$$\boxed{E = \frac{1}{4} M R^2 \left[\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\theta + (\dot\varphi + \dot\psi \cos\theta)^2 \right] + M g \frac{R}{2} \cos\theta = cte}$$

Energia del movimento di rotazione corrispondente

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \dot\theta = \omega \ , \ \dot\psi = \omega \ , \ \dot\varphi = \omega$$

$$E = \frac{1}{4} M R^2 \left[\omega^2 + \omega^2 + \omega^2 \right] \Rightarrow \boxed{E = \frac{3}{4} M R^2 \omega^2}$$

$$A = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} \ , \quad B = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}$$

$$E = \frac{1}{2} I_x \dot\theta^2 + \underbrace{\frac{1}{2 I_x} \left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta} \right)^2 + \frac{B^2}{2 I_z} + M g \frac{R}{2} \cos\theta}_{}$$

$$A = I_x \dot{\psi} \sin^2\theta + I_z(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\underline{\cos\theta} \qquad \theta = \pi/2$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} m R^2 [\omega] = \frac{1}{2} m R^2 \omega \\ B &= I_z(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = \frac{1}{2} m R^2 \omega \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{3}{4} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{m R^2}\left[\frac{\frac{1}{2} m R^2 \omega (1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2 + \frac{\frac{1}{4}(m R^2)^2 \omega^2}{m R^2} + m g \frac{R}{2}\cos\theta$$

$$\underbrace{\frac{3}{4} m R^2 \omega^2} = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{4} m R^2 \omega^2} + m g \frac{R}{2}\cos\theta$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + m g \frac{R}{2}\cos\theta}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \to 120 \to 180-60$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = \cancelto{0}{\frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2} + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 \left(\frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - m g \frac{R}{4}$$

por posición dovidal

$$\frac{1}{2} \cancel{m} \cancel{R^2} \frac{g}{\cancel{R}} = \frac{3}{4} \cancel{m} \cancel{R^2} \frac{g}{\cancel{R}} - \frac{1}{4} \cancel{m} g \cancel{R}$$

$\frac{1}{2} g = \frac{1}{2} g \Rightarrow$ comprobar que $\theta = \frac{2\pi}{3}$ es un ángulo dovidal $\to \dot{\theta} = 0$

TEMA 6 - DINÁMICA DEL MOVIMIENTO PLANO

· PARTICULARIZACIÓN DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES

1) $\vec{F}_{ac} = M\vec{a}_G \underset{S.R}{\Rightarrow} \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_G \begin{cases} F_{ext,x} = M a_{Gx} \\ F_{ext,y} = M a_{Gy} \end{cases}$

2) $\left.\dfrac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_F = \vec{M}_G^{ext}$

Si $O \equiv$ Fijo

$\left.\dfrac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_F = \vec{M}_O^{ext}$

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} I_x & -C_z & 0 \\ -C_z & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

$XY \equiv$ contiene a la figura $\Rightarrow C_x = C_y = 0$

$$\vec{H}_G = I_{zG}\,\omega\,\hat{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_F = I_{zG}\,\dot{\omega}\,\hat{k} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{M}_G^{ext}}} = I_{zG}\,\dot{\omega}\,\underline{\underline{\hat{k}}}$$

$$M_G^{ext} = I_{zG}\,\alpha \quad ; \quad \dot{\omega} = \alpha$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \to F_x^{ext} = M a_{Gx} \\ \to F_y^{ext} = M a_{Gy} \\ M_G^{ext} = I_G\,\alpha \end{array}}$$

Si $O \equiv$ Fijo $\Rightarrow M_O^{ext} = I_O\,\alpha$

En general $T = \frac{1}{2} M V_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\{0\ 0\ \omega\} \begin{bmatrix} I_x & -C_z & 0 \\ -C_z & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}}$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}MV_G^2+\frac{1}{2}I_{zG}\omega^2}$$

Si hay $O \equiv$ fijo $\Rightarrow$ $\boxed{T=\frac{1}{2}I_O\omega^2}$

6.13. Un cuadrado *ABCD* de masa *M* y lado 2*L* se encuentra suspendido del techo mediante una barra *OA* de masa *M* y longitud *L*, articulada en *A* y *O*, y un hilo *h*. Determinar el valor de la reacción en *A* inmediatamente después de cortar el hilo *h*.

