

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

MEKANIKA APLIKATUA

IRAKASGAIKO TEORIA

2005-2006 IKASTURTEA

Joseba Albizuri Irigoien



Ingeniaritzako Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

eman la zabal zazu



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

1	<i>KALKULU BEKTORIALA I</i>	1
1.1	ALDEZ AURREKO KONTZEPTUAK.....	3
1.1.1	Definizioak.....	3
1.1.2	Adierazpena.....	3
1.1.3	Bektore askeekin eragiketak.....	4
1.2	ALDAGAI ESKALARREKO FUNTZIO BEKTORIALA.....	6
1.3	DERIBATU BEKTOREAREN BEREZKO OSAGIAK.....	7
2	<i>KALKULU BEKTORIALA II</i>	9
2.1	FUNTSEZKO TRIEDROA.....	11
2.2	FRENET-EN FORMULAK.....	12
2.2.1	Frenet-en lehenengo formula.....	12
2.2.2	Frenet-en bigarrenengo formula.....	13
2.2.3	Frenet-en hirugarrenengo formula.....	14
2.3	ESKALAR BATEN MENPEKO DEN OINARRIAN ADIERAZITAKO BEKTOREEN DERIBATUA: BOURE-REN LEGEA.....	14
2.4	ZINEMATIKARAKO APLIKAZIOA.....	16
2.4.1	Frenet-en formulak.....	16
2.4.2	Boure-ren legea.....	16
3	<i>BEKTORE LABAINKORRAK</i>	19
3.1	BEKTORE LABAINKOR-KONTZEPTUA.....	21
3.2	BEKTORE LABAINKORREKIN ERAGIKETAK.....	21
3.3	BEKTORE LABAINKOR-SISTEMAK.....	22
3.4	BEKTORE LABAINKOR-SISTEMEKIN ERAGIKETAK.....	22
3.4.1	Ordezkaria.....	22
3.4.2	Bektore labainkor-sistema baten puntu batekiko momentua.....	23
3.5	BEKTORE LABAINKOR-SISTEMEN BALIOKIDETASUNA.....	24
4	<i>SOLIDO ZURRUNAREN ZINEMATIKA I</i>	25
4.1	SARRERA.....	27
4.2	SOLIDO ZURRUNAREN KONTZEPTUA.....	27
4.3	MUGIMENDU BAKUNAK.....	27
4.3.1	Translazioko mugimendua.....	28
4.3.2	Biraketako mugimendua.....	28
4.4	SOLIDO ZURRUNAREN ABIADURA EREMUA.....	29
4.5	ABIADURA EREMUAREN ETA MOMENTU EREMUAREN ARTEKO PAREKATZEA.....	32
4.6	ABIADURA EREMUAREN PROPIETATEAK.....	32
4.7	BIRA ETA LABAINKETAZKO ALDIUNEKO ARDATZA.....	34
5	<i>SOLIDO ZURRUNAREN ZINEMATIKA II</i>	37
5.1	SOLIDO ZURRUNAREN AZELERAZIO EREMUA.....	39
5.2	AXOIDEAK.....	39
5.3	SOLIDO ZURRUNAREN ALDIUNEKO MUGIMENDUEN SAILKAPENA.....	40
5.4	SOLIDO ZURRUNAREN MUGIMENDU FINITUEN SAILKAPENA.....	41
6	<i>MUGIMENDU ERLATIBOAREN ZINEMATIKA</i>	43

6.1	PUNTU MATERIALAREN MUGIMENDU ERLATIBOA: ABIADURA EREMUA.	45
6.2	PUNTU MATERIALAREN MUGIMENDU ERLATIBOA: AZELERAZIO EREMUA.	47
6.3	BI SOLIDOREN ARTEKO MUGIMENDU ERLATIBOA: ABIADURA EREMUA.	48
6.4	BI SOLIDOREN ARTEKO MUGIMENDU ERLATIBOA: AZELERAZIO EREMUA.	49
6.5	UKIPENENKO SOLIDOEN MUGIMENDU ERLATIBOA.	50
7	MUGIMENDU LAUAREN ZINEMATIKA I.	53
7.1	OROKORTASUNAK	55
7.2	ABIADURA EREMUA.	56
7.3	ALDIUNEKO BIRAKETA ZENTRUA. OINARRIA ETA ERRULETA. ...	57
7.3.1	Oinarri eta erruletaren ekuazioak: ekuazio bektorialak.	58
7.3.2	Oinarri eta erruletaren ekuazioak: ekuazio parametrikokoak.	59
7.4	ABIADUREN KALKULU GRAFIKOA MUGIMENDU LAUEAN.	60
7.5	ALDIUNEKO BIRAKETA ZENTRUKO SEGIDA-ABIADURA.	61
8	MUGIMENDU LAUAREN ZINEMATIKA II.	63
8.1	AZELERAZIO EREMUA.	65
8.2	ALDIUNEKO BIRAKETA ZENTRUAREN AZELERAZIOA.	65
8.3	AZELERAZIO-POLOA. ZIRKUNFERENTZIA NABARMENAK.	66
8.3.1	Propietateak.	67
8.4	ERRODADURA MUGIMENDUKO AZELERAZIOEN AZTERKETA. ...	70
9	ESTATIKA I.	71
9.1	SISTEMA MATERIALEN OREKA. EKUAZIO UNIBERTSALAK:.....	73
9.2	MARRUSKADURARIK GABEKO LOTURETAKO ERREAKZIOAK: ...	75
9.2.1	Euskarri soila.	75
9.2.2	Artikulazio laua.	75
9.2.3	Artikulazio esferikoa edo errotula (giltzadura).	75
9.2.4	Barneratze laua.	76
9.2.5	Barneratze espaziala.	76
9.2.6	Trakzio-lotura gisako lokarria edo korda.	76
9.2.7	Polea.	76
9.3	LABAINKETARI MARRUSKADURA.	77
9.3.1	Marruskadura-koefizientea.	78
10	ESTATIKA II.	81
10.1	ELEMENTU ESTRUKTURALETAKO BARNEKO INDARRAK.	83
10.1.1	Habe eta barretako barneko indarrak.	83
10.1.2	Barrasareak.	84
10.1.3	Habe batetako esfortzu normal, ebakitzaille eta momentu makurtzailea.	85
10.2	SOLIDO FUNIKULAREAK	88
10.2.1	Orekako ekuazio bektorialak.	89
10.2.2	Hariaren orekako funtsezko ekuazioak eta ekuazio kartesiarrek.	91
10.2.3	Karga bertikaleko sistema jarraia jasaten duen haria.	94
10.2.4	Katenaria.	97
11	MASEN GEOMETRIA I.	101

11.1	GRABITATE-ZENTROA.....	103
11.2	MOMENTU ESTATIKOAK.....	107
11.2.1	Sistema baten momentu estatikoa plano batekiko.....	108
11.2.2	Masa-sistema partikularrak.....	109
11.3	PAPPUS – GULDIN-EN TEOREMAK.....	111
11.3.1	Lehenengo teorema.....	111
11.3.2	Bigarrenengo teorema.....	112
11.4	INERTZIA MOMENTUAK.....	113
11.4.1	Π planoarekiko inertzi momentua.....	113
11.4.2	e zuzenarekiko inertzi momentua.....	114
11.4.3	O puntuarekiko inertzi momentua.....	115
11.4.4	Bi planorekiko inertzi biderkadura edo momentu zentrifugoa.....	116
11.5	KASU BEREZIAK.....	119
11.5.1	M masako eta L luze den barra.....	119
11.5.2	M masako eta b luzerako laukizuzena.....	119
11.5.3	M masako eta R erradioko aroa.....	120
11.5.4	M masako eta R erradioko zirkulua.....	120
11.5.5	M masako eta H altuerako triangelua.....	120
11.5.6	M masako eta R erradioko zirkulu laurdena.....	121
11.5.7	M masako, R erradioko eta H altuerako zilindroa.....	121
11.5.8	M masako, R erradioko eta H altuerako konoa.....	122
11.5.9	R erradioko eta M masako esfera.....	122
12	MASEN GEOMETRIA II.....	123
12.1	INERTZI TENTSORE AXIALA.....	125
12.2	INERTZI ELIPSOIDEA.....	127
12.3	INERTZI MOMENTU NAGUSIAK.....	129
12.4	STEINER-EN TEOREMAK.....	132
12.4.1	Steiner-en lehenengo teorema.....	132
12.4.2	Steiner-en bigarrenengo teorema.....	133
12.4.3	Steiner-en hirugarren teorema.....	133
12.4.4	Steiner-en laugarren teorema.....	133
13	MEKANIKA ANALITIKOAREN OINARRIAK.....	135
13.1	LOTURA MEKANIKOAREN KONTZEPTUA.....	137
13.2	LOTUREN SAILKAPENA.....	137
13.2.1	Loturaren adierazpen matematikoa.....	137
13.2.2	Lotura indarraren izaera.....	140
13.3	ASKATASUN-GRADU KONTZEPTUA.....	140
13.4	KOORDENATU OROKORTUAK.....	141
13.5	DESPLAZAMENDU BIRTUALA.....	142
13.6	AKTUATZEN DUTEN INDARREN LANA.....	143
13.6.1	Barneko indarren lana.....	144
13.6.2	Lotura-indarren lana.....	145
13.6.3	Aplikaturako indarren lana.....	148
13.7	LAN BIRTUALEN PRINTZIPIOA.....	148
14	DINAMIKAKO MAGNITUDE ETA TEOREMAK.....	151
14.1	SARRERA.....	153
14.2	SISTEMA ZINETIKOA.....	153

14.3	KÖENIG-EN TEOREMAK.....	154
14.3.1	Köenig-en momentu zinetikoaren teorema.....	154
14.3.2	Köenig-en energia zinetikoaren teorema.....	155
14.4	SISTEMA DINAMIKOA	156
14.5	DINAMIKAKO OINARRIZKO TEOREMAK.....	157
14.5.1	Higidura kantitatearen teorema eta momentu linealaren teorema.....	157
14.5.2	Momentu zinetikoaren edo momentu angeluarraren teorema.....	158
14.5.3	Energiaren teorema.....	159
14.6	D'ALEMBERT-EN PRINTZIPIOA.....	160
14.7	LAGRANGE-REN EKUAZIOAK.....	160
14.8	MUGIMENDU ERLATIBORAKO APLIKAZIOA.....	164
15	SOLIDO ZURRUNAREN DINAMIKA	167
15.1	SARRERA.....	169
15.2	SOLIDO ZURRUNAREN MOMENTU ZINETIKOAREN KALKULUA.....	169
15.2.1	Puntu finkoko solidoa:.....	169
15.2.2	Solido askea.....	171
15.2.3	Ardatz finkoko solidoa.....	171
15.3	SOLIDO ZURRUNAREN ENERGIA ZINETIKOAREN KALKULUA.....	171
15.3.1	Puntu finkoko solidoa.....	171
15.3.2	Solido askea.....	172
15.3.3	Ardatz finkoko solidoa.....	173
15.4	SOLIDO ZURRUNAREN DINAMIKAKO EKUAZIOAK.....	173
16	MUGIMENDU LAUAREN DINAMIKA.....	175
16.1	EKUAZIOEN EGOKITZEA.....	177
16.2	MOMENTU ZINETIKOAREN TEOREMAREN APLIKAZIOA SOLIDOKO EDOZEIN PUNTUTAN.....	178
16.3	D'ALEMBERT-EN PRINTZIPIOAREN APLIKAZIOA.....	179
16.4	ERRODADURAKO MUGIMENDU LAUAREN AZTERKETA DINAMIKOA.....	181
17	ARDATZ FINKODUN SOLIDOAREN DINAMIKA.....	185
17.1	PROBLEMAREN PLANTEAMENDUA.....	187
17.2	KUXINETEETAKO ERREAKZIOEN KALKULUA.....	187
17.3	ERROTOREEN OREKATZEA.....	190
18	PUNTU FINKODUN SOLIDOAREN DINAMIKA.....	193
18.1	OROKORTASUNAK. EULER-EN ANGELUAK.....	195
18.2	EULER-EN EKUAZIOAK.....	198
18.3	MUGIMENDUAREN AZTERKETA	199
18.3.1	Oinarrizko teorema.....	199
18.3.2	Euler-en ekuazioak	200
18.3.3	Lagrange-ren ekuazioak	200
18.3.4	Energiaren teorema.....	201
18.4	INERTZIAGATIK MUGITZEN DEN GIROSKOPIOA.....	201
18.4.1	Mugimenduaren ekuazioak.....	201
18.4.2	Euler-en angeluen mugaketa.....	202
18.5	EULER-LAGRANGEREN GIROSKOPIOA.....	206
18.5.1	Mugimenduaren ekuazioak.....	206

18.5.2	Mugimendu egonkorra.	209
19	MUGIMENDU TXIKIEN DINAMIKA	213
19.1	SISTEMA KONTSERBAKORRAK. OREKAREN EGONKORTASUNA. 215	
19.2	SISTEMA BATEN OSZILAZIO TXIKIAK OREKA EGONKORREKO POSIZIOAREN INGURUAN.....	216
19.3	ENERGIA POTENTZIAL ETA ZINETIKOAREN ADIERAZPEN LABURTUAK.	217
19.3.1	Energia potentzialaren adierazpen laburtua.....	217
19.3.2	Energia zinetikoaren adierazpen laburtua.....	218
19.4	MUGIMENDUAREN EKUAZIOAK	220
20	PERKUSIOEN DINAMIKA I	223
20.1	OROKORTASUNAK	225
20.2	PERKUSIOEN DINAMIKAKO OINARRIZKO TEOREMAK.....	227
20.2.1	Higidura kantitatearen teorema.	227
20.2.2	Momentu zinetikoaren teorema	228
20.2.3	Energiaren teorema.....	230
20.3	PERKUSIOAK JASATEN DITUEN SOLIDO ZURRUNA.....	230
20.4	PERKUSIOAK JASATEN DITUEN ARDATZ FINKODUN SOLIDOAK: PERKUSIO-ZENTROA.....	233
21	PERKUSIOEN DINAMIKA II	237
21.1	GALDUTAKO ABIADUREN ENERGIA ZINETIKOA	239
21.2	CARNOT-EN TEOREMA.....	239
21.3	SOLIDO DEFORMAEZINEN ARTEKO TALKAK.....	240
21.4	MARRUSKADURARIK GABEKO TALKAN GERTATUTAKO ENERGIA ZINETIKOAREN ALDAKUNTZA.	242

1 KALKULU BEKTORIALA I

1.1 ALDEZ AURREKO KONTZEPTUAK.

Kalkulu bektorialaren aldez aurreko kontzeptu batzuk ikusiko dira jarraian:

1.1.1 Definizioak.

Eremu: deituko zaio magnituderen bat adierazten den espazioko zatiari; magnitude hori eskalarra bada, eremu eskalarra deituko zaio eta bektoriala bada magnitudea, eremu bektoriala.

Bektore: modulu, norabide eta norantzaren bidez adierazten den magnitudea da.

Bektore ekipolenteak: modulu, norabide eta norantza berdina baina aplikatze-puntu desberdina duten bektoreak ekipolenteak direla esango da.

Bektore lotuak: puntu finko batetan aplikatutako bektoreak dira, adibidez gorputzen pisua.

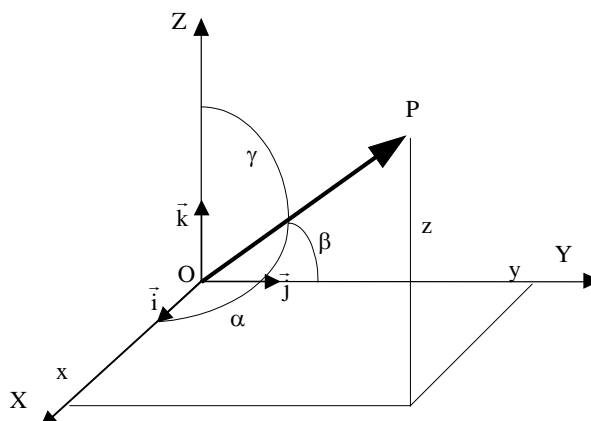
Bektore labainkorrak: bektore bat labainkorra da baldin eta bektorearen aplikatze-puntu posibleek zuzen bat definitzen dutenean eta zuzenaren norabidea bektorearena bada. Adibidez solido zurrun baten gainean aplikatutako indarrak labainkorrak dira.

Bektore askeak: Bektore bat askea da baldin eta bere aplikatze-puntua espazioko edozein puntu denean.

1.1.2 Adierazpena.

$\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$ oinarri ortonormal batetan, bektore baten adierazpena bere osagaien bidez emango da:

$$\vec{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$



edo, \vec{OP} bektorearen modulu, norabide eta norantza berdina dituen \vec{u} bektore unitarioa erabiliz:

$$\vec{OP} = \left| \vec{OP} \right| \cdot \vec{u}$$

Bektore unitario honen osagaiei, \vec{OP} bektorearen kosinu direktoreak deituko zaie:

$$\vec{u} = \cos(\alpha) \vec{i} + \cos(\beta) \vec{j} + \cos(\gamma) \vec{k}$$

1.1.3 Bektore askeekin eragiketak.

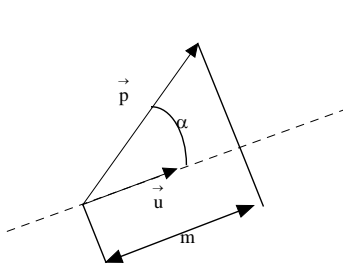
Ezagunak diren bektoreen batura eta bektore bat eskalar bat eskalar batez biderkatze eragiketez gain, oroitu beharra dago hurrengo eragiketa hauek.

- bi bektoreen **biderketa eskalarra**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \cos \alpha$$

moduan definituko da, emaitza beraz eskalar bat da, eta bektoreen osagaien bidez adierazi ezker:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \right) \cdot \left(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

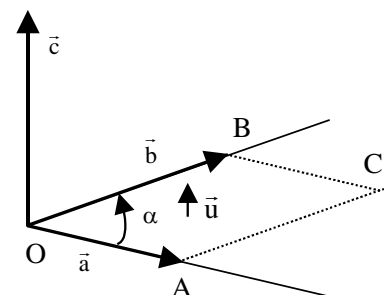


\vec{p} bektorearen proiektzioa \vec{u} bektore unitarioak adierazitako norabidean, bi bektoreen arteko biderketa eskalarrak emango du:

$$m = \left| \vec{p} \right| \cdot \cos \alpha = \left| \vec{p} \right| \cdot \left| \vec{u} \right| \cos \alpha = \vec{p} \cdot \vec{u}$$

- bi bektoreen arteko **biderketa bektoriala**, beste bektore bat da,

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$



moduan adieraziko delarik, bere modulua $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$ izango delarik, norabidea bi bektoreek osatutako planoari elkarzuta eta norantza torlojoaren aurrerapenarena (lehenengo bektoretik bigarrenarena bira egiterakoan).

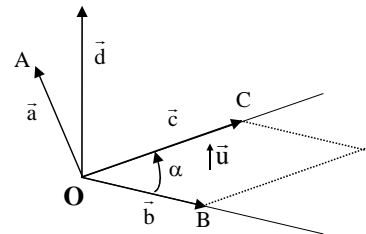
Osagaien menpean adierazita:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \\ x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Definiziotik ateratzen da bere modulua OACB paralelogramoaren azalera emango duela.

- hiru bektoreen arteko **biderketa nahasia**, eskalar bat da:

$$\lambda = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{d}$$



bektoreen osagaien menpean adierazita

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \\ x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \\ x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Ondorioz hiru bektoreak jatorri berdinean aplikatuz sortzen den paralelepipedoaren bolumenaren berdina da hiru bektoreen arteko biderketa nahasia.

- Hiru bektoreen arteko biderketa bektorial bikoitza, beste bektore bat izango da,

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

eta adierazpen hori garatuz lor daiteke:

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

1.2 ALDAGAI ESKALARREKO FUNTZIO BEKTORIALA.

Bektore aske bat, u eskalarraren funtzio bektoriala dela esango da, $\vec{a}(u)$ idatziz, bere modulu, norabide eta norantza u eskalarraren menpeko direnean.

Aldagai askearen balio desberdinetarako lortuko liratekeen funtzio bektorialeko bektore guztiak kontsideratu ezker, bektoreen jatorria puntu berdinean jarritz, bektoreen muturrek kurba bat deskribatuko dute, kurba honi funtzio bektorialaren kurba adierazlea deituko zaio. Hau da, funtzio bektorialeko bektoreen muturren leku geometrikoa izango da kurba adierazlea, bektoreok jatorri-puntu berdinean ezartzen badira.

Aldagai aske eskalarreko funtzio bektorialen jarraitasun kontzeptua funtzio eskalarren kontzeptuaren orokortzea da. Honela, esango da $\vec{a}(u)$ funtzioa jarraia dela $u=u_0$ denean, baldin nahi den bezain txikia den $\varepsilon>0$ emanik, existituko denean $\delta(\varepsilon)>0$ beteko duena

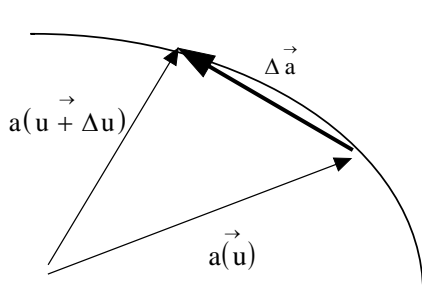
$$\left| \vec{a}(u) - \vec{a}(u_0) \right| < \varepsilon \cdot |u - u_0| \leq \delta$$

Jarraitasunaren definizio honek, ondoriotzat moduluaren, norabidearen eta norantzaren jarraitasuna dakar. Funtzio bat jarraia denean tarteko puntu guztietan, esango da funtzioa jarraia dela tartean.

Jarraitasunaren kontzeptutik, deribatuarena atera ahal da. $\vec{a}(u)$ jarraia denean u -ren balio posible guztietarako, $\vec{a}(u)$ -ren funtzio deribatua definituko litzateke hurrengo moduan:

$$a'(\vec{u}) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(u + \Delta u) - \vec{a}(u)}{\Delta u} = \frac{d\vec{a}}{du}$$

$\vec{a}(u)$ -ren bi balio adierazi ezker, $\vec{a}(u)$ eta $\vec{a}(u + \Delta u)$:



$\Delta u \rightarrow 0$ doanean, $\Delta \vec{a}$ kurba adierazleko bi puntu lotzen dituen bektore sekantea, $u = u$ balioan kurba adierazleari ukitzaile bilakatuko zaio eta ondorioz deribatu funtzioa (existitzen bada) kurba adierazleari ukitzaile izango zaio puntu guztietan (puntu "angulosoak", e. a.).

Deribatuaren definiziotik lortuko da diferentzialaren kontzeptua.

$$d \vec{a} = a'(\vec{u}) du$$

Hau da, funtzio bektorialaren diferentziala, funtzio deribatu eta eskalarraren diferentziala biderkatuz lortu da.

1.3 DERIBATU BEKTOREAREN BEREZKO OSAGIAK.

Bira $a(\vec{u})$ funtzio bektoriala, bere deribatua

$$a'(\vec{u}) = \frac{d a(\vec{u})}{du}$$

adierazpenak emango du. $a(\vec{u})$ bektorea adierazten bada bere modulua izango den $a(u)$ funtzio eskalarraren eta $\vec{v}(u)$ funtzio bektorialaren biderketarekin, izanik \vec{v} bektorea $a(\vec{u})$ bektorearen norabide eta norantza berdina duen bektore unitarioa.

$$a'(\vec{u}) = \frac{d [a(u) \cdot \vec{v}(u)]}{du} = \frac{da(u)}{du} \cdot \vec{v}(u) + a(u) \cdot \frac{d \vec{v}(u)}{du}$$

Azter ditzagun $\frac{d \vec{v}(u)}{du}$ gaiaren ezaugarri batzuk:

$\vec{v}(u)$ bektore unitarioa denez, beteko da:

$$\vec{v}(u) \cdot \vec{v}(u) = 1$$

eta adierazpen hau u-rekiko deribatuz:

$$\frac{d\vec{v}(u)}{du} \cdot \vec{v}(u) + \vec{v}(u) \cdot \frac{d\vec{v}(u)}{du} = 0$$

eta biderketa eskalarra trukakorra denez:

$$2 \frac{d\vec{v}(u)}{du} \cdot \vec{v}(u) = 0$$

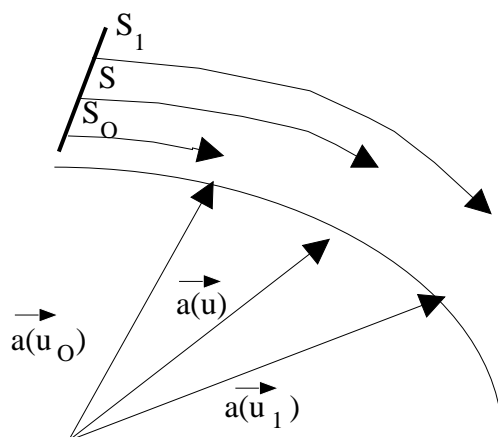
Hau da $\frac{d\vec{v}(u)}{du}$ deribatu bektorea $\vec{v}(u)$ bektoreari elkarzuta zaio. Baina bektore bati elkarzutak zaizkio infinitu bektore daude (bektoreari elkarzuta zaion planoko guztiak). Kontsidera ditzagun infinituki gertu dauden $a(\vec{u})$ eta $a(\vec{u} + d\vec{u})$ bektoreak. Bi bektore hauek plano bat definitzen dute, non $a'(\vec{u})$ bektorea egongo den. Beraz, $a(\vec{u})$ bektoreak $\vec{v}(u)$ bektorearen norabidea duenez, ondorioztatzen da $\frac{d\vec{v}(u)}{du}$ deribatu bektorea $\vec{v}(u)$ bektoreari elkarzuta zaiola eta infinituki gertu dauden bi bektoreek definitutako planoan egongo dena.

Deribatuaren bi gaiei deitzen zaie deribatu bektorearen berezko osagaiak; $a'(\vec{u})$ -ren lehenengo osagaiak, $a(\vec{u})$ bektorearen moduluaren aldaketa adierazten du, u-ren balio batetik infinituki gertu dagoen beste batetara pasatzean. Bigarrenengo osagaiak $a(\vec{u})$ bektorearen norabide aldaketa adierazten du u-ren balio batetik infinituki gertu dagoen beste batetara aldatzean.

2 KALKULU BEKTORIALA II

2.1 FUNTSEZKO TRIEDROA.

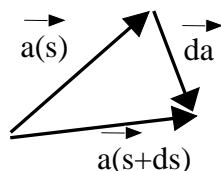
Biz banan-banako $\vec{a}(u)$ funtzioa, eta dagokion kurba adierazlea, non neurri jatorria definitzen dugun; s , deituko diogu, jatorria eta $\vec{a}(u)$ bektorearen hizkiaren arteko kurba adierazlearen luzerari.



Banan-banako funtzioa izatean, u -ren balio bakoitzari $\vec{a}(u)$ -ren balio bakarra dagokio, eta ondorioz, s -ren balio bat. Eta alderantziz, s -ren balio bakoitzarentzat, u bakar bat defini daiteke. Honek esan nahi, funtzio bektoriala, s eskalarraren menpean defini daitekeela, hots $\vec{a}(s)$.

Kontsidera ditzagun infinituki gertu dauden bi bektore,, $\vec{a}(s)$ y $\vec{a}(s+ds)$. $\vec{a}'(s)$ adierazleari ukitzaila izango da, eta bere modulua bat izango da. Izan ere $\vec{a}'(s) = \frac{d\vec{a}}{ds}$, eta $|\vec{a}'(s)| = ds$. Bektore horri, kurbaren bektore ukitzaila deitzen zaio \vec{u}_t , eta bere norantza, arku gorakorrena da.

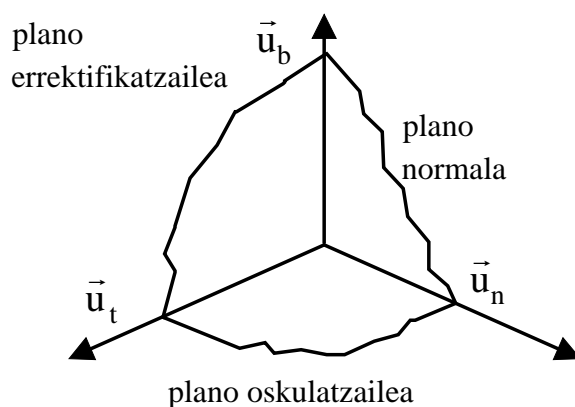
Bira infinituki gertu dauden bi bektore \vec{u}_t . Bi bektore hauek definituko duten planoari, plano oskulatzailea deituko zaio. \vec{u}_t bektoreari elkarzuta zaion eta plano oskulatzailean kokatuta dagoen bektore unitarioari bektore normala, \vec{u}_n , deituko zaio, bere norantza flexio-kurbaduraren zentrorra bideratuta dagoelarik. Beraz, \vec{u}_n kontsideratuko den puntuan, kurba adierazlearekin bigarren ordenako ukipena duen zirkunferentziaren zentrorantz bideratuta dago.



$\vec{u}_t \times \vec{u}_n$ biderketa bektorialaren bidez definituko den bektore unitarioari, \vec{u}_b bektore binormala deituko zaio: $\vec{u}_b = \vec{u}_t \times \vec{u}_n$.

Hiru bektore hauek, kurbaren puntu bakoitzean, Frenet-en funtsezko triedroa definituko dute:

- \vec{u}_t eta \vec{u}_n bektoreek plano oskulatzailea definituko dute,
- \vec{u}_n eta \vec{u}_b bektoreek plano normala definituko dute,
- eta \vec{u}_t eta \vec{u}_b bektoreek plano errektifikatzailea definituko dute.



2.2 FRENET-EN FORMULAK.

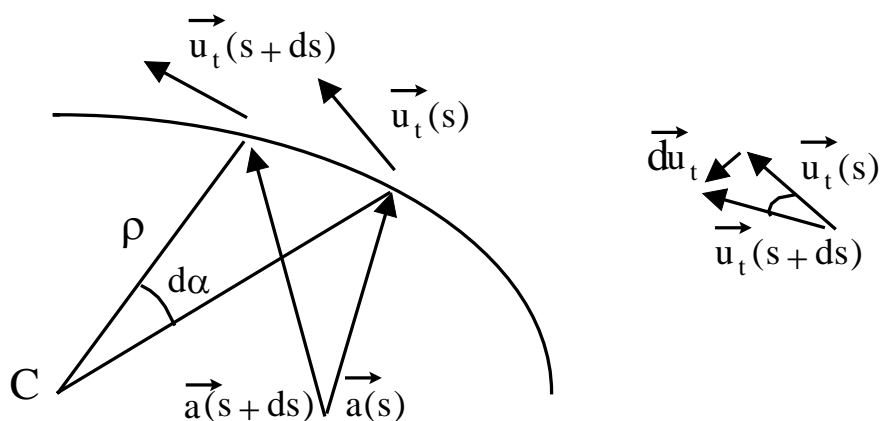
Frenet-en formulek, $\frac{d\vec{u}_t}{ds}$, $\frac{d\vec{u}_b}{ds}$, $\frac{d\vec{u}_n}{ds}$ bektore deribatuen balioak ematen dituzte,

hots, funtsezko triedroaren aldaketa adierazten dute kurbako puntu batetik infinituki gertu dagoen beste batetara pasatzean.

2.2.1 Frenet-en lehenengo formula.

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds}; \vec{u}_t \cdot \vec{u}_t = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{u}_t}{ds} \cdot \vec{u}_t + \vec{u}_t \cdot \frac{d\vec{u}_t}{ds} = 2\vec{u}_t \cdot \frac{d\vec{u}_t}{ds} = 0$$

Beraz, $\frac{d\vec{u}_t}{ds}$ bektorea, \vec{u}_t bektoreari elkarzuta zaio. Infitutuki gertu dauden bi \vec{u}_t bektoreek definitutako planoan egon behar duenez (plano oskulatzailea), $\frac{d\vec{u}_t}{ds}$ bektoreak, \vec{u}_n bektorearen norabidea edukiko du. Bere norantza, \vec{u}_n bektorearena da, hau kurbadura zentrorantz zuzenduta bai dago eta $\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{d^2\vec{a}}{ds^2}$ (kurbadura).



Bira infinitutuki gertu dauden bi \vec{u}_t bektore, izanik $d\alpha$ bi bektoreen arteko angelua.

$$\left| \frac{d\vec{u}_t}{ds} \right| = \frac{d\alpha}{\rho} \Rightarrow \left| \frac{d\vec{u}_t}{ds} \right| = \frac{1}{\rho}; \text{ eta beraz, } \frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{\vec{u}_n}{\rho},$$

izanik ρ , kontsideratutako puntuko flexio-kurbaduraren erradioa.

2.2.2 Frenet-en bigarren formula.

$\frac{d\vec{u}_b}{ds}; \vec{u}_b \cdot \vec{u}_b = 1 \Rightarrow 2\vec{u}_b \cdot \frac{d\vec{u}_b}{ds} = 0$. Beraz $\frac{d\vec{u}_b}{ds}$, \vec{u}_b bektoreari elkarzuta zaio eta plano oskulatzailean egongo da.

Kontutan izanik $\vec{u}_b = \vec{u}_t \times \vec{u}_n$:

$$\frac{d\vec{u}_b}{ds} = \frac{d\vec{u}_t}{ds} \times \vec{u}_n + \vec{u}_t \times \frac{d\vec{u}_n}{ds} = \frac{\vec{u}_n}{\rho} \times \vec{u}_n + \vec{u}_t \times \frac{d\vec{u}_n}{ds} = \vec{u}_t \times \frac{d\vec{u}_n}{ds}.$$

Beraz, $\frac{d\vec{u}_b}{ds}$ bektorea \vec{u}_t bektoreari elkarzuta zaio, eta plano normalean egongo da.

Gainera, plano oskulatzailean egon behar duenez, $\frac{d\vec{u}_b}{ds}$ bektoreak, \vec{u}_n bektorearen norabidea edukiko du.

Moduluaren kalkulurako, lehenago egin den moduan iritsiko ginateke $\frac{d\vec{u}_b}{ds} = -\frac{\vec{u}_n}{\tau}$,

adierazpenera, non τ , kurbaren tortsio-kurbaduraren erradioa den.

2.2.3 Frenet-en hirugarren formula.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_n}{ds} : \vec{u}_n = \vec{u}_b \times \vec{u}_t &\Rightarrow \frac{d\vec{u}_n}{ds} = \frac{d\vec{u}_b}{ds} \times \vec{u}_t + \vec{u}_b \times \frac{d\vec{u}_t}{ds} = \\ -\frac{\vec{u}_n}{\tau} \times \vec{u}_t + \vec{u}_b \times \frac{\vec{u}_n}{\rho} &= \frac{\vec{u}_b}{\tau} - \frac{\vec{u}_t}{\rho} = \frac{d\vec{u}_n}{ds} \end{aligned}$$

Flexio kurbadurak, kurbak zuzena izateko duen joera neurtzen du, tortsio kurbadurak, aldiz, kurbak plano batetan egoteko duen joera neurtuko du.

2.3 ESKALAR BATEN MENPEKO DEN OINARRIAN ADIERAZITAKO BEKTOREEN DERIBATUA: BOURE-REN LEGEA.

Bira $\vec{a} = \vec{a}(u)$ funtzio bektoriala, $\{\vec{e}_i\}$ oinarri ortonormal positiboko osagaien bidez adierazitako dena beti, $\{\vec{e}_i\}$ oinarriko gaiak $\vec{e}_i = \vec{e}_i(u)$, u eskalarraren funtzio direnak.

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

Beraz, funtzio bektorialaren deribatua,

$$\frac{d\vec{a}}{du} = \sum_{i=1}^3 \frac{da_i}{du} \vec{e}_i + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{d\vec{e}_i}{du}$$

moduan idatz dezakegu.

Bigarren gaia,

$$\sum_{i=1}^3 a_i \frac{d\vec{e}_i}{du} = \sum_{i=1}^3 a_i (\omega_{i1} \vec{e}_1 + \omega_{i2} \vec{e}_2 + \omega_{i3} \vec{e}_3)$$

moduan adieraziko da, non ω_{ij} , $\frac{d\vec{e}_i}{du}$ bektorearen j garren osagaia den $\{\vec{e}_i\}$ oinarriarekiko.

Oinarri ortonormala izatean, beteko da:

$$\omega_{ij} = \frac{d\vec{e}_i}{du} \cdot \vec{e}_j$$

gainera:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \Rightarrow \frac{d\vec{e}_i}{du} \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \frac{d\vec{e}_j}{du} = 0 \Rightarrow \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$$

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \Rightarrow \omega_{ii} = 0$$

hau da, $[\omega_{ij}]$ matrizea, matrize antisimetrikoa da.

Beraz,

$$\frac{d\vec{e}_1}{du} = \omega_{12}\vec{e}_2 - \omega_{31}\vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{e}_2}{du} = -\omega_{12}\vec{e}_1 + \omega_{23}\vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{e}_3}{du} = \omega_{31}\vec{e}_1 - \omega_{23}\vec{e}_2$$

beteko da.

Adierazpen hauek, deribatuaren bigarrenko gaira eramanez:

$$\sum_{i=1}^3 a_i \frac{d\vec{e}_i}{du} = a_1 \omega_{12} \vec{e}_2 - a_1 \omega_{31} \vec{e}_3 - a_2 \omega_{12} \vec{e}_1 + a_2 \omega_{23} \vec{e}_3 + a_3 \omega_{31} \vec{e}_1 - a_3 \omega_{23} \vec{e}_2 =$$

$$= (-a_2 \omega_{12} + a_3 \omega_{31}) \vec{e}_1 + (a_1 \omega_{12} - a_3 \omega_{23}) \vec{e}_2 + (-a_1 \omega_{31} + a_2 \omega_{23}) \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_{23} & \omega_{31} & \omega_{12} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

lortuko da.

$$\vec{\omega} = \omega_{23} \vec{e}_1 + \omega_{31} \vec{e}_2 + \omega_{12} \vec{e}_3$$

bektoreari, $[\omega_{ij}]$ matrize antisimetrikoari elkartutako bektore duala deituko zaio.

Beraz:

$$\frac{d\vec{a}}{du} = \sum_{i=1}^3 \frac{da_i}{du} \vec{e}_i + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

Adierazpen honi, **Boure-ren legea** deituko zaio.

2.4 ZINEMATIKARAKO APLIKAZIOA.

Jarraian, zinematikarako bi aplikazio-adibide azaltzen dira.

2.4.1 Frenet-en formulak.

Aldagai eskalarreko funtzio bektorialak adierazten badu aldiune bakoitzean espazioan dabilen puntu baten posizio bektorea erreferentzia finko batekiko eta aldagai eskalarra denbora bada $\vec{r} = \vec{r}(t)$, orduan:

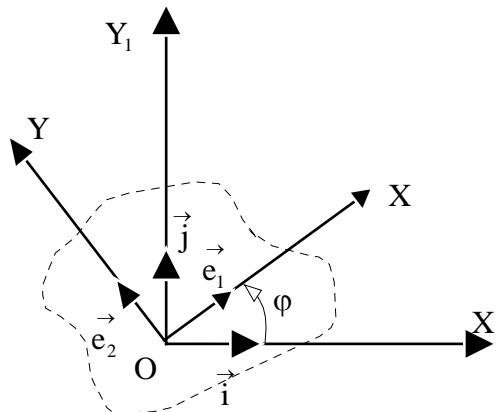
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \vec{u}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \frac{d\vec{u}_t}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n$$

Hau da, azelerazioaren funtsezko osagaien adierazpena lortu da.

2.4.2 Boure-ren legea.

Ikus dezagun jarraian zer esanahi duen $\vec{\omega}$ bektoreak, \vec{e}_3 bektore unitarioarekiko biraketa-mugimendu iraunkorrean. Horretarako kontsideratuko da $(X_1 - Y_1 - Z_1)$ erreferentzia sistema finkoa eta jatorri berdina edukiko duen solido zurrinari itsatsitako $(X - Y - Z)$ sistema, $Z \equiv Z_1$ izango delarik.



\vec{i}, \vec{j} eta \vec{k} erreferentzia finkoko oinarriko bektore unitarioak dira eta \vec{e}_1, \vec{e}_2 eta \vec{e}_3 mugikorrekoak.; $\dot{\varphi}$, berriz, horizontalarekin x ardatz mugikorrak osatzen duen angelua izango da.

