ko bi puntu (bi azpiespazio) berdinak dira dagozkien norabide-bektoreak paraleloak badira.

V-ren dimentsioa bat bada, P(V)-ek puntu bakarra izango du eta zero dimentsioko espazio proiektiboa izango da (eta puntu bakarra da). V-ren dimentsioa 2 edo 3 bada, P(V)-ren dimentsioa bat edo bi izango da (eta zuzen bat edo plano bat da).

Espazio proiektiboen garapena ez da kurtso honen helburua, baina barietatea koadratikoen ikerketa gauzatzeko oso baliagarri bilakatzen delako aipatu dugu hemen.

EBATZITAKO ARIKETAK

1. Izan bitez K gorputz abeldar bat eta $V = K^n$ (K) n-koteen bektore-espazioa K gainean. Frogatu $(K^n, +_V)$ espazio afin bat dela $+_V$ ondokoa dela jakinda:

$\forall v \in V,\ \forall P \in K^n \qquad P\,(p_1, \ldots\ldots, p_n) + v\,(v_1, \ldots, v_n) = Q\,(p_1 - v_1, \ldots\ldots, v_n - q_n)$

Frog,: Espazio afinaren bi baldintzak ikusi behar dira:

a) $\forall P,Q \in K^n \quad \exists v \in V \,/\, P + v = Q$.

Agerikoa da, nahikoa baita $v = (p_1 - q_1, \ldots\ldots, p_n - q_n)$ hartzea. Orduan,

$P + v = (p_1 - (p_1 - q_1), \ldots\ldots, p_n - (p_n - q_n)) = (q_1, \ldots, q_n)$.

b) $\forall P \in K^n$ eta $\forall v,w \in V \quad P + (v + w) = (P + v) + w$

$P\,(p_1, \ldots\ldots, p_n)$, $v\,(v_1, \ldots, v_n)$ eta $w\,(w_1, \ldots, w_n)$ badira:

$P + (v + w) = (p_1, \ldots\ldots, p_n) + (v_1 + w_1, \ldots\ldots, v_n + w_n) = (p_1 - (v_1 + w_1), \ldots\ldots, p_n - (v_n + w_n))$

$(P + v) + w = (p_1 - v_1, \ldots\ldots, v_n - q_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (p_1 - v_1 - w_1, \ldots, p_n - v_n - w_n)$,

eta ondorioz, hau ere betetzen da.

2. Izan bitez K = Z/3 kongruentzia modulu 3 gorputza eta V K^2 bektore-espazioa K-ren gainean. Kontsidera dezagun $(K^2 ; +_V)$ espazio afina. Kalkulatu:
a) zenbat puntu dituen espazio afin horrek.
b) zenbat puntu dituen zuzen bakoitzak.
c) zenbat zuzen dituen.

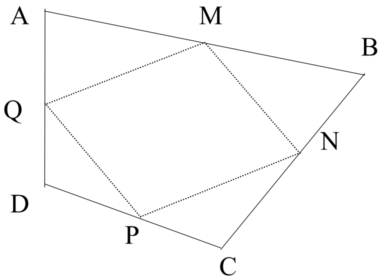
Ebaz.:
a) Z/3 gorputzaren elementuak {0, 1, 2} dira, eta ondorioz, K^2-ren elementuak hauek dira: (0,0), (0,1), (0,2), (1,0)..........,(2,2). Beraz, 9 puntu dira.

b) Zuzen bakoitzaren ekuazioa $X = P + k.v$ da eta k-k hiru balio bakarrik hartu ahal dituenez, zuzen bakoitzak hiru puntu ditu.

c) Bi puntuk zuzen bat finkatzen dute eta $\binom{9}{2} = 36$ bikote daude, baina zuzen baten hiru puntuak A,B,C badira A,B A,C eta B,C bikoteek zuzen bera finkatzen dutenez, 36 / 3 egin behar da zuzen desberdinak zenbatzeko. Ondorioz, 12 dira.

3. Izan bitez A ,B, C eta D plano afin baten edozein lau puntu. Froga ezazu AB, BC, CD eta DA bikoteen erdiko puntuek laukizuzen bat eratzen dutela.

Ebaz.: Erdiko puntu horiek M, N, P eta Q baldin badira (irudian agertzen den bezala), FG + G H = FH egiaztatzen denez, ondoko identitate hauek beteko dira:



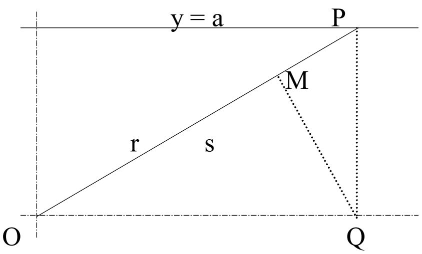
QM = QP + PN + NM = QD + DP + PN + NB + BM,
baina QD = AQ eta DP = PC, Q eta P erdiko puntuak baitira. Modu berean, NB = CN eta BM = MA. Beraz:

2QM = QM + QM = AQ + PC + CN + MA + PN +QM = (MA + AQ + QM) + (PC + CN) + PN = MM + PN + PN = 2PN

Beraz, 2QM = 2PN $\Rightarrow$ QM = PN (era berean, MN = QP dela froga daiteke). Ondorioz, laukizuzen bat da.

4. *y = a zuzenean P puntu higikari bat kontsideratzen da. Izan bedi Q bere proiekzioa OX ardatzaren gainean eta izan bedi M puntua Q-ren proiekzioa O eta P puntuek finkatzen duten zuzenaren gainean. Kalkulatu M-k eratzen duen leku geometrikoa.*

Ebaz.:



M puntua r eta s zuzenen arteko ebakitze-puntua da. Zuzen horien ekuazioak kalkulatuko dira:

Izan bitez P (m,a) eta Q (m,o). Orduan:

r : $\frac{x}{m} = \frac{y}{a} \Rightarrow my = ax$

s : bere norabide-bektorea (-a,m) eta Q(m,0) puntutik pasatzen denez, $\frac{x-m}{-a} = \frac{y}{m} \Rightarrow$ ay = m.(m – x).

Ondorioz, M $\left.\begin{array}{r} my = ax \\ ay = m.(m-x) \end{array}\right\}$ sistemaren soluzioa da. Beraz, $x = \frac{m^3}{a^2+m^2}$ eta $y = \frac{am^2}{a^2+m^2}$ dira, M-ren koordenatuak m eta a biak batera zero ez badira (kasu horretan P = O eta zuzena ez dago definituta). Hauek ere leku geometrikoaren ekuazioak dira.

Leku geometrikoaren ekuazio inplizitua ateratzeko m parametroa kenduko dugu:

Kalkulua errazteko m = a.x/y dela kontuan hartuko da eta $x = \dfrac{m^3}{a^2 + m^2}$ ekuazioan ordezkatuko da:

$$x = \frac{\dfrac{a^3x^3}{y^3}}{a^2 + \dfrac{a^2x^2}{y^2}} = \frac{a^3x^3}{a^2y^3 + a^2x^2y} \quad \Rightarrow \; y^3 + yx^2 - ax^2 = 0 \quad \text{EKUAZIO INPLIZITUA}$$

5. Kontsidera dezagun A, B eta C puntuek finkatzen duten triangelua eta izan bitez A',B' eta C' planoko beste hiru puntu, zeinek ondoko hauek betetzen dituzten:

BA' = m.BC, CB' = m.CA, AC' = m.AB $\quad m \in R$

Frogatu:

- *planoko edozein M punturentzat MA' + MB' + MC' = MA + MB + MC*
- *ABC eta A'B'C' triangeluek barizentro bera dutela.*

Ebaz.: - MA' = MB + BA' = MB + m.BC, MB' = MC + CB' = MC + m.CA eta MC' = MA + AC' = MA + m.AB. Beraz,

MA' + MB' + MC' = MB + m.BC + MC + m.CA + MA + m.AB = MB + MC + MA + m.(BC + CA + AB) = MB + MC + MA + m.BB = MB + MC + MA.

- ABC triangeluaren G barizentroa finkatuta dago GA + GB + GC = 0 ekuazioaren bidez. Aurreko esparruan edozein M puntu zen eta M = G egiten bada, GA' + GB' + GC' = 0 beteko da. Ondorioz, G puntua A'B'C' triangeluaren barizentroa da.

6. Izan bitez R^5-ko A (-1,2,1,0,1), B (0,4,2,0,4), C (2,3,1,1,1) eta D (0,-1,-1,1,-5) puntuak. Kalkulatu osatzen duten barietatearen dimentsioa.

Ebaz.: Puntu horiek osatzen duten barietatearen dimentsioa AB, AC, AD bektoreek osatzen duten bektore-azpiespazioaren dimentsioa da. Bektore horiek ondokoak dira.

AB = OB – OA = (1,2,1,0,3)
AC = OC – OA = (3,1,0,1,0)
AD = OD – OA = (1,-3,-2,1,-6)

Eta bektore-sistema honek sortzen duen azpiespazioren dimentsioa osatzen duten matrizearen heina da. Heina kalkula dezagun:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[3:E3-E1]{2:E2-3E1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$ eta agerikoa da bere heina bi dela.

Ondorioz, lau puntu horiek plano batean daude (planokideak dira)

7. Izan bitez S_1 eta S_2 ebakidura hutsa ez duten E azpiespazio afin baten bi azpiespazio afin paralelo. Kalkulatu $S_1 + S_2$ eta $S_1 \cap S_2$.

Ebaz.: Demagun $S_1 = p + U_1$ eta $S_2 = p + U_2$ direla, non p puntu komuna den. Orduan, paralelotasunaren definizioaren arabera, bektore-azpiespazio bat bestearen azpiespazioa da. Demagun $U_1 \subseteq U_2$.

Orduan, $U_1 + U_2 = U_2$ da, zeren eta hori biak barnean dituen bektore-azpiespaziorik txikiena baita. Modu berean $U_1 \cap U_2 = U_1$. Ondorioz,

- $S_1 + S_2 = P + (U_1 + U_2) = P + U_2 = S_2$
- $S_1 \cap S_2 = P + (U_1 \cap U_2) = P + U_1 = S_1$

8. Izan bitez R : (x,y,z) = (2,0,4) + λ.(1,1,2) eta S : $\left.\begin{array}{l} y = -1 \\ x - z + 1 = 0 \end{array}\right\}$ *R^3-ko bi barietate lineal (biak zuzenak, jakina). Kalkulatu R + S eta $R \cap S$ eta egiaztatu dimentsioen formula.*

Ebaz.: Aurretik S zuzenari dagokion noranzkoa kalkulatu behar zaio. Horren ekuazioetan z parametro gisa erabiliz gero: $\left.\begin{array}{l} x = -1 + z \\ y = -1 \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow$ S = Q + U, non $U = \{\lambda.(1,0,1)\}$ den eta $S = \{(-1 + z, -1, z) / z \in R\}$ moduan idatzi ahal da.

Beste alde batetik R = P + W da, non $W = \{\lambda.(1,1,2)\}$ den $\Rightarrow$ $R = \{(2 + \lambda, \lambda, 4 + 2\lambda) / \lambda \in R\}$.

S + R kalkulatzeko, lehenengoz, bere ebakidura hutsa den aztertu behar da. Hau da, λ eta z existitzen diren, non $(2 + \lambda, \lambda, 4 + 2\lambda) = (-1 + z, -1, z)$ den. Sistema

honen ebazpena $\lambda = -1$ eta $z = 2$ da. Orduan, S eta R zuzenen puntu komuna A(1,-1,2) da. Beraz, $S + R = A + (U + W) = \{(1,-1,2) + \{\lambda.(1,0,1) + \alpha(1,1,2)\}$ da, hots, plano bat. Ondorioz, bere dimentsioa 2 da.
Ikusi den bezala $S \cap R = A(1,-1,2)$ puntu bakarra da, hots, zero dimentsiokoa eta $\dim S + \dim R = \dim (S + R) + \dim (S \cap R)$ (hots, $1 + 1 = 2 + 0$) betetzen da.

9. Esan A (1,2), B (1,-1) eta C (0,4) puntuek erreferentzia afin bat osatzen duten.

Ebaz.: Galdera hori {A ; AB, AC} erreferentzia bat den ala ez ikertzea bezalakoa da. Horretarako nahikoa da AB (0,-3) eta AC (-1,2) bektoreak independenteak diren aztertzea.

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \qquad \text{Beraz, erreferentzia bat da.}$$

10. Kalkulatu A (1,2,1,1), B (1,2,2,0) eta C(0,1,0,0) puntuek finkatzen duten barietate linealaren ekuazio parametrikoak eta cartesiarrak. Gero kalkulatu barietate hori determinatzen duten hiperplanoen sorta.

Ebaz.: AB (0,0,1,-1) eta AC = (-1,-1,-1,-1) independenteak dira, eta ondorioz, barietatea plano bat da. Bere bektore-ekuazioa $S = A + \alpha.AB + \beta.AC$ da. Beraz,

- parametrikoak: $(x,y,z,t) = (1,2,1,1) + \alpha.(0,0,1,-1) + \beta.(-1,-1,-1,-1)$, hots

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \beta \\ y = 2 - \beta \\ z = 1 + \alpha - \beta \\ t = 1 - \alpha - \beta \end{array}\right\}$$

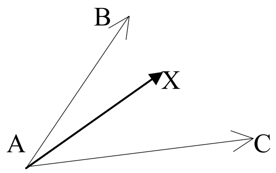
- cartesiarrak: parametroak kenduz gero: $\left.\begin{array}{r} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - t = 0 \end{array}\right\}$ (bi hiperplano)

Kontuan hartu R^4 espazioan hiperplanoen ekuazioak $ax + by + cz + dt + e = 0$ direla eta hiru dimentsioak direla. Ondorioz, R^4 espazioan plano baten ekuazioa bi hiperplanoen arteko ebaketaren bitartez adierazten da.

Bi hiperplano horien sorta $\alpha.(x - y + 1) + \beta.(2x - z - t) = 0$ izango da.

11. Ikertu zein den ondoko hiru plano hauen arteko posizio erlatiboa: $x - 2y + z - 1 = 0$, $3x - z + 1 = 0$ eta A(1,2,4),B(2,4,7) eta C(2,0,1) puntuetatik pasatzen dena.

Ebaz.: Hirugarren planoko ekuazio cartesiarra aterako da lehenengoan:



$$\begin{vmatrix} AX \\ AB \\ AC \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3y - 2z + 2 = 0$$

$\left.\begin{array}{l} x-2y+z-1=0 \\ 3x-z+1=0 \\ 3y-2z+2=0 \end{array}\right\}$ sistemaren matrizea $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ da.

Gauss metodoa erabiliz, zeroak egingo dira: $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ondorioz, he M = he M’ = 2 < 3 = ezezagunen kopurua. Beraz, bateragarria eta indeterminatua da. Beraz, hiru plano horiek zuzen batean ebakitzen dute elkar, hain zuzen $\left.\begin{array}{l} x-2y+z-1=0 \\ 6y-4z+4=0 \end{array}\right\}$ ekuazioak dituen zuzenean.

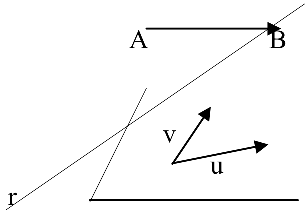
12. Kontsidera ditzagun A(3,5,-1) puntua eta r : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{4}$ *zuzena. Aurkitu r zuzeneko B puntu bat AB bektorea eta 3x - 2y + z + 5 = 0 planoa paraleloak izan daitezen.*

Ebaz.: r zuzenaren ekuazio parametrikoak $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{array}\right\}$ dira, eta ondorioz, B puntua

B $(1 + 2\lambda, -2 + \lambda, -1 + 4\lambda)$ izango da.

AB bektorea, beraz, AB $(-2 + 2\lambda, -7 + \lambda, 4\lambda)$ izango da.

Beste alde batetik, $3x - 2y + z + 5 = 0$ planoaren bi noranzko-bektore aurkitzeko bere ekuazio parametrikoak adieraziko dira: $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = -5 - 3x + 2y \end{array}\right\}$ eta



bi noranzko-bektoreak u (1,0,-3) eta v (0,1,2) dira. Orduan, nahikoa da AB = α.u + β.v exijitzea: (-2 + 2λ, -7 +λ, 4λ) = (α,0,-3α) + (0,β,2β) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -2+2\lambda=\alpha \\ -7+\lambda=\beta \\ 4\lambda=-3\alpha+2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=-1$$

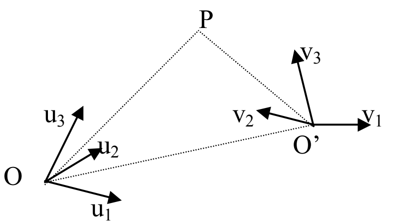
Beraz, B (-1,-3,-5) da aurkitu nahi zen puntua.

13. Izan bedi R = {O ; u_1, u_2, u_3} R^3 espazioko erreferentzia-sistema bat eta izan bedi R' = {O' $(2,1,4)_R$; v_1, v_2, v_3} beste erreferentzia bat, non $v_1 = -u_2$, $v_2 = 3u_1 - u_2 + u_3$ eta $v_3 = 3u_1 - u_3$ diren.

a) Kalkulatu erreferentzia-aldaketaren ekuazioak

b) A = $(1,-2,4)_R$ puntuaren koordenatuak R'-rekiko.

Ebaz.: a) P puntu baten koordenatuak $(x,y,z)_R$ eta $(x',y',z')_{R'}$ badira, beraien lotura (hau da, *erreferentzia-aldaketaren ekuazioak)* OP = OO' + O'P egitetik aterako da, zeren eta P puntuaren koordenatuak R erreferentziarekiko OP bektorearenak B = {u_1, u_2, u_3} oinarriarekiko baitira. Modu berean, bere koordenatuak R'-rekiko O'P bektorearenak dira B' = {v_1, v_2, v_3} oinarriarekiko.



$(x,y,z)_B = (2,1,4)_B + (x',y',z')_{B'} = (2,1,4)_B +$ $x'.v_1 + y'.v_2 + z'.v_3 = (2,1,4)_B + x'.(0,-1,0)_B$ $+ y'.(3,-1,1)_B + z'.(3,0,-1)_B$. Beraz:

$$\begin{array}{l} x = 2 + 3y' + 3z' \\ y = 1 - x' - y' \\ z = 4 + y' - z' \end{array}$$

dira erreferentzia-aldaketaren ekuazioak

b) A $(1,-2,4)_R$ puntuaren koordenatuak R'-rekiko (x',y',z') badira, ondoko sistema hau

ebaztetik aterako dira: $\left.\begin{array}{l} 1 = 2+3y'+3z' \\ -2 = 1-x'-y' \\ 4 = 4+y'-z' \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{19}{6}, y = \dfrac{-1}{6}, z = \dfrac{-1}{6}$

14. Kalkulatu $\left.\begin{aligned} x - 2z = 0 \\ y - 3z = 1 \end{aligned}\right\} R^3$ *espazioko zuzenaren ekuazio homogeneoak eta aztertu A(4,7,2) puntuak bi motatako ekuazioak (cartesiarrak eta homogeneoak) betetzen dituen.*

Ebaz.: Ekuazio parametrikoak $\left.\begin{aligned} x &= 2\mu \\ y &= 1 + 3\mu \\ z &= \mu \end{aligned}\right\}$ dira eta bi puntu ateratzeko nahikoa da $\mu = 0$ eta $\mu = 1$ hartzea: Q_1 (0,1,0) eta Q_2 (2,4,1) dira. Koordenatu homogeneoak Q_1 (1,0,1,0) eta Q_2 (1,2,4,1) dira m = 1 hartuz. Orduan, ekuazio homogeneoak ondoko hauek dira:

$$\left.\begin{aligned} \lambda.x_0 &= \alpha + \beta \\ \lambda.x &= 2.\beta \\ \lambda.y &= \alpha + 4\beta \\ \lambda.z &= \beta \end{aligned}\right\}$$ eta A puntuaren koordenatuak homogeneoak (1,4,7,2) dira.

puntu hau zuzenekoa da, zeren eta ekuazio cartesiarretan x = 4, y = 7 eta z = 2 eginez gero, $\mu = 2$ balioarentzat betetzen baitira. Modu berean, ekuazio homogeneoetan ordezkatzen badira:

$$\left.\begin{aligned} \lambda.1 &= \alpha + \beta \\ \lambda.4 &= 2.\beta \\ \lambda.7 &= \alpha + 4\beta \\ \lambda.2 &= \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

nahikoa da $\alpha = -\lambda$ eta $\beta = 2\lambda$ hartzea $\forall\lambda$.

Espero genuen bezala $2 = \mu = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta} = \dfrac{2\lambda}{-\lambda + 2\lambda}$

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Izan bitez $K = Z/2$ kongruentzia modulu 2 gorputza eta V K^2 bektore-espazioa K-ren gainean. Kontsidera dezagun $(K^2; +_V)$ espazio afina. Kalkulatu:
a) zenbat puntu dituen espazio afin horrek.
b) zenbat zuzen dituen.
c) zenbat puntu dituen zuzen bakoitzak.

2. Izan bedi S P puntutik pasatzen den eta W noranzkoa duen barietate lineala. Izan bedi $Q \in S$. Frogatu $S = Q + W$.

3. Froga ezazu plano afineko bi zuzen desberdin paraleloak direla, baldin eta soilik baldin haien ebakidura hutsa bada.

4. Froga ezazu paralelogramo baten diagonalek beren erdiko puntuetan ebakitzen dutela elkar.

5. Froga ezazu triangelu baten erdibitzaileek barizentroan ebakitzen dutela elkar

6. Izan bitez A eta B espazio afin baten bi azpimultzo, non $A \subset B$ den. Frogatu A-k sortzen duen azpiespazio afina B-k sortzen duenaren barruan dagoela.

7. Kontsidera ditzagun R^4 espazio afineko ondoko S eta R azpiespazioak:

$$S = \{(a + \lambda + 2\mu,\ 1 - \lambda - \mu,\ 4 + 2\lambda,\ 6 + \lambda + 2\mu) \ /\ \lambda, \mu \in R\}$$
$$R = \{(2 + \alpha + 2\beta,\ 1,\ 1 + \alpha + \beta,\ 3\alpha) \ /\ \alpha\beta \in R\}$$

a) Kalkulatu a $S \cap R$ hutsa ez izateko.
b) Aurkitutako a-rentzat kalkulatu $S + R$ eta $S \cap R$.
c) Gainerako a-ren balioentzat esan zein izango litzatekeen $S + R$.

8. Kontsidera dezagun $(R^3; +_R)$ espazio afina. Esan ondoko puntu-multzoetatik zeinek osatzen duten erreferentzia bat:

- *A (1,2,1), B (1,-1,-2), C (3,1,3,2) eta D (0,1,3,0)*
- *A (2,0,0), B (0,1,1), C (1,3,4) eta D (1,2,3)*

9. Kalkulatu P (1,1,0) puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa $x - y + 2z = 2$ eta $x - 3z = 0$ planoek determinatzen duten zuzenarekiko paraleloa dela jakinik.

10. Izan bitez α A (1,2,1), B (0,1,1) eta C (0,0,-1) puntuetatik pasatzen den planoa eta β D (1,2,-2) puntutik pasatzen den eta $\frac{x+3}{-1} = y = \frac{z-4}{4}$ zuzenaren sortako planoa. Kalkulatu m, mx + z - 2 = 0 planoa α eta β planoen sortakoa izan dadin.

11. Izan bitez $R = P\ (2,0,0,1,1) + U$, non $U = \{\lambda.(1,0,0,0,1)\ /\ \lambda \in R\}$ den eta $R = Q\ (1,-1,0,3,3) + W$, non $W = \{\alpha.(0,-1,0,2,3) + \beta.(1,2,0,0,1)\ /\ \alpha\beta \in R\}$ den, R^5 espazioko bi barietate linealak. Kalkulatu $R + S$ eta $R \cap S$.

12. Izan bitez R^4 espazioko ondoko azpiespazio afinak:

$S_1 = \{(x,y,z,t)\ /\ x = a + 3\lambda + 2\mu,\ \ y = 1 - \lambda - \mu,\ \ z = 4 + \lambda,\ \ t = 6 + 5\lambda + 2\mu \quad \lambda,\mu \in R\}$
$S_2 = \{(x,y,z,t)\ /\ x = 2 + \alpha + 2\beta,\ \ y = 1,\ \ z = 1 + \alpha + \beta,\ \ t = 3\alpha \quad \alpha,\beta \in R\}$

a) Kalkulatu a $S_1 \cap S_2 \neq \phi$ *izateko.*
b) Determinatutako a balioarentzat, kalkulatu $S_1 \cap S_2$ *eta* $S_1 + S_2$.

13. Izan bitez A (0,1,1,2), B (1,4,3,-2), C (3,1,0,0) eta D (-2,1,3,0). Kalkulatu D puntutik pasatzen den planoaren ekuazioa, A, B eta C puntuetatik pasatzen den planoarekiko paraleloa dela jakinik.

14. Kalkulatu m, A (0,0,1), B (0,1,2), C (-2,1,3) eta D (m,m - 1,2) planokideak izan daitezen.

15. Kalkulatu plano beten ekuazioa, $x = 1 - \lambda$, $y = 2 + \lambda$, $z = -1 + 2\lambda$ *zuzenetik pasatzen dela eta* $\frac{x}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-4}{1}$ *zuzenarekiko paraleloa dela jakinik.*

16. Kalkulatu A (1,-1,0) puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa, ondoko r eta s zuzenak ebakitzen dituela jakinik:

$$r:\ \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad \text{eta} \qquad s:\ \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{1} = z$$

17. Kalkulatu ondoko barietate afinen arteko posizio erlatiboa:

a) $2x - y = 0$ *eta* $6x - 3y + 2 = 0$ $\qquad R^2$*-an.*
b) $x - 2y + z - 1 = 0$ *eta* $x - 2y - 3 = 0$ $\qquad R^3$*-an.*
c) $\frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z}{2}$ *eta* $\left.\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{array}\right\}$ $\qquad R^3$*-an.*

d) $\left.\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 2x-3z=2 \end{array}\right\}$ *eta* $x + y + 4z - 2 = 0$ R^3*-an.*

e) $x - y + 2z - 3 = 0$, $x = 2$ *eta* $2y + z + 1 = 0$ R^3*-an.*

f) $x + y - z - 2 = 0$, $2x + y + z = 0$ *eta* $x - 3z = 0$ R^3*-an.*

g) $x + 2y - 1 = 0$, $3x + 2z + 2 = 0$ *eta* $x - 4y + 2z = -4$ R^3*-an.*

h) $\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=2+2\lambda \\ t=1-\lambda \end{array}\right\}$ *eta* $\left.\begin{array}{l} x-z+2t=1 \\ y-2z+3t=2 \end{array}\right\}$ R^4*-an.*

i) $x - y + z + 3t = 1$ *eta* $\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x-z-3t=2 \end{array}\right\}$ R^4*-an.*

j) $\left.\begin{array}{l} x=1+\alpha+\beta \\ y=1 \\ z=\alpha \\ t=2+3\beta \end{array}\right\}$ *eta* $3x + y - 3z - t - 3 = 0$ R^4*-an.*

18. Izan bedi $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ *planoko zirkunferentzia baten ekuazioa* $R = \{O\ ;\ e_1, e_2\}$ *erreferentziarekiko. Kalkulatu bere ekuazioa* $R' = \{O'\ (1,-2);\ e_1, e_2\}$ *erreferentziarekiko.*

19. Idatzi ondoko azpiespazio afinen ekuazio homogeneoak:

a) $x - y = 3$ *zuzenarenak* R^2*-an.*

b) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$ *zuzenarenak* R^3*-an.*

c) $2x - y + 3z + 4 = 1$ *planoarenak* R^3*-an.*

20. Izan bitez $\left.\begin{array}{l} x_0=\alpha-2\beta \\ x=\alpha \\ y=\alpha-3\beta \\ z=3\alpha+\beta \end{array}\right\}$ *eta* $\left.\begin{array}{l} x+my=0 \\ 7y+z=0 \end{array}\right\}$ R^3*-ko bi barietateren ekuazio homogeneoak eta cartesiarrak hurrenez hurren. Kalkulatu m paraleloak izan daitezen.*

8. BEKTORE--ESPAZIO EUKLIDEARRAK

8.1. SARRERA

Bektore-espazioaren kontzeptua geometria klasikoak iradokitzen du eta abstrakzio-prozesu bat eginez bere egitura eta propietateak orokortzen dira. Liburu honetan ez da oraindik kontuan hartu bektore-espazioaren ikuspuntu geometrikoa, hau da, bektoreen propietate geometrikoak: bektore baten luzera, bi bektoreren arteko angelua, bi punturen arteko distantzia eta abar. Hori dena jasotzen da bektore--espazioaren kontzeptu berri batekin hornituz: *biderkadura eskalarra*. Orduan bektore--espazio euklidearra dela esaten da.

Beraz, bektore-espazio euklidear bat bektore-espazio bat da, non biderkadura eskalar bat definitu den. Bektore-espazio horretan metrika bat sartu dela (aipatu behar da biderkadura eskalarraren bidez egitea ez dela modu bakarra) esaten da eta horregatik euklidearra izateaz gain metrikoa ere badela esaten da.

Atal honetan bektore-espazioari lotuta dagoen gorputza R den kasura bakarrik mugatuko gara (eta inoiz C gorputz konplexuaren kasura ere bai).

Bigarren hezkuntzan, normalean, angeluak ikusi ondoren aurkezten zaie biderkadura eskalarra ikasleei eta gero kosinua erabiliz definitzen da. Hemen alderantziz ikusiko da, lehenengo biderkadura eskalarra definituko da eta horretan oinarrituz angeluak eta distantziak sortuko dira modu naturalean.

Hurrengo kapituluan, espazio afin batean dagokion bektore-espazioa euklidearra bada zer gertatzen den ikusiko da. Espazio afina ere euklidearra dela esaten da eta puntuen arteko distantziak (orokorrean barietate afinen arteko distantziak) kalkulatu ahal izango dira.

8.2. BIDERKADURA ESKALARRA

8.1. DEFINIZIOA: Izan bedi V R gaineko bektore-espazio bat. Izan bedi $V^2 \xrightarrow{\bullet} R$ aplikazio bat, non ondoko propietateak betetzen diren:

1. $v.v \geq 0 \quad \forall v \in V$ eta $v.v = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $v.w = w.v \quad \forall v,w \in V$
3. $(k.v).w = k.(v.w) \quad \forall k \in R, \ \forall v,w \in V$
4. $u.(v + w) = u.v + u.w \quad \forall u,v,w \in V$

orduan aplikazio honi *biderkadura eskalar* deritzo.

axioma horiek betetzen dituen biderkadura eskalarrak beste propietate hauek ere beteko ditu:

- $(x + y).\ z = x.z + y.z$. Agerikoa da 2. eta 4. axiomak kontuan hartuz gero.
- $x.(k.y) = k.(x.y)$ " 2. eta 3. "
- $x.o = o$ zeren eta $x.(y - y) = x.y - xy = o$ baita.
- $x.y = o$ bada $\forall y \in V \Rightarrow x = o$. Horrela da, zeren eta $y = x$ hartuz $x.x = o$ baita eta lehenengo axiomaren arabera $x = o$ da.

Oharra: notazioaren aldetik aipatu behar da biderkadura eskalarra hainbat modu desberdinetan adierazten dela: $x.y = (x,y) = (x \mid y) = \langle x,y \rangle = \langle x \mid y \rangle$

adibidea: Demagun F ([a,b] ; R) dela R-ko [a,b] bitartean definituak dauden funtzio jarraituen multzoa.

$f.g = \int_a^b f(x).g(x)dx$ biderkadura eskalarra dela ikusiko dugu.

- $f.f = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$ bistan da.

Demagun $f = o$ dela, orduan $f.f = \int_a^b 0^2 dx = 0$.

Demagun orain $f.f = 0$ dela. f zero ez bada, orduan f^2 positiboa izango da c puntu batean, eta f jarraitua denez, $f^2(x) > f^2(c)/2$ c-ko (a_0,b_0) ingurune batean. Ondorioz: $f.f = \int_a^b f^2(x)dx \geq \int_{a_0}^{b_0} f^2(x)dx > \frac{1}{2}.\int_{a_0}^{b_0} f^2(c)dx = \frac{b_0 - a_0}{2}.f^2(c) > 0$ eta hau hipotesiaren aurka doa, beraz, $f = o$ da.

- $f.g = \int_a^b f(x).g(x)dx = \int_a^b g(x).f)(x)dx = g.f$

- $(k.f).g = \int_a^b (k.f(x)).g(x)dx = k.\int_a^b f(x).g(x)dx = k.(f.g)$
- $f.(g+h) = \int_a^b f(x).(g(x)+h(x))dx = \int_a^b f(x).g(x)dx + \int_a^b f(x).h(x)dx = \ f.g + f.h$

adibidea: R^n bektore-espazioan $x\ (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ eta $y\ (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ bi bektore badira, biderkadura eskalarra ondokoak definitzen duena da:

$$x.y = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \ldots\ldots + x_n.y_n \qquad (R^2\text{-an: } (x_1, x_2).(y_1, y_2) = x_1.y_1 + x_2.y_2)$$

8.3. ADIERAZPEN MATRIZIALA

8.1.PROPOSIZIOA: V espazio euklidear batean biderkadura eskalarra erabat definituta gelditzen da $B = \{e_1, e_2, \ldots,e_n\}$ edozein oinarri baten bektoreen elkarrekiko biderkadura guztiak emanez: $e_i .e_j \quad \forall i,j = 1\ldots\ldots n$

Frog.: Izan bitez $x,y\in V$. Orduan bi bektore horiek B oinarriarekiko adieraz daitezke: $x = x_1.e_1 + \ldots\ldots + x_n.e_n$ eta $y = y_1.e_1 + \ldots + y_n.e_n$. Biderkaduraren propietateak erabiliz, x.y garatu ahal da: $x.y = = (x_1.e_1 + \ldots\ldots + x_n.e_n).(y_1.e_1 + \ldots + y_n.e_n) = x_1.y_1\ .e_1.e_1 + x_1.y_2.e_1.e_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n.y_n.e_n.e_n = \sum_{i,j=1}^{n} x_i.y_j.e_i.e_j$

Ondorioz, nahikoa da $e_i .e_j$ ematea. Beste bi edozein bektoreren arteko biderkadura eskalarra aurkitzea, oinarri horretan adierazi ondoren, berehala egiten da. Beste alde batetik, $e_i .e_j$ n ordenako matrize karratu batean jaso daitezke:

$$G = \begin{pmatrix} e_1.e_1 & e_1.e_2 & \cdots & e_1.e_n \\ e_2.e_1 & e_2.e_2 & \cdots & e_2.e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n.e_1 & e_n.e_2 & \cdots & e_n.e_n \end{pmatrix}$$

BIDERKADURA ESKALARRAREN MATRIZEA (edo METRIKA-MATRIZEA) deitzen zaio eta biderkadura eskalarra, lengoaia matriziala erabiliz, honela idatzi ahal da:

$$x.y = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\ .\begin{pmatrix} e_1.e_1 & e_1.e_2 & \cdots & e_1.e_n \\ e_2.e_1 & e_2.e_2 & \cdots & e_2.e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n.e_1 & e_n.e_2 & \cdots & e_n.e_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T.G.Y$$

Matrize honi GRAM matrize deritzo eta biderkadura eskalar bat dela kausa, ondoko propietate hauek betetzen ditu:

- Diagonal nagusian positiboak dira gai guztiak: $e_i.e_i > 0 \quad \forall i.$

- Simetrikoa da. Agerikoa da, $e_i.e_j = e_j.e_i$ baita.
- Erregularra da. Hots, bere determinantea ezin da zero izan.

Frog.: Demagun bere determinantea zero dela. Orduan ondoko ekuazio-sistema indeterminatua izango da eta zero ez diren soluzioak izangoditu:

$$\begin{pmatrix} e_1.e_1 & e_1.e_2 & \cdots & e_1.e_n \\ e_2.e_1 & e_2.e_2 & \cdots & e_2.e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n.e_1 & e_n.e_2 & \cdots & e_n.e_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Demagun $s = (s_1,s_s,....., s_n) \neq o$ dela soluzio bat. Gram matrizeari G deituz, ondoko hau beteko da: $G.s^T = o$.
Orain s.s kalkulatzen bada:
$s.s = s.G.s^T = s.o = o$ eta hori ez da posible $s \neq o$ denean.

Kontuan hartu behar da ez ditugula eman matrize batek biderkadura eskalar bat adierazteko beharrezko dituen baldintza guztiak. Eman ditugunak (simetrikoa eta determinantea zero ez izatea) ezinbestekoak dira, baina ez digute ziurtatzen edozein x-rentzat $x.x > 0$ betetzen denik. Esate baterako, R^2-an $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeak ez du biderkadura eskalar bat definitzen, nahiz eta diagonal nagusiko gaiak (1 eta 2) positiboak izan, matrizea simetrikoa izan eta bere determinantea $-7 \neq 0$ izan. Har dezagun (-2,3) bektorea esate baterako:

$$(-2,3).(-2,3) = (-2,3).\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-2,3).\begin{pmatrix} 13 \\ -4 \end{pmatrix} = -38 < 0 \quad \text{eta hori ez da posible.}$$

adibidea: Izan bedi $B = \{e_1\ (1,1), e_2\ (-1,0)\}$ R^2-ko oinarria eta demagun $e_1.e_1 = 5$, $e_1.e_2 = 2$, $e_2.e_1 = 2$ eta $e_2.e_2 = 1$. Aztertu biderkadura eskalar bat definitu den.

Ebaz.: Kalkula dezagun biderkadura eskalarraren adierazpen orokorra. Izan bitez $x(a,a'), y(b,b') \in R^2$, orduan $x.y = a.b..e_1.e_1 + a.b'.\ e_1.e_2 + a'.b.\ e_2.e_1 + a'.b'.\ e_2.e_2 = 5ab + 2ab' + 2a'b + a'b'$. Modu matrizialean: $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ikusten denez, matrizeak ezinbesteko baldintzak betetzen ditu, baina biderkadura eskalar bat dela ziurtatzeko, $x \neq o$ izanik $x.x > 0$ dela frogatu behar da. Demagun x bektorearen koordenatuak B oinarrian (a,a') direla:

$$x.x = (a,a').\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} = (a,a').\begin{pmatrix} 5a + 2a' \\ 2a + a' \end{pmatrix} = 5a^2 + 2aa' + 2aa' + a'^2 = 5a^2 + 4aa' + a'^2 =$$

$a^2 + (2a + a')^2 > 0$ zeren eta a eta a' ezin dira biak zero izan. Beraz, biderkadura eskalarra da.

8.4. NORMA (EDO MODULUA). DISTANTZIA

8.2.DEFINIZIOA: Izan bedi V R gorputz gaineko bektore-espazio bat eta $x \in V$. Orduan $V \xrightarrow{\|\ \|} R^+$ aplikazioa norma bat da ondoko propietateak betetzen badira:

- $\| x \| \geq 0 \quad \forall x \in V$
- $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = o$
- $\|\lambda.x\| = |\lambda|.\|x\| \quad \forall \lambda \in R \quad \forall x \in V$
- $\|x + y\| \leq \| x \| + \| y \| \quad \forall x,y \in V$

Bektore-espazio batean norma bat definituta badago, espazio normatua dela esaten da. Norma sartzeko, orain ikusiko den bezala, biderkadura eskalarraren bitartez egin daiteke. Horregatik, espazio euklidearra normatua da, baina ez du zertan elkarrekikoa bete, hots, posible da espazio normatu bat euklidearra ez izatea.

8.2. PROPOSIZIOA: $\| x \| = +\sqrt{x.x}$ norma bat da.

askotan $|x|$ idazten da, baina batzuei ez zaie gustatzen zenbaki baten balio absolutuarekin nahas daitekeelako. Garbi baldin badago zertan ari garen (bektore edo eskalar batekin) ez dago nahasterik eta horregatik $|x|$ idatziko da testu honetan.

Frogapena eta propietateak:

- $|x| \geq 0$ eta $|x| = 0 \Leftrightarrow x = o$ bada. Agerikoa da.

- $|k.x| = |k|.|x|$. Frog.: $|k.x| = (kx.kx)^{1/2} = (k^2.(x.x))^{1/2} = |k|.|x|$

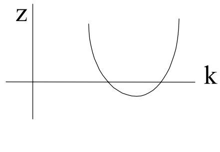
- $|x.y| \leq |x|.|y|$ **(Schwartz desberdintza)**

Frog.: $(kx + y).(kx + y) \geq 0$ desberdintza betetzen da edozein k-rentzat, eta ondorioz: $k^2.(x.x) + 2k.(x.y) + (y.y) \geq 0 \Rightarrow k^2.|x|^2 + 2k\,(x.y) + |y|^2 \geq 0$ (*)

Orduan, $k^2.|x|^2 + 2k\,(x.y) + |y|^2 = 0$ ekuazioak ezin du diskriminatzailea ($b^2 - 4ac$) positiboa izan, bestela $z = f(k) = k^2.|x|^2 + 2k\,(x.y) + |y|^2$ parabolak bi puntutan ebakiko luke k ardatza eta ez litzateke (*) beteko.

Diskriminatzailea $(2.(x.y))^2 - 4.|x|^2.|y|^2$ da. Beraz, honako hau beteko da:

$(2.(x.y))^2 - 4.|x|^2.|y|^2 \leq 0 \Rightarrow (x.y)^2 \leq |x|^2.|y|^2$



Beraz, $|(x.y)| \leq |x|.|y|$

8.1. KOROLARIOA: bi bektore mendekoak dira $\Leftrightarrow |(x.y)| = |x|.|y|$

Agerikoa da, zeren eta x eta y mendekoak badira k bakarra existitzen baita, non $kx + y = o$ den. Orduan, $k^2 . |x|^2 + 2k\,(x.y) + |y|^2 = 0$ ekuazioaren soluzio k bakar hori izateko diskriminatzaileak zero izan behar du. Elkarrekikoa agerikoa da, zeren eta $|(x.y)| = |x|.\,|y|$ bada, $(kx + y).(kx + y) = 0$ ekuazioak soluzioa du k-rentzat, eta ondorioz, $kx + y = o$ izango da (hau da, x eta y mendekoak dira)

- $|x + y| \leq |x| + |y|$ ***(Minkovski desberdintza)***

Frog.: $|x + y|^2 = (x + y,\, x + y) = |x|^2 + 2.(x.y) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2.|x|.|y| + |y|^2 = (|x|+ |y|)^2$. Beraz, $|x + y| \leq |x| + |y|$ betetzen da.

Kontuan hartu norma zero duen bektore bakarra $x = o$ dela. Norma bat duen bektoreari *unitate bektore* (edo *normalizatu*) deitzen zaio. Argi dago edozein x bektore bere normaz zatituz $x' = \frac{1}{|x|}.x$ unitate bektore bat sortzen dela:

$$|\,x'\,| = +\sqrt{\frac{1}{|x|}.x.\frac{1}{|x|}.x} = +\sqrt{\frac{1}{|\,x\,|^2}.x.x} = \frac{1}{|x|}.\sqrt{x.x} = \frac{|x|}{|x|} = 1$$

adibidea: R^2 espazioan oinarri batekiko x bektore baten koordenatuak (x_1, x_2) badira, posible da norma bat honela definitzea:

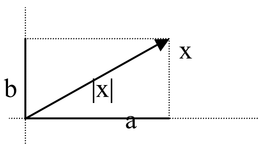
$$|\,x\,| = \max.\ \{|x_1\,|, |x_2\,|\}$$

Erraza da norma bat dela egiaztatzea eta ez dela inolako biderkadura eskalar batetik ondorioztatzen.

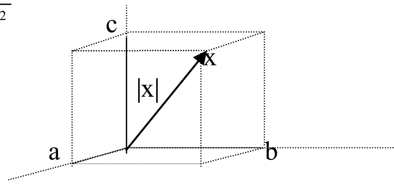
BEKTOREEN LUZERA

Biderkadura eskalar gisa identitate-matrizea hartzen bada, definitutako norma (modulua) bektorearen luzera bezala interpreta daiteke grafikoki.

a) R^2- an $|x\,(a,b)| = +\sqrt{(a,b).(a,b)} = +\sqrt{a^2 + b^2}$



b) R^3-an $|\,x\,(a,b,c)\,| = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

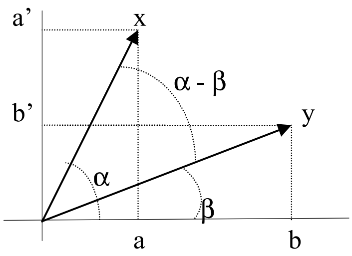


BI BEKTOREREN ANGELUA

Izan bitez x eta y zero ez diren bi bektore. Bektore-bikote honi α angelu bat egokitu ahal zaio ondoko erlazioaren bitartez:

$$\cos(x,y) = \cos\alpha = \frac{x.y}{|x|.|y|}$$

Biderkadura eskalarra oinarri kanonikoan identitate matrizea bada (biderkadura eskalar kanoniko deitzen zaio), orduan definizio hau bat dator geometria klasikoan planoan (eta R^3-an ere) egindako kosinuaren definizioarekin. Ikus dezagun:



x (a,a') eta y (b,b') badira a = |x| .cos α, a' = |x|. sin α, b = |y|.cos β eta b' = |y|.sin β. Beraz:

$$\cos(x,y) = \frac{x.y}{|x|.|y|} = \frac{a.b + a'.b'}{|x|.|y|} = \frac{|x|.|y|.\cos\alpha.\cos\beta + |x|.|y|.\sin\alpha.\sin\beta}{|x|.|y|} = \cos(\alpha - \beta)$$

espero genuen bezala.

8.3. PROPOSIZIOA: $-1 \le \cos\alpha \le 1$

Frog.: Schwartz desberdintzatik $-|x|.|y| \le x.y \le |x|.|y|$ ondorioztatzen da eta x eta y bektoreak zero ez direnez, |x|.|y| zenbakiaz zatitu ahal izango da proposizioa frogatzeko.

DISTANTZIA

8.3. DEFINIZIOA: E espazio metriko batean d: ExE $\xrightarrow{d}$ R^+ aplikazio bat distantzia bat dela esan ohi da ondoko baldintza hauek betetzen badira:

- $d(x,y) \ge 0$ $\quad\forall x,y \in E$
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ $\quad\forall x,y \in E$
- $d(x,y) = d(y,x)$ $\quad\forall x,y \in E$
- $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ $\quad\forall x,y,z \in E$

Distantziaz hornitzeko, bektore-espazio normatu bat normaren bitartez egiten da jarraian adierazten den bezala. Kontuan hartu posible dela distantzia bat definitzea norma erabili gabe.

8.4. DEFINIZIOA: Izan bedi V bektore-espazio normatu bat eta x,y$\in$V. Bi bektore horien arteko distantzia beraien diferentziaren bektorearen norma da: d (x,y) = $\|x - y\|$.

Distantzia bat dela ikusiko dugu:

1. $d(x,y) = |x - y| \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 = |x - y|$. Orduan $x - y = o$ eta ondorioz, $x = y$.
3. $d(x,y) = |x - y| = |(-1).(y - x)| = |-1|.\ |y - x| = |y - x| = d(y,x)$
4. $d(x,y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x,z) + d(z,y)$

Laugarren propietate honetatik (desberdintza triangeluar deitzen dena) oso erraza da frogatzea $d(x,y) \geq |\, d(x,z) - d(y,z)\, |$ desberdintza ondorioztatzen dela.

8.5. ORTOGONALTASUNA

8.5. DEFINIZIOA: Espazio euklidear batean esaten da x,y bi bektore ortogonalak direla bien biderkadura eskalarra zero baldin bada.

Definizio hori bat dator geometria klasikoan egindako elkarzutasunaren (edo perpendikulartasunaren edo ortogonaltasunaren) definizioarekin, non bi bektore perpendikularrak (elkarzutak) diren 90º-ko angelua eratzen badute.

Bistan denez, $x.y = 0$ bada, orduan: $\cos(x,y) = \cos\alpha = \dfrac{x.y}{|x|.|y|} = 0 \Rightarrow \alpha = 90º$.

x eta y bektoreak ortogonalak direla adierazteko $x \perp y$ idazten da.

SISTEMA ORTOGONALAK ETA ORTONORMALAK

Izan bedi $\{u_1, u_2,.....,u_r\}$ V_n bektore-espazio euklidear bateko bektore-sistema bat. Orduan:

- $\{u_1, u_2,.....,u_r\}$ sistema *ortogonala* da $u_i.u_j = 0$ $i \neq j$ denean.
- $\{u_1, u_2,.....,u_r\}$ sistema *ortonormala* da $\begin{cases} u_i.u_j = 0 & i \neq j \\ |u_i| = 1 & \forall i = 1....r \end{cases}$ denean.

Kontuan hartu zero bektorea sistema ortogonal baten barne egon daitekeela, zeren eta $\forall x$ $o.x = o$ baita. Baina ezin du sistema ortonormal batean parte hartu bere norma zero delako.

Zero bektorea ez duen sistema ortogonal batetik sistema ortonormal bat sor daiteke u_i bektore bakoitza $1/|u_i|$ eskalarraz biderkatuz.

adibidea: Izan bitez (1,3,0) eta (-3,1,1) R^3-ko bektoreak, non biderkadura eskalar kanonikoa kontsideratzen den (hemendik aurrera hau suposatuko da, kontrakorik adierazten ez bada). Agerikoa da sistema ortogonal bat dela (1,3,0). (-3,1,1) = 0 baita.

Haien normak $|(1,3,0)| = \sqrt{10}$ eta $|(-3,1,1)| = \sqrt{11}$ dira. Ondorioz $\frac{1}{\sqrt{10}}.(1,3,0)$ eta $\frac{1}{\sqrt{11}}.(-3,1,1)$ bektoreek sistema ortonormal bat eratzen dute.

PITAGORAS TEOREMA: Bektore-espazio euklidear batean x,y bektoreak ortogonalak dira, baldin eta soilik baldin $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ erlazioa betetzen bada.

Frog.: $|x + y|^2 = (x + y).(x + y) = x.x + 2.x.y + y.y = |x|^2 + |y|^2$ soilik $x.y = 0$ bada.

8.4. PROPOSIZIOA: Izan bedi $\{u_1, u_2,.....,u_r\}$ sistema ortogonal bat, non $u_i \neq o$ $\forall i$. Orduan u_i bektoreak independenteak dira.

Frog.: Demagun $k_1.u_1 + k_2.u_2, +.......+ k_r.u_r = o$. Eta u_i bektoreaz biderkatzen bada: $u_i .(k_1.u_1 + k_2.u_2, +.......+ k_r.u_r) = u_i.o \Rightarrow k_i.u_i.u_i = 0 \Rightarrow k_i |u_i|^2 = o$, baina u_i zero bektorea ez denez, bere norma ere ez da zero izango, eta ondorioz, $k_i = 0$.

Proposizio honen elkarrekikoak ez du zertan bete.

8.6. ORTOGONALTZEKO GRAM-SCHMIDT METODOA

8.1.TEOREMA: V bektore-espazio euklidear batean oinarri ortonormalak daude.

Frog.: Egin behar den frogapenean, teorema frogatzeaz gain, erakutsiko da nola eraiki daitekeen sistema ortonormal bat edozein sistema aske batetik abiatuta.

Demagun $\{u_1, u_2,.....,u_n\}$ V_n espazio euklidearreko oinarri bat dela. Oinarri horretatik oinarri ortonormal bat eraiki behar da.

Izan bedi $v_1 = \frac{u_1}{|u_1|}$. Argi dago ortonormala dela, hots $|v_1| = 1$.

Egin dezagun $w_2 = u_2 + \lambda.v_1$ ortogonala izateko v_1 bektorearekiko. Orduan $v_1.w_2 = 0$ exijitzen bada, $v_1. (u_2 + \lambda.v_1) = 0 \Rightarrow v_1.u_2 + \lambda.v_1.v_1 = 0 \Rightarrow v_1.u_2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = - v_1.u_2$ eta ondorioz $w_2 = u_2 - (v_1.u_2).v_1$. Bere normaz zatitzen bada:

$v_2 = \frac{w_2}{|w_2|}$ eta $\{v_1,v_2\}$ sistema ortonormala da eta sortzen duten bektore-azpiespazioa $\{u_1,u_2\}$ sistemak sortzen duenaren barne dago, zeren eta horien konbinazio linealak baitira. Baina bi azpiespazio horien dimentsioa bi da, zeren eta v_1 eta v_2 ortonormalak direnez independenteak baitira. Beraz, azpiespazio bera sortzen dute.

Har dezagun orain $w_3 = u_3 + \alpha.v_1 + \beta.v_2$ eta exiji dezagun ortogonala izatea v_1 eta v_2 bektoreekiko:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = v_1.w_3 = v_1.u_3 + \alpha \\ 0 = v_2.w_3 = v_2.u_3 + \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = -v_1.u_3 \\ \beta = -v_2.u_3 \end{array}\right\} \Rightarrow w_3 = u_3 - (v_1.u_3)v_1 - (v_2.u_3).v_2$$

w_3 bektorea ez da zero, bestela u_3, v_1 eta v_2 lotuta egongo lirateke. Ondorioz, u_1, u_2 eta u_3 bektoreak ere bai, eta hori ez da posible oinarri batekoak direlako. Orduan bere normaz zatituz: $v_3 = \dfrac{w_3}{|w_3|}$ lortzen den sistema $\{v_1,v_2,v_3\}$, sistema ortonormal bat da eta sistema horrek sortzen duen bektore-azpiespazioa $\{u_1,u_2,u_3\}$ sistemak sortzen duenaren barne dago, zeren eta horien konbinazio linealak baitira. Baina bi azpiespazio horien dimentsioa hiru da, zeren eta v_1,v_2 eta v_3 independenteak baitira (ortonormalak direlako). Beraz, azpiespazio bera sortzen dute.

Prozesu hau n aldiz errepikatuz oinarri ortonormal bat eraikitzen da.

adibidea: Izan bedi B = {e_1 (1,0,1), e_2 (1,0,0), e_3 (2,1,3)} R^3-ko oinarria. Kalkulatu oinarri ortonormal bat oinarri horretatik abiatuz.

Lehenengo bektore hau hartuko da: $\mathbf{v_1} = \dfrac{1}{|e_1|}.e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.(1,0,1)$

Bigarrena $v_2 = \dfrac{w_2}{|w_2|}$ da, non $w_2 = e_2 - (v_1.e_2).v_1 = (1,0,0) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = (\dfrac{1}{2},0,-\dfrac{1}{2})$ den, eta $|w_2| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ denez, orduan $\mathbf{v_2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}.(\dfrac{1}{2},0,-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$

Hirugarrena $v_3 = \dfrac{w_3}{|w_3|}$ da, non $w_3 = e_3 - (v_1.e_3).v_1 - (v_2.e_3).v_2$ den. Beraz, $w_3 = (2,1,3) - \dfrac{5}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) - \dfrac{-1}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}.(1,0,-1) = (0,1,0)$ eta ondorioz $\mathbf{v_3} = (0,1,0)$ izango da.

Beraz, B' = $\{v_1 \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), v_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), v_3(0,1,0)\}$ oinarri ortonormala da.

8.7. AZPIESPAZIO ORTOGONALAK

8.6. DEFINIZIOA: Izan bitez A eta B V espazio euklidearreko bi azpimultzo. Esaten da ortogonalak direla $a.b = 0 \quad \forall a \in A, \forall b \in B$ betetzen bada. ($A \perp B$ idazten da).

Agerikoa da $A \perp B$ bada orduan haiek sortzen dituzten azpiespazoak S(A) eta S(B) ere ortogonalak direla.

adibidea: R^3-an $A = \{u\ (1,2,1)\}$ eta $B = \{v_1\ (1,-1,1), v_2\ (2,2,-6)\}$ ortogonalak dira, zeren eta $u.v_1 = u.v_2 = 0$ baita ondorioz, $S(A) = \{\lambda u\}$ eta $S(B) = \{\alpha v_1 + \beta.v_2\}$ ortogonalak dira.

> 8.5. PROPOSIZIOA: Izan bedi V espazio euklidear bat eta izan bitez $U,W \subset V$ bi azpiespazio. Orduan $U \perp W \Rightarrow U \cap W = o$ (hots, horien batuketa zuzena da)

Frog.: Demagun $U \perp W$ eta $x \in U \cap W$. Izan bitez $B = \{u_1, ...,u_p\}$ eta $B' = \{w_1, ...,w_r\}$ U eta W-ko bi oinarri hurrenez hurren. Orduan, $x = \alpha_1.u_1 + ... + \alpha_p.u_p = \beta_1.w_1 + ... + \beta_r.w_r$ eta $x.x = \sum_{\substack{i=1...p \\ j=1...r}} \alpha_i.\beta_j.(u_i.w_j)$. Baina $u_i.w_j = 0 \quad \forall i,j \quad U \perp W$ baita. Beraz, $x.x = 0$ eta ondorioz $x = o$ da.

> 8.6. PROPOSIZIOA: Izan bedi A V espazio euklidearreko bektore-multzo bat. Izan bedi $A^\perp$ A-rekiko ortogonalak diren bektoreen multzoa. Orduan, $A^\perp$ V-ko bektore--azpiespazioa da.

Frog.: Agerikoa da, $S(A^\perp)$ bektore-azpiespazioa baita eta lehen aipatu den bezala $S(A^\perp)$ eta A ortogonalak dira, baina A-rekiko ortogonala den azpimultzorik handiena $A^\perp$ denez: $A^\perp = S(A^\perp)$, hots, $A^\perp$ bektore-azpiespazioa da.

A bektore-azpiespazio bat bada, $A^\perp$ azpiespazioari A-ren *betegarri ortogonal* deritzo (edo, besterik gabe, *azpiespazio ortogonala*).

> 8.7. PROPOSIZIOA: Izan bedi V espazio euklidear bat. Izan bedi $U \subset V$ azpiespazio bat eta $U^\perp$ bere azpiespazio ortogonala. Orduan $V = U \oplus U^\perp$ (V dimentsio finitukoa ez bada, ez da orokorrean proposizio hau betetzen).