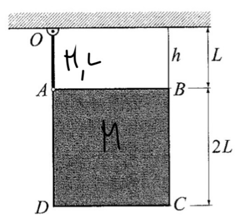
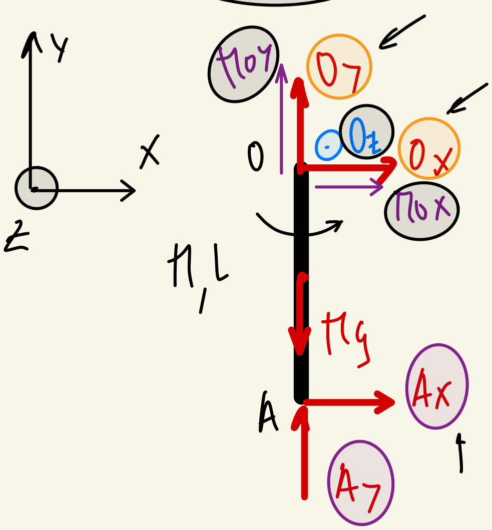


FIGURA 6.20

Resultado: $\mathbf{R}_A=\frac{1}{23}Mg(3\mathbf{i}-11\mathbf{j})$

Si se encontraba en reposo el sistema antes de cortar el hilo inmediatamente después de cortarlo las velocidades serán 0, las v, la ω no las aceleraciones.



$O \equiv$ articulación plana $\Rightarrow$ 2 reacciones en direcciones ortogonales en el plano móvil

$O \equiv$ fijo $\Rightarrow$ $M_O = I_O\alpha$

$$A_x L=\frac{1}{3}ML^2\alpha \quad (1)$$

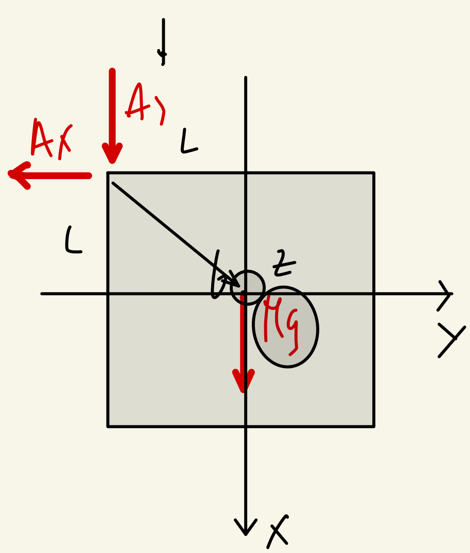
Este sólido no tiene pto fijo

$$M_G=I_G\beta$$

$$A_xL+A_yL=I_G\beta$$

$$I_{Gz}=I_{Gx}+I_{Gy}=2\frac{1}{12}M(2L)^2=\frac{2}{3}ML^2$$

$$A_x+A_y=\frac{2}{3}ML\beta \quad (2)$$



$F_x = M a_{Gx} \Rightarrow -A_x = M a_{Gx}$ (3)

$F_y = M a_{Gy} \Rightarrow -Mg - A_y = M a_{Gy}$ (4)

Agotadas las ecuaciones dinámicas ⇒ cinemática.

$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \beta \hat{k} \wedge \vec{AG} - \cancel{\omega^2 \vec{AG}}^{\,0}$ $\omega_c = 0$

$\vec{a}_A = \cancel{\vec{a}_O}^{\,0} + \alpha \hat{k} \wedge \vec{OA} - \cancel{\omega_b^2 \vec{OA}}$ $\omega_b = 0$

$\vec{a}_A = \alpha \hat{k} \wedge (-L\hat{j}) \Rightarrow \vec{a}_A = \alpha L \hat{i}$

$\vec{a}_G = \alpha L \hat{i} + \beta \hat{k} \wedge (L\hat{i} - L\hat{j}) \Rightarrow \vec{a}_G = (\alpha+\beta) L \hat{i} + \beta L \hat{j}$

$a_{Gx} = (\alpha+\beta)L$ (5)

$a_{Gy} = \beta L$ (6)

$$\left.\begin{array}{ll} A_x = \frac{1}{3} M L \alpha & (1) \\ A_x + A_y = \frac{2}{3} M L \beta & (2) \\ -A_x = M(\alpha+\beta)L & (3) \\ -A_y - Mg = M\beta L & (4) \end{array}\right\}$$

6.3. El mecanismo de la figura 6.10 se mueve en un plano vertical por la acción del par *P*, de manera que la barra *OA* gira con velocidad angular constante de valor ω en el sentido indicado. Sabiendo que no existe rozamiento y que las dos barras son iguales, de masa *M* y longitud *L*, calcular:

a) Valor del par P en función del ángulo φ y de ω.
b) Reacción del suelo sobre la barra *AB* en un instante cualquiera.
c) Valor máximo de ω para que la barra *AB* permanezca siempre en contacto con el suelo.