Kontutan izanda:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{d\vec{e}_2}{dt} \cdot \vec{e}_3 \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{d\vec{e}_3}{dt} \cdot \vec{e}_1 \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_2 \right) \vec{e}_3$$

Eta \vec{e}_1, \vec{e}_2 eta \vec{e}_3 oinarri mugikorra finkoaren menpean idatziz:

$$\vec{e}_1 = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

$$\vec{e}_2 = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

$$\vec{e}_3 = \vec{k}$$

eta deribatuz denborarekiko:

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = -\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{i} + \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}_2}{dt} = -\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{i} - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}_3}{dt} = 0$$

Eta ondorioz:

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi} \sin^2 \varphi + \dot{\varphi} \cos^2 \varphi) \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k}$$

Ikusten denez, $\vec{\omega}$ -ren norabidea biraketa ardatzarena da eta gainera beteko da, $|\vec{\omega}| = \dot{\varphi}$.

Hau da, $\vec{\omega}$ bektoreak solidoaren abiadura angeluarra adierazten du.

3 BEKTORE LABAINKORRAK

3.1 BEKTORE LABAINKOR-KONTZEPTUA.

Bektore bat, aplikazio puntua bere ekintza zuzenean edukiko lukeen edozein bektore ekipolenteez alda daitekeenean, bektore horri bektore labainkor deituko zaio. Bektore finko bat aldiz, ezin daiteke bere aplikazio puntutik kendu.

3.2 BEKTORE LABAINKORREKIN ERAGIKETAK.

Bektore labainkorren **batura** posible izango da ekintza zuzenak puntu batetan ebakitzen direnean. Eraitza beste bektore labainkor bat izango da, bere ekintza-zuzena ebakidura puntu horretatik pasako dena.

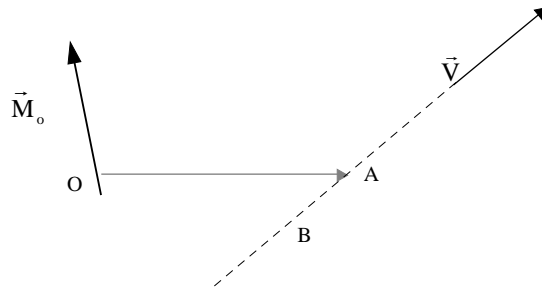
Bektore labainkor bat **eskalar batez biderkatzean**, eraitza ekintza-zuzen berdina duen beste bektore labainkor bat izango da, bere modulua eskalarrarekin biderkatuz lortuko dena eta zeinua eskalarrarenarekin bate etorriko dena.

Bektore labainkor baten momentua puntu batekiko.

Bira \vec{V} bektore labainkorra, O puntua, espazioko edozein puntu eta A puntua ekintza zuzeneko edozein puntu. Deituko da, \vec{V} bektorearen O puntuarekiko momentua, O puntuan aplikatutako bektore lotuari,

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{V}$$

adierazpenak emango duena, A puntua \vec{V} bektorearen ekintza zuzeneko edozein puntu delarik.



\vec{M}_o momentua ez da zuzeneko hautatutako A puntuaren menpeko; bira B zuzeneko beste edozein puntu:

$$\vec{M}_o = \vec{OB} \times \vec{V} = \left(\vec{OA} + \vec{AB} \right) \times \vec{V} = \vec{OA} \times \vec{V} + \vec{AB} \times \vec{V},$$

\vec{AB} eta \vec{V} bektoreak lerrokideak direnez, $\vec{AB} \times \vec{V} = \vec{0}$. Ondorioz:

$$\vec{M}_o^B = \vec{OB} \times \vec{V} = \vec{OA} \times \vec{V} = \vec{M}_o^A$$

3.3 BEKTORE LABAINKOR-SISTEMAK.

Bektore labainkor-sistema bat definituko da, erradiazio berdinekoak izan beharrik ez daukaten bektore labainkor multzo moduan. Bektore labainkor-sistemak bi modutakoan sailkatu daitezke:

- modulu finituko bektore kopuru mugatuko sistemak.
- modulu infinitesimaleko bektore kopuru infinituko sistemak.

3.4 BEKTORE LABAINKOR-SISTEMEKIN ERAGIKETAK.

3.4.1 Ordezkarria.

Deituko da bektore labainkor-sistemako ordezkaria, bektore labainkor bakoitzari elkartutako bektore askeen baturari:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{V}_i$$

non N sistemako bektore kopurua den.

Magnitude bektorial honi \vec{R} , esango zaio bektore labainkor-sistemako lehenengo aldaezina.

3.4.2 Bektore labainkor-sistema baten puntu batekiko momentua.

Bektore labainkor-sistema baten puntu batekiko momentua, sistemako bektore bakoitzak puntu horrekiko duen momentu-bektoreen batura da:

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{V}_i$$

\vec{V}_i izanik sistemako bektore bakoitza, A_i dagokion ekintza-zuzenako edozein puntu eta O puntua, momentua kalkulatu nahi den puntua.

Bektore labainkor-sistema batek momentu eremu bat sortzen du, hau da espazioko puntu bakoitzari momentu-bektore bat elkartzen dio.

Espazioko bi puntutako momentuak erlazionatuko dituen adierazpena, hurrengo moduan kalkulatu ahal da:

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{V}_i$$

$$\vec{M}_p = \sum_{i=1}^N \vec{PA}_i \times \vec{V}_i$$

$$\vec{PA}_i = \vec{PO} + \vec{OA}_i$$

$$\vec{M}_p = \sum_{i=1}^N \left(\vec{PO} + \vec{OA}_i \right) \times \vec{V}_i = \sum_{i=1}^N \vec{PO} \times \vec{V}_i + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{V}_i = \vec{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_o$$

$$\vec{M}_p = \vec{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_o = \vec{M}_o + \vec{R} \times \vec{OP}$$

3.5 BEKTORE LABAINKOR-SISTEMEN BALIOKIDETASUNA.

Bi bektore labainkor sistema berdinak direla esango baldin eta bektore berdinez osatuta badaude. Kontzeptu honek ez du garrantzirik Mekanikan, bai ordea sistemen baliokidetasun kontzeptuak.

Esango da, bi sistema baliokideak direla espazioko puntu guztietan momentu eremu berdina sortzen badute. Printzipio honen bidez, bektore labainkor sistema bat beste bakunagoa den batez ordezkaria daiteke, sistema osatzen duten bektore guztien definizioa egitea beharrezkoa izan gabe. Oro har, bektore labainkor sistema bat puntu batetako momentu bektorea eta ordezkaria puntu horretan aplikatuz eratzen den sistemarekin ordezkaria daiteke.

4 SOLIDO ZURRUNAREN ZINEMATIKA I

4.1 SARRERA.

Zinematika, sortzen dituzten arrazoietatik aske, gorputzen mugimendua aztertzen duen Mekanikako zatia da.

Zinematika aztertzerakoan, kontsiderazio erlatibistetatik at egingo da, hau da, kontsideratuko da mugimenduaren errealitatea deskriba daitekeela hiru dimentsiotako espazio afin euklideoaren bidez, non masa puntualek denborak parametrizatutako dimentsio bakarreko traiektoriak deskribatuko dituzten. Hipotesi hau onarturik, beteko da bi gertaera puntualen arteko denbora-tartea aldaezina dela erreferentzi sistemaren hautaketarekiko eta beraz, denbora hori absolutua da. Baita beteko da ere, aldiunekoak diren gertaera puntualen arteko distantzia aldaezina dela erreferentzi sistema hautaketarekiko (espazio absolutua).

4.2 SOLIDO ZURRUNAREN KONTZEPTUA.

Sistema jarrai bat osatzen duten puntu materialetako distantzia uneoro aldatu gabe mantentzen bada, jasaten dituen indar eta tenperaturak edozein izanik, gorputz hori solido zurruna dela esango da.

Naturan, berez ez dago sistemarik definizio horri guztiz erantzuten dionik, hala ere, problema erreal asko aztertzerakoan, bertako sistemak solido zurruntzat hartuz lortzen diren emaitzak, emaitza errealekin bat datoz (edo ia bat datoz, hau da onargarriak dira).

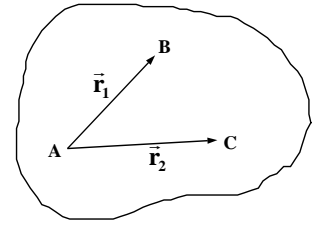
Solido zurrun bati erreferentzi triedro bat lotzen badiogu, hau solido zurrunarekin batera mugituko da eta horregatik triedroaren aldiune bakoitzeko posizioak solido zurrunarena mugatuko du. Ondorioz, aurrerakoan bereizi gabe solido zurrunaz edo berari lotutako triedroaz hitz egingo da.

4.3 MUGIMENDU BAKUNAK.

Solido zurrun batetan lerrokatuta ez dauden edozein hiru puntu harturik, zurruntasun baldintza hurrengo biderketa eskalarren bidez adieraz daiteke:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = \text{kte.} \quad \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 = \text{kte.} \quad \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \text{kte.}$$

Lehenengo biek \overline{AB} eta \overline{AC} distantziak konstante direla adierazten dute eta hirugarrenak adierazten du BAC angelua konstante mantentzen dela mugimenduan zehar.



4.3.1 Translazioko mugimendua.

Solido zurruna batek translazio iraunkorreko mugimendua duela esango da uneoro beteko badu:

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{\text{kte.}} \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{\text{kte.}}$$

Adierazpen hauek deribatuz, lortuko da:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = \vec{0} \\ \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{V}_C - \vec{V}_A = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C$$

Hau da, translazio iraunkorreko mugimendu batetan, solido zurruneko puntu guztiek abiadura eta azelerazio berdina dute eta traiektoria paraleloak deskribatuko dituzte.

Baldin aldiune konkretu batetan, solido zurruneko puntu guztiek abiadura berdina badute baina azelerazioa ez dute berdina, esango da aldiuneko translazioko mugimendua duela. Kasu honetan puntuek deskribatuko dituzten traiektoriak desberdinak izango dira.

4.3.2 Biraketako mugimendua.

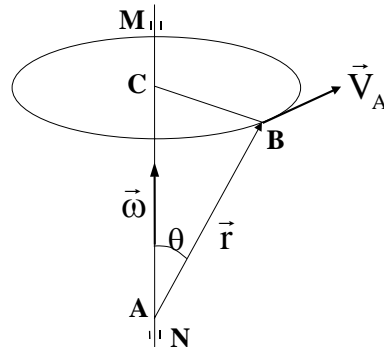
Solido batek biraketa iraunkorreko mugimendua du baldin eta bere bi puntu M eta N uneoro geldirik badaude, gorputzaren biraketa ardatza definituko dutelarik. Mugimendu honetan, biraketa ardatzekoa ez den edozein B puntuk ardatzari elkarzuta zaion zirkunferentzia deskribatuko du, bere erradioa:

$$\overline{BC} = |\vec{r}| \cdot \text{sen } \theta = \overline{AB} \cdot \text{sen } \theta$$

izango delarik. Beraz, B puntuaren abiadura hurrengo biderketa bektorialaren bidez adieraz daiteke:

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \left| \vec{V}_B \right| = |\vec{\omega}| \cdot \left| \overline{AB} \right| \cdot \text{sen } \theta$$

non $\vec{\omega}$ solidoaren abiadura angeluarra den. Bere moduluak A, B eta C puntuek definitutako planoak biratuko duen angeluaren denborarekiko aldaketa adierazten du.



B puntuan funtsezko triedroa erabiliz eta abiadura-adierazpena deribatuz, lortuko da:

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot \overline{BC} \cdot \vec{u}_t$$

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_B = \frac{d\omega}{dt} \cdot \overline{BC} \cdot \vec{u}_t + \omega^2 \cdot \overline{BC} \cdot \vec{u}_n$$

Baldin eta une konkretu batetan solidoko edozein punturen abiadura hurrengo biderketa bektorialez adieraz badaiteke:

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= \vec{\omega} \times \overline{OA} \\ \vec{V}_B &= \vec{\omega} \times \overline{OB} \\ \vec{V}_C &= \vec{\omega} \times \overline{OC} \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{V}_Z &= \vec{\omega} \times \overline{OZ} \end{aligned}$$

esango da solidoak aldiuneko biraketako mugimendua duela baina puntuen traiektoriak ez dira zirkunferentziak izango.

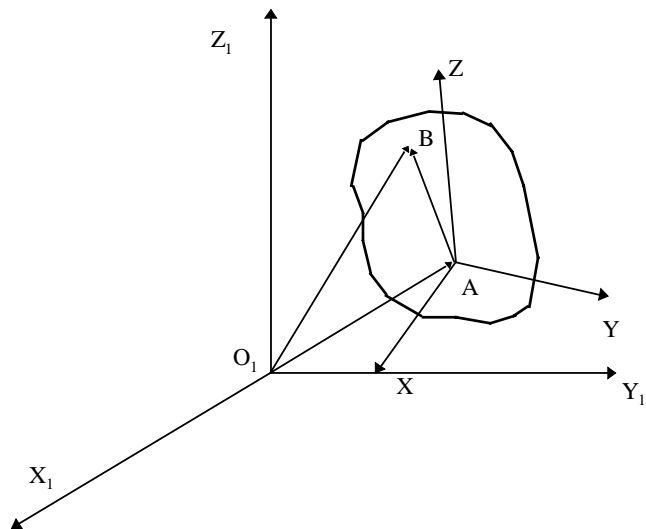
4.4 SOLIDO ZURRUNAREN ABIADURA EREMUA.

Biz solido zurrun bat, zeinari triedro bat lotzen diogun $\{A, X, Y, Z\}$, eta $\{O_1, X_1, Y_1, Z_1\}$ erreferentzi sistema finkoa.

Biz solido zurruneko beste puntu bat, B eta $\{A, X, Y, Z\}$ triedro mugikorreko $\{\vec{e}_i\}$ oinarri ortonormal positiboa.

Beteko da:

$$\vec{O_1B} = \vec{O_1A} + \vec{AB}$$



Denborarekiko deribatuz, lortuko da:

$$\frac{d\vec{O_1B}}{dt} = \frac{d\vec{O_1A}}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt}$$

Kontutan izanda \vec{OA} eta \vec{OB} , A eta B puntuetako sistema finkoarekiko posizio bektoreak, aurreko adierazpena hurrengo moduan idatz daiteke:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \frac{d\vec{AB}}{dt}$$

\vec{AB} bektorea, $\{\vec{e}_i\}$ oinarri mugikorrean adieraziz:

$$\vec{AB} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$$

non x_i osagaiak konstanteak diren, A eta B puntuak solido zurrun berdinekoak direlako eta erreferentzi sistema mugikorra solido zurrun horri lotutakoa.

Beraz, Boure-ren legea aplikatuz deribatzerakoan:

$$\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} = \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \vec{AB} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

eta ondorioz, solido zurrun baten bi puntutako abiadurak erlazionatzen dituen ekuazio bektoriala

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

izango da.

Ekuazio honen arabera, solido baten aldiuneko mugimendua, A puntuaren abiadurak definitutako aldiuneko translazioa eta A puntutik pasako den ardatz batekiko $\vec{\omega}$ aldiuneko biraketaren batura da.

$\vec{\omega}$ bektoreak infinituki gertu dagoen posizio batetara aldatzean $\{\vec{e}_i\}$ oinarriaren aldaketa adierazten du. Solido zurrunaren magnitude aldaezin bat da, kontsideratutako puntuaren menpeko ez dena.

Deituz $\vec{\omega}_A$ eta $\vec{\omega}_B$, solido zurrunari A eta B puntuetan elkartutako $\{\vec{e}_i\}$ eta $\{\vec{E}_i\}$ oinarrien biraketari,

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AC} \\ \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AC} = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{BC}$$

lortuko da.

Gainera beteko denez:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AB}$$

iritsiko da:

$$\vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AC} = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AB} + \vec{\omega}_B \times \vec{BC}$$

$$\vec{\omega}_A \times (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{\omega}_B \times \vec{BC}$$

$$\vec{\omega}_A \times \vec{BC} = \vec{\omega}_B \times \vec{BC} \Rightarrow (\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \times \vec{BC} = \vec{0}$$

Ekuazio hau edozein B eta C puntuetarako bete behar denez, beteko da:

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$$

$\vec{\omega}$ bektoreari solido zurrunaren aldiuneko biraketa edo abiadura angeluar deituko zaio. Bektore asketzat har daiteke, eta solido zurrunaren denbora unitateko biratutako angelua adierazten du.

4.5 ABIADURA EREMUAREN ETA MOMENTU EREMUAREN ARTEKO PAREKATZEA.

Bektore sistema baten momentu-eremua aztertzerakoan, bi puntutako momentua erlazionatzen duen

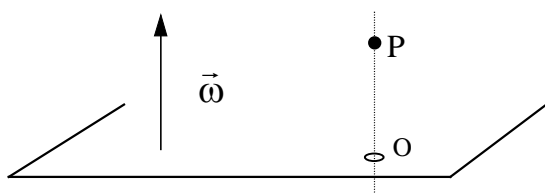
$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \times \vec{R} = \vec{M}_A + \vec{R} \times \vec{AB}$$

adierazpena lortu zen.

Ekuazio honetan \vec{R} ordezkariaren ordez $\vec{\omega}$ bektorea jarritz eta \vec{M} momentuaren ordez \vec{V} , abiadura-eremuaren ekuazioa lortuko da.

4.6 ABIADURA EREMUAREN PROPIETATEAK.

1./ Sistemako abiadura angeluarra kontsideratzen bada eta berari elkarzuta zaion plano bat, planoko edozein O puntuko abiadura puntutik pasako litzatekeen eta ordezkariaren norabidea edukiko lukeen zuzeneko edozein punturekiko abiaduraren berdina da. Horregatik, plano horretako abiadurak ezagututa, solidoko puntu guztietako abiadurak ezagutzen dira.



$$\vec{OP} = \lambda \vec{\omega}$$

$$\vec{V}_p = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{OP} = \vec{V}_o + \lambda \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{V}_o$$

2./ Solido zurrun baten abiadura angeluarra ez bada nulua eta A eta B puntuak ordezkariari elkarzuta zaion planokoak badira (eta $A \neq B$), orduan A puntuko abiadura eta B puntukoa desberdinak dira.

Demagun betetzen dela $\vec{V}_A = \vec{V}_B$, bi puntutako momentuak erlazionatzen dituen adierazpena kontutan izanda: $\vec{\omega} \times \vec{AB} = \vec{0}$. Adierazpen hau beteko da, baldin:

- $\vec{\omega} = \vec{0}$: hau ezinezkoa da abiaburuko hipotesia ez delako betetzen.

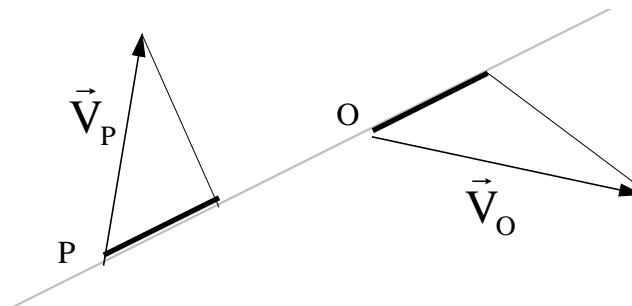
- $\vec{AB} = \vec{0}$: hau ere ezinezkoa da, esan dugulako $A \neq B$.
- $\vec{\omega}$ paraleloa zaio \vec{AB} bektoreari: ezinezkoa da, A eta B puntuak $\vec{\omega}$ ordezkariari elkarzuta zaion plano batetakoak bai dira.

Ondorioz, $\vec{V}_A \neq \vec{V}_B$.

3./ Bi puntu lotzen dituen zuzenaren gaineko bi puntuetako abiaduren proiektzioak berdinak dira.

P eta O puntuetako abiadurak erlazionatzen dituen, $\vec{V}_p = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{OP}$ adierazpena eskalarki biderkatuz \vec{OP} bektorearekin:

$$\vec{V}_p \cdot \vec{OP} = \vec{V}_o \cdot \vec{OP} + (\vec{\omega} \times \vec{OP}) \cdot \vec{OP} = \vec{V}_o \cdot \vec{OP}$$



\vec{OP} eta $\vec{\omega} \times \vec{OP}$ bektore elkarzutak bai dira.

4./ Abiadura angeluar eta edozein puntutako abiaduraren arteko biderketa konstante bat da, bigarrenengo aldaezina deituko zaio, eta τ letraz adieraziko da.

$$\tau = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_o$$

Kontutan izanda $\vec{V}_p = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{OP}$ eta eskalarki $\vec{\omega}$ bektorearekin biderkatuz:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{V}_p = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_o$$

$\vec{\omega}$ bektorea elkarzuta zaiolako $\vec{\omega} \times \vec{OP}$ bektoreari.

5./ Bigarrenengo aldaezina, hurrengo moduan idatz daiteke:

$$\tau = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_A = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{V}_A| \cdot \cos(\vec{\omega}, \vec{V}_A)$$

τ eta $|\vec{\omega}|$ konstanteak direnez edozein A puntutarako, beteko da $|\vec{V}_A| \cdot \cos(\vec{\omega}, \vec{V}_A)$ adierazpena konstantea dela. $\cos(\vec{\omega}, \vec{V}_A)$ funtzioaren balio maximo absolutua, bata da eta balio horretarako $\vec{\omega}$ eta \vec{V}_A lerrokideak dira, eta ondorioz $|\vec{V}_A|$ posible den abiadurarik txikiena izango da.

A puntuko abiadura hori, abiadura angeluarrari paralelo zaio eta solidoaren labainketa abiadura deituko zaio.

$$|\vec{V}_{\text{lab}}| = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{V}_A}{|\vec{\omega}|} \Rightarrow \vec{V}_{\text{lab}} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{V}_A}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}$$

Baldin $\tau > 0$ bada, labainketa abiadurak, abiadura angeluarraren norantza berdina du, eta alderantziz $\tau < 0$ bada, kontrako norantza edukiko du.

4.7 BIRA ETA LABAINKETAZKO ALDIUNEKO ARDATZA.

Aldiune bakoitzean, labainketa abiadura duten solidoko puntuen leku geometrikoa, **bira eta labainketazko aldiuneko ardatza** deituko den zuzena da. P puntua labainketa abiadurako puntua izanik, hartuz I puntuak

$$\vec{PI} = \mu \vec{\omega}$$

baldintza beteko dutenak, lortuko da

$$\vec{V}_I = \vec{V}_P + \vec{\omega} \times \vec{PI} = \vec{V}_d + \vec{\omega} \times \mu \vec{\omega} = \vec{V}_d$$

Bira eta labainketazko aldiuneko ardatzaren ekuazioa lortu ahal izateko, abiadura eremuko ekuazioa biderkatuz abiadura angeluarrarekin eta momentu eremuaren bigarrenengo aldaezina aplikatuz abiadura eremuan, lortuko da:

$$\vec{V}_O = \vec{V}_I + \vec{\omega} \times \vec{IO} = \vec{V}_d + \vec{\omega} \times \vec{IO}$$

Non I abiadura txikieneko puntua den (puntu orokorra) eta O puntua abiadura ezaguneko puntu ezaguna.

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times \vec{V}_O &= \vec{\omega} \times (\vec{V}_d + \vec{\omega} \times \vec{IO}) = \vec{\omega} \times \vec{V}_d + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{IO}) = \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{IO}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{IO})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{IO} = (\vec{\omega} \cdot \vec{IO})\vec{\omega} + \omega^2 \vec{OI} \\ \vec{OI} &= \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_O}{\omega^2} - \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{IO}}{\omega^2} \vec{\omega} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_O}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}\end{aligned}$$

Bira eta labainketazko aldiuneko ardatzaren ekuazio jarraia \vec{V}_d bektore eta $\vec{\omega}$ bektorearen arteko paralelotasuna ezarriz lortuko da.

$$\frac{V_{dx}}{\omega_x} = \frac{V_{dy}}{\omega_y} = \frac{V_{dz}}{\omega_z}$$

Labainketazko abiadura nulua denean, aldiuneko bira eta labainketazko ardatza, **aldiuneko biraketa ardatza** deituko da.

5 SOLIDO ZURRUNAREN ZINEMATIKA II

5.1 SOLIDO ZURRUNAREN AZELERAZIO EREMUA.

Abiadura eremua ematen duen adierazpen orokorra,

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

deribatuz denborarekiko,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{AB}}{dt}$$

lortuko da.

\vec{AB} bektorearen modulua konstantea denez:

$$\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{AB} \right)$$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ bektoreari, solido zurrunaren **azelerazio angeluar** deituko zaio, normalean $\vec{\alpha}$ letraz

adieraziko da.

Ekuaizioaren azkeneko gaiarengatik, ez dago antzekotasunik bektore sistema baten momentu eremuaren eta solido zurrunaren azelerazio eremuaren artean.

5.2 AXOIDEAK

Solidoa mugitzen den heinean, aldiuneko bira eta labainketazko ardatza posiziotik aldatzen da, solidoaren mugimendutik alde batetik, eta bestetik solido zurruneko puntu desberdinez osatua dagoelako.

Horregatik, mugimenduan zehar, defini daiteke aldiuneren batetan aldiuneko bira eta labainketazko ardatzeko solido zurruneko puntuek osatutako zuzen multzoa.

Zuzen multzo honek, zuzen-gainazal bat definitzen dute, zeina **axoide mugikorra** deituko zaion eta unerren batetan aldiuneko bira eta labainketazko ardatzeko izan diren solido zurrunekeo puntuez osatua dagoen.

Bestalde, une bakoitzean, aldiuneko bira eta labainketazko ardatzak espazioko posizioen batetan dago. Horregatik, mugimenduaren zehar, espazioan beste zuzen multzo bat definituko da, aldiuneren batetan aldiuneko bira eta labainketazko ardatz izan diren espazioko zuzenena. Zuzen hauek beste zuzen-gainazal bat definituko dute **axoide finko** deitzen dena eta definituko da unerren batetan aldiuneko bira eta labainketazko ardatzekoak izan diren espazioko puntuen leku geometriko moduan.

Axoideen ekuazioak kalkula ahal izateko,

$$\vec{OI} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_O}{\omega^2} + \lambda \cdot \vec{\omega}$$

ekuazio bektorialetik abiatuko gara. Ekuazio hau ardatz finkoetan adierazi ezker, axoide finkoa lortuko da eta solido zurrunarekin bat den erreferentzi sistema batetan adierazita, axoide mugikorra lortuko da.

5.3 SOLIDO ZURRUNAREN ALDIUNEKO MUGIMENDUEN SAILKAPENA.

Bigarrenengo aldaezinaren, $\tau = \vec{\omega} \cdot \vec{V}$, balioen arabera, aldiuneko mugimenduak hurrengo moduan sailkatuko dira:

- a) Baldin $\vec{\omega} \cdot \vec{V} \neq 0$ bada, kasurik orokorrena da, **mugimendu helikoidal ukitzalea** deituko da.
- b) Baldin $\vec{\omega} \cdot \vec{V} = 0$ bada, mugimendua **endakaturia** da eta hiru kasu partikular kontsidera daitezke:
 - 1) Baldin $\vec{\omega} = \vec{0}$ eta $\vec{V} \neq \vec{0}$ badira, esango da solidoa **aldiuneko translazioz** mugitzen dela. Solidoko puntu guztiek abiadura berdina dute eta ez dauka esanahirik kasu honetan aldiuneko bira eta labainketazko ardatzak.

- 2) Baldin $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ bada, esango da solidoak **aldiuneko biraketako**, mugimendua duela. Aldiuneko bira eta labainketazko ardatza **aldiuneko biraketa ardatzean** bilakatuko da.
- 3) Baldin $\vec{\omega} = \vec{0}$ eta $\vec{V} = \vec{0}$ badira, solidoa **aldiuneko geldialdian** dagoela esango da.

5.4 SOLIDO ZURRUNAREN MUGIMENDU FINITUEN SAILKAPENA.

Solido zurrunaren mugimendu finituetan hurrengo kasu partikularrek interes berezia dute:

- a) Uneoro $\vec{\omega} = \vec{0}$ bada, esango da solidoak **translazio iraunkorreko** mugimendua duela, hau da, solidoko edozein zuzen berari paraleloki mugituko da.
- b) Uneoro $\vec{\omega} \cdot \vec{V} = 0$ eta $\vec{\omega} = k\vec{e} \neq \vec{0}$ badira, eta uneoro aldiuneko bira eta labainketazko ardatza espazioan finko mantentzen bada, axoide biak zuzen horretara laburtzen dira. Mugimendu horri **biraketa iraunkor** deituko zaio.
- c) Uneoro $\vec{\omega} \cdot \vec{V} \neq 0$ eta $\vec{\omega} = k\vec{e} \neq \vec{0}$ badira, eta axoide finko eta mugikorra espazioan zuzen finko batetara laburtzen badira espazioan, solidoaren mugimendua **mugimendu helikoidala** dela esango da.
- d) Aldiuneko bira eta labainketazko ardatza uneoro aldiuneko biraketa ardatza bada eta, gainera, espazioko puntu batetatik pasatzen badira beti, solidoak giroskopioaren mugimendua du (puntu finkoko solidoa).

6 MUGIMENDU ERLATIBOAREN ZINEMATIKA.

6.1 PUNTU MATERIALAREN MUGIMENDU ERLATIBOA: ABIADURA EREMUA.

Kontsidera ditzagun espazioko erreferentzi sistema finkoa O_1, X_1, Y_1, Z_1 , S solido zurrun mugikorra eta solidotik aske mugituko da A puntu materiala. Solido zurruneko O puntuan solidoari elkartutako O, X, Y, Z triedroa eta $\{\vec{e}_i\}$ oinarria definituko dira; ondorioz erreferentzi sistema hau solidoarekin batera dabil.

Iruditik ondorioztatzen da edozein aldiunetan,

$$\vec{O_1A} = \vec{O_1O} + \vec{OA}$$

beteko dela, adierazpen hau deribatuz denborarekiko:

$$\frac{d\vec{O_1A}}{dt} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + \frac{d\vec{OA}}{dt}$$

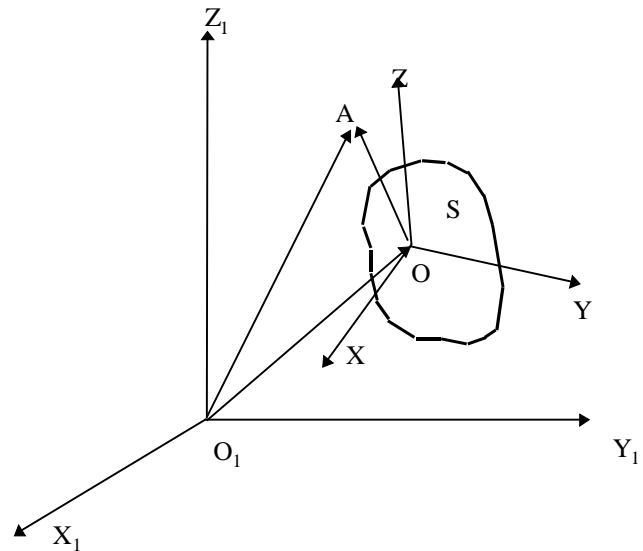
$\vec{O_1A}$ eta $\vec{O_1O}$ bektoreek A eta O puntuen posizioa definituko dutenez erreferentzi sistema finkoan, denborarekiko deribatuak, puntuen abiadura absolutuak izango dira eta beraz, idatziko da:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \frac{d\vec{OA}}{dt}$$

\vec{OA} bektorea, $\{\vec{e}_i\}$ erreferentzi sistema mugikorrean adieraziz:

$$\vec{OA} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$$

Beraz, Boure-ren legea aplikatuz:



$$\frac{d\vec{OA}}{dt} = \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \vec{OA}$$

non $\vec{\omega}$, solido zurrunaren aldiuneko biraketa den ($\{\vec{e}_i\}$ oinarria, gorputzari itsatsita dago

eta berarekin mugituko da) eta $\left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_M$ bektoreak, $\{\vec{e}_i\}$ oinarriko bektoreak finkoak

direla suposatuz \vec{OA} bektorearen deribatua adierazten duen. Beste hitz batzuetan, sistema mugikorrean egongo litzatekeen behatzaileak egingo lukeen deribatua.

Boure-ren legea aplikatuz lortutako adierazpena, A puntuaren abiadura definitzen duen ekuaziora eramanda,

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{OA} + \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_M$$

lortuko da.

Ekuazio hau aztertu aurretik, definizio batzuk egingo dira jarraian.

- **Sistema finko edo absolutua:** deituko zaio O_1, X_1, Y_1, Z_1 triedroari.
- **Sistema mugikorra edo arrastrekoa:** O, X, Y, Z triedroa.
- **A puntuaren abiadura absolutua:** Sistema finkoarekiko puntuaren abiadura, edo sistema finkoan dagoen behatzaileak neurtutako abiadura.
- **A puntuaren arrastreko abiadura:** Puntuak edukiko lukeen abiadura absolutua solido zurrunkoa balitz.
- **A puntuaren abiadura erlatiboa:** Puntuaren abiadura erreferentzi sistema mugikorrarekiko edo erreferentzi sistema mugikorrean legokeen behatzaileak neurtuko lukeen abiadura.

Aurreko definizio hauen arabera, esango da A puntuaren abiadura absolutua \vec{V}_A , arrastreko abiadura $\vec{V}_{Aa/S}$ eta abiadura erlatiboaren, $\vec{V}_{Ar/S}$, batura dela.

$$\vec{V}_{Aa/S} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{OA}$$

$$\vec{V}_{Ar/S} = \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_M$$

eta ondorioz:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{Aa/S} + \vec{V}_{Ar/S}$$

6.2 PUNTU MATERIALAREN MUGIMENDU ERLATIBOA: AZELERAZIO EREMUA.

Abiadura eremuaren adierazpena deribatuz:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{OA} + \vec{V}_{Ar/S}$$

lortuko da,

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{OA}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{Ar/S}}{dt}$$

gainera, aurreko apartatuan bezala arrazoituz,

$$\frac{d\vec{OA}}{dt} = \vec{V}_A - \vec{V}_O = \vec{\omega} \times \vec{OA} + \vec{V}_{Ar/S}$$

$$\frac{d\vec{V}_{Ar/S}}{dt} = \left. \frac{d\vec{V}_{Ar/S}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \vec{V}_{Ar/S} = \vec{a}_{Ar/S} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{Ar/S}$$

lortuko da. Emaitza hauek azelerazioaren adierazpena eramanez,

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OA}) + \vec{a}_{Ar/S} + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{V}_{Ar/S}$$

lortuko da.

Aurreko ekuazioan, hiru osagai kontsidera daitezke:

- **arrastreko azelerazioa:** Puntua solido zurrunkoa balitz edukiko lukeen azelerazio absolutua.

$$\vec{a}_{Aa/S} = \vec{a}_O + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OA})$$

- **azelerazio erlatiboa:** Puntuaren azelerazioa sistema mugikorrarekiko, edo baita ere, sistema mugikorrean dagoen behatzaile batek neurtutako azelerazioa.

$$\vec{a}_{Ar/S} = \left. \frac{d\vec{V}_{Ar/S}}{dt} \right|_M$$

- **azelerazio osagarria edo Coriolis-ena.**

$$\vec{a}_{Ac/S} = 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{V}_{Ar/S}$$

6.3 BI SOLIDOREN ARTEKO MUGIMENDU ERLATIBOA: ABIADURA EREMUA.

Kontsidera ditzagun O_1, X_1, Y_1, Z_1 erreferentzi sistema finkoa, S_1 eta S_2 solido zurrnak, $(\vec{V}_O, \vec{\omega}_1)$ eta $(\vec{V}_A, \vec{\omega}_2)$ bektoreek definitutako mugimendu absolutu independenteak dituztenak hurrenez hurren eta S_2 solidoko B puntua. 1 apartatuko metodo berdina jarraituz, S_1 solidoko O puntuan $\{\vec{e}_i\}$ oinarriko O, X, Y, Z triedroa definituko da

S_2 solidoko A eta B puntuetan abiadurak

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_2 \times \vec{AB}$$

adierazpenaren bidez erlazionatuta

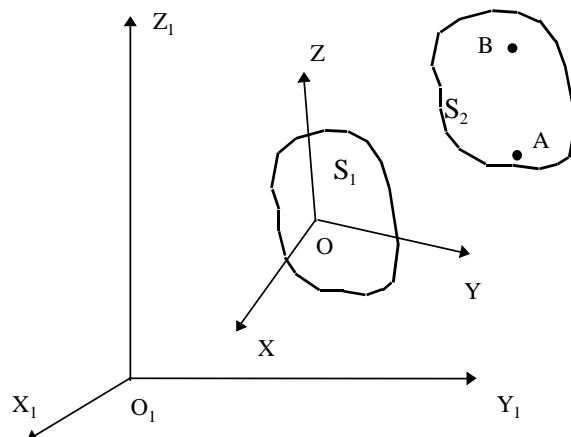
daude, eta

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{OA} + \vec{V}_{Ar/S1}$$

denez, idatz daiteke:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{OA} + \vec{V}_{Ar/S1} + \vec{\omega}_2 \times \vec{AB}$$

Bestalde:



$$\vec{V}_B = \vec{V}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{OB} + \vec{V}_{Br/S1} = \vec{V}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{OA} + \vec{\omega}_1 \times \vec{AB} + \vec{V}_{Br/S1}$$

Azkeneko bi adierazpenak konparatuz, ondorioztatuko da:

$$\vec{V}_{Ar/S1} + \vec{\omega}_2 \times \vec{AB} = \vec{\omega}_1 \times \vec{AB} + \vec{V}_{Br/S1}$$

$$\vec{V}_{Br/S1} - \vec{V}_{Ar/S1} = (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \times \vec{AB}$$

Mugimendu erlatiboan beteko da:

$$\vec{V}_{Br/S1} = \vec{V}_{Ar/S1} + \vec{\omega}_r \times \vec{AB}$$

Ondorioz, S_2 solidoaren S_1 solidoarekiko mugimendu erlatiboaren abiadura eremua $\vec{\omega}_{r/S1}$ eta $\vec{V}_{Ar/S1}$ bektoreen bidez definituko da, izanik:

$$\vec{\omega}_{r/S1} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$$

$$\vec{V}_{Ar/S1} = \vec{V}_A - \vec{V}_O - \vec{\omega}_1 \times \vec{OA} = \vec{V}_A - \vec{V}_{Aa/S1}$$

6.4 BI SOLIDOREN ARTEKO MUGIMENDU ERLATIBOA: AZELERAZIO EREMUA.

Mugimendu erlatiboan azelerazio eremua deskribatzen duen ekuazio bektoriala,

$$\vec{a}_{Br/S1} = \vec{a}_{Ar/S1} + \vec{\alpha}_{r/S1} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{r/S1} \times (\vec{\omega}_{r/S1} \times \vec{AB})$$

moduan idatz daiteke, non $\vec{\alpha}_{r/S1}$ bektorea azelerazio angeluar erlatiboa den, hau da, sistema mugikorrean dagoen behatzaileak neurtuko lukeen azelerazio angeluarra.

$\vec{\alpha}_{r/S1}$ bektorearen balioa mugatzeko, Boure-ren legea aplikatuz

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{r/S1} = \vec{\omega}_1 + \sum_{i=1}^3 \omega_{ri/S1} \vec{e}_i$$

ekuazioa deribatuko da.

$$\vec{V}_r \equiv \vec{V}_{Br/SI} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

idatz daiteke.

Solido biak uneoro ukipenean daudenez, \vec{V}_r abiadura plano tangente komunean dago, eta horregatik, mugimendu erlatiboa bi gorputzen arteko abiadura angeluar erlatiboak eta abiadura erlatibo honek definituko dute, **labainketako abiadura** deituko zaiolarik azkeneko honi.

Abiadura angeluar erlatiboa, plano tangenteari elkarzuta zaion norabidean eta plano tangenteko proiektzioan deskonposa daiteke. Plano tangenteari elkarzuta zaion osagaiari **pibotamenduko** abiadura angeluarra deituko zaio eta bigarrenari errodaturako abiadura angeluarra.