Frog.: Izan bedi n V-ren dimentsioa. $U = \{o\}$ bada, agerikoa da $U^\perp = V$ eta $V = U \oplus U^\perp$ dela. Gauza bera gertatzen da $U = V$ bada (kasu honetan $U^\perp = \{o\}$ da).

Demagun orain $\dim U = p$, non $0 < p < n$ den.

Izan bedi $\{u_1, ...,u_p\}$ U-ko oinarri ortonormal bat. Posible da oinarri horri $\{u_{p+1}, ...,u_n\}$ bektoreak gehitzea V-ko oinarri ortonormal bat osatzeko.
Izan bedi W $n - p$ bektore horrek sortzen duten azpiespazioa. Agerikoa da $V = U \oplus W$ dela. Orain $W = U^\perp$ dela ikusiko dugu. Bistan dago $U \perp W$ dela $\Rightarrow W \subset U^\perp \Rightarrow \dim U^\perp \geq \dim W = n - p$. Beste alde batetik U eta $U^\perp$ independenteak dira, eta ondorioz, $\dim U + \dim U^\perp \leq \dim V = n \Rightarrow p + \dim U^\perp \leq n \Rightarrow \dim U^\perp \leq n - p$.
Beraz, $\dim U^\perp = n - p$, eta ondorioz, $U^\perp = W \Rightarrow V = U \oplus U^\perp$.

8.8. OINARRI-ALDAKETA ETA METRIKA-MATRIZEA

Izan bedi V_n espazio euklidear bat eta izan bedi $\{e_1,.....,e_n\}$ oinarri bat. Demagun biderkadura eskalar bat definituta dagoela ondoko G matrizearen bitartez:

$G = \begin{pmatrix} e_1.e_1 & e_1.e_2 & \cdots & e_1.e_n \\ e_2.e_1 & e_2.e_2 & \cdots & e_2.e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n.e_1 & e_n.e_2 & \cdots & e_n.e_n \end{pmatrix}$. Har dezagun orain beste oinarri bat: $\{e'_1,.....,e'_n\}$ eta

izan bitez $e'_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}.e_j$ bi oinarrien arteko lotura ($Q = [q_{ij}]$ matrizea dagokiona).

Argi dago biderkadura eskalarraren adierazpen matriziala oinarri berri horrekiko

Aldatu egingo dela. Izan bedi $G' = \begin{pmatrix} e'_1.e'_1 & e'_1.e'_2 & \cdots & e'_1.e'_n \\ e'_2.e'_1 & e'_2.e'_2 & \cdots & e'_2.e'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e'_n.e'_1 & e'_n.e'_2 & \cdots & e'_n.e'_n \end{pmatrix}$ dagokion matrizea.

G eta G' matrizeen arteko lotura zein den jakiteko nahikoa da $e'_i.e'_k$ egitea:

$e'_i.e'_k = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}.e_j \,.\, \sum_{h=1}^{n} q_{kh}.e_h = \sum_{j,h=1}^{n} q_{ij}.q_{kh}.e_i.e_k$ eta hau era matrizialean $G' = Q^T.G.Q$ idatzi ahal da.

Horrez gain, Q matrizea erregularra da (oinarri-aldaketa baita) eta aurrekoa beste modu honetan ere jar daiteke: $G = (Q^T)^{-1}.G'.Q^{-1}$.

Komenigarria da gogoratzea Q matrizea dela bi oinarriekiko bektore baten koordenatuak lotzen dituena: $X = Q.X'$.

Bistan denez, oinarri ortonormal batekiko biderkadura eskalarraren matrizea identitatea izango da, zeren eta $\{e_1,.....,e_n\}$ ortonormala baldin bada, orduan:

$$e_i.e_j = \delta_{ij} \text{ (kroeniker delta)} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ bada} \\ 0 & i \neq j \text{ bada} \end{cases}.$$

Beraz, $x(x_1, ...,x_n)$ eta $y(y_1, ...,y_n)$ bektoreak oinarri ortonormal batean adierazten badira, beraien biderkadura eskalarra oso erraz egin daiteke:

$$x.y = x_1.y_1 + x_2.y_2 + ... + x_n.y_n$$

8.9. KOORDENATU KOBARIANTE ETA KONTRABARIANTEAK

Izan bedi V_n espazio euklidear bar eta izan bedi $\{e_1,.....,e_n\}$ bere oinarri bat. Izan bedi x $(x_1,\ldots\ldots,x_n)$ bektore baten koordenatuak oinarri horrekiko. Hots: $x = x_1.e_1+\ldots\ldots+x_n.e_n$

Kontsidera dezagun orain R^n-ko ondoko n-kote hau: $(x^1,\ldots\ldots,x^n)$, non $x^i = x.e_i$. Orduan, n-kote hau (x' deituko diogu) eta koordenatuak erlazionatuta daude eta batzuk besteen arabera jar daitezke:

$$x^i = x.e_i = x_1.(e_1.e_i) + \ldots\ldots + x_n.(e_n.e_i)$$

modu matrizialean: $x'^T = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = G.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = G.x^T$, non G metrika-matrizea den.

Modu berean, $x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = G^{-1}.\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = G^{-1}.x'^T$ zeren eta G erregularra baita.

Ondorioz, batzuk finkatuz gero besteak erabat finkatuta gelditzen dira. Honek x^i horiei koordenatu ere deitzea iradokitzen du. Bereizteko izen desberdinak jartzen zaizkie:

x $(x_1,\ldots\ldots,x_n)$ koordenatu arruntei *koordenatu kontrabariante* deritze
x'$(x^1,\ldots\ldots,x^n)$ n-kote berri honen elementuei *koordenatu kobariante* deritze.

Sarritan interesgarria izaten da biderkadura eskalarra koordenatu kobarianteak erabiliz adieraztea. x eta y bektoreak kontsideratzen badira eta lehen egin den bezala goi-indize eta azpindizeak erabiltzen badira koordenatu kobariante eta kontrabarianteak adierazteko, hurrenez hurren, orduan biderkadura eskalarra era hauetan adieraz daiteke:

$$x.y = x.G.y^T = (x_1,\ldots\ldots,x_n).\begin{pmatrix} e_1.e_1 & e_1.e_2 & \cdots & e_1.e_n \\ e_2.e_1 & e_2.e_2 & \cdots & e_2.e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n.e_1 & e_n.e_2 & \cdots & e_n.e_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x.y = x.G.y^T = x.G.(G^{-1}.y'^T) = x.y'^T = (x_1,\ldots\ldots,x_n).\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

$$x.y = (G^{-1}.x'^{T})^{T}.G.y^{T} = x'.(G^{-1})^{T}.G.y^{T} = x'.G^{-1}.G.y = x'.y^{T} = (x^{1},\ldots\ldots,x^{n}).\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x.y = x.G.y^{T} = (G^{-1}.x'^{T})^{T}.G.G^{-1}.y'^{T} = x'.(G^{-1})^{T}.G.G^{-1}.y'^{T} = x'.G^{-1}.y'^{T}$$

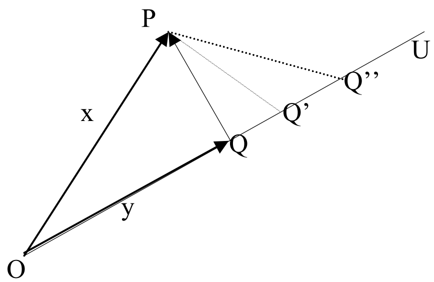
Oharra: *Kontuan hartu da* $(A.B)^T = B^T.A^T$ *eta* $(G^{-1})^T = G^{-1}$ *(simetrikoa ere bai) direla.*

Hartutako oinarria ortonormala bada, G matrizea identitatea da, eta ondorioz, koordenatu kobariante eta kontrabariante berdinak dira. Kasu honetan edozein bektore bi era hauetan adieraz daiteke:

$x = x_1.e_1 + \ldots\ldots + x_n.e_n$ edo $x = (x.e_1).e_1 + \ldots\ldots.. + (x.e_n).e_n$

8.10. PROIEKZIO ORTOGONALA

Espazio arruntean (R^2 edo R^3-an) beti kalkula daiteke zuzen baten puntu guztien artean zein den P puntu finko batekiko distantzia minimoa duena. Gure buruari galdetu ahal diogu hori posible den edozein azpiespaziotarako.



Grafikoan bistan dago puntu hori QP⊥U betetzen duen Q puntua izango dela. Baina QP = x - y denez, aurreko galderak dio ea U azpiespazioan y bektore bat existitzen den, non |x - y| minimoa den. Normalean erantzuna ezezkoa da. Posible denean (dimentsio finituetan beti, gero ikusiko den bezala) esaten da y dela x-ren proiekzioa U-ren gainean

8.7. DEFINIZIOA: Izan bitez V espazio euklidear bat, U bere azpiespazio bat eta x V-ko bektore bat. Esaten da $y \in U$ dela ***x-ren proiekzioa U-ren gainean,*** x - y bektorea U-rekiko ortogonala bada.

Posible da p aplikazio bat definitzea, $V \xrightarrow{p} V$, non bektore bakoitzari U-ren gaineko proiekzioa dagokion. Aplikazio honi *proiekzio ortogonalaren aplikazio* deritzo.

Orain dimentsio finituko U azpiespazioentzat proiekzio ortogonala existitzen dela frogatuko da.

8.8. PROPOSIZIOA: Izan bitez V espazio euklidear bat, U p dimentsioko bere azpiespazio bat eta x V-ko edozein bektore. Izan bedi $\{e_1, ...,e_p\}$ U-ko oinarri ortogonal bat. Orduan x-ren U-ren gaineko proiekzioa existitzen da. Proiekzio hori, $y\in U$, ondoko bektore hau da:

$$y = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}.e_i \quad \text{edo} \quad \sum_{i=1}^{p}(x.e_i).e_i \quad \text{oinarria ortonormala bada.}$$

Frog.: Hori frogatzeko nahikoa da $x - y \perp U$ dela egiaztatzea. Izan bedi $z\in U$:

$$(x - y).z =(x - \sum_{i=1}^{p}\frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}.e_i).(\sum_{i=1}^{p} z_i.e_i) = \sum_{i=1}^{p} z_i.(x.e_i) - \sum_{i=1}^{p} z_i.\sum_{j=1}^{p}\frac{(x.e_j)}{|e_j|^2}(e_j.e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} z_i.(x.e_i) - \sum_{i=1}^{p} z_i.(x.e_i) = 0 \quad \text{frogatu nahi zen bezala.}$$

Oharra: $\dfrac{(x.e_i)}{|e_i|^2}$ *eskalarrei (edo $(x.e_i)$ oinarria ortonormala bada) FOURIER KOEFIZIENTE deritze*.

8.11. BEKTORE ETA AZPIESPAZIO BATEN ARTEKO DISTANTZIA

Aurrekoa ikusi ondoren argi dago zer den x bektorearen eta U azpiespazioaren arteko distantzia:

$d (x,U) = |x - y|$, non y den x-ren proiekzioa U-ren gainean.

Distantzia hori kalkulatuko da: $d (x,U)^2 = |x - y|^2 = |x|^2 - 2(x.y) + |y|^2 = |x|^2 - 2(x. \sum_{i=1}^{p}\frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}.e_i) + \sum_{i=1}^{p}\frac{(x.e_i)^2}{|e_i|^2} = |x|^2 - 2\sum_{i=1}^{p}\frac{(x.e_i)^2}{|e_i|^2} + \sum_{i=1}^{p}\frac{(x.e_i)^2}{|e_i|^2} = |x|^2 - \sum_{i=1}^{p}\frac{(x.e_i)^2}{|e_i|^2}$

eta ondorioz:

$$d (x,U) = \sqrt{|x|^2 - \sum_{i=1}^{p}\frac{(x.e_i)^2}{|e_i|^2}} \quad \text{edo} \quad \sqrt{|x|^2 - \sum_{i=1}^{p}(x.e_i)^2} \quad \text{oinarria ortonormala bada.}$$

U azpiespazioa 1 dimentsiokoa bada, distantziaren adierazpena errazten da, oinarria e bektore bakar batez osatuta baitago. Kasu honetan honela adierazi ahal izango da:

$$d(x,U) = \sqrt{|x|^2 - \frac{(x.e)^2}{|e|^2}}$$

adibidea: Kalkulatu $x(1,1,3)$ bektorearen eta $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{4}$ zuzenak definitzen duen U azpiespazioaren arteko distantzia.

Ebaz.: U-ko oinarri bat $e = (2,-1,4)$ da. Orduan $|x|^2 = 11$, $|e|^2 = 21$ eta $x.e = 13$ dira eta $d(x,U) = \sqrt{11 - \frac{169}{21}} = \sqrt{\frac{62}{21}}$

V dimentsio finitukoa bada, ikusi zen (8.7. proposizioan) $V = U \oplus U^T$ jarri ahal zela, eta horrek U-ren gaineko bektore baten proiekzioa U^T azpiespazioaren gaineko proiekzioaren arabera adierazteko aukera ematen digu.

Izan bedi $x \in V$ eta y bere proiekzioa U-ren gainean. Orduan x bektorea $x = y + z$ moduan deskonposa daiteke, non $z \in U^T$ x-ren proiekzio ortogonala den U^T-ren gainean. Izan bedi $\{u_1, ..., u_q\}$ bektore-sistema U^T-ko oinarri ortogonal bat. Hartara, z jarri ahal da: $z = \sum_{i=1}^{q} \frac{(x.u_i)}{|u_i|^2}.u_i$ moduan, eta ondorioz, $y = x - \sum_{i=1}^{q} \frac{(x.u_i)}{|u_i|^2}.u_i$.

Modu berean, $d(x,U) = |x - y| = |z| = \sqrt{\sum_{i=1}^{q} \frac{(x.u_i)^2}{|u_i|^2}}$

Hau onuragarri bilakatzen da U azpiespazio maximala denean, zeren eta kasu horretan U^T 1 dimentsiokoa baita, eta ondorioz, askoz errazagoa kalkulatzeko.

adibidea: Izan bedi $U = \{(m,n,p,m - 2p) \ / \ m,n,p \in R\}$ R^4-ko azpiespazioa. Kalkulatu $x = (1,2,0,3)$ bektorearen proiekzio ortogonala U-ren gainean eta d(x,U).

Ebaz.: Argi dago $\{e_1\ (1,0,0,1),\ e_2\ (0,1,0,0), e_3\ (0,0,1,-2)\}$ U-ko oinarri bat dela. Izan bedi $z = (a,b,c,d)$ U^T-ko bektore bat. Orduan $z.e_1 = z.e_2 = z.e_3 = 0$ beteko da:

$$\left.\begin{array}{r} a + d = 0 \\ b = 0 \\ c - 2d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = (-d,0,2d,d) \text{ izango dira } U^T\text{-ko bektore guztiak.}$$

Haietako edozein, $u = (-1,0,2,1)$ esate baterako, oinarria izango da. Beraz, y (x-ren proiekzioa U-ren gainean) ondokoa izango da:

$$y = x - \frac{(x.u)}{|u|^2}.u = (1,2,0,3) - \frac{1}{6}.2.(-1,0,2,1) = \frac{1}{3}.(4,6,-2,8)\ .$$

Modu berean, $d(x,U) = \frac{(x.u)}{|u|} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ berehala kalkulatzen da

BESSEL DESBERDINTZA

Edozein x bektorerentzat U-ren gaineko y proiekzio-bektorea Fourier koefizienteak erabiliz nola atera daitekeen ikusi da: $y = \alpha_1.e_1 + ...+ \alpha_p.e_p$ non $\alpha_i = \frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}$ den. Batuketa honi Fourier batuketa deitzen zaio.

Orduan Bessel desberdintza ondoko proposizioan jasotzen da:

8.9. PROPOSIZIOA: Bektore baten norma U-ren gaineko proiekzioaren norma baino handiagoa edo berdina da, eta berdina da, baldin eta soilik baldin, bektore hori U-koa bada.

Hau da: $|x| \geq |y| \Rightarrow |x|^2 \geq \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}\right)^2$ eta berdintza bihurtzen da, baldin eta soilik baldin, $x = \sum_{i=1}^{p}\frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}.e_i$ bada (hots, x bektorea U-koa den kasuan).

Frog.: Agerikoa da, zeren eta x-ren proiekzioa U-ren gainean y bada eta U^T-ren gainean z bada, x = y + z, non $y \perp z$ den (hots, y.z = 0), eta ondorioz:

$|x|^2 = |y+z|^2 = (y+z).(y+z) = |y|^2 + |z|^2 = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}\right)^2 + |z|^2$ eta $|z|^2 \geq 0$ denez, frogatuta dago. Horrez gain, z = o bada x = y izango da, eta ondorioz, x bektoreak U-koa izan beharko du. Beraz, $x = \sum_{i=1}^{p}\frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}.e_i$ moduan adierazi ahal izango da.

8.12. APLIKAZIO ORTOGONALAK

Oso interesgarria da espazio euklidear baten propietate geometrikoak (distantziak, angeluak, ...) mantentzen dituzten aplikazioak nolakoak diren ikertzea. Esate baterako, fisikan esaten da naturako legeak behatzailearekiko mantendu egin behar direla. Hau da, bi behatzailek ezin dute fenomeno fisiko bera (objektu baten luzera, adibidez) desberdin ikusi, behatzaile baten erreferentzia-sistema biratuta baldin badago bestearenarekiko.

8.8. DEFINIZIOA: Izan bitez V eta W bi espazio euklidear eta $f : V \rightarrow W$ aplikazio lineal bat. Esaten da f ***ortogonala*** dela $x.y = f(x).\,f(y)$ bada $\forall x,y \in V$.

Kontuan hartu behar da V eta W espazioen biderkadura eskalarra desberdina izan daitekeela. Liburu honetan ez da ikur desberdina idatziko garbi dagoelako zein espaziotan gauden eta kasu bakoitzean dagokiona aplikatu behar zaio.

APLIKAZIO ORTOGONALEN PROPIETATEAK

- *Bektoreen luzerak mantentzen dira:* $|f(x)| = |x|$

  Frog.: $|f(x)| = \sqrt{(f(x).f(x))} = \sqrt{(x.x)} = |x|$

- *A eta B V-ko azpimultzo ortogonalak badira f (A) eta f (B) ortogonalak dira.*

  Frog.: Izan bitez $x' \in f(A)$ eta $y' \in f(B)$ W-ko bi bektore. Orduan $x' = f(x)$ eta $y' = f(y)$ izango dira, non $x \in A$ eta $y \in B$ diren. Hartara, $x'.y' = f(x).f(y) = x.y = 0$ A eta B ortogonalak baitira. Beraz, $f(A) \perp f(B)$ betetzen da.

- *$\{u_1,......,u_n\}$ V-ko bektore-sistema ortogonal (edo ortonormal) bat bada, orduan $\{f(u_1),........., f(u_n)\}$ W-ko bektore-sistema ortogonala (edo ortonormala) ere bada.*

  Frog.: Aurreko bi propietatetatik ondorioztatzen da.

- *f injektiboa da.*

  Frog.: Demagun $f(x) = f(y)$; orduan $0 = |o| = |f(x) - f(y)| = |f(x - y)| = |x - y|$ eta ondorioz, $x - y = o \Rightarrow x = y$.

Horrez gain, f sobreiektiboa bada, *isomorfismo ortogonal* deritzo.

Kontuan hartu behar da $f^{1} : f(V) \rightarrow V$ beti existituko dela (f injektiboa delako) eta ondorioz, f^{1} isomorfismo ortogonal bat izango dela.

8.10. PROPOSIZIOA: Biderkadura eskalarra mantentzen duen aplikazio batek lineala izan behar du.

Frog.: $f(ax + by) = a.f(x) + b.f(y)$ dela frogatzeko $f(ax + by) - (a.f(x) + b.f(y)) = o$ frogatuko da. Horretarako nahikoa da bere norma zero dela egiaztatzea:
$|f(ax + by) - (a.f(x) + b.f(y))|^2 = [(f(ax + by) - (a.f(x) + b.f(y))]. [f(ax + by) - (a.f(x) + b.f(y))] = |f(ax + by)|^2 + |a|^2.|f(x)|^2 + |b|^2.|f(y)|^2 - 2a.(f(ax + by).f(x)) - 2b.(f(ax + by) . f(y)) + 2ab.(f(x).f(y)) = |ax + by|^2 + |a|^2|x|^2 + |b|^2.|y|^2 - 2a.((ax + by).x) - 2b.((ax + by).y) + 2ab.(x.y) = |ax + by|^2 + |a|^2|x|^2 + |b|^2.|y|^2 - 2a.(a.|x|^2 + b.(x.y)) - 2b.(a.(x.y) + b.|y|^2) + 2ab.(x.y) = |a|^2.|x|^2 + |b|^2|y1^2 + 2ab.(x.y) + |a|^2|x|^2 + |b|^2.|y|^2 - 2|a|^2|x|^2 - 2ab.(x.y) - 2ba.(x.y) - 2|b|^2.|y|^2 + 2ab.(x.y) = 0$.

8.11. PROPOSIZIOA: $f : V \rightarrow W$ aplikazio lineal bat ortogonala da, baldin eta soilik baldin, V-ko oinarri ortonormal baten irudiek W-ko sistema ortonormal bat osatzen badute.

Frog.: Izan bedi $\{e_1, ..., e_n\}$ V-ko oinarri ortonormal bat. f ortogonala dela besterik ez da frogatu behar, $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ sistema ere ortonormala dela suposatuz. Hori egiaztatzeko $x.y = f(x).f(y)$ frogatu behar da.
$\{e_1, ..., e_n\}$ oinarri bat denez, x eta y bektoreak honela adieraz daitezke:

$x = x_1.e_1 + ...+ x_n.e_n$ eta $y = y_1.e_1 + ...+ y_n.e_n$ eta ondorioz:

$f(x).f(y) = f(x_1.e_1 + ...+ x_n.e_n).f(y_1.e_1 + ...+ y_n.e_n) = (x_1.f(e_1) +.......+ x_n.f(e_n)). (y_1.f(e_1) +.......+ y_n.f(e_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i.y_j.f(e_i).f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i = x.y.$

Argi dago f ***isomorfismoa*** izateko dim V = dim W bete behar dela. Argi dago hori betetzen dela W = V den kasuan eta kasu honetan f aplikazioari ***automorfismo ortogonal*** deritzo (endomorfismo injektiboa).

8.12. PROPOSIZIOA: Izan bitez V_n eta W_n bi espazio euklidear, $\{e_1, ..., e_n\}$ V-ko oinarri ortonormal bat eta $\{e'_1, ..., e'_n\}$ W-ko oinarri ortonormal bat.

Orduan, $f : V_n \rightarrow W_n$ aplikazio ortogonal bakarra existitzen da, non $f(e_i) = e'_i$ den $\forall i = 1.......n$.

Frog.: f eraiki behar dugu eta proposizioa betetzeko $f(e_i) = e'_i$ exijituko da. Orduan nahikoa da $f(x) = f(x_1.e_1 +......+ x_n.e_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.e'_i$ definitzea.

Agerikoa da lineala dela ($\sum_{i=1}^{n} x_i.e'_i = \sum_{i=1}^{n} x_i.f(e_i)$ delako). Orain biderkadura eskalarra mantentzen duela ikusiko dugu:

$$f(x).f(y) = \sum_{i=1}^{n} x_i.e'_i . \sum_{i=1}^{n} y_i.e'_i = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i = x.y$$

Bakarra dela agerikoa da, zeren eta beste g aplikazio batek g (e_i) = e'_i beteko balu, f – g ere lineala litzateke eta (f – g) (e_i) = o izango zen $\forall i = 1.....n$, baina oinarri baten irudiak zero dituen aplikazio bakarra aplikazio nulua denez, f = g izango da.

TALDE ORTOGONALA

Erraza da frogatzea V espazio euklidear baten endomorfismo ortogonalek (automorfismoek) talde bat osatzen dutela aplikazioen konposizioarekiko.

Beste alde batetik, V-ko azpiespazio bat U baldin bada, eta U^T bere osagarri ortogonala ($V = U\oplus U^T$), orduan dim f (U) = dim U eta dim f (U^T) = dim U^T izango dira. Ondorioz, f (U) eta f (U^T) ere azpiespazio betegarriak izango dira, hots $V = f(U)\oplus f(U^T)$

8.13. APLIKAZIO ORTOGONAL BATEN MATRIZEA

Demagun V_n espazio euklidear bat dela eta B = {e_1,........,e_n} bere oinarri bat. Izan bedi $f : V \to V$ automorfismo bat eta izan bedi $G = (g_{ij}) = ((e_i.e_j))$ biderkadura eskalarraren matrizea.

Izan bedi $x \in V$. Orduan x' = f (x) (X' = F.X modu matrizialean) bada, f automorfismoaren ekuazioak ondoko hauek dira:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}.x_1 + ... + a_{1n}.x_n \\ .... \\ x'_n = a_{n1}.x_1 + ... + a_{n1}.x_n \end{cases} \quad \text{eta dagokion matrizea } F = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ da.}$$

8.13. PROPOSIZIOA: f ortogonala da $\Leftrightarrow$ $G = F^T.G.F$

Frog.: f ortogonala da $\Leftrightarrow$ x'.y' = x.y (non x' = f (x) eta y' = f (y) diren) $\Leftrightarrow$ x'.y' = $(FX)^T.G.FY = X^T.F^T.G.F.Y$ eta $x.y = X^T.G.Y$ direnez, $X^T.F^T.G.F.Y = X^T.G.Y \Leftrightarrow G = F^T.G.F$ frogatu nahi zen bezala.

Aplikazio ortogonal bati dagokion matrizea *matrize ortogonala* dela esaten da.

Oinarria ortonormala bada $G = I_n$ izango da, eta aurreko proposizioaren arabera, $I = F^T.I.F = F^T.F$ beteko da, eta ondorioz, $F^{-1} = F^T$ izango da. Hori dena ondoko korolarioan jasotzen da:

8.2. KOROLARIOA: F matrize karratu bat egokitu ahal zaio automorfismo ortogonal bati, baldin eta soilik baldin $F^{-1} = F^T$ betetzen bada. Hots F matrize bat ortogonala da $F^{-1} = F^T$ bada.

Kontuan hartu behar da $F^T.F = I$ izateko F matrizeko errenkada-bektoreek (edo -zutabeek) V-ko oinarri ortonormal bat osatu behar dutela, zeren eta $v_1,......,v_n$ baldin badira, F-ko errenkada-bektoreak $v^T{}_i.v_j = \delta_{ij}$ (kroneker delta) betetzen baita.

8.14. PROPOSIZIOA: F matrize bat ortogonala bada, orduan $|F| = \pm\ 1$

Frog.: $G = F^T.G.\ F$ betetzen denez $|G| = |F^T.G.\ F| = |F^T|.|G|.|F|$ eta G erregularra denez, $|F^T|.|F| = 1 \Rightarrow |F|^2 = 1 \Rightarrow |F| = \pm 1$

OINARRI-ALDAKETA

Izan bitez $B = \{e_1,......,e_n\}$ eta $B' = \{e'_1,.......,e'_n\}$ V-ko bi oinarri ortonormal. Oinarri-aldaketaren matrizea $Q = (q_{ij})$ bada, $e'_i = \sum_{h=1}^{n} q_{ih}.e_h$ beteko da eta $\delta_{ij} = (e'_1.e'_j)$ $= \sum_{h=1}^{n} q_{ih}.e_h \,.\, \sum_{h=1}^{n} q_{jh}.e_h = \sum_{h=1}^{n} q_{ih}.q_{jh}$ izango da. Ondorioz oinarri-aldaketaren matrizearen bektoreek oinarri ortonormal bat ere osatzen dute, eta ondorioz, Q ortogonala da (beraz, bektoreen luzerak mantentzen ditu).

8.14. BIRAKETA-TALDEA ETA SIMETRIAK

Ikusi den bezala V-ko endomorfismo ortogonalak automorfismoak (endomorfismo bijektiboak) dira eta dagokien matrize ortogonalen determinantea ±1 da. Bat denean, hau da $|F| = 1$ denean, automorfismoari ***biraketa*** deitzen zaio.

Biraketa guztiek talde bat osatzen dute konposizioarekiko eta gauza bera esan daiteke dagozkien matrizeei buruz matrizeen biderketarekiko, zeren eta A eta B matrizeak biraketak badira (hots $|A| = |B| = 1$), orduan $|A.B^{-1}| = |A| / |B| = 1$.

Talde hau O (V_n) edo O (n,K) izendatuko da. O(2,R) (plano arrunta) eta O(3,R) (espazio arrunta) diren kasuak aztertuko dira ondokoan.

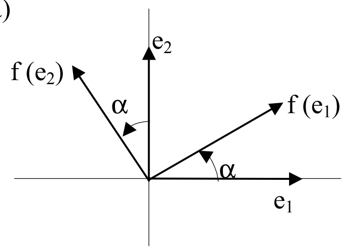
PLANO ARRUNTEKO BIRAKETAK

Demagun $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ O(2,R)-ko biraketa bat dela. Bere alderantzizkoa $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ izango da eta $A^{-1} = A^T$ denez, $a = d$ eta $c = -b$ dira.

Ondorioz, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ izango da, non $a^2 + b^2 = 1$ den $|A| = 1$ baita.

Biraketa bakoitzari α angelu bat egokitu ahal zaio $a = \cos\alpha$ eginez. Orduan, $b = \pm\sqrt{1-a^2} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm \sin\alpha$ da. Matrizea ondoko bi modutan adieraz daiteke:

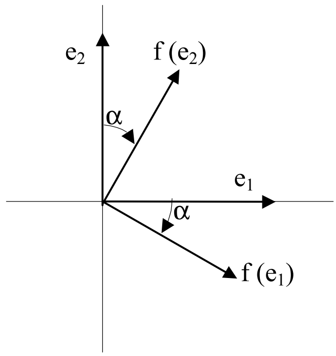
a)



$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ da eta kasu honetan dagokion α graduko biraketa ***positiboa*** dela esaten da.

Matrizeko zutabeak oinarri baten irudiak dira eta $\{e_1,e_2\}$ ortonormala denez, grafikoan egiaztatu ahal da $\left.\begin{array}{l} f(e_1\} = \cos\alpha.e_1 + \sin\alpha.e_2 \\ f(e_2) = -\sin\alpha.e_1 + \cos\alpha.e_2 \end{array}\right\}$ betetzen direla

b)



$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ da eta kasu honetan dagokion α graduko biraketa ***negatiboa*** dela esaten da.

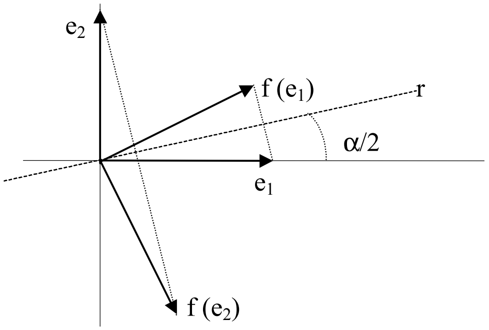
Matrizeko zutabeak oinarri baten irudiak dira eta grafikoan egiaztatu ahal da $\left.\begin{array}{l} f(e_1) = \cos\alpha.e_1 - \sin\alpha.e_2 \\ f(e_2) = \sin\alpha.e_1 + \cos\alpha.e_2 \end{array}\right\}$ betetzen direla.

SIMETRIAK

R^2-ko automorfismo ortogonalak $|A| = -1$ den kasuetan ez dira biraketak, eta interpretazio grafikoan erraz ikusten da simetriak direla. Lehen egin den bezala automorfismoaren matrizea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bada, ortogonala izanik, $A^{-1} = A^T$ izango da.

Orain $|A| = -1$ denez, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ da eta $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ matrizearekin berdinduz gero, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ izango da. Lehen egin den bezala $a = \cos\alpha$ egiten bada, $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

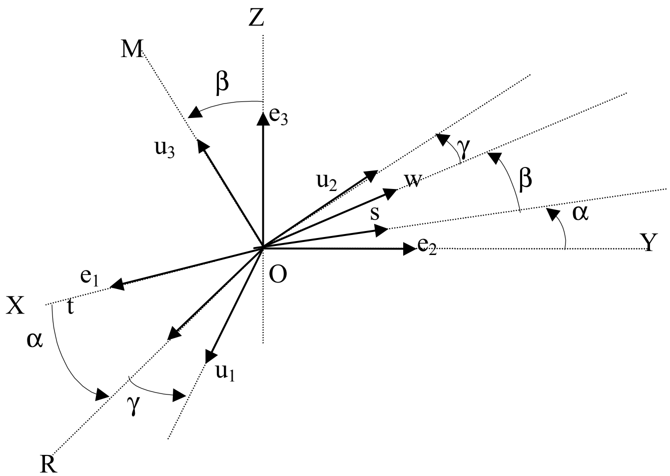
Matrize honen zutabeak ere $\{e_1, e_2\}$ oinarri ortonormal baten irudiak dira, eta ondorioz:



Hemen $\left.\begin{array}{l} f(e_1) = \cos\alpha . e_1 + \sin\alpha . e_2 \\ f(e_2) = \sin\alpha . e_1 - \cos\alpha . e_2 \end{array}\right\}$ dira eta OX bektorearen irudia OY bada, X eta Y puntuak simetrikoak izango dira r zuzenarekiko, non r e_i eta $f(e_i)$ bektoreek definitzen dituzten zuzenen erdikaria den. Zuzen honi simetria-ardatza deritzo (hori egiaztatzea irakurlearen esku uzten da).

ESPAZIO ARRUNTEKO AUTOMORFISMO ORTOGONALAK

R^3-an endomorfismoak hiru biraketaren arteko konposizio gisa adieraz daitezke. Biraketa horiei ***Euler angelu*** deritze.



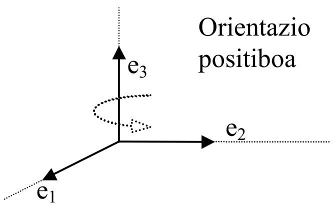
Automorfismo honen bitartez, $\{e_1,e_2,e_3\}$ oinarri ortonormaletik $\{u_1,u_2,u_3\}$ oinarri ortonormalera pasatzen da hiru biraketa eginez: 1. $\{e_1, e_2,e_3\} \to \{t,s,e_3\}$ oinarrira

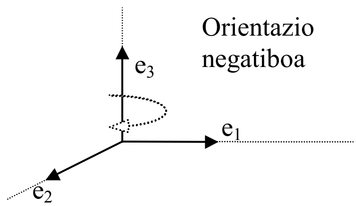
α angeluko biraketa eginez OZ ardatzarekiko. 2. $\{t,s,e_3\} \rightarrow \{t,w,u_3\}$ oinarrira β angeluko biraketa bat eginez R ardatzarekiko. 3. $\{t,w,u_3\} \rightarrow \{u_1,u_2,u_3\}$ oinarrira γ angeluko biraketa eginez M ardatzarekiko.

Automorfismo baten matrizea hiru matrizeren arteko biderketa izango da eta matrize horiek aztertutako planoko biraketekin eraiki daitezke R^3 espaziora moldatuz.

8.15. BEKTORE-BIDERKADURA ETA BIDERKADURA NAHASIA

Demagun espazio euklidearra R^3 dela. Izan bedi $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ oinarri ortonormal bat. Oinarria *positiboki orientatuta* dagoela esaten da, bere determinantea positiboa bada (eta *negatiboki* determinantea negatiboa bada). Honek beste irakurketa grafiko bat du. Esaten da positiboki orientatuta dagoela e_3 bektorearen norabidean kortxo-kentzeko bat kokatuz eta e_1-tik e_2-ra kortxo-kentzekoa biderik motzenetik biratuz e_3 bektorearen noranzkorantz mugitzen bada (*kortxo-kentzekoaren erregela*).

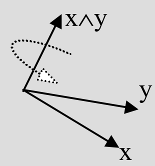




BEKTORE-BIDERKADURA

8.9. DEFINIZIOA: Izan bitez x eta y R^3 espazio euklidear arrunteko bi bektore positiboki orientatuta. Bi bektore horien *bektore-biderkadura* ($x \wedge y$ idazten da) ondoko baldintzak betetzen dituen bektorea da:

- $|x \wedge y| = |x|.|y|.\sin\ (x,y)$
- norabidea: x eta y bektoreekiko perpendikularra da
- noranzkoa: $\{x,y,x \wedge y\}$ bektoreen orientazioa positiboa da



8.15. PROPOSIZIOA: $x(x_1,x_2,x_3)$ eta $y(y_1,y_2,y_3)$ bektoreen arteko bektore-biderkadura honela adieraz daiteke:

$x \wedge y = z\,(a, b, c)$ da, non $a = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ eta $c = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ diren.

Frog.: Definizioaren arabera $|x \wedge y|^2 = |x|^2 . |y|^2 .\sin^2 (x,y) = |x|^2 . |y|^2 .(1 - \cos^2 (x,y)) =$

$|x|^2.|y^2|.(1 - \dfrac{(x.y)^2}{|x|^2.|y|^2}) = |x|^2.|y|^2 - (x.y)^2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2).(|y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2) -$ $(x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3)^2$.

Egindakoa eta $|z|^2 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2$ garatzen badira, berdinak direla ikus daiteke.

Beste alde batetik, $x.z = x_1. \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + x_2. \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + x_3. \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$

eta modu berean, $y.z = 0$.
Hau da, $x \wedge y$ bektorea ortogonala da x eta y bektoreekiko.

Bukatzeko $\{x,y,z\}$ sistemak orientazio positiboa duen ikusi behar da. Horretarako $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = k$ positiboa izan beharko du. Beheko errenkadatik garatzen bada:

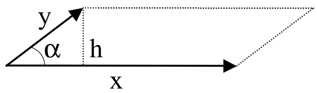
$k = z_1. \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + z_2. \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + z_3. \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2$ eta hori, bistan denez, positiboa da.

Normalean $x \wedge y = \begin{vmatrix} e_i & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ idazten da nahiz eta zentzurik ez izan, zeren eta $x \wedge y$ bektore bat den eta determinantea, aldiz, eskalar bat. Horrela jartzen denean, goiko errenkadatik garatu behar da (adierazpen sinbolikoa besterik ez da).

BEKTORE-BIDERKADURAREN PROPIETATEAK

- $x \wedge o = o$

- $x \wedge y = -(y \wedge x)$
- $k.x \wedge y = x \wedge k.y = k.(x \wedge y)$
- $x \wedge (y \wedge z) = (x.z).y - (x.y).z$
- $|x \wedge y|$ balioa x eta y bektoreek eratzen duten laukizuzenaren azalera da.



$\sin\alpha = \dfrac{h}{|y|}$ da eta $|x \wedge y| = |x|.|y|.\sin\alpha$ da.

Beraz: $|x \wedge y| = |x|.|y|.\dfrac{h}{|y|} = |x|.h =$ azalera

BIDERKADURA NAHASIA

8.10. DEFINIZIOA: Izan bitez x,y,z R^3-ko hiru bektore. Orduan, x,y eta z bektoreen arteko biderkadura nahasia ([x,y,z] idazten da) ondoko zenbaki hau da:

$$[x,y,z] = (x.(y \wedge z))$$

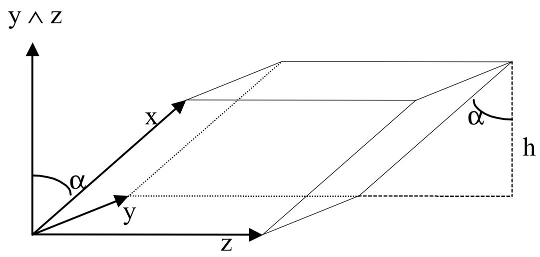
PROPIETATEAK

- $[x,y,z] = [y,z,x] = [z,x,y] = -[x,z,y] = -[z,y,x] = -[y,x,z]$. Agerikoa da.

- $[x,y,z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ Frogatzeko nahikoa da garatzea. Hemendik ondoko hau ondorioztatzen da:

  $[x,y,z] \neq 0 \iff x,y,z$ independenteak dira

- [x,y,z] eskalarra x,y eta z bektoreek eratzen duten paralelepipedoaren bolumena da.



Ikus dezagun: $[x,y,z] = x\,.\,(y \wedge z) = |x|.|y \wedge z|.\cos\alpha$.

Baina $\cos\alpha = h / |x|$ da eta ondorioz:

$[x,y,z] = |y \wedge z|.h$ eta hau paralelepipedoaren bolumena da, zeren eta $|y \wedge z|$ oinarriaren azalera baita.

8.16. BIDERKADURA ESKALAR KONPLEXUA. ESPAZIO HERMITEARRAK

Bektore-espazioa konplexua denean (hau da K gorputza C denean), biderkadura eskalarra era bertsuan definitzen da, baina badago diferentziaren bat.

Definizioa eman baino lehen kontsidera dezagun C^2 espazioa eta suposa dezagun (z_1,z_2) eta (z'_1,z'_2) bektoreen arteko biderkadura eskalarra R^2 egiten genuen bezala egiten dugula, hau da:

$$(z_1,z_2).(z'_1,z'_2) = z_1.z'_1 + z_2.z'_2$$

hartara, (z_1,z_2) bektore baten norma (modulua) ondoko hau izango litzateke:

$$|(z_1,z_2)| = \sqrt{(z_1,z_2).(z_1,z_2)} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

eta bektore horren norma ez litzateke luzera bat izango, zeren eta (i,0) bektorean, esate baterako, honako hau beteko bailitzateke: $|(i,0)|^2 = -1$ eta bere luzera zenbaki konplexua litzateke.

Adibide honek biderkadura eskalarra beste modu batean definitzea iradokitzen du:

$$(z_1,z_2).(z'_1,z'_2) = z_1.\overline{z'_1} + z_2.\overline{z'_2} \quad \text{(non } \overline{z} \text{ z-ren konjokatua adierazten duen)} \quad (*)$$

orduan $|(z_1,z_2)| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ eta orain distantziak positiboak dira.

8.11. DEFINIZIOA: Izan bedi V bektore-espazio konplexu bat. Izan bedi $V^2 \to C$ aplikazio bat (x.y adieraziko da), non ondoko baldintzak betetzen diren:

- $(x.x) \geq 0 \quad \forall x \in V$, eta $(x.x) = 0 \Leftrightarrow x = o$
- $x.y = \overline{y.x} \quad \forall x,y \in V$ ($\overline{y.x}$ konplexua y.x-ren konjokatua da)
- $x.(y + z) = x.y + x.z \quad \forall x,y,z \in V$
- $(\alpha.x).y = \alpha.(x.y) \quad \forall x,y \in V, \ \forall \alpha \in C$

beraz, aplikazio honi ***biderkadura hermitear*** deritzo.

Aipatzekoa da bektore-espazio errealean egiten genuen biderkadura eskalarrarekiko alde bakarra bigarren baldintza dela. Biderkadura eskalarra ez da orain trukakorra.

Beste alde batetik, kontuan hartu $(x.x) \geq 0$ desberdintzak baduela zentzua, x.x erreala izango da eta. Argi dago, $x.x = \overline{x.x}$ bete egiten baita.

Ondoko bi propietate hauek ere aipatu behar dira:

- $(x + y).z = x.z + y.z$ (kasu errealean bezala)

  Frog.: $(x + y).z = \overline{z.(x + y)} = \overline{z.x + z.y} = \overline{z.x} + \overline{z.y} = x.z + y.z$
- $x.(\alpha.y) = \overline{\alpha}.(x.y)$

  Frog.: $x.(\alpha.y) = \overline{(\alpha.y).x} = \overline{\alpha.(y.x)} = \overline{\alpha}.\overline{(y.x)} = \overline{\alpha}.(x.y)$

Argi dago definizio honek barruan duela errealetan emandakoa, errealak konplexuen barruan baitaude. Beraz, posible izan zatekeen hau bakarrik ematea hasiera hasieratik, baina kasu konplexua gutxi erabiltzen denez, bi alditan egin da errealaren kasuaren adierazpena errazteko.

Aurrean emandako biderkadura eskalarra (*) biderkadura hermitearra dela egiazta daiteke eskatutako lau baldintzak betetzen baititu.

EBATZITAKO ARIKETAK

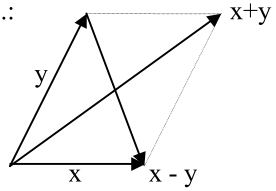
1. Esan R^2-an, $x.y = (x_1, x_2).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ adierazpenaren bitartez, biderkadura eskalar bat definitzen den.

Ebaz.: - Diagonal nagusiko gaiak positiboak dira
- Simetrikoa da
- Matrizea erregularra da
- Demagun $x \neq o$ dela. Orduan, $x.x = (x_1, x_2).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1.x_2 + x_2^2$

eta hori ez da beti positiboa, zeren eta $x = (1,-2)$ bada, esate baterako, orduan $x.x = -3$ izango bailitzateke. Ondorioz, ezin da biderkadura eskalar bat izan.

2. Froga ezazu paralelogramoaren legea: $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$

Ebaz.:



$|x + y|^2 + |x - y|^2 = (x + y).(x + y) + (x - y).(x - y) = x.x + x.y + y.x + y.y + x.x - x.y - y.x + y.y = 2.|x|^2 + 2.|y|^2$

3. Froga ezazu [-1,1] tartean definitutako funtzio errealen bektore-espazio euklidearrean, non biderkadura eskalarra $\int_{-1}^{1} f.g.dx$ den, $A = \{f_{2n+1}(x) = x^{2n+1}$ $\forall n \in N\}$ eta $B = \{f_{2n}(x) = x^{2n}$ $\forall n \in N\}$ multzoak ortogonalak direla.

Ebaz.: $f_{2n+1} . f_{2m} = \int_{-1}^{1} x^{2n+1}.x^{2m}.dx = \int_{-1}^{1} x^{2n+2m+1} dx = \left. \frac{x^{2n+2m+2}}{2n + 2m + 2} \right]_{-1}^{1} = 0$

4. Kontsidera dezagun R^3-ko $B = \{e_1,e_2,e_3\}$ oinarria, non $|e_1| = |e_2| = 2$, $|e_3| = 1$ den eta osatzen dituzten angeluak $(e_1,e_2) = 60^o$, $(e_1,e_3) = 90^o$ eta $(e_2,e_3) = 60^o$ diren.

a) Kalkulatu metrika-matrizea B oinarriarekiko.

b) Izan bitez $u_1(2,0,-1)_B$ eta u_2 bi bektore, non u_2 bektorearen koordenatu kobarianteak B oinarriarekiko (3,2,1) diren. Kalkulatu beraien biderkadura eskalarra eta osatzen duten angelua.

Ebaz.:
a) metrika-matrizea osatzeko $e_i.e_j$ kalkulatu behar dira:

$e_1.e_1 = \|e_1\|^2.\cos 0 = 4$	$e_1.e_2 = \|e_1\|.\|e_2\|.\cos 60 = 2$	$e_1.e_3 = 0$
$e_2.e_1 = 2$	$e_2.e_2 = 4$	$e_2.e_3 = 1$
$e_3.e_1 = 0$	$e_3.e_2 = 1$	$e_3.e_3 = 1$

beraz, metrika-matrizea $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ da.

b) $u_1.u_2 = (2,0,-1).\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$ da. Bigarren bektorearen koordenatu kobarianteak ditugula aprobetxatu da. Bestela G matrizea aplikatu beharko genuen u_2 bektorearen koordenatu kontrabarianteak aurkitu ondoren.

Osatzen duten angelua, $\cos(u_1,u_2) = \dfrac{u_1.u_2}{|u_1|.|u_2|}$ adierazpenetik aterako dugu.

Horretarako moduluak kalkulatu behar dira:

- $|u_1| = +\sqrt{u_1.u_1}$ eta $u_1.u_1 = (2,0,-1).\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 17$ da

beraz, $|u_1| = \sqrt{17}$.

- $|u_2| = +\sqrt{u_2.u_2}$ eta $u_2.u_2$ kalkulatzeko, koordenatu kobarianteak ditugunez $(3,2,1).\ G^{-1}.\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ egin beharko da. $G^{-1} = \frac{1}{8}.\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 12\end{pmatrix}$ matrizea da eta ondorioz $u_2.u_2 = (3,2,1).\ G^{-1}.\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{27}{8} \Rightarrow |u_2| = \sqrt{\frac{27}{8}}$

Beraz, $\cos(u_1,u_2) = \dfrac{5\sqrt{8}}{\sqrt{17}.\sqrt{27}}$

5. Kalkulatu R^3-ko $U = \{\lambda.(1,2,-3) / \lambda \in R\}$ azpiespazioaren azpiespazio ortogonala eta finkatu U eta U^T-ko bi oinarri, non beraien bilketa R^3-ko oinarri ortonormal bat den.

Ebaz.: $U^T = \{(x,y,z) /\ (1,2,-3).(x,y,z) = 0\} \Rightarrow x + 2y - 3z = 0 \Rightarrow x = -2y + 3z \Rightarrow (x,y,z) = (-2y + 3z, y,z) = (-2y,y,0) + (3z,0,z) = y(-2,1,0) + z\,(3,0,1)$ eta ondorioz, U^T-ko oinarri bat $\{u_2\,(-2,1,0), u_3\,(3,0,1)\}$ da. Beste alde batetik, U-ko oinarria u_1 (1,2,-3) da. U-ko oinarri ortonormal bat $e_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}.(1,2,-3)$ da. U^T-koa aurkitzeko $\{(-2,1,0),(3,0,1)\}$ oinarriari Gram-Smhitz metodoa aplikatuko zaio:

$e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$ eta $e_3 = \frac{w_3}{|w_3|}$, non $w_3 = (3,0,1) - (\frac{1}{\sqrt{5}}.(-2,1,0).(3,0,1)).\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0) = \frac{1}{5}(3,6,5) \Rightarrow e_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(3,6,5)$.

Ondorioz R^3-ko oinarri ortonormal bat ondoko hau da:

$$B = \{\frac{1}{\sqrt{14}}.(1,2,-3), \frac{1}{\sqrt{5}}.(-2,1,0), \frac{1}{\sqrt{70}}(3,6,5)\}$$ zeren eta $R^3 = U \oplus U^T$ baita.

Oharra: Kontuan hartu ez dela beharrezkoa izan Gram-Schmidt $\{u_1,u_2,u_3\}$ sistemari aplikatzea, baizik eta $\{u_2,u_3\}$ sistemari soilik, badakigulako u_1-ekiko ortogonaltasuna ziurtatuta dagoela (u_2 eta u_3 U^T-koa direlako).

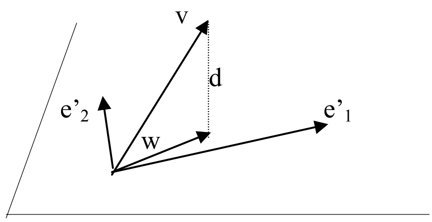
6. Kalkulatu v(2,1,0) bektorearen eta 2x - y + z +1 = 0 planoari dagokion U bektore--azpiespazioaren arteko distantzia. Ondoren kalkulatu v-ren proiekzio ortogonala U-ren gainean.

Ebaz.: U planoa zein den ikusteko forma parametrikoan jarriko da:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = 1 + 2x + z \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow$$ U-ko oinarri bat $\{e_1\ (1,2,0),\ e_2\ (0,1,1)\}$ da. $\{e'_1,\ e'_2\}$ oinarri ortonormal bat aurkitzeko Gram-Schmidt metodoa aplikatuko da:

$e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.(1,2,0)$ eta $e'_2 = \dfrac{w_2}{|w_2|}$ da, non $w_2 = e_2 - (e'_1.e_2).e'_1 = \dfrac{1}{5}.(-2,1,5)$ den. Beraz,

$e'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{30}}.(-2,1,5)$. Orduan, $d(v,U) = \sqrt{|v|^2 - (v.e'_1)^2 - (v.e'_2)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (239. orrialdean)



eta proiekzio ortogonala hauxe da:

$w = (x.e'_1).e'_1 + (x.e'_2).e'_2 = \dfrac{4}{\sqrt{5}}.e'_1 - \dfrac{3}{\sqrt{30}}.e'_2 = \dfrac{1}{2}.(2,3,-1)$

7. Froga ezazu R^3-ko u_1, u_2 eta u_3 bektoreak independenteak baldin badira, $u_1\wedge u_2$, $u_2 \wedge u_3$ eta $u_3 \wedge u_1$ bektoreak ere independenteak direla.

Ebaz.: Jar dezagun $a.(u_1\wedge u_2) + b.(u_2 \wedge u_3) + c.(u_3 \wedge u_1) = o$. Eta $a = b = c = 0$ den ikusi behar da. Eta u_1 bektoreaz biderkatzen bada:
$u_1.\ a.(u_1\wedge u_2) + u_1.\ b.(u_2 \wedge u_3) + u_1.(u_3 \wedge u_1) = 0 \Rightarrow a.[u_1, u_2,,u_3] = 0$ eta $[u_1, u_2,,u_3] \neq 0$ independenteak direlako) $\Rightarrow a = 0$.

Modu berean frogatzen da $b = c = 0$ dela u_2 eta u_3 bektorez biderkatuz.

8. Izan bedi V 2 ordenako matrize karratuen bektore-espazioa eta izan bitez $A,B\in V$. Biderkadura eskalarra $A.B = Tr\ (A.\ B^T)$ moduan definitzen da, non Tr aztarna-funtzioa den (diagonal nagusiko gaien batura). Izan bedi U matrize diagonalen V-ko azpiespazioa.

a) Aurkitu U^T b) Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matrizearen proiekzioa U-ren gainean.

Ebaz.: a) U-ko oinarri bat $\{e_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ da.

Orduan, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in U^T$ bada $X.e_i = 0 = \text{Tr}\,(X.e_i) = x_{ii}$ $i = 1,2$.

Ondorioz, U^T-ko matrize guztiek $X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix}$ matrizearen itxura dute.

Horrez gain, horrelako itxura duen X matrize bat U^T-ko matrizea izango da, zeren eta
$X.e_1 = \text{Tr}\begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix} = 0$ baita. Modu berean, $X.e_2 = 0$ da.

Beraz, $U^T = \{\begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix}, \; x_{12}, x_{21} \in K\}$.

b) A-ren proiekzioa U^T-ren gainean $Y = (A.e_1).e_1 + (A.e_2).e_2$ da, baina $A.e_i = \text{Tr}\,(A.e_i)$ $= a_{ii}$ denez, $Y = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ izango da eta emandako A-rentzat $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ da.

9. Egiaztatu R^2an $\left.\begin{array}{l} 2x' = x - \sqrt{3}y \\ 2y' = \sqrt{3}x + y \end{array}\right\}$ *sistemak definitzen duen f endomorfismoa f(x,y) = (x',y') endomorfismo ortogonala dela. Zein biraketa- edo simetria-mota da?*

Ebaz.: Argi dago endomorfismoari dagokion matrizea $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ dela, zeren eta $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ baita. Ikusi behar da $A^T.A = I$ den eta argi dago hori betetzen dela. Horrez gain, bere determinantea $|A| = 1$ da eta, positiboa denez, biraketa bat da. Gainera $\cos\alpha = ½$ denez, $\alpha = 60º$ da.

10. Izan bedi $f : R^2 \rightarrow R^2$ aplikazio lineal simetriko bat.
a) egiazta ezazu $f(f(u)) \,.\, u = f(u).f(u)$ $\forall u \in R^2$ betetzen dela.
b) aurrekoa kontuan izanda, frogatu: $f(u) \perp u$ $\forall u \in R^2 \Rightarrow f = o$

Ebaz.: a) izan bitez u (x,y) bektorea eta f-ren matrizea $F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Orduan, f (f (u)) $= F.F.u = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2x + aby + b^2x + bcy \\ bax + b^2y + cbx + c^2y \end{pmatrix}$ eta $f (f (u)).u = a^2.x^2 + abyx + b^2x^2 + bcyx + baxy + b^2y^2 + cbxy + c^2y^2 = (a^2 + b^2)x^2 + (b^2 + c^2)y^2 + (2ab + 2bc)xy$.

Orain f (u).f (u) egiten bada: $\begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + b^2x^2 + 2bcxy + c^2y^2$ ateratzen da. Beraz, bat dator aurrekoarekin.

b) $u \perp f(u)$ $\forall u$ denez $\Rightarrow$ u + f (u) eta f (u + f (u)) ortogonalak dira.
Orduan, $0 = (u + f (u)) . f (u + f (u)) = u.f (u) + u.f (f (u)) + f (u).f (u) + f (u).f (f (u)) = 2f(u).f (u) = 2.|f (u)|^2$ (zeren eta $u.f (u) = f (u).f (f (u)) = 0$ diren).
Beraz, $|f (u)| = 0$ da, eta ondorioz, $f (u) = o$ frogatu nahi zen bezala.

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Froga ezazu R^3-an, oinarri kanonikoarekiko $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrizeak biderkadura eskalar bat definitzen duela.*

2. Esan biderkadura eskalar bat definitzen den ondoko kasuetan:

a) $x.y = x_1.y_1 + 4.x_2.y_2$ $\quad R^2$*-an.*

b) $x.y = x_1.y_1 - 2x_1.y_2 - 2x_2.y_1 + 6x_2.y_2 + x_2.y_3 + x_3.y_2 + x_3.y_3$ $\quad R^3$*-an.*

3. Izan bedi $F : [0,1] \rightarrow R$ *funtzioen multzoa eta defini dezagun ondoko biderkadura eskalarra:* $f.g = \int_0^1 f\,.\,g.dx \quad \forall f,g \in F$. *Esan ortogonalak diren* $f(x) = \sin 2\pi nx$ *eta* $g(x) = \cos 2\pi mx \quad \forall n,m \in N$.

4. Izan bedi V espazio euklidear bat eta $x,y,z \in V$. *Froga ezazu ondoko hau betetzen dela:* $|x + y + z|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + 2.(x.y) + 2.(x.z) + 2.(y.z)$

5. Froga ezazu x eta y bektoreek luzera berdina izanez gero, $x + y$ *eta* $x - y$ *bektoreak perpendikularrak direla.*

6. Izan bedi V espazio euklidear bat eta $x,y \in V$. *Froga ezazu ondoko hau betetzen dela:*

$$|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|.$$

7. Froga ezazu Cauchy-Schwarz desberdintza berdintza bilakatzen dela, baldin eta soilik baldin bi bektoreak independenteak badira.