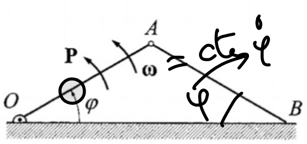
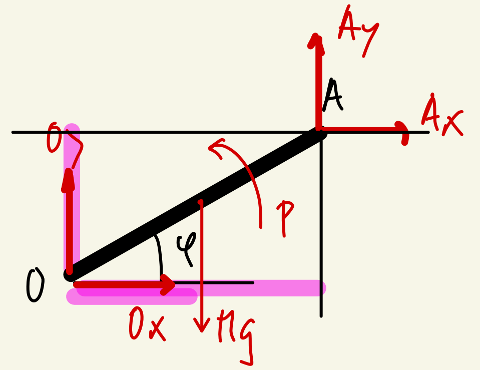


FIGURA 6.10

Resultado: a) $P = MgL\cos\varphi + ML^2\omega^2 \operatorname{sen} 2\varphi$

b) $R_B = \frac{1}{2} Mg - ML\omega^2 \operatorname{sen}\varphi$

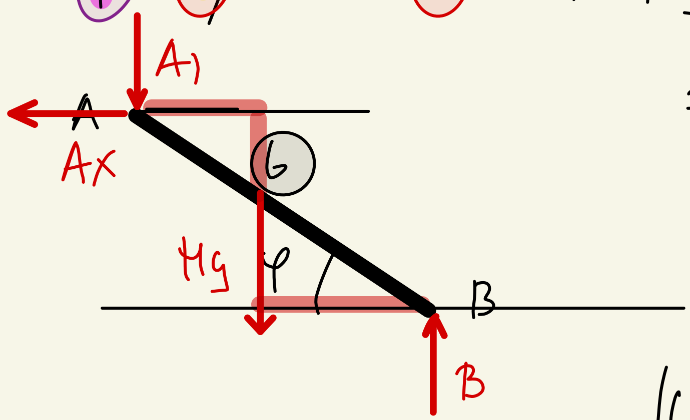
c) $\omega^2 < \frac{g}{2L}$



O ≡ fijo

$M_O = I_O \cancel{\alpha}^{\,0}$ $\omega = cte$

$$P + A_y L\cos\varphi - A_x L\sin\varphi - Mg\frac{L}{2}\cos\varphi = 0 \qquad (1)$$



∄ pto fijo

$$M_G = I_G \cancel{\beta}^{\,0}$$

Hallemos β

$$|\omega_{AB}| = \dot\varphi \Rightarrow \vec\omega_{AB} = -\dot\varphi\,\hat k$$

$$|\omega_{OA}| = \dot\varphi \Rightarrow \vec\omega_{OA} = \dot\varphi\,\hat k$$

si $\dot\varphi = cte \Rightarrow \beta = 0$

$$B\frac{L}{2}\cos\varphi + A_x\frac{L}{2}\sin\varphi + A_y\frac{L}{2}\cos\varphi = 0 \qquad (2)$$

En $\overline{AB}$

$$F_x = M a_{Gx} \Rightarrow -A_x = M a_{Gx} \qquad (3)$$

$$F_y = M a_{Gy} \Rightarrow B - A_y - Mg = M a_{Gy} \qquad (4)$$

cinemática $G \in \overline{AB}$

$$\vec a_G = \vec a_A + \cancel{\beta\,\hat k \wedge \vec{AG}}^{\,0} - \omega^2\vec{AG}$$

$$\vec a_A = \cancel{\vec a_O}^{\,0} + \cancel{\alpha\,\hat k \wedge \vec{OA}}^{\,0} - \omega^2\vec{OA} = -\omega^2 L(\cos\varphi\,\hat i + \sin\varphi\,\hat j)$$

$$\vec a_G = -\omega^2 L(\cos\varphi\,\hat i + \sin\varphi\,\hat j) - \omega^2\frac{L}{2}(\cos\varphi\,\hat i - \sin\varphi\,\hat j)$$

$$a_{Gx} = -\frac{3}{2}\omega^2 L\cos\varphi \qquad (5)$$

$$a_{Gy} = -\frac{1}{2}\omega^2 L\sin\varphi \qquad (6)$$

$$\boxed{\begin{aligned} P &= MgL\cos\varphi + ML^2\omega^2\sin 2\varphi \\ B &= \frac{1}{2}Mg - ML\omega^2\sin\varphi \end{aligned}}$$