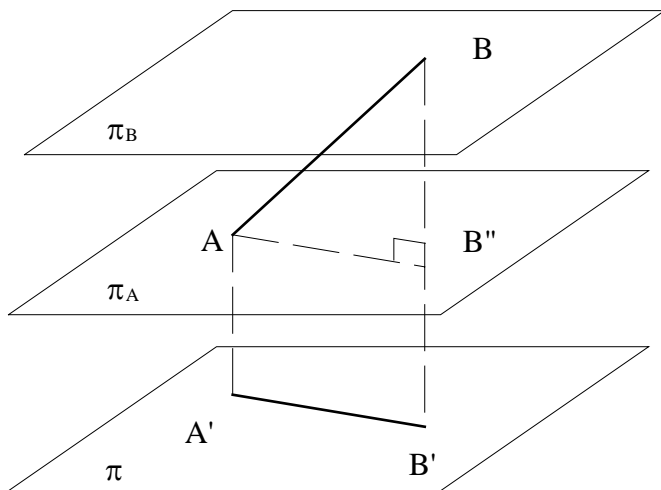
Mugimendu erlatiboan, hiru kasu partikular kontsidera daitezke:

- **Labainketa hutsa:** Baldin $\vec{V}_r \neq \vec{0}$ eta $\vec{\omega}_{rod} = \vec{\omega}_{pib} = \vec{0}$.
- **Pibotamendu hutsa:** Baldin $\vec{\omega}_{pib} \neq \vec{0}$, $\vec{\omega}_{rod} = \vec{0}$ eta $\vec{V}_r = \vec{0}$.
- **Errodadura hutsa:** Baldin $\vec{\omega}_{rod} \neq \vec{0}$, $\vec{\omega}_{pib} = \vec{0}$ eta $\vec{V}_r = \vec{0}$.

7 MUGIMENDU LAUAREN ZINEMATIKA I.

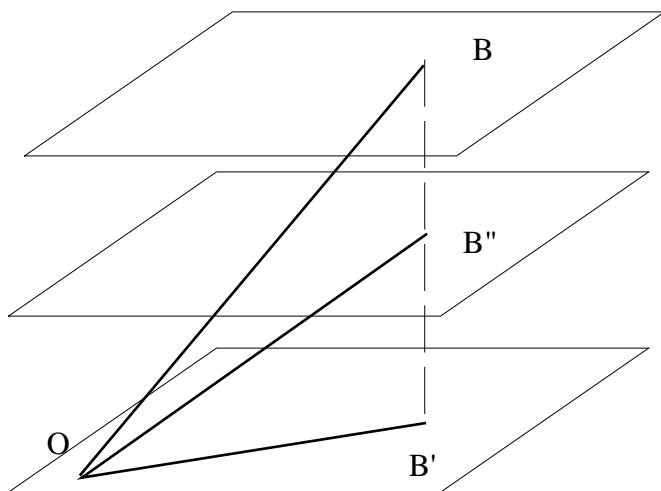
7.1 OROKORTASUNAK

Esango da solido zurrun baten mugimendua, mugimendu laua dela, bere puntu guztiek deskribatzen dituzten traiektoriak, erreferentzi plano bati paraleloak zaizkion planoetan badaude edukiak.



solido guztiarena ezagutzea bide ematea.

Kontsidera ditzagun solido zurruneko edozein bi puntu A eta B. Bira π_A eta π_B , A eta B puntuen traiektoriak dauden planoak hurrenez hurren eta, π erreferentzi planoak. Bira A' eta B', A eta B puntuen plano finkoaren gaineko proiektzioak, eta B'', BB'-ren eta π_A -ren arteko ebakidura. $\widehat{ABB''}$ triangelu zuzenean, \overline{AB} konstantea da (solido



Solido zurrun batek mugimendu laua duenean, sinpletutako azterketa bat egin daiteke, plano finko baten gaineko solidoaren proiektzioaren azterketan oinarritzen dena. Horretarako, beharrezkoa da proiektzioa ere solido zurruna izatea eta bere mugimenduak

zurruna) eta baita $\overline{BB''}$ ere, finkoak diren π_A eta π_B planoen arteko distantzia bai da. Beraz, $\overline{AB''}$ baita ere konstantea da. Baina distantzia hau A'B'-ren berdina da. Beraz, proiektzioa solido zurrun moduan portatzen da.

Bestalde, biz O puntua π

planoko puntu finko bat, eta B puntua solidoko edozein puntu. Orduan, baldin B' bada bere proiektzioa π planoaren gainean, eta B'', B''', ..., puntuak $\overline{BB'}$ tartean kokatuak, beteko da:

$$\vec{OB} = \vec{OB'} + \vec{B'B}$$

$$\frac{d\vec{OB}}{dt} = \frac{d\vec{OB'}}{dt} + \frac{d\vec{B'B}}{dt}$$

Hau da, $\vec{B'B}$ bektorea bektore konstantea denez, $\vec{V}_B = \vec{V}_{B'}$. Berdina beteko da, $\overline{BB'}$ -ren gaineko beste edozein punturekin. Beraz, B'-ren abiadurak π planoari elkarzuta zaion eta B'-tik pasako den zuzeneko edozein puntutako abiadura adieraziko du. Azelerazioekin ere berdina pasako da.

Beraz, mugimendu lauaren azterketa, plaka edo plano mugikor baten plano finko baten gaineko mugimenduaren azterketara laburtzen da.

7.2 ABIADURA EREMUA.

Bira solidoko bi puntu A eta B, eta plano mugikorrari elkarzuta zaion \vec{u} bektore unitarioa. A eta B puntuen artean beteko da: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$. Eskalarki biderkatuz \vec{u} -rekin:

$$\vec{u} \cdot \vec{V}_B = \vec{u} \cdot \vec{V}_A + \vec{u} \cdot \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

\vec{V}_A eta \vec{V}_B planoan dauden bektoreak dira, $\vec{u} \cdot \vec{V}_B = \vec{u} \cdot \vec{V}_A = 0$. Beraz: $\vec{u} \cdot \vec{\omega} \times \vec{AB} = 0$

$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u} \times \vec{\omega} = 0$. Hau bete dadin:

a.- $\vec{AB} \perp \vec{u} \times \vec{\omega}$. Kasu honetan $\vec{u} \times \vec{\omega}$ planoan dagoen bektorea izango litzateke, bere norabidea $\vec{\omega}$ -ren menpeko litzatekeena. A eta B puntuak edozein puntu direnez, baldintza honek ez dauka zer bete beharrik.

b.- $\vec{AB} = \vec{0}$. Ezinezkoa da, A eta B puntuak puntu desberdinak direnez.

c.- Beraz, $\vec{u} \times \vec{\omega} = \vec{0}$, hau da \vec{u} y $\vec{\omega}$ lerrokideak dira edo $\vec{\omega} = \vec{0}$. Beraz, $\vec{\omega}$ bektoreak mugimendu lauan, mugimenduaren planoari elkarzuta zaio uneoro.

7.3 ALDIUNEKO BIRAKETA ZENTRUA. OINARRIA ETA ERRULETA.

$\vec{\omega}$ mugimenduaren planoari uneoro elkarzuta zaionez beteko da edozein punturentzat, $\vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0$ dela. Beraz, mugimendu laua, endakaturia da. Honek esan nahi du, edo $\vec{\omega} = \vec{0}$ dela, edo $\vec{V}_{lab} = \vec{0}$ dela. Baldin $\vec{\omega} = \vec{0}$ bada, solidoak translazioko mugimendua dauka, eta bere puntu guztiak abiadura berdinarekin mugitzen dira. Kasurik orokorra $\vec{V}_{lab} = \vec{0}$ denean pasako da. Honek esan nahi du aldiuneko bira eta labainketa ardatzeko puntuek abiadura nulua dutela. Aldiuneko bira eta labainketazko ardatzaren eta plano mugikorren arteko ebakidurari **aldiuneko biraketa-zentrua** deituko zaio (ABZ) edo **abiadura-poloa**. Aldiuneko biraketa zentroa orduan, abiadura nuluko plano mugikorreko puntua da.

ABZ puntua plano mugikorreko puntu bati elkartzen diogu aldiune batetan, baina aldiune horretan posizio horri plano finkoko puntu batek ere hartzen du.

Uneren batetan ABZ izan diren plano mugikorreko puntuen multzoak kurba bat definituko du. Kurba honi erruleta edo kurba polar mugikorra deituko diogu. Mugimendu lauaren ezaugarriak kontsideratuz, begibistakoa da erruleta, axoide mugikorra eta plano mugikorren arteko ebakidura dela. Era berean, aldiuneren batetan ABZ-rekin bat izan diren plano finkoko puntuen multzoak, kurba bat definituko du. Kurba honi oinarri edo kurba polar finkoa deituko zaio. Mugimenduan, ABZ desberdinak oinarriko puntu desberdinetan daude, honela, defini daitezke puntu bat bere ibilbidea oinarria edo kurba polar finkoa duena eta aldiune bakoitzean ABZ-ren posizioan dagoena. Puntu horrek abiadura du eta abiadura horri segida abiadura edo polo-aldaketa deituko zaio \vec{V}_s .

\vec{V}_s abiadura bektorea, oinarriari ukitzailea zaio. Abiadura hau deskonposa daitezke erruletarekiko arrastreko eta abiadura erlatiboan.

$$\text{Orduan: } \vec{V}_s = \vec{V}_{\text{sarr/rl}} + \vec{V}_{\text{sr/rl}}$$

$\vec{V}_{\text{sarr/rl}} = \vec{0}$, da, ABZ-ren abiadura nulua bai da. Honek esan nahi du \vec{V}_s -ren abiadura erlatiboa, \vec{V}_s -rekin bat datorrela. Beraz, erruletaren gainean dagoen behatzailearentzat puntu matematikoak deskribatzen duen traiektoia erruleta denez eta $\vec{V}_{\text{sr/rl}} = \vec{V}_s$ denez, \vec{V}_s erruletari ukitzaile zaio. Beraz, oinarria eta erruleta uneoro ukitzaileak dira.

Gainera ez dago labainketarik ukipenean, oinarriko puntua finkoa delako eta erruletakoa berriz ABZ da, hau da abiadura nulukoa. Gainera, $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}$ abiadura angeluar erlatiboa oinarri eta erruletaren plano ukitzaile komunean dagoenez, eta erruletaren mugimendua solido zurrunarena denez, esan daiteke mugimendu laua erruletaren oinarriaren gaineko errodadura hutsa dela.

7.3.1 Oinarri eta erruletaren ekuazioak: ekuazio bektorialak.

Bira X_1, Y_1 erreferentzi sistema finkoa, eta mugimendu laua duen solido zurruna, zeinari x-y triedro mugikorra elkartzen diogun A puntuan. Baldin I, ABZ bada beteko da:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_I + \vec{\omega} \times \vec{IA} = \vec{\omega} \times \vec{IA}$$

$\vec{\omega}$ bektorearekin bektorialki aurretik biderkatuz:

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_A = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{IA}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{IA}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{IA} = -(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{IA}$$

Hau da:

$$\vec{AI} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_A}{\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}$$

Ekuazio bektorial honek, solidoko punturen batetako abiadura eta $\vec{\omega}$ abiadura angeluarraren bidez I puntua ematen digu. Ekuazio honek, posizio orokor batetan, ardatz finkoko sisteman adieraziz oinarriaren ekuazioa emango digu. Solidoarekin batera doan sistema mugikorrean adieraziz erruleta lortuko dugu.

7.3.2 Oinarri eta erruletaren ekuazioak: ekuazio parametrikoak.

Aurreko ekuazio bektoriala bere osagaietan idatziz, lehenengo erreferentzi sistema finkoan:

$$\vec{AI} = (x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{V}_A = \frac{dx_A}{dt}\vec{i} + \frac{dy_A}{dt}\vec{j}$$

Beraz:
$$\vec{AI} = (x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}} \left(-\frac{dy_A}{dt}\vec{i} + \frac{dx_A}{dt}\vec{j} \right)$$

Oinarriaren ekuazio parametrikoak:
$$x = x_A - \frac{dy_A}{d\varphi}$$

$$y = y_A + \frac{dx_A}{d\varphi}$$

Erreferentzi sistema mugikorrean adieraziz:

$$\vec{AI} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_3$$

$$\vec{V}_A = \frac{dx_A}{dt}\vec{i} + \frac{dy_A}{dt}\vec{j}$$

Kontutan izanik:
$$\vec{i} = \cos\varphi\vec{e}_1 - \sin\varphi\vec{e}_2 \quad \vec{j} = \sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2$$

Lortuko da:
$$\vec{V}_A = \left(\frac{dx_A}{dt}\cos\varphi + \frac{dy_A}{dt}\sin\varphi \right)\vec{e}_1 + \left(-\frac{dx_A}{dt}\sin\varphi + \frac{dy_A}{dt}\cos\varphi \right)\vec{e}_2$$

Osagaietan deskonposatuz, erruletaren ekuazio parametrikoak lortuko dira:

$$x = \frac{dx_A}{d\varphi}\sin\varphi - \frac{dy_A}{d\varphi}\cos\varphi$$

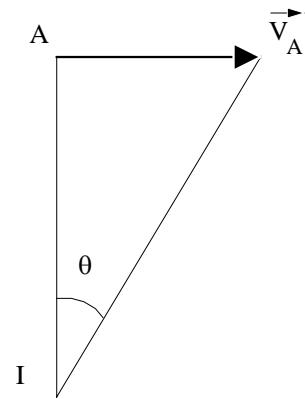
$$y = \frac{dx_A}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{dy_A}{d\varphi} \sin \varphi$$

7.4 ABIADUREN KALKULU GRAFIKOA MUGIMENDU LAUEAN.

Translazioko kasu partikularrean ezik, plano mugikorren beti abiadura nuluko puntu bat dago, I. Beraz beste edozein puntutarako esango da:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_I + \vec{\omega} \times \vec{IA} = \vec{\omega} \times \vec{IA}$$

Honek esan nahi du puntu baten abiadura, puntu hori eta ABZ lotzen dituen zuzenari elkarzuta zaiola.



$$\frac{|\vec{V}_A|}{IA} = \operatorname{tg} \theta$$

Baina aurreko ekuaziotik:

$|\vec{V}_A| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{IA}|$ ateratzen da, $\vec{\omega}$ eta \vec{IA} elkarzutak bai

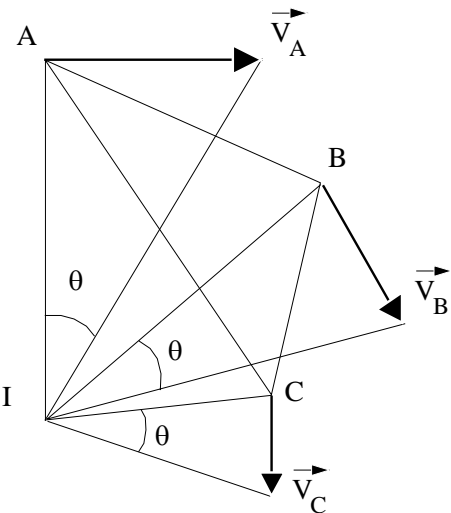
dira.

$$\text{Beraz } \frac{|\vec{V}_A|}{IA} = |\vec{\omega}| = \operatorname{tg} \theta.$$

Hau kontutan izanda, puntu baten abiadura ezaguna izanik eta θ -ren balioa, grafikoki beste edozein punturen I abiadura lortzea posible da.

Hau da

$$\frac{|\vec{V}_A|}{IA} = \frac{|\vec{V}_B|}{IB} = \frac{|\vec{V}_C|}{IC}, \text{ edo } \frac{|\vec{V}_A|}{|\vec{V}_B|} = \frac{IA}{IB}; \frac{|\vec{V}_A|}{|\vec{V}_C|} = \frac{IA}{IC}$$



7.5 ALDIUNEKO BIRAKETA ZENTRUKO SEGIDA-ABIADURA.

Solido baten oinarria eta erruleta kontsideratuko dira, aldiune batetako ukipen puntua I, eta hurrengo ardatz sistema definituko da:

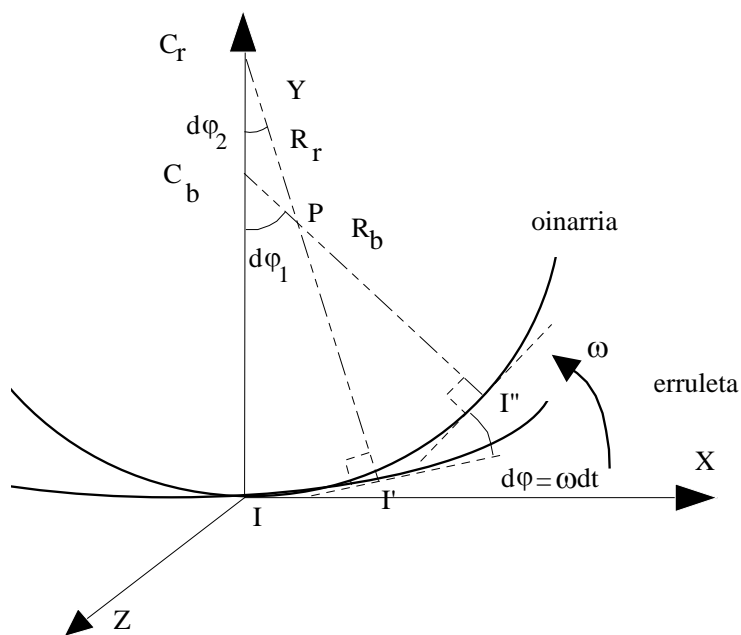
-Jatorria: I.

- Y ardatza: Kurben ukipen puntuko normalak emango du, oinarriaren kurbadura zentroa ardatz-erdi positiboan egongo delarik.

- Z ardatza: Mugimendu lauako planoari elkarzuta eta ω positiboa izan dadin emango zaio norantza bat edo bestea.

- X ardatza: triedroa dextrogiroa izan dadin emango zaio norantza egokia (norabidea ukitzailarena kurba polarrei ukipen puntuan).

dt denbora gehikuntza infinitesimal batetan, erruletak oinarriaren gainean errodatuko



du, $\omega \cdot dt$ angelua biratuz, aldiune horretan erruletako I' puntuak, oinarriko Y'' puntuarekin bat egingo du. Oinarri eta erruletako kurbadura zentroak dagozkien zuzen elkarzutat ebakitzen direnean egongo dira.

Errodadura dagoenez,

$$\overset{\frown}{\Pi'} = \overset{\frown}{\Pi''} = V_s dt$$

Irudiaren arabera:

$$\overset{\frown}{\Pi'} = R_r \cdot d\varphi_2$$

$$\overset{\frown}{\Pi''} = R_b \cdot d\varphi_1$$

Hau da:

$$R_b \cdot d\varphi_1 = R_r \cdot d\varphi_2 = V_s dt;$$

$$d\varphi_1 = \frac{V_s dt}{R_b}; d\varphi_2 = \frac{V_s dt}{R_r}$$

Gainera, $\widehat{C_b - C_r - P}$ triangeluan:

$$d\varphi_2 + \pi - d\varphi_1 + \omega dt = \pi \Rightarrow d\varphi_2 = d\varphi_1 - \omega dt$$

Ordezkatuz:

$$\frac{V_s dt}{R_r} = \frac{V_s dt}{R_b} - \omega dt \Rightarrow V_s \left(\frac{1}{R_r} - \frac{1}{R_b} \right) = -\omega \Rightarrow V_s = \frac{\omega}{\left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_r} \right)}$$

Adierazpen honek \vec{V}_s segida abiaduraren moduluaren balioa ematen du. Bere norabidea x ardatzarena da eta bere norantza aurreko formulak emango du.

8 MUGIMENDU LAUAREN ZINEMATIKA II.

8.1 AZELERAZIO EREMUA.

Solido zurrun baten mugimendu lau azelerazio eremua lortzeko, solido zurrunaren adierazpen orokorretik abiatuko da:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{AB} \right)$$

Biderketa bektorial bikoitza garatuz, lortuko da:

$$\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{AB} \right) = \vec{\omega} \cdot \left(\vec{\omega} \cdot \vec{AB} \right) - \omega^2 \cdot \vec{AB} = -\omega^2 \cdot \vec{AB}$$

$\vec{\omega}$ eta \vec{AB} elkarzutak bai dira (mugimendu lauan, solido proiektatua kontsideratuko da eta abiadura angeluarra elkarzuta zaio planoari) eta $\vec{\omega} \cdot \vec{AB} = 0$ denez:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} - \omega^2 \cdot \vec{AB}$$

8.2 ALDIUNEKO BIRAKETA ZENTRUAREN AZELERAZIOA.

Solido zurruneko edozein A punturen abiadura,

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{IA}$$

moduan idatz daiteke, non I aldiuneko biraketa-zentroa den.

Adierazpen hau baliagarria izan dadin edozein aldiunetan, I puntuaren abiadura zero izan behar du uneoro eta ondorioz uneoro biraketa zentroan dagoen puntu matematikoa izango da I puntua (ez da solido zurruneko puntua).

Denborarekiko deribatuz:

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \times \vec{IA} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{IA}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{IA} + \vec{\omega} \times (\vec{V}_A - \vec{V}_S)$$

Adierazpen hau aplikatzen bazaio une horretan aldiuneko biraketa-zentro den solido zurruneko puntuari:

$$\vec{a}_I = \vec{V}_S \times \vec{\omega}$$

Adierazpen honek emango du plano mugikorreko aldiune horretan biraketa-zentro den puntuaren azelerazioa.

8.3 AZELERAZIO-POLOA. ZIRKUNFERENTZIA NABARMENAK.

Plano mugikorreko azelerazio nuluko puntuari azelerazio-poloa deituko zaio. Puntu hori C letraz adieraziko da eta uneoro kalkula daiteke:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AC} - \omega^2 \cdot \vec{AC} = \vec{0}$$

$\vec{\alpha}$ -rekin biderkatuz bektorialki aurretik:

$$\vec{0} = \vec{\alpha} \times \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times \vec{AC}) - \omega^2 \cdot \vec{\alpha} \times \vec{AC} = \vec{\alpha} \times \vec{a}_A - \alpha^2 \cdot \vec{AC} - \omega^2 \cdot \vec{\alpha} \times \vec{AC}$$

Eta beraz:

$$\vec{\alpha} \times \vec{AC} = \frac{\vec{\alpha} \times \vec{a}_A - \alpha^2 \cdot \vec{AC}}{\omega^2}$$

Emaitza hau A eta C puntuetako azelerazioak erlazionatzen dituen ekuaziora eramanez:

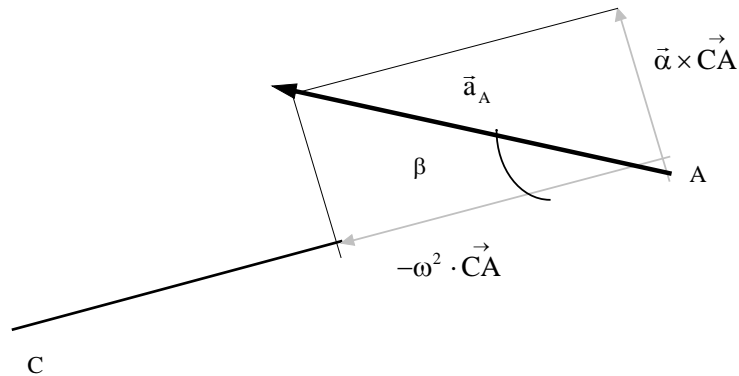
$$\vec{0} = \vec{a}_A + \frac{\vec{\alpha} \times \vec{a}_A}{\omega^2} - \frac{\alpha^2 \cdot \vec{AC}}{\omega^2} - \omega^2 \cdot \vec{AC}$$

Hau da:

$$\vec{AC} = \frac{\vec{a}_A + \frac{\vec{\alpha} \times \vec{a}_A}{\omega^2}}{\frac{\alpha^2}{\omega^2} + \omega^2} = \frac{\omega^2 \cdot \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{a}_A}{\alpha^2 + \omega^4}$$

Adierazpen honen bidez azelerazio poloa lortuko da $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ eta \vec{a}_A gaiak ezagutzen badira. Polo infinituko puntua izango da $\omega = \alpha = 0$ betetzen denean soilik.

8.3.1 Propietateak.



1./ Edozein A punturentzat beteko da:

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \times \vec{CA} - \omega^2 \cdot \vec{CA}$$

\vec{a}_A azelerazioaren modulua kalkulatu:

$$|\vec{a}_A| = \sqrt{\alpha^2 \cdot CA^2 + \omega^4 \cdot CA^2} = CA \cdot \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Beraz:

$$\frac{|\vec{a}_A|}{CA} = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

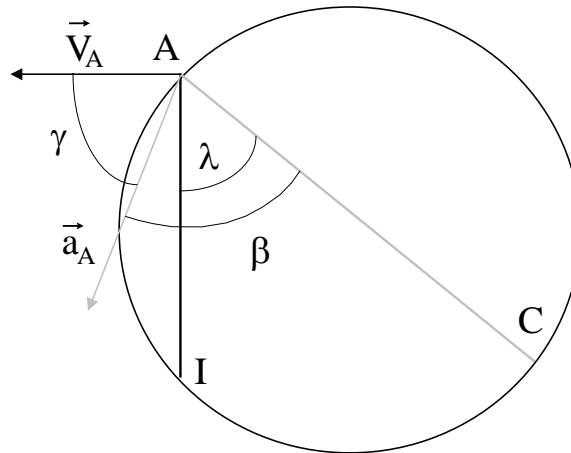
Aldiune batetarako, azelerazioaren modulua eta azelerazio-polorainoko distantziaren arteko erlazioa konstante da plano mugikorren puntu guztietan.

2./ Aurreko irudia kontutan izanik:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha \cdot CA}{\omega^2 \cdot CA} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

Beraz, aldiune bakoitzean, azelerazio bektoreak eta puntua azelerazio poloarekin lotzen duen bektorearen arteko angelua konstante da plano mugikorren puntu guztietan.

3./ Biz I eta C puntuetatik pasako diren infinitu zirkunferentzietako bat.



Zirkunferentzia hori, λ angeluko arku kapaza izango da. \vec{V}_A eta \vec{a}_A bektoreek osatuko duten γ angelua izango da:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \lambda - \beta$$

konstantea zirkunferentziako puntu guztietarako.

γ -ren balio desberdinetarako lortuko liratekeen zirkunferentzia desberdinetatik bi nabarmenduko dira:

- $\gamma = 0$ kasua.

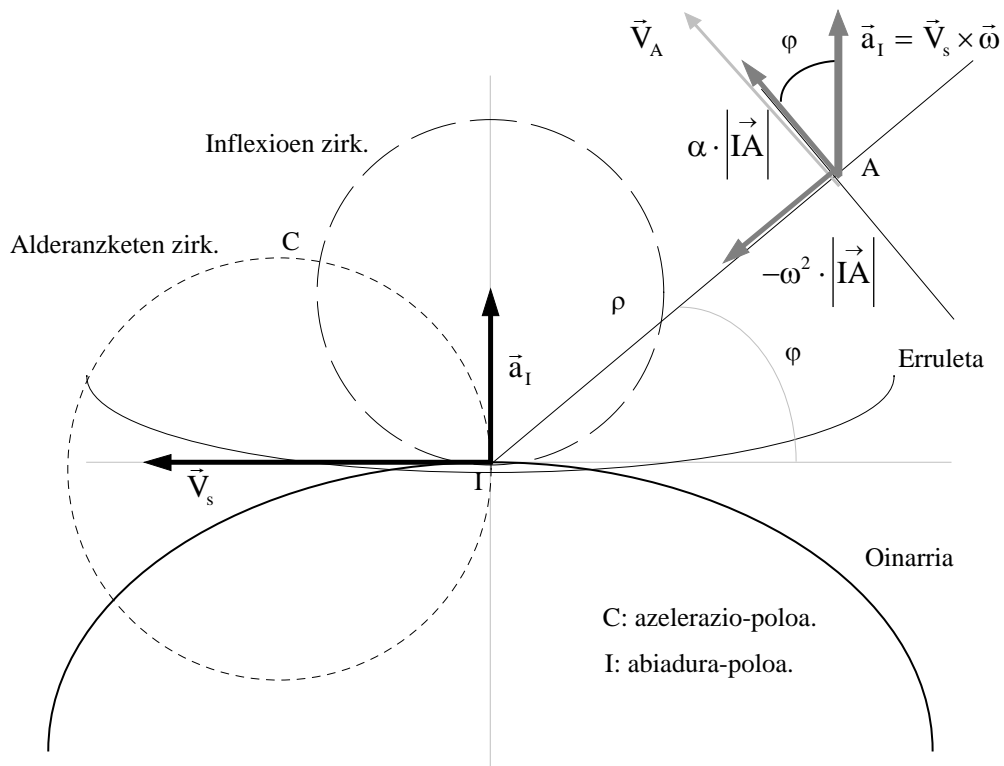
Abiadura bektoreak eta azelerazio bektoreak norabide berdina dute. Hau da, puntu horiek azelerazio tangenziala dute soilik eta nulua da azelerazio normala, hots

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} = 0, \rho \text{ infinitu izango da eta beraz puntu horien ibilbideak inflexio puntu bat}$$

aurkezten du aldiune horretan. Zirkunferentzia honi inflexioen zirkunferentzia deituko zaio.

- $\gamma = \frac{\pi}{2}$ kasua.

Abiadura eta azelerazio bektoreak elkarzutak dira. Puntu hauek aldiune horretan azelerazio normala dute baina ez tangenziala. Beraz, abiaduraren moduluak puntu gerakor bat du (maximoa edo minimoa) eta bere aldaketaren norantza alderantzten da. Zirkunferentzi honi alderanzketen zirkunferentzia edo Bresse-ren zirkunferentzia deituko zaio.



Alderanzketen zirkunferentziaren ekuazioa:

$$a_{Ct} = \alpha \cdot \rho + \omega \cdot V_s \cdot \cos \varphi = 0$$

$$a_{Ct} = 0 \Rightarrow \rho = -\frac{\omega \cdot V_s}{\alpha} \cdot \cos \varphi$$

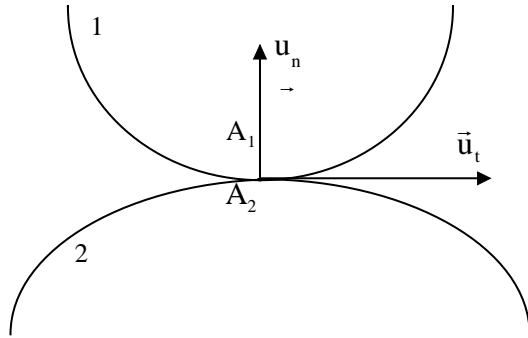
Inflexioen zirkunferentziaren ekuazioa:

$$a_{Cn} = \omega^2 \cdot \rho - \omega \cdot V_s \cdot \sin \varphi = 0$$

$$a_{Cn} = 0 \Rightarrow \rho = \frac{V_s}{\omega} \cdot \sin \varphi$$

8.4 ERRODADURA MUGIMENDUKO AZELERAZIOEN AZTERKETA.

Bira 1 eta 2 solidoak labaindu gabe errodatzen dutenak A_1 eta A_2 puntuak izanik aldiune honetako ukipen-puntuak.



Errodadura dagoenez, beteko da: $\vec{V}_{A1} = \vec{V}_{A2}$

Azelerazioak kontsideratuz idatz daitezke:

$$\vec{a}_{A2} = \vec{a}_{A1} + \vec{a}_{A2rel/1} + \vec{a}_{A2cor/1}$$

eta jakinik $\vec{V}_{rel} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_{A2cor/1} = \vec{0}$

Gainera, bestalde, $\vec{a}_{A2rel/1}$,

azelerazioa, mugimendu erlatiboko aldiuneko biraketa-zentroaren azelerazioa da eta

beraz \vec{u}_N bektorearen norabidea du, \vec{V}_s segida abiadurak \vec{u}_t -ren norabidea duenez.

Beraz:

$$\vec{a}_{A2} = \vec{a}_{A1} + a_{rel/1} \cdot \vec{u}_N$$

\vec{u}_t bektorearekin eskalarki biderkatuz:

$$\vec{a}_{A2} \cdot \vec{u}_t = \vec{a}_{A1} \cdot \vec{u}_t$$

Hau da, mugimendu laua duten bi solido labaindu gabe errodatzen badute haien artean, ukipen puntuko azelerazioa desberdina da solido bakoitzarentzat, nahiz eta azelerazioen ukitzaileren gaineko proiektzioa berdina izango den.

9 ESTATIKA I

9.1 SISTEMA MATERIALEN OREKA. EKUAZIO UNIBERTSALAK:

Esango da puntu material bat orekan dagoela mugitzen ez denean edo, mugimendu zuzen uniforme duenean. Beraz, partikularen gainean ez du inolako indarrik aktuatzen. (Newton-en lehenengo legea).

Aurrekoa orokortuz, esango da sistema material bat orekan dagoela, bere puntu guztiak orekan badaude.

Beraz, oreka baldintza lortuko da $\sum_{i=1}^N \vec{F}_{ak_i} = \vec{0}$ ekuazioa betetzen denean, non N sistemako puntu kopurua den.

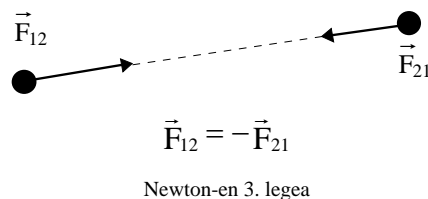
Sistema baten puntuetan aktuatzen duten indarrak hiru motatakoak izan daitezke:

1.1. Indar aplikatuak: pisua, zerbaiten eraginez zuzenean aplikatutako indarrak,....

1.2. Lotura indarrak: sistemak dituen loturengatik azalduko diren indarrak.

Aplikatutako indarrek eta lotura indarrek eratzen duten multzoari **kanpoko indar** deituko zaio.

1.3. Barneko indar: sistema osatzen duten puntuen arteko elkarreragintzatik sortutako indarrak dira. Esperientziak onargarriz ematen du Newton-en 3. legea; lege honen arabera partikula batek besteari eragiten dion indarra, besteak honengan eragiten duenaren berdina da, norantza kontrakoarekin eta bi partikulak lotzen dituen zuzenaren gainean aplikatuak daudelarik indar biak.



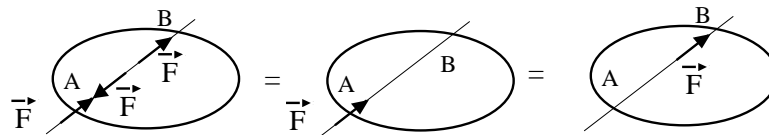
Beraz, sistema material batetan oreka badago, bete beharko da:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{ak_i} = \vec{0}, \text{ eta } \sum_{i=1}^N \vec{F}_{bar_i} = \vec{0} \text{ denez, } \sum_{i=1}^N \vec{F}_{kan_i} = \vec{0} \text{ lortuko da.}$$

Aurreko baldintza, beharrezko baldintza da baina ez nahikoa. Oreka egon dadin, puntu bakoitzaren gaineko indar aktuatzailea nulua izan behar du, honek sistema jarraietan adibidez aborda ezinezko ekuazio kopurua emango luke.

Solido zurrunaren kasu partikularrean, non puntuen arteko distantzia aldaezina den, ostera, oreka posizioak modu errazean definitzeko ekuazioak lortuko dira.

Horretarako, kontutan izango dugu solido zurrun baten oreka posizioak ez direla aldatzen indar baten ekintza zuzenaren gainean norantza desberdineko bi indar berdin ezarri ezkerro.



Beraz, aurreko irudian ikusten den moduan, indar bat bere ekintza zuzenaren gainean labain daiteke, bektore labainkorra balitz, solido zurrunaren oreka egoera aldatu gabe (igorgarritasun printzipioa). Ondorioz, solido zurrun baten gainean aplikatutako kanpoko indar sistemak, bektore labainkor sistema bat eratuko du.

Sistema hori, baliokidea denez ordezkaria eta puntu batetako momentuari, oreka egon dadin bete beharko du:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{kan_i} = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^N \vec{M}_O^i = \vec{0}$$

O izanik edozein puntu, eta \vec{M}_O^i , i puntuan aktuatzen duten kanpoko indarrek O puntuan ematen duten momentua. Bigarrenengo baldintzan barneko indarrak ez dira azalduko, puntu guztietan beteko denez:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{akt} = \vec{0}$$

eta ondorioz,

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_{o_{akt}}^i = \vec{0} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{o_{kan}}^i + \sum_{i=1}^N \vec{M}_{o_{bar}}^i = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{o_{bar}}^i$$

barneko indarrak binaka elkartzen badira beteko denez:

$$\vec{M}_{o_{bar}} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

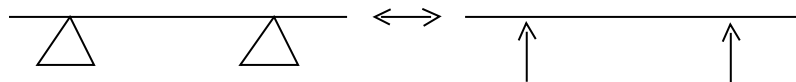
\vec{F}_{ij} eta $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ lerrokideak bai dira.

Solido zurrun batzuk osatutako sistema kontsideratuz, aurreko ekuazioak solido bakoitzarentzat bete beharko dira, eta ondorioz, sistema guztirako ere beteko dira.

9.2 MARRUSKADURARIK GABEKO LOTURETAKO ERREAKZIOAK:

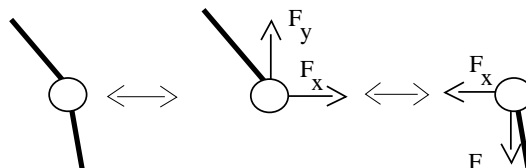
Solido zurrun bat modu egokian isolatzeko, loturak kendu behar dira eta sortzen dituzten indarrez ordezkatu. Marruskadura gabeko lotura nagusienak hurrengoak dira:

9.2.1 Euskarri soila.



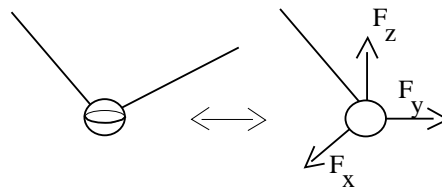
Suposatuko da euskarriko ukipena puntu bakar batetan emango dela. Ukipen gainazalari elkarzuta zaion indar bati baliokidea zaio lotura indarra. Ezezagun bakararra dago.

9.2.2 Artikulazio laua.



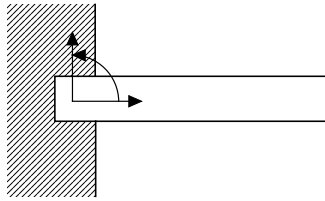
Norabide ezezaguneko indar bati baliokidea zaio. Beraz, bi ezezagun egongo dira: indarraren bi osagaiak.

9.2.3 Artikulazio esferikoa edo errotula (giltzadura).



Espazioko indar ezezagun bati baliokidea zaio. Beraz 3 ezezagun egongo dira, indarraren 3 osagaiak.

9.2.4 Barneratze laua.

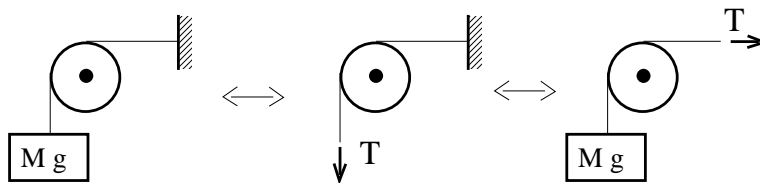


Norabide ezezaguneko indar bati baliokidea zaio eta momentu bati. Beraz, 3 ezezagun daude, indarraren bi osagaiak eta momentua.

9.2.5 Barneratze espaziala.

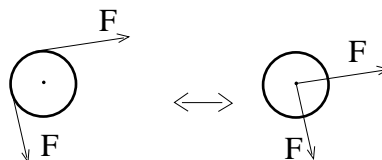
Barneratze lauaren espaziorako orokortze bat da. Norabide ezezaguneko indar bati eta norabide ezezaguneko momentu bati baliokidea zaio. Beraz, 6 ezezagun daude, indarraren 3 osagaiak eta momentuaren hirurak.

9.2.6 Trakzio-lotura gisako lokarria edo korda.



Kordaren norabideak adierazitako kontrakoak diren bi indar berdini baliokidea zaio, korda ebakiko den bi puntuetan aplikatuz indarrak.

9.2.7 Polea.



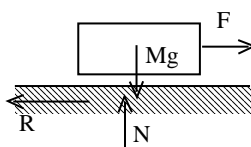
Lotura hau baliokidea zaio, lokarriaren norabideak emandako norabideak dituzten eta polearen zentroan aplikatutako modulu berdineko bi indarri.