8. Izan bedi V espazio normatu bat (bere norma $|\ |$ *da). Defini dezagun* $f : VxV \rightarrow K$ *era honetan:* $f(x,y) = |x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2$. *Demagun* $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2.(|x|^2 + |y|^2)$ *betetzen dela.*

a) *frogatu* $f(2x,y) = 2.f(x,y)$

b) $|x + y + z|^2 = |x + y|^2 + |y + z|^2 + |x + z|^2 - |x|^2 - |y|^2 - |z|^2$

c) esan f biderkadura eskalar bat den

9. Ondoko oinarrietatik abiatuta oinarri ortonormalak eraiki:

a) $\{(1,1), (1,3)\}$ R^2*-an*

b) $\{(1,1,2),(-1,1,0),(3,-2,0)\}$ R^3*-an*

c) $\{(1,1,1,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,0),(1,3,4,2)\}$ R^4*-an*

10. Kalkulatu U^T ondoko kasu hauetan:

a) R^2-an $U = \{(x,-x) \,/\, x \in R\}$ izanik.
b) R^3-an $U = \{(x,y,z) \,/\, x + y = 2\}$ "
c) R^3-an $U = \{(x,y,z) \,/\, x - z = 1,\ 2z - y = 0\}$ "
d) R^4-an $U = \{(x,y,3x,x-y) \,/\, x,y \in R\}$ "

11. Kalkulatu ondoko kasuetan x bektorearen proiekzioa U-ren gainean eta d(x,U):

a) $x\ (1,2)$ eta $U = \{(m,2m) \,/\, m \in R\}$ R^2 espazioan.
b) $x\ (2,3,0)$ eta $U = \{(m, 2m,n) \,/\, m,n \in R\}$ R^3 espazioan.
c) $x = (3,1,3,1)$ eta $U = \{(m,2n,0,n) \,/\, m,n \in R\}$ R^4 espazioan.
d) $x = (1,1,2,0,2)$ eta $U = \{(m,n,p,q,\ m + n - q) \,/\, m,n,p,q \in R\}$ R^5 espazioan.

12. Izan bedi V espazio euklidear bat eta R eta S V-ko bi azpiespazio. Frogatu ondoko hauek betetzen direla:

- $(R + S)^{\perp} = R^{\perp} \cap S^{\perp}$
- $(R \cap S)^{\perp} = R^{\perp} + S^{\perp}$

13. Kontsidera dezagun R^4 espazioa biderkadura eskalar kanonikoaz hornituta.

a) Kalkulatu (1,2,-1,0), (0,1,1,0) eta (1,0,-2,1) bektoreekiko perpendikularra den unitate bektorea.
b) Gram-Schmidt erabiliz, aurkitu $S = \{(x,y,z,t) \,/\, x + 2y + z = 0,\ z = y,\ t = 2z - x - y \quad \forall x,y,z,t \in R\}$ azpiespazioaren oinarri ortonormal bat.

14. Izan bedi V maila bat baino txikiagoa edo berdina duten polinomioen bektore--espazioa. Defini dezagun biderkadura eskalar bat era honetan:

$$p_1(x) \,.\, p_2(x) = \int_0^1 p_1(x).p_2(x).dx \qquad \forall p_1, p_2 \in V$$

a) egiazta ezazu biderkadura eskalar bat dela.
b) kalkulatu Gram matrizea $B = \{1,x\}$ oinarriarekiko.
c) kalkulatu $x - 1$ eta $2x + 3$ polinomioek eratzen duten angelua.
d) $x + 2$ bektorearen proiekzio ortogonala $2x - 4$ gainean
e) B oinarritik abiatuz, oinarri ortonormal bat eraiki.

15. Izan bedi V funtzio erreal jarraituen bektore-espazioa. Defini dezagun biderkadura eskalar bat era honetan:

$$f.g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x).g(x).dx \qquad \forall f,g \in V$$

a) egiazta ezazu biderkadura eskalar bat dela.
b) izan bedi S sinx,sin2x,cosx eta cos2x funtzioek sortzen duten azpiespazioa. Aurkitu S-ko oinarri ortonormal bat.

16. Izan bitez x,y V-ko espazio euklidear baten bi bektore. Izan bedi z x-ren proiekzioa y-ren gainean eta defini dezagun $u = x - z$. Froga ezazu $u \neq o$ dela eta $u \perp y$ dela.

17. Izan bedi f V-ko endomorfismo ortogonal bat eta $R \subset V$ azpiespazio bat, non $f(R) = R$ den. Froga ezazu $f(R^T) = R^T$ dela.

18. Izan bedi $f : R^3 \to R^3$ ondoko ekuazio hauekin definitutako endomorfismoa: $3x' = -x + 2y + 2z$, $3y' = 2x - y + 2z$, $3z' = 2x + 2y - z$. Aztertu endomorfismo ortogonala den.

19. Froga ezazu α eta β angeluko bi biraketen arteko konposizioa $(\alpha + \beta)$ angeluko biraketa dela.

20. Demagun bi simetria axialen simetria-ardatzek α angelua osatzen dutela. Froga ezazu bi simetria horien arteko konposizioa 2α angeluko biraketa dela.

9. ESPAZIO AFIN EUKLIDEARRA

E_n (+ ; $._V$) espazio afin bat euklidearra dela esaten da, dagokion bektore--espazioa euklidearra bada (hots, V espazioa biderkadura eskalar batez hornituta badago).

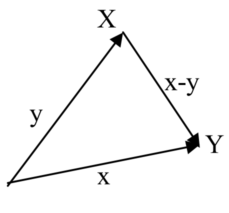
Ikusiko den bezala espazio afin euklidearretan posible da, esaterako, puntuen arteko distantziak edo zuzenen arteko angeluak kalkulatzea.

Beste alde batetik, badakigu E_n-ko erreferentzia cartesiar bat O puntu batez eta $\{e_1,.....,e_n\}$ V_n -ko oinarri batez osatuta dagoela. Komenigarria da erreferentzia-sistema erosoak erabiltzea adierazpen aljebraikoen itxura sinplifikatzeko. Hori oinarria ortonormala denean gertatzen da (batzuetan erreferentzia angeluzuzena dela esaten da).

9.1. DISTANTZIA

Aurreko kapituluan (8.3. definizioa) distantzia bat zer den ikusi da, oro har, eta bi bektoreren arteko distantziaren definizioa honela egin da:

$d(x,y) = |x - y| \quad \forall x,y \in V.$



Orain E espazio afinean, X eta Y bi puntuen arteko distantziaren definizioa honela egingo da:

$$\boxed{d(X,Y) = |XY|}$$

eta bistan denez, bat dator bektore-espazioan egindakoarekin, $|XY| = |x - y|$ baita.

Argi dago $d(X,Y) = |XY|$ distantzia bat dela.

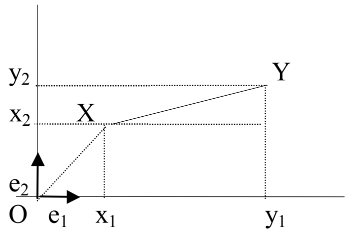
Ikus dezagun:

- $d(X,Y) \geq 0$. Frog.: $|XY| > 0$ da eta $|X,Y| = 0$ bada, $XY = o \Rightarrow X = Y + o$ izango da, eta ondorioz, $X = Y$.
- $d(X,Y) = d(Y,X)$. Frog.: $d(X,Y) = |XY| = |-YX| = |-1|.|YX| = |YX| = d(Y,X)$
- $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$. Frog.: $XZ = XY + YZ$ eta Minkowski desberdintzaren arabera $|XZ| \leq |XY| + |YZ|$.

Gogoratu behar da E_n-ko X puntu baten koordenatuak $\{O ; e_1,.....,e_n\}$ erreferentziarekiko, OX bektorearenak $\{e_1,......,e_n\}$ oinarriarekiko, direla. Oinarria ortonormala bada, $X(x_1,......,x_n)$ eta $Y(y_1,......,y_n)$ bi punturen arteko distantzia ondoko hau izango da:

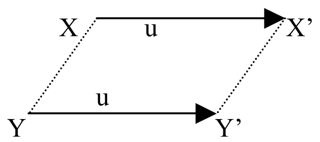
$d(X,Y) = |XY| = |XO + OY| = |OY - OX| = |(y_1,......,y_n) - (x_1,......,x_n)| = |(y_1 - x_1),.......,(y_n - x_n)| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots\ldots + (y_n - x_n)^2}$

- R^2-an, adibidez, $d(X,Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$



9.1. PROPOSIZIOA: X eta Y bi puntuen arteko distantzia inbariantea da translazioekiko

Frog.: Egin dezagun u bektoreaz translazioa eta izan bitez $X' = X + u$ eta $Y' = Y + u$. Orduan, $d(X',Y') = |X'Y'| = |X'X + XY + YY'| = |-u + XY + u| = |XY| = d(X,Y)$



9.2. ERREFERENTZIA-ALDAKETA

Zazpigarren kapituluan, erreferentzia-sistemaren aldaketa bat egiten denean puntu baten koordenatuak nola aldatzen diren ikusi zen. Izan bitez $R = \{O ; e_1,.....,e_n\}$ eta $R' = \{O' (a_1,....,a_n)_R ; e'_1,......e'_n\}$ bi erreferentziak, non $e'_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}.e_j$ den. Hots, $Q = (q_{ij})$ oinarri-aldaketaren matrizea da. Suposa dezagun $X'(x'_1,......,x'_n)$ eta $X(x_1,....,x_n)$ puntu baten koordenatuak direla R' eta R-rekiko, hurrenez hurren, orduan:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

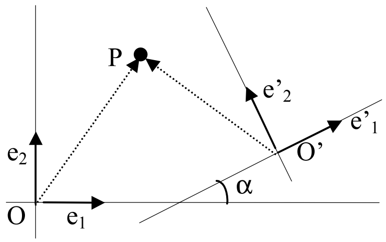
Bi oinarri horiek ortonormalak baldin badira, Q ortogonala da (245. orrialdea), eta ondorioz, Q-k bektoreen luzerak mantentzen ditu. Horrek suposatzen du puntuen arteko distantziak ere mantentzen direla. Ikus dezagun:

Izan bitez X eta Y puntuak eta X' eta Y' haien adierazpenak bigarren oinarrian. Hartara, X = Q.X' + A eta Y = Q.Y' + A betetzen dira, eta ondorioz:

d (X,Y) = |XY| = |Y - X| = |QY' - QX'| = |Q.(Y' - X')| = |Q.X'Y'| = |X'Y'| = d (X',Y')

Erreferentzietako bi oinarri horiek ortonormalak baldin badira, Q ortogonala da (hots, $Q^T.Q = I$ eta, beraz, $|Q| = \pm 1$) eta $|Q| = +1$ bada, bi erreferentziak orientazio berekoak izango dira eta $|Q| = -1$ orientazio desberdinekoa.

R^2-an adibidez:



Eta aurreko erlazioa horrela gelditzen da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{non}$$

(x,y) eta (x',y') bi erreferentziekiko P puntuaren koordenatuak diren eta (a_1,a_2) O' puntuaren koordenatuak diren $\{O;e_1,e_2\}$ erreferentziarekiko.

9.3. AZPIESPAZIO AFINEN ARTEKO ELKARZUTASUNA

Aurreko kapituluan bektore-azpiespazioen elkarzutasuna definitu zen eta horretan oinarrituta definitzen da barietate afinen elkarzutasuna.

9.1. DEFINIZIOA: Izan bitez A = P + U eta B = Q + W bi barietate afin eta U eta W dagozkien bektore-azpiespazioak. A eta B perpendikularrak (elkarzutak) direla esaten da U eta W ortogonalak badira.

Planoan (R^2) barietate afin bakarrak zuzenak dira, eta aurrekoaren arabera, bi zuzen perpendikularrak izango dira beren norabide-bektoreak ortogonalak badira. Esaterako, $2x - 3y + 1 = 0$ eta $x + 3y - 2 = 0$ perpendikularrak diren jakiteko nahikoa da beraien norabide-bektoreen arteko biderkadura eskalarra kalkulatzea. Kasu honetan $(3,2).(-3,1) = -7$ da eta zero ez denez, ez dira perpendikularrak.

Espazio arruntean (R^3) barietate afinak zuzenak eta planoak dira eta orduan hiru kasu daude:

- bi zuzen perpendikularrak dira beraien norabide-bektoreak ortogonalak badira.
- zuzen bat eta plano bat perpendikularrak dira, zuzenaren bektore-norabidea ortogonala bada planoko bi bektore independenteekiko.
- bi plano ezin dira perpendikularrak izan, bi dimentsiokoak baitira (dim U = dim W = 2), eta ondorioz, beraien batura ezin da zuzena izan ($R^3 \neq U \oplus W$). Beste era batera esanda, bi plano paraleloak ez badira, zuzen batean ebakitzen dute elkar, eta ondorioz, U eta W ez dira perpendikularrak.

Hala eta guztiz ere, espazio arrunt honetan planoak perpendikularrak direla onartzen da, beraien azpiespazio betegarriak (gogoratu dimentsio batekoak direla) ortogonalak badira.

adibidea: Esan perpendikularrak diren $2x - 3y + z + 1 = 0$ ekuazioa duen planoa eta $(x,y,z) = (2 + 4\lambda, 4 - 6\lambda, 2\lambda)$ zuzena (ekuazio parametrikoz definitua).

Ebaz.: Zuzenaren norabide-bektorea v (4,-6,2) da eta planoko bi bektore independente eskuratzeko ekuazioa parametrikoetan jarriko da: $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -1 - 2x + 3y \end{cases}$ eta ondorioz, bi bektore independenteak u (1,0,-2) eta w (0,1,3) dira. Eta v.u = v.w = 0 denez, zuzena eta planoa perpendikularrak dira.

Ariketa hau egiteko posible da $u \wedge w$ kalkulatzea eta v-rekiko paraleloa den egiaztatzea. Horrez gain, ondokoan ekuazioak ikusiko dira eta hortik, hau egiteko beste modu bat (askoz errazagoa), zeren eta planoaren koefizienteek, (2,-3,1), planoarekiko perpendikularra den bektore bat osatzen baitute.

9.4. EKUAZIOAK

Izan bedi $A = P + U$ E $(+; ._V)$ espazio afin euklidearreko barietate afin bat (V-ren dimentsioa n eta U-koa p izanik) eta demagun U^T dela U-ko azpiespazio betegarri ortogonala (hots, $V = U \oplus U^T$ da). Hartara, U^T-ko dimentsioa $r = n - p$ da.

X puntu bat A-koa dela esan daiteke PX bektorea U^T-ko bektore guztiarekiko ortogonala bada: $PX \cdot w = 0 \ \ \forall w \in U^T$. Baina $\{e_1, ...,e_r\}$ U^T-ko oinarri bat bada, aurreko baldintza betetzeko nahikoa izango da $PX.e_i = 0$ izatea $\forall i = 1....r$. Argi dago A hiperplanoa baldin bada, U^T dimentsioa bat izango dela eta ekuazioa $PX \cdot e_1 = 0$ da.

Ondorioz, $\{u_1, ...,u_p\}$ U-ko oinarri bat izanik, A barietate linealaren ekuazioak ondoko bi modu hauetara adieraz daitezke:

- $A = P + U = \{P + \alpha_1.u_1 + ... + \alpha_p.u_p \ / \ \text{non } \alpha_i \in K\}$
- $A = \{X \in E \ / \ PX \cdot e_i = 0 \quad i = 1,......,r\}$

eta koordenatuetan adierazten badira, P $(p_1, ...,p_n)$, X $(x_1, ...,x_n)$, u_i $(u_i^1,.....,u_i^n)$, e_i $(e_i^1, ...,e_i^n)$ izanik, ekuazioak ondoko hauek izango dira:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \alpha_1.u_1^1+.......+\alpha_p.u_p^1 \\ .... \\ x_n = p_n + \alpha_1.u_1^n+.......+\alpha_p.u_p^n \end{cases}$$ EKUAZIO PARAMETRIKOAK

$$\begin{cases} (x_1 - p_1).e_1^1 + (x_2 - p_2).e_1^2+.......+(x_n - p_n).e_1^n = 0 \\ .... \\ (x_1 - p_1).e_r^1+..........................+(x_n - p_n).e_r^n = 0 \end{cases}$$ EKUAZIO INPLIZITUAK

Oharra: Agerikoa da ekuazio parametrikoak idazteko ez dela beharrezkoa biderkadura eskalar bat definituta izatea.

Ekuazio inplizituak honela jar daitezke:

$$\begin{cases} e_1^1.x_1+.......+e_1^n.x_n = c_1 \\ .... \\ e_r^1.x_1+.......+e_r^n.x_n = c_r \end{cases}$$ non $c_i = p_1.e^1{}_i +.......+ p_n e^n{}_i$ diren.

Bistan denez, B = Q + U beste barietate lineal paralelo baten ekuazio inplizituek ez dituzte x-ren koefizienteak aldatuko.

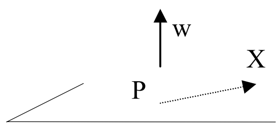
Plano eta espazio arruntetako hiperplanoen ekuazio inplizituak zein diren aztertuko da orain.

HIPERPLANOEN EKUAZIOAK

PLANOAN (R^2) Hemen dim V = 2 denez, hiperplano bakarrak zuzenak dira.

Demagun X (x,y) = P (p_1, p_2) + k.v (v_1, v_2) dela R^2-ko dimentsio bateko (zuzena) barietate lineala. Izan bedi w (w_1, w_2) ortogonala v-rekiko. Hartara, bere ekuazio inplizitua PX . w = 0 da, $(x - p_1).w_1 + (y - p_2).w_2 = 0$ hain zuzen ere. Hori honela idatzi ahal da: Ax + By + C = 0 eta, orduan, A eta B zuzenarekiko perpendikularra den bektore baten koordenatuak dira. 7.8. atalean ikusi zena gogoratzen bada, honekin bat datorrela baiezta daiteke, zeren eta $A = v_2$ eta $B = - v_1$ baitziren.

ESPAZIOAN (R^3) Hemen dimV =3 eta hiperplanoak 2 dimentsiokoak (planoak) dira. Demagun X (x,y,z) = P (p_1, p_2, p_3) + U plano bat dela. Hartara, U^T dimentsio batekoa da eta izan bedi (w_1, w_2, w_3) bere oinarri bat.



Orduan planoaren ekuazio inplizitua hauxe da:

$$PX \,.\, w = 0 \qquad \text{eta ondorioz}$$

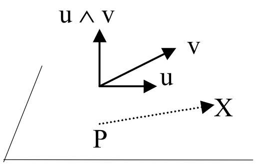
$$(x - p_1).w_1 + (y - p_2).w_2 + (z - p_3).w_3 = 0$$

edo $Ax + By + Cz + D = 0$ non $A = w_1$, $B = w_2$ eta $C = w_3$ diren.

adibidea: Kalkulatu P (2-2,1) puntutik pasatzen den eta $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$ zuzenarekiko perpendikularra den planoaren ekuazioa, eta esan 3x + 4y - z = 2 planoarekiko paraleloa den ala ez.

Ebaz.: Planoaren itxura 2x + y + 3z + D = 0 izango da, eta 2.2 + 1.(-2) + 3.1 + D = 0 denez, D = -5 eta planoaren ekuazioa 2x + y + 3z - 5 = 0 izango da. Horrez gain, (2,1,3) eta (3,4,-1) proportzionalak ez direnez, ez dira paraleloak.

Espazio afin euklidearra dela aprobetxatuz, beste era batera ere jar daiteke plano baten ekuazioa. Demagun u eta w planoko bi bektore independente direla eta izan bedi P bere puntu bat. Hartara, $u \wedge v$ planoarekiko perpendikularra da eta planoko X puntu guztiek $(u \wedge v).\,PX = 0$ ekuazioa beteko dute. Ondorioz, hori da hain zuzen ere bere ekuazioa:



$$(x - p_1).\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + (y - p_2).\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} + (z - p_3).\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

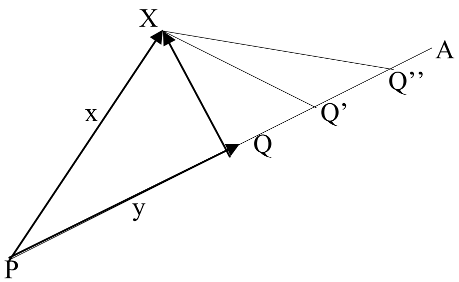
Bistan denez, PX. $(u \wedge v)$ biderkadura nahasia da ([PX,u,v] idazten da), eta ondorioz, aurreko ekuazioa modu ezagun honetan jar daiteke, nahiz eta orain beste ikuspuntu batetik sortu (ikuspuntu euklidearra):

$$\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Gogoan izan ekuazio hau aterata genuela PX, u eta v bektoreek sistema independente bat osatzen dutela exijitzetik (197. orrialdea).

9.5. PROIEKZIO ORTOGONALA. PUNTU ETA BARIETATE LINEALEN ARTEKO DISTANTZIA

Aurreko kapituluan ikusi da zer den bektore baten proiekzio ortogonala bektore-azpiespazio baten gainean (8.10). Han zehaztuta gelditu zen y dela x-ren proiekzioa U-ren gainean x - y bektorea (hau da XQ) ortogonala bada U azpiespazioarekiko.



Izan bedi $\{e_1,.....,e_p\}$ U-ko oinarri ortogonal bat. Orduan ikusi zen y bektorea ondoko hau zela:

$$y = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}.e_i \qquad \text{edo} \quad y = \sum_{i=1}^{p} (x.e_i).e_i$$

oinarria ortonormala bada.

Honek ondoko definizio hau iradokitzen du:

9.2. DEFINIZIOA: Q puntua X puntuaren A = P + U barietate linealaren gaineko proiekzioa dela esaten da, $XQ \perp U$ bada.

Horrez gain, Q honela adieraz daiteke: $Q = P + y = P + \sum_{i=1}^{p} \frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}.e_i$

9.3. DEFINIZIOA: X puntua eta A barietate baten arteko distantzia ondoko hau da: $d(X,A) = d(X,Q) = |XQ| = d(x,U) = |y - x| = \sqrt{|x|^2 - \sum_{i=1}^{p} \frac{(x.e_i)^2}{|e_i|^2}}$

edo $\sqrt{|x|^2 - \sum_{i=1}^{p} (x.e_i)^2}$ oinarria ortonormala bada. Hemen x =PX da eta |x| = d(P,X).

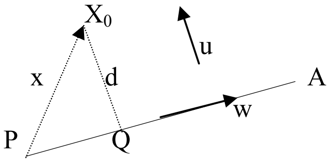
Hemen ere bai proiekzioa bai distantzia ere U^T-ko oinarri ortogonal baten arabera adieraz daitezke. Hau komenigarria izango da U^T-ko dimentsioa U-koa baino txikiagoa denean (bereziki A hiperplanoa denean).

Orain ikusitakoa bi espazio afin arruntetan aplikatuko da. Hau da, R^2 eta R^3 espazioetan.

PLANOAN (R^2)

Kalkula dezagun X_0 (x_0, y_0) puntu baten proiekzioa $A(x,y) = P\ (p_1, p_2) + k.w\ (w_1, w_2)$ zuzenaren gainean eta bien arteko distantzia:

- **Q (proiekzioa)** $= P + \sum_{i=1}^{p} \frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}.e_i = P + \frac{x.w}{|w|^2}.w = P + \frac{PX_0.w}{|w|^2}.w$



Horrez gain, QX_0 perpendikularra da A zuzenarekiko. Ikus dezagun:

$QX_0 . w = (QP + PX_0).w = PX_0.w - PQ.w =$

$PX_0.w - \frac{PX_0.w}{|w|^2}.w.w = PX_0 .w - PX_0 .w = 0$

Askotan Q proiekzioa kalkulatzeko ez da lortutako formula erabiltzen, erosoagoa baita A-rekiko perpendikularra den eta X_0 puntutik pasatzen den B zuzena kalkulatzea eta, orduan, Q lortzen da A eta B zuzenek osatzen duten ekuazio-sistema ebaztetik.

adibidea: Kalkulatu M (1,3) puntuaren proiekzioa $3x - 4y + 2 = 0$ zuzenaren gainean azaldutako bi moduetan.

Ebaz.: - Formula aplikatzeko zuzeneko P puntu bat eta w norabide-bektorea behar dira. Hemen P(2,2) eta w (4,3) hartuko dira. Hartara, PM (-1,1) da. Beraz:

$$Q = (2,2) + \frac{(-1,1).(4,3)}{|(4,3)|^2}.(4,3) = (2,2) + \frac{-1}{25}.(4,3) = (\frac{46}{25}, \frac{47}{25})$$

- Zuzen perpendikularra $4x + 3y + k = 0$ da. M puntutik pasatzea exijitzen bada, $4.1 + 3.3 + k = 0 \Rightarrow k = -13$ eta ebatzi behar den sistema hauxe da:

$\begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 \\ 4x + 3y - 13 = 0 \end{cases}$ eta honen soluzioa Q $(\frac{46}{25}, \frac{47}{25})$ proiekzioa da.

- **Distantzia: d (X_0, A)** = $\sqrt{|PX_o|^2 - \dfrac{(PX_0.w)^2}{|w|^2}}$

Hemen U^T dimentsio batekoa da (bere oinarria u izanik) eta distantziaren adierazpena errazten da (239. orrialdea):

d (X_0, A) = $\sqrt{\dfrac{(x.u)^2}{|u|^2}} = \left|\dfrac{x.u}{|u|}\right| = \left|\dfrac{PX_0.u}{|u|}\right|$. Koordenatuetan jartzen bada, gehien erabiltzen den formula lortuko da: demagun A-ren ekuazio inplizitua $ax + by + c = 0$ dela. Hartara, $w = (-b,a)$ eta $u = (a,b)$ dira eta ondoko hau gelditzen da:

d (X_0, A) = $\left|\dfrac{(x_0 - p_1, y_0 - p_2).(a,b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\dfrac{ax_0 + by_0 - ap_1 - bp_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ baina P puntua A zuzenekoa da, eta ondorioz, $ap_1 + bp_2 + c = 0 \Rightarrow c = - ap_1 - bp_2$. Beraz:

$$d\,(X_0,\ A) = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

Argi dago d(X_0,A) kalkulatzeko d(X_0,Q) ere egin daitekeela.

B. ESPAZIOA (R^3)

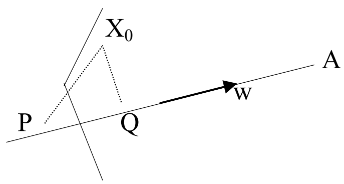
Hemen bi kasu daude: puntu eta zuzen baten arteko distantzia eta puntu eta plano baten artekoa.

1. PUNTU ETA ZUZENAREN ARTEKO DISTANTZIA

Kasu hau aurreko kasua (R^2) bezalakoa da, eta bai proiekzioak bai distantziak ere adierazpen berdinak dituzte.

- **Q (proiekzioa)** = $P + \sum_{i=1}^{p} \dfrac{(x.e_i)}{|e_i|^2}.e_i = P + \dfrac{x.w}{|w|^2}.w = P + \dfrac{PX_0.w}{|w|^2}.w$

Kasu honetan ere Q proiekzioa kontsiderazio geometriko batetik atera daiteke, zeren eta Q bi barietate linealen ebaketa baita:



bata emandako A zuzena eta bestea π planoa, zuzenarekiko perpendikularra eta X_0 puntutik pasatzen dena.

Beraz, nahikoa da A-k eta π-k osatzen duten ekuazio-sistema ebaztea.

adibidea: Kalkulatu M(1,0,-2) puntuaren proiekzioa $\frac{x+3}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{4}$ zuzenaren gainean.

Ebaz.: Azken kontsiderazioa erabiliz ebatziko dugu soilik. Plano perpendikularra ax + by + cz + d = 0 bada, badakigu (a,b,c) = w dela, ondorioz, -x + 2y + 4z + d = 0 izango da eta M-tik pasatzea exijituz gero, -1.1 + 2.0 + 4.(-2) + d = 0 $\Rightarrow$ d = 9.

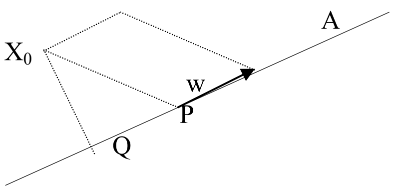
Zuzenaren ekuazioak 2.(x + 3) = - y eta 4y = 2.(z - 3) dira, eta ondorioz, Q ondoko sistema honen soluzioa izango da:

$$\begin{cases} 2x + y + 6 = 0 \\ 4y - 2z + 6 = 0 \\ -x + 2y + 4z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad Q\left(-\frac{13}{7}, -\frac{16}{7}, -\frac{11}{7}\right)$$

- **Distantzia**: $d(X_0, A) = \sqrt{|x|^2 - \frac{(PX_0.w)^2}{|w|^2}} = \sqrt{|PX_0|^2 - \frac{(PX_0.w)^2}{|w|^2}}$

Hemen ezin da erraztu distantziaren adierazpena U^T erabiliz, hau 2 dimentsiokoa baita. Hala ere, bektore-biderkadura eta bere esanahi geometrikoa erabil daiteke formula bakun bat ateratzeko.

Agerikoa da $PX_0 = PQ + QX_0$ eta ondorioz: $|PX_0 \wedge w| = |(PQ + QX_0) \wedge w| =$



$|(PQ \wedge w) + (QX_0 \wedge w)| = |QX_0 \wedge w|$ zeren eta PQ eta w-ren arteko bektore-biderkadura zero den.
Beraz $|PX_0 \wedge w| = |QX_0|.|w|$ zeren eta QX_0 eta w perpendikularrak diren. Ondorioz:

$$d(X_0, A) = |QX_0| = \frac{|PX_0 \wedge u|}{|u|}$$

Adierazpen hau beste kontsiderazio geometriko batetik atera daiteke, zeren eta kalkulatu nahi den distantzia $|QX_0|$ laukizuzen baten altuera baita, PX_0 eta w bektoreek osatzen dutenarena, eta laukizuzen horren azalera $|PX_0 \wedge w|$ besterik ez da. Ondorioz:

Azalera = $|PX_0 \wedge w|$ = (oinarria). (altuera) = $|w| . |QX_0| \Rightarrow |QX_0| = \frac{|PX_0 \wedge w|}{|w|}$

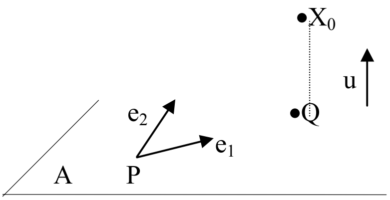
Kontuan hartu behar da hemen ere distantzia hori kalkulatzeko posible dela Q proiekzioa aurkitzea eta ondoren d (X_0,Q) egitea.

2. PUNTU ETA PLANOAREN ARTEKO DISTANTZIA

d (X_0, A) kalkulatu nahi da, non $A = P + U$ den eta U bi dimentsiokoa den. Bere oinarri ortogonal bat $B\{e_1, e_2\}$ bada: $A = P + \lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2$.

- **Q (proiekzioa)** $= P + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{(x.e_i)}{|e_i|^2}.e_i = P + \frac{x.e_1}{|e_1|^2}.e_1 + \frac{x.e_2}{|e_2|^2}.e_2 \qquad (x = PX_o \text{ da})$

Hemen ere proiekzioa kalkulatzeko beste era batera egin daiteke



Q proiekzioa X_0 puntutik pasatu eta planoarekiko perpendikularra den zuzenaren eta plano beraren arteko ebaketa da.

adibidea: Kalkulatu M (2,1,3) puntuaren proiekzioa $3x - 2y + 4z -1 = 0$ planoaren gainean.

Ebaz.: Zuzen perpendikularraren ekuazioa hau da: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{4}$ eta ondorioz, Q puntua ondoko sistemaren soluzioa izango da:

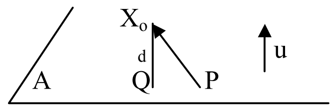
$$\begin{cases} -2x - 3y + 7 = 0 \\ 4y + 2z - 10 = 0 \\ 3x - 2y + 4z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad Q\left(\frac{13}{29}, \frac{59}{29}, \frac{27}{29}\right)$$

Kontuan hartu aurreko formula erabili ahal izateko planoko oinarri ortogonal bat hartu behar dela eta lan horrek kalkulua luzatu egiten duela.

- **Distantzia d (X_0,A)** $= \sqrt{|x|^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{(x.e_i)^2}{|e_i|^2}} = \sqrt{|PX_0|^2 - \frac{(PX_0.e_1)^2}{|e_1|^2} - \frac{(PX_0.e_2)^2}{|e_2|^2}}$.

Kasu honetan U^T dimentsio batekoa da eta bere oinarria u bektorea bada, orduan distantzia kalkulatzea askoz errazagoa da:

$$d\,(X_0, A) = \sqrt{\frac{(x.u)^2}{|u|^2}} = \left|\frac{x.u}{|u|}\right| = \left|\frac{PX_0.u}{|u|}\right|.$$



Oraindik ere beste era batera egin daiteke. Suposa dezagun $ax + by + cz + d = 0$ dela planoaren ekuazioa (ondorioz, $u = (a,b,c)$). Kontuan hartzen bada $d\,(X_0,A) = |X_0Q|$ dela eta X_0Q eta u paraleloak direla, orduan:

$$X_0Q\,.\,u = |X_0Q|.|u|\,.\cos 0 = |X_0Q|.|u| \Rightarrow d\,(X_0,A) = \left|\frac{X_0Q.u}{|u|}\right| =$$

$$\left|\frac{(q_1 - x_0).a + (q_2 - y_0).b + (q_3 - z_0).c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \left|\frac{q_1.a + q_2.b + q_3.c - x_0.a - y_0.b - z_0.c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

baina Q puntua (proiekzioa) planokoa da, eta ondorioz, horren ekuazioa betetzen du, hau da, $q_1.a + q_2.b + q_3.c = -d$. Ondorioz:

$$d\,(X_0,A) = \left|\frac{x_0.a + y_0.b + z_0.c + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

9.6. BI BARIETATEREN ARTEKO DISTANTZIA

Aurrekoan, puntu eta barietate baten arteko distantzia puntu hori eta bere proiekzioaren artekoa dela ikusi da. Izan bitez orain $A = P + U$ eta $B = P' + W$ bi barietate. Haien arteko distantzia honela definitzen da:

9.4. DEFINIZIOA: $d\,(A,B) = \min\,\{d\,(X,X') \;/\; X \in A \text{ eta } X' \in B\}$

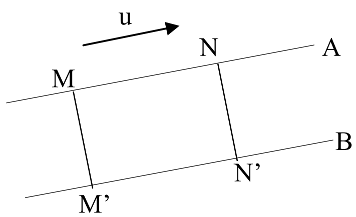
Espazio finituetan beti existitzen da eta agerikoa da zero dela A eta B paraleloak ez badira, hau da, $A \cap B \neq \phi$ bada. Gainerako kasuak ondokoan aztertuko dira R^2 eta R^3 espazio afinetan.

PLANOAN (R^2)

BI ZUZENEN ARTEKO DISTANTZIA

Izan bitez $A = P + k.u$ eta $B = P' + n.u$ bi zuzen paralelo.

9.2. PROPOSIZIOA: $\forall M,N \in A \quad d(M,B) = d(N,B)$



Frog.: Izan bitez M' eta N' beraien proiekzioak B gainean. Orduan $MN = MM' + M'N' + N'N \Rightarrow MN - M'N' = MM' - NN'$ Baina lehenengo ataleko bektorea paraleloa da u-rekiko eta bigarren atalekoa perpendikularra u-rekiko. Ondorioz, biak zero dira $\Rightarrow MM' = NN'$. Beraz:
$d(M,B) = |MM'| = |NN'| = d(N,B)$

Ondorioz, A eta B zuzenen arteko distantzia kalkulatzeko, nahikoa da zuzen bateko edozein puntu hartzea eta puntu hori eta beste zuzenaren arteko distantzia kalkulatzea.

Demagun orain $ax + by + c = 0$ eta $ax + by + c' = 0$ A eta B zuzenen ekuazioak direla, hurrenez hurren. Izan bedi M (m_1, m_2) A-ko puntu bat. Hartara,:

$d(A,B) = d(M,B) = \left| \frac{a.m_1 + b.m_2 + c'}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ baina $a.m_1 + b.m_2 + c = 0$ da. Ondorioz:

$$d(A,B) = \left| \frac{c' - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

ESPAZIOAN (R^3)

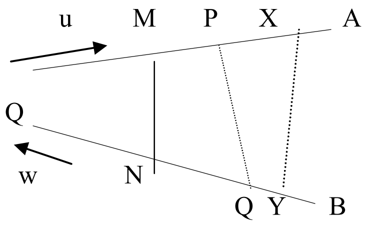
Hemen hiru kasu ditugu: bi zuzenen arteko distantzia, zuzenaren eta planoaren artekoa eta bi planoen artekoa.

1. BI ZUZENEN ARTEKO DISTANTZIA

Izan bitez $A = P + \alpha .u$ eta $B = Q + \beta .w$ bi zuzen. Hartara, haien arteko distantzia ondoko hau da: $d(A,B) = \text{mim}\,\{d(X,Y) \,/\, X \in A \text{ eta } Y \in B\}$.

9.3. PROPOSIZIOA: A eta B zuzenetan M eta N puntuak existitzen dira, non horietatik pasatzen den zuzena perpendikularra den bi zuzenekiko. Hau da, MN bektorea ortogonala da u eta w bektoreekiko.

Frog: M eta N aurkitu behar dira, non $MN.u = MN.w = 0$ diren. Baina $M = P + \alpha.u$ eta $N = Q + \beta.w$ jartzen badira, aurreko eskaerak α eta β existitzea exijitzen du, non $MN.u = MN.w = 0$ den.



Baina $MN = MP + PQ + QN = \alpha.u + \beta.w + PQ$. Beraz:

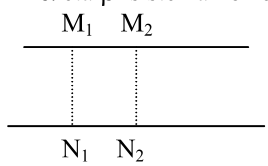
$$\begin{cases} MN.u = \alpha.|u|^2 + \beta.(w.u) + PQ.u = 0 \\ MN.w = \alpha.(u.w) + \beta.|w|^2 + PQ.w = 0 \end{cases}$$

eta hau bi ezezaguneko (α eta β) ekuazio-sistema da. Soluzio bakarra izateko bere determinantea ezin da 0 izan.

Baina bere determinantea $|u|^2.|w|^2 - (u.w)^2$ da, eta u eta v paraleloak ez badira, Schwartz desberdintzaren arabera positiboa da. Beraz, ez da zero $\Rightarrow$ soluzio bakarra du $\Rightarrow$ M eta N bakarrak existitzen dira: $M = P + \alpha.u$ eta $N = Q + \beta.w$, non α eta β sistema horren soluzioak diren.

U eta v paraleloak badira $-|u|^2.|w|^2 + (u.w)^2 = 0$ da

eta sistema horrek infinitu soluzio ditu, hau da, M eta N infinitu bikote daude



9.4. PROPOSIZIOA: Izan bitez $A = P + \alpha.u$ eta $B = Q + \beta.w$ bi zuzen eta $M \in A$ eta $N \in B$, non $MN \perp u$ eta $MN \perp w$ betetzen den. Hartara, $d(A,B) = d(M,N)$.

Frog.: Ikusi behar da $d(M,N) \leq d(X,Y)$ $\forall X \in A$, $\forall Y \in B$. Argi dago $X = M + \alpha.u$ eta $Y = N + \beta.w$ direla, eta ondorioz:
$d(X,Y)^2 = |XY|^2 = |XM + MN + NY|^2 = |-\alpha.u + \beta.w + MN|^2 = \alpha^2.|u|^2 + \beta^2.|w|^2 - 2\alpha\beta.(u.w) - 2\alpha.(u.MN) + 2\beta.(w.MN) + |MN|^2$ (baina $u.MN = w.MN = 0$ dira hipotesia dela eta) $= \alpha^2.|u|^2 + \beta^2.|w|^2 - 2\alpha\beta.(u.w) + |MN|^2 = |\alpha.u - \beta.w|^2 + |MN|^2 = |\alpha.u - \beta.w|^2 + d(M,N)^2$ eta ondorioz:

$d(X,Y)^2 - d(M,N)^2 = |\alpha.u - \beta.w|^2 \geq 0 \Rightarrow d(M,N) \leq d(X,Y)$ frogatu nahi zen bezala.

Aurreko bi proposizio horiek distantzia badagoela ziurtatzen dute eta modu bat iradokitzen dute distantzia hori kalkulatzeko, M eta N puntuak erabiliz.

Oharra: Aurreko bi proposizio horiek espazio afinaren dimentsioa hiru baino handiagoa den kasuetarako ere onargarriak dira, zeren eta egindako frogaketan ez da R^3-rako zehaztu.

Badago beste modu bat, errazagoa, distantzia hori kalkulatzeko biderkadura eskalarra erabiliz. Ikus dezagun:

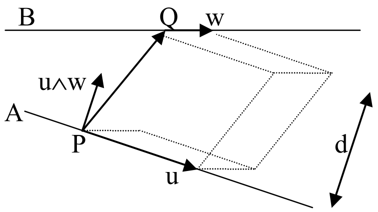
Izan bedi s M eta N puntuetatik pasatzen den zuzena. Agerikoa da bere norabide-bektorea $u \wedge w$ dela. Kontuan hartzen bada M dela P puntuaren proiekzio ortogonala s zuzenaren gainean eta N dela Q puntuarena, orduan MN bektorea PQ bektorearen s-ren gaineko proiekzioa da, hau da:

$$MN = \frac{PQ.(u \wedge v)}{|u \wedge v|^2}.(u \wedge v) \qquad \text{(239. orrialdea)}$$

Beraz: $|MN| = |PQ.(u \wedge w)| / |(u \wedge w)|$, hau da:

$$d(A,B) = \frac{|PQ.(u \wedge w)|}{|u \wedge w|}$$

Formula hori ikuspuntu geometriko batetik ere atera daiteke:



u,w eta PQ bektoreek osatzen duten paralelepipedoaren bolumena hau da:
$B = |u \wedge w| \,.\, d = |u \wedge w|.d\,(A,B)$,
Baina, beste alde batetik, bolumena ere hiru bektoreren biderkadura nahasia da. Ondorioz:

$$d\,(A,B) = \frac{[u, v, PQ]}{|u \wedge w|}$$

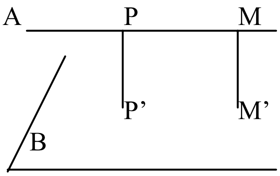
2. ZUZENAREN ETA PLANOAREN ARTEKO DISTANTZIA

Izan bitez $A = P + U$ eta $B = Q + W$ zuzen baten eta plano baten ekuazioak, hurrenez hurren. Paraleloak direnez, $U \subset W$ da.

$d(A,B) = \min \{d(X,B) \;/\; X \in A\}$.

9.5. PROPOSIZIOA: $d(X,B)$ konstantea da $\forall X \in A$. Hau da, $d(A,B)$ distantzia edozein punturena da.

Frog.: Izan bitez $P, M \in A$ eta izan bedi P' puntua P-ren proiekzio ortogonala B-ren gainean. Hartara, $M' = P' + PM$ puntua B-ko puntua da, $PM \in U \subset W$ baita.



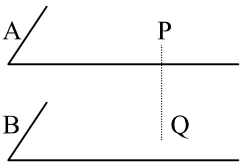
MM' bektorea ortogonala da B-rekiko, MM' = MP + PP' + P'M' = MP + PP' + PM = PP' baita, eta PP' ortogonala da B-rekiko. Horrek esan nahi du M' dela M-ren proiekzioa B-ren gainean eta d (M,M') = |MM'| = |PP'| = d (P,P')

3. PLANOEN ARTEKO DISTANTZIA

Izan bitez A = P + U eta B = Q + U bi plano paraleloren ekuazioak. Hartara, d (A,B) = min {d (X,Y) / X∈A eta Y∈B}.

Aurreko kasuan egin den bezala erraz froga daiteke d (A,B) = d (M,B) dela ∀M∈A (hori frogatzea hau irakurlearen esku uzten da).

Ekuazioak $ax + by + cz + d = 0$ eta $ax + by + cz + d' = 0$ badira, orduan:



$d\ (A,B) = d\ (P,B) = \left|\dfrac{a.p_1 + b.p_2 + c.p_3 + d'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$ baina P puntua A-koa denez: $a.p_1 + b.p_2 + c.p_3 + d = 0$ da.

Ondorioz:

$$d\ (A,B) = \left|\frac{d'-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

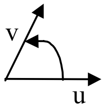
9.7. ANGELUAK

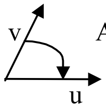
ZUZENERDIAK: E espazio afineko zuzenerdiak ondoko puntu-multzoak dira:

$$R = \{X = P + \lambda.u \ / \ \lambda \in R^+\} \quad \text{non } P \in E \text{ eta } u \neq o \text{ diren.}$$

P puntua bere jatorria dela eta u bere norabide-bektorea dela esaten da. Agerikoa da bi zuzenerdi, $P + \lambda.u$ eta $Q + \alpha w$, berdinak direla $P = Q$ eta $u = k.w$ betetzen bada k erreal positibo batentzat. k negatiboa bada, aurkakoak deritze eta kasu horretan beraien bilketa zuzen bat da. Hartara, bi zuzenerdi horiek eratzen duten angelua u eta w bektoreek osatzen dutena da (Ang (u,v) edo (u,v) adieraziko da).

Kontuan hartu behar da (u,v) eta (v,u) angeluek orientazio desberdina dutela eta hori honela adierazten da: Ang (u,v) = - Ang (v,u) (edo Ang (v,u) = 2π - Ang (u,v)).





Bi zuzenek elkar ebakitzen dutenean ebaketa-puntutik lau zuzenerdi ateratzen dira, eta ondorioz, lau angelu desberdin eratzen dira, bi zorrotzak (berdinak eta aurkako orientazioarekin) eta beste biak kamutsak (berdinak eta aurkako orientazioarekin hauek ere).
Angelu zorrotz eta orientazio positibokoa hartzea adostuko da.

PLANOAN (R^2)

Izan bitez $ax + by + c = 0$ eta $a'x + b'y + c' = 0$ bi zuzenen ekuazioak. Orduan, beren norabide-bektoreak u (-b,a) eta v (-b',a') dira eta eratzen duten angelua kalkulatzeko honela gauzatuko da:

$$\cos(u,v) = \left|\frac{u.v}{|u|.|v|}\right| = \left|\frac{b.b'+a.a'}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a'^2+b'^2}}\right|$$

balio absolutua jarri da angelu zorrotza adierazteko. Soluzioa lehenengo koadrantekoa hartuko da

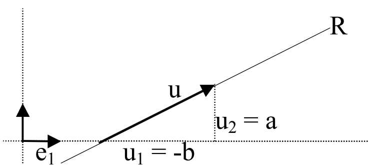
adibidea: Kalkulatu R^2-ko ondoko bi zuzenek eratzen duten angelua: $4 - y = 0$ eta $\sqrt{3}\,x - 3y + 1 = 0$.

Ebaz.: Norabide-bektoreak u (1,0) eta v (3, $\sqrt{3}$) dira, hurrenez hurren. Orduan:

$$\cos(u,v) = \cos\alpha = \frac{u.v}{|u|.|v|} = \frac{3}{\sqrt{9+3}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^{o}.$$

MALDA

Izan bedi R: $ax + by + z = 0$ zuzen baten ekuazioa. Badakigu bere norabide-bektorea u (-b,a) dela. Izan bedi α $e_1(1,0)$ bektorearekin eratzen duen angelua. Bere tangenteak zuzen horren makurtasunaren neurria emango du. Neurri horri malda (m) deitzen zaio: $m = tg\,\alpha$.



$$\cos\alpha = \frac{u.e_1}{|u|.|e_1|} = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$. Modu berean:

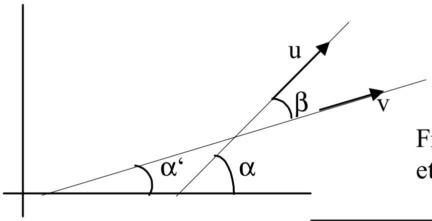
$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ eta ondorioz

$$m = tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{a}{b} = \frac{u_2}{u_1}$$

eta zuzenaren ekuazioa b ≠ 0 bada, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ jarri ahal izango da eta $-\frac{c}{b} = n$ deituz

$$y = mx + n$$

Badago beste modu bat bi zuzenek eratzen duten angelua kalkulatzeko. Izan bitez $y = mx + n$ eta $y = m'x + n'$ bi zuzenen ekuazioak. Izan bitez α eta α' X ardatzarekin eratzen dituzten angeluak (hau da, e_1-ekin).



$$\text{tg}\,\beta = \text{tg}\,(\alpha - \alpha') = \frac{m - m'}{1 + m.m'}$$

Frog.: u(-b,a) eta v(-b',a') badira, m = - a/b eta m' = - a'/b' dira. Hartara:

$$\text{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos(u,v)} = \frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{bb'+aa'}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a'^2+b'^2}}\right)^2}}{\dfrac{bb'+aa'}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a'^2+b'^2}}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)-(bb'+aa')^2}}{bb'+aa'}$$

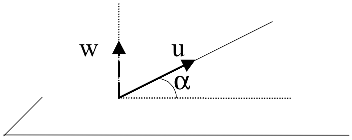
$$= \frac{\sqrt{a^2b'^2+b^2a'^2-2aa'bb'}}{bb'+aa'} = \frac{a'b-b'a}{bb'-aa'} = \frac{\dfrac{a'}{b'}-\dfrac{a}{b}}{1-\dfrac{a.a'}{b.b'}} = \frac{m-m'}{1+m.m'}$$

Horra hor beste ikuspuntu analitiko bat $\text{tg}\,(\alpha - \alpha') = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha'}{1 + \text{tg}\,\alpha.\text{tg}\,\alpha'}$ dela frogatzeko.

ESPAZIOAN (R^3): Hemen hiru kasu daude: bi zuzenen arteko angelua, zuzenaren eta planoaren artekoa eta bi planoren artekoa.

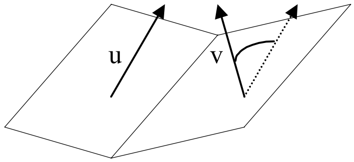
- Bi zuzenen arteko angelua R^2-an bezala egingo da. Nahikoa da beren norabide-bektoreak determinatzea eta beren kosinua kalkulatzea.

- Zuzenaren eta planoren arteko angelua: u bektoreak eta planoaren gaineko bere proiekzioak eratzen dutena hartzen da.



Posible da zuzenaren norabide-bektoreak (u) eta planoko karakteristikoak eratzen dutena hartzea, baina azken finean bata ezagutuz gero bestea bere osagarria da.

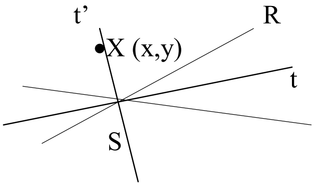
- Bi planoek eratzen duten angelua: beren bektore karakteristikoek eratzen dutena hartuko da.



9.8. ERDIKARIA. SIMETRIAK

ERDIKARIA

PLANOAN: Izan bitez R : ax + by + c = 0 eta S : a'x + b'y + c' = 0 bi zuzenen ekuazioak. Beren erdikaria bi zuzenekiko distantziakideak diren puntuen leku geometrikoa da.



Grafikoan ikusten den bezala bi soluzio daude (t eta t'). Definizioa aplikatzen bada, erdikarien ekuazioak ondoko hauek izango dira:

d (X,R) = d (X,S) eta ondorioz:

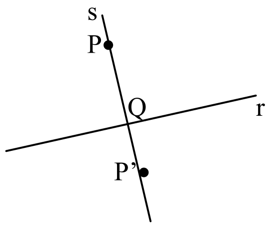
$$\left|\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}\right|$$

ESPAZIOAN: Izan bitez A = P + k.u eta B = P + k'.v P puntuan elkar ebakitzen duten bi zuzen. Orduan, bi zuzenek eratzen duten planoko puntuek (bi zuzenekiko distantziakideak) osatzen dute erdikaria.

Bere ekuazioa kalkulatzeko nahikoa da u eta v bektoreak norma batekoak hartzea. Hartara, beraien batura u + v erdikariaren norabide-bektorea izango da. P puntua erdikarikoa ere badenez, bere ekuazioa finkatuta gelditzen da.

SIMETRIAK R^2-an

1. Puntu baten simetrikoa zuzen batekiko: r zuzen batekiko P puntu baten simetrikoa kalkulatzeko nahikoa da P puntu horretatik pasatzen den eta r-rekiko perpendikularra den s zuzena kalkulatzea.



Izan bedi Q puntua bi zuzenen arteko ebakidura-puntua. Orduan, nahikoa izango da P' kalkulatzeko Q puntua erdiko puntua dela exijitzea.

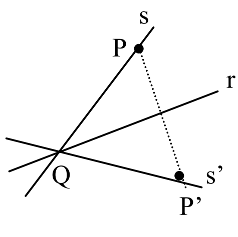
adibidea: Kalkulatu P (1,3) puntuaren simetrikoa $x - 2y + 1 = 0$ zuzenarekiko.

Ebaz.: r bektorearen norabide-bektorea u(2,1) da, eta ondorioz, s-rena w (-1,2) da. Hartara, s-ren ekuazioa $2x + y + k = 0$ da eta P-tik pasatzea exijituz $k = -5$. Orduan, Q puntua r eta s zuzenek osatzen duten sistema ebaztetik sortuko da:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Q } (9/5,7/5).$$

$$\text{P' (a,b) bada:} \quad \begin{cases} \dfrac{9}{5} = \dfrac{1+a}{2} \\ \dfrac{7}{5} = \dfrac{3+b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{13}{5} \\ b = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{P' } (13/5,-1/5) \text{ da.}$$

2. **Zuzen baten simetrikoa beste zuzen batekiko:** Hau kalkulatzeko aurrekoa erabil daiteke, zeren eta nahikoa izango baita P puntu baten simetrikoa kalkulatzea eta s eta r zuzenen arteko Q ebakidura-puntua s' zuzen simetrikokoa ere badela kontuan hartzea.



adibidea: Kalkulatu $3x - 2y + 3 = 0$ zuzenaren simetrikoa $x - 2y + 1 = 0$ zuzenarekiko.

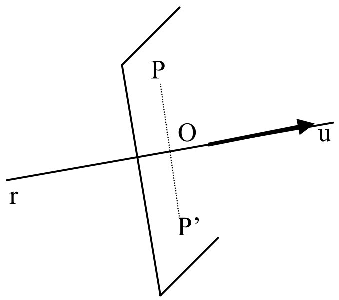
Ebaz.: s-ko P puntu bat aukeratu behar da. Har dezagun P (1,3), eta r zuzena aurreko adibidearena denez, P-ren simetrikoa P' (13/5,-1/5) da.

Q kalkulatzeko $\begin{cases} 3x - 2y + 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ sistema ebatziko da eta Q (-1,0) da. QP' bektorea

QP' (18/5,-1/5) da, eta ondorioz, s'-ren ekuazioa $\dfrac{x+1}{18/5} = \dfrac{y}{-1/5}$ izango da.

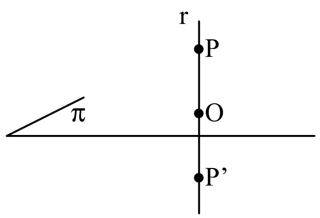
SIMETRIAK R^3-an

1. Puntua zuzenarekiko



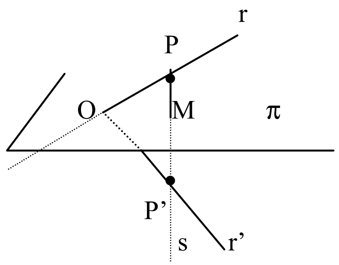
P puntu baten simetrikoa r zuzen batekiko egiteko nahikoa izango da puntu horretatik pasatu eta r zuzenarekiko perpendikularra den planoaren ekuazioa aurkitzea (kontuan hartu r-ko u norabide-bektorea planoaren karakteristikoa dela). Gero plano horren eta r zuzenaren arteko ebakidura atera (O puntua) eta O erdiko puntua dela exijitzea.

2. Puntua planoarekiko



P puntuaren simetrikoa π planoarekiko kalkulatzeko P puntutik pasatu eta π-rekiko perpendikularra den r zuzenaren ekuazioa kalkulatu ondoren, O puntua kalkula daiteke (r-k eta π-k eratzen duten sistema ebatziz). Gero nahikoa da O erdiko puntua dela kontsideratzea.

3. Zuzena planoarekiko



O ebazte-puntua kalkulatuko da lehenengoz. Ondoren nahikoa da r zuzeneko P puntu bat hartu eta planoarekiko bere simetrikoa (P') kalkulatzea. Orduan r-ren simetrikoa O eta P' puntuetatik pasatzen den r' zuzena izango da

adibidea: Kalkulatu $r : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$ zuzenaren simetrikoa $4x - y + 2z + 2 = 0$ planoarekiko.

Ebaz.: r zuzenaren ekuazioak $\left.\begin{array}{r} x + y - 2 = 0 \\ 3x - z - 1 = 0 \end{array}\right\}$ dira, eta ondorioz, O puntua ondoko sistema ebaztetik aterako da: $\left.\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 3x-z-1=0 \\ 4x-y+2z+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow O\left(\frac{2}{11},\frac{20}{11},-\frac{5}{11}\right)$

Har dezagun r-ko puntu bat, P(0,2,-1) adibidez. Kalkula dezagun orain P puntutik pasatu eta planoarekiko perpendikularra den s zuzenaren ekuazioa. Bere norabide-bektorea planoko karakteristikoa da, hau da, v(4,-1,2).