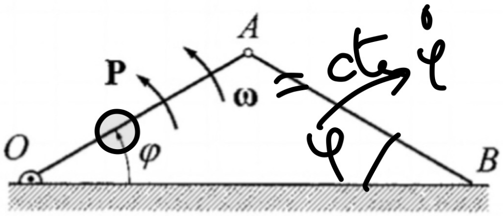


FIGURA 6.10

$B>0$, $B=0$ en el límite

$$0 = \frac{1}{2}\cancel{m}g - \cancel{m}L\omega^2 \operatorname{sen}\varphi$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{2L\operatorname{sen}\varphi}}$$

Si $\varphi = 0 \Rightarrow \omega \to \infty$ 0

Si $\varphi = 90°$

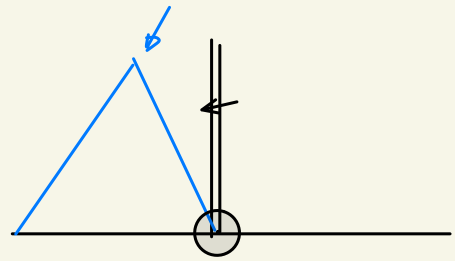
30°

$\varphi = 30° \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L}$

$\varphi = 90° \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{2L}$

$\varphi = 45° \to \omega^2 = \frac{g}{\sqrt{2}L} < \frac{g}{L}$.

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{2L}}$$



$\varphi = 0$ $\xrightarrow{\omega}$ $\varphi = 90$

$$\boxed{\omega < \sqrt{\frac{g}{2L}}}$$

$\varphi = 90°$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica

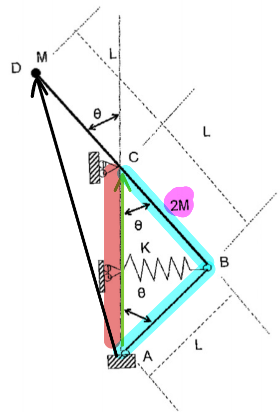
Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL. 23-05-2009
TIEMPO: 35'

El sistema mecánico de la figura está formado por: 1º Una barra AB biarticulada sin masa de longitud L; 2º Una barra BD de longitud 2L y masa 2M articulada en la deslizadera C, la cual solo se puede mover verticalmente y coincide con el centro de gravedad de la barra; 3º Una masa M concentrada soldada en el extremo D de la barra y por último un muelle ideal que une la articulación B con el eje vertical imaginario que une A y C. El sistema parte del reposo en su posición vertical para θ=0º

Se pide:

1. Energía cinética y potencial del sistema en una posición genérica (2 puntos).
2. Ecuación diferencial del movimiento del sistema (1 punto).
3. Obtener la constante elástica K para que la máxima amplitud del movimiento sea θ=60º (4 puntos).
4. Calcular la aceleración angular de las barras en el instante inicial (3 puntos).



$\dot{\theta}=0 \quad \theta=0^\circ$; 1gdl $\{\theta\}$

$T = T_{BD} + T_M$

$T_{BD} = \frac{1}{2} 2M V_c^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$

$I_c = \frac{1}{12} 2M (2L)^2 = \frac{2}{3} ML^2$

$\vec{V}_c = \left.\frac{d\vec{AC}}{dt}\right|_F$

$\vec{AC} = 2L\cos\theta \, \hat{j}$ Fijo

$\vec{V}_c = -2L\dot{\theta}\sin\theta \, \hat{j}$

$T_{BD} = M(-2L\dot{\theta}\sin\theta)^2 + \frac{1}{3} ML^2\dot{\theta}^2$

$T_{BD} = 4ML^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2$

$T_{BD} = ML^2\dot{\theta}^2\left[\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta\right]$

$T_M = \frac{1}{2} M V_M^2 \qquad \vec{V}_M = \left.\frac{d\vec{AM}}{dt}\right|_F$; $\vec{AM} = -L\sin\theta\,\hat{i} + 3L\cos\theta\,\hat{j}$

$\vec{V}_M = -L\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{i} - 3L\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j} \rightarrow V_M^2 = L^2\dot{\theta}^2\left[\cos^2\theta + 9\sin^2\theta\right]$

$V_M^2 = L^2\dot{\theta}^2\left[1 + 8\sin^2\theta\right]$

$T_M = \frac{1}{2} ML^2\dot{\theta}^2\left[1 + 8\sin^2\theta\right]$

$T = ML^2\dot{\theta}^2\left[\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta + \frac{1}{2} + 4\sin^2\theta\right]$

$$\boxed{T = ML^2\dot{\theta}^2\left[\frac{5}{6} + 8\sin^2\theta\right]}$$