9.3 LABAINKETARI MARRUSKADURA.

Sistema mekanikoetako lotura errealetan beti azaldu ohi dira marruskadura fenomenoak, oso konplikatuak izan daitezkeenak. Naturan existitzen diren marruskadura desberdinetatik, aztertuko dena solido desberdinen ukipenean dauden gainazalen arteko marruskadura izango da. Konkretuki Coulomb-en marruskadura edo marruskadura lehorra, non suposatuko den ez dagoela jariakin lubrifikatzailezko geruza banatzailearik ez dagoela. Modu oso sinplifikatuan esan daiteke marruskadura egotearen arrazoi zuzena ukipenean dauden solidoen gainazalen zimurdura dela eta, berez solido zurrunik ez dagoela, neurriren batetan deformatzen direla baizik.

Bi solido desberdinek, mugimendu erlatiboari aurkezten dioten erresistentzia da marruskadura, modu honetan, marruskadura indarra beti mugimendu erlatiboaren kontrakoa da. Solidoen artean ez dagoenean mugimendu erlatiborik, mugimendu erlatibo horren kontrako erresistentziari marruskadura estatikoa deituko zaio. Mugimendu erlatiboa dagoenean, marruskadura zinetikoaz hitz egingo da. Marruskadura zinetikoko indarra, marruskadura estatikako balio handiena baino txikiagoa da, indar normal eta gainazal berdinetarako.

Marruskadura lehorra arautzen duten legeak Coulomb-ek 1781.ean egindako esperimenduetan oinarritzen dira. Lege hauek 1831.ean baieztatuak izan ziren Morin-en lanetan. Coulomb-en oinarritzko esperimendua hurrengo hau da:



Neurri txikiko sekzio bloke errektangeluar bat hartzen da eta gainazal horizontal baten gainean jartzen da. F indar tangenziala aplikatzen zaio gradualki blokea mugimenduan hasi arte. Mugimendurik ez dagoen bitartean, blokea orekan dago eta orduan existituko da R indarra F indarraren kontra egingo duena eta uneoro orekatzen duena. Beraz, marruskadura indarrak, une bakoitzean oreka mantentzeko behar den balioa hartuko du.

Esperimentu honetatik, Coulomb-ek marruskadura lege batzuk atera zituen, hurrengo moduan labur daitezkeenak:

1. Lor daitekeen marruskadura-indar handiena, bloke eta gainazalaren arteko indar normalari proportzionala zaio.
2. Marruskadura-indar maximoa, ukipen gainazalaren azaleraren menpekoa ez da.
3. Oreka-egoerako marruskadura-indar maximoa, mugimendu erlatiboa dagoenean lortutako marruskadura-indarra baino handiagoa da.
4. Marruskadura-indar zinetikoa, ukipeneko solidoen mugimendu erlatiboaren menpeko ez da.

Gehienetan, esan ditugun lege hauek jarraituz problemaren hurbilpen nahiko ona lortzen da. Hala ere, ikerketa berriagoen bidez hurrengo zehaztapenak egin ahal dira:

1. Presio oso txikietarako, edo materiala deformatzeko adinako presio altuetarako, marruskadura estatikoa gehitu egiten da.
2. Abiadura oso txikietarako, marruskadura zinetikoa estatikoaren berdina da.
3. Abiadura oso handietarako, marruskadura zinetikoa jaitsi egiten da.

Azkenik, esan dezagun, marruskadura, aldagai askoren menpeko dela berez, eta, oraindik ez dela guztiz definitutako fenomeno.

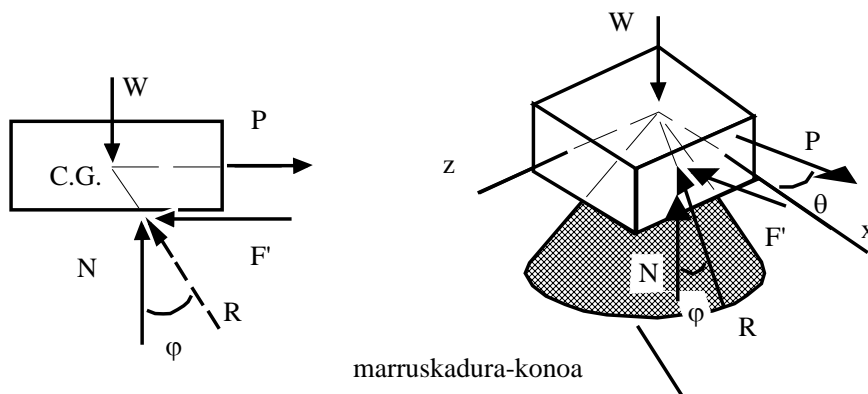
9.3.1 Marruskadura-koefizientea.

Ukipeneko bi gorputzen artean labainketarik gabe lortutako marruskadura-indar maximo eta gorputzen arteko indar normalen arteko zatidurari deituko zaio marruskadura-koefiziente estatikoa. Marruskaduraren balioa, labainketarik gabe maximoa deneko egoerari, **oreka egoera hertsia** deituko zaio.

Marruskadura-koefiziente zinetikoa, marruskadura-indar eta indar normalen arteko zatidura izango da, labainketa dagoenean.

Asignatura honetan, suposatuko dugu koefiziente biak berdinak direla.

Marruskadura-konona:



Irudiko blokeari P indar horizontala aplikatzen zaio. Oreka mantentzen den bitartean, luraren blokearen gaineko erreakzioa, indar normala eta horizontalaren arteko batura da, bektore honek, P indarra eta blokearen pisua orekatuko ditu eta horregatik lotura erreakzioa normalarekiko makurtuta egongo da. Oreka hertsira iritsitakoan, erreakzioak muturreko makurdura edukiko du, φ angelua izanik normalarekin osatzen duen angelua erreakzioak, beteko da:

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{N}$$

non f , marruskadura-koefiziente estatikoa den. P indarrak bertikalarekiko biratuko balu eta ukipeneneko solidoak isotropoak izan, R erreakzioa, bertikalarekiko biratuko du, biraketa-kono bat osatuko duelarik, kono honi **marruskadura-konoa** deituko zaio. Materialak ez balira isotropoak, lortutako konoa ez litzateke biraketa-konoa izango. Konoaren erpineko angeluerdiaren tangentea marruskadura-koefiziente estatikoa izango da.

Ondorioz, blokeak ez badu labaintzen, erreakzioak konoaren barnean egon behar du. Bestelakoan, gainazalaren gainean egongo da $F = fN$ izango bai da.

10 ESTATIKA II

10.1 ELEMENTU ESTRUKTURALETAKO BARNEKO INDARRAK.

10.1.1 Habe eta barretako barneko indarrak.

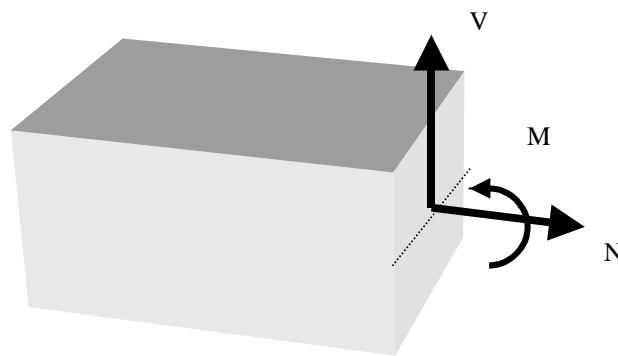
Aurreko gaian esan den moduan, sistema bat edo gorputz bat orekan dagoenean, bere puntu edo elementu guztiak orekan daude. Honengatik, orekan dagoen solido zurrun bat kontutan hartzen denean, bere puntu eta zati guztiak ere orekan egongo dira.

Dimentsio bat (luzera) beste biak baino askoz handiagoa duen solidoari habe edo barra deituko zaio (zurruna gure kasuan). Solido hau lerro batez adieraziko dugu, lerroko puntu bakoitzak berez barraren zeharkako sekzio bat adieraziko duelarik.

Solido zurrun bat isolatzerakoan, beste guztiak eragindako akzioak ezarri behar zaizkio: akzio hauek solido zurruna beste solidoekin edo gainerako sistemarekin zituen loturen menpekoa delarik.

Barra bat orekan badago, baita ere orekan egongo dira bere puntu guztiak eta baita orduan barra zati bat ere. Ondorioz, barra bere sekzioetako batetik mozten bada eta zati batekin geratu, zati horren gaineko barneko indarren ordezkaria ezarri behar zaio orekan jarrai dezan.

Egitura lau baten kasuan azalduko diren indarrak barra baten sekzioan hurrengoak izango dira:



Indar normala edo axiala: barraren norabidea du, sekzioari perpendikularra. Indar honek barra luzatu nahi badu, trakziokoa dela esango da eta konpresiokoa alderantzizkoan.

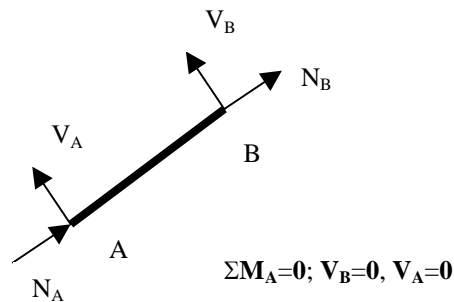
- Indar ebakitzaila: Barrari elkarzuta eta egituraren planoan dagoen indarra.

- Momentu makurtzailea: egituraren planoari perpendikularra zaion momentua da.

10.1.2 Barrasareak.

Barrasarea, artikulatutako barrez osatutako egitura da, suposatuko delarik barren pisua mesprezagarria dela eta kanpoko indar guztiek artikulazio lauetan (nudo edo korapiloak) aktuatuko dute (momenturik ez).

Baldintza hauek betetzen badira, barrek axiala bakarrik edukiko dute.



Aztertuko ditugun barrasare lauen kasuetan aplikatutako indarrak ere planoan egongo dira eta helburuetako bat izango da barra bakoitzeko axiala kalkulatzeko.

Korapiloen metodoa.

Demagun B barra eta N korapiloz osatutako barrasarea. Kanpoko loturei elkartuta R lotura indar edukiz gero kalkulatu beharreko ezezagunak (indarrak) R+B izango dira.

Egiturako artikulazio lau edo korapilo bakoitza isola daiteke, artikulazioaren gaineko aplikatutako indarrak eta korapilo hori duten barra bakoitzak egiten duen indarra adieraziz. Nudo gainean orekako ekuazioak aplikatuz, 2 ekuazio eskalar linealki independente lortuko dira (indar guztiak puntu batetik pasatzen direnez ez da lortuko hirugarren ekuazio independenterik). Ondorioz, problema ebazteko ezezagun adina ekuazio beharrezkoak dira, hau da: $2N=B+R$ baldintza betetzen duten egiturak ebartziko ditugu.

Aurreko baldintza betetzen bada, esango da barrasare isostatikoa dela. Baldin $2N < B+R$ bada, ekuazioak baino ezezagun gehiago ditugu eta ondorioz estatikako ekuazioekin ezinezkoa da problema ebaztea. Kasu honetan esango da, barrasarea

hiperestatikoa dela. Azkenik baldin $2N > B + R$ bada, egiturak mugitzea dauka; esango da mekanismoa dela.

Gai honetan barrasare isostatikoak bakarrik aztertuko dira, nudoz nudo (modu egokian) orekako ekuazioak planteatuko direlarik.

10.1.2.2. Sekzioen metodoa.

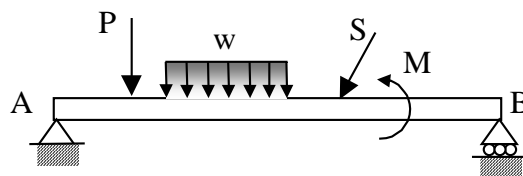
Korapiloen metodoa erabiliko da barra guztietako indarrak ezagutu nahi direnean. Barra konkritu batzuetako indarrak ezagutu nahi badira, batzutan erosoagoa da sekzioen metodoa erabiltzea. Metodo honen arabera barrasarea "ebakiko" da bi zatitan, eta bietako bataren oreka aztertuko da. Ebakidurak 3 barra baino gehiago ez baditu hartzen (eta hirurek korapilo berdina ez badute), estatikako ekuazioen bidez beraien balioak kalkulatu dira.

Horretarako, aurretik kanpoko loturetako erreakzioak kalkulatu behar dira, barrasare guztiari estatikako ekuazioak aplikatuz. 3 ekuazio eskalar edukiko direnez, lotura indar kopurua ezingo da handiagoa izan.

10.1.3 Habe batetako esfortzu normal, ebakitzaila eta momentu makurtzailea.

10.1.3.1. Esfortzu ebakitzaila eta normal eta momentu makurtzaileen kalkulua.

Apartatu honen helburua habe batetako sekzio desberdinetako momentu makurtzaile eta esfortzu normal eta ebakitzailak kalkulatzeko da (zeinak gai honen lehenengo apartatuan definituak izan diren). Horretarako bira irudian adierazitako indar bilduak eta banatutakoak jasaten dituen AB habe.



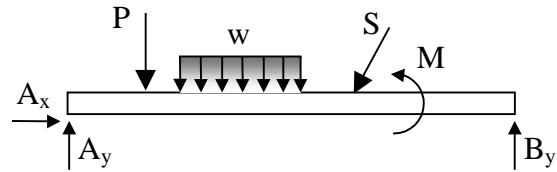
Lehenengo pausua lotura indarren kalkulua izan ohi da (irudiko adibidea soilki bermatutako habe baina azalduko den arrazonamendua, estatikoki definitua den edozein egiturari aplika dakioke) eta horretarako oreka baldintzak ezarriko dira modu egokian.

Adibidez, ezarriz

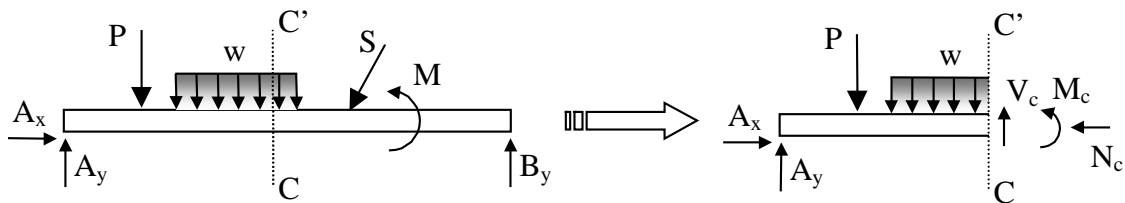
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y$$



Jarraian, sekzio batetako momentu makurtzailea eta indar normal eta ebakitzzailea lortzeko habea “ebakiko” da sekzio horretatik eta bi zatietako edozein isolatuko da.

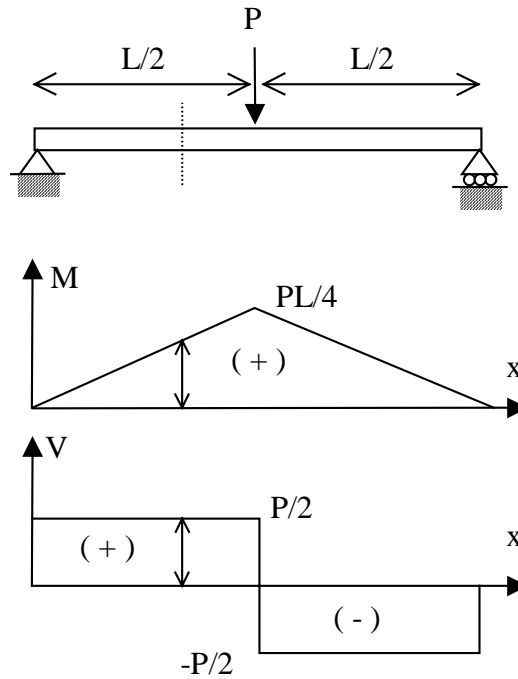


Zati horretan orekako ekuazioak planteatuz (3 ekuazio independente), C sekzioko momentu makurtzailearen eta esfortzu normal eta ebakitzzailearen balioak lortuko dira (3 ezezagun).

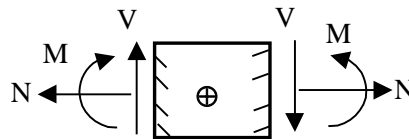
10.1.3.2. Momentu makurtzaile eta esfortzuen diagramak.

Egituren diseinuan edo analisisetan ohikoa da barneko esfortzuen kalkulua habe baten sekzio bakar batetan egin ordez, aztertzen den egiturako habe guztietako sekzioen zeharkako kalkulua egitea. Honengatik habe baten zehar, momentu makurtzaile, esfortzu ebakitzzaile eta esfortzu normalaren adierazpen grafikoa egitearen beharra planteatzen da.

Adibidez, erdipuntuan P indar bildua aplikatutako soilki bermatutako habe batetako momentu makurtzaile eta indar ebakitzzaileen diagramak hurrengo irudian adierazten dira.

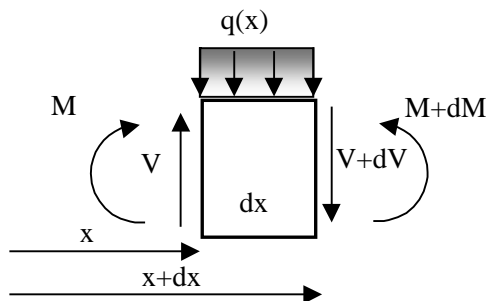


Normalean erabiliko den zeinu-irizpidea adibideko irudian adierazitakoa eta jarraian dagoen irudian eskematikoki adierazten dena da.



10.1.3.3. Zama, esfortzu ebakitzaille eta momentu makurtzailearen arteko erlazioak.

Zama, esfortzu ebakitzaille eta momentu makurtzailearen arteko erlazioak lortu ahal izateko habearen dx luzerako elementu diferentzial bat aztertuko da.



Normalean, V eta M , habearen ardatzaren gainean neurtutako x distantziaren menpeko dira, eta ondorioz, elementuaren eskuinetara eta ezkerretara bai esfortzu ebakitzailleak eta momentu makurtzaileak balio arinki desberdinak hartuko dituzte. V

eta M funtzioen gehikuntzak dV eta dM idatziz, hurrenez hurren, eskuinetako sekzioko esfortzuen ordezkariak $V+dV$ eta $M+dM$ izango dira.

Elementuaren gainean aktuatzen duen zama q balioko zama banatua bada, indarren oreka planteatuz lortuko da:

$$V - (V + dV) - qdx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q$$

Beraz, V indar ebakitzaila x distantziarekin aldatzean, x distantziarekiko aldakuntza abiadura $-q$ izango da. Ondorioz q zama nulua bada, esfortzu ebakitzaila konstante mantenduko da.

Zeinu-irizpideari dagokionez, banatutako zama positibotzat hartuko da beherantz bada.

Elementu diferentzialeko oreka ezarriz eskuinetako aldean momentuak hartuz (momentu positiboak erloju orratzen kontrako norantza hartuz), lortuko da:

$$M + dM - Vdx - M + qdx \frac{dx}{2} = 0$$

eta ondorioz:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Erlazio honetatik ateratzen da momentu makurtzailearen aldakuntza habearen ardatzarekiko esfortzu ebakitzailaren berdina dela. Esfortzu ebakitzaila nulua balitz, momentu makurtzailea konstantea litzateke.

Bestalde, kontutan hartu behar da zama bildu batek aktuatzen duen puntuan indar ebakitzailaren bat bateko aldakuntza gertatuko dela (edo indar ebakitzaila funtzioaren ezjarraitasuna) eta ondorioz puntu horretan dM/dx deribatua definitu gabe geratuko dela.

10.2 SOLIDO FUNIKULAREAK

Hari, kable edo sistema funikular deituko zaio, zeharkako dimentsioak luzerakoekiko mesprezagarriak dituen sistema material jarrai, deformaezin guztiz malguari, oreka-egoeran sekzio guztiek trakzioan lan egingo dutelarik. Elastikoa ez denez, luzapenik ez dago.

Bi problema-mota ebatzi behar dira:

Indarren arteko erlazioa haria orekan egon dadin.

Orekan hariak hartuko duen itxura edo kurbaren ekuazioa.

Horretarako hurrengo hipotesietatik abiatuko da:

Solidifikatze-printzipioa: Solido funikular bat orekan dagoenean, solido zurruntzat har daiteke oreka aztertzerakoan.

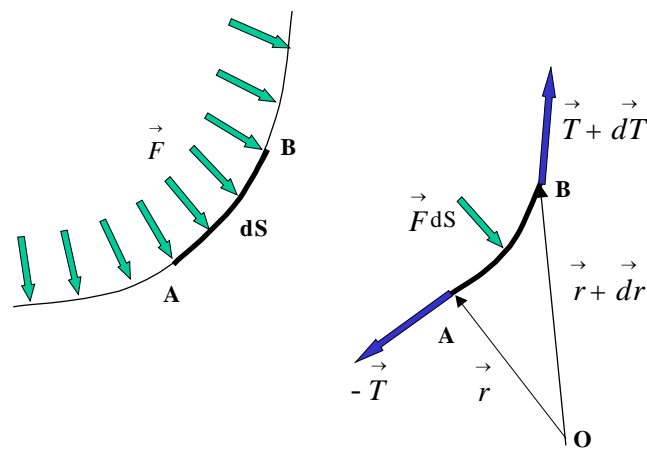
Lokarriek, jasan ditzakete indar-bilduz osatutako sistemak edo banatutako indarrez osatutako sistemak. Apartatu honetan bigarrenengo hauek aztertuko dira.

Deituko zaio \vec{F} , luzera-unitateko indarrari.

Orekan egon dadin, aktuazten duten kanpoko indarren sistema nulua den bektore labainkor sistema bat eratu behar du. Baldintza hau, baldintza beharrezkoa da baina ez nahikoa, honez gain bete behar da indar-sistema horrekin sekzio guztiek trakziora lan egiten dutela.

10.2.1 Oreka ekuazio bektorialak.

Bira irudian adierazitako \vec{F} indar banatua jasaten duen. Lokarriko infinituki gertu dauden A eta B puntuak mugatzen duten lokarri pusketa diferentziala hartuz dS eta isolatuz, bere gainean aktuatuak duten indarrak izango dira: $\vec{F} \cdot dS$ eta gainerako lokarriak luzera diferentzialaren muturren gaineko efektuak (T tentsioa). A puntukoari $-\vec{T}$ deituko zaio eta B puntukoari $\vec{T} + d\vec{T}$.



Oreka egiaztatzeko, bete behar da:

$$\vec{F}dS + \vec{T} + d\vec{T} - \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{F}dS + d\vec{T} = \vec{0}$$

Edozein O punturekiko momentuak hartuz:

$$\vec{r} \times (-\vec{T}) + (\vec{r} + \mu d\vec{r}) \times \vec{F}dS + (\vec{r} + d\vec{r}) \times (\vec{T} + d\vec{T}) = \vec{0}, \text{ izanik } 0 < \mu < 1$$

$$-\vec{r} \times \vec{T} + \vec{r} \times \vec{F}dS + \mu d\vec{r} \times \vec{F}dS + \vec{r} \times \vec{T} + \vec{r} \times d\vec{T} + d\vec{r} \times \vec{T} + d\vec{r} \times d\vec{T} = \vec{0}$$

Eta ordena handiagoko infinitesimoak mesprezatur:

$$\vec{r} \times (\vec{F}dS + d\vec{T}) + d\vec{r} \times \vec{T} = \vec{0}$$

Eta beraz:

$$d\vec{r} \times \vec{T} = \vec{0}$$

eta

$$\vec{F}dS + d\vec{T} = \vec{0}$$

adierazpena izango dira hariaren orekako ekuazio bektorialak. Garrantzitsuena bigarrenko hau da, lehenengoak, $d\vec{r} \times \vec{T} = \vec{0}$ adierazten bai du tentsioa hariari ukitzaile zaiola bere puntu guztietan.

Ekuazio nagusia uler daiteke esanaz kanpoko zamak hariaren tentsio-aldaketa bat sortzen duela.

Kasu partikularrak:

- Uneoro \vec{F} paraleloa zaio \vec{u} -ri, izanik \vec{u} norabide konstante bat.

Oreka-ekuazio aurretik biderkatuz bektorialki \vec{u} bektoreaz:

$$\vec{u} \times \vec{F}dS + \vec{u} \times d\vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{u} \times d\vec{T} = \vec{0}$$

Baita ere beteko da $d\vec{u} \times \vec{T} = \vec{0}$ dela, \vec{u} konstantea denez (eta ondorioz $d\vec{u} = \vec{0}$).

Beraz:

$$\vec{u} \times d\vec{T} + d\vec{u} \times \vec{T} = \vec{0}$$

$$d(\vec{u} \times \vec{T}) = \vec{0}$$

$$\vec{u} \times \vec{T} = \overrightarrow{\text{kte.}}$$

Ondorioz, \vec{u} eta \vec{T} beti plano berdinean daude eta plano horretan ere egongo da haria. Berez hariaren itxura geometrikoa irudi lau bat izango da.

- \vec{F} indar zentrala da, beti espazioko O puntu finkotik pasako da.

Oreka-ekuazioa bektorialki, O puntuarekiko \vec{r} posizio-bektoreaz biderkatuz:

$$\vec{r} \times \vec{F} dS + \vec{r} \times d\vec{T} = \vec{0}$$

\vec{r} eta \vec{F} beti lerrokideak dira, ondorioz $\vec{r} \times d\vec{T} = \vec{0}$

$d\vec{r} \times \vec{T} = \vec{0}$ ekuazioa kontutan izanda, lortuko da:

$$(\vec{r} \times d\vec{T}) + (d\vec{r} \times \vec{T}) = \vec{0}$$

$$d(\vec{r} \times \vec{T}) = \vec{0}$$

$$\vec{r} \times \vec{T} = \vec{k}te.$$

Hariak hartuko duen itxura laua izango da.

- \vec{F} elkarzuta zaio \vec{u} bektore konstanteari.

Oreka-ekuazioa eskalarki biderkatuz \vec{u} bektorearekin:

$$\vec{u} \cdot \vec{F} dS + \vec{u} \cdot d\vec{T} = 0$$

$$\vec{u} \text{ eta } \vec{F} \text{ elkartzutak izatean beteko da } \vec{u} \cdot d\vec{T} = 0$$

Bestalde, beteko denez:

$$d\vec{u} \cdot \vec{T} = 0$$

baita beteko da

$$\vec{u} \cdot d\vec{T} + d\vec{u} \cdot \vec{T} = 0$$

$$d(\vec{u} \cdot \vec{T}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{T} = \vec{k}te.$$

Kasu honetan beteko da tentsioaren \vec{u} bektorearen gaineko proiektzioa konstante dela.

10.2.2 Hariaren orekako funtsezko ekuazioak eta ekuazio kartesiarrak.

Funtsezko ekuazioak:

Abiatuko da

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} + d\vec{T} = \vec{0}$$

ekuaziotik. Orduan:

$$\vec{F} + \frac{d\vec{T}}{dS} = \vec{0}$$

Hariaren puntu bakoitzeko funtsezko triedroa hartuz eta kontutan izanda oinarri ortonormal bat definituko duela funtsezko triedroak, \vec{F} indarra deskonposa daiteke

$$\vec{F} = F_t \vec{u}_t + F_n \vec{u}_n + F_b \vec{u}_b$$

moduan, gainera kontutan izanik $\frac{d\vec{T}}{dS} = \frac{d(T \cdot \vec{u}_t)}{dS}$ dela, T uneoro hariari ukitzeaile bai

zaio:

$$\frac{d\vec{T}}{dS} = \frac{dT}{dS} \cdot \vec{u}_t + T \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dS} = \frac{dT}{dS} \cdot \vec{u}_t + \frac{T}{\rho} \cdot \vec{u}_n$$

izanik ρ hariaren flexio-kurbadura. Beraz:

$$F_t + \frac{dT}{dS} = 0$$

$$F_n + \frac{T}{\rho} = 0$$

$$F_b = 0$$

Ekuazio hauei hariaren orekako funtsezko ekuazioak deituko zaie.

Ondorioak:

- Orekan dagoen hari batek hartzen duen egitura geometrikoan aplikatutako \vec{F} indarra beti plano oskulatzailean egongo da.
- Baldin $F_t = 0$ bada, beteko da $\frac{dT}{dS} = 0$ dela eta ondorioz T konstante da. Hau da, ukitzeailearen gaineko \vec{F} -ren osagaia nulua denean hariaren T tentsioa konstante izango da puntu guztietan.
- Baldin \vec{F} potentzial batetik badator:

$$\vec{F}dS + d\vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{F} + \frac{d\vec{T}}{dS} = \vec{0}$$

Eskalarki biderkatuz \vec{u}_t bektorearekin

$$\vec{F} \cdot \vec{u}_t + \vec{u}_t \cdot \frac{d\vec{T}}{dS} = \vec{0}$$

Bestalde:

$$\frac{d\vec{T}}{dS} = \frac{dT}{dS} \cdot \vec{u}_t + \frac{T}{\rho} \cdot \vec{u}_n$$

Ordezkatuz:

$$\vec{F} \cdot \vec{u}_t + \frac{dT}{dS} = 0$$

edo

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dS} + \frac{dT}{dS} = 0$$

Hau da:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} + dT = 0$$

Eta \vec{F} potentzial batetik badator:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV$$

Orduan:

$$-dV + dT = 0$$

$$dV = dT$$

$$T = V + \text{cte.}$$

Ekuazio kartesiarrak

Berriro, orekako ekuazio bektorialetik abiatuko da.

$$\vec{F}dS + d\vec{T} = \vec{0}$$

\vec{F} indarrak oinarri kartesiar batetan

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

adierazpena hartuko du. Gainera

$$d\vec{T} = d(T \cdot \vec{u}_t) = d\left(T \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = d\left(T \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \vec{i} + T \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \vec{j} + T \cdot \frac{dz}{ds} \cdot \vec{k}\right)$$

Ekuazio bektorialean osagaiak bananduz:

$$F_x dS + d\left(T \cdot \frac{dx}{dS}\right) = 0$$

$$F_y dS + d\left(T \cdot \frac{dy}{dS}\right) = 0$$

$$F_z dS + d\left(T \cdot \frac{dz}{dS}\right) = 0$$

ekuazioak lortuko dira; ekuazio hauek hari baten orekako ekuazio kartesiarrak dira.

Aurreko sisteman, lau ezezagun daude (x , y , z , T) eta hiru ekuazio bakarrik. Haatik,

$|\vec{u}_t| = 1$ denez,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

izango da laugarrengo ekuazioa.

10.2.3 Karga bertikaleko sistema jarraia jasaten duen haria.

Bira hari bat, luzera unitateko \vec{F} karga bertikal jarraia jasaten duena. Ekuazio kartesiarrak hartu, edukiko da:

$$F_x dS + d\left(T \cdot \frac{dx}{dS}\right) = 0$$

$$F_y dS + d\left(T \cdot \frac{dy}{dS}\right) = 0$$

$$F_z dS + d\left(T \cdot \frac{dz}{dS}\right) = 0$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dS)^2$$

Z ardatzak norabide bertikala definitzen badu, $\vec{F} = F_z \vec{k}$ da, beraz:

$$d\left(T \cdot \frac{dx}{dS}\right) = 0 \Rightarrow T \cdot \frac{dx}{dS} = kte = A$$

$$d\left(T \cdot \frac{dy}{dS}\right) = 0 \Rightarrow T \cdot \frac{dy}{dS} = kte = B$$

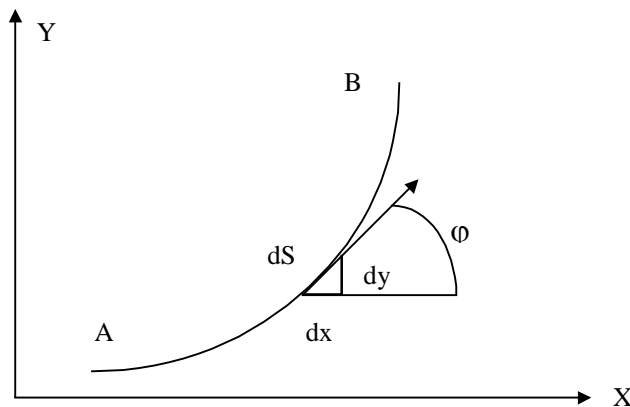
Bigarrenengo ekuaziotik T askatuz eta lehenengoan ordezkatzuz:

$$B \cdot \frac{dS}{dy} \cdot \frac{dx}{dS} = A \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{A}{B}$$

Eta integratuz:

$$B \cdot x - A \cdot y = C$$

Ekuazio honek, lokarria edukiko duen plano bertikalaren ekuazio kartesiarra da. Plano honetan lan eginez eta hatuz erreferentzi sistema berri bat non X-Y ardatzek planoan definituko duten eta Y ardatzak bertikala, beteko da:



$$d\left(T \cdot \frac{dx}{dS}\right) = 0$$

$$F dS + d\left(T \cdot \frac{dy}{dS}\right) = 0$$

$$T \cdot \frac{dx}{dS} = kte = T_0$$

$$T_0 = T \cdot \cos \alpha$$

Hau da, tentsioaren horizontalaren gaineko proiektzioa berdina da puntu guztietan.

Gainera:

$$F dS + d\left(T \cdot \frac{dy}{dS}\right) = F dS + d\left(T \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dS}\right) = 0$$

$$F dS + T_0 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

zeinak hariaren orekako ekuazioa ematen duen.

Batzutan \vec{F} abzisa unitateko karga moduan emango da. Orduan:

$$F \cdot dS = p \cdot dx$$

Kasu hauetan indar positiboak izango dira beherantz doazenak eta ondorioz:

$$-p \cdot (dx) + T_0 \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

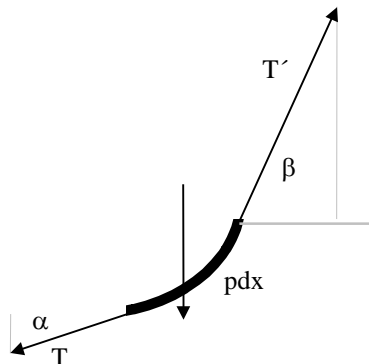
$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{p}{T_0} \cdot (dx)$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{p}{T_0}$$

beraz, orekako ekuazioa izango da:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{T_0}$$

Adierazpen honetara iristeko beste modu bat hurrengo da. Isolatuz dS hari zatia diferentziala:



non

$$\cos\alpha = \frac{T_0}{T}$$

$$\cos\beta = \frac{T_0}{T'}$$

diren.

Orekan beteko da:

$$T' \cdot \sin\beta - T \cdot \sin\alpha - p \cdot dx = 0$$

$$T_0 \cdot \operatorname{tg}\beta - T_0 \cdot \operatorname{tg}\alpha - p \cdot dx = 0$$

$$T_0 \cdot (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) - p \cdot dx = 0$$

Elementu diferentzial bat denez:

$$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = d(\operatorname{tg}\beta)$$

$$T_0 d(\operatorname{tg}\beta) = p \cdot dx$$

$$T_0 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = p \cdot dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{T_0}$$

10.2.4 Katenaria

*Katenaria deituko zaio bere pisuaren eragina bakarrik jasaten duen hariari. Aurrez aztertutako kasu partikular bat bakarrik da eta horregatik hariaren planoan egingo da soilik azterketa. Ekuazio kartesiarrek aplikatuz, indarraren y osagaia bakarrik egongo denez:

$$d\left(T \cdot \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$F \cdot ds + d\left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right) = 0$$

F indarraren ordeaz, q sartuko da: hariaren luzera unitateko pisua:

* Oharra: sinu eta kosinu hiperbolikoak definituko dira: $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$

$$-q \cdot ds + d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = 0$$

Bestalde:

$$\left(T \cdot \frac{dx}{ds}\right) = \text{kte.} = T_0$$

$$-q \cdot ds + d\left(T \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$T_0 \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = q \cdot ds$$

Gainera:

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Aurreko adierazpenean ordezkatzuz:

$$T_0 \cdot dy' = q \cdot dx \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{q}{T_0} \cdot dx$$

Integratuz:

$$\text{arcsh}(y') = \frac{q}{T_0} \cdot x + C$$

Hartutako ardatzetan $x = 0$ denerako, $y' = 0$ betetzen bada: $C=0$ izango da.

$$y' = \text{sh}\left(\frac{q}{T_0} \cdot x\right)$$

Eta berriro integratuz:

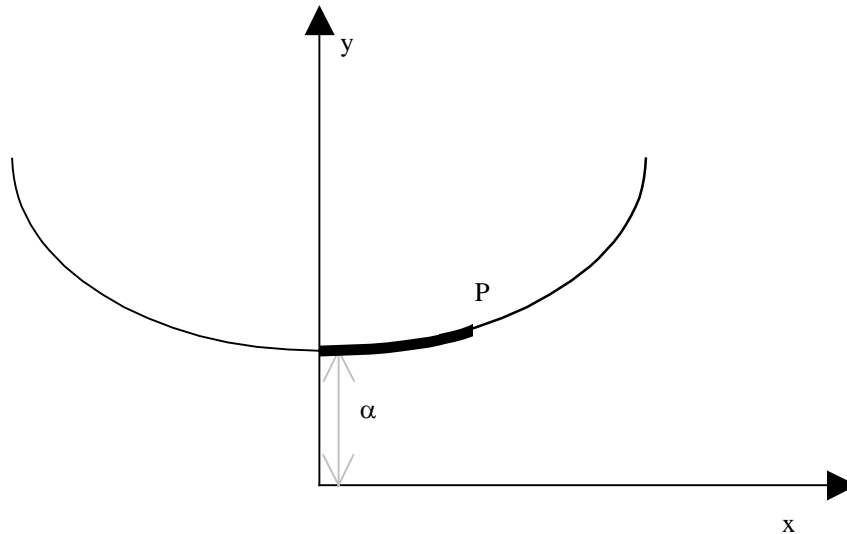
$$y = \frac{T_0}{q} \cdot \text{ch}\left(\frac{q}{T_0} \cdot x\right) + D$$

Eta $x=0$ denerako, $y=T_0/q$ bada, $D=0$. Beraz:

$$y = \frac{T_o}{q} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{q}{T_o} \cdot x\right)$$

Hau katenariaren ekuazioa da. Luzera-dimentsioak dituen T_o/q balioari katenariaren parametroa deituko zaio eta α letraz adieraziko da. Ondorioz

$$y = \alpha \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$



OY ardatzean, katenariaren minimoa dago, $y'=0$ bait da. Katenaria y ardatzarekiko simetrikoa den kurba da eta deituko zaio katenariaren adierazle.

Katenariaren propietateak.

- Puntu batekiko katenariaren luzera: Katenariaren puntu baten eta minimoa duen puntuaren arteko kurba gaineko arku luzerari deituko zaio puntu batetako katenaria luzera.

Beteko da

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$dS = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\operatorname{sh}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2} = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cdot dx$$

Integratuz:

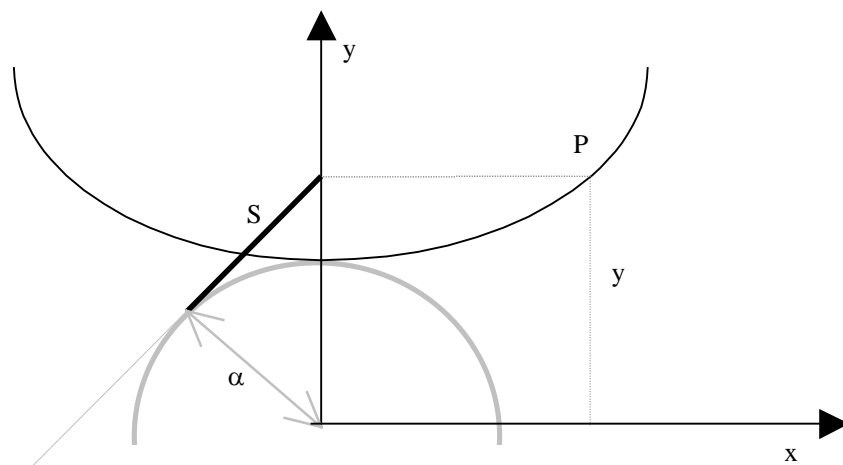
$$S = \alpha \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

edo

$$\operatorname{sh}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \sqrt{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1}$$

$$S = \alpha \cdot \sqrt{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \alpha^2} = \sqrt{y^2 - \alpha^2}$$

Adierazpen honek katenariaren luzera grafikoki kalkulatzeko posible egingo du.