Ondorioz, s-ren ekuazioa honako hau da: $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Beraz, M puntua

$\left.\begin{array}{l} x+4y-8=0 \\ 2y+z-3=0 \\ 4x-y+2z+2=0 \end{array}\right\}$ sistemaren soluzioa da: $M\left(\frac{8}{21},\frac{40}{21},-\frac{17}{21}\right)$

P-ren simetrikoa P' (a,b,c) ateratzeko M erdiko puntua dela exijituko da:

$$\frac{8}{21}=\frac{0+a}{2}\Rightarrow a=\frac{16}{21} \qquad \frac{40}{21}=\frac{2+b}{2}\Rightarrow b=\frac{38}{21} \qquad -\frac{17}{21}=\frac{-1+c}{2}\Rightarrow c=-\frac{13}{21}$$

Bukatzeko O eta P' puntuetatik pasatu den zuzenaren ekuazioa ondoko hau da:

$$\frac{x-2/11}{134/231}=\frac{y-20/11}{-2/231}=\frac{z+5/11}{-38/231}$$

EBATZITAKO ARIKETAK

1. Izan bitez M (1,0,1,0) eta N (0,1,1,2) R^4-ko bi punturen koordenatuak erreferentzia kanonikoarekiko. Kalkulatu M eta N puntuen koordenatuak R' = {O' (2,1,3,-2); (1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)} erreferentziarekiko eta egiaztatu distantzia ez dela inbariantea erreferentzia, aldaketa honekiko (zergatik?).

Ebaz.: Erreferentzia-aldaketaren ekuazioak modu matrizialean adieraz daitezke:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x'+y'+z'+t'+2 \\ y = y'+z'+t'+1 \\ z = z'+t'+3 \\ t = t'-2 \end{cases}$$

M-ren koordenatuak R'-rekiko $\begin{cases} 1 = x'+y'+z'+t'+2 \\ 0 = y'+z'+t'+1 \\ 1 = z'+t'+3 \\ 0 = t'-2 \end{cases}$ sistema ebaztetik aterako dira $\Rightarrow$

M = $(0,1,-4,2)_{R'}$. N-rekin gauza bera egin daiteke: N $(-2,2,-6,4)_{R'}$ aterako zaigu.

Distantzia ez dela berdina ikusiko dugu:

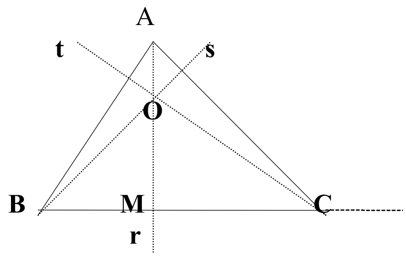
d (M,N) = $\sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{6}$

d ($M_{R'}$,$N_{R'}$) = $\sqrt{(-2-0)^2 + (2-1)^2 + (-6+4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}$

Hori bigarren oinarria ortonormala ez delako gertatzen da.

2. Egiaztatu triangelu baten hiru altuerek puntu batean (ortozentroan) ebakitzen dutela elkar.

Ebaz.: Kontsidera dezagun ondoko erreferentzia-sistema: {M; (MC, MA)} non M BC aldea eta A-tik trazatutako altueraren arteko ebakidura-puntua den.



Erreferentzia honekiko A (0,a),B (-b,0) eta C (c,o) izango dira. Hiru altueren ekuazioak kalkulatuko dira:
r : bistan denez $x = 0$ da.
s : AC = (c,-a) da, eta ondorioz, s-ren norabide-bektorea (a,c) da. B-tik pasatu denez:

$\frac{x+b}{a} = \frac{y}{c} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{c}{a}.(x+b)$ eta r eta s zuzenek O (0,cb/a) puntuan ebakitzen dute elkar.

t : BA = (b,a) eta t-ren norabide-bektorea (-a,b) da. C(c,0) puntutik pasatzen denez, bere ekuazioa $\frac{x-c}{-a} = \frac{y}{b}$ da. Eta agerikoa da O puntua zuzen honetakoa ere badela, ekuazioa betetzen baitu.

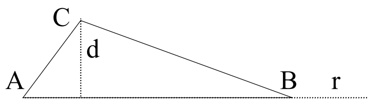
3. Izan bitez S = {X = (1,1,2,0) + λ.(1,0,0,3)} eta R = {X = (2,1,1,1) + α.(-3,1,0,1) + β.(0,1,2,0) + γ.(6,3,4,-2)} R^4-ko barietate afinak (azpiespazio afinak), zuzena eta hiperplanoa dira, hurrenez hurren. Esan perpendikularrak diren.

Ebaz.: U = {λ.(1,0,0,3)} eta W = {α.(-3,1,0,1) + β.(0,1,2,0) + γ.(6,3,4,-2)} ortogonalak diren aztertu behar da, hau da, U⊥W dela. Horretarako nahikoa da oinarrien elkarzutasuna egiaztatzea:

$$\left.\begin{array}{l} (1,0,0,3).(-3,1,0,1) = -3 + 3 = 0 \\ (1,0,0,3).(0,1,2,0) = 0 \\ (1,0,0,3).(6,3,4,-2) = 6 - 6 = 0 \end{array}\right\} \text{ eta ondorioz, } R \perp S \text{ betetzen da.}$$

4. Frogatu A (a.a'), B (b,b') eta C (c,c') puntuek eratzen duten triangeluaren azalera honela adieraz daitekeela: $S = \frac{1}{2}.\left\| \begin{matrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{matrix} \right\|$. *Aplikatu ABC triangeluan C erpina kalkulatzeko, bere azalera 12 dela, A (1,1),B(2,0) direla eta C erpinaren koordenatuak berdinak direla jakinik.*

Ebaz.: Izan bedi r A eta B puntuetatik pasatzen den zuzena. Orduan, triangeluaren azalera $S = \frac{1}{2}.d(A,B).d(C,r)$. Azken biderkagai hau kalkulatzeko r zuzenaren ekuazioa kalkulatuko da aurretik:



$$r: \frac{x-a}{a-b} = \frac{y-a'}{a'-b'} \Rightarrow$$

Hau da, r : (a’ - b’)x - (a - b)y + ab’ - ba’ = 0 da.
Beraz:

$$d(C,r) = \left| \frac{(a'-b').c-(a-b).c'+ab'-ba'}{\sqrt{(a-b)^2+(a'-b')^2}} \right| \text{ eta } d(A,B) = \sqrt{(a-b)^2+(a'-b')^2} \text{ dira eta}$$

$$\text{ondorioz, } S = \frac{1}{2}\left|a'c-b'c-ac'+bc'+ab'-ba'\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{matrix}\right\|$$

Determinantearen balio absolutoa.

Formula hau oso erabilgarria da triangeluen azalerak kalkulatzeko hiru puntuen koordenatuak ezagutzen direnean. Aplika dezagun emandako triangeluan:

Izan bedi C(x,x). Bi soluzio daude: $\frac{1}{2.}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 12$ eta $\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = -12$, eta

ondorioz, C_1 (7,7) eta C_2 (-5,-5) dira.

5. Izan bedi X = P + U = P (1,1,2,-1) + α*.(2,1,0,0) +*β*.(1,0,1,0) +* γ*.(-1,1,1,3)* R^4*-ko hiperplanoa.*
a) Esan u (2,1,3,1) bektorea U^T*-koa den.*
b) Kalkulatu U^T*-ko w bektore bat.*
c) Adierazi hiperplanoaren ekuazio inplizituak.

Ebaz.: a) u ez da U^T-koa, (2,1,3,1).(2,1,0,0) = 5 ≠ 0 baita.

b) U^T -ko w (a,b,c,d) bektore bat aurkitzeko U-ko oinarri batekiko ortogonala izatea exijituko da:

$$\begin{aligned} (a,b,c,d).(2,1,0,0) = 0 &\Rightarrow 2a + b = 0 \\ (a,b,c,d).(1,0,1,0) = 0 &\Rightarrow a + c = 0 \\ (a,b,c,d).(-1,1,1,3) = 0 &\Rightarrow -a + b + c + 3d = 0 \end{aligned}$$

eta ondorioz, w = (a,- 2a,- a,4/3 a). Hau da, soluzio asko daude. Bat aurkitzeko nahikoa da a parametroari balio bat ematea. a = 3 hartuz, w = (3,-6,-3,4) izan daiteke.

c) Ekuazio inplizituak ateratzeko bi modutan egingo da:

- w erabiliz: PX .w = 0 exijituz. Hartara, ekuazioa ondoko hau izango da:

(x - 1).3 - (y - 1).6 - (z - 2).3 + (t + 1).4 = 0 $\Rightarrow$ 3x - 6y - 3z + 4t + 13 = 0

- PX U-ko oinarriaren konbinazio lineala dela exijituz, hau da, lau bektoreen determinantea zero dela adieraziz:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 & t+1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - (y-1).\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (z-2).\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - (t+1).\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1).3 - (y-1).6 + (z-2).(-3) - (t+1).(-4) = 0 \text{ eta}$$

bistan dago berdinak direla.

6. Kalkulatu r : (x,y,z,t) = (λ,- λ,2 + λ,0) eta s : (x,y,z,t) = (1 - λ, 2 + λ, -1 - λ, 3λ) zuzenen arteko distantzia.

Ebaz.: 276. orrialdeko oharrean, bi zuzenen arteko distantzia aztertzean, zuzen bakoitzean M eta N puntuak existitzen direla ikusi da, non horietatik pasatu den zuzena emandako bi zuzenekiko perpendikularra den. Gainera, bi zuzenen arteko distantzia d (M,N) da.

Puntu horiek M = P + α.u eta N = Q + β.w dira, non eta α eta β ondoko sistemaren soluzioak diren: $\begin{cases} PQ.u + \alpha.|u|^2 + \beta.(u.w) = 0 \\ PQ.w + \alpha.(u.w) + \beta.|w|^2 = 0 \end{cases}$.

Kasu honetan P = (0,0,2,0), Q (1,2,-1,0), u = (1,-1,1,0) eta w = (-1,1,-1,3) direnez, sistemak ondoko itxura hartzen du:

$$\begin{cases} -4 + 3\alpha - 3\beta = 0 \\ 4 - 3\alpha + 12\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 4/3 \text{ eta } \beta = 0 \text{ dira.}$$

Ondorioz, M = (4/3,-4/3,10/3,0) eta N = (1,2,-1,0) dira.

Beraz, d (r,s) = d (M,N) = $\sqrt{(4/3-1)^2+(-4/3-2)^2+(10/3+1)^2+(0-0)^2} = \sqrt{30}$

7. Kontsidera dezagun R^3-ko $R = \{O\ ;\ (u_1,u_2,u_3)\}$ erreferentzia bat, non u_i unitate bektoreak diren eta u_1 eta u_2 bektoreek 60º-ko angelua eratzen duten, u_1 eta u_3 bektoreek 120º-koa eta u_2 eta u_3 bektoreek 120º-koa. Kalkulatu d(A,B), A eta B puntuen koordenatu kontrabarianteak A(1,2,1) eta B(1,0,-2) direla jakinik.

Ebaz.: Metrika-matrizea ondoko hau da:

$$G = \begin{pmatrix} u_1.u_1 & u_1.u_2 & u_1.u_3 \\ u_2.u_1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

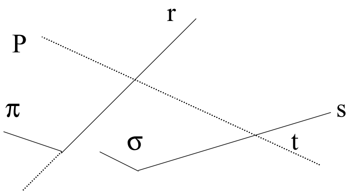
Orduan, d (A,B) = |AB| = |(0,-2,-3)| = + $\sqrt{(0,-2,-3).(0,-2,-3)}$, baina biderkadura eskalarra ondoko hau da:

$$(0,-2,-3).\,(0,-2,-3) = (0,-2,-3).\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = (0,-2,-3).\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -2 \end{pmatrix} = 7$$

eta ondorioz, d (A,B) = $\sqrt{7}$

8. Izan bedi r (1,1,3) puntutik pasatu eta 2x - y + 3z - 2 = 0 planoarekiko perpendikularra den zuzena. Izan bedi s, x - y - z = 0 eta 4x - z -1 = 0 planoek eratzen duten zuzena.
a) Kalkulatu P (2,4,0) puntutik pasatu eta eta r eta s zuzenak ebakitzen dituen t zuzena.
b) P puntuaren simetrikoa r zuzenarekiko.
c) P puntuaren simetrikoa 2x + y - 4z - 4 = 0 planoarekiko.

Ebaz.: a) r eta s ebakitzen dituenez, t zuzena horien plano-sortetan egongo da. Izan bedi π r zuzenaren plano-sortako P puntutik pasatzen den planoa eta σ s zuzenaren plano--sortako P puntutik pasatzen den planoa. Orduan, t zuzena π eta σ planoek osatuko dute.



Aurretik r zuzenaren ekuazioa atera behar da:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y-3=0 \\ 3y+z-6=0 \end{array}\right\} \text{ eta}$$

ondorioz, r-ren plano-sorta $\alpha(x+2y-3)+\beta(3y+z-6)=0$ adieraziko da. π kalkulatzeko nahikoa izango da P (2,4,0) puntutik pasatzen dela exijitzea:

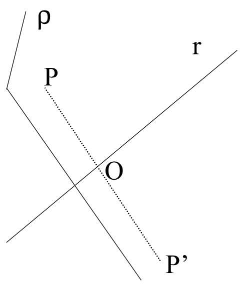
$\alpha(2+2.4-3)+\beta(3.4+0-6)=0 \Rightarrow 7\alpha+6\beta=0 \Rightarrow \alpha=-6/7.\beta$ eta $\beta=7$ eginez:
$-6.(x+2y-3)+7.(3y+z-6)=0 \Rightarrow$ **π : 6x - 9y - 7z + 24 = 0.**

Modu berean σ kalkulatzeko s-ren plano-sorta hauxe da: $\alpha.(x-y-z)+\beta.(4x-z-1)=0$ eta P puntutik pasatzea exijituz: $-2.\alpha+7.\beta=0 \Rightarrow \alpha=7/2.\beta$ eta $\beta=2$ eginez $7(x-y-z)+2(4x-z-1)=0$, eta ondorioz, **σ : 15x -7y - 9z - 2 = 0.**

Beraz, eskatutako t zuzenaren ekuazioak $\begin{cases} 6x-9y-7z+24=0 \\ 15x-7y-9z-2=0 \end{cases}$ dira.

b) P puntuaren simetrikoa r-rekiko kalkulatzeko r-rekiko perpendikularra eta P puntutik pasatzen den ρ planoa kalkulatuko da. Bere norabide-bektorea (2,-1,3) da eta, ondorioz, bere ekuazioa $2x-y+3z+k=0$ da eta, P-tik pasatzea exijituz, k kalkulatuko da: $4-4+0+k=0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow \rho: 2x-y+3z=0$.

Orain r zuzenaren eta ρ planoaren arteko ebakidura kalkulatuko da. Izan bedi O puntu hori:

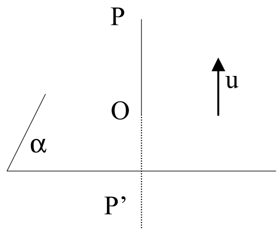


$$O: \begin{cases} x+2y-3=0 \\ 3y+z-6=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow O\left(-\frac{3}{7},\frac{12}{7},\frac{6}{7}\right) \text{ da.}$$

Eta bistan denez, P' kalkulatzeko nahikoa da O P eta P' puntuen erdiko puntua dela exijitzea:

$$\frac{-3}{7}=\frac{2+a}{2} \quad \frac{12}{7}=\frac{4+b}{2} \quad \frac{6}{7}=\frac{c}{2} \Rightarrow P'\left(-\frac{20}{7},-\frac{4}{7},\frac{12}{7}\right)$$

c) P-ren simetrikoa $\alpha: 2x+y-4z-4=0$ planoarekiko egiteko hainbat modu daude. P-ren O proiekzioa planoaren gainean da aurkitu behar dena. Argi dago $O=P+\lambda.u=(2,4,0)+\lambda.(2,1,-4)$ eta λ aurkitzeko (hau da, O) nahikoa da α planoan egotea exijitzea:



$2.(2 + 2\lambda) + (4 + \lambda) - 4.(- 4\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = - 4/21$

eta ondorioz, $O\left(\frac{34}{21}, \frac{80}{21}, \frac{16}{21}\right)$.

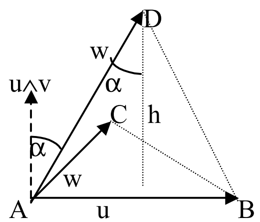
Metodo honek zuzen perpendikularra eta ekuazio--sistema ebatzi behar izatea saihesten du.

Amaitzeko, nahikoa da O erdiko puntua dela exijitzea:

$$\frac{34}{21} = \frac{2+a}{2} \quad \frac{80}{21} = \frac{4+b}{2} \quad \frac{16}{21} = \frac{c}{2} \quad \text{eta ondorioz } P'\left(\frac{26}{21}, \frac{76}{21}, \frac{32}{21}\right) \text{ da.}$$

9. Tetraedro baten erpinak A (2,0,0), B (1,1,0) eta C (-2,3,1) dira eta laugarrena (D) 2x - y + z - 1 = 0 planoaren gainean mugitzen da. Kalkulatu D puntuak eratzen duen leku geometrikoa, tetraedroaren bolumena 1 dela exijituz.

Ebaz.: u,v,w bektoreek eratzen duten tetraedro baten bolumena Bol = 1/3.(oinarriaren azalera). (altuera) da. Hartara: $Bol = \frac{1}{3}.(\frac{1}{2}.|u \wedge v|).h) = \frac{1}{6}.|u \wedge v|.h$



Baina alde batetik, $(u\wedge v).w = |u \wedge v|.|w|.\cos\alpha = |u\wedge v|.h$ da eta bestetik, $(u\wedge v).w = [u,v,w]$ biderkadura nahasia da, eta ondorioz:

$$Bol = \frac{1}{6}.[u,v,w] = \frac{1}{6}.\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Kasu honetan, D puntuaren koordenatuak (x, 2x + z -1, z) direnez, u =AB = (-1,1,0), v =AC = (-4,3,1) eta w =AD = (x - 2, 2x + z - 1, z) izango dira, eta ondorioz:

$$1 = B = \frac{1}{6}.\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ x-2 & 2x+z-1 & z \end{vmatrix} \Rightarrow 3x + 2z = 9 \Rightarrow x = 3 - \frac{2}{3}z$$ eta D puntuaren koordenatuak $(3 - \frac{2}{3}z,\ 5 - \frac{1}{3}z,\ z)$ dira, non $z \in R$ den eta honek zuzen

bat adierazten du. Beraz, eskatutako leku geometrikoa $\begin{cases} x = 3 - \dfrac{2}{3}\lambda \\ y = 5 - \dfrac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ zuzena da.

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Izan bedi ABCD R^2-ko karratu bat, non A (1,0) eta B (2,-3) diren. Kalkulatu gainerako erpinak.

2. Kalkulatu C erpina ABC triangeluan (A (2,1), B (3,-1)) bere azalera 10 izateko.

3. Karratu baten zentroa O (1,4) da eta A (3,-2) erpin bat da. Kalkulatu gainerako erpinak.

4. Kalkulatu (3/2,2) puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa, OX eta OY ardatzerdikoekin determinatzen duen triangeluaren azalera 6 unitatekoa izanik.

5. Izan bedi ABC R^2-ko triangelu bat non A (2,4), B (3,-2) diren eta T (1,-1) bere ortozentroa den. Kalkulatu C erpina.

6. Kontsidera dezagun $R = \{O ; (u_1, u_2)\}$ erreferentzia, non $|u_1| = |u_2| = 1$ diren eta u_1 eta u_2 bektoreek 30º-ko angelua eratzen duten. Kalkulatu $A\ (1,4)_R$ puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa, $2x - 3y + 5 = 0$ zuzenarekiko perpendikularra dela jakinik.

7. Kontsidera ditzagun A (2,3), B (0,-1) eta C (-2,4) puntuak eta $t : 4x - y + 1 = 0$ zuzena. Izan bitez r A eta B-tik pasatzen den zuzena eta s C-tik pasa eta emandako t zuzenarekiko perpendikularra den zuzena.

a) Kalkulatu r eta s-ren arteko ebaketa-puntutik pasatu eta OY ardatzarekiko 45º-ko angelua eratzen duen zuzenaren ekuazioa.

b) AB segmentuaren erdibitzailearen ekuazioa.

8. Kalkulatu A (1,1,2) eta B (1,-3,0) puntuetatik pasatu eta $x + 2y - 3z + 3 = 0$ planoarekiko perpendikularra den planoaren ekuazioa.

9. Kalkulatu ondoko proiekzio eta distantzia hauek:

a) P (2,-3) puntua $r : x - 3y + 4 = 0$ zuzenaren gainean eta d (P,r).

b) P (1,2,-1) puntua $r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$ *zuzenaren gainean eta d (P,r).*

c) P (2,1,0) puntua $\pi : x - 4y + 3 = 0$ planoaren gainean eta d (P,π)..

d) P (1,1,3,0) puntua $r:\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{-1}=\dfrac{t-1}{-3}$ *zuzenaren gainean eta d (P,r).*

e) P (2,0,0,-3) puntua $\pi\begin{cases} x-y+z+2t-1=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ *planoaren gainean eta d(P,π)*

f) P (2,1,-1,1) puntua k : x - y + 3z - t + 3 = 0 hiperplanoaren gainean eta d (P,k).

10. Kontsidera ditzagun R^2*-ko 3x - y - 8 = 0 eta 2x - y - 6 = 0 zuzenak eta P (1,1) puntua. Izan bedi O bi zuzenen arteko ebakidura-puntua. Kalkulatu O-tik pasatzen den r zuzenaren ekuazioa, d (P,r) = 1 dela jakinik.*

11. Kalkulatu ondoko distantzia hauek:

a) d (r,s) non r : 2x - y + 1 = 0 eta s : 6x - 3y + 2 = 0 diren.

b) d (r,s) non $r:\ \begin{cases} x+3z-2=0 \\ x-y-3z=4 \end{cases}$ *eta* $s:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ *diren.*

c) d (r,π) non $r:\ (x,y,z)=(1-\lambda,\ 2+3\lambda,\ -\lambda)$ *eta* $\pi:\ 3x-y-6z-1=0$ *diren.*

d) d (α,π) non $\alpha:\ x-2y-z+1=0$ *eta* $\pi:\ 2x-4y-2z-1=0$ *diren.*

e) d (r,s) non $r:\ \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=z=\dfrac{t+1}{-3}$ *eta* $s:\ \dfrac{x}{3}=y-2=\dfrac{z+4}{2}=\dfrac{t}{-1}$ *diren.*

f) d (α,π) non $\alpha:\ \begin{cases} x-y+2z+3t-3=0 \\ 3x+t=0 \end{cases}$ *eta* $\pi:\ \begin{cases} -x-2y+4z+5t-1=0 \\ -8x-y+2z+2=0 \end{cases}$ *diren.*

12. Izan bedi r (2,3) eta (-1,0) puntuetatik pasatzen den zuzena eta s, (3,5) puntutik pasatu eta 2x + 5y + 4 = 0 zuzenarekiko perpendikularra den zuzena. Izan bedi M puntua s eta r-ren arteko ebakidura-puntua. Kalkulatu:

a) M-tik pasatu eta OX ardatzarekin 45º-ko angelua eratzen duen zuzena.

b) aurreko zuzena eta OX-ren arteko ebakidura-puntua P puntua izanik, kalkulatu d (M,P).

13. Kalkulatu r zuzen baten ekuazioa ondoko baldintzak betetzen badira:

- *P (3,2,-1) puntutik pasatzen da.*
- *planokidea da* $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 4x-2y-z+5=0 \end{cases}$ *zuzenarekiko.*

- *paraleloa da* $x - y + 4z - 1 = 0$ *planoarekiko.*

14. *Kalkulatu* $\begin{cases} x = 1 + \alpha + 2\beta \\ y = 3 - 2\beta \\ z = -2 + 3\alpha - \beta \end{cases}$ *planoak eta (1,1,2), (-1,3,1) eta (1,0,1) puntuetatik pasatzen den planoak eratzen duten angelua.*

15. *Kalkulatu* $\begin{cases} 2x - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ *zuzenak eta* $x - 3y + 3z - 2 = 0$ *planoak eratzen duten angelua.*

16. *Izan bitez* $r : \begin{cases} x = 2z + m \\ y = -z + 1 \end{cases}$ *eta* $s : \begin{cases} x + z = 2 \\ y = n + z \end{cases}$ *zuzenak. Esan zein baldintza bete behar duten m eta n parametroek bi zuzenak plano baten barne izateko.*

17. *Kalkulatu* $x - y + 2z + 3 = 0$ *eta* $2x - 3z + 4 = 0$ *planoekiko distantziakideak diren* $r : \dfrac{2x+4}{6} = y = z + 4$ *zuzeneko puntuak.*

18. *Izan bedi ondoko segmentu hau:* $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{2} = \lambda$ *non* $\lambda \in [0,1]$ *den. Segmentu hau ortogonalki proiektatzen da* $z = 0$ *planoaren gainean eta proiekzioa triangelu angeluzuzen eta isoszele baten hipotenusa da. Kalkulatu triangelu horren azalera eta hirugarren erpinaren simetrikoa* $x - 4y + 2z - 3 = 0$ *planoarekiko.*

19. *Kontsidera ditzagun ondoko zuzen hauek* $r : \dfrac{x}{m} = y = \dfrac{z+1}{2}$ *eta* $s : \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ *Kalkulatu m parametroa planoa posible izan dadin. r barnean duen eta s-rekiko perpendikularra den.*

20. *Izan bitez* $r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y = 2z \end{cases}$ *eta* $s : x = y = 2z$ *bi zuzenak. Kontsidera ditzagun A ebakidura-puntua eta B (2,2,4) s-ko puntua.*

    a) Kalkulatu B-tik pasatuz s-rekiko perpendikularra den eta r ebakitzen duen t zuzena.

    b) Izan bedi C puntua r eta t zuzenen arteko ebakidura. Kalkulatu BC segmentuaren erdibitzailea.

c) Har dezagun beste erreferentzia berri bat, $R'=\{A\ ;\ (w_1, w_2, w_3\ )\}$, non w_1 AB norabideko unitate bektorea den, w_2 BC norabideko unitate bektorea den eta $w_3 = w_1 \wedge w_2$ den. Kalkulatu r eta s zuzenen ekuazioak R'-rekiko.

d) Kalkulatu A eta B puntuen arteko distantzia bi erreferentzietan.

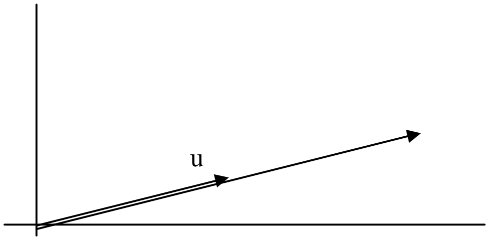
e) Kalkulatu r eta s zuzenek eratzen duten angelua bi erreferentzietan.

10. BALIO ETA BEKTORE KARAKTERISTIKOAK

10.1. DEFINIZIOA

Hainbat kasutan oso interesgarria izan ohi da f: $V \rightarrow V$ endomorfismo batentzat u ($u \neq o$) bektore bat aurkitzea, non f (u) eta u paraleloak diren. Beste era batera esanda, $u \in V$ eta $\lambda \in K$ aurkitzea, zeinentzat $f(u) = \lambda.u$ den. Esaterako, populazio baten hazkundea ikertzeko edo koniken erredukzioa egiteko.

Hau aplikazioak aipatu gabe ere plantea daiteke. Edozein n ordenako F matrize karratu batentzat $u \in K^n$ eta $\lambda \in K$ balioak aurkitzea, non $F.u = \lambda.u$ erlazioa betetzen den.



10.1. DEFINIZIOA: $F.u = \lambda.u$ baldintza betetzen dutenei honela deitzen zaie:

λ: balio karakteristikoa (edo balio propioa edo autobalioa)
u: λ balioari dagokion bektore karakteristikoa (edo bektore propioa edo autobektorea)

Oharra: u = o ez da kontsideratzen bektore propio, baina λ, aldiz, 0 izan daiteke.

Hemendik aurrera berdin izango da f endomorfismoz edo dagokion F matrizeaz mintzatzea.

adibidea: Esan u(2,1), v(3,2) eta w(1,-1) bektoreak F = $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$ matrizearen bektore propioak diren.

Ebaz.: $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, eta ondorioz, (2,1) bektorea λ = 1 balio propioari dagokion bektore propioa da.

Modu berean $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -2. \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, eta (3,2) bektorea λ = -2 balio propioari dagokion bektore propioa da.

Azkenik, $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 17 \end{pmatrix}$, eta ondorioz, (1,-1) ez da bektore propioa.

Balio propio bakoitzak bektore propio asko ditu. Izan ere, u propioa bada (hots, F.u = λ.u), k.u ere propioa da, zeren eta F.(ku) = k. F (u) = k. (λ.u) = (k. λ).u = λ.(k.u) baita.

AZPIESPAZIO PROPIOA

10.1. PROPOSIZIOA: λ balio propio bakoitzari dagozkion bektore propioek, zero bektorea gehituz gero, bektore-azpiespazio bat eratzen dute.

Frog.: Demagun u,v λ-ri dagozkion bi bektore propioak direla (hots, F.u = λ.u eta F.v = λ.v) . Orduan, F (k.u + m.v) = k.F (u) + m.F (v) (lineala izateagatik) = k.λ.u + m. λ.v = λ.(k.u + m.v) ⇒ k.u + m.v bektorea ere propioa da.

Azpiespazio honi λ-ren ***espazio propioa*** (***edo karakteristikoa***) deritzo.

10.2. POLINOMIO ETA EKUAZIO KARAKTERISTIKOA

10.2. PROPOSIZIOA: λ eskalarra F matrizeko balio propio bat bada, orduan det (F - λ.I) = 0 da eta λ-ri dagozkion u bektore propioak (F - λ.I).u = o ekuazioaren soluzioak dira (hau da, Ker (F - λ.I)).
Horrez gain, λ balio propioak |F - λ.I| = 0 ekuazioaren soluzioak dira

Frog.: λ eskalarra F matrizeko balio propio bat bada, u bektoreak (u ≠ o) existitzen dira, non F.u = λ.u betetzen den. Horrez gain, (λ.I).u = λ. I.(u) = λ.u, eta ondorioz, F.u = (λ.I).u ⇒ (F - λ.I).u = o.

Baina hau n ordenako ekuazio-sistema homogeneo bat da eta bere matrizearen determinanteak (hots, $|F - \lambda.I|$) zero izan beharko du, zero ez ezik soluzio gehiago ere izateko. Beraz, $|F - \lambda.I| = 0$.

$|F - \lambda.I| = 0$ ekuazioari ***ekuazio karakteristiko*** deritzo eta $|F - \lambda.I|$ adierazpenari, λ-ren polinomio kontsideratzen bada, ***polinomio karakteristiko*** deritzo**.**

adibidea: Kalkulatu $F = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ matrizearen balio eta bektore propioak.

Bere ekuazio karakteristikoa $|F - \lambda.I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ da.

Garatuz gero: $(2- \lambda).(-3 - \lambda) + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ eta $\lambda_2 = - 2$ dira bere balio propioak.

Balio bakoitzaren espazio propioa aurkitzeko $(F- \lambda_1.I).u = o$ eta $(F - \lambda_2.I).u = o$ ekuazioak askatu behar dira:

1) Aska dezagun lehenengoa: $(F- \lambda_1.I).u = o \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 4 \\ -1 & -3-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+4y=0 \\ -x-4y=0 \end{matrix}\right\}$. Hau da, bi ekuazioak berdinak dira: $x = - 4y$, eta ondorioz, $\lambda_1 = 1$ balioari dagokion S_1 espazio propioa hauxe da: $S_1 = \{(-4y,y) / y\in K\}$ (dimentsio batekoa).

2) $\lambda_2 =-2$ balioarekin gauza bera egin behar da:

$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 4 \\ -1 & -3-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x+4y=0 \\ -x-y=0 \end{matrix}\right\}$. Hemen ere ekuazio bakarra dugu: $x = - y$. Hemendik $\lambda_2 =-2$ balioaren espazio karakteristikoa $S_2 = \{(-y,y) / y\in K\}$ dela ondorioztatzen da.

Bistan denez, oro har, balio propioak kalkulatzeko n ordenako ekuazio bat ebatzi behar da. Kontuan hartu hau ez dela beti posible.

Beste alde batetik balio propio bat ezagutuz gero, dagokion espazio propioa aurkitzeko sistema bat ebatzi besterik ez da egin behar.

adibidea: Kalkulatu $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearen balio eta bektore propioak.

$$| F - \lambda I | = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^3 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 2 \text{ da balio propio bakarra.}$$

$(F - 2.I).u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \ S = \{(x,0,z) \ / \ x,z \in K\}$ da $\lambda = 2$ balio propioari dagokion espazio karakteristikoa. Espazio honen oinarri bat {(1,0,0), (0,0,1)} da (bi dimentsiokoa), zeren eta (x,0,z) = x.(1,0,0) + z.(0,0,1) baita.

AZPIESPAZIO PROPIOEN DIMENTSIOAK

Azpiespazio baten dimentsioa jakiteko nahikoa da A - λ_0.I matrizearen nukleoa dela kontuan hartzea (hau da, bere u bektoreek (A - λ_o.I).u = o betetzen dute). Beraz, dim V = dim Ker f + dim Imf denez: dim S(λ_0) = dim V - dim (A - λ_0 .I) (hemen A - λ_0.I da f-ri dagokion matrizea eta dim Imf = dim (A - λ_0.I) da).

ANIZKOIZTASUNA

Balio propio bat polinomio karakteristikoaren erro anizkoitza (m aldiz) bada, balio propio horrek anizkoiztasuna m duela esaten da.

Horrez gain, balio propio baten anizkoiztasunak eta dagokion espazioaren dimentsioak ez dute zertan berdinak izan. Aurreko adibidean $\lambda = 2$ balio propioak anizkoiztasuna 3 zuen eta zegokion espazioaren dimentsioa 2 zen. Espazio propioaren dimentsioa ezin dela anizkoiztasuna baino handiagoa izan froga daiteke.

Matrizea n ordenakoa baldin bada, bere polinomio karakteristikoak n maila izango ditu eta n erro (errealak edo irudikariak) izango ditu, nahiz eta batzuk, anizkoitzak direnak, errepikatu.

Polinomio karakteristikoa $| F - \lambda.I| = P(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}. \lambda^{n-1} + ... + c_1. \lambda + c_0$ idatziko da. Erroak $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_m$ badira $r_1, r_2, ... r_m$ anizkoiztasunarekin, hurrenez hurren, orduan, $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r1} . (\lambda - \lambda_2)^{r2} ..... (\lambda - \lambda_m)^{rm}$

Askotan ez da batere erraza $P(\lambda) = 0$ ekuazioa ebaztea, eta $n > 2$ denean, zenbakizko metodoak erabili behar dira erroen hurbilketa bat egiteko.

10.3. PROPOSIZIOA: Balio propio desberdinei dagozkien bektore propioak independenteak dira.

Frog.: Izan bitez λ_1, λ_2, ... λ_m F matrize baten balio propioak (desberdinak) eta u_1, u_2, ...,u_m dagozkien bektore propioak (beraz, $u_i \neq o$ $\forall i$). Indukzio-metodoa erabiliko dugu frogapena gauzatzeko.

- $\boxed{\text{demagun m = 2 dela.}}$ Orduan, $k_1.u_1 + k_2.u_2 = o \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$ frogatu behar da.

Demagun $k_2 \neq 0$ dela (zero balitz, k_1 hartuko genuke). Orduan, $k_1 \neq 0$ da, zeren eta bestela $k_2.u_2 = o$ bailitzateke eta ez da posible $u_2 \neq o$ delako.
Orduan, $u_2 = k.u_1$ (non $k = -k_1 / k_2$ eta $k \neq 0$ den). Alde batetik $\lambda_2.u_2 = \lambda_2.k.u_1$ eta bestetik $\lambda_2.u_2 = F(u_2) = F(k.u_1) = k.\ F(u_1) = k.\ \lambda_1.u_1$. Beraz, $\lambda_2.k.u_1 = k.\ \lambda_1.u_1 \Rightarrow \lambda_2.u_1 = \lambda_1.u_1$ $\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1$ eta hori ez da posible. Ondorioz, $k_2 = 0$ da. Horrez gain, $k_1.u_1 + 0.u_2 = o$ bada, $k_1 = 0$ izango da.

- $\boxed{\text{demagun orain hipotesia betetzen dela m - 1 bektoreentzat.}}$ Hots, $k_1.u_1 + k_2.u_2 + ... + k_{m-1}.u_{m-1} = o$ bada, orduan $k_1 = k_2 = ... = k_{m-1} = 0$ dela.

$k_1.u_1 + k_2.u_2 + ... + k_m.u_m = o \Rightarrow k_1 = k_2 = ... = k_m = 0$ frogatu behar da

$k_1.u_1 + k_2.u_2 + ... + k_m.u_m = o$ erlaziotik abiatzen gara. Suposa dezagun $k_i \neq 0$ bat dagoela eta erosotasunagatik k_m hartuko dugu.
Orduan, $u_m = t_1.u_1 + t_2.u_2 + ...+ t_{m-1}.u_{m-1}$ (non $t_i = -k_i / k_m$) .

Orain $\lambda_m.u_m$ egiten bada, alde batetik $\lambda_m.u_m = \lambda_m.(t_1.u_1 + t_2.u_2 + ...+ t_{m-1}.u_{m-1})$ eta bestetik $\lambda_m.u_m = F(u_m) = F(t_1.u_1 + t_2.u_2 + ...+ t_{m-1}.u_{m-1}) = (\lambda_1.t_1.u_1 + \lambda_2.\ t_2.u_2 + ...+ \lambda_{m-1}.\ t_{m-1}.u_{m-1})$ eta kenketa egiten bada, $(\lambda_m.t_1 - \lambda_1.t_1).u_1 + ... + (\lambda_m.t_{m-1} - \lambda_{m-1}.t_{m-1}).u_{m-1} = o$ gelditzen da. Indukzio-hipotesiaren arabera hauek independenteak dira:

$\lambda_m.t_1 - \lambda_1.t_1 = 0 \quad \Rightarrow t_1.(\lambda_m - \lambda_1) = 0$ eta $\lambda_1 = \lambda_m$ posible ez denez $\Rightarrow t_1 = 0$
$\lambda_m.t_2 - \lambda_2.t_2 = 0 \quad \Rightarrow t_2.(\lambda_m - \lambda_2) = 0$ eta $\lambda_2 = \lambda_m$ posible ez denez $\Rightarrow t_2 = 0$
....
$\lambda_m.t_{m-1} - \lambda_{m-1}.t_{m-1} = 0 \Rightarrow t_{m-1}.(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0$ eta $\lambda_{m-1} = \lambda_m$ posible ez denez $\Rightarrow t_{m-1} = 0$

beraz, $k_1 = k_2 = ... = k_{m-1} = 0$ eta $0.u_1 + ...+ 0.u_{m-1} + k_m.u_m = o$ denez, $k_m = 0$ da.

ANTZEKO MATRIZEAK

Balio propioak endomorfismo baten egiturari lotuta daude, baina ikusi zen bezala (114. orrialdean) endomorfismoaren adierazpen matriziala aldatu egiten da oinarri-aldaketa bat egiten denean. Izan bedi A f endomorfismo baten matrizea oinarri batean eta izan bedi B dagokion matrizea oinarri berrian. Oinarri-aldaketa honen adierazpen matriziala P matrizearen bitartez ematen bada, orduan A eta B matrizeak lotuta egongo dira $B = P^{-1}.A.P$ erlazioaren bitartez. A eta B matrizeak *antzekoak* direla esaten genuen.

10.4. PROPOSIZIOA: A eta B matrizeak antzekoak badira, polinomio karakteristiko bera dute, eta ondorioz, balio propio berdinak dituzte.

Frog.: Antzekoak direnez, $\exists P \in M_n$ matrizea non $B = P^{-1}.A.P$ den. Ondorioz, $|B - \lambda.I| = |P^{-1}.A.P - \lambda.I| = |P^{-1}.A.P - P^{-1}.\lambda.I.P| = |P^{-1}.(A - \lambda.I).P| = |P^{-1}| . |A - \lambda.I| . |P| = |P^{-1}| . |P| . |A - \lambda.I| = |A - \lambda.I|$. Beraz, polinomio karakteristiko berdina dute.

Oharra: Elkarrekiko proposizioa ez da betetzen. Bi matrizeak ez dute zertan antzekoak izan, nahiz eta balio propio berdinak izan (eta anizkoiztasun berdinarekin)

adibidea: Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $f : R^2 \to R^2$ aplikazio lineal baten matrizea oinarri kanonikoan. Kalkulatu dagokion B matrizea $\{(1,1),(3,0)\}$ oinarrian beraien antzekotasuna agerian jarriz. Gero esan zein diren beraien balio propioak.

Ebaz.: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ eta $P^{-1} = \dfrac{1}{18} . \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ dira.

Beraz, $B = P^{-1}.A.P = \dfrac{1}{18} . \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}$.

A-ren eta B-ren ekuazio karakteristikoak $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ ekuazio bera da eta balio propioak 3 eta -2 dira.

AZTARNA

Polinomio karakteristikoa aztertzen bada, determinante baten garapena denez, oso erraz ikusten da zein diren n eta (n - 1)-garren mailako batugaiak:

$$|A - \lambda.I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n . \lambda^n + (-1)^n (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots$$

A-k eta B-k, antzekoak badira, polinomio karakteristiko bera dute. Beraz, koefiziente guztiak berdinak dituzte. (n - 1)-garren mailako gaiaren koefizienteari ***aztarna deritzo*** eta honela idazten da: $\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots\dots + a_{nn}$.

Agerian gelditu da aztarna inbariantea dela oinarri-aldaketarekiko.

10.3. DIAGONALTZE-PROZESUA

Orain jakin nahi duguna da ea posible den oinarri-aldaketa bat aurkitzea zeinarentzat B matrizea diagonala den, hots, matrize horren diagonal nagusiko gaiak izan ezik, gainerakoak zero diren. Beste modu batera esanda, gure helburua A matrize bakoitzarentzat P matrize bat existitzen den aztertzea da, non $P^{-1}.A.P$ diagonala den eta P matrize hori kalkulatzea.

10.2. DEFINIZIOA: A matrizea *antzekotasunaz* ***diagonalgarria*** dela esaten da n ordenako beste P matrize erregular bat existitzen bada, non $P^{-1}.A.P$ diagonala den.

Orain aztertuko da zein kasutan den posible matrize bat diagonaltzea. Erantzuna ondoko teorema honek emango digu:

10.1. TEOREMA: nxn matrize karratu bat diagonalgarria da, baldin eta soilik baldin n bektore propio independente baditu.

Horrez gain, P matrizearen zutabeak n bektore horiek izango dira.

Frog.: $\Rightarrow$ demagun A diagonalgarria dela. Orduan, P matrize erregular bat existituko da, non $B = P^{-1}.A.P$ diagonala den. Orduan, $P.B = A.P$ beteko da eta bi atal hauek garatzen badira:

$$P.B = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}.\lambda_1 & p_{12}.\lambda_2 & \cdots & p_{1n}.\lambda_n \\ p_{21}.\lambda_1 & p_{22}.\lambda_2 & \cdots & p_{2n}.\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}.\lambda_1 & p_{n2}.\lambda_2 & \cdots & p_{nn}.\lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A.P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$ eta goikoa izateko ondoko hau beteko da:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}.\lambda_1 \\ p_{21}.\lambda_1 \\ \vdots \\ p_{n1}.\lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 . \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}$$

. Gauza bera gertatzen da gainerako zutabeekin. Beraz, P matrizeko zutabeei p_1, p_2, ..., p_n deitzen bazaie, $A.\ p_i = \lambda_i\ .\ p_i$ idatzi ahal izango da.
Orduan, P matrizeko n zutabeak A-ren bektore propioak dira eta P erregularra denez, bere heina n izango da, eta ondorioz, n bektore horiek independenteak dira.

$\Leftarrow$ demagun orain n bektore propio independente dituela. Izan bitez p_1, p_2, ..., p_n bektore horiek (non $p_i = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix}$ den) eta $\lambda_1\ \lambda_2$ ..... λ_n dagozkien balio propioak.

Bektore horiek eratzen duten matrizea P bada, eta A.P gauzatzen bada, $A.p_i = \lambda_i.p_i$ kontuan hartuz, ondoko hau dugu:

$$A.P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}.\lambda_1 & p_{12}.\lambda_2 & \cdots & p_{1n}.\lambda_n \\ p_{21}.\lambda_1 & p_{22}.\lambda_2 & \cdots & p_{2n}.\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}.\lambda_1 & p_{n2}.\lambda_2 & \cdots & p_{nn}.\lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = P.\ B,$$

non B diagonala den.

Beraz, A.P = P.B eta P erregularra denez, adierazpen hau $B = P^{-1}.A.P$ moduan jarri ahal da, eta ondorioz, A diagonalgarria da.

10.1. KOROLARIOA: n ordenako matrize batek n balio propio desberdin baditu diagonalgarria da.

Agerikoa da n balio propio horiei dagozkien bektore propioak independenteak direla ikusitako 10.3. proposizioaren arabera.

Konklusio gisa ondoko hau esan daiteke:

A matrize batek n bektore propio baditu, hau da, $A.u_i = \lambda_i.u_i$, oinarri bat osatuko dute eta A-ren adierazpena oinarri horrekiko forma diagonala izango da:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

adibidea: Aztertu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea diagonalgarria den.

Bere ekuazio karakteristikoa hauxe da: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - \lambda)^2 = 0$, eta ondorioz, bere balio propio bakarra $\lambda = 2$ da (bikoitza). Dagozkion bektore propioak $(A - 2I).u = o$ egitetik aterako dira:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = 0$ da, eta ondorioz, dagokion azpiespazio propioa $S = \{(0,y) \ / \ y \in K\}$ da. Ondorioz, bektore propio guztiak S-koak dira eta S dimentsio batekoa denez, ez daude bi independente. Beraz, A ez da diagonalgarria.

adibidea: aztertu $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrizea diagonalgarria den.

Bere ekuazio karakteristikoa $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $-\lambda.(3 - \lambda)^2 + 16 + 16 - (- 16\lambda + 4.(3 - \lambda) + 4.(3 - \lambda)) = - \lambda^3 + 6.\ \lambda^2 + 15.\lambda + 8 = 0$ eta honen ebazpenak $\lambda_1 = 8$ eta $\lambda_2 = -1$ (honen anikoiztasuna bi izanik) soluzioak ematen ditu.

Bere azpiespazio propioak kalkulatuko dira orain:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -5x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - 8y + 2z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ , \left. \begin{array}{c} z = 2y \\ x = z \end{array} \right\}$$ eta ondorioz, $\lambda_1 = 8$

balioari dagokion azpiespazioa $S_1 = \{(2y,y,2y) \ / \ y \in K\}$ da (dimentsio batekoa).

Gauza bera egiten bada λ_2 = -1 balioarekin, ikusiko da $S_2 = \{(x,-2x -2z, z) / x,z\in K\}$ dela dagokion azpiespazioa (bi dimentsiokoa). Azpiespazio honen oinarri bat ateratzeko nahikoa da honela jartzea: $(x,-2x - 2z,z) = x.(1,-2,0) + z.(0,-2,1)$

Hiru bektore propio independenteak ondoko hauek izan daitezke: $u_1 = (2,1,2)$ (S_1-koa non y = 1 hartu den), $u_2 = (1,-2,0)$ eta $u_3 = (0,-2,1)$ (S_2-koak). Independenteak dira, eta 3 direnez, diagonalgarria dela ondorioztatzen da.

Beraz, A diagonaltzeko bektore propioek osatzen duten oinarriarekiko adieraziko da. Oinarri-aldaketaren P matrizea bektore propioek eratzen dute:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ eta } P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ beteko da.}$$

Adibide honetan ikusi da posible dela n ordenako matrize bat diagonaltzea, nahiz eta n balio propio desberdinak ez eduki.

adibidea: Aztertu $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ matrizea diagonalgarria den.

Ebaz.: Bere ekuazio karakteristikoa $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ da. Garatu ondoren:

$(1 - \lambda).((3 - \lambda).(- 3 - \lambda) + 8) = 0 \Rightarrow (1 - \lambda).(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (anizkoiztasuna 2) eta $\lambda = -1$ (anizkoiztasuna 1).

- $\lambda = 1$ balioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatuko da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 2y + 4z = 0 \\ -2x - 4z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ x = - 2z, y = 0, eta ondorioz, S_1 azpiespazioa $S_1 = \{(- 2\lambda, 0, \lambda) / \lambda\in R\}$ (dimentsio batekoa).

- $\lambda = -1$ balioari dagokiona:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 2y + 4z = 0 \\ 2y = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S_2 = \{(-\lambda, 0, \lambda) \;/\; \lambda \in R\}$$ eta hau ere dimentsio batekoa da.

Hemen bakarrik bi bektore propio independente aurki ditzakegu, bata S_1-koa eta bestea S_2-koa. Ondorioz, ez da diagonalgarria.

Lehenengo balio propioaren anizkoiztasuna (bi) eta dagokion azpiespazioaren dimentsioa berdinak ez izateagatik gertatzen da hori.

Kontuan hartu beraien dimentsioak aztertzeko ez dela beharrezkoa azpiespazio propioak ateratzea, zeren eta nahikoa baita dim $S_i = n - \dim (A - \lambda_i.I)$ aztertzea. Anizkoiztasunarekin bat egiten ez badu, ezin da diagonaldu.

KONKLUSIOA: Demagun $\lambda_1, \lambda_2 \,.....\, \lambda_r$ direla bere balio propioak eta $\alpha_1, \alpha_2 \,.......\, \alpha_r$ beren anizkoiztasunak. Demagun $d_1, d_2 \,.......\, d_r$ direla beren azpiespazioen dimentsioak. n ordenako matrize bat diagonaldu ahal izateko n bektore propio independente izan behar ditu. Hori betetzeko ondokoak bete behar dira:

1. $\alpha_1 + \alpha_2 + \,.......\, + \alpha_r = n$
2. $d_i = \alpha_i \quad \forall i$

Bistan denez, aspiespazio propio guztien dimentsioen baturak ere n izan behar du.

10.4. MATRIZE SIMETRIKOAK ETA DIAGONALTZE ORTOGONALA

Dagoeneko badakigu matrize bat diagonalgarria den ala ez aztertzen. Hala ere, zenbait kasutan gainbegiratu batez jakin daiteke; esaterako, matrize triangeluarra izateaz gain diagonal nagusian balio desberdinak dituenean diagonalgarria da. Beste kasu garrantzitsu bat matrizea simetrikoa denean da (hots, $A = A^T$). *Simetrikoa ez den matrize batean* ondokoak gerta daitezke:

- ez du zertan diagonalgarria izan.

- errealak ez diren balio propioak izan ditzake. Adibidez $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ matrizearen ekuazio karakteristikoa $\lambda^2 + 1 = 0$ da eta bere balio propioak $\lambda_1 = i$ eta $\lambda_2 = -i$ irudikariak dira.

- balio propio bati dagokion azpiespazioaren dimentsioa balio propio horren anizkoiztasuna baino txikiagoa izan daiteke (beraz, ezin da diagonaldu).

Gauza hauek ezin dira gertatu matrize simetrikoetan ikusiko den bezala.

10.2. TEOREMA: (TEOREMA ESPEKTRAL ERREALA deritzo) A n ordenako matrize simetriko erreal batean ondoko hiru proposizio hauek betetzen dira:

a) A-ren balio propio guztiak errealak dira, eta ondorioz, dagozkien bektore propioak ere bai.
b) balio propio bati dagokion azpiespazioaren dimentsioa balio propio horren anizkoiztasuna da.
c) A diagonalgarria da.

Ondoko lema hau emango da aurretik eta, gainera, ***A-k n bektore propio ortonormal dituela*** frogatuko da. Hirugarrena bigarrenaren ondorio zuzena besterik ez da.

10.1. LEMA: A matrize simetriko erreal baten bi balio propio erreal desberdinak α eta β badira, eta dagozkien bi bektore propioak v eta w badira, orduan v eta w ortogonalak dira.

Frog.: Demagun v eta w bektoreak zutabe bektoreak direla. Beraien arteko biderkadura eskalarra modu matrizialen adierazteko $v^T.w$ egin behar da, matrizeen biderketa aplikatu ahal izateko. Gauza bera (A.v) eta w bektoreekin:
Hau da: $(A.v)\ .\ w = (A.v)^T.w = (\alpha.v)^T.w = \alpha.(v^T.w)$ da alde batetik eta $(A.v).w = v^T.(A^T.w) = v^T.(A.w) = v^T.(\beta.w) = \overline{\beta}\,.(v^T.w) = \beta.(v^T.w)$ (β erreala baita) bestetik.
Ondorioz, $\alpha.(v.w) = \beta.(v.w)$, baina α eta β desberdinak direnez, $v.w = 0$ bete beharko da.

Orain Teorema espektrala frogatuko da:

a) Frog.: Izan bitez λ eta v, hurrenez hurren, A-ren balio eta bektore propio bat eta demagun $v \in C^n$. C^n espazioan biderketa eskalarra dago, non $(k.v).w = k.(v.w)$ eta $v.(k.w) = \overline{k}\,.\,(v.w)$ diren $\forall k \in C$ eta $\forall v,w \in C^n$ (251. orrialdean ikusi zen).

Orduan, alde batetik, $(A.v).\overline{v} = (\lambda.v).\overline{v} = \lambda.(v.\overline{v})$ eta, bestetik, $(A.v).\overline{v} = v.(A^T.\overline{v}) = v.(\overline{A.v}) = v.(\overline{\lambda.v}) = \overline{\lambda}.(v.\overline{v})$. Beraz, $\lambda.(v.\overline{v}) = \overline{\lambda}.(v.\overline{v})$. Baina $v.\overline{v}$ zero ez denez, (bestela $v = o$ litzateke eta hori ez da posible bektore propioa baita) $\lambda = \overline{\lambda}$ izango da, eta ondorioz, λ erreala da.

Oharra: Gehiegi ez idazteagatik bektoreak zutabeak balira bezala idatziko dira eta $u_1, u_2 ....,u_n$ eratzen duten Q matrizea $Q= (u_1, u_2 ....,u_n)$ idatziko da. Modu berean bere iraulia $Q^T = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}$ *idatziko da, non u_i^T, u_i bektorea zutabeari dagokion errenkada den.*

b) Frog.: k anizkoiztasuneko λ_0 balio propio bati k dimentsioko azpiespazio bat dagokiola frogatu nahi da. Izan bedi $A.\ u_1 = \lambda_0 .u_1$. ($|u_1| = 1$ hartuko dugu). Beste n - 1 bektorerekin $\{u_1, u_2,......,u_n\}$ R^n -ko oinarri ortonormal bat (Gram-Schmitd erabiliz) osa daiteke. Izan bedi $Q = (u_1, u_2, ...,u_n)$ osatzen duten matrize ortonormala. Orduan, A eta $Q^{-1}.A.Q$ antzekoak dira eta Q ortonormala denez, (hots, $Q^{-1} = Q^T$) $Q^T.A.Q$ ere antzekoa izango da, eta ondorioz, ekuazio karakteristiko bera dute. Gainera, $\dim S(\lambda_o) = \dim Ker\ (A - \lambda_o I) = n - \dim\ (A - \lambda_o.I) = n - \dim\ (Q^TAQ - \lambda_o.I)$

Baina $Q^T.A.Q = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}.A.\ (u_1, u_2 ....,u_n) = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}.(A.u_1, A.u_2, ...,A.u_n)$ da. Beraz:

$$Q^T.A.Q = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}.(\lambda_0.u_1, A.u_2, ..., A.u_n) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & u_1^T.A.u_2 & \dots & u_1^T.A.u_n \\ 0 & u_2^T.A.u_2 & \dots & u_2^T.A.u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & u_n^T.A.u_2 & \dots & u_n^T.A.u_n \end{pmatrix}$$

non $j \neq 1$ denean $u_1^T.\ u_j = u_1 .\ u_j = 0$ dela erabili den (ortogonalak baitira).

Horrez gain, $Q^T.A.Q$ ere simetrikoa da ($(Q^T.A.Q)^T = Q^T.A^T.(Q^T)^T = Q^T.A.Q$ baita). Beraz, matrize horren lehenengo errenkadako gaiak (lehena izan ezik) ere zero izango dira:

$$Q^T.A.Q = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \text{ eta } |Q^T.A.Q - \lambda.I| = \begin{vmatrix} \lambda_0-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22}-\lambda & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & c_{32} & c_{33}-\lambda & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda_0 - \lambda). \begin{vmatrix} c_{22}-\lambda & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{32} & c_{33}-\lambda & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_0 - \lambda). |M_{11} (\lambda)|$$

k = 1 bada $|M_{11} (\lambda_o)| \neq 0 \Rightarrow he(Q^TAQ - \lambda_o.I) = n - 1 \Rightarrow \dim S(\lambda_o) = n - (n - 1) = 1$ eta frogatuta dago.

Demagun $k > 1$ dela. Orduan, $|M_{11} (\lambda_o)| = 0 \Rightarrow he(Q^TAQ - \lambda_o.I) \leq n - 2 \Rightarrow \dim S(\lambda_o) \geq n - (n - 2) = 2$.

k = 2 bada $S(\lambda_0)$-k bi bektore independente ditu gutxienez. $S(\lambda_0)$-ko u_1 eta u_2 bi bektore horietatik abiatuz, R^n-ko $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ oinarri ortonormal bat eratzen da. Lehen bezala P bada bektore horiek eratzen duten matrizea, $P = (u_1, u_2, ...u_n)$, ondoko hau dela frogatzen da:

$$P^T.A.P - \lambda.I = \begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}-\lambda & d_{34} & \dots & d_{3n} \\ 0 & 0 & d_{43} & d_{44}-\lambda & \dots & d_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & d_{n3} & d_{n4} & \dots & d_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

eta $|P^T.A.P - \lambda.I| = (\lambda_o - \lambda)^2. |N (\lambda)|$ da.

$k = 2$ denez, $|N (\lambda_o)| \neq 0 \Rightarrow he(P^TAP - \lambda_o.I) = n - 2 \Rightarrow \dim S(\lambda_o) = n - (n - 2) = 2$ eta frogatuta dago. Eta λ_0 balio propioari bi bektore propio ortonormala dagozkio.

Demagun $k > 2$ dela. Orduan, $|N (\lambda_o)| = 0 \Rightarrow he(P^TAP - \lambda_o.I) \leq n - 3 \Rightarrow \dim S(\lambda_o) \geq n - (n - 3) = 3$.