- Puntu batetako gezia: Katenariaren puntu batetako gezia izango da puntu horren eta minimoaren arteko distantzi bertikala.
- Katenariako puntu batetako tentsioa:

$T_o = T \cdot \frac{dx}{ds}$ adierazpenetik abiatuz,

$$T = T_o \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = T_o \cdot \sqrt{1 + y'^2} = T_o \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)} = T_o \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

$$T = q \cdot y$$

Katenariako puntu batetako tentsioaren balioa, katenariaren berdina den (luzera unitateko pisu berdina duen) eta katenariaren puntu horretako ordenatuaren luzera duen hari baten pisuaren berdina da.

11 MASEN GEOMETRIA I

11.1 GRABITATE-ZENTROA.

Lur eremu grabitatorioaren menpean dagoen partikulen gainean, Lurraren zentrorantz bideratuta dagoen indar batek aktuatzen du. Bere balioa

$$|\vec{F}| = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

da, non M, lurraren masa

m, partikularen masa

G, grabitazio unibertsaleko konstantea eta

r, Lurraren zentro eta partikularen arteko distantzia diren.

Ohizko sistema materialen tamaina txikia izanik, Lurraren erradioarekin parekatuz, esan daiteke $|\vec{F}| \approx \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2}$ izango dela, non R Lurraren erradioa den. $\frac{G \cdot M}{R^2}$ biderkaketari, g deituko zaio, eta Lurraren gainazaleko grabitatearen azelerazioa da.

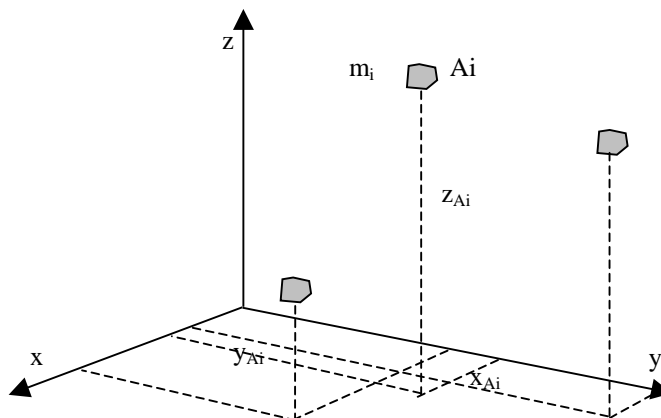
Gorputz baten pisua, sistema material horren partikulen gaineko indar grabitatorioen ordezkaria da. Indar hauek paraleloak har daitezke sistema materialaren eta Lurraren arteko tamaina diferentziagatik. Pisua aplikatuko den gorputzaren puntuari grabitate-zentroa deituko zaio.

A_i puntuetan kokatutako m_i balioko N masa puntualen G grabitate zentroa kalkulatu da berdinduz sistema jarraiak emango duen momentua edozein ardatz edo planorekiko masa kontzentratuak emango duenarekin.

O puntuan erreferentziako triedro bat definituz, grabitate zentroaren eta edozein punturen posizio bektoreak izango dira:

$$\vec{OG} = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$$

$$\vec{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$$



11.1 irudia: Sistema material diskretua.

Erreferentzi sistemako plano koordinatuekiko momentuak berdinuz hurrengo adierazpenak lortuko dira:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i}{M}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot y_i}{M}; \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot z_i}{M}$$

eta modu bektorialean:

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{OA}_i}{M}$$

non M , sistemaren masa totala izango den.

Sistema material jarriak direnean, batukarien ordeztu, integralak azalduko dira:

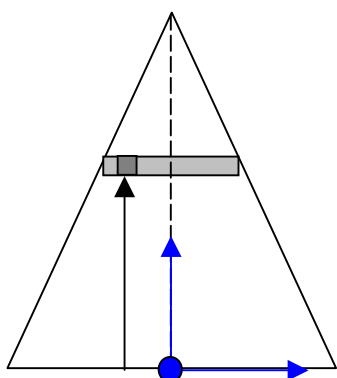
$$\vec{OG} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}; \quad dm = \rho \cdot dv$$

$$x_G = \frac{\int x dm}{M}; \quad y_G = \frac{\int y dm}{M}; \quad z_G = \frac{\int z dm}{M}$$

Adibide moduan, jarraian sistema material jarrai batzuen grabitate zentroa kalkulatu da.

Sistema planoetan, begibistakoa da, grabitate-zentroa masa daukan planoan egongo dela. Era berean, simetri plano, ardatz edo puntua edukiz, hor egongo da grabitate-zentroa.

1.2 irudiko triangelu isoszele baten kasuan, grabitate zentroa masa dagoen **yo**z planoan egongo da eta irudiaren simetri ardatz den **z** ardatzean. Beraz, aurrekoarekin lortuko liratekeen grabitate zentroaren koordinatuak $X_G=0$ eta $Y_G=0$ dira. Aurreko ekuazioak aplikatuz, Z_G koordinatua lortuko da. Integrazioa egiterako orduan, integrakizun konstanteko masa diferentziala hartuko da, hots, z koordenatu berdineko puntuak.



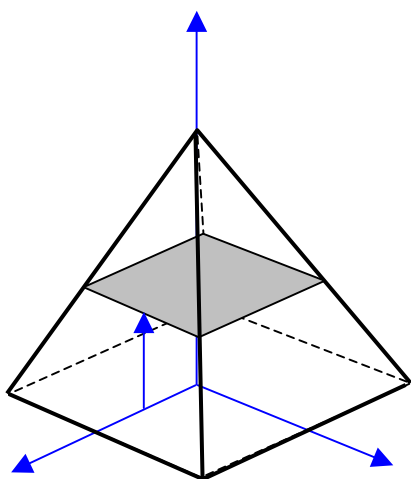
$$Z_G = \frac{\int z dm}{M} = \frac{\rho \int_0^H z \cdot b \cdot dz}{M} = \frac{2M}{B \cdot H} \cdot \frac{\int_0^H z \cdot \frac{B \cdot (H-z)}{H} \cdot dz}{M} = \frac{H}{3}$$

$$\rho = \frac{2M}{B \cdot H}$$

$$b = \frac{B \cdot (H-z)}{H}$$

11.2 irudia: triangelu baten grabitate-zentroa.

Gorputz tridimentsional batetan jarraituko den prozedura berdina da. Adibidez, oinarri karratuko piramide baten grabitate zentroa.



$$\rho = \frac{3M}{L^2 \cdot H}$$

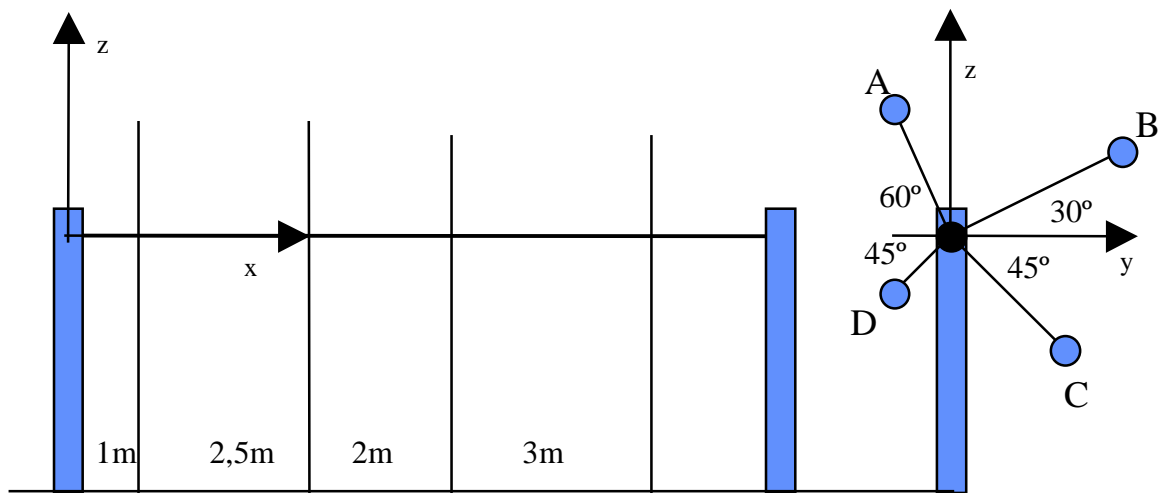
$$dm = \rho \cdot b^2 \cdot dz = \frac{3M}{L^2 H} \cdot \left(\frac{L \cdot (H-z)}{H} \right)^2 \cdot dz$$

$$Z_G = \frac{\int z dm}{M} = \frac{\rho \int_0^H z \cdot b^2 \cdot dz}{M} = \frac{H}{4}$$

11.3 irudia: Piramide baten grabitate zentroa.

Grabitate zentro ezaguneko gorputzen bidez osatutako sistema material baten grabitate zentro orokorra kalkulatzeko, aplikatuko da masa diskretuetarako lortu den adierazpena, suposatuz gorputz bakoitzaren masa bere grabitate zentroan kontzentratuta dagoela.

Adibidez, R erradioko lau esfera A, B, C, eta D ardatz bati lotuta daude irudian adierazten den moduan. Gorputzen masak hurrenez hurren 200 g, 400 g, 600 g, eta 800 g dira eta ardatzerainoko distantziak berriz 1,5 m, 2,5 m, 2 m, eta 1,25 m.



11.4 irudia: Masa-diskretuz osatutako sistemaren grabitate-zentroa.

Gorputza	Masa (gramoak)	X koord.	Y koord.	Z koord.
A	200	1	-0,75	1,3
B	400	3,5	2,16	1,25
C	600	5,5	1,41	-1,41
D	800	8,5	-0,88	-0,88

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i}{M} = \frac{(200 \cdot 1) + (400 \cdot 3,5) + (600 \cdot 5,5) + (800 \cdot 8,5)}{2000} = 5,85$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot y_i}{M} = \frac{(-200 \cdot 0,75) + (400 \cdot 2,16) + (600 \cdot 1,41) + (-800 \cdot 0,88)}{2000} = 0,428$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot z_i}{M} = \frac{(200 \cdot 1,3) + (400 \cdot 1,25) + (-600 \cdot 1,41) + (-800 \cdot 0,88)}{2000} = 0,395$$

11.2 MOMENTU ESTATIKOAK

Emanik sistema material bat eta espazioko edozein O puntu, deituko da sistema materialaren O puntuarekiko momentua estatikoa, eta adieraziko da $\vec{\Gamma}_O$ moduan, hurrengo adierazpenak emango duen bektorea

$$\vec{\Gamma}_O = \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \cdot m_i$$

izanik m_i sistema materialaren masa puntual bakoitza

A_i masa bakoitzaren kokapena

N masa puntual kopuru totala.

Espazioko puntu bakoitzari bektore bat elkartuko zaio, $\vec{\Gamma}$. Bi puntu desberdinetako momentu estatikoak erlazionatuko dituen adierazpena izango da

$$\vec{\Gamma}_P = \sum_{i=1}^N \vec{PA}_i \cdot m_i = \sum_{i=1}^N \left(\vec{PO} + \vec{OA}_i \right) \cdot m_i = \vec{PO} \cdot M + \vec{\Gamma}_O$$

hau da:

$$\vec{\Gamma}_P = \vec{\Gamma}_O + M \cdot \vec{PO}$$

Nola $M \neq 0$ den eta \vec{PO} bektorea bakarra den P puntu bakoitzarentzat, momentu estatikoa, desberdina da espazioko puntu guztietan.

Era berean, demostratuko da, sistema material baten grabitate-zentroarekiko momentu estatikoa nulua dela.

$$\vec{\Gamma}_G = \sum_{i=1}^N \vec{GA}_i \cdot m_i = \vec{0}$$

11.2.1 Sistema baten momentu estatikoa plano batekiko.

Emanik aurreko sistema materiala, eta \vec{u} bektore karakteristiko unitarioa duen edozein π plano, definituko da π planoarekiko momentu estatikoa $\Gamma_\pi = \vec{\Gamma}_o \cdot \vec{u}$ eskalarra, non O planoko edozein puntu izango den.

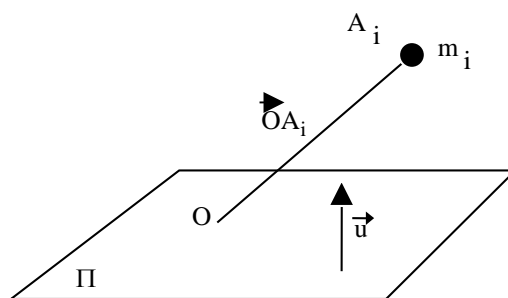
Propietateak:

1. Γ_π planoko zein puntu hartzen denaren menpeko ez da:

$$\Gamma_\pi = \vec{\Gamma}_o \cdot \vec{u} = \left(\vec{\Gamma}_{o_1} + M \cdot \vec{OO}_1 \right) \cdot \vec{u} = \vec{\Gamma}_{o_1} \cdot \vec{u}$$

2. Plano batekiko momentu estatikoa, lortuko da batuz sistemako partikula bakoitzeko masa bider partikulatik planorainoko “distantzia” (zeinu positiboa hartuz bektore karakteristikoak adierazitako aldean badago eta negatiboa bestelakoan).

$$\Gamma_\pi = \left(\sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{OA}_i \right) \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^N \left(m_i \cdot \vec{OA}_i \cdot \vec{u} \right) = \sum_{i=1}^N (m_i \cdot d_i)$$



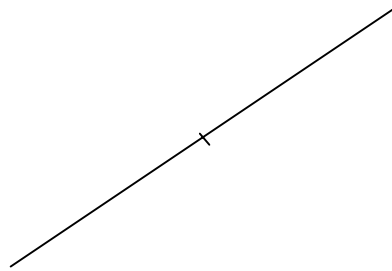
11.5. irudia. Plano batekiko momentu estatikoaren kalkulua.

3. Sistema baten grabitate zentroaren koordinatuak ematen dituen adierazpenen zenbatzaileak, plano koordinatuekiko momentu estatikoak dira.

11.2.2 Masa-sistema partikularrak.

Simetria-zentroa duten sistemak.

Sistema material batek, O simetria-puntua du baldin eta A_i puntuan kokatutako m_i masa bakoitzerako existituko bada beste masa bat m'_i , A'_i puntuan egongo dena eta beteko duena $m_i = m'_i$ eta $\vec{OA}_i = -\vec{OA}'_i$.



11.6 irudia: Simetria zentroa duen sistema materiala.

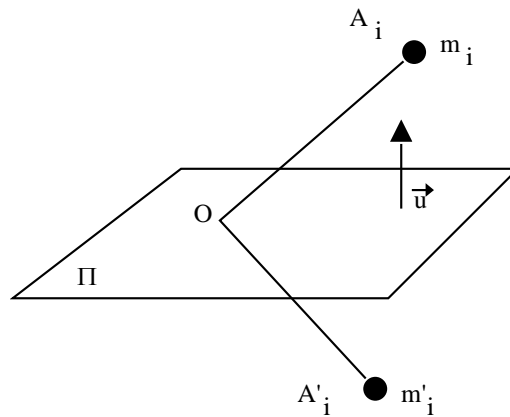
O puntuarekiko momentu estatikoa kalkulatu, lortuko da

$$\vec{\Gamma}_o = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{OA}_i = \sum_{i=1}^{N/2} \left(m_i \cdot \vec{OA}_i + m'_i \cdot \vec{OA}'_i \right) = \vec{0}$$

Beraz, O puntua izango da sistemaren grabitate-zentroa.

Simetria-planoa duen sistema.

Esango da sistema material batek π simetria plano duela baldin eta, A_i puntuan kokatutako m_i masa bakoitzerako existituko bada beste masa bat m'_i , A'_i puntuan egongo dena eta beteko duena $m_i = m'_i$ eta $\vec{OA}_i \cdot \vec{u} = -\vec{OA}'_i \cdot \vec{u}$, izanik O planoko edozein puntu, \vec{u} planoko bektore unitario karakteristikoa eta $A_i A'_i \parallel \vec{u}$



11.7 irudia: Simetria-planoa duen sistema materiala.

Γ_π kalkulatu:

$$\Gamma_\pi = \sum_{i=1}^{N/2} \left(\vec{OA}_i \cdot m_i + \vec{OA}'_i \cdot m'_i \right) \cdot \vec{u} = 0$$

hau da

$$\vec{\Gamma}_o \cdot \vec{u} = \left(\vec{\Gamma}_G + \mathbf{M} \cdot \vec{OG} \right) \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{OG} \cdot \vec{u} = 0$$

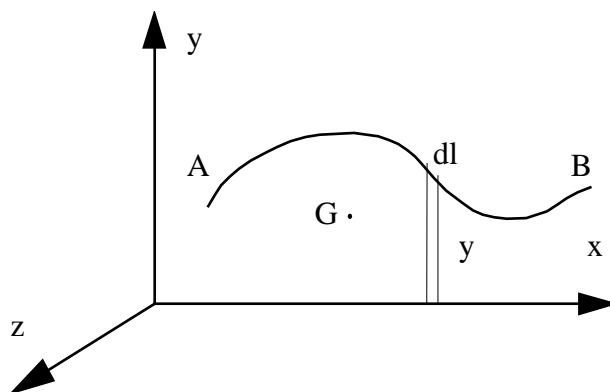
O planoko edozein puntu izan daitekeenez, \vec{OG} bektorea elkarzuta zaio \vec{u} bektoreari, hau da G planoan egongo da.

11.3 PAPPUS – GULDIN-EN TEOREMAK.

Kalkulu infinitesimala garatu aurretik, Alexandriako Pappus (380 C.a.) geometra grekoak eta Paul Guldin (1577-1643) matematikari suitzarrak enuntziatutako teoremen bidez gorputz lauen grabitate zentroak kalkula daitezke.

11.3.1 Lehenengo teorema.

Kurba lau batek plano berean dagoen eta ebakitzen ez duen ardatz batekiko biratzean sortzen duen gainazalaren azalera, kurbaren luzera eta grabitate zentroak, biratzean deskribatuko duen zirkunferentziaren luzeraren biderkaketaren berdina da.



11.8 irudia: Sistema material dimentsiobakarraren grabitate zentroa.

Kurba baten grabitate zentroa, sistema material homogeneoa izanik, hurrengo

adierazpenak emango luke: $\vec{OG} = \frac{\int \vec{r} \cdot dl}{L}$.

Frogapena:

Emanik xy planoan kokatutako, L luze den kurba. Izanik biraketa ardatza x ardatza, eta kurbako dl elementu diferentziala hartuz, biratzerakoan sortutako azalera diferentziala izango da:

$$dA = 2\pi y dl$$

Kurba guztirako integratuz:

$$A = \int_A^B 2\pi y dl = 2\pi \int_A^B y dl = 2\pi L y_G.$$

Aplikazioa: zirkunferentzia erdi baten grabitate zentroaren kalkulua:

$$4\pi R^2 = 2\pi y_G \cdot \pi R \Rightarrow y_G = \frac{2R}{\pi}$$

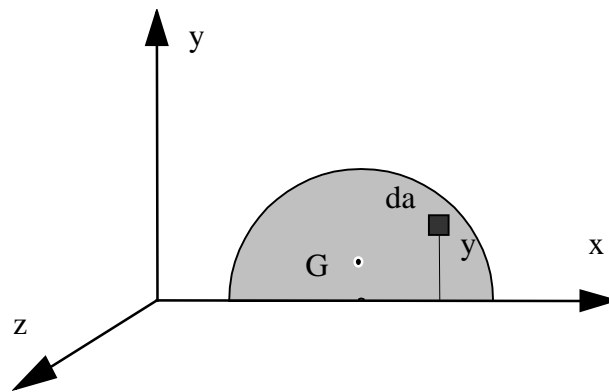
11.3.2 Bigarrenengo teorema.

Gainazal lau batek, plano berdinean eta ebakitzen ez duen ardatz batekiko biratzean sortutako gorputzaren bolumena, gainazalaren azalera eta grabitate zentroak deskribatuko duen zirkunferentziaren luzeraren biderkaketaren berdina da. Demostrazioa lehenengo teoremakoaren berdintsua da.

$$dV = 2\pi y da$$

$$V = \int 2\pi y da = 2\pi \int y da = 2\pi A y_G$$

Aplikazioa: zirkulu erdiaren grabitate zentroaren kalkulua.



11.9 irudia: Zirkulu erdirako aplikazioa.

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2\pi y_G \cdot \frac{\pi R^2}{2} \Rightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

11.4 INERTZIA MOMENTUAK

Newton-en puntuaren dinamikaren teoria, Leonhard Euler matematikari eta fisikari suitzarrak (1707-1783) zabaldu zuen solido zurrunez osatutako sistemetara. Euler izan zen lehenengoa, “inertzi momentua” terminoa erabili zuena, bere ekuazioetan sarritan azaltzen ziren adierazpenei deitzeko. Baita ere, garatu zuen inertzi momentuetarako ardatz paraleloen teorema (Steiner-en teorema moduan ezagunagoa dena).

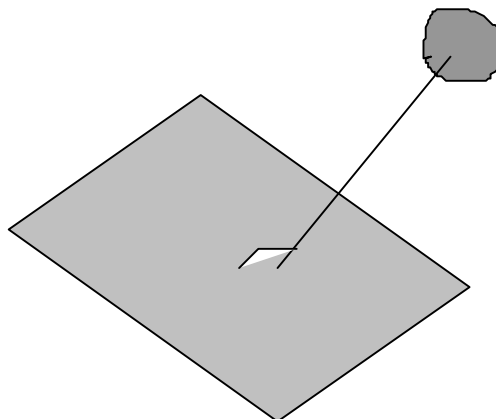
Jarraian definituko dira edozein formako sistema material baten inertzi momentuak.

Bira N , m_i masak osatutako sistema materiala, espazioko A_i puntuetan kokatuak. Sistema honetarako hurrengo kontzeptuak defini daitezke.

11.4.1 Π planoarekiko inertzi momentua.

Sistema materialeko masa bakoitza eta partikulatik π planorainoko \mathbf{d}_i distantziaren karratuaren arteko biderkaketen batura da.

Sistema materiala, diskretua izan beharrea, masa-sistema jarraia bada, masak magnitude diferentzialak izango lirateke \mathbf{dm} . Dentsitatearen menpean idatziz beteko da $\mathbf{dm} = \rho \cdot \mathbf{dv}$ eta batukaria integralean bilakatuko da.



11.10 irudia: Sistema material baten inertzi momentua plano batekiko.

$$I_{\pi} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2$$

$$I_{\pi} = \int d^2 dm = \rho \int d^2 dv$$

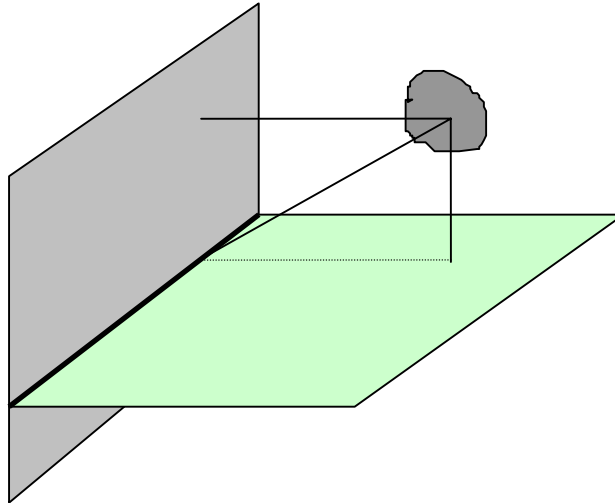
11.4.2 e zuzenarekiko inertzia momentua.

Sistema materialeko masa bakoitza eta partikulatik e zuzeneraionoko d_i distantziaren karratuaren arteko biderkaketen batura da. Sistema material jarraia bada, aurreko apartatuko arrazonamendua aplikatuko da.

$$I_e = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2$$

$$I_e = \int d^2 dm = \rho \int d^2 dv$$

Pitagoras-en teroema erabiliz, demostratuko da e zuzenarekiko inertzia momentua, zuzen horretan ebakitzen diren eta elkarzutak diren π eta λ planoen inertzia momentuen batura dela.



11.11 irudia: Sistema material baten zuzen batekiko inertzia momentua.

$$I_e = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (l_i^2 + p_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot l_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i \cdot p_i^2 = I_\lambda + I_\pi$$

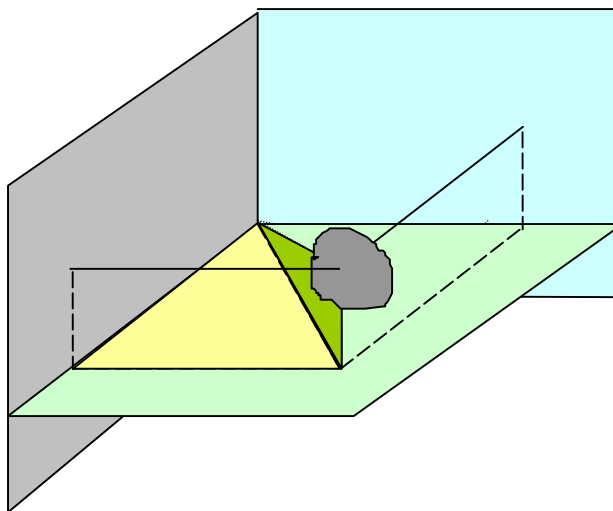
11.4.3 O puntuarekiko inertzi momentua.

Sistema materialeko masa bakoitza eta partikulatik O punturainoko d_i distantziaren karratuaren arteko biderkaketen batura da.

$$I_o = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2$$

$$I_o = \int d^2 dm = \rho \int d^2 dv$$

Aurreko apartatuen egindako moduan, O puntuarekiko inertzi momentua, puntu horretan ebakiko diren hiru plano elkarzuten inertzi momentuen batura izango da.

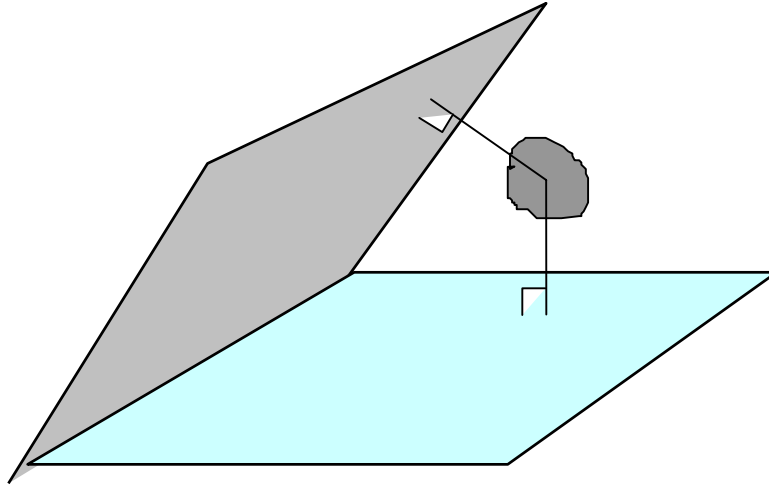


11.12 irudia: Sistema material baten puntu batekiko inertzi momentua.

$$I_o = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (p_i^2 + l_i^2 + b_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot p_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i \cdot l_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i \cdot b_i^2 = I_\pi + I_\lambda + I_\beta$$

11.4.4 Bi planorekiko inertzi biderkadura edo momentu zentrifugoa.

Sistema materialeko masa bakoitzaren eta plano bakoitzerako distantzien arteko biderkaduren batura da.

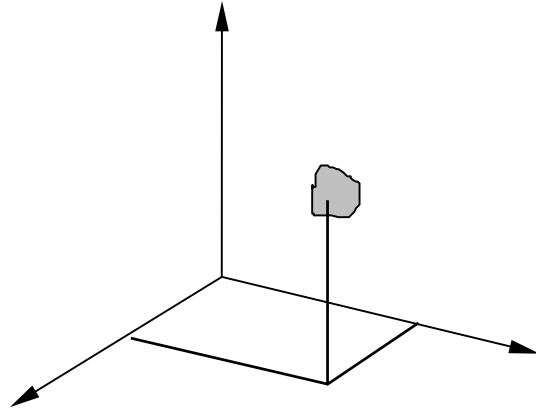


11.13 irudia: Sistema material baten bi planorekiko inertzi biderkadura.

$$I_{\pi\lambda} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i \cdot l_i$$

$$I_{\pi\lambda} = \int d l d m = \rho \int d l d v$$

Mekanikan, ohizkoa da erreferentzi sistema kartesiarretan lan egitea. Jarraian, lehenago definitu diren magnitudeak aplikatuko dira erreferentzi sistema baten plano eta ardatzekiko.



Plano koordenatuekiko inertzia momentuak:

$$I_{XOY} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i^2 = \rho \int z^2 dv$$

$$I_{XOZ} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i^2 = \rho \int y^2 dv$$

$$I_{YOZ} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i^2 = \rho \int x^2 dv$$

Ardatz koordenatuekiko inertzia momentuak:

$$I_X = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) = \rho \int (y^2 + z^2) dv$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) = \rho \int (x^2 + z^2) dv$$

$$I_Z = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = \rho \int (x^2 + y^2) dv$$

Koordenatu-jatorriarekiko inertzia momentuak:

$$I_O = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \rho \int (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

Inertzia biderkadurak:

$$C_X = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i z_i) = \rho \int (yz) dv$$

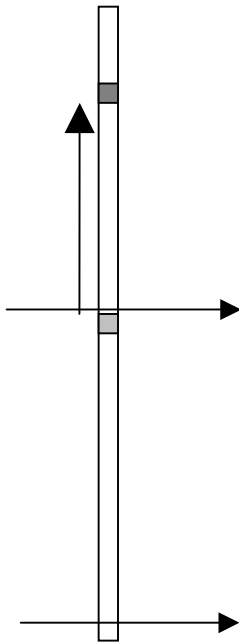
$$C_Y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i z_i) = \rho \int (xz) dv$$

$$C_Z = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i y_i) = \rho \int (xy) dv$$

11.5 KASU BEREZIAK

Adibide moduan, jarraian ohizko sistema materialen inertzia momentuak azalduko dira.

11.5.1 M masako eta L luze den barra.

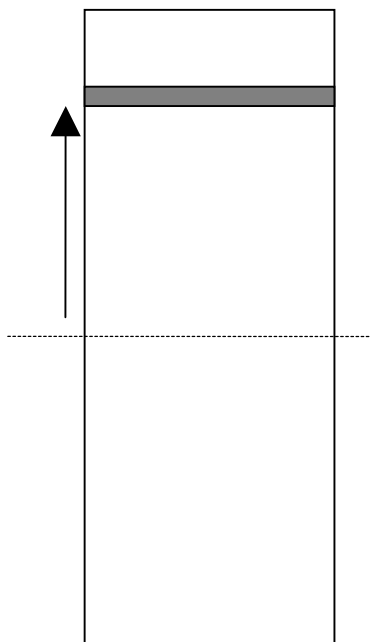


$$I_G = I_y = I_{xy} = \int z^2 dm = \rho \int_{-L/2}^{L/2} z^2 dz = \frac{ML^2}{12}$$

$$\rho = \frac{M}{L}$$

$$I_O = I_{y'} = I_{x'y'} = M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 + I_G = \frac{ML^2}{3}$$

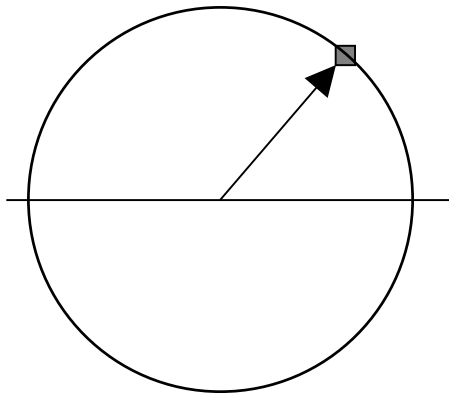
11.5.2 M masako eta b luzerako laukizuzena.



$$I_y = I_{xy} = \int z^2 dm = \rho \int_{-b/2}^{b/2} z^2 \cdot a \cdot dz = \frac{Mb^2}{12}$$

$$\rho = \frac{M}{a \cdot b}$$

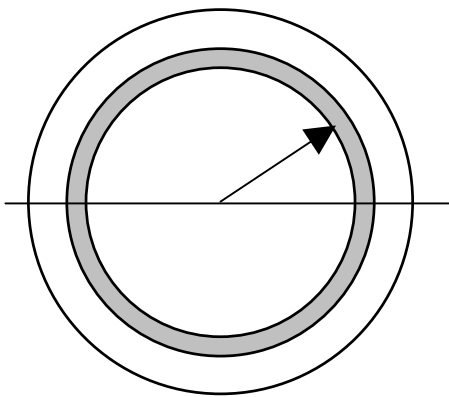
$$I_{y'} = I_{x'y'} = M \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + I_y = \frac{Mb^2}{3}$$

11.5.3 M masako eta R erradioko aroa.

$$I_O = \int R^2 dm = MR^2$$

$$\rho = \frac{M}{2\pi R}$$

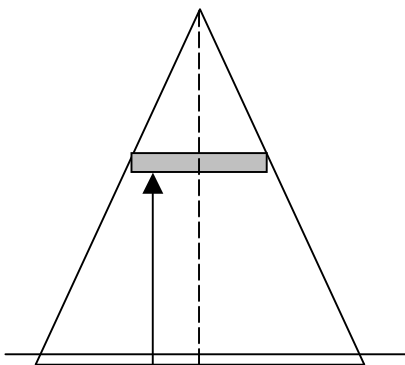
$$I_y = I_{xy} = \frac{MR^2}{2}$$

11.5.4 M masako eta R erradioko zirkulua.

$$I_O = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr = \frac{MR^2}{2}$$

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$I_y = I_{xy} = \frac{MR^2}{4}$$

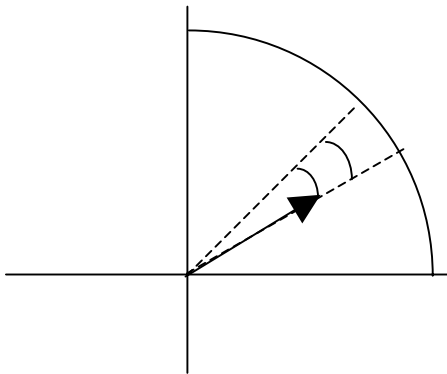
11.5.5 M masako eta H altuerako triangelua.

$$I_y = I_{xy} = \int z^2 dm = \rho \int_0^H z^2 \cdot b \cdot dz = \frac{MH^2}{6}$$

$$\rho = \frac{2M}{B \cdot H}$$

$$b = \frac{B \cdot (H - z)}{H}$$

11.5.6 M masako eta R erradioko zirkulu laurdena.



$$I_o = \int r^2 dm = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \rho r dr d\theta = \frac{MR^2}{2}$$

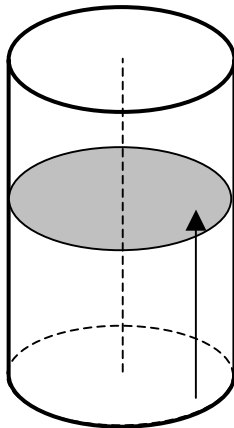
$$\rho = \frac{4M}{\pi R^2}$$

$$I_y = I_{xy} = \frac{MR^2}{4}$$

$$C_x = \int r^2 dm = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \rho r dr d\theta = \frac{MR^2}{2\pi}$$

$$\rho = \frac{4M}{\pi R^2}$$

11.5.7 M masako, R erradioko eta H altuerako zilindroa.



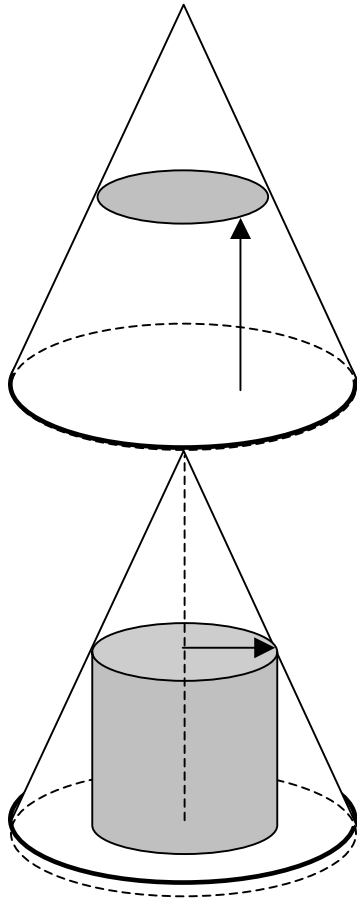
$$I_{xy} = \int z^2 dm = \rho \int_0^H z^2 \cdot A \cdot dz = \frac{MH^2}{3}$$

$$\rho = \frac{M}{A \cdot H}$$

$$I_z = \frac{MR^2}{2}$$

Oinarriko planoarekiko inertzi momentua, bere formaren menpeko ez da eta ondorioz edozein prisma zuzenen inertzi momentua zilindroarenaren berdina izango da.

11.5.8 M masako, R erradioko eta H altuerako konoa.



$$I_{xy} = \int z^2 dm = \rho \int_0^H z^2 \cdot \pi \left(\frac{R \cdot (H - z)}{H} \right)^2 \cdot dz = \frac{MH^2}{10}$$

$$\rho = \frac{3M}{\pi R^2 \cdot H}$$

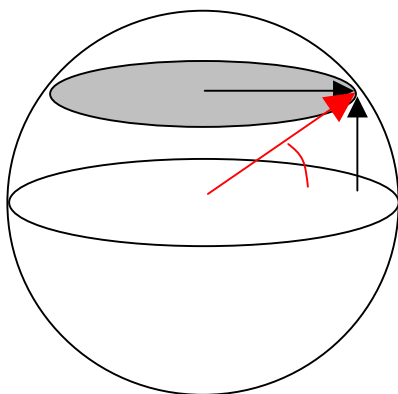
$$r = \frac{R \cdot (H - z)}{H}$$

$$I_e = \int r^2 dm = \rho \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \cdot z \cdot dr = \frac{3MR^2}{10}$$

$$\rho = \frac{3M}{\pi R^2 \cdot H}$$

$$z = \frac{H \cdot (R - r)}{R}$$

11.5.9 R erradioko eta M masako esfera.



$$I_{\pi} = \int z^2 dm = \rho \int_0^H (R \sin \theta)^2 \cdot \pi (R \cos \theta)^2 \cdot dz = \frac{MR^2}{5}$$

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$r = R \cos \theta$$

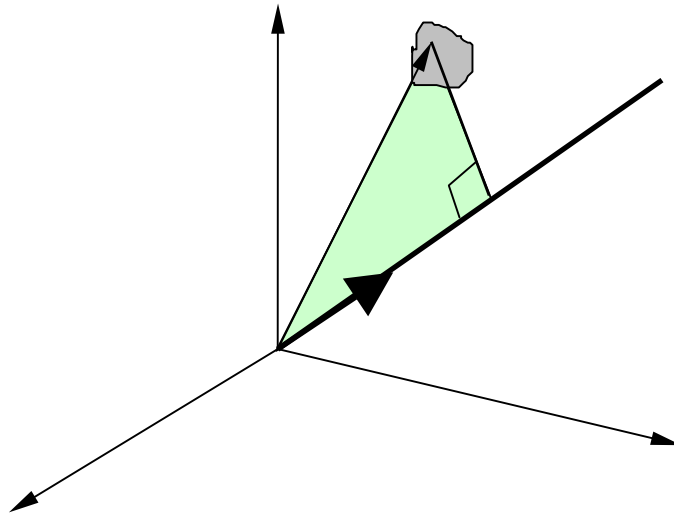
$$z = R \sin \theta$$

$$dz = R \cos \theta d\theta$$

12 MASEN GEOMETRIA II

12.1 INERTZI TENTSORE AXIALA

Demagun e zuzena, O puntutik pasatzen dena. Zuzenaren norabidea, \vec{n} bektore karakteristikoaren bidez zehazten da. Sistema material baten inertzi momentua e zuzenarekiko kalkulatu nahi da.



12.1 irudia: Sistema materialaren inertzi momentua e zuzenarekiko.