Prozesu honekin segi daiteke edozein k-rentzat $\dim S(\lambda_0) = k$ dela ikusi arte.
Gainera hartutako oinarria ortonormala da.

c) n ordenako A matrize simetriko erreal bat diagonalgarria dela frogatzeko, nahikoa da honakoa kontsideratzea: bere balio propioak λ_1, λ_2, ... λ_r baldin badira eta k_1, k_2,......k_r beren anizkoiztasunak, $n = k_1 + k_2 + ... + k_n$ beteko dela.
Gainera azpiespazio propio bakoitzean k_1, k_2, ...k_r bektore ortonormalak aurkitu ahal ditugunez, $k_1 + k_2 + ... + k_n = n$ bektore ortonormalak izango ditugu. 10.1. Lema kontuan hartuz diagonalgarria da.

Teorema espektralean aipatu den bezala A simetrikoa bada, R^n espazioan bektore propioz osatuta $B = \{e_1, e_2 ...... e_n\}$ oinarri ortonormal bat existituko da eta oinarri horren bektoreek Q matrize ortogonal bat eratzen dute ($Q^T = Q^{-1}$).

10.3. DEFINIZIOA: n ordenako A matrize bat ***ortogonalki diagonalgarria*** dela esaten da Q matrize ortogonal bat existitzen bada, non $B = Q^T.A.Q$ diagonala den.

10.3. TEOREMA: n ordenako matrize erreal bat ortogonalki diagonalgarria da, baldin eta soilik baldin simetrikoa bada.

Frog.: $\Rightarrow$ demagun A ortogonalki diagonalgarria dela. Orduan, $B = Q^T.A.Q$, non Q ortogonala eta B diagonala diren.

Orduan, $Q.B.Q^{-1} = Q.Q^T.A.Q.Q^{-1}$ eta $Q^T = Q^{-1}$ denez $\Rightarrow$ $A = Q.B.Q^T$.
Orain $A^T = (Q.B.Q^T)^T = (Q^T)^T.B^T.Q^T = Q.\ B.Q^T$ (kontuan hartu $B = B^T$ dela, diagonala delako), eta ondorioz, $A = A^T$, hots, simetrikoa.

$\Leftarrow$ demagun A simetrikoa dela. Teorema espektralaren arabera diagonalgarria da bektore ortonormalez osatutako Q matrize baten bitartez.

LABURPENA: ORTOGONALKI DIAGONALTZEKO PROZEDURA

A matrize simetriko bat diagonaltzeko eman behar diren pausoak ondoko hauek dira:

1. A-ren balio propioak eta bakoitzaren anizkoiztasuna kalkulatzen dira.
2. Anizkoiztasun bat duten balioentzat unitate bektore bat hautatzen da (nahikoa da bat edozein hartzea eta normalizatzea).
3. Anizkoiztasun $r \geq 2$ duten balio propioentzat r bektore independente hautatzen dira eta Gram-Schmidt prozedura erabiliz ortonormaltzen da.
4. Sortutako n bektore zutabe ortonormalekin Q matrizea eratzen da. Orduan, $Q^T.A.Q$ diagonala izango da.

adibidea: Diagonaldu ortogonalki $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ matrizea.

Ebaz.: Zenbatuko ditugu aurrean aipatutako pausoak:

1. Ekuazio karakteristikoa $(\lambda - 3)^2.(\lambda + 6) = 0$ da $\Rightarrow \lambda = 3$ (bikoitia) eta $\lambda = -6$ (bakuna) dira balio propioak.

2. $\lambda = -6$ balioari $u_1 = (1,-2,2)$ bektore propioa dagokio eta $|u_1| = \sqrt{9} = 3$ denez, normaltzen bada, $v_1 = \dfrac{u_1}{|u_1|} = (\dfrac{1}{3}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{2}{3})$ hautatuko da.

3. $\lambda = 3$ balioari dagokion azpiespazio propioan $u_2 = (2,1,0)$ eta $u_3 = (-2,0,1)$ bektoreak hartuko dira. Kontuan hartu v_1 ortogonala dela bi bektore horiekiko (10.1 lemak bermatzen digun bezala), baina horiek ez direla elkarrekiko ortogonalak.
Gram-Schmidt erabiltzen bada:

$w_2 = (2,1,0)$ eta $w_3 = u_3 - \left(\dfrac{u_3.w_2}{w_2.w_2}\right).w_2 = (\dfrac{-2}{5}, \dfrac{4}{5}, 1)$ ortogonalak dira eta normaldu ondoren: $v_2 = \dfrac{w_2}{|w_2|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ eta $v_3 = \dfrac{w_3}{|w_3|} = \left(\dfrac{-2}{3\sqrt{5}}, \dfrac{4}{3\sqrt{5}}, \dfrac{5}{3\sqrt{5}}\right)$ hautatuko dira.

4. Q matrizea eratuko da v_1, v_2 eta v_3 bektoreekin, zutabeetan jarriz:

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{-2}{3\sqrt{5}} \\ \dfrac{-2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{3} & 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$ izango da A matrizea ortogonalki diagonaltzen duen matrizea

eta lortzen den A’ matrize diagonala $A' = Q^T.A.Q = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ da.

Kontuan hartu aztarna mantendu egiten dela, A matrizean $2 + (-1) + (-1) = 0$ zen eta A’ matrizean $-6 + 3 + 3 = 0$ ere bai.

Aipatzekoa da ez dela gauza bera antzekotasunez diagonaltzea eta ortogonalki diagonaltzea. Azken adibide honetan A matrizea diagonala izango da $u_1(1,-2,2)$, $u_2(2,1,0)$, $u_3(-2,0,1)$ bektoreek osatzen duten oinarriarekiko, eta bektore horiek P matrize-aldaketa osatuko dute:

Hau da: $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eta $P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ateratzen da.

$$A' = P^{-1}.A.P = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ikusten denez, matrize diagonal bera dugu eta diferentzia bakarra matrize-aldaketa da. Kasu honetan ez da ortogonala.

Ikusi den bezala ortogonalki diagonaldu matrize simetrikoetan bakarrik egin daiteke, eta komenigarria da konikak ikertzean, zeren eta matrize-aldaketa ortogonala baita, eta matrize horiek esanahi geometrikoa dute (biraketak, simetriak).

EBATZITAKO ARIKETAK

1. Kalkulatu $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *matrizearen balio eta bektore propioak.*

Ebaz.:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda).\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$(1 - \lambda).[(1 - \lambda).(2 - \lambda)^2 - 2. (2 - \lambda)] - 2. (- 2 + (1 - \lambda).(2 - \lambda)) = (1 - \lambda).(2 - \lambda).(- 3\lambda + \lambda^2) - 2.(- 3\lambda + \lambda^2) = (\lambda^2 - 3\lambda)^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ bi balio propio daude eta bietan anizkoiztasuna 2 da.

$$\lambda_1 = 0 \text{ hartzen bada } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x - z + t = 0 \\ y + t = 0 \\ -2x + 2z - 2t = 0 \\ 2y + 2t = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} t = -y \\ x = z + y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad S_1 = \{(z + y, y, z, -y) \,/\, y,z \in K\} \text{ da dagokion espazio propioa.}$$

$$\lambda_2 = 3 \text{ hartzen bada } \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2x - z + t = 0 \\ -2y + t = 0 \\ -2x - z - 2t = 0 \\ 2y - t = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$S_2 = \{(x, 0, 0, -2x) \,/\, x \in K\}$ da dagokion espazioa.

2. Aztertu zein kasutan den diagonalgarria $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ *matrizea a eta b parametroen arabera.*

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & b \\ 3 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ (5 - λ).(-1 - λ).(a - λ) = 0. Ondorioz, autobalioak 5, -1 eta a dira. Orduan, honako kasu hauek daude:

a) a ≠ 5 eta a ≠ -1 bada, hiru autobalio desberdinak ditu, eta n = 3 denez, diagonalgarria da.

b) a = 5 bada, bi autobalio ditu -1 bakuna eta 5 bikoitza. Honi dagokion azpiespazioaren dimentsioa aztertuko da (bi izan beharko luke diagonaldu ahal izateko):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -6y + bz = 0 \\ 3x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ S = {(0,b/6 .z, z) / z∈K} eta dimentsio batekoa dela ikusten da. Ondorioz, ez da diagonalgarria

Oharra: Badago beste prozedura bat hori aztertzeko. S-ren dimentsioa = n - matrize horren heina (zeren eta S matrize horren nukleoa baita eta (A - 5I) matrizearen heina dim Im(A - 5I) baita) . Kasu honetan 3 - 2 = 1.

c) a = -1 bada, orduan bi autobalio ditu: 5 bakuna eta -1 bikoitza. Honi dagokion azpiespazioaren dimentsioa kalkulatzeko aipatutako prozedura erabiliz:

$$A-(-1).I = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrizearen heina kalkulatuko dugu.

Garbi dago bi kasu daudela:

- b = 0 bada, heina 1 da eta λ = -1 balioari dagokion azpiespazioaren dimentsioa 3 - 1 = 2 da. Ondorioz, diagonalgarria da.

- b ≠ 0 bada, heina 2 izango da eta azpiespazioaren dimentsioa 3 - 2 = 1, eta ondorioz, ez da diagonalgarria $d_1 + d_2 = 1 + 1 = 2 < 3$ baita.

3. (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0) eta (0,0,1) bektoreak $f : R^3 \to R^3$ endomorfismo baten bektore propioak direla eta R^3 espazioan badaudela propioak ez diren zenbait bektore, jakinda, kalkulatu f-ren bektore propio guztiak.

Ebaz.: (1,0,0), (0,1,0) eta (0,0,1) independenteak dira eta oinarri bat eratzen dute. Gainera, λ_1, λ_2 eta λ_3 baldin badira dagozkien balio propioak, f-ri dagokion matrizea oinarri horretan $F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ izango da. Baina (1,1,0) autobektorea denez,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

Orduan, (x,y,z) autobektorea bada $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ beteko da, non $\gamma = \lambda_1$ edo $\gamma = \lambda_3$ den. Baina aurrekoak $\left.\begin{matrix} \lambda_1 .x = \gamma .x \\ \lambda_1 .y = \gamma .y \\ \lambda_3 .z = \gamma .z \end{matrix}\right\}$ sistema sortzen du.

$\lambda_1 \neq \lambda_3$ da, zeren eta $\lambda_1 = \lambda_3$ izango balitz, edozein bektore propioa litzateke eta hau hipotesiaren aurka doa. Orduan, bi posibilitate daude:

- $\gamma = \lambda_1$ bada, $\lambda_3 .z = \lambda_1 .z \Rightarrow z = 0$. Orduan, bektore propioak (x,y,0) dira.

- $\gamma = \lambda_3$ bada, $\left.\begin{matrix} \lambda_1 .x = \gamma .x \\ \lambda_1 .y = \gamma .y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ x = y = 0. Orduan, bektore propioak (0,0,z) dira.

4. Izan bedi f V-ren endomorfismo bat. Frogatu honako hauek:

a) λ f-ren balio propio bat bada, orduan λ^P f^P–ren balio propioa da.

b) Ker (f - λI) $\subset$ Ker (f^P - λ^P.I)

c) f erregularra bada, bere balio propioen alderantzizko balioak f^{-1}-ren balio propioak dira.

Ebaz.: a) λ f-ren balio propioa bada, $\exists x \in V$ / f (x) = λ.x. Orduan, agerikoa da:

$f^P (x) = f^{p-1}.f (x) = f^{p-1}(\lambda x) = \lambda.f^{p-1}(x) = \lambda.f^{p-2}.f (x) = \lambda^2.\ f^{p-2} (x) = ...= \lambda^p x$

b) Ker (f - λI) $\subset$ Ker (f^P - λ^P.I) frogatzeko, nahikoa da Ker (f - λI) –ko edozein x bektore Ker (f^P - λ^P.I)-koa ere badela frogatzea.
Baina $x \in$ Ker (f - λI) bada $\Rightarrow$ (f - λI) (x) = o $\Rightarrow$ f (x) = λx. Aurrekoan ikusitakoa aplikatzen bada, $f^P (x) = \lambda^p x$ beteko da $\Rightarrow$ (f^P - λ^P.I)(x) = o $\Rightarrow x \in$ Ker (f^P - λ^P.I)

c) demagun λ f-ren balio propioa dela eta izan bedi $f(x) = \lambda.x$.
f^{-1} existitzen denez, non $f^{-1}.\ f = I$ den $\Rightarrow$ $(f^{-1}.\ f)(x) = f^{-1}.\ (f(x)) = I(x) \Rightarrow f^{-1}(\lambda x) = x$

$\Rightarrow$ $\lambda.\ f^{-1}(x) = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}.x$ frogatu nahi zen bezala.

5. Izan bedi V 4 dimentsioko C gorputzaren gaineko bektore-espazio bat eta izan bedi f bere endomorfismo bat. Demagun $x \in V$ bektore bat existitzen dela, non $f^4(x) = x$ den eta x, $f(x)$, $f^2(x)$ eta $f^3(x)$ bektoreak independenteak diren. Frogatu f diagonalgarria dela eta aurkitu bere matrize diagonala.

Ebaz.: Lau bektore horiek V-ko oinarri bat osatzen dute (independenteak direlako eta V 4 dimentsiokoa delako). Izenda ditzagun: $e_1=x$, $e_2 = f(x)$, $e_3 = f^2(x)$, $e_4 = f^3(x)$ Kalkula dezagun f-ren adierazpena oinarri horrekiko:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(x) &&= e_2 = (0,1,0,0)\\ f(e_2) &= f(f(x)) &&= e_3 = (0,0,1,0)\\ f(e_3) &= f(f^2(x)) &&= e_4 = (0,0,0,1)\\ f(e_4) &= f(f^3(x)) &&= e_1 = (1,0,0,0)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Bere ekuazio karakteristikoa ondoko hau da:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1\\ 1 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 - 1 = 0.$$ Ekuazio honek lau soluzio ditu C gorputzean:

1, -1, i eta – i. Lauak desberdinak direnez, F diagonalgarria da eta bere matrize diagonala ondoko hau da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\end{pmatrix}$$

6. Aztertu $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ *matrizea diagonalgarria den.*

Ebaz.: $\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda\end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\cos\alpha.\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \cos\alpha \pm i.\sin\alpha$

Orduan, bi kasu daude.

- $\alpha = k\pi$ bada, autobalio bat dago: $\lambda = 1$ (bikoitza) k bikoitia bada, edo $\lambda = -1$ (bikoitza) k bakoitia bada. Kasu hauetan matrize diagonalak hauek izango dira:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (k bikoitia bada) } \quad \text{edo} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (k bakoitia bada)}$$

- $\alpha \neq k\pi$ bada, matrizea ez da diagonalgarria R gorputzean baina bai C gorputzean, eta bi balio propio ditu: $\cos\alpha + i.\sin\alpha$ eta $\cos\alpha - i.\sin\alpha$. Dagokion matrizea ondoko hau da:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{pmatrix}$$

7. Kontsidera dezagun $P_3(x)$ bektore-espazioa (3 mailako edo txikiagoko polinomioak). Izan bedi f honako endomorfismo hau: $f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = dx^3 + cx^2 + bx + a$. Kalkulatu bere adierazpena $\{1,x,x^2,x^3\}$ oinarriarekiko eta esan diagonalgarria den aldaketa-matrizea adieraziz.

Ebaz.:
$$\begin{array}{l} f(1) = x^3 \\ f(x) = x^2 \\ f(x^2) = x \\ f(x^3) = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ekuazio karakteristikoa honako hau da:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 1 & \text{bikoitza} \\ \lambda_2 = -1 & \text{bikoitza} \end{cases}$$

- $\lambda_1 = 1$ balioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatuko da:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -x + t = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x - t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \{(x,y,y,x) \,/\, x,y \in R\}, \text{ beraz, 2}$$

dimentsiokoa. Bere oinarri bat $\{(1,0,0,1), (0,1,1,0)\}$ da. Hau da, $\{1 + x^3, x + x^2\}$

- λ_1= -1 balioarekin gauza bera eginez gero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+t=0 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \\ x+t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad S_2 = \{(x,y,-y,-x) \ / \ x,y\in R\},$$

beraz, 2 dimentsiokoa. Bere oinarri bat {(1,0,0,-1), (0,1,-1,0)} da. Hau da, $\{1 - x^3, x - x^2\}$

Hau da, bi balio propioen anizkoiztasunek eta azpiespazio propioen dimentsioek bat egiten dute. Ondorioz, diagonalgarria da eta bere adierazpen matriziala $\{1 + x^3, x + x^2, 1 - x^3, x - x^2\}$ oinarriarekiko ondoko hau da:

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eta matrize-aldaketa bektore propioek osatzen dutena da:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egiazta daiteke $F' = P^{-1}.F.P$ dela.

8. Izan bedi $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ V_4 (R) espazioko oinarri bat eta izan bedi f endomorfismo bat non:

- *$e_1 + e_2 – e_4$ bektore propio bat den λ = 1 balio propioari lotuta.*
- *e_2 bektore propio bat den λ = 2 balio propioari lotuta.*
- *$f(e_3 – e_4) = e_2 + 2e_3 – 2e_4$*
- *$f(ae_2 – e_3 + 2e_4) = be_2 \qquad \forall a,b\in R$*

Esan diagonalgarria den.

Ebaz.: $f(e_1 + e_2 – e_4) = 1.(e_1 + e_2 – e_4) \Rightarrow \begin{array}{l} f(e_1) + f(e_2) – f(e_4) = e_1 + e_2 – e_4 \\ f(e_2) = 2e_2 \\ f(e_3) – f(e_4) = e_2 + 2e_3 – 2e_4 \\ af(e_2) – f(e_3) + 2f(e_4) = be_2 \end{array}$

eta hemendik ondoko hauek ateratzen dira: $f(e_1) = e_1 + (b – 2a).e_2 + 2e_3 – 3e_4$
$f(e_2) = 2e_2 \qquad f(e_3) = (b – 2a + 2).e_2 + 4e_3 – 4e_4 \qquad f(e_4) = (b- 2a +1).e_2 + 2e_3 – 2e_4$

Beraz, f-ren matrizea oinarri horrekiko ondoko hau da:

$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b-2a & 2 & b-2a+2 & b-2a+1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. Kalkula dezagun bere ekuazio karakteristikoa:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ b-2a & 2-\lambda & b-2a+2 & b-2a+1 \\ 2 & 0 & 4-\lambda & 2 \\ -3 & 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda).\begin{vmatrix} 2-\lambda & b-2a+2 & b-2a+1 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (1 - \lambda).(2 - \lambda).[(4 - \lambda).(-2 - \lambda) + 8] = 0 \;\Rightarrow\; \lambda.(1 - \lambda).(2 - \lambda)^2 = 0.$

Hau da, $\lambda_1 = 2$ (bikoitza), $\lambda_2 = 1$ (bakuna) eta $\lambda_3 = 0$ (bakuna)

Kalkula ditzagun azpiespazio propioen dimentsioak.
Horretarako nahikoa da $(F - \lambda_o.I)$ matrizearen heinak kalkulatzea, zeren eta $\dim S(\lambda_o) = n - \dim(F - \lambda_o.I)$ baita. $\lambda = 2$ kasuarentzat:

$F - 2.I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ b-2a & 0 & b-2a+2 & b-2a+1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$. Bigarren zutabea ken daiteke, eta heina kalkulatzeko errenkadak zutabe bezala jarriko ditugu eta ordena trukatuko da:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 2 & -4 & b-2a+2 \\ 0 & 2 & -4 & b-2a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3:E3-E2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 2 & -4 & b-2a+2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Honen dimentsioa 3 da $\forall a,b$. Beraz, $\dim S(2) = 4 - 3 = 1$. Ondorioz, F ez da diagonalgarria, anizkoiztasuna 2 baita.

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Kalkulatu ondoko matrizeen balio eta bektore propioak eta eman beren oinarriak:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *i)* $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2. Froga ezazu $\lambda = 0$ A matrizearen balio propioa dela, baldin eta soilik baldin erregularra ez bada (det A = 0).

3. Frogatu A eta A^{-1} matrizeek bektore propio berdinak dituztela, A matrizea erregularra izanik. Eman, gainera, zein den balio propioen arteko lotura.

4. Frogatu A eta A^T matrizeek balio propio berdinak dituztela.

5. Frogatu matrize triangeluarren balio propioak diagonal nagusiaren balioak direla.

6. Izan bedi A funtzio errealen multzoa eta T A-ren gaineko ondoko endomorfismo hau: T (f) = f ' (bere deribatua).

a) Frogatu $\lambda = 1$ $f(x) = e^x$ bektorearen balio propio bat dela.

b) Aurkitu $f(x) = e^{-2x}$ funtzioari dagokion balio propioa.

7. Esan, parametroaren arabera, noiz diren diagonalgarriak ondoko matrize hauek:

a) $\begin{pmatrix} m+3 & m^2-10 \\ 1 & m+1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$c)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & m & 4-m \\ 0 & m & -m \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Aurkitu B oinarri bat ondoko endomorfismoentzat, non f-ren matrizea B-rekiko diagonala den:

a) $f: R^2 \to R^2 \ : \ f(x,y) = (x+y, x+y)$

b) $f: R^3 \to R^3 \ : \ f(x,y,z) = (-2x + 2y - 3z, 2x + y - 6z, -x - 2y)$

c) $f: P_1(x) \to P_1(x) \ : \ f(ax + b) = a + (a + 2b)x$

9. Izan bedi $f: R^4 \to R^4$ *ondoko endomorfismo hau:* $f(x,y,z,t) = (x, 2x, x, x + my)$. *Kalkulatu m diagonalgarria izateko.*

10. B baldin bada n ordenako A matrizeari dagokion matrize diagonala eta $B = P^{-1}.A.P$ *betetzen bada:*

- *frogatu* $B^k = P^{-1}.A^k.P$ *edozein* $k \in N$ *baliorentzat.*
- $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ *baldin badira A-ren autobalioak, kalkulatu* A^k*-koak.*

11. Esan $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *eta* $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrizeak antzekoak diren. Baieztatuz gero, kalkulatu P matrizea, non* $B = P^{-1}.A.P$ *betetzen den.*

12. Froga ezazu A diagonalgarria bada A^T *ere diagonalgarria dela.*

13. n ordenako matrize A baten ekuazio karakteristikoa $(\lambda - c)^n = 0$ *bada, frogatu diagonalgarria dela baldin eta soilik* $A = c.I$ *betetzen bada.*

14. Frogatu: $A.B = B.A \Leftrightarrow$ *A eta B-k balio karakteristiko berdinak dituzte.*

15. Aurkitu Q matrize ortogonal bat ondoko matrize hauek diagonaltzeko:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad h)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

11. FORMA KOADRATIKOAK

11.1. APLIKAZIO BILINEALAK

11.1. DEFINIZIOA: Izan bitez U,V eta W hiru bektore-espazio K gorputz beraren gainean. $f : U \times V \to W$ aplikazioa bilineala dela esaten da ondoko axioma hauek betetzen baldin badira:

- $f(u + u', v) = f(u, v) + f(u', v)$
- $f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v')$
- $f(k.u, v) = k.f(u, v)$
- $f(u, k.v) = k.f(u, v)$

$\forall u,u' \in U, \ \forall v,v' \in V$ eta $\forall k \in K$

Aplikazio bilineal guztien multzoa L^2 (UxV; W) idatziko da.

Erraza da bektore-espazio bat dela egiaztatzea, ondoko bi eragiketak definituz:

$$(f + g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v) \quad \text{eta} \quad (k.f).(u,v) = k.f(u,v)$$

11.2. FORMA BILINEALAK

11.2. DEFINIZIOA: W helburu-multzoa K gorputza bada (kontuan hartu K gorputza bektore-espazioa ere badela beronen gainean), aplikazio bilinealari ***forma bilineal*** deitzen zaio.

adibidea: $f : R^3 \times R^2 \to R \quad f((x,y,z), (a,b)) = x.a - 2.y$ forma bilineal bat da. Ikus dezagun lehenengo axioma:

$f((x,y,z) + (x',y',z'), (a,b)) = f((x + x', y + y', z + z'), (a,b)) = (x + x').a - 2(y + y') = (x.a - 2.y) + (x'.a - 2y') = f((x,y,z), (a,b)) + f((x',y',z'), (a,b))$ lehenengo axiomak eskatzen duenez. Gainerako hiru axiomak irakurlearentzat uzten dira.

Hemendik aurrera erabiliko ditugun bektore-espazioek dimentsio finitua dutela suposatuko da.

U eta V-ko bi oinarri $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ eta $B' = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ badira, hurrenez hurren, eta $x \in U$ eta $y \in V$ bektoreak oinarri horietan adierazten badira, Dirac notazioa erabiliz (hau da, $\sum_{i=1}^{n} x^i.u_i$ idazteko $x^i\,.u_i$ idazten da), honako hau dugu: $f(x,y) = f(x^i\,.u_i,\ y^j v_j) = x^i.y^j.\ f(u_i, v_j)$

$a_{ij} = f(u_i, v_j)$ egiten bada, non $i = 1......n$ eta $j = 1.....m$ diren, orduan $f(x, y) = a_{ij}.x^i\,.y^j$ izango da. Era matrizialean idatzi ahal da:

$$f(x,y) = (x^1, x^2, ..., x^n).\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = X^T.A.Y \text{ (edo } Y^T.A^T.X\text{), non } X$$

eta Y, x eta y bektoreei dagozkien zutabe matrizeak diren eta A f forma bilinealari dagokion n.m ordenako matrizea den. Aplikazio linealetan bezala matrize honek f aplikazioaren informazioa darama eta erabat finkatuta gelditzen da n.m oinarrien bikoteen irudiak ezagutuz gero (a_{ij}). Jakina, U edo V (edo bietan) oinarri-aldaketa bat eginez gero, itxuraz aldatuko da.

Bi oinarri finkatuz gero, bijekzio bat dago $L^2(UxV; K)$ espazioaren eta n.m ordenako matrizeen multzoaren artean: f forma bilinealari A matrizea dagokio, eta alderantziz, A matrizeari $f(x,y) = X^T.A.Y$ forma bilineala dagokio.

A matrizeari f forma bilinealeko matrize deritzo B eta B' oinarriekiko.

Hemendik aurrera U eta V berdinak diren kasua kontsideratuko da eta esango da f forma bilineala V-ren gainean dagoela $f : VxV \to K$ gertatzen denean. Multzo hau $L^2(V^2 ; k)$ idatziko da. Kasu honetan A matrizea karratua izango da eta bere elementuak $a_{ij} = f(u_i, u_j)$.

FORMA SIMETRIKO ETA ANTISIMETRIKOAK

$f \in L^2(V^2 ; K)$ ***simetrikoa*** da $f(x,y) = f(y,x)$ bada, $\forall x,y \in V$

Forma bilineal simetrikoen adibiderik aipagarriena biderkadura eskalarra da. Kontuan hartu forma bilineal simetriko baten matrizea simetrikoa dela edozein oinarritan ($f(u_i,u_j) = f(u_j,u_i)$ baita).

$f \in L^2 (V^2 ; K)$ ***antisimetrikoa*** da $f(x,y) = - f(y,x)$ bada, $\forall x,y \in V$

OINARRI-ALDAKETA

Lehen aipatu den bezala V-ko $B = \{u_1, u_2, ...u_n\}$ oinarri bat finkatuz gero, bijekzio bat dago $L^2 (V^2 ; K)$ multzoaren eta n ordenako matrize karratuen multzoaren artean $f(x,y) = X^T.A.Y$ bitartez. A matrizeari $f(x,y) = X^T.A.Y$ forma bilineala dagokio eta A matrizeari f-ren matrize deritzo B oinarriarekiko.

$B' = \{v_1, v_2, ...,v_n\}$ oinarria hartzen bada, f-ren adierazpen analitikoa aldatu egingo da eta dagokion matrizea A' bada, A matrizearekin erlazionatuta egongo da $\mathbf{A' = P^T.A.P}$ bitartez, non P oinarri-aldaketaren matrizea den. Ikus dezagun:

P oinarri-aldaketaren matrizea bada, $X = P.X'$ beteko da. f -ren adierazpena koordenatu berrietan $f(x,y) = X'^T.A'.Y'$ ateratzeko honakoa egingo da:

$$f(x,y) = X^T.A.Y = (P.X')^T.A.(P.Y') = X'^T.(P^T.A.P).Y' \Rightarrow A' = P^T.A.P$$

A eta A' kongruenteak direla esaten da.

Oharra: Ez nahasi "kongruentzia" antzekotasunarekin, zeren eta bi matrize antzekoak baitira $A' = P^{-1}.A.P$ bada. Kontzeptu desberdina da.

HEINA

Forma bilineal baten heina bere matrizearen heina da. Espazioaren dimentsioa baino txikiagoa bada, forma *endekatua* deitzen zaio.

BEKTORE KONJOKATUAK

Bi bektore x eta y konjokatuak dira, f forma bilineal batekiko $f(x,y) = 0$ bada.

NUKLEOA

Espazioko bektoreekiko konjokatuak diren bektoreen multzoa da. Hau da:

$$\text{Ker } f = \{y \in V \ / \ f(x,y) = 0 \quad \forall x \in V\}$$

Nukleoa aurkitzeko nahikoa da $AY = o$ exijitzea.

Oso erraza da hau frogatzea: $\text{Ker } f = \{o\} \Leftrightarrow$ f ez da endekatua.

11.3. FORMA KOADRATIKOAK

Ekuazio koadratikoak ikertu nahi dira, hau da, zein konika (zirkunferentzia, parabolak, elipseak...) edo koadrika (esfera, elipsoidea...) adierazten duten. Matematikan ez ezik, beste arlo batzuetan ere erabiltzen dira, adibidez, ekonomian kostu-funtzioak aztertzeko edo ingeniaritza aeroespazialean.
Aurretik forma koadratikoak aztertuko dira.

11.3. DEFINIZIOA: Izan bitez V K gorputzaren gaineko bektore-espazio bat eta $f : V^2 \to K$ forma bilineal bat V gainean. Orduan $w : V \to K \,/\, w(x) = f(x,x) \quad \forall x \in V$ aplikazioari ***forma koadratiko*** (f forma bilinealari lotuta) deitzen zaio.

Bistan denez, forma bilineal bakoitzak forma koadratiko bat definitzen du. Elkarrekikoa ez da betetzen, zeren eta g (x,y) forma bilinealak, $g(x,y) = f(y,x)$ definituta, eta f (x,y) forma bilinealak forma koadratiko bera definitzen baitute.

Forma koadratikoen multzoa Q (V,K) adieraziko da.

PROPIETATEAK

1. $w(k.x) = k^2.\, w(x) \qquad \forall x \in V \text{ eta } \forall k \in K$
   Frog.: $w(k.x) = f(k.x, k.x) = k^2.f(x,x) = k^2.\, w(x)$

2. $w(o) = 0$
   Frog.: $w(o) = f(o,o) = 0$

3. $w(x + y) = w(x) + w(y) + f(x,y) + f(y,x) \qquad \forall x,y \in V$
   Frog.: $w(x + y) = f(x + y, x + y) = w(x) + w(y) + f(x,y) + f(y,x)$

Ikusi da $w(o) = 0$ dela, baina posible da $w(x) = 0$ izatea beste bektoreentzat. Hori betetzen duten bektoreek forma koadratikoaren nukleoa osatzen dute.

FORMA POLARRA

Izan bedi $w \in Q(V,K)$ forma koadratiko bat. f forma bilineal bati lotuta egongo da eta aipatu den bezala ez da bakarra izango, zeren eta beste g forma bilineal batzuei ere lotuta egongo baita. w forma koadratikoa finkatzen duten forma bilineal guztien artean, p bakarra dago simetrikoa dena. w-ri lotutako p forma lineal horri ***forma polar*** deritzo eta honela gelditzen da definituta:

$$p(x,y) = \frac{1}{2}.(f(x,y) + f(y,x))$$

Frog.:

a) p simetrikoa da: $p(x,y) = \frac{1}{2}.(f(x,y) + f(y,x)) = \frac{1}{2}.(f(y,x) + f(x,y)) = p(y,x)$

b) w lotuta dago p forma bilinealari: $p(x,x) = \frac{1}{2}.(f(x,x) + f(x,x)) = f(x,x) = w(x)$

c) Simetriko bakarra da. Demagun g ere simetrikoa dela, orduan:

$$w(x+y) = w(x) + w(y) + g(x,y) + g(y,x) = w(x) + w(y) + 2.g(x,y)$$
$$w(x+y) = w(x) + w(y) + p(x,y) + p(y,x) = w(x) + w(y) + 2.p(x,y)$$

eta ondorioz $\frac{1}{2}.[w(x+y) - w(x) - w(y)] = g(x,y) = p(x,y)$

Beraz, L_s^2 (V, K) forma bilineal simetrikoen multzoaren eta Q (V,k) forma koadratikoen multzoaren artean bijekzio bat dago:

$$L_s^2(V,K) \longrightarrow Q(V,K) \qquad \text{non} \quad w(x) = f(x,x) \quad \text{den eta}$$
$$f \longrightarrow w \qquad f(x,y) = \frac{1}{2}(w(x+y) - w(x) - w(y)) \text{ den}$$

Beraz, forma koadratiko bakoitzari matrize bat egokitu ahal zaio, dagokion forma polarraren matrizea hain zuzen ere.

11.1. PROPOSIZIOA: $w \in Q$ (V,K) forma lineal baten matrizea simetrikoa da, eta ondorioz, ortogonalki diagonalgarria.

Frog.: - simetrikoa da, zeren eta dagokion forma polarra, p(x,y) simetrikoa baita.
- diagonalgarria da teorema espektralak ziurtatzen digunez.

adibidea: Izan bedi $w : R^2 \to R$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen bitartez definitutako forma koadratikoa. Kalkulatu forma koadratikoaren adierazpena bakuntzen den oinarri bat.

Ebaz.: v =(x,y) R^2-ko bektorea bada, $w(v) = w(x,y) = (x,y).\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$$(x,y).\begin{pmatrix} 4x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix} = 4x^2 + 2xy + 2yx + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$$

Forma lineal hori diagonaltzeko bere balio propioak aurkituko ditugu: $(4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$ eta $\lambda_1 = 0$ eta $\lambda_2 = 5$ dira. Balio propio horiei dagozkien bektore propioak kalkulatuko ditugu:

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow S_1(\lambda_1) = \{(x, -2x)\}$ eta $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$ hartuko da.

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + 2y = 0 \Rightarrow S_2(\lambda_2) = \{(2y,y)\}$; $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.(2,1)$ hartuko da.

Ondorioz, $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea oinarri-aldaketaren matrizea da eta w forma koadratikoaren adierazpen matriziala $B = \{u_1, u_2\}$ oinarriarekiko $A' = P^T.A.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ izango da. Orduan, forma koadratikoaren itxura askoz bakunagoa da, zeren eta $u' = P^T.u$ bada, $w(u') = w(x', y') = (x',y').\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5.y'^2$ izango baita.

Forma koadratikoak diagonaltzeko hainbat modu daude. Posible da matrizeko errenkadekin oinarrizko eragiketak egitea beste kongruente eta diagonal bat aurkitu arte. Hori ez da testu honetan ikusi, baina hurrengo adibidean erakusten da zein den hori gauzatzeko erabil daitekeen prozedura.

Kontuan hartu diagonaltze honek ez duela zerikusirik aurreko kapituluan ikusi den diagonaltze arruntarekin. Horrengandik bereizteko, askotan, diagonaltze hori, hau da, balio propioak aurkituz egiten dena, *hertsiki diagonaltzea* dela esaten.

Hemen erabiliko dena hau izango da, baina oinarri ortonormala erabiliz ("ortogonalki diagonaltzea" deritzona) aurreko adibidean egin den bezala, zeren eta forma koadratikoen matrizeak simetrikoak baitira, eta ondorioz, beti izango dira posible hertsiki (eta ortogonalki) diagonaltzea. Hori egiten da matrize ortogonalek plano eta espazioko biraketa eta simetriak adierazten dituztelako.

Kontuan hartu forma koadratiko bati matrize diagonal desberdinak dagozkiola eta zein den diagonaltze-prozesua (hau da, egindako oinarri-aldaketaren arabera) matrize kongruente desberdinak ateratzen direla.

11.4. FORMA KOADRATIKOEN SAILKAPENA

Izan bedi $f : V_n \rightarrow R$ forma koadratiko bat.

- *Definitu positiboa* da $f(v) > 0$ bada, $\forall v \in V_n, v \neq o$

  Kasu honetan balio propio guztiak positiboak dira.

- *Definitu negatiboa* da $f(v) < 0$ bada, $\forall v \in V_n, v \neq o$

  Kasu honetan balio propio guztiak negatiboak dira.

- *Erdidefinitu positiboa* da f (v) $\geq$ 0 bada eta f endekatua (hau da, zero ez diren bektoreak existitzen dira, non f (v) = 0 den).

Balio propio bat gutxienez zero da eta gainerakoak positiboak dira.

- *Erdidefinitu negatiboa* da f (v) $\leq$ 0 bada eta f endekatua.

Balio propio bat gutxienez zero da eta gainerakoak negatiboak dira.

- *Indefinitua* dela esaten da balio propio batzuk positiboak eta besteak negatiboak badira.

Kontuan hartu diagonaltze-prozesua hertsiki egiten ez bada, matrize diagonal desberdinak atera daitezkeela (oinarri-aldaketaren arabera), baina diagonal nagusiko gai positibo eta negatiboen kopurua inbariantea da (Silvester teoremak frogatzen duen bezala). Kopuru positibo eta negatiboen arteko kenketari *signatura* deitzen zaio.

adibidea: Sailkatu w (x,y,z) = $2x^2 - y^2 + z^2 + 4xy - 4xz + 8yz$ forma koadratikoa.

Ebaz.: Bere matrizea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ da. 312. orrialdean ortogonalki diagonaldu da. Bere balio propioak 3 (bikoitia) eta -6 dira. Bere forma diagonala ondoko hau da:

$A' = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Beraz, forma indefinitua da.

Matrize-aldaketa $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ zen eta $A' = Q^T.A.Q$ (non $Q^T = Q^{-1}$)

A matrize simetriko bat diagonaltzea posible da, hau da, beste matrize kongruente diagonal bat aurkitzea, errenkadetan oinarrizko eragiketak eginez. Prozedura honako hau da:

- A matrizea eta identitatea elkarrekin idazten dira.
- A matrizeko errenkadetan oinarrizko eragiketak egiten dira diagonal nagusiko gaiak zero bilakarazteko. Eragiketa berak A-ko zutabeei aplikatzen zaizkie eta simetrikoa denez, diagonal nagusiko gaiak ere zero egiten dira.

- Egindako eragiketak identitate errenkadei aplikatzen zaizkie.
- A diagonala denean, identitate matrizeko errenkadek P oinarri bat osatzen dute. Matrizea oinarri honekiko diagonala da (lortu dena, hain zuzen ere). Beraz, bektore hauek P aldaketa-matrizeko zutabeak izango dira.

Ikus dezagun emandako A matrize honetan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3:E3+E1]{2:E2-E1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3:E\cdot+2E2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$ $\Rightarrow$ beraz, B' $\{u_1,u_2,u_3\}$ oinarri berri honekiko

$$\begin{cases} u_1 = e_1 \\ u_2 = -e_1 + e_2 \\ u_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}$$ matrizea diagonala da: $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Aldaketa-matrizea $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ da eta $A'' = P^T . A . P$ da.

Ikusten denez signatura bera du.

Oharra: A eta A' matrizeak antzekoak eta kongruenteak dira, Q matrizea ortogonala baita (kasu honetan aztarna mantentzen da 2 + (-1) + (-1) = 3 + 3 + (-6)), baina A eta A'' kongruenteak dira baina ez antzekoak ($P^T \neq P^{-1}$), eta aztarna, ondorioz, ez da mantentzen.

11.5. BARIETATE ETA EKUAZIO KOADRATIKOAK

11.4. DEFINIZIOA: $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}.x_i.x_j + 2\sum b_i.x_i + c = 0$ ekuazioari ***ekuazio koadratiko*** deitzen zaio eta ekuazio hori betetzen duten $\{(x_1,x_2,......,x_n)\}$ puntuen multzoari ***barietate koadratiko.***

n = 2 denean: $a_{11}\ x^2 + a_{22}.y^2 + 2.a_{12}.x.y + 2.b_1\ x + 2.b_2\ y + c = 0$ gelditzen da eta barietate koadratikoari ***konika*** deritzo.

n = 3 denean: $a_{11}\ x^2 + a_{22}\ y^2 + a_{33}\ z^2 + 2a_{12}\ x.y + 2a_{13}\ x.z + 2a_{23}\ y.z + 2b_1\ x + 2b_2\ y + 2b_3\ z + c = 0$ gelditzen da eta ***koadrika*** deritzo.

Dugun helburua barietate koadratikoak identifikatu eta sailkatzea da. Horretarako kontuan hartuko da oinarri-aldaketa komenigarri baten bidez ekuazio koadratikoa bakundu ahal dela. Ekuazio bakun honi ***ekuazio kanoniko*** deritzo.

Aurreko adibidean ikusi da nola adieraz daitekeen $2x^2 - y^2 + z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 0$ era bakunagoan ($3x'^2 + 3y'^2 - 6z'^2 = 0$) oinarri-aldaketa bat eginez.

Oinarri-aldaketa hori ardatzen biraketa bati lotuta egon daiteke, esaterako. Lotura hori zein den ikusiko da (koniketan bakarrik), era aljebraikoan egindakoari interpretazio grafikoa ere emateko. Hartara, ekuazio kanonikoaren bila hasiko gara:

Ekuazio koadratikoa era matrizialean idazten bada:

$$(x^1, x^2, ...,x^n).\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + 2\ (b_1, b_2, ..., b_n).\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c = 0$$

eta $x = (x^1, x^2, ...,x^n)$, $b = (b_1, ...,b_n)$ eta $A = (a_{ij})$ idazten badira, ekuazioa honela gelditzen da:

$$x.A.x^T + 2.b.x^T + c = 0$$

a) Lehenengo pausoa: A simetrikoa denez, badakigu diagonaldu ahal dela oinarri ortogonalaren aldaketa baten bitartez, hain zuzen ere A matrizearen bektore propioek osatzen dutena. Izan bitez $\lambda_1, ...,\lambda_n$ A-ren balio propioak eta Q oinarri-aldaketaren matrizea. Orduan $x^T = Q.y^T$ da (edo $x = y.Q^T$), non y $(y_1, ...,y_n)$ den x puntuaren adierazpena oinarri berri horretan.

Ekuazioaren lehenengo batugaia honela idatziko da:

$$x.A.x^T = y.Q^T.A.Q.y^T = \quad (y_1, ...,y_n).\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.y_i^2$$

bigarren batugaia, $2.b.x^T \;= 2.b.Q.y^T = 2.(b_1, ...,b_n).Q.\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 2.\sum_{i=1}^{n} \beta_i.y_i$

eta ekuazioa horrela idatziko da: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.y_i^2 + 2.\sum_{i=1}^{n} \beta_i.y_i + c = 0$

eta era honetan $x_i.x_j$ terminoak desagertu egin dira ekuazioan.

b) Bigarren pausoa: termino linealak ezabatzea.

Demagun lehenengo r balio propioak ez direla zero eta λ_{r+1} = ... = $\lambda_n = 0$ dela (beti da posible berriro ordenatzea). Orduan $\lambda_i \neq 0$ den bakoitzarentzat (i = 1.....r) ondoko bi batugaiak elkartu ahal dira:

$$\lambda_i\, y_i^2 + 2\beta_i\, y_i \;= \lambda_i\,.(y_i + \beta_i\,/\lambda_i)^2 - \beta^2{}_i\,/\,\lambda_i$$

eta z_i aldagai berriak definitzen badira: $\left.\begin{array}{lll} z_i = y_i + \dfrac{\beta_i}{\lambda_i} & i = 1,....., r & \text{denean} \\ z_i = y_i & \text{gainerako} & \text{i-rentzat} \end{array}\right\}$

ekuazioa honela jarri ahal izango da:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i.z_i^2 + 2.\sum_{i=r+1}^{n} \beta_i.z_i + c' = 0 \qquad \text{non } c' = c - \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} \text{ den.}$$

Nolakoak diren β_i hauek barietate karratuak sailkatzen dira:

1. GAINAZAL ZENTRATUAK $\quad \beta_{r+1}$ = ... = $\beta_n = 0$ direnean.

2. GAINAZAL EZ ZENTRATUAK $\quad \beta_I \neq 0$ i batentzat ($r + 1 \leq i \leq n$)

Kasu orokor hau aztertu beharrean R^2 eta R^3 kasu partikular bakarrak aztertuko dira. n = 2 den kasuan, barietate koadratikoei konika deitzen zaie eta n = 3 denean, koadrika.

11.6. KONIKAK

Hemen $V = R^2$ dela suposatuko da (matrizeak 2x2 izango dira).

Ikusi den bezala w forma koadratiko bati dagokion A matrize simetrikoa ortogonalki diagonaldu daiteke $\{u_1,u_2\}$ oinarri ortonormal bat hartuz. Bektore propio normalizatuek eratzen duten matrizea P bada, $P^T.A.P$ diagonala izango da. P matrizea ortogonala da, eta ondorioz, $1 = |P^{-1}.P| = |P^T.P| = |P^T|.|P| = |P|^2 \Rightarrow |P| = \pm 1$.

$|P| = -1$ bada, P-ko bi errenkadak truka daitezke, eta ondorioz, beti $|P| = 1$ dela kontsidera daiteke. Orduan $|P| = 1$ bada, P matrizeak biraketa bat adierazten du:

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrizea $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ moduan idatzi ahal da (8.14. arloan ikusi zen)

eta $P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ R^2 espazioan α graduko matrize-biraketa da.

α ondoko zenbakia da:

*	$a \geq 0$	eta	$c > 0$	badira	$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} a$	$(o < \alpha \leq \frac{\pi}{2})$
*	$a \geq 0$	eta	$c < 0$	"	$\Rightarrow \alpha = 2\pi - \cos^{-1} a$	$(\frac{3\pi}{2} \leq \alpha < 2\pi)$
*	$a \leq 0$	eta	$c > 0$	"	$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} a$	$(\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi)$
*	$a \leq 0$	eta	$c < 0$	"	$\Rightarrow \alpha = 2\pi - \cos^{-1} a$	$(\pi < \alpha \leq \frac{3\pi}{2})$
*	$a = 1$	eta	$c = 0$	"	$\Rightarrow \alpha = 0$	
*	$a = -1$	eta	$c = 0$	"	$\Rightarrow \alpha = \pi$	

Hau oso ongi etorriko zaigu koniken laburtzea geometrikoki interpretatzeko.

KONIKAREN EKUAZIOA

Barietate koadratiko baten definizioa (11.4. defin.) n = 2 kasura aplikatzen denean, konikaren definizioa lortzen dugu:

$a_{11} x^2 + a_{22}.y^2 + 2.a_{12}.x.y + 2.b_1 x + 2.b_2 y + c = 0$. Non $(x,y) \in R^2$-ko puntu bat den $\{O ; e_1, e_2\}$ erreferentzia ortonormal batekiko.

Era matrizialean idatzi ahal da: $(x,y).\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2.(b_1,b_2).\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0.$

Demagun λ_1 eta λ_2 (a_{ij}) matrizearen balio propioak direla eta u_1 eta u_2 dagozkien unitate bektore propio ortogonalak. Matrizea $\{u_1,u_2\}$ oinarriarekiko diagonala da eta izan bedi P oinarri-aldaketaren matrizea. Ez ahaztu P matrizearen zutabeak u_1 eta u_2 bektoreak direla (gogoratu erreferentzia-aldaketa honi biraketa bat dagokiola)

(x,y) puntuaren koordenatuak $\{O\ ;\ u_1,u_2\}$ erreferentziarekiko (x’,y’) badira, ondoko hau beteko da: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Ondorioz, ekuazioa beste era honetara idatz daiteke:

$$(x',y').\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2.\ .(b_1,b_2).P.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + c = 0.$$

eta horren garapena ondoko ekuazioa da: $\quad \lambda_1.x'^2 + \lambda_2.y'^2 + m.x' + n.y' + c = 0 \quad (*)$

Bi kasu daude:

- Lehenengo kasua: $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ denean.

Orduan, ekuazioa honela jar daiteke:

$\lambda_1.\left(x' + \frac{m}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2.\left(y' + \frac{n}{2\lambda_2}\right)^2 + \left(c - \frac{m^2}{4\lambda_1} - \frac{n^2}{4\lambda_2}\right) = 0$ eta termino independenteari p deituz eta beste erreferentzia-aldaketa bat egiten bada, ondoko translazioa hain zuzen ere: $\quad x'' = x' + \frac{m}{2\lambda_1} \qquad y'' = y' + \frac{n}{2\lambda_2}$

beraz, ekuazioaren itxura ondoko hau izango da:

$\lambda_1.\ x''^2 + \lambda_2.y''^2 + p = 0$ EKUAZIO LABURTUA

eta gogoratu hau dela konikaren ekuazioa ardatz berriekiko, eta ardatz hauek atera dira jatorrizkoen biraketa eta translazio bat eginez. Hau da, bi erreferentzia-aldaketa egin dira:

$$\{O\ ;\ e_1,\ e_2\} \xrightarrow{\text{biraketa}} \{O\ ;\ u_1,\ u_2\} \xrightarrow{\text{translazioa}} \{O'\ ;\ u_1,\ u_2\}$$

Nolakoak diren koefizienteak konikak leku geometriko desberdinak adierazten ditu:

$$p \neq 0 \begin{cases} \text{Ikur}\lambda_1 = \text{Ikur}\lambda_2 \neq \text{Ikur}p & \text{ELIPSEA} \quad \dfrac{x'^2}{-p/\lambda_1} + \dfrac{y'^2}{-p/\lambda_2} = 1 \\ \text{Ikur}\lambda_1 = \text{Ikur}\lambda_2 = \text{Ikur}p & \text{ELIPSE IRUDIKARIA ekuazioak ez du soluziorik} \\ \text{Ikur}\lambda_1 \neq \text{Ikur}\lambda_2 & \text{HIPERBOLA} \quad \dfrac{x'^2}{-p/\lambda_1} - \dfrac{y'^2}{-p/\lambda_2} = 1 \end{cases}$$

$$p=0 \begin{cases} \text{Ikur}\lambda_1 = \text{Ikur}\lambda_2 & \text{konikak PUNTU bakar bat adierazten du (0,0)} \\ \text{Ikur}\lambda_1 \neq \text{Ikur}\lambda_2 & \text{paraleloak ez diren BI ZUZEN dira} \quad y'' = \pm\sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}\,x'' \end{cases}$$

Bigarren kasua: balio propio bat zero da:

Demagun $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$. Orduan (*) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\lambda_2.y'^2 + m.x' + n.y' + c = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_2.\left(y' + \frac{n}{2\lambda_2}\right)^2 + mx' + \left(c - \frac{n^2}{4\lambda_2}\right) = 0$$

termino independenteari p deituz: $\lambda_2.\left(y' + \dfrac{n}{2\lambda_2}\right)^2 + mx' + p = 0$ idatzi ahal da.

- $m \neq 0$ bada, honela jarri ahal da: $\lambda_2.\left(y' + \dfrac{n}{2\lambda_2}\right)^2 + m\left(x' + \dfrac{p}{m}\right) = 0$ eta ondoko translazio hau $\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{p}{m} \\ y'' = y' + \dfrac{n}{2\lambda_2} \end{cases}$ egiten bada: $\lambda_2.y''^2 + m.x'' = 0$ gelditzen da eta hau PARABOLA bat da.

- $m = 0$ bada, ekuazioa $\lambda_2.\left(y' + \dfrac{n}{2\lambda_2}\right)^2 + p = 0$ geratzen da eta $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \dfrac{n}{2\lambda_2} \end{cases}$ translazioa eginez: $\lambda_2.y''^2 + p = 0$ gelditzen da, hau da $y'' = \pm\sqrt{-\dfrac{p}{\lambda_2}}$ eta honek honako hau adierazten du:

- BI ZUZEN PARALELO Ikurp $\neq$ Ikurλ_2 bada
- DEUS EZ Ikurp = Ikurλ_2 bada
- ZUZEN BAKARRA izango da p zero bada (y'' = 0).

LABURPENA

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrizea ortogonalki diagonalduz gero, P matrizearen bitartez ondoko hau betetzen da: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P^{-1}. \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.P$ eta beraien determinanteak berdinak dira. Ondorioz sailkapena horrela labur daiteke:

- $|A| > 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ eta Ikurλ_1 = Ikurλ_2 : ELIPSEAK
- $|A| < 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ eta Ikur$\lambda_1 \neq$ Ikurλ_2 : HIPERBOLAK
- $|A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ edo $\lambda_2 = 0$: PARABOLAK

11.7. KOADRIKAK

Barietate koadratiko baten definizioa n = 3 kasura aplikatzen denean koadrikaren definizioa dugu:

$a_{11}\,x^2 + a_{22}.y^2 + a_{33}.z^2 + 2.a_{12}.x.y + 2a_{13}.xz + 2a_{23}.yz + 2.b_1\,x + 2.b_2\,y + 2.b_3.z + c = 0$ non $(x,y,z) \in R^3$-ko puntu bat den $\{O\,;\,e_1, e_2, e_3\}$ erreferentzia ortonormal batekiko.

Era matrizialean: $$(x,y,z).\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2.(b_1,b_2,b_3).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0.$$

Demagun λ_1, λ_2 eta λ_3 matrizearen balio propioak direla eta $\{u_1,u_2,u_3\}$ dela oinarri berria, non matrizea diagonala den, hau da, u_1, u_2 eta u_3 hiru unitate bektore propio ortogonalak dira (gogoratu erreferentzia-aldaketa honi hiru biraketa dagozkiola, Euler angelukoak)

Demagun (x,y,z) puntu baten koordenatuak $\{O\,;\,u_1,u_2,u_3\}$ erreferentziarekiko (x',y',z') direla. Orduan, ondoko hau beteko da: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ non P oinarri-aldaketa den, hau da, u_1,u_2 eta u_3 bektoreek osatzen dutena. Ondorioz, ekuazioa beste era honetan idatz daiteke:

$$(x',y',z').\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+2..(b_1,b_2,b_3).P.\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+c=0.$$

Eta horren garapena ondoko ekuazioa da:

$$\lambda_1.x'^2+\lambda_2.y'^2+\lambda_3.z'^2+m.x'+n.y'+q.z'+c=0 \qquad (*)$$

Hiru kasu daude:

Lehenengo kasua: $\lambda_i \neq 0$ (i = 1,2,3)

Ekuazioa honela jar daiteke:

$$\lambda_1.\left(x'+\frac{m}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2.\left(y'+\frac{n}{2\lambda_2}\right)^2+\lambda_3.\left(z'+\frac{q}{2\lambda_3}\right)^2+\left(c-\frac{m^2}{4\lambda_1}-\frac{n^2}{4\lambda_2}-\frac{q^2}{4\lambda_3}\right)=0$$

Orain beste erreferentzia-aldaketa bat egiten bada ondoko translazioaren bitartez: $x''=x'+\frac{m}{2\lambda_1}$ $\quad y''=y'+\frac{n}{2\lambda_2}$ $\quad z''=z'+\frac{q}{2\lambda_3}$, eta termino independenteari p deitzen bazaio, ekuazioa ondoko ekuazio bilakatzen da:

$$\lambda_1.\,x''^2+\lambda_2.y''^2+\lambda_3.z''^2+p=0 \qquad \text{EKUAZIO LABURTUA}$$

eta gogoratu hau dela koadrikaren ekuazioa ardatz berriekiko. Ardatz hauek jatorrizkoen hiru biraketak eta translazio bat eginez atera dira. Hau da, bi erreferentzia-aldaketa egin dira:

$$\{O\,;\,e_1,\,e_2,\,e_3\}\xrightarrow{\text{biraketak}}\{O\,;\,u_1,\,u_2,\,u_3\}\xrightarrow{\text{translazioa}}\{O'\,;\,u_1,\,u_2,\,u_3\}$$

Nolakoak diren koefizienteak koadrikak leku geometriko desberdinak adierazten ditu. Sailkapena egin dezagun:

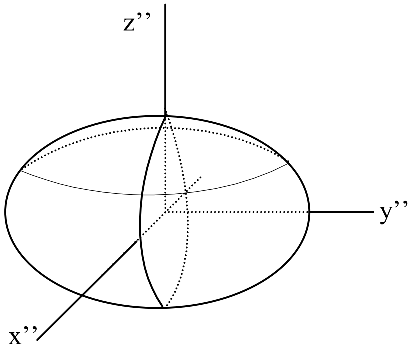
$\boxed{p \neq 0}$ kasu honetan ekuazioa $A.x''^2+B.y''^2+C.z''^2=1$ moduan idatzi ahal da.

Koefizienteen ikurrak zein diren, ondoko kasuak ditugu:

- $A > 0,\ B > 0,\ C > 0$

orduan $a^2 = 1/A,\ b^2 = 1/B,\ c^2 = 1/C$ deituz, ekuazioa honela geratzen da:

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=1$$ ELIPSOIDEA



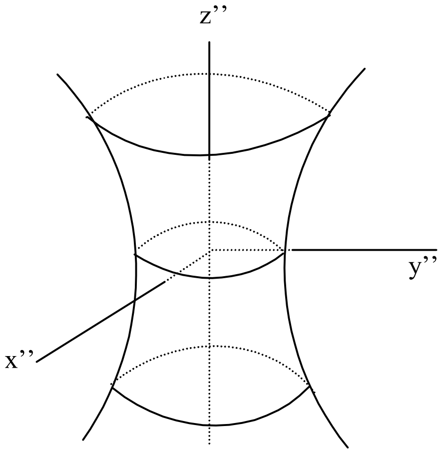
Agerikoa da elipsoide eta plano koordenatuen arteko ebakidurak, baita x'' = k, y'' = k eta z'' = k planoekin ere, elipseak direla.

- Bi balio propio berdinak badira, BIRAKETA-ELIPSOIDEA deitzen zaio.
- Hiru balio propioak berdinak badira, ESFERA lortzen da.

- $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$

orduan, $a^2 = 1/A$, $b^2 = 1/B$, $c^2 = -1/C$ deituz, ekuazioa honela geratzen da:

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=1$$ HOSTO BATEKO HIPERBOLOIDEA



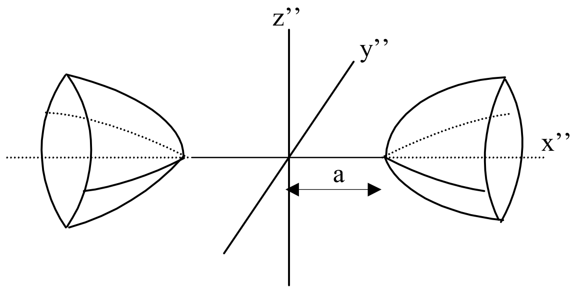
Kasu honetan elipsoidearen eta z = k planoen arteko ebakidurak elipseak dira, non ardatzerdiak (a eta b) handitzen doazen k handitzen denean, baina x = k eta y = k planoekiko ebakidurak hiperbolak dira.
Bi balio propio berdinak badira, $\lambda_1 = \lambda_2$, orduan **biraketa-hiperboloide** deitzen zaio, zeren eta $\begin{cases} \dfrac{x''^2}{a^2}-\dfrac{z''^2}{c^2}=1 \\ y''=0 \end{cases}$ hiperbolaren biraketatik lortzen baita (z'' ardatzarekiko).

- $A > 0$, $B < 0$, $C < 0$

orduan, $a^2 = 1/A$, $b^2 = -1/B$, $c^2 = -1/C$ deituz, ekuazioa honela geratzen da:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$$

BI HOSTOKO HIPERBOLOIDEA



$b = c$ bada, biraketa--hiperboloidea da.

Bere ebakidura $x'' = k$ planoekin ($|k| > 1$ izanik) elipseak dira eta hauen ardatzerdiak handitzen doaz k handitzean.

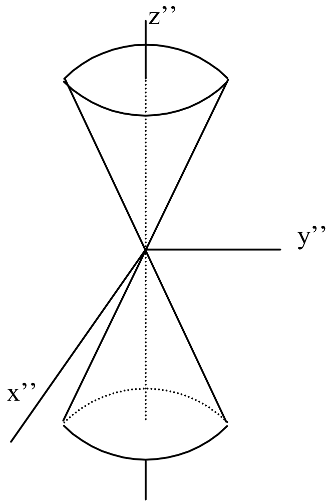
$\boxed{p = 0}$ bada, ekuazioa hauxe izango da: $\lambda_1.x''^2 + \lambda_2.y''^2 + \lambda_3.z''^2 = 0$

- Ikur λ_1 = Ikur λ_2 = Ikur λ_3 badira, koadrika (0,0,0) puntua besterik ez da.

- Bi ikur berdinak, Ikur λ_1 = Ikur λ_2 adibidez, eta hirugarrena desberdina bada, orduan koadrika honela idatzi ahal da:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 0$$

non $a^2 = 1/\lambda_1$, $b^2 = 1/\lambda_2$, $c^2 = -1/\lambda_3$ diren.



Ekuazio honek KONO bat adierazten du, zeren eta (r_1,r_2,r_3) puntuak ekuazioa betetzen badu, orduan (kr_1,kr_2,kr_3) puntuak ere beteko du ($\forall$k).

Bere ebakidura $z'' = k$ planoekin elipseak dira eta $x'' = k$ edo $y'' = k$ planoekin hiperbolak dira.

Konoa **biraketakoa** da $\lambda_1 = \lambda_2$ bada (kasu honetan $z'' = k$ planoekiko ebakidurak zirkunferentziak dira)

Bigarren kasua: balio propio bat zero denean.

Demagun $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ eta $\lambda_3 = 0$ direla. Orduan, ekuazioa honako hau da:

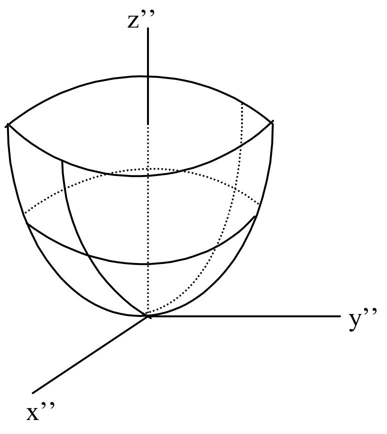
$$\lambda_1.x'^2 + \lambda_2.y'^2 + m.x' + n.y' + q.z' + c = 0$$

$\boxed{q \neq 0}$ denean, ekuazioa $\lambda_1.\left(x'+\dfrac{m}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2.\left(y'+\dfrac{n}{2\lambda_2}\right)^2 + q\left(z'+\dfrac{p}{q}\right) = 0$ moduan jar daiteke, non $p = c - \dfrac{m^2}{4\lambda_1} - \dfrac{n^2}{4\lambda_2}$ den.

$x'' = x' + m/2\lambda_1$, $y'' = y' + n/2\lambda_2$, $z'' = z' + p/q$ *translazioa* eginez koadrikak $\lambda_1.x''^2 + \lambda_2.y''^2 + q.z'' = 0$ ekuazioa du. Hemen z'' bakantzen bada, λ_1 eta λ_2 balio propioen ikurren arabera, bi ekuazio desberdin aterako dira:

$z'' = \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2}$ eta $z'' = \dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2}$ non $a^2 = -\dfrac{q}{\lambda_1}$, $b^2 = -\dfrac{q}{\lambda_2}$ diren.

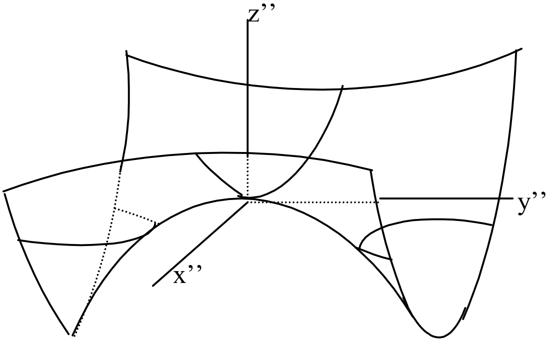
Lehenengoa, hau da $z'' = \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2}$ ekuazioa PARABOLOIDE ELIPTIKOA da.



Bere ebakidura $z'' = k$ $(k > 0)$ planoekin elipseak dira, non ardatzerdiak $a\sqrt{k}$ eta $b\sqrt{k}$ diren.

a = b bada, orduan elipseak zirkunferentzia bilakatzen dira eta **biraketa-paraboloidea** da.

Bigarrena, $z'' = \dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2}$ PARABOLOIDE HIPERBOLIKOA da.



Bere ebakidura z'' = k planoekin hiperbolak dira. Bere ebakidura y'' = h planoekin parabolak dira.

q = 0 bada, ekuazioa $\lambda_1.x'^2 + \lambda_2.y'^2 + m.x' + n.y' + c = 0$ da eta honela jar daiteke:

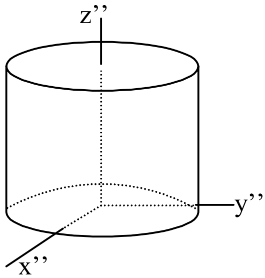
$$\lambda_1.\left(x'+\frac{m}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2.\left(y'+\frac{n}{2\lambda_2}\right)^2 + p = 0 \qquad \text{non } p = c - \frac{m^2}{4\lambda_1} - \frac{n^2}{4\lambda_2} \text{ den.}$$

Orain $x'' = x' + m/2\lambda_1$, $y'' = y' + n/2\lambda_2$, $z'' = z'$ *translazioa* eginez, koadrikak honako ekuazioa du: $\lambda_1.x''^2 + \lambda_2.y''^2 + p = 0$

Ekuazio hau OX''Y'' planoan konika laburtu bat da, eta (x_0, y_0) bere puntu bat da, orduan (x_0, y_0, α) $\forall\alpha\in R$ koadrikaren ekuazioa beteko du. Honek esan nahi du koadrikak zilindro bat adierazten duela. Ikus dezagun zein kasu dauden:

$\boxed{p \neq 0}$

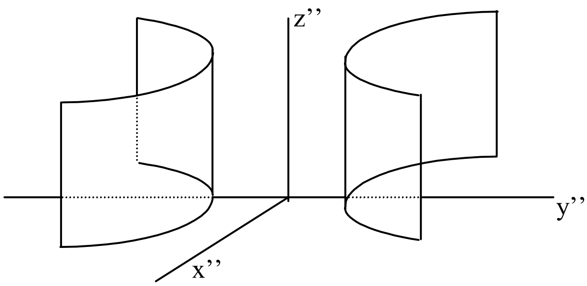
ekuazioa $ax''^2 + by''^2 = 1$ moduan jar daiteke, non $a = -\lambda_1/p$ eta $b = -\lambda_2/p$ diren



- a > 0, b > 0 badira, ZILINDRO ELIPTIKO bat da:

Honez gain, a = b bada, zilindro arrunta dugu.

- $a < 0$, $b > 0$ badira, ZILINDRO HIPERBOLIKOA dugu:



$\boxed{p = 0}$ orduan ekuazioa $\lambda_1 . x''^2 + \lambda_2 . y''^2 = 0$ da.

- $Ikur\lambda_1 \neq Ikur\lambda_2$ ekuazioa $a^2x''^2 - b^2y''^2 = 0$ moduan jar daiteke, non $a^2 = \lambda_1$ eta $b^2 = -\lambda_2$ diren (edo alderantziz, negatiboa dena λ_1 bada). Honek BI PLANO adierazten ditu:

$$ax'' - by'' = 0 \text{ eta } ax'' + by'' = 0 \text{ planoak.}$$

- $Ikur\lambda_1 = Ikur\lambda_2$ bada, ekuazioak duen soluzio bakarra $(0,0,\alpha)$ $\forall\alpha\in$ R da eta konikak ZUZEN BAT adierazten du, OZ'' ardatza hain zuzen ere.

Hirugarren kasua: bi balio propio zero direnean.

Demagun $\lambda_1 \neq 0$ eta $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ direla. Orduan ekuazioa honako hau da:

$\lambda_1 x'^2 + mx' + ny' + qz' + c = 0$. Honela jar daiteke:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{m}{2\lambda_1} \right)^2 + ny' + qz' + p = 0 \qquad \text{non } p = c - \frac{m^2}{4\lambda_1} \text{ den. Hainbat kasu daude:}$$

$\boxed{n = q = 0}$

ekuazioa $\lambda_1 \left(x' + \frac{m}{2\lambda_1} \right)^2 + p = 0$ da eta ondoko translazioa eginez: $x'' = x' + \frac{m}{2\lambda_1}$, $y'' = y'$, $z'' = z'$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 x''^2 + p = 0 \Rightarrow x''^2 = a$ non $a = -p/\lambda_1$ den.

- $a > 0$ bada, BI PLANO PARALELO adierazten du: $x'' = +\sqrt{a}$ eta $x'' = -\sqrt{a}$
- $a = 0$ bada, PLANO BAT: $x'' = 0$

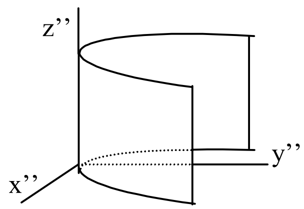
- $a < 0$ bada, ez dago punturik.

$\boxed{q = 0,\ n \neq 0}$

ekuazioa $\lambda_1\left(x'+\frac{m}{2\lambda_1}\right)^2 + n\left(y'+\frac{p}{n}\right) = 0$ da eta ondoko translazioa eginez:

$x'' = x'+\frac{m}{2\lambda_1}$, $y'' = y' + \frac{p}{n}$, $z'' = z$, koadrika $\lambda_1 x''^2 + ny'' = 0$ geratzen da.

Ekuazio hau parabola bat da OX''Y'' planoan eta aurrean ikusi den bezala (x_0, y_0) bere puntu bat da, orduan (x_0, y_0, α) puntuak, $\forall\alpha\in R$, koadrikaren ekuazioa beteko du. Ondorioz, ZILINDRO PARABOLIKO bat da.



$\boxed{q \neq 0,\ n \neq 0}$

kasu hau ikusi berri den kasura eraman daiteke beste erreferentzia-aldaketa komenigarri bat erabiliz eta hori biraketa bat da OX' ardatzarekiko:

$$\{OX'Y'Z'\} \xrightarrow{\alpha^{\circ}-\text{ko biraketa}} \{OX'Y_1'\ Z_1'\}:\ \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix}$$

hau da: $x' = x'_1$, $y' = \cos\alpha\,.y'_1 - \sin\alpha.z'_1$, $z' = \sin\alpha.y'_1 + \cos\alpha.z'_1$ eta ekuazioa honela geratzen da:

$$\lambda_1\left(x'_1+\frac{m}{2\lambda_1}\right)^2 + n(\cos\alpha\,.y'_1 - \sin\alpha.z'_1) + q.(\sin\alpha.y'_1 + \cos\alpha.z'_1) + p = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\lambda_1\left(x'_1+\frac{m}{2\lambda_1}\right)^2 + (n\cos\alpha + q\sin\alpha).y'_1 + (-n\sin\alpha + q\cos\alpha).z'_1 = 0$$ eta angelu-biraketa hautatzen bada $tg\alpha = q/n$ betetzeko, bigarren parentesia zero egiten da:

$$\lambda_1\left(x'_1+\frac{m}{2\lambda_1}\right)^2 + s.y'_1 = 0,$$ non $s = n\cos\alpha + q\sin\alpha$ den.

Honako itxura hau duen ekuazioa aztertu da eta ikusi den bezala ZILINDRO PARABOLIKO bat da.

EBATZITAKO ARIKETAK

1. Egiaztatu $f : R^3 x R^3 \rightarrow R$ $f [(x,y,z),(x',y',z')] = xx' + yy' + zz'$ forma bilineal bat dela.

Ebaz.: Lau axiomak betetzen dituela ikusiko dugu. Suposa dezagun u = (x,y,z), v = (x',y',z') eta w = (x'',y'',z'') direla:

- f (u + v, w) = f [(x + x',y + y',z + z'),(x'',y'',z'')] = (x + x').x'' + (y + y').y'' + (z + z').z'' = xx'' + yy'' + zz'' + x'x'' +y'y'' + z'z'' = f [(x,y,z),(x'',y'',z'')] + f [(x',y',z'),(x'',y'',z'')] = f (u,w) + f (v,w).

- f (u, v + w) = f [(x, y, z),(x'+ x'',y' + y'',z' + z'')] = x.(x' + x'') + y.(y' + y'') + z.(z' +.z'') = xx' + yy' + zz' + xx'' +yy'' + zz'' = f [(x,y,z),(x',y',z')] + f [(x,y,z),(x'',y'',z'')] = f (u,v) + f (u,w).

- f (ku, v) = f [(kx,ky,kz),(x',y',z')] = (kx)x' + (ky)y' + (kz)z' = k (xx' + yy' + zz') = k.f (u,v).

- f (u, kv) = f [(x,y,z),(kx',ky',kz')] = x(kx') + y(ky') + z(kz') = k (xx' + yy' + zz') = k.f (u,v).

Kontuan hartu forma bilineal hau erabilitako biderkadura eskalar arrunta dela.

2. Izan bedi R^3-ren gaineko ondoko forma bilineala: f [(x,y,z),(x',y',z')] = 2xx' –3yz' + xy' – 4yy'. Kalkulatu bere matrizea oinarri kanonikoarekiko eta $\{u_1(1,2,0), u_2(1\text{-}1,1), u_3(0,2,3)\}$ oinarriarekiko.

a) Oinarria kanonikoa $\{e_1(1,0,0),e_2(0,1,0),e_3(0,0,1)\}$ da. Matrizea f (e_i,e_j) gaiez osatuta dago:

f (e_1,e_1) = 2, f (e_1,e_2) =1, f (e_1,e_3) = f (e_2,e_1) = f (e_3,e_1) = f (e_3,e_2) = f (e_3, e_3) = 0
f (e_2, e_2) = - 4, f (e_2,e_3) = -3. Beraz, forma bilineala honela jar daiteke:

$$f [(x,y,z),(x',y',z')] = (x,y,z).\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

b) $\{u_1(1,2,0),u_2(1\text{-}1,1),u_3(0,2,3)\}$ oinarria hartzen bada:

f (u_1,u_1) = - 12, f (u_1,u_2) = 3, f (u_1,u_3) = - 32, f (u_2,u_1) = 12, f (u_2,u_2) = 0,
f (u_2,u_3) = 19, f (u_3,u_1) = - 16, f (u_3,u_2) = 2, f (u_3,u_3) = - 34

Beraz, (x,y,z) eta (x',y',z') badira u eta v bektoreen koordenatuak oinarri honekiko, forma bilineala honela jar daiteke:

$$f(u,v) = (x,y,z).\begin{pmatrix} -12 & 3 & -32 \\ 12 & 0 & 19 \\ -16 & 2 & -34 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Oinarri desberdinekiko matrizeak lotuta daude oinarri-aldaketaren matrizearen bitartez, $A' = P^t.A.P$, eta ondorioz, honako hau beteko da:

$$A' = \begin{pmatrix} -12 & 3 & -32 \\ 12 & 0 & 19 \\ -16 & 2 & -34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = P^T.A.P$$

3. Izan bedi $f : R^2 \to R$ $f[(x,y),(x',y')] = xx' + 3xy' - yx' + 5yy'$ forma bilineala. Kalkulatu

a) Dagokion forma koadratikoaren matrizea.
b) Bere forma polarraren matrizea.
c) Diagonaldu biak.
d) Sailkatu.

Ebaz.: Suposa dezagun u =(x,y) dela.

a) Forma koadratikoa $w(u) = (x,y).\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ da eta matrizea $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b) f-ri dagokion forma polarraren matrizea $W = ½.(F + F^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ da, eta ondorioz,

forma koadratikoa $w(x,y) = (x,y).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ moduan ere jar daiteke.

Kontuan hartu bi moduetara $w(x,y) = x^2 + 5y^2 + 2xy$ ateratzen dela.

Ikusten denez, forma polarra simetrikoa da, nahiz eta dagokion forma bilineala ez izan.

c) Forma bilineal batek ez du zertan diagonalgarria izan simetrikoa ez bada.

Ikus dezagun:

Kasu honetan, kasualitatez, matrizea hertsiki diagonalgarria da:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ eta oinarri bat dago, bektore propioek eratzen dutena, zeinarekiko f-ren matrizea F' = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ den.

- W simetrikoa da eta badakigu hertsiki diagonalgarria dela. Ikus dezagun:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = 3 + \sqrt{5}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$ eta matrize diagonala ondoko hau da W' = $\begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix}$

d) Sailkatzeko nahikoa dugu signatura zein den ikustea. Kasu honetan matrize diagonalaren diagonal nagusiko bi gaiak positiboak dira (kasu guztietan, zeren eta signatura inbariantea baita). Ondorioz, definitua positiboa da.

4. Izan bedi $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $f : R^3 \to R$ *forma bilinealaren matrizea oinarri kanonikoarekiko. Kalkulatu definitzen duen forma koadratikoa eta dagokion forma polarraren matrizea (hau da, forma koadratikoaren matrizea)*

Ebaz.: Dagokion w forma koadratikoa hauxe da: w (u) = f (u,u) eta u (x,y,z) bada, orduan:

$$w(u) = (x,y,z).\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - xy + xz + 7\,yz$$

Teorian ikusi den bezala f-ri w forma koadratiko bakarra dagokio, baina w hau forma bilineal askoren forma koadratikoa da. Haien arteko simetrikoa den bakarra polarra da (p (u,v) = 1/2.(f (u,v) + f (v,u) hain zuzen).

Bere matrizea kalkulatzeko p (e_i, e_j) kalkulatu behar dira:

p (e_1, e_1) = f (e_1, e_1) = 2, p (e_2, e_2) = 2, p (e_3, e_3) = 1

p (e_1, e_2) = 1/2 (f (e_1, e_2) + f (e_2, e_1) = 1/2.(0 - 1) = - 1/2
p (e_1, e_3) = ... = 1/2.(1 + 0) = 1/2
....

Prozesua errepikatuz p-ko matrizea $P = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 2 & 7/2 \\ 1/2 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bistan denez, P lortzeko errazagoa da zuzenean $P = 1/2.(F + F^T)$ egitea.

5. Izan bedi S_2 bi ordenako matrize simetrikoen bektore-espazioa eta izan bedi f forma bilineal bat S_2 gainean, non bere matrizea oinarri kanonikoarekiko $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ den. Kalkulatu: a) f (A, B) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ izanik

b) f-ren heina eta bere nukleoa.
c) Sailkatu f-ri dagokion forma koadratikoa.

Ebaz.: $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right\}$ da eta bere oinarri kanonikoa $\left\{ e_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Horregatik, S_2-ko edozein matrizek $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ hiru koordenatu ditu oinarri horrekiko, (x,y,z) hain zuzen ere (eta horregatik f-ren matrizea 3x3 ordenakoa da).

Beraz, A $(2,1,0)_B$ eta B $(3,2,1)_B$ adieraziko dira.

a) $f(A,B) = (2,1,0) . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2,1,0). \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 17$

b) Bere heina matrizearena da: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ da eta, bistan denez, heina 2 da.

Nukleoa kalkulatuko da orain:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$ x = - z eta y = z betetzen da,

eta ondorioz, Ker f = $\begin{pmatrix} -z & z \\ z & z \end{pmatrix}$ non z$\in$ R den.

c) Dagokion forma koadratikoa w (A) = f (A,A) = (x,y,z). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ da.

Bere balio propioak kalkulatuko dira:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 6\lambda = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3 + \sqrt{2}\ , \lambda = 3 - \sqrt{2}$$

Bi balio positiboak eta bestea zero direnez, forma erdidefinitu positiboa da.

6. Sailkatu m-ren arabera ondoko forma koadratiko hau: $w(x,y) = x^2 + 2mxy + 3y^2$

Ebaz.: Bere matrizea W = $\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 3 \end{pmatrix}$ da. Hertsiki diagonalduko dugu:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & m \\ m & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ \lambda^2 - 4\lambda + 3 - m^2 = 0$$ eta bere soluzioak hauek dira:

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4+4m^2}}{2}$$

Garbi dago edozein m-rentzat bi soluzio dituela, baina haien ikurrak alda daitezke, bere diskriminatzailearen arabera ($4 + 4m^2$):

- $4 + 4m^2 > 16$ bada, hau da $m^2 > 3$, balio propio bat positiboa eta bestea negatiboa dira, eta ondorioz, forma koadratikoa indefinitua da (eta ez endekatua)
- $m^2 = 3$ bada, balioak 0 eta 4 dira, eta ondorioz, erdidefinitu positiboa.
- $m^2 < 3$ bada, bi balioak positiboak dira eta definitu positiboa da.

7. Laburtu eta sailkatu ondoko konika hau: $x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 3x - 4 = 0$.

Ebaz.: Bere ekuazio matriziala hau da: $(x,y).\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (3,0).\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4 = 0$ (*)

Bere determinantea kalkulatuz zer den aurreikusiko da: $\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = -4 < 0$, eta ondorioz, hiperbola bat da.

Matrizearen balio propioak aurkituko dira:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda -1)(1+\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \text{eta} \quad \lambda_2 = -2$$

Orain dagozkien bektore propioak kalkulatuko dira:

- $\lambda_1 = 2$ bada:

$$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x - \sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3}x - 3y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ V(2) = {($-\sqrt{3}$ y,y)} eta y = -1 eginez,

($\sqrt{3}$,-1) oinarri bat dugu. Unitarioa hartuko da: $u_1 = ½\,(\sqrt{3},-1)$.

- $\lambda_2 = -2$ bada:

$$\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3}x + y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ V(-2) = {(x, $\sqrt{3}$ x)} eta x = 1 eginez,

eta unitarioa izatea exijituz gero: $u_2 = ½\,(1, \sqrt{3})$ izango da.

Ondorioz $\{u_1,u_2\}$ oinarriarekiko matrizea $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ da eta aldaketaren matrizea $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ da. Gogoratu matrize hau ardatzen biraketa bati dagokiola.

Beraz, $\{O\ ;\ u_1,u_2\}$ erreferentziarekiko (non puntuen koordenatuak (x',y') diren), konikako ekuazioak (hau da (*) ekuazioak) honako itxura hau hartzen du:

$$(x',y')\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} + (3,0).\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} - 4 = 0$$

Hau da: $2x'^2 - 2y'^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x' + \frac{3}{2}y' - 4 = 0$ eta hori honela jar daiteke:

$2.(x' + 3\sqrt{3}/8)^2 - 2.(y' - 3/8)^2 - \frac{73}{16} = 0.$

Beste erreferentzia-aldaketa bat egiten bada, $\begin{cases} x'' = x' + \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ y'' = y' - \frac{3}{8} \end{cases}$ ekuazioek adierazten dutena (hau da, translazio bat), ekuazioa honela gelditzen da:

$$2.x''^2 - 2.y''^2 - 73/16 = 0.$$

Termino independentea negatiboa da eta Ikur$\lambda_1 \neq$ Ikurλ_2 denez, konikak HIPERBOLA bat adierazten du eta, horrez gain, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ betetzen denez, hiperbola aldekidea da.

Beste modu honetan ere jar daiteke: $\frac{x''^2}{73/32} - \frac{y''^2}{73/32} = 1$.

Beraz, erreferentzia berri horrekiko hiperbola zentratuta dago eta ekuazio horri ekuazio laburtu deitzen zaio.

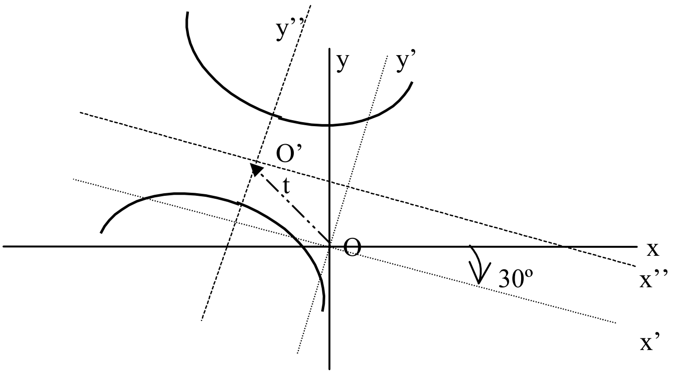
INTERPRETAZIO GEOMETRIKOA

Bi erreferentzia-aldaketa egin dira:

- **Biraketa**: $\{O ; e_1, e_2\} \rightarrow \{O ; u_1, u_2\}$ non P aldaketa-matrizea biraketa bat den: $P = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ da.

Ikusi den bezala α biraketa-angelua determinatuta gelditzen da, $\cos\alpha = a = \sqrt{3}/2$ eginez eta $c = -1/2$ negatiboa denez, laugarren koadrantean dago; ondorioz, $\alpha = 330^o = -30^o$ da.

- **Translazioa**: $\{O\ ;\ u_1, u_2\} \to \{O'\ ;\ u_1, u_2\}$ non translazio-bektorea $t = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}\right)$ den



8. Laburtu eta sailkatu ondoko koadrika hau:

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10xy - 8xz - 10yz + 6x + 12y - 6z + 4 = 0$$

Ebaz.: Era matrizialean idatziko da:

$$(x,y,z).\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -5 & -7 & -5 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (6,12,-6).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 4 = 0$$ eta matrizearen balio propioak kalkulatuko dira:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -4 \\ -5 & -7-\lambda & -5 \\ -4 & -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 90\lambda - 216 = 0.$$ Eta honen erroak

hauek dira: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ eta $\lambda_3 = -12$.

$\lambda_1 = 3$ balio propioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatuko da:

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ -5 & -10 & -5 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x-5y-4z=0 \\ -5x-10y-5z=0 \\ -4x-5y-z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow S(3) = k.(1,-1,1)$$ eta

ondorioz, $\mathbf{u_1 = 1/\sqrt{3}\ (1,-1,1)}$ hartuko da.

$\lambda_2 = 6$ balio propioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatuko da:

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -4 \\ -5 & -13 & -5 \\ -4 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -4x-5y-4z=0 \\ -5x-13y-5z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad S(6) = k.(1,0,-1) \text{ eta}$$

ondorioz, $\mathbf{u_2 = 1/\sqrt{2}\ (1,0,-1)}$ hartuko da.

$\lambda_2 = -12$ balio propioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatuko da:

$$\begin{pmatrix} 14 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & -5 \\ -4 & -5 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 14x-5y-4z=0 \\ -5x+5y-5z=0 \\ -4x-5y+14z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad S(-12) = k.(1,2,1) \text{ eta}$$

ondorioz, $\mathbf{u_3 =}\ 1/\sqrt{6}\ \mathbf{(1,2,1)}$ hartuko da.

Beraz, diagonaltzeko P oinarri-aldaketa honako hau da:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Oinarri berri honek erreferentzia berri bat sortzen du eta puntuen koordenatuak erreferentzia honekiko (x',y',z') baldin badira, koadrikaren ekuazioa honela idatziko da

$$(x',y',z').\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (6,12,-6).\ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 4 = 0$$

Hau da: $3x'^2 + 6y'^2 - 12z'^2 - 4\sqrt{3}\,x' + 6\sqrt{2}\,y' + 4\sqrt{6}\,z' + 4 = 0$. Orain batugaiak elkartuko ditugu: $3.(x' - 2/\sqrt{3})^2 + 6.(y' + 1/\sqrt{2})^2 - 12\,.(z' - 1/\sqrt{6})^2 - 1 = 0$

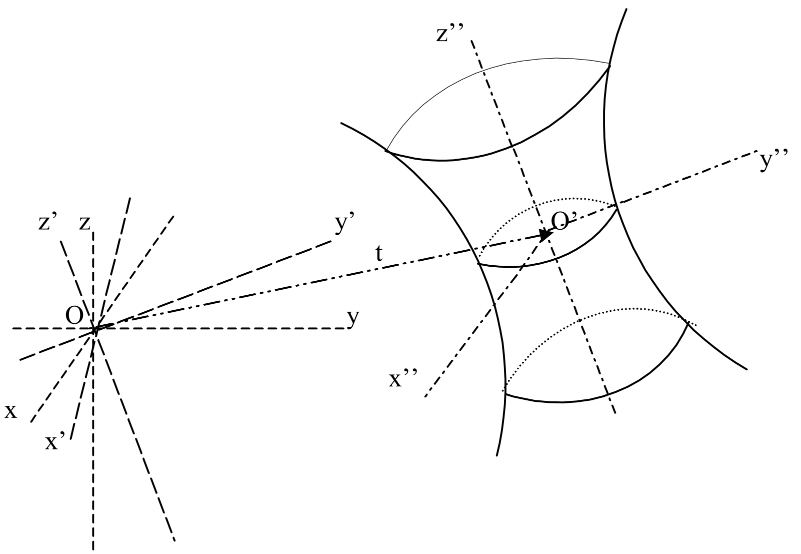
Orain erreferentziaren ondoko translazioa eginez:

$$x'' = x' - 2/\sqrt{3} \qquad y'' = y' + 1/\sqrt{2} \qquad z'' = z' - 1/\sqrt{6}$$

ekuazioa honela gelditukoda da: $3x''^2 + 6y''^2 - 12z''^2 - 1 = 0$ edo beste modu honetara:

$$\frac{x''^2}{1/3} + \frac{y''^2}{1/6} - \frac{z''^2}{1/12} = 1$$

eta hori HOSTO BATEKO HIPERBOLIDE baten ekuazio laburtua da erreferentzia berriarekiko. Erreferentzia hau jatorrizko ardatzak P matrizeak adierazten dituen biraketak eginez lortzen da eta t $(2/\sqrt{3}\,,\ -1/\sqrt{2}\,,\ 1/\sqrt{6})$ bektoreak adierazten duen translazioa eginez.



PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Frogatu $f: R^2xR^2 \rightarrow R \quad f[(x,y),(x',y')] = 3xx' - xy'$ *forma bilineal bat dela eta kalkulatu bere adierazpen matriziala oinarri kanonikoarekiko.*

2. Esan ondoko aplikazioak bilinealak diren:

a) $R^2xR^2 \rightarrow R \ : \ f((x,y),(x',y')) = x + y'$
b) $R^2xR^2 \rightarrow R \ : \ f((x,y),(x',y')) = xx'$

3. Kontsidera dezagun $[a,b] \in R$ *tartean jarraituak diren funtzio errealek osatzen duten M multzoa eta izan bedi* $MxM \rightarrow R$ *ondoko aplikazioa:*

$$Q(f,g) = \int_a^b f(x), g(x).dx \qquad \forall f,g \in M.$$

Froga ezazu forma bilineal bat dela.

4. Aurreko M multzoko bigarren mailako edo txikiagoko P_2 *polinomioen azpimultzoa kontsideratzen bada, kalkulatu Q forma bilinealaren matrizea* $\{1,x\text{-}1,x^2\text{-}1\}$ *oinarriarekiko* $(Q : P_2 \, x \, P_2 \rightarrow [a,b])$.

5. Kalkulatu ondoko forma bilinealei dagozkien forma koadratikoen matrize simetrikoak:

a) $f: R^2 \rightarrow R \quad f((x,y),(x',y')) = 2xx' - 3xy' + yy'$
b) $f: R^3 \rightarrow R \quad f((x,y,z),(x',y',z')) = 2xx' - 3xy' + yy' + 4zy' - zz'$
c) $f: R^3 \rightarrow R \quad f((x,y,z),(x',y',z')) = 2xx' - 3xy' + yy' + 3yx' + 5xz' + 5x'z$
d) $f: R^4 \rightarrow R \quad f((x,y,z,t),(x',y',z',t')) = 2xx' - 3xy' + yy' - 3yx' + 5xz' + x'z - tx' + 2tt'$

6. Diagonaldu aurreko forma bilinealek definitzen dituzten forma koadratikoen matrizeak eta sailkatu.

7. Izan bedi $f: R^3 \rightarrow R$ *ondoko forma bilineala:* $f[(x,y,z),(x',y',z')] = 2xy' - xz' + 3yx' - 2y'z' + zy'$. *Kalkulatu:*

a) *Dagokion w forma koadratikoaren matrize simetrikoa (forma polarrarena)*
b) *Ker w*

8. Sailkatu ondoko forma koadratiko hauek m parametroaren arabera:

a) $w(x,y) = x^2 - 6xy + my^2$
b) $w(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2mxy + 2xz$

9. Laburtu eta identifikatu ondoko konika hauek:

a) $3x^2 - 2xy + 4x - 8y + 2 = 0$
b) $x^2 + 9y^2 + 6xy - 2y + 3 = 0$
c) $x^2 - 3y^2 + 8xy + 6x - 3y + 1 = 0$

10. Laburtu eta identifikatu ondoko koadrika hauek:

a) $x^2 - y^2 + z^2 + 4xz + 2x - y + 4 = 0$
b) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 3x + y - 2z - 5 = 0$
c) $4y^2 + 9z^2 - 4xy - 6xz + 12yz + 4x - 3z + 5 = 0$

12. JORDAN FORMA KANONIKOAK

12.1. FORMA TRIANGELUARRAK

Batzuetan ez da posible endomorfismo bat (edo matrize bat) diagonaltzea, baina posible da oinarri bat aurkitzea, honetan matrizearen itxura bakunagoa baita. Batzuetan era triangeluarrean eta beste kasu batzuetan kaxaz osatuta jarri ahal da.

Hemendik aurrera triangeluarra denean goi-triangeluar idatziko da, nahiz eta hurrengo proposizioak behe-triangeluarrentzat ere betetzen diren.

12.1. PROPOSIZIOA: A matrize bat triangeluarra baldin bada, bere balio propioak diagonal nagusiko elementuak dira.

Frog.: Izan bedi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matrize triangeluarra. Bere polinomio karakteristikoa $p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda).(a_{22} - \lambda)......(a_{nn} - \lambda)$ da eta horren erroak a_{ii} (non $i = 1....n$ den) dira.

12.1. KOROLARIOA: A matrize batentzat P oinarri-aldaketa bat existitzen bada, non triangeluar bilakatzen den, hau da, $A' = P^{-1}.A.P$ triangeluarra dela, orduan A'-ko diagonal nagusiko gaiak A-ko balio propioak dira.

Frog.: Aurreko proposizioaren arabera, A'-ko diagonal nagusiko gaiak bere balio propioak dira eta dagoeneko badakigu bi matrize antzekoek balio propio berdinak dituztela (10.4. propos.).

12.2. PROPOSIZIOA: A_n matrize batek A' antzeko triangeluar bat izango du, baldin eta soilik baldin bere polinomio karakteristikoak p_A, n erro baditu (berdinak edo desberdinak).

Frog.: $\Rightarrow$ aurrekoan, A eta A' antzekoak badira, n balio propio berak dituztela frogatu da.

$\Leftarrow$ demagun orain p_A-k n erro dituela. Indukzio-metodoa erabiliko dugu frogapena egiteko. Argi dago n = 1 bada, A triangeluarra dela. Demagun (n-1)-entzat betetzen dela (errepikapen-hipotesia). Izan bedi k erro bat. Orduan existituko da K^n-ko u_1 bektore propio bat, non $A.u_1 = k.u_1$ den.

Orduan $\{u_1, u_2,......,u_n\}$ oinarri bat existituko da, zeinarekiko A matrizeak ondoko itxura duen:

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} k & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \text{eta } A' = Q^{-1}.A.Q \qquad \text{non } Q = [u_i\,] \text{ den}$$

Agerikoa da $p_A = p_{A'} = (k - \lambda).p_B$ dela. Ondorioz, p_B polinomioak (n - 1) erro izango ditu. Bistan denez, B matrizea n-1 ordenako da.

Errepikapen-hipotesia aplikatuz, (n - 1) ordenakoa P matrize erregular bat existituko da, non $B' = P^{-1}.B.P$ triangeluarra den.

Eraiki dezagun $M = Q.\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)$ matrizea. Bere alderantzizkoa $M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right)Q^{-1}$ da

$A'' = M^{-1}.A.M$ triangeluarra dela frogatuko dugu:

$$A'' = M^{-1}.A.M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right)Q^{-1}.A.\,Q.\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right).A'.\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} k & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \hline 0 & & B & \end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right).\left(\begin{array}{c|ccc} k & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \hline 0 & & B.P & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} k & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \hline 0 & & P^{-1}.B.P & \end{array}\right) \text{ eta}$$

hau triangeluarra da, zeren eta $P^{-1}.B.P$ triangeluarra baita.

Ondorioz, $A'' = M^{-1}.A.M$ triangeluarra da eta aldaketa-oinarria M matrizea da.

Proposizio honen ondorioz, ikusten da matrize bat triangelutu ahal izateko nahikoa dela n balio propio izatea. Ez da beharrezkoa dagozkien azpiespazio propioen dimentsioak eta balio propioen anizkoiztasunak bat egitea. Beraz, diagonaldu ezin diren matrizeak agian triangelutzea posible izango da. Argi dago K gorputza C baldin bada beti izango dela posible triangelutzea, n ordenako polinomioek n erro dituztelako C gorputzean.

adibidea: Esan $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ diagonalgarria ala triangelugarria den.

Ebaz.: Bere ekuazio karakteristikoa $(3 - \lambda).(1 - \lambda).(- 3 - \lambda) + 8.(1 - \lambda) = 0$ da. Bere erroak, beraz, $\lambda_1 = 1$ (bikoitza) eta $\lambda_2 = - 1$ dira.

$\lambda_1 = 1$ balio propioaren azpiespazioa $(-2\alpha,0,\alpha)$ da, dimentsio batekoa, eta ondorioz, A ez da diagonalgarria.

Baina hiru erro direnez (1 bi aldiz eta -1), triangelugarria da. Aurreko proposizioan egin den bezala $u_1 = (- 2,0,1)$ hartzen bada, $A.u_1 = 1.u_1$ da eta beste bi bektore finkatzen badira oinarri bat izateko, adibidez $u_2 = (0,1,0)$,$u_3 = (0,0,1)$, orduan hauek Q matrize baten zutabeak dira eta matrizearen itxura oinarri horrekiko A’ izango da:

$$A' = Q^{-1}.A.Q = \frac{-1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.A.\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

Orain $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen balio propioak 1 eta -1 dira (biak anizkoiztasun batekoak).

$\lambda = 1$ balio propioaren azpiespazioa $(2\alpha,\alpha)$ da eta $e_1 = (2,1)$ hartuz eta $e_2 = (0,1)$ bektorearekin oinarri bat eraikiz $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea osatzen da (matrize honek $P^{-1}.B.P$ triangeluarra egiten du).

Orain $M = Q.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = .\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eraikiz egiaztatuko da $M^{-1}.A.M$ triangeluarra dela:

$$A'' = M^{-1}.A.M = \frac{-1}{4}.\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eta M matrizearen zutabeak oinarri berriaren bektoreak dira, zeinarekiko A triangeluarra den.

12.2. CAYLEY-HAMILTON TEOREMA

Forma kanonikoak eraikitzeko matrize-polinomioak erabili behar dira eta haien propietateak landuko dira ondokoan.

Adibide gisa adieraziko da zer den p (A), p (x) polinomio bat eta A matrize bat izanik. Argi dago matrize bat dela ondoko adibidean ikusten den bezala:

Suposa dezagun p (x) = 2x - 3 eta $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ direla. Orduan:

$p(A) = 2.A - 3.I = 2.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 3.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ izango da.

12.3. PROPOSIZIOA: p (x) polinomio bat bada eta A eta A' antzekoak badira, hau da, $A' = Q^{-1}.A.Q$, orduan p (A) eta p (A') matrizeak ere antzekoak dira, eta gainera, honako hau betetzen da: $p(A') = Q^{-1}.p(A).Q$.

Frog.: Lehenengoan frogatuko da, indukzioz, $A'^n = Q^{-1}.A^n.Q$ dela.
Agerikoa da n = 1 bada betetzen dela. Demagun $A'^{n-1} = Q^{-1}.A^{n-1}.Q$ (indukzio--hipotesia).
Orduan: $A'^n = A'^{n-1}.A' = (Q^{-1}.A^{n-1}.Q).(Q^{-1}.A.Q) = Q^{-1}.A^{n-1}.A.Q = Q^{-1}.A^n.Q$, frogatu nahi zen bezala.
Demagun orain $p(x) = a_r.x^r + a_{r-1}.x^{r-1} + ...+ a_1.x + a_0$ polinomioa dela. Orduan:
$p(A') = a_r.A'^r + ...+ a_1.A' + a_0 = a_r.\ Q^{-1}.A^r.Q + ...+ a_1.\ Q^{-1}.A.Q + a_0$ eta $a_0 = Q^{-1}.a_0.Q$ denez: $p(A') = Q^{-1}.(a_r.A^r + ...+ a_1.A + a_0).Q = Q^{-1}.\ p(A).Q$, frogatu nahi zen bezala.

12.4. PROPOSIZIOA: Izan bitez p (x) polinomio bat eta A diagonalean bloke karratuz osatutako matrize karratu bat (n ordenakoa), hau da:

$$A = \begin{pmatrix} (A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (A_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (A_r) \end{pmatrix} \text{ orduan } p(A) = \begin{pmatrix} (p(A_1)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (p(A_2)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (p(A_r)) \end{pmatrix} \text{ da.}$$

Hori erraz froga daiteke indukzioz A^n-rentzat eta gero polinomioetara pasatuz.

12.5. PROPOSIZIOA: Izan bedi A n ordenako matrize karratu bat ($A\in M_n$). Orduan existitzen da gutxienez p (x) polinomio bat ($\neq$ o), non p (A) = 0 (zero matrizea) den.

Frog.: I, A, A^2, ..., A^{n^2} matrizeek ($n^2 + 1$ matrizeak guztira) M_n-ko mendeko sistema eratzen dute, zeren eta M_n espazioko dimentsioa n^2 baita. Existitzen dira, beraz, λ_0, λ_1, λ_2, ..., λ_{n^2} eskalarrak (non denak ezin diren zero izan), non:

$\lambda_0.I + \lambda_1 .A + \lambda_2. A^2 +........+ \lambda_{n^2} . A^{n^2} = 0$ eta, ondorioz, p (x) = $\lambda_0 + \lambda_1.x + \lambda_2.x^2 +........+ \lambda_{n^2} . x^{n^2}$ zero egiten da A-n, hau da, p (A) = 0.

Interesgarria izaten da A matrize batentzat horrelako polinomioak aurkitzea, hau da, p (A) = 0 izatea, baina proposizioan aurkitutakoa ez da oso interesgarria, zeren eta maila handikoa baita (maila txikiagoko polinomioak aurki daitezkeela ikusiko da) eta, gainera, ez dakigu zein diren aipatutako koefizienteak.

Kontuan hartu behar da A eta A' antzekoak badira eta p (A) = 0 bada, orduan p (A') = 0 ere badela (p (A') = Q^{-1}.p (A).Q baita).

12.1. TEOREMA (CAYLEY-HAMILTON): Matrize guztiak beren polinomio karakteristikoen erroak dira.

Frog.: Suposa dezagun A n ordenako matrize karratu bat dela, $A\in M_n$ (K), eta K gorputza konplexuen C gorputza dela.

Badakigu bere polinomio karakteristikoak p_A (λ), C gorputzean n erro dituela (agian batzuk berdinak), eta ondorioz $p_A(x) = (-1)^n .(x - \lambda_1).(x - \lambda_2).........(x - \lambda_n)$.
Orduan: $p_A(A) = (-1)^n .(A - \lambda_1.I).(A - \lambda_2.I).........(A - \lambda_n.I) = (-1)^n.B_1.B_2........B_n$ non $B_i = A - \lambda_i.I$ izendatu den.
Argi dago B_i matrize hauek truka daitezkeela: $B_i . B_j = (A - \lambda_i.I).(A - \lambda_j.I) = A^2 - \lambda_i.A - \lambda_j.A + \lambda_i .\lambda_j .I = B_j . B_i$

Har dezagun orain $\{u_1,......,u_n\}$ oinarri bat, non A triangeluarra den:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(badakigu oinarri hau existitzen dela K gorputza C gorputza den kasu guztietan).

$B = B_1.B_2.......B_n$ egiten bada, $B(u_i)$ = o dela ($\forall i$ =1....n) frogatuko da, indukzio--metodoa erabiliz:
n = 1 bada, $B = B_1$ eta $B_1(u_i) = (A - \lambda_1.I).u_i = A.u_i - \lambda_1.u_i = \lambda_1.u_i - \lambda_1.u_i$ = o
Demagun orain betetzen dela (n - 1) kasuarentzat, hau da, $B_1.B_2......B_{n-1}(u_i)$ = o, orduan n denean $B(u_i)$ aztertzeko, i-k hartzen dituen balioen arabera, honela egingo dugu:

- $i < n$ bada, $B(u_i) = B_1.B_2.......B_n.(u_i) = B_n.(B_1.B_2.......B_{n-1})(u_i) = B_n.(o) = o$
- $i = n$ bada, $B(u_n) = B_1.B_2.......B_n.(u_n) = B_1.B_2.......B_{n-1}.(A - \lambda_n.I)(u_n) = B_1.B_2.......B_{n-1}$ $(A.u_n - \lambda_n.u_n)$. Baina $A.u_n$ bektorearen koordenatuak, $\{u_1, ...,u_n\}$ oinarriarekiko, A matrizeko azken zutabeko gaiak dira, eta ondorioz, $B(u_n) = B_1.B_2.......B_{n-1}.(a_{1n}.u_1 + a_{2n}.u_2 +......+ a_{n-1,n}.u_{n-1} + \lambda_n.u_n - \lambda_n.u_n) = B_1.B_2 .... B_{n-1}.(a_{1n}.u_1 + a_{2n}.u_2 +......+ a_{n-1,n}.u_{n-1}) = 0$.

Beraz, $B(u_i) = o$ da, hots, $B(x) = o \quad \forall x$, eta ondorioz, $B = 0$ izango da. Baina $p_A(A) = (-1)^n.B$ denez, $p_A(A) = 0$ da, frogatu nahi zen bezala.

Argi dago K gorputza R den kasuan ere beteko dela, zeren eta errealak konplexuak bailiran kontsidera baitaitezke.

Teorema honetatik zenbait emaitza interesgarri ondorioztatzen dira. Korolario gisa aurkeztuko dira.

12.2. KOROLARIOA: $A \in M_n$ bada, A^k matrizea (non $k \geq n$ den) A-ren polinomio gisa jarri ahal da ((k - 1) mailakoa).

Frog.: Ikusi da A matrize baten polinomio karakteristikoa $p_A(x) = (-1)^n.x^n + (-1)^{n-1}.\mathrm{tr}\,A\,.x^{n-1} +.......+ \det A$ dela eta ondorioz:
$p_A(A) = (-1)^n.A^n + (-1)^{n-1}.\mathrm{tr}\,A\,.A^{n-1} +.......+ \det A = 0$ eta nahikoa da A^n bakantzea.

$k > n$ bada, $A^k = A^{k-n}.A^n$ da eta emaitza $k - 1$ mailakoa izango da.

adibidea: Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ matrizea. Orduan $p_A(x) = x^2 + x - 10$ eta $A^2 + A - 10.I = 0$ beteko da. Ondorioz, $A^2 = - A + 10.I$.
A^4 matrizea, esate baterako, adierazi nahi bada: $A^4 = A^2.A^2 = A^2.(- A + 10.I) = - A^3 + 10.A^2$ (hau oraindik ere A-ren arabera adieraz daiteke nahi bada).

12.3. KOROLARIOA: $A \in M_n$ erregularra bada, A^{-1} matrizea A-ren polinomio gisa jarri ahal da ((n - 1) mailakoa).

Frog.: A-ren polinomio karakteristikoa $p_A(x) = a_0 + a_1.x +......+ a_n.x^n$ bada, orduan $a_0.I + a_1.A +......+ a_n.A^n = 0$ izango da, eta A^{-1} matrizeaz biderkatuz:

$a_0.A^{-1} + a_1 + a_2.A + ...+ a_n.A^{n-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}.(a_1 + a_2.A +......+ a_n.A^{n-1})$ zeren eta

$a_0 = \det A \neq 0$ baita.

adibidea: Kalkulatu A^{-1}, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea izanik.

Ebaz.: $p_A(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 21$ da, eta ondorioz, $-A^3 + 2.A^2 + 5.A - 21.I = 0$.

Orain bider A^{-1} eginez $\Rightarrow -A^2 + 2A + 5.I - 21.A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{21}.(-A^2 + 2A + 5.I)$

$$= \frac{1}{21}.\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -9 & 0 & 6 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ikusi da A matrize karratu batentzat beti dela posible p (x) polinomio bat aurkitzea (adibidez bere polinomio karakteristikoa), non p (A) = 0 den. Normalki ez da polinomio bakarra eta mailarik txikienari A-ren *polinomio minimal* deitzen zaio.

Erraz froga daiteke polinomio minimala bakarra dela (konstante biderkatzaile bat izan ezik) eta A-n zero egiten den beste edozein polinomio minimalaren multiploa dela. Ez da batere erraza polinomio hau aurkitzea eta batzuetan polinomio karakteristikotik abiatzen da erro berak dituztela kontuan hartuz.

12.3. JORDAN FORMA KANONIKOAK

Badakigu A eta A' matrizeak antzekoak badira P matrize erregular bat existitzen dela, non $A' = P^{-1}.A.P$ den, eta matrizeen arteko antzekotasun-erlazioa baliokidetasunekoa dela. Geure buruari galdetu al diogu baliokidetasun-klase bakoitzean ba ote dagoen ordezkari bereziren bat, zeinak beste edozein matrize hartuz gero, klase berekoa dela jakiteko aukera ematen digun? Horiei forma kanonikoak deritze eta horietako batzuk Jordan forma kanonikoak dira.

Hauek garrantzi handikoak dira zenbait aplikazioetan, esate baterako, ekuazio diferentzialen sistema homogeneoak ebazteko.

12.1. DEFINIZIOA: n ordenako matrize karratu bat ***Jordan matrizea*** da ondoko itxura hau badu: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ non $\begin{cases} b_s = 0 \\ \text{edo} \\ b_s = 1 \quad \text{orduan} \quad a_s = a_{s+1} \end{cases}$ diren.

a_i errepikatzen direnean, haiek osatzen duten azpimatrizeari Jordan bloke elemental deitzen zaio. Adibidez:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ Jordan matrizea da eta hiru bloke ditu: (2), $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ eta (5).

Kontuan hartu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ matrize diagonal bat Jordan matrize bezala kontsidera daitekeela 4 bloke hartuz: (2),(3),(3) eta (5).

Agerikoa da k ordenako bloke elemental batek $\begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}_{k.k}$ itxura izango duela.

12.6. PROPOSIZIOA: Izan bedi B k ordenako bloke elemental bat, non diagonal nagusiko gaiak zero diren. Orduan $B^k = 0$.

Frog.: Izan bedi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $\{u_1, ...,u_k\}$ K^k-ko oinarrian. Orduan:

$$\left.\begin{cases} B.u_1 = o & \Rightarrow \quad B^k.u_1 = o \\ B^2.u_2 = B.B.u_2 = B.u_1 = 0 \Rightarrow & B^k.u_2 = o \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ B^k.u_k = B^{k-1}.u_{k-1} = ... = o & \end{cases}\right. \Rightarrow \; B^k(u_i) = o \quad \forall i = 1....k \;\Rightarrow\; B^k = 0.$$

12.2. DEFINIZIOA: A matrize bati nilpotente deitzen zaio $k \in N$ existitzen bada, non $A^k = 0$ den.
Horrez gain, k baldin bada A^k zero egiten duen zenbakirik txikiena, A matrizea k ordenako nilpotentea dela esaten da. Agerikoa da $A^{k+1,}$ A^{k+2}, ... = 0 direla.

Aurreko bloke elementala nilpotentea da eta erraz froga daiteke k ordenakoa dela, zeren eta $\{u_1, u_2, ...,u_k\} = \{B^{k-1}(u_k), B^{k-2}(u_k), ...,B(u_k), u_k\}$ baita eta oinarri bat denez, bat ere ezin da zero izan.

12.7. PROPOSIZIOA: Izan bitez $A\in M_n(K)$ eta $x\in K^n$, non $A^{k-1}.x \neq o$ eta $A^k.x = o$ diren. Orduan $\{x, A.x, A^2.x, ..., A^{k-1}.x\}$ bektore-sistema askea da.

Frog.: $\lambda_0.x + \lambda_1.Ax + ... + \lambda_{k-1}.A^{k-1}.x = o$ hartzen bada eta A^{k-1} aplikatzen bada:
$\lambda_0.A^{k-1} x + \lambda_1.A^k x + ... + \lambda_{k-1}.A^{2k-2}.x = o \Rightarrow \lambda_0.A^{k-1} x = o \Rightarrow \lambda_0 = 0$.
Orain aplikatzen badira $A^{k-2,}$ .....,A, hurrenez hurren, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{k-1} = 0$.

12.8. PROPOSIZIOA: Izan bedi $A\in M_n(K)$. Orduan ondoko hauek betetzen dira:

- $\{o\} = \mathrm{Ker}\, A^0 \subset \mathrm{Ker}\, A \subset \mathrm{Ker}\, A^2 \subset ....$
- $K^n = \mathrm{Im}\, A^0 \supset \mathrm{Im}\, A \supset \mathrm{Im}\, A^2 \supset ......$

eta, horrez gain, A matrizea p ordenako nilpotentea bada:

- $\mathrm{Ker}\, A^{p-1} \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Ker}\, A^p = K^n = \mathrm{Ker}\, A^{p+1} = \mathrm{Ker}\, A^{p+2} = ...$
- $\mathrm{Im}\, A^{p-1} \underset{\neq}{\supset} \mathrm{Im}\, A^p = \{o\} = \mathrm{Im}\, A^{p+1} = \mathrm{Im}\, A^{p+2} = ...$

Honen egiaztapena oso erraza da eta ariketa gisa uzten da (kontuan hartu $A^0 = I$).

12.4. JORDAN MATRIZEAREN LORBIDEA

A) LEHENENGO KASUA: NILPOTENTE DENEAN

Izan bedi $A\in M_n(K)$ p ordenako matrize nilpotente bat (hau da, $A^p = 0$).
Izenda ditzagun $N_i = \mathrm{Ker}\, A^i$ eta $n_i = \dim N_i$. Aurreko proposizioaren arabera, $0 = n_0 \leq n_1 \leq n_2 \leq .... \leq n_{p-1} \leq n_p = n$. Eta $d_i = n_i - n_{i-1}$ definitzen badira, orduan $d_1 + d_2 + ... + d_p = n$ izango da. Agerikoa da $d_p \geq 1$ dela, zeren eta $A^{p-1} \neq 0$ den.
Izan bedi G_p N_{p-1}-ren azpiespazio betegarria: $K^n = G_p \oplus N_{p-1}$. Bere dimentsioa d_p izango da (zeren eta $\dim G_p = n - n_{p-1} = n_p - n_{p-1}$)

a) Izan bedi $\{u_1, ..., u_{d_p}\}$ G_p-ko oinarri bat.

Orduan $A(u_1), A(u_2),........,A(u_{d_p})$ bektoreek ondokoak betetzen dituzte:

1) *N_{p-1} -ekoak dira* (zeren eta $A^{p-1}(A(u_i)) = A^p.u_i = o$ baita).

2) *$A(u_1), A(u_2),........,A(u_{d_p})$ bektore-sistema askea da.*

Hau egiaztatzeko $\lambda_1.A(u_1) + ... + \lambda_{d_p}.A(u_{d_p}) = o$ har dezagun.

Orduan $A^{p-1}(\lambda_1.u_1 + ...+ \lambda_{d_p}.u_{d_p}) = A^{p-2}.(\lambda_1.A(u_1) + ...+ \lambda_{d_p}.A(u_{d_p})) = A^{p-2}(o) = o$ eta, ondorioz, $(\lambda_1.u_1 + ...+ \lambda_{d_p}.u_{d_p})$ bektorea N_{p-1}-ekoa da, baina beste aldetik, G_p-koa ere bada. Ondorioz: $\lambda_1.u_1 + ...+ \lambda_{d_p}.u_{d_p} = o$, baina $\{u_1, ..., u_{d_p}\}$ oinarri bat denez, $\lambda_1 = ... = \lambda_{d_p} = 0$ izango dira.