Sistema materialaren inertzi momentua e zuzenarekiko

$$I_e = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2$$

adierazpenak ematen du. d_i masa partikula bakoitza eta zuzenaren arteko distantzia da. Partikularen posizio-bektoreak, zuzenak eta distantziak osatzen duten triangelu zuzenenean beteko da:

$$d_i^2 = \left| \vec{r}_i \right|^2 - \left(\vec{n} \cdot \vec{r}_i \right)^2$$

Adieraziz

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} \\ \vec{r}_i &= x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \end{aligned}$$

eta ordezkatur inertzi momentuaren adierazpenean:

$$\begin{aligned}
I_e &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2 \right] = \\
&= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left[(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \right. \\
&\quad \left. - (\alpha^2 x_i^2 + \beta^2 y_i^2 + \gamma^2 z_i^2 + 2\alpha\beta x_i y_i + 2\alpha\gamma x_i z_i + 2\beta\gamma z_i y_i) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left[(\beta^2 + \gamma^2)x_i^2 + (\alpha^2 + \gamma^2)y_i^2 + (\beta^2 + \alpha^2)z_i^2 - (2\alpha\beta x_i y_i + 2\alpha\gamma x_i z_i + 2\beta\gamma z_i y_i) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left[\alpha^2(y_i^2 + z_i^2) + \beta^2(x_i^2 + z_i^2) + \gamma^2(x_i^2 + y_i^2) - (2\alpha\beta(x_i y_i) + 2\alpha\gamma(x_i z_i) + 2\beta\gamma(z_i y_i)) \right]
\end{aligned}$$

Aurreko ekuazioetan, modu egokian eragiketak eginaz, ezagunak diren adierazpenak lortu dira; sistema kartesiar batekiko inertzi momentu eta inertzi biderkadurak lortu dira.

Ondorioz

$$I_e = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\alpha\beta C_z - 2\alpha\gamma C_y - 2\beta\gamma C_x$$

Adierazpen hau matrizialki idatziz

$$I_e = \left\{ \begin{matrix} \vec{n} \\ n \end{matrix} \right\}^T \left[I_O \right] \left\{ \begin{matrix} \vec{n} \\ n \end{matrix} \right\} = \left\{ \alpha \quad \beta \quad \gamma \right\} \begin{bmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\}$$

Horrela, O puntutik pasako litzatekeen edozein zuzenekiko sistema materialaren inertzi momentua kalkula daiteke, zuzenaren kosinu direktoreak ezagunak badira.

Triedroko ardatzekiko inertzi momentuekin eta koordenatu planoekiko inertzi biderkadurekin lortutako matrize karratu simetrikoari, Inertzi Tentsore Axiala deituko zaio (hobeto esanda, tentsorearen adierazpena erreferentzi sistema horretan). Tentsore hau espazioko puntu bakoitzean kalkula daitekeen magnitude bat da eta bere adierazpen matriziala, erreferentzi sistema definitu ondoren lortuko da.

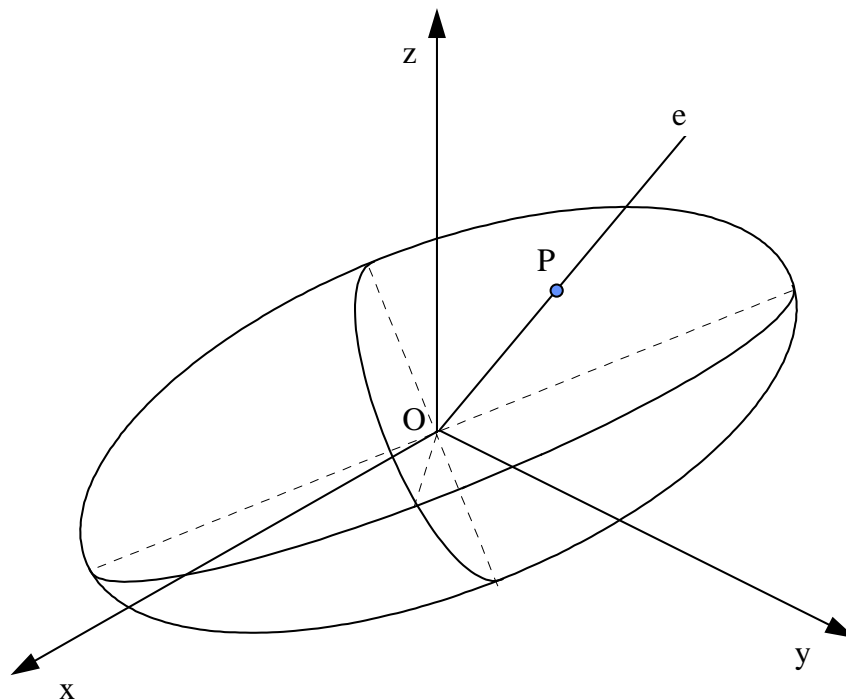
12.2 INERTZI ELIPSOIDEA

O puntutik pasako diren zuzen desberdinekiko inertzia momentuen balioak, inertzia elipsoidearen bidez irudika daitezke.

Elipsoidearen gainazaleko puntuetatik O punturainoko distantziak $|\vec{OP}| = \frac{1}{\sqrt{I_e}}$ balioko

du, non I_e izango den O puntutik pasako litzatekeen eta \vec{OP} bektorearen norabidea duen e zuzenarekiko inertzia momentua. Hau da:

$$\vec{OP} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_e}}$$



12.2 irudia: Sistema material baten inertzia elipsoidea.

P puntuaren koordenatuek beteko dute:

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{I_e}}; y = \frac{\beta}{\sqrt{I_e}}; z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_e}}$$

non α, β, γ , \mathbf{e} zuzenaren kosinu direktoreak diren eta

$$\alpha = x\sqrt{I_e}$$

$$\beta = y\sqrt{I_e}$$

$$\gamma = z\sqrt{I_e}$$

beteko dute. Zuzenarekiko inerti momentuaren adierazpenean ordezkatur,

$$I_e = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\alpha\beta C_z - 2\alpha\gamma C_y - 2\beta\gamma C_x$$

lortuko da. Ondorioz:

$$I_e = I_e (x^2 I_x + y^2 I_y + z^2 I_z - 2xy C_z - 2xz C_y - 2yz C_x)$$

$$1 = (x^2 I_x + y^2 I_y + z^2 I_z - 2xy C_z - 2xz C_y - 2yz C_x)$$

Inerti elipsoidea, kontsideratuko den O puntuaren menpeko da. Bere adierazpen matematikoa berriz, hartuko diren ardatzen menpeko da, beti existituko delarik erreferentzi sistema bat, non elipsoideak bere forma kanonikoa hartuko duen. Hau da:

$$1 = (x^2 I_x + y^2 I_y + z^2 I_z)$$

Erreferentzi sistemako ardatzek, elipsoidearen ardatz edo diametro nagusiekin bat egingo dute kasu honetan. Ardatz hauei deitu zaie O puntuko inerti ardatz nagusiak. Ardatz nagusiekiko inerti momentuei, deituko zaie inerti momentu nagusiak eta ardatz hauei elkartutako inerti biderkadurak nuluak izango dira.

G grabitate-zentroko inerti elipsoidea, inerti elipsoide zentrala deituko da.

12.3 INERTZI MOMENTU NAGUSIAK

O puntuko inertzi elipsoide axialaren ekuazioa

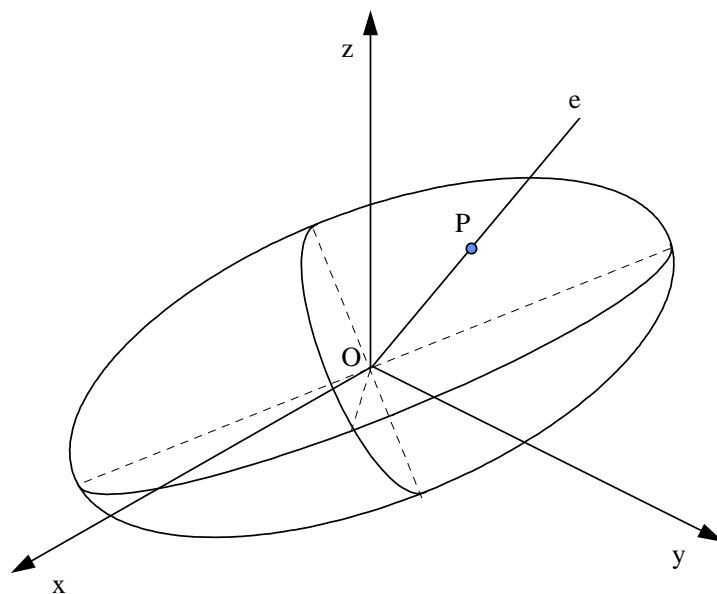
$$1 = \{x\}^T [I_O] \{x\}$$

adierazpenak ematen du.

Ardatzak aldatzerakoan, tentsore axialaren adierazpen matriziala aldatu egiten da eta ondorioz, baita elipsoidearen ekuazioa ere. Erreferentzi sistemako ardatzak, elipsoidearen ardatzekin bat datozenean, elipsoidearen ekuazioa

$$1 = I_x \cdot x^2 + I_y \cdot y^2 + I_z \cdot z^2$$

izango da. Ardatz horiei, O puntuko inertzi ardatz nagusiak deituko zaie eta definitzen dituzten planoei inertzi plano nagusiak. O puntua grabitate zentroa balitz, hau da $O \equiv G$, orduan ardatz nagusiak, ardatz nagusi zentralak izango dira eta planoak, plano nagusi zentralak. Elipsoidearen ekuaziotik ikusten den moduan, inertzi tentsore axialaren adierazpena ardatz nagusietan matrize diagonal bat izango da.



12.3 irudia: Inertzi elipsoidea eta norabide nagusiak.

Puntu batetan, hiru momentu nagusiak desberdinak badira, orduan elipsoidea eskalenoa izango da, bi momentu nagusi berdina badira, ordea, elipsoidea, biraketako elipsoidea izango da eta azkenik, hiru momentu nagusiak berdina badira, orduan inertzia elipsoidea esfera bat izango da.

Norabide nagusiak lortzeko, autobalio eta autobektoreen problema bat ebatzi behar da. Hala ere, sistema material batek simetri planorik badu, planoko puntuekiko inertzia elipsoideko inertzia plano nagusiak dira eta norabide nagusiak lortzen lagunduko dute.

Materialen erresistentzian, sistema material baten inertzia kalkulatu beharrenean, azalera baten inertzia momentua kalkulatu ohi da (dentsitateari bat balioa emanik egin daiteke). Askotan, irudi lauetako norabide nagusiak kalkulatu nahi izango da. Kasu hauetan, autobektore eta autobalioetako problema ebatzi beharrik ez dago. Begibistakoa da gorputz lauetan, gorputzari elkartuta zaion norabidea, gorputza dagoen planoko puntu desberdinetako inertzia norabide nagusia dela, beste bi norabide nagusiak planoan egongo dira ondorioz eta kalkulatzekoan planoan dagoen ardatz batekiko inertzia momentua, idatziko da parametro baten menpean.

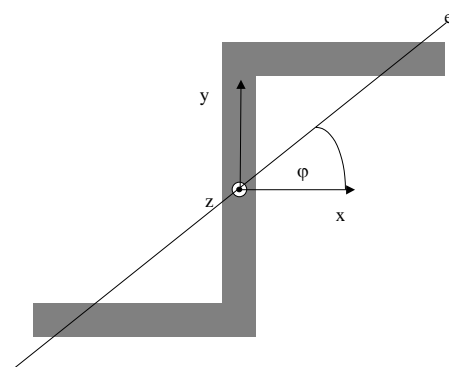
Edozein e zuzenekiko inertzia momentuaren adierazpena,

$$I_e = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\alpha\beta C_z - 2\alpha\gamma C_y - 2\beta\gamma C_x$$

xoy planoan dagoen zuzen batekiko partikularizatuz

$$I_e = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y - 2\alpha\beta C_z$$

adierazpena lortzen da. Aurkitu nahi diren xoy planoko puntu batetako eta plano horretan dauden inertzia momentu nagusiak, inertzia momentuaren balio maximo eta minimoa dira (puntutik pasako diren eta planoan dauden zuzenekiko).



12.4 irudia: Sekzio lau baten inertzia momentu nagusia.

Beraz, x ardatzarekin φ angeluko makurdura duen ardatzaren kosinu direktoreak idatziz

$$\alpha = \cos \varphi$$

$$\beta = \sin \varphi$$

eta aurreko adierazpenean ordezkatzuz, maximo eta minimoko baldintza ezarriz

$$I_e = \cos^2 \varphi I_x + \sin^2 \varphi I_y - 2 \sin \varphi \cos \varphi C_z$$

$$\frac{dI_e}{d\varphi} = 2 \cos \varphi (-\sin \varphi) I_x + 2 \sin \varphi \cos \varphi I_y - 2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) C_z = 0$$

$$(I_y - I_x) \sin 2\varphi - 2(\cos 2\varphi) C_z = 0$$

lortuko dira xoy planoan dauden bi norabide nagusien makurduraren φ angelua.

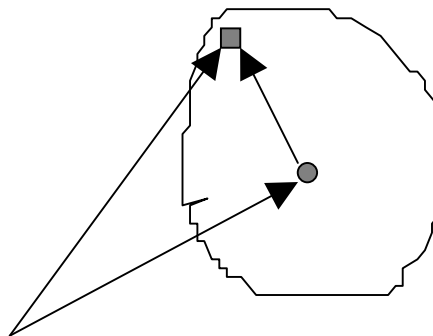
$$\tan 2\varphi = \frac{2C_z}{(I_y - I_x)}$$

12.4 STEINER-EN TEOREMAK

Steiner-en lau teoremen bidez, puntu, zuzen edo plano batekiko inertzi momentua eta bi planorekiko inertzi biderkadura eta grabitate zentroarekiko edo zentrotik pasako den zuzen edo planoarekiko inertzi momentuak eta inertzi biderkadurak erlazionatuko dira hurrenez hurren.

12.4.1 Steiner-en lehenengo teorema.

Edozein punturekiko inertzi momentua, grabitate zentroarekiko inertzi momentuaren eta sistemako masa totala eta bi puntuen arteko distantziaren karratuaren biderkaketaren baturaren berdina da.



12.5 irudia: Bi punturekiko inertzi momentuen arteko erlazioa.

$$\begin{aligned}
 I_o &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{d}_i \cdot \vec{d}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left(\vec{OG} + \vec{d}_i' \right) \cdot \left(\vec{OG} + \vec{d}_i' \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left| \vec{OG} \right|^2 + \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left| \vec{d}_i' \right|^2 + 2 \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{d}_i' \cdot \vec{OG} = \\
 &= M \cdot \left| \vec{OG} \right|^2 + I_G + 2M \cdot \vec{OG} \cdot \left(\vec{GG} \right)
 \end{aligned}$$

Hau da:

$$I_o = M \cdot \left| \vec{OG} \right|^2 + I_G$$

12.4.2 Steiner-en bigarren teorema.

Sistema material baten inerti momentua edozein planorekiko, grabitate zentrotik pasako den plano paraleloarekiko inerti momentuaren eta sistemaren masa totala eta bi planoen arteko distantziaren karratuaren biderkaketaren batura da.

$$I_{\pi} = M \cdot d^2 + I_{\pi G}$$

12.4.3 Steiner-en hirugarren teorema.

Sistema material baten inerti momentua edozein zuzenekiko, grabitate zentrotik pasako den zuzen paraleloarekiko inerti momentuaren eta sistemaren masa totala eta bi zuzenen arteko distantziaren karratuaren biderkaketaren batura da.

$$I_e = M \cdot d^2 + I_{eG}$$

12.4.4 Steiner-en laugarren teorema.

Bi planorekiko inerti biderkadura, grabitate zentrotik pasako diren bi planorekiko inerti biderkaduraren eta sistemako masa totalaren eta plano paraleloen arteko zeinua ezarritako bi distantzien arteko biderkaduraren batura da.

$$I_{\pi\lambda} = M \cdot d_{\pi} \cdot d_{\lambda} + I_{\pi\lambda G}$$

13 MEKANIKA ANALITIKOAREN OINARRIAK

13.1 LOTURA MEKANIKOAREN KONTZEPTUA

Sistema mekaniko baten mugimendu aukerak murrizten dituzten baldintza geometrikoak lotura deituko zaie. Loturak, ekuazio algebraikoen bidez adieraz daitezke, ekuazio hauei lotura-ekuazioak deituko zaie.

Puntu material bat, zentroa koordinatu-jatorria duen gainazal esferiko baten gainean ibili behar badu, puntuen koordinatu kartesiarrek hurrengo erlazioa bete beharko dute:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Lotura bete arazteko, beharrezkoa da sistemaren gainean indarren bat egitea, indar honi lotura-indarra deituko zaio eta orokorrago loturaren akzio mekanikoa.

13.2 LOTUREN SAILKAPENA

Edozein lotura-mekaniko ekuazio diferentzial edo inekuazio bidez adieraz daiteke. Honez gain, murriztapen geometrikoa bete dadin, beti existituko da lotura-indarra. Honengatik, lotura mekanikoek bi sailkapen onartzen dituzte. Bata murriztapen geometrikoaren adierazpen matematikoaren arabera eta bestea lotura indarraren izaeraren menpekoa.

13.2.1 Loturaren adierazpen matematikoa.

Orokorrean, N partikulako sistema batek, k lotura baditu, hauek, k ekuazio edo inekuazioen bidez adieraziko dira:

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{ji} dx_i + a_{j0} dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Lotura azaltzen duen adierazpen matematikoa, ekuazio diferentzial integragarria bada, lotura **holonomoa** da. Ekuazioa integratzerakoan,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = 0$$

moduko adierazpena lortzen bada, non denbora ez den esplizituki azaltzen, lotura, holonomoaz gain, **eskleronomoa** dela esango da.

Integrazio ondoren lortzen den ekuazioa, denboraren funtzio esplizitua bada,

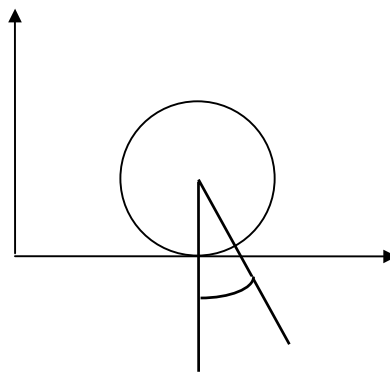
$$f(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0$$

lotura **holonomo** eta **reonomoa** dela esango da.

Alderantziz, lotura adierazten duen adierazpen matematiko integraezina den ekuazio diferentziala bada edo inekuazioa, orduan lotura **ez holonomoa** dela esango da.

3.1. adibidea. Lotura holonomoak.

Zoru horizontal finko baten gainean labaindu gabe errodatzen duen disko bat emanik eta mugimendu irudiko planoan gertatzen bada, deituz x_c eta y_c , diskoaren zentroaren koordinatuei, beteko da:



13.1 irudia.

$$y_c - R = 0$$

Hau, lotura holonomo eta eskleronomoa baten adierazpen matematikoa da, lotura honek disko eta lurraren arteko ukipen-baldintza zehazten du.

Errodaturako baldintza, berriz:

$$\dot{x}_C = -\frac{d\varphi}{dt} R = -\omega R$$

adierazpenak emango du. Diferentzial moduan idatziz:

$$dx_C + R d\varphi = 0$$

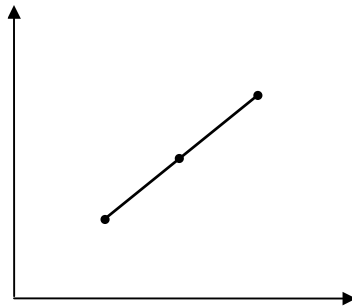
eta integratuz:

$$x_C + R\varphi + \text{cte} = 0$$

Lotura beste holonomo-eskleronomo baten adierazpena lortzen da.

3.2 adibidea. Lotura ez holonomoak.

Masa berdineko bi puntu material, plano horizontal batetan kokatutako L luze den masa gabeko barra batez lotuta daude. Sistema mugitzen da bere masa zentroak barraren norabidea izango duelarik. (Ikus 13.2 irudia).



13.2 irudia

masa-zentroaren koordinatuei x_G eta y_G deituz, beteko da:

$$\left. \begin{aligned} x_G &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_G &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}_G &= \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \\ \dot{y}_G &= \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2} \end{aligned} \right\}$$

eta kontutan izanik masa zentroak bete behar duen baldintza zinematikoa:

$$\frac{\dot{x}_G}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_G}{y_1 - y_2}$$

hurrengo adierazpena lortuko da:

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2}$$

eta integraezina den ekuazio diferentziala lortuz:

$$\frac{dx_1 + dx_2}{x_1 - x_2} = \frac{dy_1 + dy_2}{y_1 - y_2}$$

Ondorioz lotura ez holonomoa izango da adierazitakoa.

Sistema honek, gainera lotura holonomo eskleronomo bat izango du, puntu biak L luze den barra batez lotuta daudela:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = L^2$$

13.2.2 Lotura indarraren izaera.

Lotura indarraren izaeraren arabera, hurrengo sailkapena egin daiteke.

- **Marruskaduragabea:** ukipen gainazalari elkartuta zaionean lotura-indarra.
- **Marruskadura dutenak:** marruskadura konopean daudenean lotura-indarrak.
- **Bilateralak:** norazko aldaketa onartzen badu.
- **Unilateralak:** norazko bakarra dutenean.

13.3 ASKATASUN-GRADU KONTZEPTUA

Lotura gabe mugi daitekeen partikula baten posizioa finkatzeko, beharrezkoa da bere \vec{r} posizio bektorea definitzea, beste hitz batzutan esanda, beharrezkoa da ezagutzea bere hiru koordenatuak puntuaren posizioa finkatzeko espazioan. Puntuak hiru askatasun-gradu dituela esango da. N partikulaz osatutako sistema material baten posizioa finkatzeko, beharrezkoak izango dira N posizio bektoreak $\{ \vec{r}_i, i = 1 \dots N \}$. Beraz, N partikulaz osatutako sistema material batek $3 \cdot N$ askatasun-gradu izango ditu.

Sistema mekaniko batek loturak jasaten baditu, lotura hauek adieraziko dira sistemako koordenatuak erlazionatuz eta ondorioz lotura-ekuazio bakoitzak askatasun gradu bat galtzea dakarrelarik.

I eta J partikulaz osatutako sistema material batetan, partikulen arteko distantzia konstante mantentzen bada, lotura ekuazioa adieraziko da hurrengo moduan:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = L^2$$

non L bi partikulen arteko distantzia den. Kasu honetan, 5 koordenatu ezagutuz, seigarren lotura-ekuaziotik aterako litzateke.

Kasu orokor batetan, N partikulaz osatutako sistema batek k baldintza zinematiko independente jasan behar baditu, askatasun-gradu kopurua $n = 3N - k$ izango da.

13.4 KOORDENATU OROKORTUAK

Izan bedi x_1, x_2, \dots, x_{3N} moduan adieraziko diren 3N koordenatuko sistema bat, $f_j(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0$ ekuazio independenteen bidez adieraziko diren k lotura jasaten dituen. Lotura ekuazio hauetatik, 3N koordenatuetatik k koordenatu aska daitezke, x_1 , besteen menpean. Ondorioz, nahikoa litzateke aldiune bakoitzean ezagutzea $n = 3N - k$ koordenatu, sistemaren posizioa definitzeko. Sistemaren posizioa definitzeko beharrezkoak diren n koordenatu hauei, koordenatu orokortu deituko zaie.

Kontutan izan lotura holonomoak jasaten dituen sistema batetan, bere posizioa finkatzeko beharrezkoak diren koordenatu kopuru minimoa, askatasun-gradu kopuruaren berdina dela, lotura ez holonomoak daudenean, aldiz, koordenatu kopurua, askatasun gradu kopurua baino handiagoa litzateke.

Askotan, sistema baten mugimendua adierazteko aukeratuko diren koordenatuak, ez dira koordenatu kartesiarrak izango, sistemaren definizioa errazten dutenak baizik. Jatorrizko (x_1, x_2, \dots, x_n) koordenatu orokortuen eta (q_1, q_2, \dots, q_n) berrien arteko erlazioa, koordenatu orokortu aldaketa definituko duten n ekuazioren bidez emango da:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ q_n &= q_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Aldaketa hau zuzena izan dadin, beharrezkoa da banan banakoa izatea eta ondorioz jakobiarra zerotik desberdina izatea. Hau da:

$$\frac{D(q_1, q_2, \dots, q_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial q_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial x_1} & \frac{\partial q_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Sistema materialeko edozein punturen posizio bektorea, koordenatu orokortuen menpeko izango da, eta loturaren bat reonomoa bada, kasurik orokorrean denboraren menpeko ere izango da.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Lotura guztiak eskleronomoak badira, denbora ez da azalduko posizio bektorean modu esplizituan:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

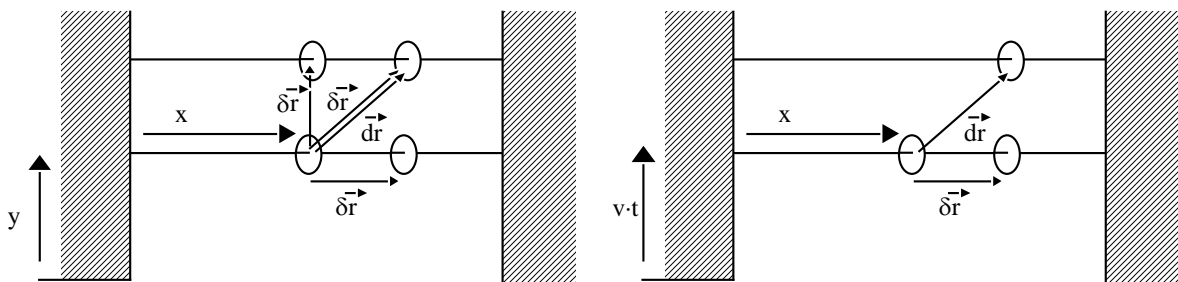
13.5 DESPLAZAMENDU BIRTUALA

Sistema material baten desplazamendu birtuala da, sistemak egin dezakeen edozein desplazamendu infinitesimal denbora aldakuntzarik gabe eta loturekin bateragarria dena. Desplazamendu birtual desberdinak koordenatu orokortuak aldatuz lortuko dira (eta aldakuntzak konbinatuz) beti denbora aldaketarik gabe. Puntu baten desplazamendu birtuala, posizio bektorearen aldakuntzarekin lortuko da $\delta\vec{r}$.

Demagun bertikalki mugitzen barra batez eta barraren gainean labaintzen duen aro batez osatutako sistema mekanikoa. Problemaen koordenatu orokortuak aroaren x eta y

koordinatu kartesiarrak izan daitezke. Kasu honetan loturak eskleronomoak dira eta desplazamendu birtualetako bata ($\delta\vec{r}$) desplazamendu errealarekin bat etorriko da ($d\vec{r}$).

Demagun, jarraian lotura berri bat ezartzen zaiola sistemari: barra bertikalki v abiadura konstantez gorantz doala. Kasu honetan, koordinatu orokortu bakarra legoke, x koordinatu kartesiarra. Denbora gehikuntza infinitesimal batetan, dt , irudian adierazitako desplazamendua egingo luke, $d\vec{r}$. Desplazamendu birtualak, $\delta\vec{r}$, ordea, ezingo du bat etorri errealarekin inoiz, birtuala horizontala bait da. Beraz loturak reonomoak direnean ($y=vt$), desplazamendu birtuala ez da inoiz errealarekin bat etorriko.



13.3 irudia. Desplazamendu erreala eta birtuala.

13.6 AKTUATZEN DUTEN INDARREN LANA

Biz 1 konfiguraziotik 2 konfiguraziora mugitzen den sistema mekanikoa. Sistemaren gainean aktuatzen duten indarrek egingo duten lana

$$W = \sum_{i=1}^N \int_1^2 \vec{F}_{aki} \cdot d\vec{r}_i$$

adierazpenak ematen du, non N sistemako partikula kopuru totala izango den. Kontutan izan behar da $\vec{F}_{aki} \cdot d\vec{r}_i$ biderkaketa eskalarra dela eta $d\vec{r}_i$, i partikularen traiektoriako arku diferentziala. Sistema materiala jarraia denean batukaria integralean bilakatuko da.

Aurreko adierazpenetik, lan elementala definituko da

$$\overline{dW} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{aki} \cdot \vec{dr}_i$$

moduan, non ezkerreko ataleko marrak adierazi nahi duen lan elementala ez dela diferentzial zehatza.

Aktuazten duten indarrak deskonposatzen badira barneko eta kanpokoetan eta hauek berriz, aplikatu eta loturakoetan, beteko da:

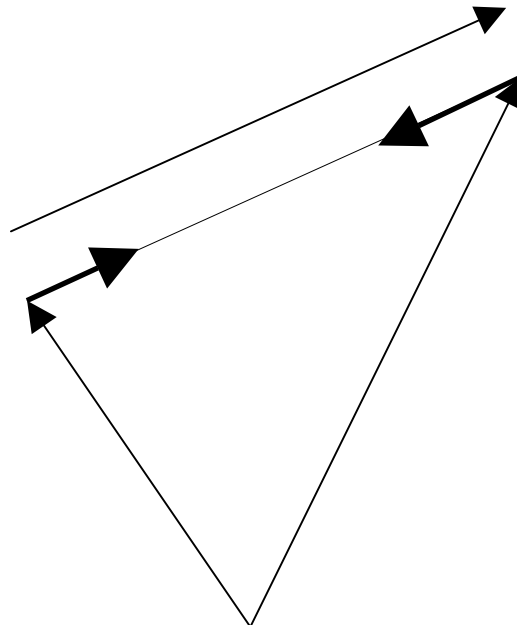
$$\overline{dW} = \overline{dW}_{apl} + \overline{dW}_{lot} + \overline{dW}_{bar}$$

13.6.1 Barneko indarren lana

Barneko indarren lana,

$$\overline{dW}_{bar} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{bari} \cdot \vec{dr}_i$$

adierazpenak ematen du eta bere kalkulua normalean zaila da.



13.4 irudia

Barneko indarrek Newton-en hirugarren legea beteko dutenez, hurrengoa idatziko da:

$$\overline{dW}_{\text{bar}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i; \forall i \neq j$$

izanik \vec{F}_{ij} i partikularen ganean, j partikulak eragiten duen indarra. Partikula bikote bakarria kontsideratuz, barneko indarren lan elementala izango da:

$$\overline{dW}_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = -\vec{F}_{ij} \cdot d\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)$$

non kontuan izan den $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ beteko dela.

Sistema materiala solido zurruna bada, $\vec{r}_j - \vec{r}_i$ modulu konstanteko bektore bat izango da, deituz bektore honi \vec{r}_{ij} , beteko da:

$$\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} = r_{ij}^2 = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad 2\vec{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0$$

Beraz, $d\vec{r}_{ij}$ elkarzuta izango zaio \vec{r}_{ij} bektoreari eta ondorioz baita \vec{F}_{ij} bektoreari ere. Beraz lan elementalaren balioa nulua izango da.

Hau partikula bikote guztiei zabalduz lortuko da solido zurruneke barneko indarrek egingo duten lana nulua dela.

13.6.2 Lotura-indarren lana.

Jarraian kontsideratuko da lotura holonomoetako indarren lana bakarrik.

Azalpena hobeto ulertzeko, lehengo suposatuko da puntu material bat mugituz dabilela uneoro gainazal baten gainetik marruskadurarik gabe. Mugimenduari ezartzen zaion murriztapen hau, lotura holonomo baten bidez adieraz daiteke.

$$f(x, y, z) = 0, \text{ adierazpenaren bidez, lotura eskleronomoa bada eta}$$

$$f(x, y, z, t) = 0, \text{ adierazpenaren bidez lotura reonomoa bada.}$$

Kasu bietan, \vec{R} lotura-indarra gainazalari elkartzuta izango zaio marruskadurarik ez dagoelako. Orduan, beteko da:

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Beraz, lotura indarrak egingo duen lan elementala, $d\vec{r}$, desplazamendu erreal eta, $\delta\vec{r}$, desplazamendu birtual batetan izango da hurrenez hurren:

$$\overline{dW} = \vec{R} \cdot d\vec{r} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right)$$

$$\overline{\delta W} = \vec{R} \cdot \delta\vec{r} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \right)$$

Lotura eskleronomoa bada, partikularen desplazamenduek bete behar dute:

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$$\delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

eta beraz, lotura indarrak egindako lan erreala eta birtuala nuluak izango dira.

Lotura reonomoa bada, aurreko adierazpenak, hurrengoetan bilakatuko dira:

$$df(x, y, z, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

$$\delta f(x, y, z, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

Eta ondorioz, lotura indarrak egingo duen lana desplazamendu errealean ez da zero izango, desplazamendu birtualean ordea nulua izaten jarraituko du.

Lotura indarrak lanik egiten ez duenean desplazamendu birtual batetan, lotura perfektua dela esango da.

Lotura indarrek egiten duten lana, baita adieraz daiteke hurrengo moduan ere:

$$\overline{dW}_{\text{lot}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{lot}i} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{lot}i} \cdot \vec{v}_i dt$$

Loturak holonomo eta eskleronomoak badira, lana nulua izan dadin hurrengoak bete beharko da:

- Batukariko gai bakoitza nulua izan dadila, ondorioz indar bakar batek ere ez du lanik egingo. Hau gertatuko da baldin:

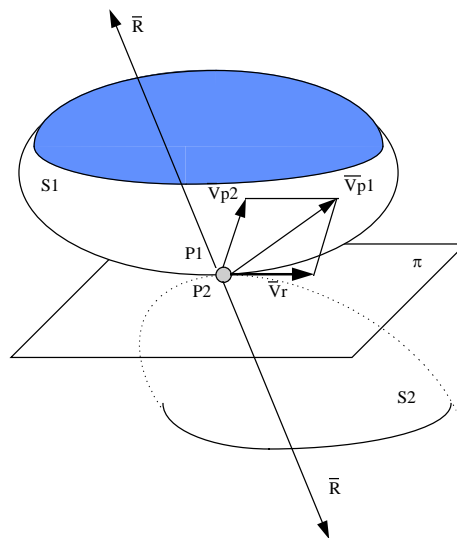
– $\vec{F}_{\text{loti}} = \vec{0}$: ez dago loturarik.

– $d\vec{r}_i = \vec{0}$: puntua finkoa da.

– \vec{F}_{loti} elkarzuta zaio $d\vec{r}_i$ bektoreari : ez dago marruskadurarik.

– $\vec{v}_i = 0$: lotura indarrak ez du lanik egingo puntu batetan aktuatzeko badu finkoa ez dena baina abiadura nulua duen aldiunean. Adibidez, elementu finko baten gainean labaindu gabe errodatzen duen diskoaren gaineko lotura indarra.

- Batukariko gaiak ez nuluak izatea baina beraien artean anulatzea.



13.5 irudia

Kontsidera dezagun uneoro ukipenean dauden bi gorputzen kasua. Ukipenean dauden P1 eta P2 puntuen gainean solido bata bestearen gainean egingo duen indarra berdina eta kontrako norazkoa izango du.

$$\overline{dW}_{\text{lot}} = \vec{R} \cdot \vec{V}_{P1} dt - \vec{R} \cdot \vec{V}_{P2} dt = \vec{R} \left(\vec{V}_{P1} - \vec{V}_{P2} \right) dt$$

non $\vec{V}_{P1} - \vec{V}_{P2}$ bi gorputzen arteko mugimendu erlatiboko eta ondorioz plano ukitzailean dagoen labainketako abiadura izango den. Beraz, kasu honetan lotura indarren lana nulua izango da marruskadurarik ez dagoenean (\vec{R} plano ukitzaileari elkarzuta), edo labainketari ez dagoenean ($\vec{V}_{P1} = \vec{V}_{P2}$).

13.6.3 Aplikatutako indarren lana.

Aplikatutako indarren lana definituko da

$$\overline{dW}_{\text{apl}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{apli}} \cdot d\vec{r}_i$$

adierazpenaren bidez.

Aplikatutako indarrak kontserbakorrak badira, hau da, existitzen bada V funtzio potentziala puntuaren posizioaren menpeko eta denboraren menpeko ez dena, beteko da:

$$\vec{F}_{\text{apli}} = -\text{grad } V_i(q_1, \dots, q_n)$$

eta ondorioz:

$$\overline{dW}_{\text{apl}} = dW_{\text{apl}} = -\sum_{i=1}^N dV_i = -dV$$

Kasu honetan, lan elementala diferentzial zehatza izango da eta sistemaren hasierako eta bukaerako posizioaren menpeko izango da soilik.

13.7 LAN BIRTUALEN PRINTZIPIOA.

Sistema mekaniko bat orekan aurkitzen bada, sistemaren gainean aktuatzen duten indarrek egingo duten lana loturekin bateragarria den desplazamendu birtual batetan nulua izango da.

$$\overline{\delta W} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ak}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Aktuatzen duten indarrak deskonposatuz aplikatu, lotura eta barnekoetan, hurrengo idatz daiteke:

$$\overline{\delta W} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ap}i} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{lot}i} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{bar}i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Sistema solido zurrunez osatuta badago, beteko da:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{bar}i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Loturak perfektuak badira:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{lot}i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Orduan, lan birtualen printzipioa honela enuntziatuko litzateke: *Lotura perfektuak jasaten dituen eta orekan dagoen sistema mekanikoaren gainean aplikatutako indarrek egingo duten lana sistemaren desplazamendu birtual batetan nulua izango da:*

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ap}i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

14 DINAMIKAKO MAGNITUDE ETA TEOREMAK

14.1 SARRERA

Hurrengo apartatueta, sistemen mugimendua definituko duten dinamikako teoremak aurkeztuko dira eta hauek planteatzerakoan definituko diren oinarrizko magnitude mekanikoak.

Dinamikaren helburua, sistema material baten mugimendua mugatzea da. Horretarako sistemaren gainean definituko diren loturak kontutan hartu beharko dira eta baita sistemaren gainean aktuatzen duten akzioak ere.

14.2 SISTEMA ZINETIKOA

Edozein sistema material emanik, sistemako puntu bakoitzean, partikularen masa bere abiadurarerik biderkatuz osatutako bektore aplikatu sistemari deituko zaio sistema zinetikoa.

Sistema zinetikoaren ordezkariari, sistemaren higidura kantitatea edo momentu lineala deituko zaio. Bere balioa honela kalkulatu da:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d \vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \cdot \vec{r}_i \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \left(m_i \cdot \vec{r}_i \right)$$

Azkeneko batukaria, sistema materialaren momentu estatikoa da erreferentzi sistemaren jatorriarekiko. Momentu estatiko hori, masa totala eta grabitate zentroaren posizio bektorearen arteko biderkaketaren berdina da.

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} \left(M \cdot \vec{r}_G \right) = M \cdot \vec{v}_G$$

Adierazpen honek dio, higidura kantitatea, sistema mekanikoaren masa zentroaren abiaduraren menpeko dela soilik.

Sistema zinetiko bektore sistema definitu ondoren, bektore hauek puntu batekiko emango duten momentuari momentu zinetiko edo momentu angeluarra deituko zaio. Hau da, O puntuarekiko sistema zinetiko baten, momentu zinetikoa izango da:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{p}_i$$

Bektore sistema baten momentua izatean, bi puntu desberdinekiko momentu zinetikoek, momentu eremuaren legea jarraituko dute, higidura kantitatea delarik sistema zinetikoaren ordezkaria. Hau da:

$$\vec{H}_B = \vec{H}_A + \vec{p} \times \vec{AB}$$

14.3 KÖENIG-EN TEOREMAK

14.3.1 Köenig-en momentu zinetikoaren teorema.

N partikulaz osatutako sistema material bat emanik, grabitate zentroarekiko momentu zinetikoa,

$$\vec{H}_G = \sum_{i=1}^N \vec{GA}_i \times m_i \vec{v}_i$$

adierazpenak emango du.

\vec{v}_a translazioko abiadura duen erreferentzi sistema bat kontsideratuz, sistemako edozein punturen abiadura absolutua

$$\vec{v}_i = \vec{v}_a + \vec{v}_r$$

adierazpenak emango du.

Bera,

$$\vec{H}_G = \sum_{i=1}^N \vec{GA}_i \times m_i \vec{v}_a + \sum_{i=1}^N \vec{GA}_i \times m_i \vec{v}_r = \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{GA}_i \right) \times \vec{v}_a + \sum_{i=1}^N \vec{GA}_i \times m_i \vec{v}_r$$

Ezkerreko lehengo gaia, grabitate zentroarekiko momentu estatiko eta arrastreko abiaduren arteko biderkaketa bektoriala da. Bere balioa nulua da, momentu estatikoa nulua delako grabitate zentroarekiko.

Beraz,

$$\vec{H}_G = \sum_{i=1}^N \vec{GA}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Lortutako emaitzak, K oenig-en teorema definitzen du: *Sistema baten momentu zinetikoa grabitate zentroarekiko, G puntuarekiko, translazioko abiadura duen edozein sistemarekiko definituko diren abiadura erlatiboekin sortutako sistema zinetikoak G puntuarekiko emango duen momentu zinetikoaren berdina da.*

14.3.2 K oenig-en energia zinetikoaren teorema.

Sistema material baten energia zinetikoa, sistema osatzen duten puntu guztien energia zinetikoaren batura da:

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2$$

Grabitate zentroaren abiaduraz soilik transladatzen den erreferentzi sistema batekiko deskonposatuz abiadurak arrastre eta erlatiboan, puntu bakoitzaren abiadura

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + (\vec{v}_i - \vec{v}_G) = \vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}$$

adierazpenak emango du.

Eta sistemaren energia zinetikoa idatziko da hurrengo moduan:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}) \cdot (\vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \cdot v_G^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \cdot v_{i/G}^2 + \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_G \cdot \vec{v}_{i/G} = \\ &= \frac{1}{2} M \cdot v_G^2 + \vec{v}_G \cdot \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_{i/G} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \cdot v_{i/G}^2 \end{aligned}$$

Bigarren gaiko batukaria, G puntuarekiko abiadura erlatiboen higidura kantitatea da. Honek, zero balio du.

$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_G^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \cdot v_{r/G}^2 = \frac{1}{2} M \cdot v_G^2 + T_r = \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{v}_G + T_r$$

Ekuazio honek, Koenig-en teorema osatzen du. *Sistema material baten energia zinetikoa, grabitate zentroaren abiaduraz transladatuz edukiko lukeen energia zinetikoaren eta erreferentzi horrekiko duen abiadura erlatiboek emango dioten energia zinetikoaren batura da.*

14.4 SISTEMA DINAMIKOA

Partikula bakoitzaren gainean aktuatzen duten indarrek eratutako bektore sistemak osatzen du sistema dinamikoa. Sistema dinamikoaren ordezkaria

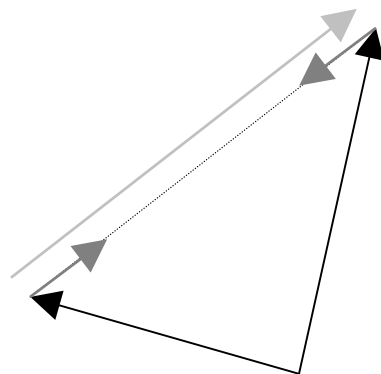
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{aki} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{kani} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{bari} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{kani}$$

adierazpenak emango du, non barneko indarrak anulatu egin diren. O puntu batekiko momentua berriz

$$\vec{N}_o = \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{aki} = \vec{N}_{baro} + \vec{N}_{loto} + \vec{N}_{apo} = \vec{N}_{kano}$$

adierazpenak emango du.

Gutziz erraza da ikustea barneko indarrek emango duen momentua anulatu egingo dela. Horretarako sistemako bi partikula hartuko dira bata bestearen gainean eragiten duen barneko indarra hartuz:



14.1 irudia

Newton-en 3. Legea kontutan hartuz, bi indar hauek sortutako momentua edozein punturekiko izango da:

$$\vec{N}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = -\vec{r}_{12} \times \vec{F}_{12} = \vec{0}$$

bektoreak lerrokideak bai dira.

Aurrekoa partikula bikote guztietara zabalduz, beteko da:

$$\vec{N}_{Obar} = \vec{0}$$

14.5 DINAMIKAKO OINARRIZKO TEOREMAK.

Definitutako magnitude dinamikoak beteko dituzten ekuazioek eratzen dituzte dinamikako oinarritzko teoremak. Oinarritzko teoremen bidez, sistemak egingo duen mugimendu errealaren adierazpena lortuko da.

14.5.1 Higidura kantitatearen teorema eta momentu linealaren teorema.

Biz sistema mekanikoaren higidura kantitatea:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i$$

denborarekiko deribatuz eta Newton-en 2.go legea kontutan izanik:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{aki} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{kani} = \vec{F}$$

adierazpena lortuko da.

Bestalde:

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} (M \cdot \vec{r}_G) = M \cdot \vec{v}_G \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = M \cdot \frac{d\vec{v}_G}{dt} = M \cdot \vec{a}_G$$

eta beraz:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{a}_G$$

Higidura kantitatearen teoremaren enuntziatua: *Sistema mekaniko baten masa zentroa mugituko da puntu material baten moduan, bere masa sistemaren masa totalaren berdina izango delarik eta kanpoko indarren ordezkariak aktuatuko duelarik.*

14.5.2 Momentu zinetikoaren edo momentu angeluarraren teorema.

O puntuarekiko momentu zinetikoaren adierazpena deribatuz, lortuko da:

$$\begin{aligned}
 \frac{d \vec{H}_o}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{p}_i \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{d \vec{OA}_i}{dt} \times m_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times m_i \cdot \frac{d \vec{v}_i}{dt} = \\
 &= \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i - \vec{v}_o) \times m_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kani} = \\
 &= \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i - \vec{v}_o \times \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i + \vec{N}_o = \\
 &= \vec{N}_o - \vec{v}_o \times \vec{p}
 \end{aligned}$$

Aurreko ekuazioa idatz daitekeelarik:

$$\vec{N}_o = \frac{d \vec{H}_o}{dt} + \vec{v}_o \times \vec{p}$$

Hau da momentu zinetikoaren teoremaren adierazpen matematikoa: *Sistema material baten gainean aktuatzen duten kanpoko indarren momentua, momentua zinetikoaren deribatua eta puntuaren abiadura eta higidura kantitatearen biderkaketa bektorialaren baturaren berdina da.*

$\vec{v}_o \times \vec{p}$ terminoa nulua d, hurrengo kasuetan:

- O puntua finkoa denean.
- O puntua masa zentroa denean, orduan $\vec{v}_G \times \vec{p} = \vec{0}$ izango bai da bektore biak lerrokideak izango direlako.

14.5.3 Energiaren teorema.

Sistema mekaniko baten energia zinetikoaren adierazpena denborarekiko deribatuz:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{dT_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_i \cdot v_i^2) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \\ dT &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{aci} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N d\overline{W}_i = \overline{dW} = \overline{dW}_{apl} + \overline{dW}_{enl} + \overline{dW}_{int} \end{aligned}$$

adierazpena iristen da. Ekuazio honi teoremaren energia deituko zaio eta sistemaren energia zinetikoaren aldakuntza, sistemaren gainean aktuatzen duten indarrek egiten duten lanarekin erlazionatzen ditu. Teorema hau, idatzitako moduan edozein kasutan aplikatu daiteke.

Solido zurrunez osatutako sistema materialetan, loturak eskleronomo eta perfektuak badira eta gainera aktuatzen duten indarrak potentzial batetik eratorriak badira, orduan beteko da

$$\overline{dW}_{bar} = 0 \text{ (aurreko gaiko 13.6.1 apartatua)}$$

$$\overline{dW}_{lot} = 0 \text{ (aurreko gaiko 13.6.3 apartatua)}$$

$$\overline{dW}_{apl} = dW_{apl} = -dV$$

eta, ondorioz, energiaren teoremaren adierazpena eramanez:

$$dT = -dV$$

$$dT + dV = 0$$

$$V + T = E$$

emaitza lortzen da. E terminoari (energia zinetiko eta potentzialaren batura) **sistemaren energia mekanikoa** deituko zaio, eta adierazitako baldintzapean konstante mantenduko da.

Lortu den ekuazio honi, mugimenduaren lehenengo integrala deituko zaio (sistema mekanikoaren mugimendua definituko duen lehenengo ordenako ekuazio diferentziala, koordenatu orokortu eta bere deribatuetan).

14.6 D'ALEMBERT-EN PRINTZIPIOA

Newton-en bigarren legea, puntu material bakarrari aplikatuz,

$$\vec{F}_{aki} = m_i \cdot \vec{a}_i$$

baita ere idatz daiteke hurrengo moduan:

$$\vec{F}_{aki} - m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0}$$

Ekuazio honek dio, partikula orekan dagoela aktuatzen duen indarrari gehitzen badiogu beste bat $\vec{\varphi}_i = -m_i \cdot \vec{a}_i$ balioa duena eta inertiako indarra deituko zaiona. Arrazonatzeko modu honek, D'Alembert-en printzipioa osatzen du: *Mugitzen ari den partikula oro, orekan dago inertiako indarrak kontutan hartzen badira.*

Nahiz eta adierazpen matematikoa, Newton-en bigarren legearen berdina izan, mugimendua kontsidera badaiteke orekako egoera iraunkor moduan, bere azterketa egitea posible izango da, estatikako kalkulu metodo bereziak erabiliz.

14.7 LAGRANGE-REN EKUAZIOAK.

Biz N puntu materialez osatutako sistema mekanikoa. Puntu hauen posizioa, n koordenatu orokorturen bidez emango da eta jasango dituzten loturak perfektuak izango dira. Orokorrean, puntu baten posizioa, koordenatuen eta denboraren menpeko izango da. Beraz,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Bestalde,

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

\vec{r}_i ez denez \dot{q}_k gaiaren menpeko, eta \dot{q}_k abiadura orokortuak beraien artean independenteak direnez, beteko da:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Gainera:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} \quad \text{eta} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

\vec{r} funtzioa deribagarri eta jarraia denean, deribatu kurutzatuen berdintasuna beteko du eta ondorioz idatz daiteke hurrengoa:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

Berdintasun hauek ezarri eta gero, jarraian D'Alembert-en orekan dagoen sistemaren gainean lan birtualen teorema aplikatuko da.

$$\vec{F}_{aki} \cdot \delta \vec{r}_i - m_i \cdot \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{F}_{aki} = \vec{F}_{api} + \vec{F}_{loti}$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{aki} \cdot \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Loturak perfektuak izatean, $\vec{F}_{enli} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ eta beraz,

$$\overline{\delta W}_{aki} = \vec{F}_{api} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_{api} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{api} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\overline{\delta W}_{ak} = \sum_{i=1}^N \overline{\delta W}_{aki} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{api} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_{api} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Hau da,

$$\overline{\delta W}_{ak} = \sum_{j=1}^n Q_j \cdot \delta q_j$$

non $Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{api} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ adierazpena den, q_j koordenatu orokortuari elkartutako indar

orokortua.

Bestalde,

$$m_i \cdot \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \delta \vec{r}_i = m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

eta,

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Emaitza hau aurreko adierazpenera eramanez

$$m_i \cdot \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n m_i \cdot \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

Eta ezarri diren berdintasunak kontutan izanik,

$$\begin{aligned} m_i \cdot \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned}$$

Hau da,

$$m_i \cdot \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_i}{\partial q_i} \right] \delta q_j$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned}$$

Ondorioz,

$$\sum_{j=1}^n Q_j \cdot \delta q_j - \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

adierazpena lortuko da. Kontutan izanik desplazamendu birtualak hautazkoak direla, δq_i aldakuntzei balio desberdinak emanaz lortuko direlarik, nahitanahiezkoa izango da hurrengo n ekuazioak betetzea:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Ekuazio hauek, sistema materialaren mugimenduko Lagrange-ren ekuazioen lehenengo formaren adierazpena osatzen dute. Baliagarriak dira lotura reonomoetarako ere, desplazamendu birtualetan denbora aldakuntzarik ez bai dago.

Indarrak kontserbakorrak balira $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ beteko da. V funtzio potentziala da. Beraz,

kasu honetan:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

Bestalde, energia potentziala koordinatuen menpeko da eta beteko da $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ eta

beraz:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

T-V terminoari funtzio lagrangiarra deituko zaio eta L letrarekin adieraziko da, $L=T-V$.

Ondorioz, aplikatutako indarrak kontserbakorrak direnean, Lagrange-ren ekuazioak, hurrengo moduan idatziko dira:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Hau da Lagrange-ren ekuazioen bigarrenengo forma.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ faktoreari, q_j koordenatuari elkartutako momentu kanonikoa deituko zaio.

Normalean p_j -ren bidez adieraziko da, bere unitateak ez daukate zer izan beharrik momentuarenak eta ez dauka momentu linealaren osagai bat izan beharrik ere.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Bestalde, koordenatu orokortuak palpagarri eta ziklikoetan banatzen dira, Lagrangiarraren adierazpenean esplizituko azaltzen diren edo ez kontutan izanik.

Koordenatu bat ziklikoa bada, beteko du:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{cte} = p_j$$

Hau da, koordenatu bat ziklikoa bada, berari elkartutako momentu kanonikoa konstante mantenduko da, mugimenduaren lehenengo integral bat definituko duelarik.

14.8 MUGIMENDU ERLATIBORAKO APLIKAZIOA.

Kanpoko indarrei, inertiako indarrak gehitzen bazaizkie, momentu linealaren, momentu angeluarraren eta energiaren teorema eta Lagrangeren ekuazioak ere aplikatu daitezke mugimendu erlatiboan.

Puntu material baten kasu partikularrean, behatzaile erlatiboarentzat, puntuaren azelerazioaren balioa izango da:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_A - \vec{a}_a - \vec{a}_c$$

Newton-en bigarrenengo legea aplikatzerakoan, behatzaileak aterako lukeen ondorioa izango litzateke berak ikusten duen mugimendua sortzen duen indarra izango dela:

$$m\vec{a}_r = m\vec{a}_A - m\vec{a}_a - m\vec{a}_c$$

Deituz, \vec{F} kanpoko indarren ordezkariari

$$m\vec{a}_A = \vec{F}$$

beteko da. Hau da, mugimendu erlatiboa sortuko da, kanpoko indarrekin batera beste bi indarrek aktuatzen badute, inertiako indarrak deituko zaie:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_a - m\vec{a}_c = \vec{F} + \vec{\varphi}_a + \vec{\varphi}_c$$

non:

$\vec{\varphi}_a = -m\vec{a}_a$ inertiako arrastreko indarra deituko zaion,

eta $\vec{\varphi}_c = -m\vec{a}_c$ Coriolis-en inertiako indarra edo inerti indar osagarria.

15 SOLIDO ZURRUNAREN DINAMIKA

15.1 SARRERA.

Dinamikako oinarrizko teoremetan higidura kantitatea, momentu zinetikoa eta energia zinetikoa azaltzen dira. Teorema hauek solido zurrunari aplikatzerakoan, sistema jarraia izanik, batukariak integraletan bilakatuko dira.

Gai honen helburua da lortzea solido zurrunaren energia zinetiko eta momentu zinetikoaren adierazpenak.

15.2 SOLIDO ZURRUNAREN MOMENTU ZINETIKOAREN KALKULUA.

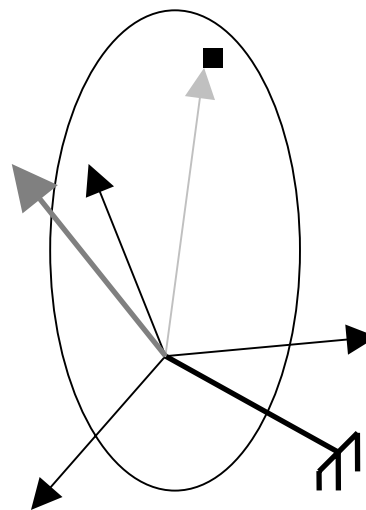
15.2.1 Puntu finkoko solidoa:

Biz O puntu finkoa duen solido zurruna. O puntuan kokatuz solidoarekin batera doan erreferentzi sistema kartesiar bat, beteko da:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Beraz,

$$\begin{aligned} \vec{H}_o &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N [(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i^2) - \vec{r}_i \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)] m_i \end{aligned}$$



15.1. irudia

$$\begin{aligned}
\vec{H}_o &= \sum_{i=1}^N \left[\vec{\omega} \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \vec{r}_i \cdot (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i) \right] \mathbf{m}_i = \\
&= \vec{i} \left[\omega_x \cdot \sum_{i=1}^N (y_i^2 + z_i^2) \mathbf{m}_i - \omega_y \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i \mathbf{m}_i - \omega_z \cdot \sum_{i=1}^N z_i x_i \mathbf{m}_i \right] + \\
&+ \vec{j} \left[-\omega_x \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i \mathbf{m}_i + \omega_y \cdot \sum_{i=1}^N (z_i^2 + x_i^2) \mathbf{m}_i - \omega_z \cdot \sum_{i=1}^N y_i z_i \mathbf{m}_i \right] + \\
&+ \vec{k} \left[-\omega_x \cdot \sum_{i=1}^N z_i x_i \mathbf{m}_i - \omega_y \cdot \sum_{i=1}^N y_i z_i \mathbf{m}_i + \omega_z \cdot \sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2) \mathbf{m}_i \right]
\end{aligned}$$

$$\vec{H}_o = \vec{i} [I_x \omega_x - C_z \omega_y - C_y \omega_z] + \vec{j} [-C_z \omega_x + I_y \omega_y - C_x \omega_z] + \vec{k} [-C_y \omega_x - C_x \omega_y + I_z \omega_z]$$

Aurreko adierazpena, matrizeen biderkaketa moduan idatz daiteke:

$$\vec{H}_o = \{\omega\}^T \cdot [I_o] \cdot \{\vec{e}\}$$

$$\text{non } [I_o] = \begin{bmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z \end{bmatrix}, \text{matrizea, O puntuko inertzi tentsore axiala den.}$$

Erreferentzi sistema, solidoarekin batera doanez, tentsorearen adierazpena konstante mantentzen da uneoro. Momentu zinetiko bektorea, erreferentzi sistema mugikor batetan adieraziko denez, bere denborarekiko deribatua kalkulatzeko beharrezkoa izango da Bour-ren legea erabiltzea.

Aukeratzten diren ardatzak, inertzi ardatz nagusiak badira, inertzi biderkadurak nuluak dira eta ondorioz:

$$\vec{H}_o = \vec{i} I_x \omega_x + \vec{j} I_y \omega_y + \vec{k} I_z \omega_z$$

15.2.2 Solido askea.

Kasu honetan, Koenig-en momentu zinetikorako teorema aplikatuko da, translazioko abiaduratzat grabitate zentroarena hartuz. Ondorioz,

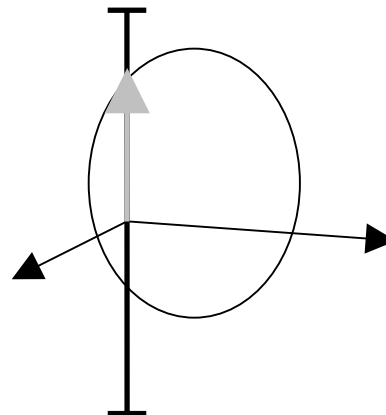
$$\vec{H}_G = \vec{H}_{Gr} = \sum_{i=1}^N \vec{GA}_i \times m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_G) = \sum_{i=1}^N \vec{GA}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{GA}_i)$$

$$\vec{H}_G = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \{\omega\}^T [I_G] \{\vec{e}\}$$

15.2.3 Ardatz finkoko solidoa.

Izanik O puntua, biraketa ardatzeko puntu bat, erreferentzi sistema mugikorra hartzen bada, Z ardatza biraketa ardatza izango delarik 5.2.1. apartatuan lortutakoa partikularizatuko da hurrengo moduan, kontutan izanik abiadura angeluarrak Z ardatzaren norabidea edukiko duela.

$$\vec{H}_O = -\vec{i}C_y\omega - \vec{j}C_x\omega + \vec{k}I_z\omega$$



15.2 irudia

15.3 SOLIDO ZURRUNAREN ENERGIA ZINETIKOAREN KALKULUA.

Solido zurrunaren energia zinetikoaren kalkulurako erabiliko den adierazpen egokitua lortzeko, energia zinetikoaren definiziotik abiatuko gara eta Koenig-en teorema aplikatuko da.

15.3.1 Puntu finkoko solidoa.

Energia zinetikoaren formula hartuz,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

eta erabiliz

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

solido zurrunaren abiadura eremuaren adierazpena, lortuko da,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_o$$

Ardatzak inertzi ardatz nagusiak diren kasuan:

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$$

15.3.2 Solido askea.

Kasu honetan, Koenig-en energia zinetikoaren teorema aplikatuko da:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T_r$$

eta honekin batera grabitate zentroarekin transladatuko litzatekeen sistemarekiko energia zinetiko erlatiboaren definizioa erabiliz:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_G) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times (\vec{v}_i - \vec{v}_G) = \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_{Gr} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_G \end{aligned}$$

Emaitza hau Koenig-en teoreman ordezkatzuz, lortuko da:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_G$$

15.3.3 Ardatz finkoko solidoa.

2.3 apartatuan adierazi zen erreferentzi sistema hartuz eta energia zinetikoaren adierazpena ardatzeko O puntu finkoari aplikatuz, lortuko da:

$$\vec{H}_O = -\vec{i}C_y\omega - \vec{j}C_x\omega + \vec{k}I_z\omega$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

$$T = \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

15.4 SOLIDO ZURRUNAREN DINAMIKAKO EKUAZIOAK.

Solido zurrunaren dinamika, mugatu nahi dena da lotura eta aplikatutako indar batzuk jasaten dituen gorputzaren mugimendua. Horretarako dinamikako oinarritzko teorema definitu dira eta solido zurrunen kasurako egokitu dira gai honetan. Solido zurrunen kasuan kontutan edukiko dena da, ekuazioak nola sinplifikatzen diren grabitate zentroa erabiltzen denean energia zinetikoaren kalkuluan edo momentu zinetikoaren teorema aplikatzerakoan (puntu finkorik ez badago) eta bestalde kontutan eduki beharko da askotan erreferentzi sistemak solido zurrunarekin batera mugituko direla (edo ia batera batzutan, ikus puntu finkoko solidoaren dinamika, 8. gaia).

Erabiliko den lehenengo teorema, higidura kantitatearena da,

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

deribatua kalkulatzekoan, higidura kantitatea sistema mugikorrean adierazten bada, orduan Bouré erabiliko da:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

Bigarren teorema, momentu zinetikoaren teorema, askotan grabitate zentroan aplikatuko da:

$$\vec{N}_G = \frac{d\vec{H}_G}{dt}$$

berriro, momentu zinetikoa solidoarekin batera doan sistema batetan adierazita badago, deribatua Boure erabiliz, kalkulatu beharko da:

$$\vec{N}_G = \frac{d\vec{H}_G}{dt} = \left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \times \vec{H}_G$$

Solido zurrun batek sei askatasun gradu ditu, planteatutako bi ekuazio bektorialetatik sei ekuazio eskalar lortuko dira eta problema dinamikoa ebatziko da.

Hala ere, batzutan energiaren teorema aplikatu nahi izango da,

$$\overline{dW} = dT$$

lortuko den ekuazioa, aurrerako ezarritakoen konbinaketa bat izango delarik.

16 MUGIMENDU LAUAREN DINAMIKA

16.1 EKUAZIOEN EGOKITZEA.

Zinematikan, solidoaren mugimendua, mugimendu laua dela esango da, solidoko puntuen traiektoriak plano paraleloetan daudenean. Dinamikan, oreka, definizioa, hertsia goa izango da: lodiera mesprezagarriko sekzio lau bat, bere planoan mugituko da eta aplikatutako indarrek plano horretan egon beharko dute (eta momentuak planoari elkarzutak).

Aurreko gaietan lortutako ekuazioak, baldintza hauetara egokitu behar dira. Adibidez, erreferentzi sistema solidoarekin batera mugituz, jatorria grabitate-zentroan izanik hurrengo idatziko da:

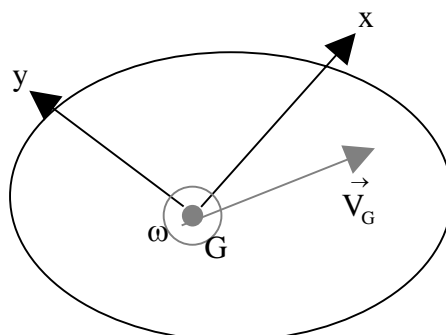
- lodiera mesprezagarriko plaka izatean, plano hau edukiko duten inertzi biderkaketak nuluak dira (beste planoak elkarzuta bazaio).

- planoan mugitzerakoan, ω biraketa, planoari elkartuta izango zaio.

$$\vec{H}_G = [I_z \cdot \omega_z] \vec{k} \qquad \vec{R} = M \cdot \frac{d\vec{V}_G}{dt}$$

$$\vec{N}_G = \frac{d\vec{H}_G}{dt} = \frac{d}{dt} (I_z \cdot \omega_z \vec{k}) = I_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{N}_G = I_z \cdot \alpha_z \vec{k} = I_G \cdot \alpha_z \vec{k}$$



16.1 irudia

16.2 MOMENTU ZINETIKOAREN TEOREMAREN APLIKAZIOA SOLIDOKO EDOZEIN PUNTUTAN.

Momentu zinetikoaren adierazpen orokorra

$$\vec{N}_P = \frac{d\vec{H}_P}{dt} + \vec{V}_P \times M \vec{V}_G$$

ekuazioak ematen du. Momentu zinetikoaren definiziora joanez:

$$\begin{aligned} \vec{H}_P &= \sum_i \vec{PA}_i \times m_i \vec{V}_i = \sum_i \vec{PA}_i \times m_i \left(\vec{V}_P + \vec{\omega} \times \vec{PA}_i \right) = \\ &= \sum_i \left(m_i \vec{PA}_i \right) \times \vec{V}_P + \sum_i \left(m_i \vec{PA}_i \right) \times \left(\vec{\omega} \times \vec{PA}_i \right) = \\ &= M \cdot \vec{PG} \times \vec{V}_P + \{ \vec{\omega} \}^T \cdot [I_P] \cdot \{ \vec{e} \} = M \cdot \vec{PG} \times \vec{V}_P + I_P \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

Teoreman ordezkatzuz:

$$\frac{d\vec{H}_P}{dt} = M \cdot \left(\vec{V}_G - \vec{V}_P \right) \times \vec{V}_P + M \cdot \vec{PG} \times \vec{A}_P + I_P \cdot \alpha \vec{k} = M \cdot \vec{V}_G \times \vec{V}_P + M \cdot \vec{PG} \times \vec{A}_P + I_P \cdot \alpha \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_P &= \frac{d\vec{H}_P}{dt} + \vec{V}_P \times M \cdot \vec{V}_G = M \cdot \left(\vec{V}_G \times \vec{V}_P \right) + M \cdot \vec{PG} \times \vec{A}_P + I_P \cdot \alpha \vec{k} + \vec{V}_P \times M \cdot \vec{V}_G = \\ &= M \cdot \vec{V}_G \times \vec{V}_P + M \cdot \vec{PG} \times \vec{A}_P + I_P \cdot \alpha \vec{k} + \vec{V}_P \times M \cdot \vec{V}_G = M \cdot \vec{PG} \times \vec{A}_P + I_P \cdot \alpha \vec{k} \end{aligned}$$

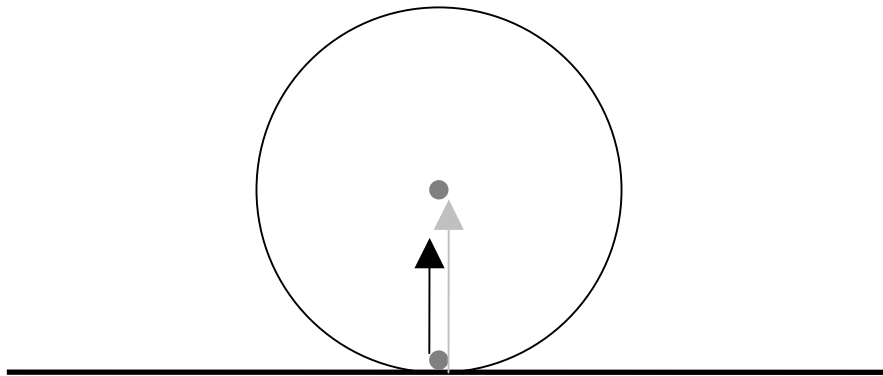
Ondorioz, P puntua bada:

- Sistemako grabitate zentroa
- Puntu finkoa
- Abiadura konstanteko puntua
- PG bektorea eta P puntuko azelerazio bektorea paraleloak

Beteko da:

$$\vec{N}_P = I_P \cdot \alpha \vec{k}$$

Azken kasuaren adibide izango litzateke, plano baten gainean labaindu gabe errodatzen duen diskoarena. Aldiuneko biraketa zentroan momentu zinetikoaren teorema adierazpen laburtua hartuko du (disko oso eta homogeneoa...).



16.2 irudia

16.3 D'ALEMBERT-EN PRINTIZIPIOAREN APLIKAZIOA.

D'Alembert-en printzipioren arabera, solido zurrun bati, inertiako indarrak gehitzen bazaizkio, orduan solidoaren mugimendua aztertzea dago suposatuz solidoa orekan dagoela.

Inertiako indarrek osatzen duten bektore sistema, sistema baliokide laburtu batez ordezkatzekoan, dinamikako oinarriko teoremetatik abiatzea dago:

$$\vec{F}_{\text{ext}} - M\vec{a}_G = \vec{0}$$

$$\vec{N}_P - \frac{d\vec{H}_P}{dt} - \vec{v}_P \times \vec{p} = \vec{0}$$

Inertiako indarren ordezkaria izango da $-M\vec{a}_G$ eta inertiako indarren momentua P puntuarekiko izango da $-\frac{d\vec{H}_P}{dt} - \vec{v}_P \times \vec{p}$.

Mugimendu lauan aplikatzerakoan, aurreko apartatuan lortu dugu

$$\vec{N}_P = M \cdot \vec{PG} \times \vec{A}_P + I_P \cdot \alpha \vec{k}$$

dela. Gainera

$$I_P = I_G + M \cdot \overline{GP}^2$$

eta

$$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \times \overline{GP} - \omega^2 \cdot \overline{GP}$$

$$\overline{PG} \times \vec{a}_P = \overline{PG} \times \vec{a}_G + \overline{PG} \times (\vec{\alpha} \times \overline{GP}) - \overline{PG} \times \omega^2 \cdot \overline{GP} = \overline{PG} \times \vec{a}_G - \vec{\alpha} \times \overline{GP}^2$$

Beraz, hurrengo idatziko da:

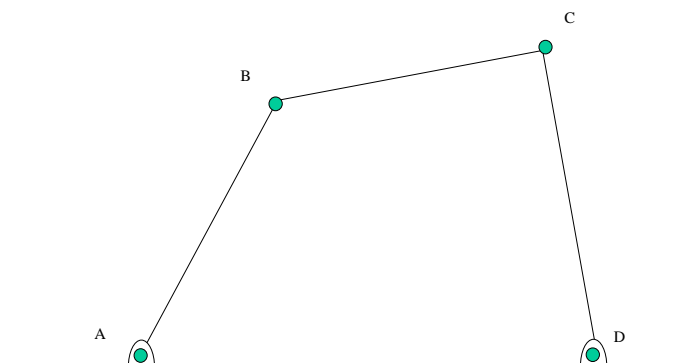
$$\begin{aligned} \vec{N}_P &= I_G \cdot \vec{\alpha} \vec{k} + M \cdot \overline{GP}^2 \cdot \vec{\alpha} \vec{k} + M \cdot \overline{PG} \times \vec{a}_G - M \cdot \overline{GP}^2 \cdot \vec{\alpha} \vec{k} = \\ &= I_G \cdot \vec{\alpha} \vec{k} + M \cdot \overline{PG} \times \vec{a}_G = I_G \cdot \vec{\alpha} \vec{k} + M \cdot \vec{a}_G \times \overline{GP} \end{aligned}$$

Ekuazio honetan, eskuineko bi gaiak ezkerretara eramanez, lortuko da:

$$\vec{N}_P - I_G \cdot \vec{\alpha} \vec{k} + \overline{PG} \times (-M \cdot \vec{a}_G) = \vec{0}$$

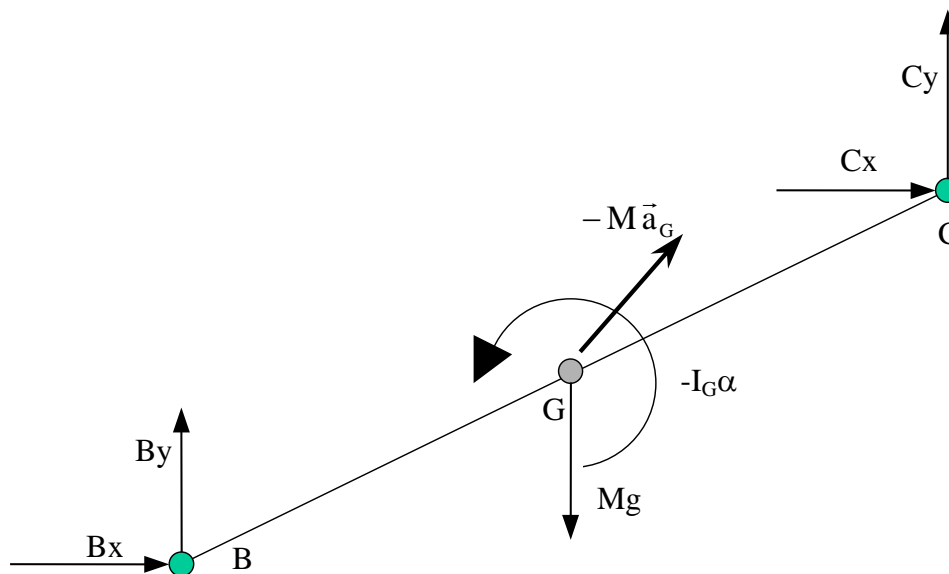
Hemendik ateratzen da, momentu zinetikoaren teorema eta solido zurrun baten orekako ekuazioak baliokideak direla baldin eta orekako ekuazioak idazterakoan, kanpoko indarrez gain, kontutan hartzen badira inertiako indarrek emango duten momentua P puntuan, suposatuz ordezkaria grabitate zentroan dagoela eta inertiako indarren momentua dela $-I_G \cdot \vec{\alpha} \vec{k}$. Horrela P puntuan, inertiako indarrek emango duten momentua izango da $\overline{PG} \times (-M \cdot \vec{a}_G)$ eta $-I_G \cdot \vec{\alpha} \vec{k}$ bektoreen batura.

Demagun hurrengo irudian adierazitako lauki artikulatua:



16.3 irudia

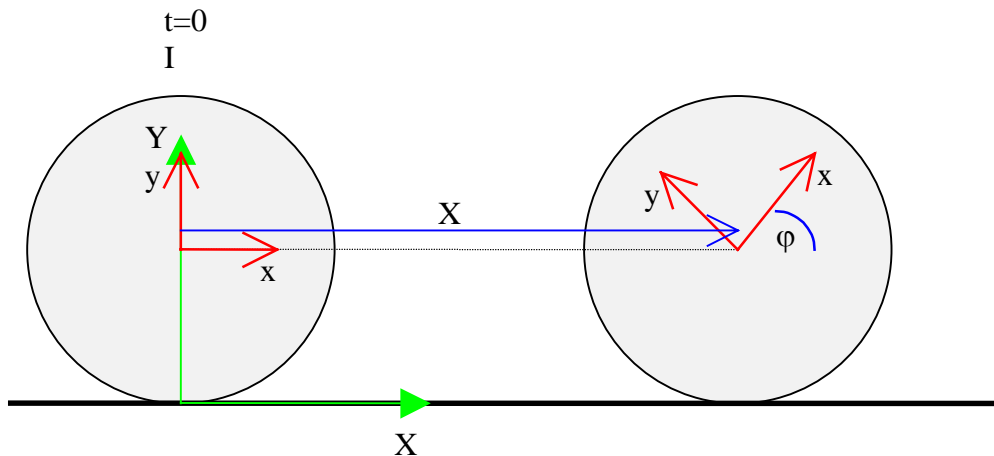
BC barraren mugimenduko ekuazioak lortzeko, barra isolatuko da hurrengo irudian adierazten den moduan eta inertiako indarrak gehituz (eta momentua) zerori berdinduko zaio edozein punturekiko momentuak hartuz lortuko den ekuazioa.



16.4 irudia

16.4 ERRODADURAKO MUGIMENDU LAUAREN AZTERKETA DINAMIKOA.

Planoko errodadurako mugimendua aztertzeko, hurrengo adibidea aztertuko da. M masako eta R erradioko disko bat jaurtitzen da eta, hasierako aldiunean lurrari paraleloki \vec{v}_0 abiaduraz transladatuko da. Lurraren gainazala latza da, f marruskadura koefizientea izango delarik. Diskoaren mugimendua azertu nahi da.



16.5 irudia

XY erreferentzi sistema finkoa; xy sistema mugikorra.

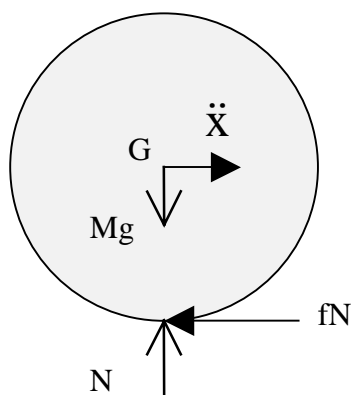
Lotura eskleronomoa: diskoaren zentroa, lurretik R distantziara mantentzen da.

Hasierako aldiunean labainketa dago, ondorioz marruskadura indarraren balioa maximoa izango da eta lotura ez da perfektua.

Bi koordenatu orokortu erabiliko dira, X eta ϕ adibidez.

Dinamikako ekuazioak aplikatuko dira.

- Energiaren kontserbazioa ezin daiteke aplikatu marruskadura indarrak lana egingo duelako.
- Lagrange ere ezin daiteke aplikatu, lotura ez-perfektuak daudelako.
- Dinamikako teoremak, ordea beti aplika daitezke.



16.6 irudia

Indarren oreka:
$$M \cdot \ddot{x} \cdot \vec{i} = N \cdot \vec{j} - fN \cdot \vec{i} - Mg \cdot \vec{j}$$

G puntuarekiko momentuen oreka:
$$\left(\frac{1}{2} M \cdot R^2 \right) \cdot \ddot{\varphi} = (-f \cdot Mg) \cdot R$$

Ondorioz:

$$\ddot{x} = -f \cdot g \qquad N = Mg \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{2gf}{R}$$

Ekuazio diferentzial hauek integratuz, mugimenduaren ekuazioak lortuko dira. Ekuazio hauek balio dute, labainketa mantentzen den bitartea. Labainketa desagertzen denean, marruskadura indarraren balioa ez da maximoa eta aurreko ekuazio diferentzialek ez dute diskoaren mugimendua azalduko.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -fg \cdot t + K_1 & x &= -fg \cdot \frac{t^2}{2} + K_1 \cdot t + K_2 \\ \dot{\varphi} &= -\frac{2gf}{R} \cdot t + K_3 & \varphi &= -\frac{gf}{R} \cdot t^2 + K_3 \cdot t + K_4 \end{aligned}$$

Hasierako baldintzak ezarriz, integrazioko konstanteek hurrengo balioak hartuko dituzte:

$$K_1 = v_0; K_2 = 0; K_3 = 0; K_4 = 0.$$

Ondorioz, $x = -fg \cdot \frac{t^2}{2} + V_0 \cdot t$ eta $\varphi = -\frac{gf}{R} \cdot t^2$ ekuazioek balioko dute labainketarik gabeko errodadura gertatzen ez den bitartean. Diskoa, ordea, errodatzen hasiko da ukipeneko puntuaren abiadura zero egingo den unean.

$$\begin{aligned}\vec{V}_I &= \vec{V}_G + \vec{\omega} \times \vec{GI} = \left(\dot{x} \cdot \vec{i} \right) + \left(\dot{\phi} \cdot \vec{k} \right) \times \left(-R \cdot \vec{j} \right) = \\ &= (v_o - fg \cdot t) \cdot \vec{i} + R \cdot \left(-2 \frac{fg}{R} \cdot t \right) \cdot \vec{i} = (v_o - 3fg \cdot t) \cdot \vec{i}\end{aligned}$$

$$(v_o - 3fg \cdot t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_o}{3fg}$$

Aldiunea horretan, diskoa errodutzen hasiko da eta aurreko ekuazioek ez dute balio. Problema hurrengo moduan planteatu behar da. Errodadura existitzean, nahiz eta marruskadura indarra egon, lotura perfektua da eta gainera ez du lanik egingo diskoaren desplazamendu errealean. Ondorioz, energiaren kontserbazioa aplika daiteke:

$$E = T + V = \text{konstante}$$

$$V = \text{konstante}$$

Diskoaren grabitate zentroa, altuera konstantean mantentzen denez, energia potentziala konstante mantentzen da, ondorioz energia zinetikoa ere konstante mantenduko da.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 = \text{konstante}$$

$$\frac{3}{4} m \dot{x}^2 = \text{konstante}$$

$$\dot{x} = \text{konstante}$$

$$\ddot{x} = 0$$

Ondorioz, diskoaren mugimendua uniforme izango da.