3) *eratzen duten azpiespazioa* $\{A(u_1), A(u_2), ..., A(u_{d_p})\}$ *eta* N_{p-2} *azpiespazioaren arteko ebakidura o bektorea da. Hots,* $\langle A(u_1), A(u_2), ..., A(u_{d_p})\rangle \cap N_{p-2} = \{o\}$. Ikus dezagun: suposa dezagun $\lambda_1.A(u_1) + ...+ \lambda_{d_p}.A(u_{d_p}) = x \in N_{p-2}$ dela. Lehen bezala, A^{p-1} aplikatzen bazaio $(\lambda_1.u_1 + ...+ \lambda_{d_p}.u_{d_p})$ bektoreari, o aterako da hemendik $\lambda_1 = ... = \lambda_{d_p} = 0$. Beraz, $x = o$.

Kontsidera dezagun orain N_{p-1} espazioko $\langle A(u_1), A(u_2), ..., A(u_{d_p})\rangle \oplus N_{p-2}$ azpiespazioa. Bistan denez, $d_p + n_{p-2} \leq n_{p-1}$ da, hau da, $d_p \leq d_{p-1}$. Izan bedi G_{p-1} bere betegarri bat N_{p-1} espazioan, hau da:

$$N_{p-1} = G_{p-1} \oplus \langle A(u_1), A(u_2), ..., A(u_{d_p})\rangle \oplus N_{p-2}$$

G_{p-1}-en dimentsioa $n_{p-1} - d_p - n_{p-2} = d_{p-1} - d_p$ da (posible da 0 izatea).

b) Izan bedi $\{u_{d_{p+1}}, ..., u_{d_{p-1}}\}$ G_{p-1}-ko oinarri bat.

Orduan $A^2(u_1)$, $A^2(u_2)$,........,$A^2(u_{d_p})$, $A.(u_{d_{p+1}}), ..., A.(u_{d_{p-1}})$ bektoreek ondoko hauek betetzen dituzte:

1) N_{p-2}-koak dira
2) sistema aske bat eratzen dute
3) sortzen duten espazioa $\cap N_{p-3} = \{o\}$

Hauen frogapenak aurrekoan bezala egiten dira eta prozesu hau errepikatuz N_1-era iritsi arte:

$$N_1 = G_1 \oplus \langle A^{p-1}(u_1), ...,A^{p-1}(u_{d_p}),A^{p-2}(u_{d_{p+1}}),.....,A^{p-2}(u_{d_{p-1}}),.....,A(u_{d_2})\rangle$$

non G_1-en dimentsioa $d_1 - d_2$ den.

Azkenean $\{u_{d_2+1}, ..., u_{d_1}\}$ oinarria hartzen da G_1 espazioan.

Hartutako bektoreak kontsideratzen badira, guztira $d_p + d_{p-1} + ...+ d_2 + d_1 = n$ dira:

	Guztira
u_1 .... u_{d_p}	d_p
$A(u_1)$............$A(u_{d_p})$ $\quad u_{d_p+1}$................$u_{d_{p-1}}$	d_{p-1}
....	
$A^{p-2}(u_1)$.......$A^{p-2}(u_{d_p})A^{p-3}(u_{d_p+1})$.......$A^{p-3}(u_{d_{p-1}})$ .... u_{d_2}	d_2
$A^{p-1}(u_1)$.......$A^{p-1}(u_{d_p})A^{p-2}(u_{d_p+1})$........$A^{p-2}(u_{d_{p-1}})$.......$A(u_{d_2})\ u_{d_2+1}$ .... u_{d_1}	d_1

azken errenkada hau N_1 -en oinarria da. Aurrekoarekin elkartuz N_2-ko oinarri bat lortzen da eta horrela jarraituz n bektore hauek N_p-ko (hau da K^n ko) oinarri bat eratzen dute.

Kontuan hartu azken errenkadako bektoreei A aplikatzen bazaie, zero ateratzen dela, eta 12.7. proposizioa kontuan hartuz, aurreko kaxaren zutabe bakoitzarekin azpiespazio bat sor daiteke, non elementu horiek oinarri bat eratzen duten. Esaterako, lehenengo zutabeko bektoreekin $\{A^{p-1}(u_1),\ A^{p-2}(u_1),.........,A(u_1),\ u_1\}$ sortzen duten azpiespazioko B oinarri bat eratzen da eta azpiespazio hori inbariantea da A-rekiko. Agerikoa da:

- $A(A^{p-1}(u_1)) = (0,0,........,0)_B$
- $A(A^{p-2}(u_1)) = (1,0,........,0)_B$

....

- $A(A(u_1)) = (0,0,....,1,0,0)_B$
- $A(u_1) = (0,0,.....0,1,0)_B$

eta A matrizearen murrizketak azpiespazio honetan ondoko itxura izango du:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Gauza bera gertatzen da gainerako zutabeekin, eta K^n-ko zutabe guztien bektoreak oinarri gisa hartuz, behetik gorako eta ezkerretik eskuinerako ordenan, A matrizea bloke elementalez adieraziko da, non diagonal nagusiko gaiak zero diren.

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}^{p} & & & \\ & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}^{p-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

adibidea: Egiaztatu $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea nilpotentea dela eta aurkitu bere Jordan forma kanonikoa.

Ebaz.: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ eta $A^3 = 0$ dira. Orduan 3 ordenako nilpotentea da ($p = 3$).

He $A = 2$ eta He $A^2 = 1$ dira. dim KerA = dimV - dim Im A denez, honako hau dugu:

$$\begin{array}{ll}
\dim A^0 = \dim I = 4 & \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A^0 = \dim N_0 = n_0 = 0 \\
\dim A = 2 & \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A = \dim N_1 = n_1 = 2 \quad \text{eta} \quad d_1 = 2 - 0 = 2 \\
\dim A^2 = 1 & \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A^2 = \dim N_2 = n_2 = 3 \quad \text{eta} \quad d_2 = 3 - 2 = 1 \\
\dim A^3 = 0 & \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A^3 = \dim N_3 = n_3 = 4 \quad \text{eta} \quad d_3 = 4 - 3 = 1
\end{array}$$

Aurrekoaren arabera, bilatzen ari garen oinarria hauxe da: $\begin{cases} u_1 & d_3 = 1 \\ A(u_1) & d_2 = 1 \\ A^2(u_1)\ ,\ u_2 & d_1 = 2 \end{cases}$

u_1 da G_3 -ko bektorea, non G_3 N_2-ko azpiespazio betegarria den: $K^4 = N_3 = G_3 \oplus N_2$
u_1 aurkitzeko, aurretik $N_2 = \operatorname{Ker} A^2$ kalkulatuko da:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z \Rightarrow N_2 = \{(x,y,y,t) \,/\, x,y,t \in K\}$$ Nahikoa da G_3-ko bektore gisa $u_1 = (0,1,2,0)$ hartzea, hau da, N_3-ko (K^4–ko) edozein N_2-koa ez dena

Orain $N_2 = G_2 \oplus \langle A(u_1) \rangle \oplus N_1$ baina $A(u_1)$ 1 dimentsiokoa, N_1 2-koa eta N_2 3-koa dira, eta ondorioz, ez da G_2-ko bektorerik hartu behar, hutsa delako.

Azkenean $N_1 = G_1 \oplus \langle A^2(u_1) \rangle$. $A^2(u_1) = (4,4,4,4)$ da eta u_2 izango da G_1-ko bektore bat, eta ondorioz N_1koa, independentea $(4,4,4,4)$ bektorearekiko.
N_1 kalkulatzen bada:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - 2y = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow N_1 = \{(y,y,y,t) \,/\, y,t \in K\}$$

eta nahikoa da $u_2 = (1,1,1,0)$ hartzea.

Orduan B oinarria hau bada: $\{A^2(u_1), A(u_1), u_1, u_2\} = \{(4,4,4,4), (-2,-4,-4,-4)$ $(0,1,2,0), (1,1,1,0)\}$, oinarri honekiko A matrizeari dagokion endomorfismoa Jordan forma kanonikoa izango da, eta oinarri honen bektoreek aldaketaren matrizea osatuko dute:

$$P^{-1}.A.P = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{non} \quad P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ den.}$$

B) BIGARREN KASUA: ANIZKOIZTASUNEKO BALIO PROPIO BAKARRA DENEAN

Orain ondoko kasu berezi hau aztertuko dugu: $A \in M_n(K)$ matrizeak n anizkoiztasuneko λ balio propio bakarra duenean.

Kasu honetan A-ren polinomio karakteristikoa $p_A(x) = (-1)^n.(x - \lambda)^n$ da eta Cayley-Hamilton teoremaren arabera, $(A - \lambda.I)^n = 0$ beteko da.

Honek esan nahi du $B = A - \lambda.I$ matrizea n edo txikiagoa den ordenako nilpotentea dela eta aurrekoan ikusi den bezala $\{u_1, ..., u_n\}$ oinarri bat aurki daiteke, non B-ri dagokion endomorfismoa Jordan matrize bezala adierazi ahal den:

$$B \approx B' = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{B_p} \end{pmatrix} \quad \text{non} \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ diren.}$$

Suposa dezagun A' eta B' direla oinarri berri honetan A eta B matrizeen adierazpenak. Hau da, $A' = P^{-1}.A.P$ eta $B' = P^{-1}.B.P$ (non P oinarri-aldaketaren matrizea den).
Baina $A = B + \lambda.I$ denez, orduan $A' = P^{-1}.A.P = P^{-1}.(B + \lambda.I).P = B' + \lambda.I$. Beraz:

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \quad \text{non} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ diren.}$$

Ondorioz, bilatutako Jordan matrizea A' izango da.

adibidea: Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearen Jordan forma.

Ebaz.: Bere polinomio karakteristikoa $p_A = (2 - x)^3$ da eta $\lambda = 2$ hiru anizkoiztasuneko balio propio bakarra da. Orduan, $B = 2.I - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotentea da eta erraza da 3 ordenakoa dela egiaztatzea: $B^3 = 0$, beraz, p = 3.

Lehen ikusi den bezala B-ren forma kanonikoa kalkulatuko da:

He B = 2 eta He B^2 = 1 dira eta dim KerB = dimV - dim Im B denez, honako hau ateratzen da:

$$\begin{array}{ll}
\text{He } B^0 = \dim I = 3 & \Rightarrow \dim \text{Ker } B^0 = \dim N_0 = n_0 = 0 \\
\text{He } B = 2 & \Rightarrow \dim \text{Ker } B = \dim N_1 = n_1 = 1 \text{ eta } d_1 = 1 - 0 = 1 \\
\text{He } B^2 = 1 & \Rightarrow \dim \text{Ker } B^2 = \dim N_2 = n_2 = 2 \text{ eta } d_2 = 2 - 1 = 1 \\
\text{He } B^3 = 0 & \Rightarrow \dim \text{Ker } B^3 = \dim N_3 = n_3 = 3 \text{ eta } d_3 = 3 - 2 = 1
\end{array}$$

Aurrekoaren arabera, bilatzen ari garen oinarria hauxe da: $\begin{cases} u_1 & d_3 = 1 \\ B(u_1) & d_2 = 1 \\ B^2(u_1) & d_1 = 1 \end{cases}$

Aurki dezagun oinarri hau. Hemen p = 3 denez, $K^3 = N_3 = G_3 \oplus N_2$ deskonposatzetik hasiko gara. Argi dago G_3 1 dimentsiokoa dela eta u_1 hartzeko N_2 kalkulatuko da:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ da eta } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow N_2 = \{(x,y,0) \,/\, x,y \in K\}$$

beraz, $u_1 = (0,0,1)$ izan daiteke (hau da, ez da N_2-koa).

Orain $N_2 = G_2 \oplus \langle B(u_1)\rangle \oplus N_1$ eta dimentsioak aztertu ondoren, argi dago G_2 zero dimentsiokoa dela. Ondorioz, ez da maila honetan bektore berririk hartu behar. Hemen gelditzen gara $B(u_1)$ bektorearekin, $B(u_1) = (0,3,0)$.

Orain $N_1 = G_1 \oplus \langle B^2(u_1)\rangle \oplus N_0$ da eta dimentsioak aztertu ondoren, hemen ere ez da bektore berririk hartu behar. Hau gelditzen da bakarrik: $B^2(u_1) = (3,0,0)$.

Orduan $\{B^2(u_1), B(u_1), u_1\} = \{(3,0,0),(0,3,0), (0,0,1)\}$ oinarrian B matrizeak Jordan forma izango du:

$$B' = P^{-1}.B.P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{non} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ den.}$$

Orain $A' = 2.I - B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ eta $A' = P^{-1}.A.P$ da.

C) KASU OROKORRA

Kasu orokorraren Jordan matrizea atera baino lehen hausnarketa eta proposizio batzuk egin behar dira.

Demagun $A \in M_n(K)$ matrizeko $p_A(x)$ polinomio karakteristikoak n erro dituela (berdinak edo ez), eta haietako p desberdinak: $\lambda_1, \lambda_2, ...,\lambda_p$ non beren anizkoiztasunak $k_1, ...,k_p$ diren $(k_1 + k_2 + ... + k_p = n)$.

Izan bitez $V(\lambda_i)$ dagozkien azpiespazio propioak (gogoratu $V(\lambda_i) = \text{Ker } (A - \lambda_i.I)$). Orduan, A diagonalgarria bada, $K^n = V(\lambda_1) \oplus ...... \oplus V(\lambda_p)$ betetzen da, baina diagonalgarria ez bada, K^n eta $V(\lambda_1) \oplus ...... \oplus V(\lambda_p)$ espazioak desberdinak dira. Ikusiko den bezala K^n espazioaren deskonposizio zuzen bat lortzeko (eta ondorioz, A-ren adierazpena errazteko), ordezkatzen da, $V(\lambda_i) = \text{Ker } (A - \lambda_i.I)$ azpiespazioa $\text{Ker } (A - \lambda_i.I)^r$ azpiespazioaz ordezkatzen da, non $r = k_i$ den.

12.9. PROPOSIZIOA: $\text{Ker } (A - \lambda_i.I)^r$ azpiespazioa inbariantea da A-rentzat.

Frog.: Izan bedi $x \in \text{Ker } (A - \lambda_i.I)^r$, orduan $Ax \in \text{Ker } (A - \lambda_i.I)^r$ frogatu behar da.
Ikus dezagun: $(A - \lambda_i.I)^r (Ax) = A ((A - \lambda_i.I)^r) (x)$ (zeren eta A eta $(A - \lambda_i.I)^r$ trukatu ahal baitira) $= A (o) = o$ eta ondorioz, $Ax \in \text{Ker } (A - \lambda_i.I)^r$.

12.10. PROPOSIZIOA: Izan bedi λ A-ko balio propio bat eta k bere anizkoiztasuna. Orduan, $\forall r \in N$ ondoko hau betetzen da: $1 \leq \dim \text{Ker } (A - \lambda.I)^r \leq k$.

Frog.: Izan bedi $H = Ker\,(A - \lambda.I)^r$. Agerikoa da $V(\lambda) \subset H$ dela eta λ balio propioari bektoreren bat dagokionez, hau da, $H \neq o$ denez $\Rightarrow$ $h = \dim H \geq 1$.

Orain $h \leq k$ frogatuko da.
Suposa dezagun A_H dela A endomorfismoaren murrizketa H azpiespazioan. Agerikoa da $(A_H - \lambda.I)^r = 0$ dela, eta ondorioz, $B = A_H - \lambda.I$ nilpotentea dela. Beraz, H-n $\{u_1, ...,u_h)$ oinarri bat existituko da, non B eta A honela jar daitezkeen:

$$B \approx \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & a_{h-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad A_H \approx \begin{pmatrix} \lambda & a_1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & a_{h-1} \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{non } a_i = 0 \text{ edo } 1 \text{ diren.}$$

n - h bektoreak gehitzen bazaizkie $\{u_1, ...,u_{h,}\ u_{h+1}, ...,u_n\}$ oinarria osatzeko, A matrizearen adierazpena oinarri honekiko ondoko hau izango da:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \lambda & a_1 & & & & \\ & \lambda & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & C \\ & & & \lambda & a_{h-1} & \\ & & & & \lambda & \\ \hline & & 0 & & & D \end{array}\right)$$

eta bere polinomio karakteristikoa hau izango da:
$p_A = (x - \lambda)^h \,.\, q\,(x)$

Ondorioz, λ-ren anizkoiztasuna h baino handiagoa edo berdina izango da.

> 12.11. PROPOSIZIOA: Demagun $A \in M_n(K)$ matrizeko $p_A(x)$ polinomio karakteristikoak n erro dituela (berdinak edo ez): $\lambda_1, \lambda_2, ...,\lambda_p$ eta beren anizkoiztasunak $k_1, ...,k_p$ direla $(k_1 + k_2 +.......+ k_p = n)$.
> $H_i = Ker\,(A - \lambda_i\,.I\,)^{k_i}$ definitzen badira, orduan $\dim H_i = k_i$ eta $K^n = H_1 \oplus.....\oplus H_p$

Frog.: A-ren polinomio karakteristikoa $p_A\ (x) = (-1)^n\,.(x - \lambda_1\,)^{k_1}\,.........(x - \lambda_p\,)^{k_p}$ da eta $p_A\,(A) = 0$ da.

Izan bitez $p_i\,(x) = (-1)^n.\dfrac{p_A(x)}{(x-\lambda_i)^{k_1}}$ $\quad\forall i = 1.......p$

orduan ondoko hiru berdintza hauek betetzen dira:

(1): $(A - \lambda_i\,.I\,)^{k_i}\,.p_i\,(A) = 0$ (agerikoa da, $p_A\,(A) = 0$ baita)

(2): $\forall x \in H_i \quad p_j\,(A)\,(x) = o \qquad j \neq i$

$$p_j\,(A) = (-1)^n.\frac{p_A(x)}{(x-\lambda_j)^{k_j}} = (A - \lambda_i\,)^{k_i}\ .\ q\,(A) \quad \text{(non q(x) polinomio bat den).}$$

Orduan $p_j\,(A)\,(x) = (A - \lambda_i\,)^{k_i}\ .\ q\,(A)\,(x) = q\,(A).\,(A - \lambda_i\,)^{k_i}\,(x) = q(A).(o) = 0$

(3): $q_1\,(A).p_1\,(A) + \ldots\ldots. + q_p(A).p_p\,(A) = I$
non $q_1\,(x),\ldots.,q_p\,(x)$ polinomioen existentzia polinomioen teoriak ziurtatzen digun $p_1\,(A),\ldots..,p_p\,(A)$ polinomioak elkarrekiko lehenak direnean.

- $K^n = H_1 + \ldots\ldots + H_p$ dela frogatzen hasiko gara.

Izan bedi $x \in K^n$. Orduan (3)-ren arabera: $I(x) = x = q_1\,(A).p_1\,(A)\,(x) + \ldots\ldots. + q_p(A).p_p\,(A)\,(x)$ eta $x_i = q_i\,(A).p_i\,(A)\,(x)$ deituz $x = x_1 + \ldots\ldots + x_p$ izango da.
Baina $x_i \in H_i$. Ikus dezagun: $(A - \lambda_i\,.I\,)^{k_i}\,(x_i) = (A - \lambda_i\,.I\,)^{k_i}\,.q_i\,(A).p_i\,(A)\,(x) = q_i\,(A).((A - \lambda_i\,.I\,)^{k_i}\,.p_i\,(A)\,(x)) = q_i\,(A).\,(o) = o$ ((1) aplikatu da).

Ondorioz, $K^n = H_1 + \ldots\ldots + H_p$ betetzen da.

- Batuketa zuzena dela frogatzeko nahikoa izango da $o = x_1 + \ldots\ldots + x_p$ suposatzea, non $x_i \in H_i$ diren, eta $x_1 = \ldots\ldots = x_p = o$ direla ondorioztatzea.

Aplika diezaiogun $p_i\,(A)$ proposatutako berdintzari:
$o = p_i\,(A)\,(x_1) + \ldots.. + p_i\,(A)\,(x_i) + \ldots\ldots + p_i\,(A)\,(x_p)$ eta (2)-ren arabera, batugai guztiak zero dira i-garrena izan ezik: $o = p_i\,(A)\,(x_i)$ (*)

Orain (3) erabiliz eta x_i bektoreari aplikatuz:

$x_i = q_1\,(A).p_1\,(A)\,(x_i) + \ldots\ldots + q_p(A).p_p\,(A)\,(x_i)$ eta (2)-ren arabera, $i \neq j$ batugai guztiak zero dira eta i-garrena ere (*). Ondorioz, $x_i = o$.

- Bukatzeko alde batetik badakigu $k_1 + \ldots\ldots + k_p = n$ dela. Baina $\dim H_i \leq k_i$ eta batuketa zuzena denez, $\dim H_1 + \ldots\ldots + \dim H_p = n$.

Ondorioz, $\dim H_i = k_i$.

Oharra: deskonposizioa egiteko posible *da* $H_i = Ker\,(A - \lambda_i)^r$ *lortzea,* $r \leq k_i$ *izanik.*

AZKEN PAUSOA

Nahikoa da H_i guztietako oinarriekin K^n-ko oinarri bat osatzea. Orduan, A_i baldin bada A-ren murrizketa H_i espazioan, A-ren matrizeak oinarri horrekiko ondoko itxura izango du:

$$A \approx \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$$

baina H_i azpiespazio bakoitzean $(A_i - \lambda_i.I)^{k_i} = 0$ da, zeren eta $x \in H_i$ bada orduan $(A_i - \lambda_i.I)^{k_i}(x) = o$ baita. Ondorioz, $(A_i - \lambda_i.I)$ nilpotentea da eta aurrekoan ikusitakoa aplika daiteke. Beraz, ondoko korolarioa ondorioztatzen da:

12.4. KOROLARIOA: Beraz, A_n matrize batek Jordan forma kanonikoa duen antzeko matrizea du, baldin eta soilik baldin n erro (berdinak edo ez) baditu.

adibidea: Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 3 & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ matrizearen Jordan forma kanonikoa.

Ebaz.: Bere polinomio karakteristikoa aterako da:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 3-\lambda & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 5-\lambda & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda).\begin{vmatrix} -4-\lambda & -4 & 11 \\ 5 & 5-\lambda & -7 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda.(3-\lambda)^3$$

Beraz, $p_A = -\lambda.(3-\lambda)^3$. Orduan, $\lambda_1 = 0$ $(k_1 = 1)$ eta $\lambda_2 = 3$ $(k_2 = 3)$.

Ikus dezagun diagonalgarria den. Horretarako dim V (3) = 3 eta dim V (0) = 1 izan beharko zuten. Baina V(3) = Ker (A - 3.I) eta dim V(3) =4 - he (A - 3.I):

$A - 3I = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 0 & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ eta He (A - 3.I) = 2. Beraz, dim V (3) = 4 – 2 = 2 ≠ 3

eta, ondorioz, A ez da diagonalgarria.

Izan bitez $\begin{cases} H_1 = \mathrm{Ker}(A - 3I)^3 \\ H_2 = \mathrm{Ker}(A - 0.I)^1 = \mathrm{Ker}A \end{cases}$

1. Lehenengo balio propioa: $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3.I)^2 = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 9 & -27 \\ 18 & 0 & 9 & -27 \\ -18 & 0 & -9 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad (A - 3.I)^3 = \begin{pmatrix} -54 & 0 & -27 & 81 \\ -54 & 0 & -27 & 81 \\ 54 & 0 & 27 & -81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Bien heina bat da, eta ondorioz, He Ker $(A - 3.I)^2$ = He Ker $(A - 3.I)^3 = 3 = \dim H_1$.

$B = A - 3I$ nilpotentea da (2 ordenakoa, hau da, $p = 2$) H_1 azpiespaziora murrizten bagara. Orduan $N_i = \ker B^i$ eta $n_i = \dim N_i$ deituz:

$$\begin{array}{ll} n_0 = 0 & \\ n_1 = 2 & d_1 = 2 \\ n_2 = 3 & d_2 = 1 \end{array}$$

eta aurkitu behar den H_1 -ko oinarria $\begin{cases} u_1 \\ B(u_1), u_2 \end{cases}$ izango da, non:

(a) u_1 G_2-koa den, $N_2 = G_2 \oplus N_1$ izanik. u_1 kalkulatzeko $N_1 = \operatorname{Ker} B$ eta $N_2 = \operatorname{Ker} B^2$ kalkulatu behar dira aurretik:

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 0 & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N_1 = \{(x,y,x,x) \,/\, x,y \in K\}.$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 0 & 9 & -27 \\ 18 & 0 & 9 & -27 \\ -18 & 0 & -9 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N_2 = \{(x,y,-2x+3z,z) \,/\, x,y,z \in K\}$$

Hartara, u_1 bektorea N_2-koa da, baina ez N_1 -koa. $u_1 = (0,0,3,1)$ izan daiteke

$$B(u_1) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 0 & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) u_2 aurkitzeko nahikoa da $B(u_1)$ bektorearekin N_1 -ko oinarri bat osatzea. Bektorerik bakunena $u_2 = (0,1,0,0)$ da.

Beraz, H_1 azpiespaziora murriztutako B endomorfismoaren matrizea $\{B(u_1), u_1, u_2\} = \{(-1,0,-1,-1), (0,0,3,1), (0,1,0,0)\}$ oinarriarekiko ondokoa da:

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad A = B + 3.I \ \text{denez,} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Bigarren balio propioa $\lambda_2 = 0$

dim H_2 = dim Ker A = 1 eta ateratzeko: $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 3 & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ egiten bada:

$\Rightarrow$ $H_2 = \{(x,x,-x,o) \ / \ x \in K\}$. Hemen nahikoa da zero ez den edozein bektore hartzea, adibidez, w = (1,1,-1,0). Azpiespazio honetan A-ren murrizketaren matrizea, bektore hori bakarrik eratzen duen oinarriarekiko, (0) matrizea da.

Beraz, A-ren adierazpena {(-1,0,-1,-1), (0,0,3,1), (0,1,0,0), (1,1,-1,0)} oinarriarekiko Jordan forma kanonikoa izango da. Honako hau da:

$$A' = P^{-1} .A.P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{da.}$$

EBATZITAKO ARIKETAK

1. Izan bitez A eta B n ordenako bi matrize karratu, non AB = BA den. Froga ezazu AB eta BA matrizeek balio propio berdinak dituztela.

Ebaz.: Izan bedi λ AB-ko balio propioa. BA-koa ere badela ikusiko dugu.

- Demagun $\lambda = 0$ dela. Orduan, $AB.u = 0.u = o$ da, eta ondorioz, $BA.u = o = 0.u$ ere izango da, hau da, 0 ere BA-ko balio propioa da.
- Demagun orain $\lambda \neq 0$ dela. Izan bedi u bere bektore propio bat: $AB.u = \lambda.u$. Izan bedi $v = B.u$ bektorea. Bektore hau da λ-ri dagokion bektore propioa BA matrizean: $BA.v = BA.B.u = B.(AB.u) = B.(\lambda.u) = \lambda.B.u = \lambda.v$.
  Hau da, λ BA-ko balio propioa ere bada.

Modu berean, alderantziz ere egin daiteke, hau da, BA-ko edozein balio propio AB-koa ere badela egiaztatu.

2. Izan bedi $f : R^2 \to R^2$ 2 ordenako nilpotente endomorfismo bat. Froga ezazu dagokion A matrizea antzekoa dela $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearekiko, non a = 1 edo 0 den.

Ebaz.: Izan bedi λ A-ren balio propio bat: $A.u = \lambda.u$ $(u \neq o)$. Orduan: $o = A^2.u = A.A.u = A.(\lambda.u) = \lambda.(A.u) = \lambda^2.u \Rightarrow \lambda = 0$. Hau da, 0 da A-k duen balio propio bakarra (eta bere anizkoiztasuna k = 2 da). Bi kasu gerta daitezke:

- dim Ker A = 2 = k. Kasu honetan A diagonalgarria da eta bere balio propioa $\lambda = 0$ denez, antzekoa izango da $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearekiko.

- dim Ker A = 1 < k. Kasu honetan Jordan formako antzeko bat aurki daiteke eta kasu honentzat bere itxura honako hau izango da: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Triangelutu, posible bada, ondoko matrize hau: $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 3 & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Ebaz.: 376. orrialdeko adibidean bere balio propioak aurkitu dira: $\begin{cases}\lambda_1 = 3 & \text{hirukoitza}\\ \lambda_2 = 0 & \text{bakuna}\end{cases}$

Beraz, triangelutu ahal da (12.2. proposizioaren arabera).

λ = 3 balio propioaren azpiespazioa V (3) = $\{(t,y,t,t) \ / \ t,y \in R\}$ da. Bere bi bektore independente u_1= (1,0,1,1) eta u_2 = (0,1,0,0) izan daitezke. Oinarri bat osatzeko nahikoa da u_3 = (0,0,1,0) eta u_4 = (0,0,0,1) bektoreekin osatzea. Orduan B = $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ oinarriarekiko matrizearen adierazpena honako hau da:

$$A' = Q^{-1}.A.Q = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \text{non } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ aldaketaren matrizea den.}$$

Orain $B = \begin{pmatrix} 9 & -18 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ azpimatrizea kontsideratzen da. Bere balio propioak 3 eta 0 dira.

λ = 3 balio propioaren azpiespazioa kalkulatuko dugu: $\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 3y$

eta, ondorioz, S(3) = $\{(3y,y) \ / \ y \in R\}$. Beraz, bere oinarri bat (3,1) izan daiteke eta berarekiko independentea den beste bat (0,1) hartu ahal da.

Beraz, $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ oinarri-aldaketaren matrizeak B matrizea triagelutzen du $B' = P^{-1}.B.P$ eginez.

Orain R^2-ko (3,1) eta (0,1) bektoreak R^4-ra eramango dira lehenengo bi koordenatuak zero eginez (hau da v_3 = (0,0,3,1) eta v_4 (0,0,0,1)). Orduan A-ren adierazpena B' = $\{u_1,u_2,v_3,v_4\}$ oinarriarekiko triangeluarra izango da:

$$A'' = M^{-1}.A.M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{non } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{aldaketaren matrizea den.}$$

4. Aurkitu a eta b parametroen balioak $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ *matrizea diagonalgarria izateko. Gero kalkulatu diagonalgarria ez den kasuetan bere Jordan forma.*

Ebaz.: $|A - \lambda.I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & b \\ 3 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda).(-1-\lambda).(a-\lambda) = 0$, eta ondorioz, balio propioak hauek dira: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = a$.

a) $a \neq 5$ eta $a \neq -1$ bada diagonalgarria da, zeren eta hiru balio propio desberdinak baititu.

b) $a = 5$ bada $\lambda = 5$ balio propioa bikoitia da eta ikusi behar da zein den dagokion V (5) = Ker (A – 5.I) azpiespazioaren dimentsioa. Hori aztertzeko n = dim Ker (A – 5.I) + dim Im (A – 5.I) dela hartuko da kontuan

dim V (5) = 3 – dim Im (A – 5.I) = 3 – he $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$. Ondorioz, balio propioaren anizkoiztasuna (2) eta dagokion azpiespazio propioaren dimentsioa (1) ez datoz bat. Beraz, ez da diagonalgarria. Bere Jordan forma ondoko hau da:

$A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ eta P b-ren arabera geldituko da (ez dugu kalkulatuko).

c) $a = -1$ bada $\lambda = -1$ balio propio bikoitia da, eta lehen egin den bezala bere azpiespazio propioaren dimentsioa kalkulatu behar da:

$$\dim V(-1) = \dim \operatorname{Ker}(A + I) = 3 - \text{he}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3-1=2 & b=0 \quad \text{bada} \\ 3-2=1 & b \neq 0 \quad \text{bada} \end{cases}.$$

Beraz, diagonalgarria da $b = 0$ bada eta ez da diagonalgarria $b \neq 0$ bada. Kasu honetan dagokion Jordan matrizea $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ da eta P aldaketaren matrizea b-ren arabera geldituko da.

5. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$*. Kalkulatu bere azpiespazio inbarianteak eta* A^n*.*

Ebaz.: Kalkula ditzagun bere balio propioak:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 2 \\ 6 & -3-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot((5-\lambda)(-3-\lambda)+12) = (3-\lambda).(\lambda^2-2\lambda-3) = (3-\lambda)^2.$$

$(\lambda + 1) \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda = 3$ (bikoitza).

Beraien azpiespazio inbarianteak (azpiespazio propioak) kalkulatuko dira:

- $\lambda_1 = -1$ bada:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6x - 2y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{V}(1) = \{(x, 3x, 0)\} \text{ eta oinarri}$$

gisa $e_1 = (1,3,0)$ har daiteke.

- $\lambda = 3$ bada:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - 2y + 2z = 0 \Rightarrow \text{V(2)}=\{(x,y,y-x), \text{ 2 dimentsiokoa}$$

(beraz, diagonaldu ahal da) eta oinarri gisa $\{e_2(1,0,-1), e_3(0,1,1)\}$ har daiteke.

Bere forma diagonala ondoko hau da:

$$A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{non} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ den.}$$

- A^n kalkulatzeko bere forma diagonala erabiliko da, zeren eta $A = P.A'.P^{-1}$ baita, eta ondorioz:

$$A^n = (P.A'.P^{-1})^n = P.A'^n.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} . \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 3^{n+1} & (-1)^n - 3^n & (-1)^{n+1} + 3^n \\ 3.(-1)^{n+1}.3^{n+1} & 3.(-1)^n - 3^n & 3.(-1)^{n+1} + 3^{n+1} \\ 0 & 0 & (-3)^n + 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

6. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *matrizearen Jordan forma kanonikoa.*

Ebaz: $\begin{vmatrix} 2i-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).\begin{vmatrix} 2i-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).((2i-\lambda)(-\lambda) - 1) = (1-\lambda).$
$(\lambda^2 - 2i\lambda - 1) = (1-\lambda).(\lambda - i)^2 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = 1 \;\; (k_1 = 1), \;\; \lambda_1 = i \; (k_2 = 2)$

Ikus dezagun diagonalgarria den. Horretarako dim V(1) = 1 eta dim V(i) = 2 izan behar dira. Badakigu $V(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda.I)$ eta, beste alde batetik, $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda.I) + \dim \operatorname{Im}(A - \lambda.I) = n$. Kasu honetan n = 3 da eta $\dim \operatorname{Im}(A - \lambda.I) =$ he (A - i.I) denez:

$A - i.I = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}$ eta honen heina 2 denez, $\dim V(i) = 3 - 2 = 1 \neq k_2 = 2$. Beraz, ez da diagonalgarria.

Izan bitez $H_1 = \operatorname{Ker}(A - i.I)^2$ eta $H_2 = \operatorname{Ker}(A - I)$

1. Lehenengo balio propioa: $\lambda_1 = i$

$H_1 = \ker(A - i.I)^2$ kalkulatuko da:

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}^2 . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \;\; \Rightarrow H_1 = \{(x,o,z)\}$$

eta bere heina 2 da. $B = A - i.I$ nilpotentea ($p = 2$ ordenakoa) da H_1 espaziora murrizten bagara. Orduan $N_i = \ker B^i$ eta $n_i = \dim N_i$ badira:

$$\begin{array}{ll} n_0 = \dim N_0 = \dim \operatorname{Ker} B^0 = \dim \operatorname{Ker} I = 0 & \\ n_1 = \dim N_1 = \dim \operatorname{Ker} B = \dim V(i) = 1 & d_1 = n_1 - n_0 = 1 \\ n_2 = \dim N_2 = \dim H_1 = \dim \operatorname{Ker} B^2 = 2 & d_2 = n_2 - n_1 = 1 \end{array}$$

eta aurkitu behar den oinarria $\begin{cases} u_1 \\ B(u_1) \end{cases}$ izango da, non:

u_1 G_2-koa den; $H_1 = N_2 = G_2 \oplus N_1$ denez, $N_1 = \operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker}(A - i.I)$ kalkulatu behar da aurretik u_1 aurkitzeko:

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} ix + z = 0 \\ (1-i).y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow N_1 = \{x,0,-i.x) \text{ eta } u_1 = (1,0,0) \text{ izan}$$

daiteke, zeren ez baita N_1-ekoa baina bai N_2-koa.

Bigarren bektorea $B(u_1)$ da: $\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ondorioz, H_1 azpiespaziora murriztutako B endomorfismoaren matrizea $\{B(u_1),u_1\} = \{(i,0,1), (1,0,0)\}$ oinarriarekiko, ondoko hau da:

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta } A = B + i.I \text{ denez,} \quad A' = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

2. Bigarren balio propioa: $\lambda_2 = 1$

$H_2 = \operatorname{Ker}(A - I)$ da. Beraz: $\begin{pmatrix} 2i-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} (2i-1)x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ $x = z = 0$ $\Rightarrow$ $H_2 = \{(0,y,0)\}$ da eta edozein bektore har daiteke, adibidez: $u_3 = (0,1,0)$

Agerikoa da $B = A - I$ matrizearen murrizketa H_2 azpiespazioan zero matrizea dela $\Rightarrow$ A-rena (1) izango da ($A = B + I$ delako kasu honetan).

Ondorioz, A-ren Jordan forma $\{(i,0,1), (1,0,0), (0,1,0)\}$ oinarriarekiko adieraziz lortzen da eta bere adierazpena ondoko hau da:

$$A' = P^{-1}.A.P = \left(\begin{array}{cc:c} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{non} \quad P = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ den.}$$

7. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *matrizearen forma diagonala posible bada, edo bestela bere Jordan forma kanonikoa.*

Ebaz.: Bere ekuazio karakteristikoa $(3 - \lambda)^4 = 0$. Beraz, duen balio propio bakarra 3 da eta bere anizkoiztasuna 4 da. Kalkula dezagun dagokion V (3) azpiespazio propioaren dimentsioa. Gogoratu V(3) = Ker (A – 3.I) dela eta bere dimentsioa:

$$\text{Dim } V(3) = 4 - \text{he}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2. \text{ Beraz, ez da diagonalgarria.}$$

Bere Jordan forma kalkulatuko da.

Hasteko $H_i = (A - 3.I)^i$ kalkulatuko dira:

$$(A - 3.I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ eta } (A - 3.I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ beraz, 3 ordenako}$$

nilpotentea da. Gogoratu $N_i = \text{Ker } H_i$ eta $n_i = \dim N_i$ eta B = A – 3.I.

Beraien dimentsioak hauek dira:

$n_0 = \dim N_0 = \dim \text{Ker } (A - 3.I)^0 = \dim \text{Ker } I = 0$

$n_1 = \dim N_1 = \dim \text{Ker } (A - 3.I) = 2$ $\qquad d_1 = n_1 - n_0 = 2$

$n_2 = \dim N_2 = \dim \text{Ker } (A - 3.I)^2 = 3$ $\qquad d_2 = n_2 - n_1 = 1$

$n_3 = \dim N_3 = \dim \text{Ker } (A - 3.I)^3 = 4$ $\qquad d_3 = n_3 - n_2 = 1$

Kasu honetan bilatzen ari garen oinarriak ondoko egitura izango du: $\left\{\begin{array}{c} u_1 \\ B(u_1) \\ B^2(u_1), u_2 \end{array}\right.$

$R^4 = \text{Ker } H_3 = N_3 = G_3 \oplus N_2$ egingo da eta $N_2 = \text{Ker } (A - 3I)^2$ kalkulatuko da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ y = 0 \ \Rightarrow \quad N_2 = \{(x,0,z,t)\} \quad \text{(hau da, } n_2 = 3).$$

G_3-ko bektore bat $\mathbf{u_1 = (0,1,0,0)}$ har daiteke. Orain $N_2 = G_2 \oplus N_1$ egingo da. $n_1 = 2$ eta $n_2 = 3$ direnez, G_2-ren dimentsioa 1 da eta $B(u_1)$ hartuko da, hau da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{beraz, } \mathbf{B(u_1) = (0, 0, 2, 0)}$$

Oinarria osatzeko gelditzen diren bi bektoreak N_1-ekoak dira; bata $\mathbf{B^2(u_1) = (2,0,0,4)}$ izango da. Bestea hautatzeko N_1 kalkulatu behar da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} z = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad N_1 = \{(x, 0,0, t) \ / \ x,t \in R\} \text{ da eta orduan}$$

nahikoa da (2,0,0,4) bektorearekiko independentea izatea, adibidez: u_2 **(1,0,0,1)**

Beraz, {(2,0,0,4),(0,0,2,0),(0,1,0,0),(1,0,0,1)} oinarriarekiko A matrizearen Jordan forma kanonikoa hauxe da:

$$A' = P^{-1}.A.P = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \text{non } P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ den.}$$

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Kalkulatu zein diren t parametroaren balioak $A = \begin{pmatrix} t+3 & t^2-10 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$ *matrizea diagonaldu ahal izateko (suposatu gorputz errealean gaudela).*

2. Kalkulatu m eta n, $A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$ *eta* $B = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$ *matrizeak antzekoak izan daitezen.*

3. Froga ezazu $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *eta* $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *matrizeak ez direla antzekoak polinomio karakteristiko berdina izan arren.*

4. Kalkulatu noiz den diagonalgarria $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *matrizea (m-ren arabera). Kasu horientzat* A^n *kalkulatu.*

6. Esan $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix}$ *matrizea diagonaldu ahal den. Kalkulatu bere forma triangeluarra eta oinarri-aldaketaren matrizea.*

7. Izan bedi P_2 *(x) bigarren mailako edo txikiagoko polinomio errealen bektore--espazioa. Aztertu polinomio bakoitzari bere deribatua egokitzen dion endomorfismoa diagonalgarria den ala ez, eta ezezkoa bada, kalkulatu bere Jordan forma aldaketaren matrizea aurkituz.*

8. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$*. Kalkulatu bere azpiespazio inbarianteak eta* A^n*.*

9. Kalkulatu ondoko matrizeen Jordan forma kanonikoa:

$$a)\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad c)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 3 & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad e)\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

13. PROGRAMAZIO LINEALA

Enpresetan erabaki garrantzitsu eta korapilatsu asko hartu behar dira. Zer eta zenbat ekoitzi planifikatu behar dute eta ekoizpen hori gauzatzeko zein baliabide jarri behar duten. Askotan produktu desberdinak egiteko prozesuan baliabide berak erabiltzen dituzte. Esate baterako, esneki-enpresa batek esnea ez ezik jogurta, gazta, etab. ere ekoizten ditu, baina azukrea eta esnea denetan erabiltzen ditu. Baliabideak ez dira lehengaiak bakarrik, esate baterako, makinak, denbora edo langile adituak ere baliabideak dira. Gainera, baliabideak, normalean, mugatuta daudela kontuan hartu behar da. Horrez gain, produktu bakoitzak bere salmenta-prezioa du eta ekoizpen-kostua ere desberdina dute.

Ez dugu ahaztu behar enpresen helburua dirua irabaztea dela eta enpresako agintariek zer eta zenbat ekoitzi erabaki behar dute etekina maximoa izateko. Arazo honetaz programazio lineala arduratzen da eta normalean ordenagailurako prestatuta dauden programazio linealeko softwarea erabiltzen da, batez ere produktu asko daudenean. Bi produktu dauden kasua aztertuko dugu hemen, eta gehiago daudenerako, ordenagailuz erabiltzen den metodoaren oinarria azalduko da (Simplex metodoa).

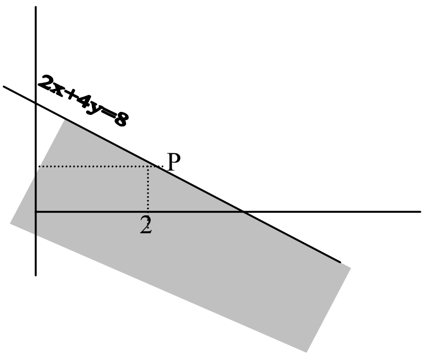
13.1. BI EZEZAGUNEKO DESBERDINTZA LINEALAK

13.1. DEFINIZIOA: Bi ezezaguneko (x eta y) desberdintza linealak ondoko adierazpen aljebraikoak dira:
$ax + by < c$, $ax + by \leq c$, $ax + by > c$, $ax + by \geq c$ non $a,b,c,x,y \in R$ diren.

Normalean ezezagunak izendatzeko x eta y erabiltzen dira (bi bakarrik badaude). Gehiago badaude azpindizeak erabili ohi dira (x_1, x_2, x_3,.....).

x eta y ezezaguneko desberdintza bat ebaztea x eta y aurkitzea da, non desberdintza betetzen den. Agerikoa da edozein desberdintzak infinitu soluzio dituela, eta ondorioz, grafikoki adierazten dira. Ebazpen-prozesua azaltzeko adibide bat erabiliko dugu: $2x + 4y < 8$.

Lehenengo pausoa $2x + 4y = 8$ ekuazioa ebaztea da. Bere soluzioak zuzen baten gainean daude.



ekuazioan y bakantzen bada: $y = 2 - 1/2.x$ dugu. Desberdintzan $y < 2 - 1/2.x$ izango dugu.

Edozein x-rentzat, $x = 2$ esaterako, ekuazioan $y = 1$ dagokio eta P (2,1) da bere soluzioa.
Desberdintzan, aldiz, $x = 2$ denean, $y < 1$ izango da eta P puntuaren azpiko bertikalean dauden puntuak izango dira soluzioak. Gauza bera gertatzen da x-ren gainerako balioekin. Beraz, desberdintzako soluzioak zuzen horren azpiko puntu guztiak dira.

Soluzioa, beraz, planoerdi bat izango da beti, eta zein aldetakoa den jakiteko nahikoa da planoerdi bateko puntu bat hartzea eta desberdintza betetzen duen ala ez egiaztatzea. Betetzen badu, soluzioa dagokion planoerdia da, eta betetzen ez badu, soluzioa bestea izango da. Normalean (0,0) puntua hartzen da erosoa baita, baina zuzena jatorritik pasatzen bada, orduan beste puntu bat hartu behar da.

Kontuan hartu hiru ezezaguneko desberdintza espazioko bolumen bat izango litzatekeela, eta ondorioz, hori marraztea nahiko zaila da. Ezezagun gehiago badira (n aldagai) soluzioa n ordenako espazioaren zati bat izango litzateke eta soluzioa grafikoki adieraztea ezinezkoa bilakatzen da.

13.2. BI EZEZAGUNEKO DESBERDINTZA-SISTEMA

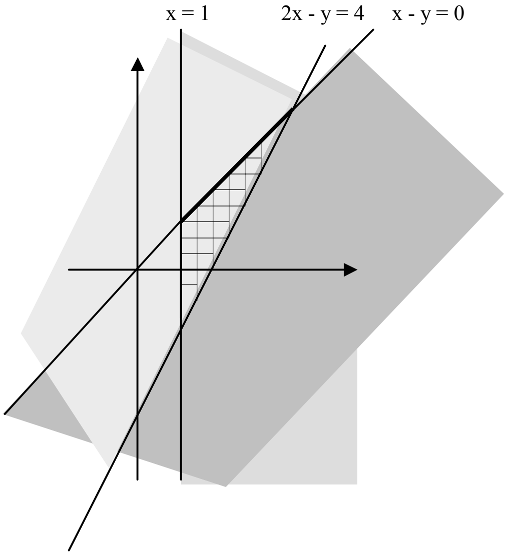
Desberdintza-sistema bat desberdintza batzuez osatutako sistema da. Desberdintza-sistema bat ebaztea soluzio komunak aurkitzea da. Horretarako, desberdintza bakoitzeko planoerdia irudikatzen da eta soluzioa planoerdi guztien ebakidura da.

Hori azaltzeko ondoko adibide hau aztertuko da:

adibidea: Kalkula dezagun ondoko sistemaren soluzioa:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y < 4 \\ x > 1 \\ x \geq y \end{array}\right\}$$

Ebaz.: $2x - y = 4$, $x = 1$ eta $x - y = 0$ zuzenak marrazten dira aurretik.



Desberdintza bakoitzari dagokion planoerdia marraztu da eta sistemaren soluzioa planoerdien ebakidura da (hau da, lauki-sarea duen triangelua)

Kontuan hartu triangeluko goiko aldea, hau da, $x - y = 0$ zuzenari dagokiona, soluzioa ere badela (hau da, bere puntuak soluzioak dira), baina beste bi ertzak, ordea, ez.

adibidea: Gaixo batek sendatzeko hiru bitamina-mota behar ditu egunero: A bitaminako 5 gramo, B-ko 9 gramo eta C-ko 72 gramo gutxienez. Hiru bitamina horiek P eta Q produktuetan daude ondoko proportzioetan: P-ko pastilla batek A, B eta C bitaminako 1, 1 eta 24 gramo ditu, hurrenez hurren, eta Q-ko pastilla bakoitzak 1, 3 eta 12 gramo, hurrenez hurren. Marraztu zein den hartu ahal duen P eta Q pastilla-kopurua bere beharrak asetzeko.

Ebaz.: Izan bitez x eta y ondoko hauek:

x: egunero hartzen duen P motako pastilla-kopurua
y: egunero hartzen duen Q motako pastilla-kopurua

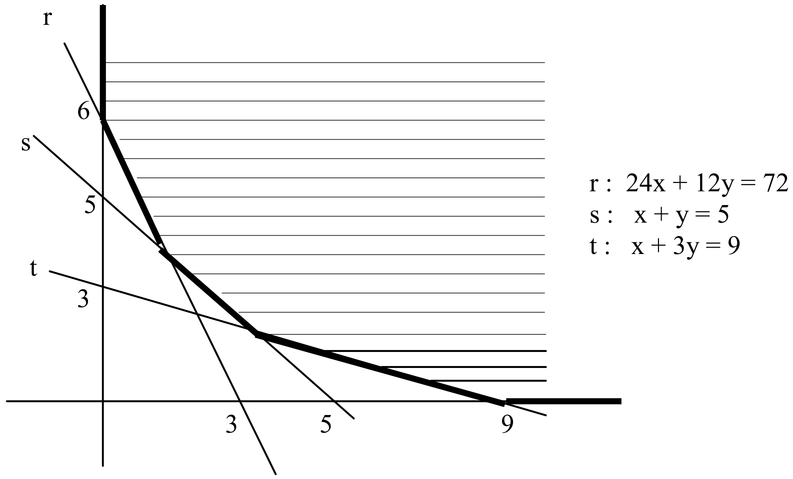
Normalean datuak taula batean jasotzen dira informazio argia izateko eta problemaren baldintzek exijitzen dituzten murrizketak agerian uzteko:

	A	**B**	**C**	**Pastilla-kopurua**
P	1	1	24	x
Q	1	3	12	y
Beharrak	5	9	72	

Hartara, ondoko desberdintza hauek bete beharko dira:

$$x + y \geq 5, \quad x + 3y \geq 9, \quad 24x + 12y \geq 72, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Sistema horren soluzioa grafikoan adierazten da:



Margotuta dagoen esparruko edozein puntu da soluzioa, eta horren koordenatuek adierazten dute gaixoak beharrak asetzeko har dezakeen pastilla-kopurua. Argi dago, kostuaren aldetik behintzat, ahalik eta gutxien hartzea komeni zaiola eta kostua minimoa den puntua aurkitzea izango da programazio linealaren helburua.

13.3. HELBURU FUNTZIOA. EREMU EGINGARRIA

Aipatu den bezala programazio linealaren xedea funtzio baten maximoa (normalean etekina) edo minimoa (kostua bada funtzioa) aurkitzea da. Funtzio honen itxura $F = ax + by + cz + ...$ da eta **helburu funtzio** deitzen zaio. Bi ezezaguneko kasuan, x eta y baldin badira ekoitzi behar diren produktuen unitate-kopuruak, helburu funtzioa bi ezezagun horien araberakoa da, eta x eta y zein diren aurkitu behar da funtzioa maximoa (edo minimoa) izateko ($ax + by = k$ zuzenei *maila-lerro* deritze).

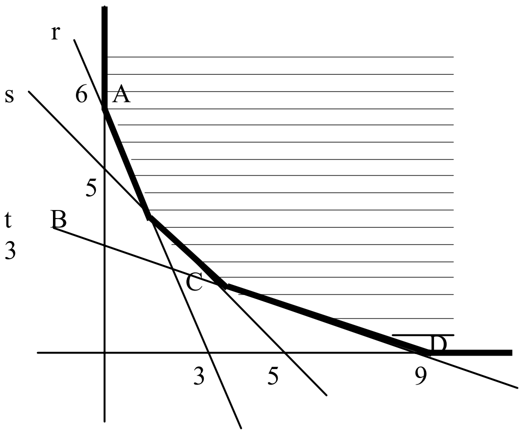
Aurreko adibidean ikusi den bezala x eta y lotuta daude murrizketa batzuen bidez. Askotan lehengaiak mugatuta daude eta ezin da nahi den adina ekoitzi (kasu hauetan murrizketek $\leq$ ikurreko desberdintzak sortzen dituzte). Beste kasu batzuetan beharrek azpitik mugatzen dute ekoizpena, zeren eta kopuru finko bat baino gehiago ekoitzi behar baita (kasu honetan murrizketek $\geq$ ikurreko desberdintzak sortzen dituzte).

Murrizketek desberdintza-familia bat sortzen dute eta sistema honen soluzioek **eremu egingarria** sortzen dute, hau da, planoko (x,y) puntuak, non x eta y ekoitzi ahal diren, dauden murrizketak kontuan hartuz. Argi dago helburu funtzioa maximoa (edo minimoa) aurkitzerakoan, soluzioa eremu egingarriaren barnean egotea exijitu behar dela.

adibidea: Gaixo batek sendatzeko hiru bitamina-mota hartu behar ditu egunero: A bitaminako 5 gramo, B-ko 9 gramo eta C-ko 72 gramo, gutxienez. Hiru bitamina horiek P eta Q produktuetan daude ondoko proportzioan: P-ko pastilla batek A, B eta C bitaminetako 1, 1 eta 24 gramo ditu, hurrenez hurren, eta Q-ko pastilla bakoitzak 1, 3 eta 12 gramo, hurrenez hurren. Kalkulatu bere beharrak asetzeko eta kostua minimoa izateko hartu behar dituen P eta Q pastillen kopurua, P pastilla batek 100 pezeta balio duela eta Q pastilla batek 140 pezeta balio duela kontuan izanik.

Ebaz.: Lehen ikusi den bezala murrizketek ematen duten desberdintza-sistemaren soluzioa *eremu egingarria* da eta grafikoki adierazten da.

Helburu funtzioa K (kostua) = 100x + 140y da. Eta eremu egingarriko $P(x_0,y_0)$ puntu bat aurkitu behar da, non K minimoa den.



Argi dago eremu egingarriak infinitu puntu (soluzio) dituela. Bistan denez, $P(x_0,y_0)$ puntuak $24x_0 + 12y_0 \geq 72$ bete beharko du, baina r zuzenean badago (hau da $24x_0 + 12y_0 = 72$ bada), bere koordenatuak desberdintza betetzen duen beste edozein punturenak baino txikiagoak izango dira.
Gauza bera gertatzen da gainerako desberdintzekin.
Hausnarketa honek ondoko teorema hau iradokitzen du:

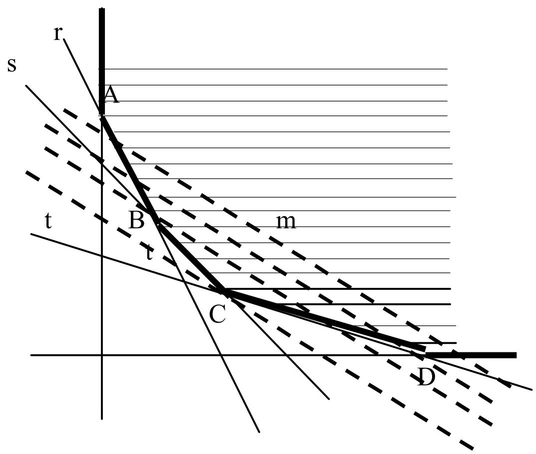
IZKINEN TEOREMA: Demagun eremu egingarria bornatuta dagoela. Orduan helburu funtzio baten muturra (maximo eta minimoa) eremu egingarriko izkinetan lortzen da.

Teorema honen frogapena grafikoki aztertuko da problema honetan.

Kalkula ditzagun emandako adibidean zein diren A,B,C,D izkinak. Bakoitza bi zuzenen arteko ebaketa-puntua da:

$$A: \begin{cases} 24x + 12y = 72 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,6) \qquad B: \begin{cases} 24x + 12y = 72 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1,4)$$

$$C: \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow C(3,2) \qquad D: \begin{cases} x + 3y = 9 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(9,0)$$



Helburu funtzioa K = 100x + 140y da. Demagun kostua finkatzen dugula, K = 900 esate baterako, orduan 900 = 100x + 140y zuzen bat da (m deituko diogu) eta kostu hori izateko (x,y) soluzioak zuzen horren puntuak dira.
Argi dago K jaisten badugu, K = 800 adibidez, 800 = 100x + 140y maila- -lerroa paraleloa izango dela m-rekiko eta bere puntuetan (eremu egingarria-goetan, jakina) kostua txikiagoa izango da.
Argi ikusten da kostu minimoa lortuko dela K = 100x + 140y zuzena eremu egingarritik ateratzen denean.

Ateratze hori izkina batean egingo da eta ariketa honetan C puntuan gertatzen da. Beraz, kostua minimoa den eremu egingarriko puntua C da.

Beraz, x = 3, y = 2 da soluzioa, P motako 3 pastilla eta Q motako 2. Kasu honetan kostua K = 100.2 + 140.2 = 580 pezetakoa izango da.

Zenbait kasutan posible da m zuzena poligonoko alde batekiko paraleloa izatea, eta ondorioz, ez da soluzio bakarra izango. Alde horren puntu guztietan kostu bera dugu eta kasu horretan edozein har daiteke (normalean izkina batekoa hartzen da).

Izkina-teorema kontuan hartzen bada, ez da beharrezkoa grafikoki ebaztea. Nahikoa da izkina bakoitzari dagokion helburu funtzioaren balioa kalkulatzea eta minimoari dagokion puntua hartzea.
Ariketa honetan nahikoa izan zatekeen honako hau egitea:

K (A) = K (0,6) = 840, K (B) = K (1,4) = 660, K (C) = K (3,2) = 580, K (D) = K (9,0) = 900. Beraz, kostu minimoa C puntuan lortzen dela argi ikusten da.

adibidea: Enpresa batean bi edari-mota egiten dira (A eta B). Hiru makina desberdin erabiltzen dira horretarako eta edari bakoitzetik 100 litro ekoizteko denbora hau (minututan adierazia) behar dute makina bakoitzean:

	A	**B**
1 makina	0	12
2 makina	8	8
3 makina	12	3

Enpresa horretan datorren hilabetean 15 lanegun dituzte (8 ordu egunero). Horrez gain, bi edariek alkohola behar dute (A-ko 100 litro ekoizteko 5 litro alkohol eta B-ko 100 litro ekoizteko 10 litro alkohol), baina biltegian 7.000 litro alkohol besterik ez dago.

Demagun A-ko litro bakoitzeko 10 pezeta eta B-ko litro bakoitzeko 12 pezeta irabazten direla. Erabaki behar dena da edari-mota bakoitzeko zenbat ekoitzi behar den datorren hilabetean etekina maximoa izan dadin.

Ebaz.: Lehenengo helburu funtzioa (etekina) adieraziko da. Unitateak 100 litro bakoitzeko adierazita daudenez, aldagaiak ondoko hauek izango dira:

x: A motatik ekoitzi behar den ehun litroko lote-kopurua.

y: B motatik ekoitzi behar den ehun litroko lote-kopurua.

Beraz, x eta y lote ekoizten badira, etekina hauxe izango da: $\boxed{E = 1000x + 1200y}$

Orain eremu egingarria kalkulatuko da. Horretarako kontuan hartu behar dira problemaren murrizketak (kasu honetan, bai denbora bai biltegian ditugun lehengaiak mugatuta daude). Denboraren aldetik, 15 eguneko epean lan egingo den 7.200 minutu daude, eta ondorioz, murrizketen familia hauxe da:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{denbora} & \left\{\begin{array}{r} 12y \le 7200 \\ 8x + 8y \le 7200 \\ 12x + 3y \le 7200 \end{array}\right. \\ \text{biltegia} & \quad 5x + 10y \le 7000 \end{array}\right\} \text{ eta argi dago } x \ge 0 \text{ eta } y \ge 0 \text{ direla.}$$

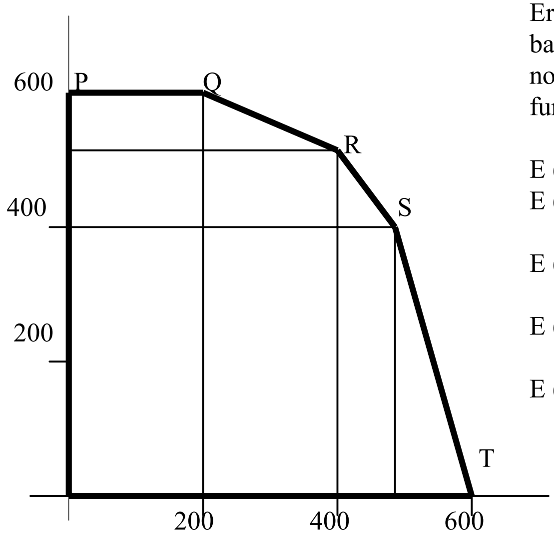
Desberdintza linealaren sistema hori sinplifikatu ondoren, ondoko hau gelditzen da:

$$\left.\begin{array}{r} y \le 600 \\ x + y \le 900 \\ 4x + y \le 2400 \\ x + 2y \le 1400 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Inekuazio horiei dagozkien ekuazioak irudikatuz eremu egingarria izango dugu eta zuzen horien arteko ebaketa-puntuak poligonoaren erpinak izango dira:

P (0,600) ; $Q\begin{cases} y = 600 \\ x + 2y = 1400 \end{cases} \Rightarrow$ Q (200,600) ; $R\begin{cases} x + 2y = 1400 \\ x + y = 900 \end{cases} \Rightarrow$ R (400,500)

$S\begin{cases} x + y = 900 \\ 4x + y = 2400 \end{cases} \Rightarrow$ S (500,400) ; T (600,0)



Eremu egingarria poligono honen barneko esparrua da. Etekin maximoa non lortzen den jakiteko, helburu funtzioa erpinetan kalkulatuko da:

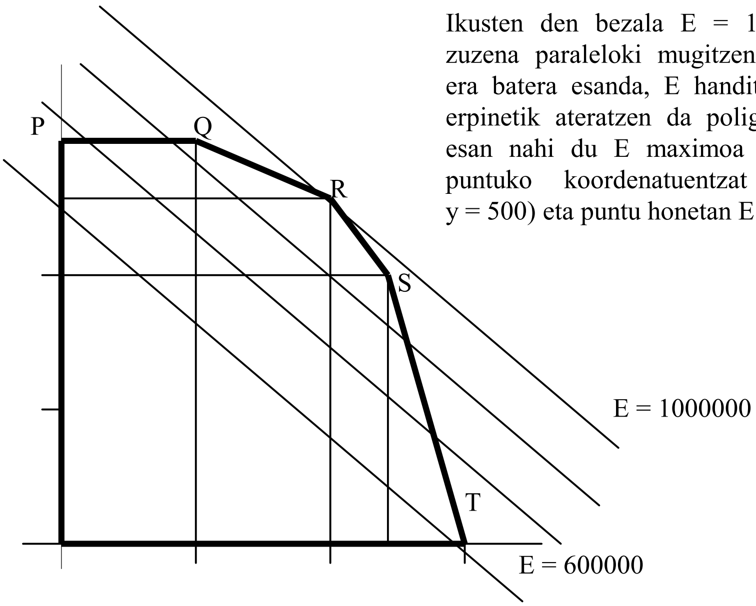
E (P) = 1200.600 = 720.000
E (Q) = 1000.200 + 1200.600 = 920.000
E (R) = 1000.400 + 1200.500 = 1000000
E (S) = 1000.500 + 1200.400 = 980000
E (T) = 1000.600 = 600000

Ondorioz, etekina R puntuan izango da maximoa. Beraz, A edari-motatik 40000 litro eta B motatik 50.000 litro ekoitzi behar dira etekina maximoa izateko, eta etekin maximo hori 1.000.000 pezetakoa izango da.

13.4. EBAZPEN GRAFIKOA

Poligonoa lortuz gero, E = 1000x + 1200y maila-lerroa marraztuko da E finko batentzat, esate baterako T puntutik pasatzeko behar dena, hau da, E = 600000, (edozein har daiteke, baina erpin batetik pasatzen dena hartzen bada hobeto ikusten da bere malda, poligonoaren aldeko maldekin alderatzeko).

Beraz, 600000 = 1000x + 1200y maila-lerroa irudikatuko da, hau da, 3000 = 5x + 6y sinplifikatu ondoren. Orduan maila-lerro hori paraleloki mugitzen bada, zein erpinetatik ateratzen den ikusiko da:



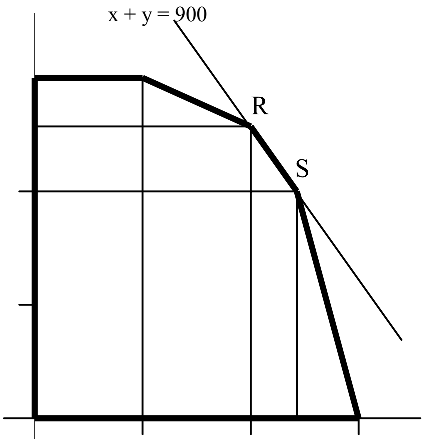
Ikusten den bezala E = 1000x + 1200y zuzena paraleloki mugitzen denean (beste era batera esanda, E handitzen denean) R erpinetik ateratzen da poligonotik. Horrek esan nahi du E maximoa izango dela R puntuko koordenatuentzat (x = 400, y = 500) eta puntu honetan E = 1000000 da.

13.5. MAILA-LERROAK ETA ALDE BAT PARALELOAK DIREN KASUA

Problema berarekin jarraituko dugu, baina orain bi edarietatik jasotzen den irabazia aldatuko dugu. Esate baterako, litroko 11 pezeta izango da irabazia bietan. Murrizketen familia berdina izango da eta aldaketa bakarra helburu funtzioa izango da: E = 1100x + 1100y
Era analitikoan egiten bada, hau da, erpin guztien koordenatuak ordezkatu helburu funtzioan, ondoko balioak ateratzen dira:

E (P) = 1100.600 = 660000
E (Q) = 1100.200 + 1100.600 = 880000
E (R) = 1100.400 + 1100.500 = 990000
E (S) = 1100.500 + 1100.400 = 990000
E (T) = 1100.600 = 660000

Kasu honetan R eta S erpinetan irabazi berdina eta maximoa lortzen da. Horrek esan nahi du R eta S puntuetatik pasatzen den zuzenetik (x + y = 900) edozein puntu har daitekeela, zeren puntu horietan guztietan irabazi bera lortzen baita, 990.000 pezeta hain zuzen.



Kasu honetan, E = 990000 denean 990000 = 1100x + 1100y zuzenak eta poligonoaren alde batek, x + y = 900 (R eta S-tik pasatzen denak), bat egiten dute.

Normalean soluzioa zenbaki osoa hartu behar da eta kasu horietan R edo S hartuko litzateke.

13.6. SOLUZIOAK OSOAK EZ DIREN KASUA

Egindako adibidean erpin guztien koordenatuak zenbaki osoak ziren, baina posible da batzuk (edo denak) zenbaki zatikiarrez (hamartarrez) osatuta izatea eta, beste aldetik, problemaren emaitzak zenbaki osoak izatea exijitzea. Demagun 100 litroko loteak ezin direla zatitu, zeren eta makinak, emandako errendimendua mantentzeko, 100 litro ekoizteko prestatuta baitaude. Demagun, baita ere, hasieran emandako baldintza guztiak mantentzen ditugula bigarren makinan eman behar diren denborak izan ezik. Suposa dezagun makina honetan A edari-motako 100 litro ekoizteko 8 minutu eman beharrean 7 minutu ematen dituela.

Informazioa taula batean jasoko dugu:

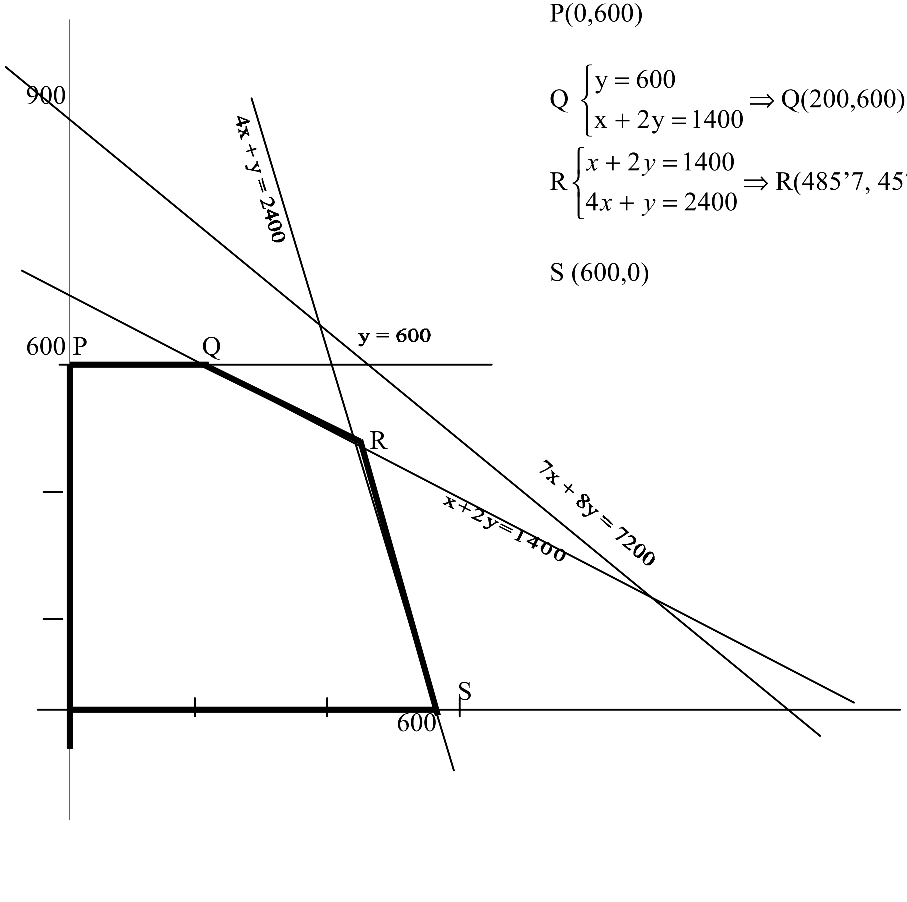
	A	B
1 makina	0	12
2 makina	7	8
3 makina	12	3

Orduan murrizketen familia ondoko hau da:

$$\left.\begin{array}{r} y \leq 600 \\ 7x + 8y \leq 7200 \\ 4x + y \leq 2400 \\ x + 2y \leq 1400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Eta hemen eremu egingarria zeharo aldatzen da, zeren eta zuzenak beste puntu batzuetan ebakitzen baitira.

Ondokoan irudikapen grafikoa egingo da eta erpinak kalkulatzeko zein ekuazio-sistema ebatzi behar diren agerian jarriko da.



Erpinak ondoko hauek dira:

P(0,600)

$$Q \begin{cases} y = 600 \\ x + 2y = 1400 \end{cases} \Rightarrow Q(200,600)$$

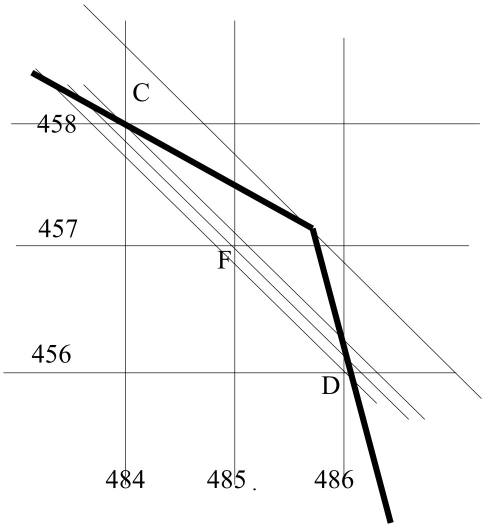
$$R \begin{cases} x + 2y = 1400 \\ 4x + y = 2400 \end{cases} \Rightarrow R(485'7,\ 457'1)$$

S (600,0)

Orain E = 1000x + 1200y funtzioaren maximoa lortzeko erpinetako balioak kalkulatuko dira:

E (P) = E (0,600) = 1200.600 = 720000
E (Q) = E (200,600) = 1000.200 + 1200.600 = 920000
E (R) = E (485’7, 457’1) = 1000.485’7 + 1200. 457’1 = 1034220
E (S) = E (600,0) = 1000.600 = 600000

Ondorioz, maximoa R puntuan lortzen da, baina ezin dira 485’7 lote ekoitzi. Orduan puntu horren inguruko bat hartu beharko da, baina koordenatu osoak dituena. Horretarako R puntuko inguruaren esparrua handituko da osoak diren inguruko puntuekin sare bat osatuz



Aztertu behar diren puntuak C, F eta D dira, zeren eta eremu egingarrian barne daude, koordenatu osoak dituzte eta maila-lerroak mugitzean gainerako puntuetan baino etekin handiagoa lortzen dela ikusten baita.

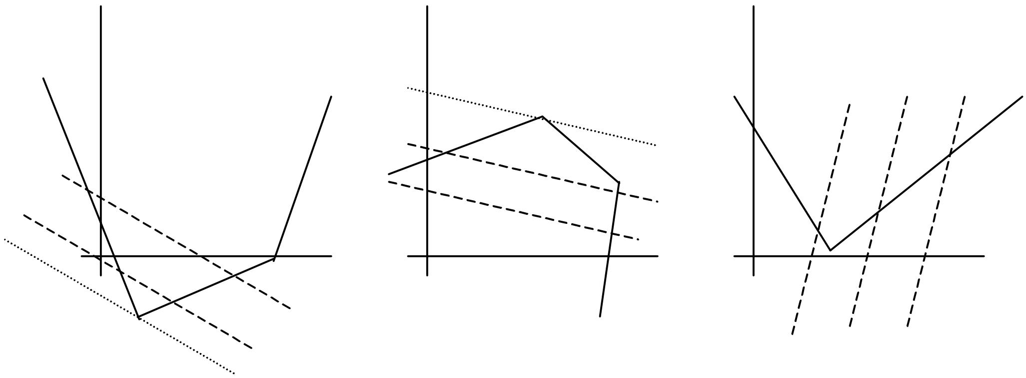
Grafikoan ez da oso garbi ikusten non lortzen den maximoa, zeren eta hiru puntu horietatik pasatzen diren maila-lerroek, ia-ia, bat egiten baitute.
Kasu honetan, hobe dugu puntu bakoitzari zein etekin dagokion era analitikoan kalkulatzea.

E (C) = E (484,458) = 1033600
E (F) = E (485,457) = 1033400
E (D) = E (486,456) = 1033200

Eta ikusten den bezala C puntua da etekin maximoa duena. Kasu honetan, beraz, A motako 485.000 litro eta B motako 457.000 litro egingo lirateke.

13.7. EREMU EGINGARRI MUGAGABEAK

Kasu batzuetan eremu egingarria ez da poligono itxia eta posible da, beraz, helburu funtzioak maximoa edo minimoa ez izatea (ezta muturrik ere). Ondokoan hiru kasu horiek era grafikoan azaltzen dira eta maila-lerroak marraztu dira, muturrak non dauden agerian uzteko:



1. Minimoa dago soilik. **2. Maximoa dago soilik** **3. Ez bata ez bestea**

13.8. PROGRAMAZIO LINEALAREN MODU ESTANDARRA

Programazio linealeko problema bakoitzak itxura desberdina du. Batzuetan helburu funtzioa maximizatu eta besteetan minimizatu egin behar da, eta murrizketek ere noranzko desberdina izan dezakete. Modu bat (estandar) azalduko da orain problema guztiak adierazteko.

13.2. DEFINIZIOA: Programazio linealeko problema baten modu estandarra ondoko ekuazio-sistemaren soluzio bat aurkitzea da:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}.x_1+\ldots\ldots+a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1+\ldots\ldots+a_{2n}.x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}.x_1+\ldots\ldots+a_{mn}.x_n = b_m \end{array}\right\} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots\ldots,n \quad \text{izanik}$$

non $z = c_1.x_1 + \ldots\ldots + c_n.x_n$ funtzioa minimoa den.

Ikusten den bezala, problema batean agertzen diren desberdintzak ekuazio bilakatzen dira eta hori aldagai berriak (lasaiera-aldagaiak) gehituz lortzen da. Hau da:

Desberdintza $a_{i1}.x_1 + \ldots\ldots + a_{in}.x_n \leq b_i$ bada $\Rightarrow$ $a_{i1}.x_1 + \ldots\ldots + a_{in}.x_n + y_i = b_i$ ekuazio bilakatzen da, non $y_i \geq 0$ den.
Eta desberdintza, ordea, $a_{i1}.x_1 + \ldots\ldots + a_{in}.x_n \geq b_i$ bada, $a_{i1}.x_1 + \ldots\ldots + a_{in}.x_n - y_i = b_i$ ekuazio bilakatzen da (non $y_i \geq 0$ den).

Problema batean x_i aldagai guztiak positiboak izatea lortzeko honela jokatuko da:

1. Demagun problema batean ez dagoela inolako mugarik x_i aldagaia positiboa edo negatiboa izateko. Orduan, $x_i = u_i - v_i$ egingo da, non $u_i \geq 0$ eta $v_i \geq 0$ diren (zeren eta edozein zenbaki erreal bi zenbaki positiboen arteko kendura bezala adierazi baita). Ondorioz, problemak aldagai bat gehiago izango du.

2. $x_i \leq 0$ bada, ikurra aldatuko zaio leku guztietan eta $x_i \geq 0$ jarri ahal da.

Beste alde batetik, modu estandarrak helburu funtzioa minimizatzen du eta kasu askotan maximizatu egin nahi da. Kasu honetan nahikoa da bere aurkakoa minimizatzea. Ondorioz, kasu guztiak modu estandarrera eraman daitezke.

adibidea: Lortu $z = 2x_1 - x_2 + x_3$ funtzioaren maximoa murrizketak ondokoak izanik:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ x_1 - x_3 = -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Ebaz.: Bi desberdintza daudenez, lehenengoz x_4, x_5 bi aldagai berriak sartuko dira ekuazio bilakatzeko:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 6 \end{array}\right\} \text{ non } x_4, x_5 \geq 0 \text{ diren.}$$

Orain x_2 negatiboa denez, dagoen leku guztietan ikurra aldatuko da eta problema honela planteatuko da: maximizatu $z = 2x_1 + x_2 + x_3$ ondoko murrizketekin:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6 \\ x_1 - x_3 = -2 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2,....,5 \end{array}\right\}$$

eta bukatzeko minimizazioko problema izateko helburu funtzioaren ikur guztiak aldatuko dira. Beraz, problemak honako itxura hau izango du:

Minimizatu $z = -2x_1 - x_2 - x_3$ ondoko murrizketa-familiarekin:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6 \\ x_1 - x_3 = -2 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots.,5 \end{array}\right\}$$

ADIERAZPEN MATRIZIALA

Problema baten forma estandarra modu matrizialean idatzi ahal da.

$c = (c_1,......,c_n)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ egiten badira, problema honela adieraz daiteke:

$$\text{minimizatu } z = c.x, \quad \left.\begin{array}{l} A.x = b \\ x_i \geq 0 \end{array}\right\} \text{ murrizketekin.}$$

Eta eremu egingarria murrizketa hauek betetzen dituzten x bektoreak osatzen dutena da.

Aurreko adibidean c = (-2,-1,-1,0,0), $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dira.

EREMU EGINGARRIAREN KALKULUA

Aurreko adibidea ebatz dezagun. Lehenengoz eremu egingarriko puntuak kalkulatuko dira:

Gauss metodoa aplikatuko dugu sistema errazteko:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 2 & -14 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 10 \\ -6x_3 - x_4 + 2x_5 = -14 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = -2 + x_3,\ x_2 = 8 - 3x_3 + x_5,\ \ x_4 = 14 - 6x_3 + 2x_5$$

eta $x_3 = \alpha$, $x_5 = \beta$ egiten badira, soluzioak ondoko multzokoak izango dira:

$$x = \{(-2 + \alpha,\ 8 - 3\alpha + \beta,\ \alpha,\ 14 - 6\alpha + 2\beta,\ \beta) \ /\ \ \alpha, \beta \in R\}$$

Orain, $x_i \geq 0$ direla exijituz, eremu egingarriko puntuak lortzen dira:

$x = \{(-2+\alpha\ ,\ 8 - 3\alpha+\beta\ ,\ \alpha,\ 14-6\alpha+2\beta,\ \beta) \ / \ \alpha,\beta \in R$ eta $2 \leq \alpha \leq (7+\beta)/3\ ,\ \beta \geq 0\ \}$

13.9. SIMPLEX METODOA

Simplex algoritmoa garatzeko hipotesi bat egin behar da: ekuazio-sisteman ez dago ekuazio erredundanterik (hau da, ezin dira bata besteen konbinazio lineal gisa jarri). Honek esan nahi du A matrizearen heina m dela. Horrez gain, n = m bada, soluzio bakarra izango dugu eta hori izango litzateke bilatutako soluzio minimoa. Ondorioz, heA = m < n suposatuko da.

13.2. DEFINIZIOA: x bektoreari **oinarrizko soluzio** deritzo n – m koordenatuak, gutxienez, zero badira.
(n - m baino gehiago badira zero, endekatu deitzen zaio).

Oinarrizko soluzioa izateaz gain egingarria bada, **oinarrizko egingarri** deritzo.

OINARRIZKO SOLUZIOEN KALKULUA

Eman behar diren pausoak honako hauek dira:

1. A matrizeko mxm ordenako B azpimatrize bat hartzen da, non $|B| \neq 0$ den. Hartutako zutabeei dagozkien aldagaiei ***funtsezkoak*** deritze.
2. n - m zutabe gelditu dira hartu gabe. Orduan, dagozkien x_i aldagaiak kentzen dira (***ez funtsezkoak***).
3. Gelditzen den sistema ebazten da eta kendu diren aldagaien balioak zeroak dira.

adibidea: 5. adibidearekin jarraituko dugu.

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ azpimatrizea hartuko dugu. Beraz, x_4 eta x_5 kendu dira eta

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & -14 \end{array}\right)$ sistema ebatziko da (*funtsezko aldagaiak* x_1,x_2 eta x_3 dira).

Sistema honen soluzioa $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 7/3$, $x_4 = x_5 = 0$ da. Beraz, x_0 (1/3,1,7/3,0,0) oinarrizko soluzioa da eta lehen aurkitutako soluzio egingarrien multzoa kontsideratzen bada:

$x = \{(-2+\alpha , 8 -3\alpha+\beta , \alpha, 14-6\alpha+2\beta, \beta) / \alpha,\beta \in R$ eta $2 \leq \alpha \leq (7+\beta)/3 , \beta\geq 0 \}$

$\alpha = 7/3$ eta $\beta = 0$ parametroei dagokie. Honek esan nahi du x_0 soluzioa egingarria dela. Beraz, oinarrizko egingarria izango da.

Bistan denez, beste zutabe batzuk hartzen badira beste oinarrizko soluzio batzuk aterako dira, baina ez dute zertan egingarriak izan.

Ikusitako adibidean $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = 10$ modu daude hiru zutabe hautatzeko eta denak dira oinarrizko soluzioak, baina haietatik batzuk bakarrik izango dira egingarriak.

PROGRAMAZIO LINEALEKO FUNTSEZKO TEOREMA:

- Programazio linealeko problema batean, soluzio egingarri bat badago, oinarrizko egingarrien soluzio bat ere existitzen da.
- Soluzio hobezina badago, ezin hobe daitekeen oinarrizko egingarrien soluzio bat existitzen da.

Teorema honen ondorioa oso garrantzitsua da, zeren eta nahikoa baita oinarrizko soluzioak aurkitzea (normalean $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!.(n-m)!}$ daude) eta bilatutako minimoa egingarrien artean egongo da.

Dagoeneko egiten ari garen adibidea ebatz dezakegu, dauden hamar soluzioak aurkitu, ondoren egingarriak hartu eta helburu funtzioan ordezkatu minimoa non dagoen jakiteko. Hori oso luzea suertatu ahal da eta horregatik beste modu bat aurkeztuko da hori dena gauzatzeko.
Beraz, hiru kasu gerta daitezke:

1. Ez dago minimorik
2. Aurkitutako oinarrizko-egingarriaren soluzioa minimoa da.
3. Aurkitutako oinarrizko-egingarriaren soluzioa hobetu ahal da.

Zein kasutan gauden jakiteko 13.1. teorema emango da (frogapenik gabe), baina aurretik aldagai batzuk definitu behar dira:

Izan bedi x_0 aurkitutako soluzio egingarria eta B erabili den azpimatrizea. Ondoko aldagai berri hauek definitzen dira:

$y_k = B^{-1}.a_k$ non a_k A-ko k-garren zutabea den.

$z_k = \sum_{i=1}^{m} c_i.y_{ki}$ (non c bektoretik funtsezko aldagaiei dagozkien c_i hartzen diren)

egiten ari garen adibidean helburu funtzioa $z = -2x_1 - x_2 - x_3$ da.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizetik $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ matrizea da erabilitakoa eta (funtsezko aldagaiak x_1, x_2 eta x_3 dira).

Bere alderantzizkoa $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}$ da eta ondorioz:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$y_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$z_1 = c_1.y_{11} + c_2.y_{12} + c_3.y_{13} = -2.1 + (-1).0 + (-1).0 = -2$

$z_2 = c_1.y_{21} + c_2.y_{22} + c_3.y_{23} = -1$

$z_3 = \qquad = -1, \quad z_4 = 0, \quad z_5 = 1$

13.1. TEOREMA: Izan bedi x_0 $(x_1,.....,x_n)$ problema estandar baten oinarrizko egingarrien soluzio bat. Orduan:

1. $\mathbf{x_i}$ funtsezkoa ez den aldagai batentzat $\begin{cases} z_i - c_i > 0 \\ y_{ik} \leq 0 \quad \forall k \end{cases}$ gertatzen bada, problemak **ez du soluzio hobezinik**.

2. $\mathbf{x_0}$ **hobezina da,** baldin eta soilik baldin $z_i - c_i \leq 0$ bada, funtsezkoa ez den edozein x_i aldagairentzat.

3. demagun x_i funtsezkoa ez den aldagai batentzat $\begin{cases} z_i - c_i > 0 \\ \exists p \quad \text{non} \quad y_{ip} > 0 \end{cases}$ den betetzen direla. Orduan, beste B' azpimatrizea hartu behar da eta a_k zutabearen ordez a_i zutabea hartuko da, non k aterako den $\frac{x_k}{y_{ik}} = \min\left\{ \frac{x_p}{y_{ip}} / y_{ip} > 0 \right\}$exijitzetik.

Orduan, B'-ri dagokion $\mathbf{x'_0}$ **soluzioa hobea da** $\mathbf{x_0}$ **baino**. Hau da, $z'(x'_0) \leq z(x_0)$

Aplika diezaiogun teorema hau esku artean dugun adibideari:

Hemen $z_1 - c_1 = 0$, $z_2 - c_2 = 0$, $z_3 - c_3 = 0$, $z_4 - c_4 = 0$, $z_5 - c_5 = 1$

Beraz, x_5 funtsezkoa ez den aldagaiarentzat $z_5 - c_5 = 1 > 0$ gertatzen da, baina y_5 (-1/3,0.-1/3) bektorearen koordenatuak ≤ 0 direnez, problemak ez du soluziorik izango.

adibidea (*): Orain problema bera kontsideratuko da, baina aldaketa bat egingo da helburu funtzioan, murrizketen familia bera mantenduz. Demagun $z = 2x_1 + x_2 + x_3$ dela (beraz, c (2,1,1,0,0) da).

Ebaz.: Murrizketak aldatu ez direnez, ebatzi behar den sistema sistema bera da eta lehen lortu den oinarrizko egingarriaren soluzioa (hau da, x_0 (1/3,1,7/3,0,0)) onargarria da problema berri honentzat.

Modu berean y_i bektoreak bektore berak dira, hau da:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y_4 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix} \qquad y_5 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Baina z_i aldatzen dira: $z_1 = 2$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1$, $z_4 = 0$, $z_5 = -1$ dira eta ondorioz:

$$z_1 - c_1 = 0,\ z_2 - c_2 = 0,\ z_3 - c_3 = 0,\ z_4 - c_4 = 0,\ z_5 - c_5 = -1$$

orduan, teoremako bigarren kasuan gaude, zeren eta funtsezkoak ez diren x_4 eta x_5 aldagaientzat $z_4 - c_4 = 0 \leq 0$ eta $z_5 - c_5 = -1 < 0$ gertatzen baitira. Ondorioz, aurkitutako x_0 (1/3,1,7/3,0,0) soluzioa minimoa da.

adibidea (**): Kontsidera dezagun orain helburu funtzioa $z = 3x_1 + x_2 + 6x_3$ dela eta murrizketa-familia mantentzen dela.

Lehen bezala, oinarrizko egingarria x_0(1/3,1,7/3,0,0) izango da. Orain c (3,1,6,0,0) da. Modu berean, y_i ez dira aldatzen eta $z_1 = 3$, $z_2 = 1$, $z_3 = 6$, $z_4 = 1$, $z_5 = -3$ dira. Beraz:

$$z_1 - c_1 = 0,\ z_2 - c_2 = 0,\ z_3 - c_3 = 0,\ z_4 - c_4 = 1,\ z_5 - c_5 = -3$$

x_4 aldagaiarentzat $z_4 - c_4 > 0$ da eta y_4 bektoreak baditu bi koordenatu positiboak. Orduan, teoremako hirugarren kasuan gaude, eta ondorioz, soluzioa hobe daiteke.

Min $\left\{ \overset{k=1}{\frac{1/3}{1/6}}, \overset{k=3}{\frac{7/3}{1/6}} \right\}$ lortzen da k = 1 denean. Honek esan nahi du B azpimatrizean lehenengo zutabearen ordez laugarrena jarri behar dugula: B' = $\begin{array}{ccc} x_4 & x_2 & x_3 \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ eta

ebatzi behar den sistema $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -14 \end{pmatrix}$ da $\Rightarrow$ $x_4 = x_2 = x_3 = 2$. Beraz, aurkitutako x'_0 (0,2,2,2,0) soluzioa x_0(1/3,1,7/3,0,0) soluzioa baino hobea izango da.

Egiazta dezagun:

$z(x_0) = 3.(1/3) + 1.1 + 6.(7/3) = 16$
$z(x'_0) = 3.0 + 1.2 + 6.2 = 14$ eta ondorioz, x'_0 soluzioa hobea da.

Egindako prozedura errepikatu behar da. Orain aldagai funtsezkoak x_4,x_2 eta x_3 dira eta x_1 eta x_5 funtsezkoak ez direnak. Beraz, orain c (0,1,6,3,0) da.

B' matrizea erabiliz y_i eta z_i kalkulatu behar dira:

Lehenengoz, B'^{-1} kalkulatuko da: $B'^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 12 & 3 \\ 9 & 7 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Eta $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeko a_k zutabeei aplikatuko zaie:

$$y_1 = B'^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2 = B'^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_3 = B'^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_4 = B'^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y_5 = B'^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Orain c (0,1,6,3,0) izango da (x_1 eta x_4 trukatu egin baitira)

$z_1 = 0.1 + 1.0 + 6.0 \quad = 0$			$z_1 - c_1 = 0$
$z_2 = 0.0 + 1.1 + 6.0 \quad = 1$			$z_2 - c_2 = 0$
$z_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad = 6$	$\Rightarrow$		$z_3 - c_3 = 0$
$z_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad = -3$		Funtsezkoak	$z_4 - c_4 = -3 - 3 = -6 < 0$
$z_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad = -1$		ez direnak	$z_5 - c_5 = -1 - 0 = -1 < 0$

beraz, x_1 eta x_5 funtsezko ez diren aldagaientzat $z_i - c_i < 0$. Ondorioz, teoremaren bigarren kasuan gaude eta lortu den $x'_0(0,2,2,2,0)$ soluzioa bilatzen ari garen minimoa da, hau da, $x_1 = x_5 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 2$.

Hau gertatuko ez balitz, prozesua errepikatu egin beharko litzateke soluzio hobezinera iritsi arte.

TAULAREN FORMATUA

Ikusitako prozedura hobeto erabiltzeko, jokoan dauden elementuak taula batean jartzen dira jarraian adierazten den bezala:

funtsezko aldagaiak
↓

c	x_0	y_1	......	y_n
c_1	x_1	y_{11}	......	y_{n1}
...	....	...	......	...
c_m	x_m	y_{1m}	......	y_{nm}
		$z_1 - c_1$	......	$z_n - c_m$

Egindako adibideetan ondoko hauek izango ditugu:

(*) adibidean:

c	x_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
2	$x_1 = 1/3$	1	0	0	1/6	-1/3
1	$x_2 = 1$	0	1	0	-1/2	0
1	$x_3 = 7/3$	0	0	1	1/6	-1/3
		0	0	0	0	-1

Hemen azken errenkadako zenbakiak ($z_i - c_i$ adierazten dutenak) zero edo negatiboak direnez, problemaren minimoa aurkitutako soluzioan lortzen da.

(**) adibidean

c	x_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	x_i / y_{4i}, $y_{4i} > 0$
3	$x_1 = 1/3$	1	0	0	1/6	-1/3	(1/3)/(1/6)
1	$x_2 = 1$	0	1	0	-1/2	0	
6	$x_3 = 7/3$	0	0	1	1/6	-1/3	(7/3) /(1/6)
		0	0	0	1	-3	

→ x_1 kanporatzen da

↑

x_4 sartzen da

Azken errenkadan ikusten den bezala $z_4 - c_4 > 0$ da eta y_{41} eta y_{43} positiboak dira. Beraz, hobetu ahal da x_4 funtsezkotzat hartuz. Zein kentzen den jakiteko $\min\{x_1/ y_{41},\ x_3 / y_{43}\}$ kalkulatu behar da. Balio hauek azken zutabean daude eta ikusten den bezala minimoa $i = 1$ denean lortzen da. Horregatik x_1 ez-funtsezko aldagai bihurtzen da.

Aldagai berriekin beste B' matrizea hartu da eta x'_0 soluzioarentzat ondoko taula hau sortzen da:

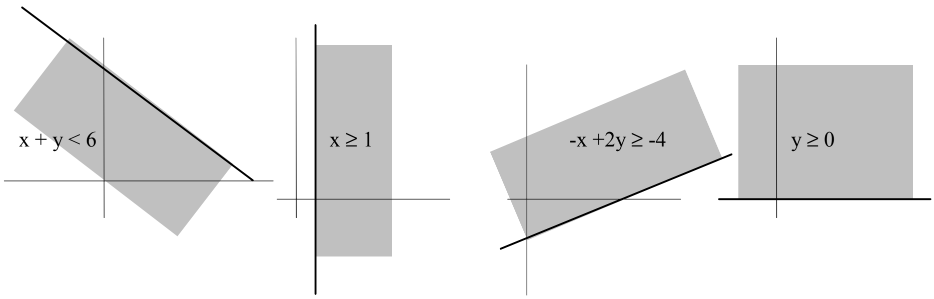
c	x'_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	x_i / y_{4i}, $y_{4i} > 0$
0	$x_4 = 2$	1	0	0	6	-2	
3	$x_2 = 2$	0	1	0	3	-1	
1	$x_3 = 2$	0	0	1	-1	0	
		0	0	0	-6	-1	

Ikusten den bezala azken errenkadako balio guztiak ≤ 0 dira, eta ondorioz, $x'_0(0,2,2,2,0)$ soluzioa da problema minimizatzen duena.

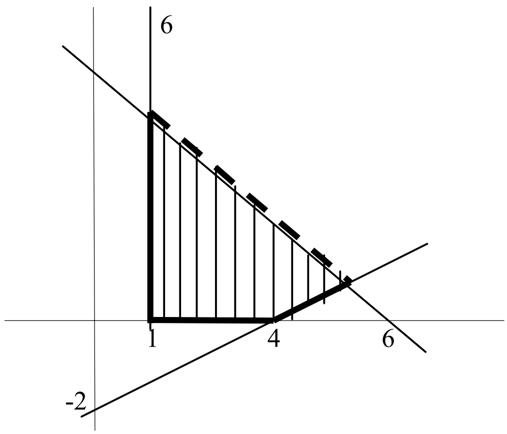
EBATZITAKO ARIKETAK

1. Ebatzi ondoko desberdintza-sistema hau: $\left.\begin{aligned} &x + y < 6 \\ &x \geq 1 \\ &-x + 2y \geq -4 \\ &y \geq 0 \end{aligned}\right\}$

Ebaz.: Lehenengoz desberdintza bakoitzaren eremu egingarria irudikatuko da:



Sistemaren soluzioa esparru horien arteko ebakidura da. Elkarrekin marrazten badira, eremu egingarriaren poligonoa dugu:



Soluzioa, jakina, poligono horren barneko puntu guztiak dira eta aldeak soluzioaren barne daude, x + y = 6 zuzenari dagokiona izan ezik, zeren eta x+y < 6 betetzen den (eta ez da posible x + y = 6 izatea)

2. Lantegi batean bi mekanikari-mota daude, goi-mailako bat (A) eta erdi-mailako hiru (B) Bi zerbitzu-mota eskaintzen dituzte: olio-aldaketa (OA) eta azterketa orokorra (AO). Olio-aldatzeko A motako mekanikariaren 8 minutu eta B motako mekanikariaren 20 minutu behar dira. Azterketa bakoitzean, aldiz, A motakoaren 10 minutu eta B *motakoaren 60 minutu sartzen dira. Kudeatzaileak badaki olio-aldaketa batekin 2.000 pezeta irabazten dela eta azterketa bakoitzarekin 10.000 pezeta. 40 orduko aste bateko lana (eta ondorioz eskaintza, hau da, zein zerbitzu egin behar diren) programatu nahi da etekina maximoa izan dadin (bazkaria, etab. direla eta, langile bakoitzak egunero 80 minutu galtzen dituela suposatuko da).*

Ebaz.: Izan bitez x eta y astero egin behar diren mota bakoitzeko (OA eta AO, hurrenez hurren) zerbitzu-kopurua. Helburu funtzioa ondoko hau da: E = 2000x + 10000y

Dugun informazioa taula batean jasoko da:

	A	**B**
OA	**8**	**20**
AO	**10**	**60**

Aste bakoitzean langile bakoitzak lanean ematen duen denbora 40.60 – 80.5 = 2000 minutu da.

B motako mekanikariak hiru direnez, B motako 6000 minutu daude.

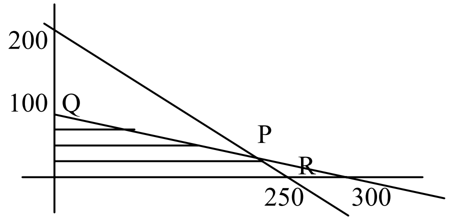
Demagun OA motako x zerbitzu eta AO motako y zerbitzu egiten direla, orduan ondoko taula idatzi ahal da:

	A	**B**	**Zerbitzu--kopurua**
OA	8	20	x
AO	10	60	y
Denbora maximoa	2000	6000	

Murrizketen familia ondoko hau izango da: $\left.\begin{array}{l} 8x + 10y \le 2000 \\ 20x + 60y \le 6000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

Eta sinplifikatu ondoren: $\left.\begin{array}{l} 4x + 5y \le 1000 \\ x + 3y \le 300 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

Beraz, eremu egingarria ondoko hau da:



Hiru izkina daude Q(0,100), P eta R(250,0). P-ren koordenatuak

$$\begin{cases} 4x + 5y = 1000 \\ x + 3y = 300 \end{cases}$$ ebaztetik ateratzen dira

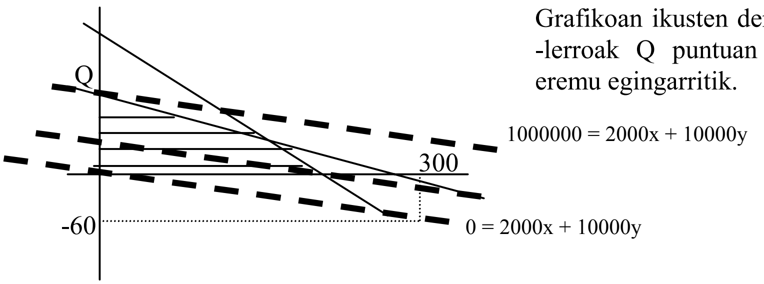
eta ondorioz, P(1500/7,200/7) da.

Kalkula dezagun zein den E-ren balioa izkinetan:

E (Q) = E (0,100) = 2000.0 + 10000.100 = 1000000
E (R) = E (250,0) = 2000.250 + 10000.0 = 500.000
E (P) = E (1500/7,200/7) = 2000.1500/7 + 10000.200/7 = 5000000/7

Ondorioz, etekin maximoa Q puntuan lortzen da, hau da, zerbitzu guztiak (100) azterketa orokorra motakoak egiten badituzte.

Grafikoki ere garbi ikusten da. Har dezagun 0 = 2000x + 10000y maila-lerroa, hau da, 0 = x + 5y. Zuzen honen bi puntu (0,0) eta (300,-60) dira.



Grafikoan ikusten den bezala maila--lerroak Q puntuan ateratzen dira eremu egingarritik.

3. Enpresa batek lehengai bat hiru lantegitatik (A, B eta C) ekartzen du eta 260.000 kg erosi behar ditu, A-tik 90.000 kg, B-tik 100.000 kg eta C-tik 70.000 kg. Bi zentro ditu: Madrilekoa eta Bilbokoa; 110.000 kg Madrilera eta 150.000 kg Bilbora eraman behar ditu. Ondoko taulan lantegi bakoitzetik enpresa horren bi zentroetara eramateko kilo bakoitzeko garraiobidearen kostua adierazi dira:

	A	***B***	***C***
Madril	*6*	*15*	*3*
Bilbo	*4*	*20*	*5*

Aurkitu nola egin behar den banaketa kostua minimoa izan dadin.

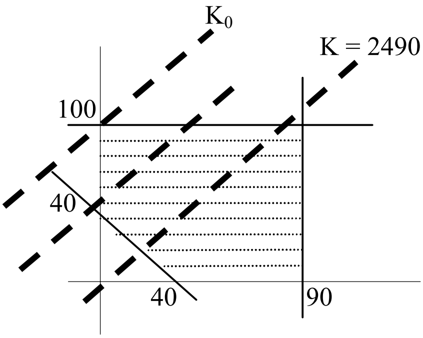
Ebaz.: Demagun A-tik x kilo eramaten direla Madrilera. Orduan A-tik Bilbora 90.000 - x eramango dira. Modu berean, demagun y kilo eramaten direla B-tik Madrilera; orduan, 100.000 - y eramango dira B-tik Bilbora. Azkenean, C-tik Madrilera 110.000 - (x + y) kilo eta C-tik Bilbora 70.000 - (110.000 - (x + y)) (hau da, x + y - 40.000) eraman beharko dira. Hori dena ondoko taulan azaltzen da:

	A	**B**	**C**	**guztira**
Madril	x	y	110000-x- y	110000
Bilbo	90000-x	100000-y	x+y - 40000	150000
guztira	90000	100000	70000	

Helburu funtzioa kostua da: K = 6x + 4.(90000 - x) + 15y + 20.(100000 - y) + 3.(110000 - x - y) + 5.(x + y - 40000) = 4x - 3y + 2490000.

Hemen dauden murrizketak ondoko hauek dira:

$$\left.\begin{array}{l} x \le 90.000 \\ y \le 100.000 \\ 110000 - x - y \le 70000 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \le 90.000 \\ y \le 100.000 \\ x + y \ge 40.000 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{array}\right\}$$ eta dagozkien eremu egingarria ondokoan azaltzen da (unitateak milakotan daude):



K=2490 egiten bada 2490=4x – 3y + 2490 nibel zuzena dugu , hau da 4x – 3y = 0, eta K gero eta txikiagoa hartu nibel zuzena marrazkian ikusten den bezala mugitzen da. Beraz K_o kostu minimoa x = 0 eta y = 100 denean lortzen da.

Ondorioz souzioa ondoko taulan adierazten da :

	A	**B**	**C**	**osoan**
Madrid	0	100000	10000	110000
Bilbo	90000	0	60000	150000
osoan	90000	100000	70000	

4. Kalkulatu $z = -7x_1 - x_2 - x_3$ *funtzioaren minimoa, murrizketak ondokoak izanik:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 5 \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 &\leq -4 \\ x_i \geq 0 \quad i &= 1,2,3 \end{aligned}$$

Ebaz.: Modu estandarrean jartzeko x_4 eta x_5 aldagai berriak sartuko dira:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_5 &= -4 \qquad \text{non} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1,.....,5 \quad \text{diren.} \end{aligned}$$

Orduan, A matrizea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ da eta heina 2 da. Lehenik, x_1 eta x_2 aldagaiak funtsezko gisa hartuko ditugu. Beraz, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ eta horren ebazpenak $x_1 = 7/11$, $x_2 = 24/11$ ematen du. Biak positiboak direnez, $x_0(7/11,24/11,0,0,0)$ oinarrizko egingarrien soluzioa izango da. Soluzio honentzat z helburu funtzioaren balioa $z_0 = -7.7/11 - 1.24/11 = -73/11$ da.

Orain $B^{-1} = -\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ A-ko bost zutabeei aplikatuko zaie y_i ateratzeko:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; y_3 = \begin{pmatrix} -1/11 \\ 17/11 \end{pmatrix}, \; y_4 = \begin{pmatrix} -3/11 \\ -4/11 \end{pmatrix}, \; y_5 = \begin{pmatrix} 2/11 \\ -1/11 \end{pmatrix}$$

Orain z_i kalkulatuko dira, c (-7,-1,-1,0,0) dela kontuan hartuz:

$z_1 = -7.1 - 1.0 = -7 \quad \Rightarrow \quad z_1 - c_1 = 0$

$z_2 = -7.0 - 1.1 = -1 \quad \Rightarrow \quad z_2 - c_2 = 0$

$z_3 = -7.(-1/11) - 1.(17/11) = -10/11 \quad \Rightarrow \quad z_3 - c_3 = 1/11$

$z_4 = -7.(-3/11) - 1.(-4/11) = 25/11 \quad \Rightarrow \quad z_4 - c_4 = 25/11$

$z_5 = -7.(2/11) - 1.(-1/11) = -13/11 \quad \Rightarrow \quad z_1 - c_1 = -13/11$

Egindakoa taula batean jasotzen bada, ondoko hau izango dugu:

c	x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	x_i/y_{3i} / $y_{3i}>0$
-7	$x_1 = 7/11$	1	0	-1/11	-3/11	2/11	
-1	$x_2 = 24/11$	0	1	17/11	-4/11	-1/11	17/24 ← x_2 ateratzen da
		0	0	**1/11 > 0**	25/11 < 0	-13/11<0	

↑ x_3 sartzen da

$y_3 - c_3 = 1/11 > 0$ denez eta bigarren koordenatua $17/11 > 0$ denez, dugun soluzioa hobetu ahal da. Orduan x_3 funtsezkotzat hartuko da eta x_2 kenduko da (hau da, ez-funtsezko bezala hartuko da), zeren eta $\min\{x_j / y_{ij}\}$ $j = 2$ denean lortzen baita (y_{32} balio positiboa bakarra baita).
Taulan jarri den bezala x_3 sartu eta x_2 ateratzen dela esan ohi da.

Beraz, $B' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ da eta ebatzi behar den sistema $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. Honen soluzioa $x_3 = 24/17$ eta $x_1 = 13/17$ da. Beraz x'_0 (13/17, 0, 24/17, 0,0) da beste oinarrizko-eginagari soluzio bat eta $z(x'_0) = -7.13/17 - 1.24/17 = -115/17$. Argi dago soluzio hau hobea dela x_0 baino $z(x'_0) < z(x_0)$ baita.

$B'^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ aplikatzen bazaie A-ko zutabeei:

$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $y_2 = \begin{pmatrix} 1/17 \\ 11/17 \end{pmatrix}$, $y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_4 = \begin{pmatrix} -5/17 \\ -4/17 \end{pmatrix}$, $y_5 = \begin{pmatrix} 3/17 \\ -1/17 \end{pmatrix}$

orain z_i kalkulatuko dira $z_i = (c_1, c_3) \cdot \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \end{pmatrix}$:

$z_1 = -7.1 - 1.0 = -7 \quad \Rightarrow \quad z_1 - c_1 = 0$
$z_2 = -7.(1/17) - 1.(11/17) = -18/17 \quad \Rightarrow \quad z_2 - c_2 = -1/17$
$z_3 = -7.0 - 1.1 = -1 \quad \Rightarrow \quad z_3 - c_3 = 0$
$z_4 = -7.(-5/17) - 1.(-4/17) = 39/17 \quad \Rightarrow \quad z_4 - c_4 = 39/17$
$z_5 = -7.(3/17) - 1.(-1/17) = -20/17 \quad \Rightarrow \quad z_5 - c_5 = -20/17$

eta hori dena taula batean jarrita, ondoko hau gelditzen da:

c	x	y_1	$\mathbf{y_2}$	y_3	$\mathbf{y_4}$	$\mathbf{y_5}$	x_j / y_{ij} / $y_{ij} > 0$
-7	$x_1 = 13/17$	1	1/17	0	-5/17	3/17	
-1	$x_3 = 24/17$	0	11/17	1	-4/17	-1/17	
		0	-1/17<0	0	39/17 > 0	-13/11<0	

Funtsezkoa ez den y_4 aldagai positibo bat dago, non $z_4 - c_4 > 0$ den, baina bere bi koordenatuak negatiboak dira. Beraz, problema honek ez du minimorik.

PROPOSATUTAKO ARIKETAK

1. Kalkulatu $z = 4x + 2y$ funtzioaren maximoa eta minimoa, murrizketak ondokoak izanik:

$$\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 2x \geq 1 \\ y - 2 \leq 0 \\ y \geq x \end{cases}$$

2. Irudikatu grafikoki ondoko desberdintza-sistemaren soluzioa:

$$\left.\begin{matrix} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ x < 6 \\ x > 0, y \geq 0 \end{matrix}\right\}$$ *eta kalkulatu $f(x,y) = 2x - 5y$ funtzioaren maximoa eta minimoa aurreko murrizketak kontuan hartuz.*

3. Ondoko inekuazio-sistemak adierazten duen eskualde posiblea (eremu egingarria) irudikatu:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 6 \\ 3x - 2y \geq 0 \\ 5x - y \leq 23 \end{cases}$$

a) Baieztatu $Z = 3x - y$ funtzioak eskualde horretan ez duela ez maximorik ez minimorik.

b) Baieztatu $Z = 3x + y$ funtzioak eskualde horretan maximoa bai baina minimorik ez duela.

4. A produktutik 80 kilo ditugu eta B produktutik 120 kilo. Horiekin bi konposatu-mota prestatzen dira, lehenengoa A-ren zati bat eta B-ren hiru zatiz osatuta dago, eta bigarrenean proportzioa % 50ekoa da. Konposatuak 4 kiloko paketeetan saltzen dira, 1.000 pezetatan lehen konposatu-motako pakete bakoitza eta 1.200 pezetatan bigarren konposatu-motako pakete bakoitza. Konposatu-mota bakoitzeko zenbat pakete prestatu *behar dira salmenta-balioa maximoa izateko? Zer gertatuko litzateke A produktutik 60 kilo besterik izango bagenu?*

5. Enpresa batean, mahaia eta armairua egiteko zurezko taula baten 5 eta 7 m^2 behar dira, hurrenez hurren. Ekoizpen-prozesua dela eta, egin ahal den mahai-kopurua ezin da armairu-kopuruaren bikoitza baino handiagoa izan. Zenbat mahai eta armairu ekoitzi behar dute etekin maximoa lortzeko, mahai bakoitzeko 10.000 pezeta eta armairu bakoitzeko 14.000 pezeta irabazten dela eta biltegian 3.400 m^2 material besterik dutela kontuan hartuta?

6. α eta β medikamentuak A eta B izeneko pastilletan agertzen dira (A pastilla bakoitzak 4 g α eta 4 g β dauzka eta B-k 3 g α eta 1 g β). Gaixo batek egunero 30 g α eta 12 g β hartu behar du gutxienez, baina β medikamentutik ezin du 26 g baino gehiago hartu. A pastillak 400 pezeta balio du eta B-k 300; bestalde, B motakoaren 42 pastillako kaxa bat besterik ez da iristen botikara astero. Mota bakoitzeko zenbat pastilla hartu behar du egunero bere beharrak asetzeko eta kostua minimoa izateko? Eta A pastillak 350 pezeta balioko balu?

7. Ehundegi batean bi oihal-mota ekoizten dira (A eta B). A-ko metro bat sortzeko 30 g kotoi, 20 g poliester eta 50 g artile behar dira, eta B-ko metro bat egiteko 30 g kotoi, 50 g poliester eta 1 g artile behar dira. Biltegian 18 kg kotoi, 20 kg poliester eta 20 kg artile besterik ez dago. Kalkulatu mota bakoitzeko zenbat metro ekoitzi behar diren etekina maximoa izateko ondoko bi kasu hauetan :

a) A eta B oihalen metroko irabaziak 1.250 eta 3.500 pezeta badira.
b) “ “ 6.000 eta 3.500 “

8. Enpresa batek bi edari-mota egiten ditu laranja-, anana- eta platano-zukuekin. Lehenengoan laranja eta anana proportzio berdinean sartzen dira, eta bigarrenean anana eta platanoa dira proportzio berdinean daudenak. Botilak litrokoak dira eta botila bakoitzeko lortzen den etekina 20 pezetakoa da lehenengoan eta 15 pezetakoa bigarrenean. Geltokian laranja, anana eta platanoko 2.000 litro, 1.400 litro eta 1.800 litro daude, hurrenez hurren. Mota bakoitzeko zenbat edari-litro egin behar dira irabazia maximoa izateko?

9. Bitxitegi batean bi bitxi-mota egiten dira. Lehenengoa egiteko 1 g urre eta 0.6 g letoi erabiltzen dira eta 10.000 pezetatan saltzen da. Bigarrena egiteko 0.8 g urre eta 1.5 g letoi erabiltzen dira eta 6.000 pezetatan saltzen da. Mota bakoitzeko zenbat bitxi fabrikatu behar dira etekina maximoa izateko kilo bat urre eta 2 kilo letoi besterik ez badute?

10. Kimika-industriako fabrika batek A eta B produktuak egiten ditu eta salmenta--prezioak 75 pta/kg eta 150 pta/kg dira, hurrenez hurren. A motako produktu baten % 10 fosforoa da, % 20 potasioa eta gainerakoa ura. B produktuaren % 30 fosforoa *da, % 10 potasioa eta gainerakoa ura. Biltegian 1.800 kg fosforo eta 1.600 kg potasio daude. Horrez gain, fabrikatu ahal den B produktu-kopuruak ezin du fabrikatzen den A produktu-kopuruaren bikoitza izan. Mota bakoitzeko zenbat produktu fabrikatu behar dira irabazia maximoa izateko?*

11. Minimizatu $z = 5x - 2y + 3z$ *ondoko murrizketekin:*

$$16x_1 + 8x_2 = -16$$
$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4 \quad \text{non } x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \text{ eta } x_2 \le 0 \text{ diren.}$$

12. Maximizatu $z = x - 2y + 3z$ *ondoko murrizketekin:*

$$x - 3y \le 3$$
$$3x + y - z \le 2$$
$$x + y + 2z = 6 \quad \text{non } x \le 0,\ y \le 0 \text{ eta } z \ge 0 \text{ diren.}$$

13. Behitegi batean A behi-aleko 100 unitate, B behi-aleko 200 unitate eta C behi-aleko 160 unitaterekin, gutxienez, dieta bat egin nahi dute. Hori gauzatzeko hiru konposatuak erosi behar dituzte: C1 (pakete bakoitzak A-ko 4, B-ko 2 eta C-ko 3 unitate ditu eta 200 pezetatan erosten da), C2 (pakete bakoitzak A-ko 2, B-ko 2 eta C-ko 5 unitate ditu eta 400 pezetatan erosten da) eta C3 (pakete bakoitzak A-ko 4 eta C-ko 3 unitate ditu eta 100 pezetatan erosten da).
Klase bakoitzeko zenbat pakete erosi behar dira kostua minimoa izateko?

Elhuyar