17 ARDATZ FINKODUN SOLIDOAREN DINAMIKA

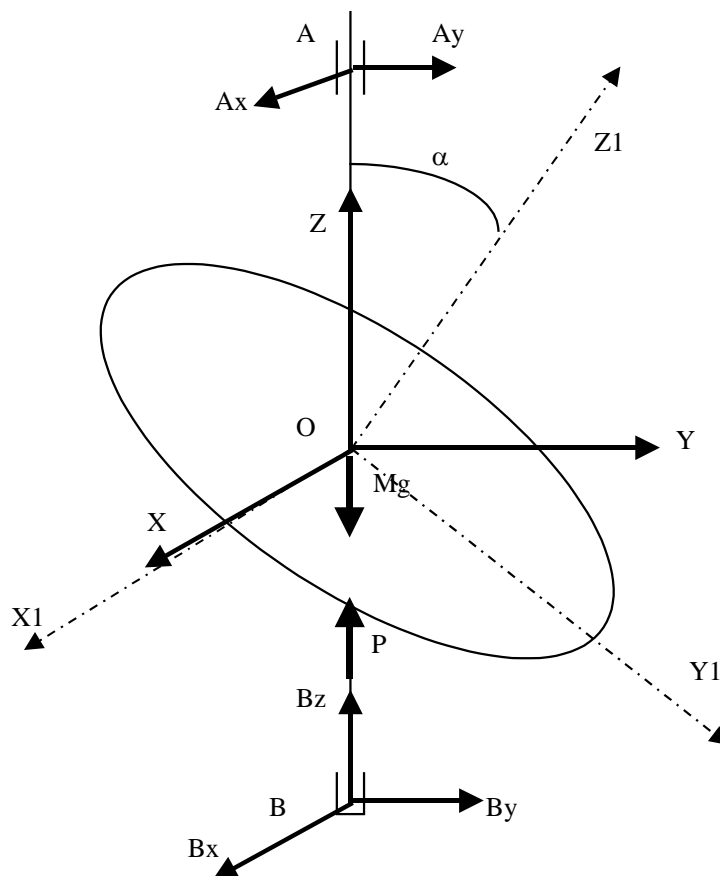
17.1 PROBLEMAREN PLANTEAMENDUA

Makina gehienek, ardatz batekiko biratzen duten elementu mekanikoak dituzte. Elementu mekaniko hauek, garrantzia handia dute sor ditzaketen efektu dinamikoengatik. Biratzen duten ardatzak, makinarekin errodamendu eta kuxineteekin lotuta daude eta lotura hauetan sortuko diren erreakziok, denborarekin aldagarriak izan daitezke eta honek eragina izan dezake mainaren gainean. Eragin nagusia izango da sortuko diren bibrazio behartuak, nahiz eta par motorean ere eragina edukiko duten. Ardatzen orekatzearen helburua da biraketagatik lotura-erreakzioek sor ditzaketen efektu dinamiko kaltegarriak kentzea.

17.2 KUXINETEETAKO ERREAKZIOEN KALKULUA

Biraketaren dinamikak ardatz finkoko solidoen mugimendua aztertzen du. Solido hauen mugimendua laua da, askatasun gradu bakarra dute eta axoide finko eta mugikorra biraketa ardatza dira. Horretarako, kontsideratuko da ardatza, errotula esferiko finko batean sostengatzen dela (bulkadako kuxineta, erroa) eta biraketa ezik ardatzaren beste mugimenduak eragozten dituen beste puntu batetan (kuxinete erradiala). Horrela 5 askatasun gradu kentzen dira eta kuxinetetan 5 ezezagun azalduko dira, lotura indarrak alegia. Horrez gain existituko da beste ezezagun bat. Ezaguna den biraketako par batek sortuko duen mugimendua edo emandako mugimendua sortzeko beharrezkoa den par edo momentua. Orduan, 6 ezezagun edukitzean, higidura kantitatearen teorema eta momentu zinetikoaren teorema aplikatuz lortuko diren 6 ekuazioen bidez mugatuko dira.

Problema hauen zailtasunik handiena erreferentzi sistemaren aukeraketa izango da. Erreakzioak kalkulatzeko hobe da hartzea erreferentzi sistema bat, biraketa ardatza koordenatu ardatza izango dena. Momentu zinetikoa aplikatzerakoan, ordea, batzutan errazagoa da koordenatu ardatzak inertzi momentu nagusiak izatea eta biraketa ardatza ez da koordenatu ardatza izango.



Biz zentroa \$O\$ puntuan duen \$R\$ erradioko, \$M\$ masako eta lodiera mesprezagarriko diskoa. Diskoa, irudian adierazten den moduan e ardatz bertikalarekiko \$\omega\$ abiadura angeluar konstantez biraka ari da. \$A\$ eta \$B\$ puntuetako erreakzioak kalkulatu nahi dira.

\$XYZ\$ sisteman:

$$\begin{aligned}
 A_x + B_x &= 0 \\
 A_y + B_y &= 0 \\
 A_z &= Mg \\
 \vec{N}_0 &= (A_x - B_x)\vec{a}_j + (B_y - A_y)\vec{a}_i + P\vec{k}
 \end{aligned}$$

\$x_1y_1z_1\$ sisteman:

$$\vec{H}_0 = MR^2 \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega \sin \alpha \\ \omega \cos \alpha \end{Bmatrix} = MR^2 \omega \left(\frac{1}{4} \sin \alpha \vec{j} + \frac{1}{2} \cos \alpha \vec{k} \right)$$

$$\frac{d\vec{H}_0}{dt} = MR^2\omega^2 \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & -\frac{1}{4}\sin\alpha & \frac{1}{2}\cos\alpha \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}MR^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\vec{i}$$

ω konstantea delako, momentu zinetikoaren deribatuak osagai bakarra du, x_1 ardatzaren norabidea. Norabide hori, x ardatzarekin bat etortzen denez:

$$A_x = 0$$

$$B_x = 0$$

$$B_y = -A_y$$

$$P = 0$$

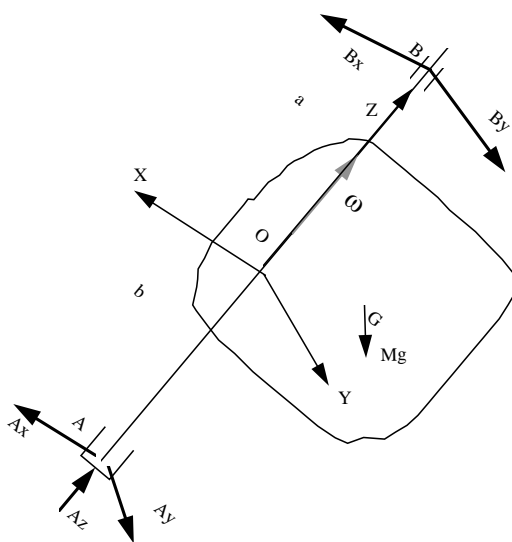
$$(B_y - A_y)a = -\frac{1}{4}MR^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$B_y = -\frac{MR^2\omega^2}{8a}\sin\alpha\cos\alpha$$

17.3 ERROTOREEN OREKATZEA

Sistema errotakor bat, orekatuta dagoela esango da baldin eta kuxineteetako erreakzioak edozein biraketa legetarako, sistema geldirik dagoenean lortuko diren erreakzioen berdinak direnean. (Sistemaren gainean aplikatutako indar bakarra bere pisua denean.)

Jarraian orekatzeko baldintzak lortuko dira.



Dinamikako oinarrizko teorema aplikatuz, lehenengo higidura kantitatearen teorema:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{api} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$\vec{OG} = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$$

$$\vec{V}_G = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_G & y_G & z_G \end{bmatrix} = -\omega y_G \vec{i} + \omega x_G \vec{j}$$

$$\vec{A}_G = -\dot{\omega}y_G \vec{i} + \dot{\omega}x_G \vec{j} + \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_G & \omega x_G & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_x &= M(-\dot{\omega}y_G - \omega^2 x_G) \\ R_y &= M(\dot{\omega}x_G - \omega^2 y_G) \\ R_z &= 0 \end{aligned}$$

Eta jarraian momentu zinetikoaren teorema:

$$\sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{api} = N_{Ox} \vec{i} + N_{Oy} \vec{j} + N_{Oz} \vec{k} = \frac{d\vec{H}_0}{dt}$$

$$\vec{H}_0 = \{\omega\}^T \begin{bmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & C_x & I_z \end{bmatrix} \{\vec{e}\} = -C_y \omega \vec{i} - C_x \omega \vec{j} + I_z \omega \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{H}_0}{dt} = -C_y \dot{\omega} \vec{i} - C_x \dot{\omega} \vec{j} + I_z \dot{\omega} \vec{k} - C_y \omega^2 \vec{j} + C_x \omega^2 \vec{i}$$

$$N_{Ox} - B_y a + A_y b = C_x \omega^2 - C_y \dot{\omega}$$

$$N_{Oy} + B_x a - A_x b = -C_x \dot{\omega} - C_y \omega^2$$

$$N_{Oz} + P = I_z \dot{\omega}$$

Beraz, orekatzeko lortu diren bi baldintzak dira grabitate zentroa biraketa ardatzean egotea eta bigarrena, biraketa-ardatza inerti indar nagusi izatea.

Sistema bat orekatuta badago, definitu denaren arabera, mugimenduagatik sortuko liratekeen indar guztiak anulatzea nahi da. Indar hauek inerti indarrak lirateke eta ondorioz, sistema orekatuta badago inerti indarrak nuluak izan beharko dute.

Orekatutako sistemetan, kuxineteetako indarrak ez da azalduko estatikoak izan ezik. Hau da, biraketako abiadura konstante izanik:

$$\vec{N}_0 = \frac{d\vec{H}_0}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_0 = kte$$

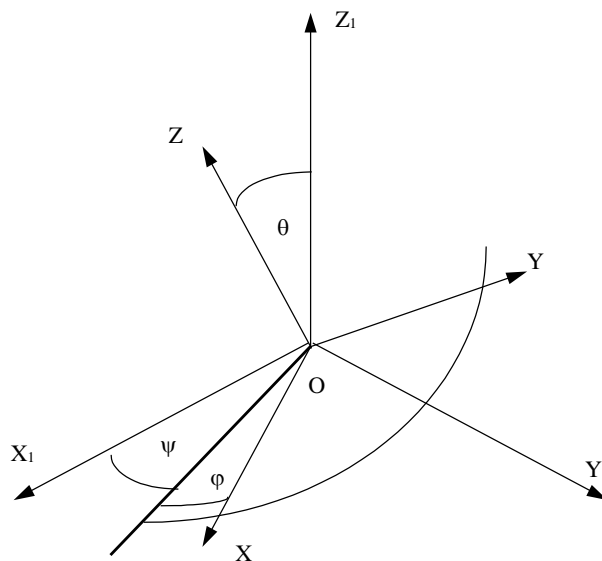
Beraz orekatutako sistema batetan, ardatzeko edozein punturekiko momentu zinetiko bektorea konstante mantenduko da.

18 PUNTU FINKODUN SOLIDOAREN DINAMIKA

18.1 OROKORTASUNAK. EULER-EN ANGELUAK.

Puntu bat finkoa izanik, mugitzen ari den edozein gorputzi giroskopo edo giroskopio deitzen zaio. Solidoak hiru askatasun gradu ditu eta bere puntuek deskribatutako traiektoriak esferetan daude. Esferen zentroa puntu finkoa izango da eta erradioa puntuaren eta puntu finkoaren arteko distantzia.

Ohizkoa da giroskopio baten posizioa hiru angeluren bidez ematea. Angelu hauen bidez, baita ere OXYZ triedro kartesiarraren orientazioa definitu daiteke finkoa den $OX_1Y_1Z_1$ sistemarekiko. Giroskopioaren kasuan koordenatu sistemen jatorria giroskopioaren puntu finkoa izango da. Gehien erabiltzen diren angeluak, Euler-en angeluak izango dira. Angelu hauei baita ere deituko zaie preziesioko, nutazioko eta berezko biraketako angeluak.



18. 1 irudia

18.1 irudian triedro mugikorra, finkoa eta Euler-en angeluak adierazten dira. Angelu hauek dira:

- ψ **preziesioko angelua**, X_1 ardatzaren eta nodoen lerroaren arteko angelua da (X_1OY_1 eta XOY planoen arteko ebakidura).
- θ **nutazioko angelua**, Z eta Z_1 ardatzek definitua.

- φ **berezko biraketako angelua**, nodoen lerroa eta X ardatzak definitua.

Solidoaren edozein aldiuneko posizioa hiru angelu hauek definituko dute, triedro biak bat egiten duten hasierako posiziotik beste edozein posiziotara pasa bai daiteke hurrengo hiru biraketa hauen bidez:

- ψ biraketa Z_1 ardatzaren inguruan. Biraketa honekin, X ardatz mugikorrek nodoen lerroarekin bat egingo du.
- θ biraketa nodoen lerroaren inguruan. Horrela, Z ardatzak bukaerako posizioa eskuratzen du.
- φ biraketa Z ardatzaren inguruan. Hirugarrenengo biraketa honen bidez, azkeneko posizioa lortuko da.

Biraketa hauetako bakoitzari elkartuta dagoen abiadura angeluarraren bidez solidoaren abiadura angeluarrak

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}}$$

adierazpena beteko du, non:

$\vec{\dot{\varphi}}$ **berezko biraketa** den eta Z ardatzaren norabidea du.

$\vec{\dot{\psi}}$ **prezesioko abiadura** den eta Z_1 ardatzaren norabidea du.

$\vec{\dot{\theta}}$ **nutazioko abiadura** den eta nodoen lerroaren norabidea du.

Abiadura angeluarraren triedro mugikorrean adierazitako osagaiak Euler-en angeluen menpean lortzeko, kontutan hartu beharko da:

- berezko biraketak $\vec{\dot{\varphi}}$ bektoreak, Z ardatzean bakarrik du adierazpena.

- $\vec{\psi}$ prezesioaren Z ardatzaren gaineko proiektzioa $\psi \cos \theta$ da eta, beraz, XOY planoaren gainekoa $\psi \sin \theta$ da. Bigarrenengo proiektzio honek, Y ardatzarekin φ angelua osatzen du, $\vec{\psi}$ abiadura elkarzuta zaiolako nodoen lerroari.
- $\vec{\theta}$ nutazioaren proiektzioak X eta Y ardatzen gainean $\dot{\theta} \cos \varphi$ eta $-\dot{\theta} \sin \varphi$, balio dute hurrenez hurren.

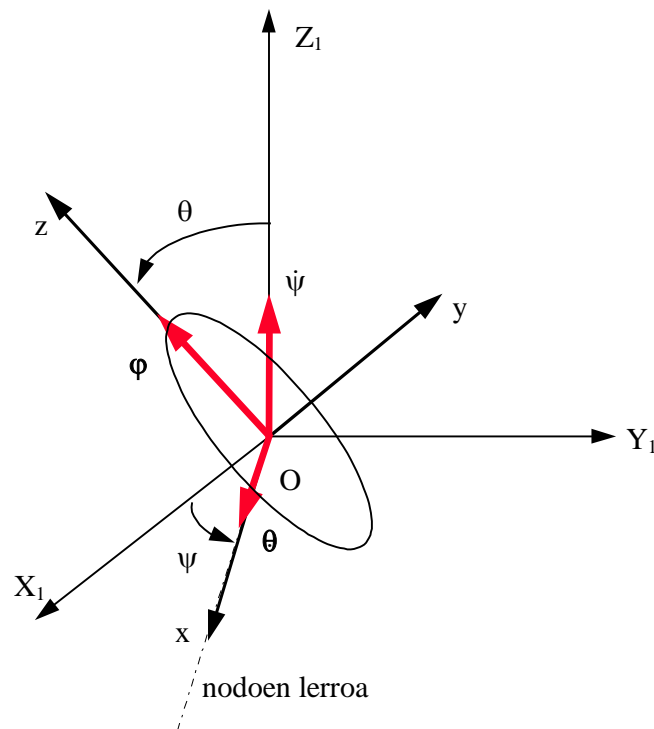
Horrela, hurrengo erlazio hauek lortuko dira:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta\end{aligned}$$

Giroskopia simetrikoa bada, hau da, puntu finkoko inertzi elipsoidea biraketakoa bada triedro mugikorra ez da solidoarekin batera mugituko. Z ardatz mugikorra, inertzi elipsoidearen biraketa ardatza izango da eta X ardatza berriz, nodoen lerroarekin batera mugituko da. (Ikus 18.2 irudia.)

Kasu honetan, solidoaren eta triedro mugikorraren arteko mugimendu erlatiboa, $\vec{\varphi}$ berezko biraketak definituko du. Solido zurrunaren abiadura angeluarraren osagaiak triedro mugikor honetan, hurrengo adierazpenak emango du:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta\end{aligned}$$



18. 2 irudia

18.2 EULER-EN EKUAZIOAK

Izanik O puntu finkoa, solidoaren gainean momentu zinetikoaren teorema aplikatuz, beteko da:

$$\vec{N}_0 = \frac{d\vec{H}_0}{dt}$$

Momentu zinetikoa O puntuko inertzi ardatz nagusietan adieraziz,

$$\vec{H}_0 = I_x \omega_x \vec{i} + I_y \omega_y \vec{j} + I_z \omega_z \vec{k}$$

eta solidoaren batera mugituko denez sistema, momentu zinetikoaren deribatua

$$\frac{d\vec{H}_o}{dt} = I_x \dot{\omega}_x \vec{i} + I_y \dot{\omega}_y \vec{j} + I_z \dot{\omega}_z \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_x \omega_x & I_y \omega_y & I_z \omega_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} [I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z] + \vec{j} [I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z] + \vec{k} [I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y]$$

adierazpenak ematen du.

Kontutan izanik:

$$\vec{N}_o = N_{o_x} \vec{i} + N_{o_y} \vec{j} + N_{o_z} \vec{k}$$

hurrengoak idatzi daitezke:

$$N_{o_x} = I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z$$

$$N_{o_y} = I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z$$

$$N_{o_z} = I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y$$

Bigarren ordenako hiru ekuazio diferentzial hauek **Euler-en ekuazioak** deitzen dira eta integratuz solidoaren mugimendua eta posizioa definituko litzateke (Euler-en angeluetan adibidez).

18.3 MUGIMENDUAREN AZTERKETA

Puntu finkoko solidoaren mugimendua aztertzeko, dinamikak jarraian, laburbilduta azaltzen diren aukerak ematen ditu. Bide bat edo bestea jarraitzea, indarren izaerak, lotura motak e.a. baldintzatuko du.

18.3.1 Oinarrizko teoremak

Girokopiaoren azterketan, momentu zinetikoaren teoremaren bidez mugimenduaren ekuazioak lortuko dira eta higidura kantitatearen teoremaren bidez lotura indarrak mugatuko dira.

D'Alembert-en printzipioa kontutan izanik, oinarrizko teoremak hurrengo moduan idatzi daitezke.

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{kanpi}} - M\vec{a}_G = \vec{0}$$

$$\vec{N}_0 - \frac{d\vec{H}_0}{dt} = \vec{0}$$

non $-M\vec{a}_G$ inertiako indarren ordezkaria den eta $-\frac{d\vec{H}_0}{dt}$ inertiako indarren momentua O puntu finkoarekiko. Momentu honi **par giroskopikoa** deitzen zaio.

18.3.2 Euler-en ekuazioak

Euler-en ekuazioak lortu ziren, erreferentzi sistema mugikorra gorputzarekin batera ezarriz eta koordenatu ardatzak inerti norabide nagusi izanik.

Kanpoko indarrek O puntu finkoan sortzen duten momentua ezaguna denean, Euler-en ekuazioek mugimenduaren ekuazioak emango dituzte zuzenean.

18.3.3 Lagrange-ren ekuazioak

Lagrange-ren ekuazioak lotura perfektuan direnean aplika daitezke. Ekuazioaren adierazpen orokorra j-garren koordenatu orokortuarentzat da:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Aplikatutako indarrak kontserbakorrak badira,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

adierazpena erabil daiteke.

Lagrange-ren ekuazioen bidez, solidoaren mugimenduko ekuazioak lortuko dira baina ez dute informaziorik ematen lotura indarren balioez.

18.3.4 Energiaren teorema.

Energiaren teoremaren adierazpenik orokorra da:

$$W_{\text{apl}} + W_{\text{lot}} + W_{\text{bar}} = \Delta T$$

Teorema hau aplikatuz lortuko den ekuazioa, oinarritzko teorema, Euler-en ekuazioak edo Lagrange-ren ekuazioak aplikatuz lortuko diren ekuaziotako bat ordeztu dezake.

Solidoa zurruna denean, lotura indarrek ez dutenean lanik egiten eta aplikatutako indarrak kontserbakorrak direnean, sistemaren energia mekanikoa kontserbatu egiten da eta energiaren teorema hurrengo adierazpena hartuko du (energia mekanikoaren kontserbazioko teorema).

$$T + V = E$$

18.4 INERTZIAGATIK MUGITZEN DEN GIROSKOPIOA.

Giroskopio bat inertziagatik mugitzen dela esango da baldin eta solidoaren gainean aplikatutako indarrek bektore sistema endakaturatu osatzen badute eta puntu finkoaren momentua nulua denean. Baldintza hauek betetzen dituen giroskopioari ere deitzen zaio Euler-Poinsot-en giroskopioa.

18.4.1 Mugimenduaren ekuazioak.

Giroskopioaren mugimenduko lehenengo bi integral era zuzenean kalkula daitezke hurrengo moduan.

$$1.) \quad \vec{N}_0 = \vec{0} \text{ denez, } \frac{d\vec{H}_0}{dt} = \vec{0} \text{ bete beharko da eta ondorioz } \vec{H}_0 = kte$$

Momentu zinetiko bektorea konstante denez, bere modulua ere konstante izango da eta ondorioz:

$$H_0^2 = I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = kte$$

2.) Bestalde, energiaren teorema erabiliz eta kontutan izanik beteko dela $\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, non \vec{r}_i bektorea solidoko edozein punturen posizio bektorea (puntu finkoarekiko) izango den.

$$\begin{aligned} dT = d\bar{W}_{kan} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_{kani} \cdot \vec{v}_i dt = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{kani} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt = \\ &= \vec{\omega} \cdot dt \cdot \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{kanti} = \vec{\omega} \cdot dt \cdot \vec{N}_0 = 0 \end{aligned}$$

Beraz, energia zinetikoa konstante mantentzen da eta ondorioz:

$$2T = I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 = kte$$

Mugimendua definitzeko beharrezko ekuazioak lortzeko bi ekuazio hauei gehituko zaio Euler-en ekuaziotako bat. Adibidez:

$$\begin{aligned} I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 &= H_0^2 \\ I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 &= 2T \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= 0 \end{aligned}$$

18.4.2 Euler-en angeluen mugaketa.

Euler-en angeluak mugatzeko, komenioz prezesioko ardatz moduan, \vec{H}_0 momentu zinetiko bektorearen norabidea hartuko da.. Honen arabera eta giroskopiaaren abiadura angeluarra ezaguna balitz, hau da sistema mugikorrean adierazitako $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ osagaiak ezagunak badira, beteko da:

$$\begin{aligned} H_0 \sin \theta \sin \varphi &= I_x \omega_x \\ H_0 \sin \theta \cos \varphi &= I_y \omega_y \\ H_0 \cos \theta &= I_z \omega_z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{I_z \omega_z}{H_0}$$

Gainera:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_x \omega_x}{I_y \omega_y}$$

eta azkenik:

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{\omega_z - \dot{\varphi}}{\cos \theta}$$

Giroskopia simetrikoa balitz, triedro mugikorra definitzerakoan, Z ardatz mugikorra, elipsoidearen biraketa ardatza izango da eta X ardatza nodoen lerroak definituko du. Triedro honetan beteko da:

$$\begin{aligned} I_x \omega_x &= 0 \\ I_y \omega_y &= H_0 \sin \theta \\ I_z \omega_z &= H_0 \cos \theta \end{aligned}$$

Kontutan izanik abiadura angeluarraren osagaien eta Euler-en angeluen arteko erlazioak:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned}$$

Eta beraz:

$$\begin{aligned}\omega_x = 0 &\Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = kte. \\ I_x \dot{\psi} \sin\theta &= H_o \sin\theta \Rightarrow \dot{\psi} = kte. \\ I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta) &= H_o \cos\theta \Rightarrow \dot{\phi} = kte.\end{aligned}$$

Hau da, mugimendua egonkorra da nutazioko angeluaren balio finko batez.

Aurreko adierazpenetatik atera daiteke:

$$\frac{H_o \sin\theta}{H_o \cos\theta} = \frac{I_x \omega_y}{I_z \omega_z} = \frac{I_x \dot{\psi} \sin\theta}{I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta)} = \operatorname{tg} \theta$$

Eta azkeneko hau sinplifikatuz:

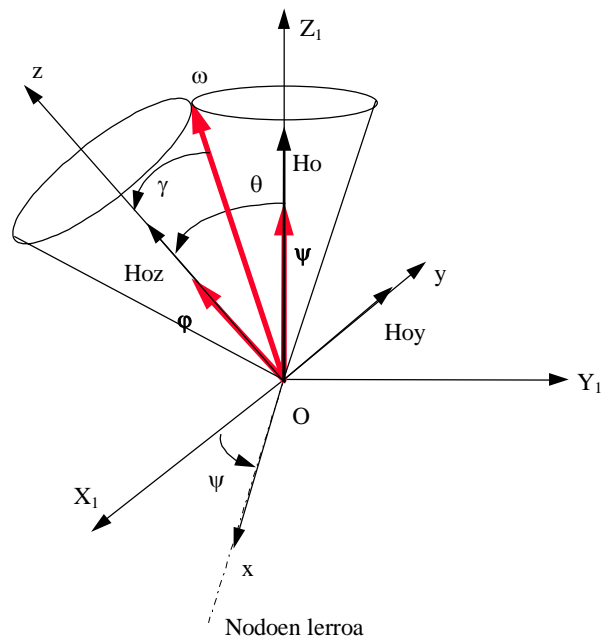
$$I_z \dot{\phi} + (I_z - I_x) \dot{\psi} \cos\theta = 0$$

Ekuazio honek, berezko biraketa eta preziesioko abiadura angeluarrak erlazionatzen ditu emandako nutazioko angelu bakoitzarentzat.

Atera berri diren ekuazioak erabiliz mugimendua hurrengo moduan interpreta daiteke. Deituz γ , $\vec{\omega}$ abiadura angeluar bektoreak z ardatzarekin osatzen duen angeluari, beteko da:

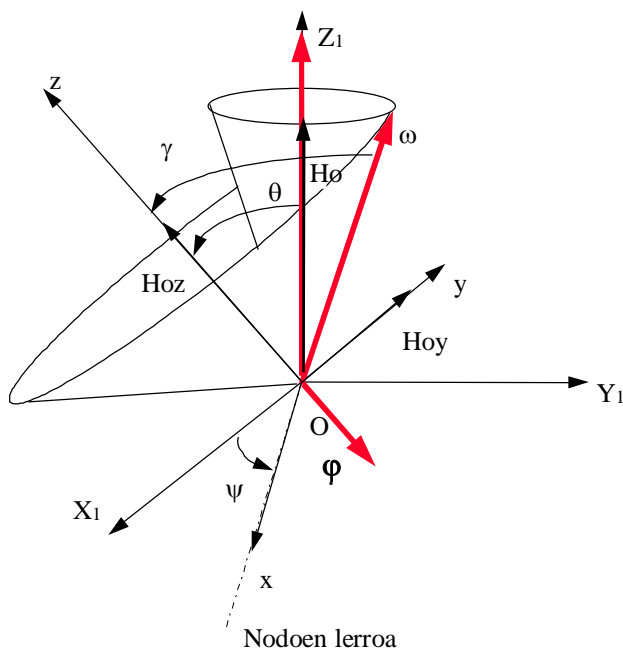
$$\left. \begin{aligned}\operatorname{tg} \theta &= \frac{I_x \omega_y}{I_z \omega_z} \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\omega_y}{\omega_z}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{I_x}{I_z} \operatorname{tg} \gamma$$

Beraz, baldin $I_x > I_z \Rightarrow \theta > \gamma$, preziesioa zuzena da eta axoide mugikorra, finkoaren kanpotik biratzen du, 18.3 irudian adierazten den moduan.



18. 3 irudia

Baldin $I_x < I_z \Rightarrow \theta < \gamma$ bada, prezesioa atzerakoia da (ikus 18.4 irudia).



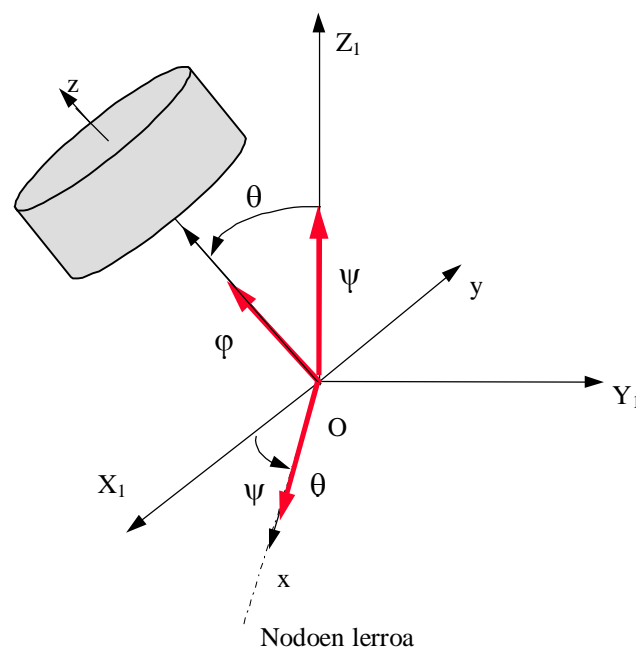
18. 4 irudia

18.5 EULER-LAGRANGEREN GIROSKOPIOA.

Giroskopio bat, Euler-Lagrangerena dela esango da baldin eta masa zentroa ez den puntu finkoko inertzi elipsoidea biraketakoa bada eta solidoa, bere pisuaren eraginpean bakarrik mugitzen denean.

18.5.1 Mugimenduaren ekuazioak.

Euler-Lagrangeren giroskopioaren azterketa egiteko hartuko den erreferentzi sistema mugikorreko Z ardatza, inertzi elipsoidearen biraketa ardatza izango da eta X ardatza nodoen lerroa. Prezesioko ardatza bertikala izango da. (ikus 18.5 irudia).



18.5 irudia

Mugimenduaren ekuazioak lortzeko modu bat momentu zinetikoaren teorema aplikatzea da. Koordinatu orokortuz Euler-en angeluak hartuz, momentu zinetiko bektoreak eta bere deribatuak hurrengo moduan idatziko dira:

$$\vec{H}_O = I_x \dot{\theta} \vec{i} + I_x \dot{\psi} \sin \theta \vec{j} + I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = I_x \ddot{\theta} \vec{i} + I_x (\ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \vec{j} + I_z (\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \vec{k} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\theta} & \dot{\psi} \sin \theta & \dot{\psi} \cos \theta \\ I_x \dot{\theta} & I_x \dot{\psi} \sin \theta & I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{vmatrix}$$

Giroskopioaren masa zentroa eta puntu finkoaren arteko distantziari h deituz, beteko da:

$$\vec{N}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & h \\ 0 & -Mg \sin \theta & -Mg \cos \theta \end{vmatrix} = Mgh \sin \theta \vec{i}$$

Aurreko adierazpenetatik mugimenduaren hurrengo hiru ekuazio diferentzial lortuko dira:

$$I_x \ddot{\theta} + I_x \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta + (I_z - I_x) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = Mgh \sin \theta$$

$$I_x (\ddot{\psi} \sin \theta + 2\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) - I_z \dot{\theta} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = 0$$

$$I_z (\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) = 0$$

Bigarren ordenako hiru ekuaziotako bat, energia mekanikoa kontserbaziotik lortzen den mugimenduko lehenengo integralaz ordezkatu daiteke:

$$T + V = E$$

Kontutan izanik:

$$T = \frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_x \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2$$

$$V = Mgh \cos \theta$$

dela, lortuko da:

$$\frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_x \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + Mgh \cos \theta = E$$

Giroskopioaren mugimenduaren azterketa egiteko, momentu zinetikoa aplikatuz lortutako bigarren ordenako ekuazio diferentzialekin lan egitea baino hobea da Lagrangeren ekuazioak lortzea eta energiaren kontserbazioa gehituz mugimenduaren lehenengo hiru integral lortuko dira.

Mugimendu honen Lagrangiarrak hartuko duen adierazpena da:

$$L = \frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_x \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - Mgh \cos \theta$$

ψ eta ϕ koordenatuak ziklikoak izatean, zuzenean bi lehenengo integral lortzen dira:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = \text{cte}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = \text{cte}$$

Bi ekuazio hauei gehituz energia mekanikoarena, mugimendua definituko duten ekuazio diferentzialetako sistema lortzen da.

$$I_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = A$$

$$I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = B$$

$$\frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_x \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + Mgh \cos \theta = E$$

A, B eta E konstanteen balioak hasierako baldintzen menpeko dira.

18.5.2 Mugimendu egonkorra.

Hasierako baldintza batzuetarako, Euler-Lagrange-ren giroskopioaren mugimenduan nutazioko angeluaren balioa eta berezko biraketako eta preziesioko abiadura angeluarren balioak konstante mantentzen dira.

Baieztapen hau, lehenagoko hiru lehenengo integraletatik atera daiteke. Lehenengo bietatik lortuko da:

$$I_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + B \cos \theta = A \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{A - B \cos \theta}{I_x \sin^2 \theta}$$

Hau lehenengora eramanez:

$$\dot{\phi} = \frac{B}{I_z} - \frac{A - B \cos \theta}{I_x \sin^2 \theta} \cos \theta$$

Prezesio eta berezko biraketaren adierazpen hauek ordezkatzuz energia mekanikoaren kontserbazioko ekuazioan, lortuko da:

$$\frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(A - B \cos \theta)^2}{I_x \sin^2 \theta} + \frac{B^2}{2I_z} + Mgh \cos \theta = E$$

Modu laburtuan,

$$\frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + V(\theta) = E$$

non,

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(A - B \cos \theta)^2}{I_x \sin^2 \theta} + \frac{B^2}{2I_z} + Mgh \cos \theta$$

den.

Adierazpen honen azterketatik ateratzen da mugimendua posible izango dela

$E - V(\theta) \geq 0$ baldintza betetzen bada, $\frac{1}{2}I_x \dot{\theta}^2$ terminoa ezin baita da negatiboa izan.

Nutazioko abiadura nuluko egoerak,

$$V(\theta) = E$$

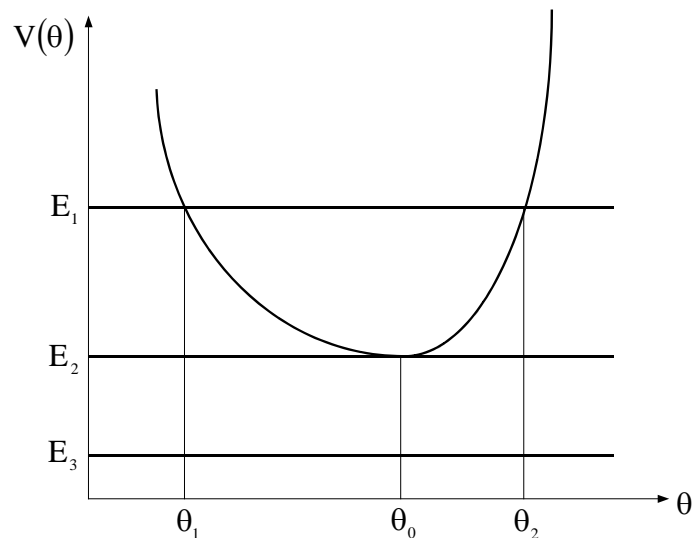
ekuazioaren soluzioak izango dira, hau da

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(A - B \cos \theta)^2}{I_x \sin^2 \theta} + \frac{B^2}{2I_z} + Mgh \cos \theta$$

kurba eta

$$V(\theta) = E$$

zuzenaren arteko ebakidura puntuak.



18. 6 irudia

18.6 irudian adierazten dira E energia mekanikoaren arabera gerta daitezkeen hiru kasu posibleak.

$E = E_1$ energia mailarako, nutazioko abiadura anulatuko duten bi nutazioko angelu

existentituko dira θ_1 eta θ_2 . Bi balio hauen tartean beteko da $\frac{1}{2}I_x \dot{\theta}^2 > 0$.

$E = E_3$ baldintza, giroskopioaren mugimenduarekin bateraezina da, $\frac{1}{2}I_x \dot{\theta}^2 < 0$ bete beharko bai litzateke.

$E = E_2$ balioarekin, giroskopioaren mugimenduko nutazioko angelua konstante izango litzateke $\theta = \theta_0$. Kasu honetan, nutazioko abiadura nulua izango litzateke, $\frac{1}{2}I_x \dot{\theta}^2 = 0$ bete behar baita da.

Azkeneko kasu honetan, prezesioko abiadurak eta berezko biraketak, ψ eta ϕ hurrenez hurren, balio konstantea hartuko dute. Ondorioz, giroskopioaren mugimendua egonkorra izango da.

19 MUGIMENDU TXIKIEN DINAMIKA

19.1 SISTEMA KONTSERBAKORRAK. OREKAREN EGONKORTASUNA.

Indar kontserbakorrek jasaten dituen sistema material baten oreka posizioko baldintzak lortu nahi dira.

Lotura holonomoak eta eskleronomoak dituen sistema batetako edozein partikularen posizio bektorea

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n)$$

adierazpenak ematen du. Sistemari desplazamendu birtual bat ezarriz, partikularen posizio berria

$$\vec{r}_i + \delta \vec{r}_i = \vec{r}_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j$$

adierazpenak ematen du eta ondorioz, desplazamendu horretan egingo litzatekeen lan birtuala

$$\overline{\delta W} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{api} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{api} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^n \delta q_j \cdot \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_{api} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{j=1}^n Q_j \cdot \delta q_j$$

izango da, non:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{api} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

terminoa, q_j koordenatu orokortuari elkartutako indar orokortua den. Lan birtualen teoremaren arabera, orekan beteko da

$$\overline{\delta W} = \sum_{j=1}^n Q_j \cdot \delta q_j = 0$$

eta kontutan izanik koordenatu orokortuak independenteak direla euren artean hurrengo baldintza bete beharko da:

$$Q_j = 0 \quad \forall j = 1..n$$

Indarrak kontserbakorrek badira, hau da V funtzio potentzialetik eratorriak badira:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Ondorioz, orekan bete beharko da:

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

Oreka posizioan sistemaren egonkortasuna aztertzeko, begiratuko da funtzio potentzialak posizio horretan nolako muturreko balioa hartzen duen (hau da, maximoa, minimoa den...). Bi askatasun gradutarako edukiko da:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \end{vmatrix}$$

Oreka posizioa izango da:

- egonkorra: baldin $H > 0$ eta $H_{11} > 0$ (funtzio potentzialaren minimoa)
- ezegonkorra: baldin $H > 0$ eta $H_{11} < 0$
- zeladura puntua: baldin $H < 0$
- indiferentea: baldin $H = 0$

19.2 SISTEMA BATEN OSZILAZIO TXIKIAK OREKA EGONKORREKO POSIZIOAREN INGURUAN.

Gai honen helburua da solido zurrunez osatutako sistema mekaniko baten oszilazioak oreka egonkorreko posizioaren inguruan. Oszilazioaz hitz egiterakoan suposatzen da sistema mekanikoa mugitzen dela inolako deformaziorik gabe. Bibrazioaz hitz egiterakoan, ordea, sistema mekanikoa deformatu egingo da.

Gai honetan suposatuko da sistema mekanikoa solido zurrunez osatuta dagoela, loturak holonomo, eskleronomo eta perfektuak direla eta sistemak indar kontserbakorrak

bakarrik jasaten dituela. Guzti honek esan nahi du existituko dela V funtzio potentziala eta sistemaren energia mekanikoa kontserbatu egingo dela.

Aurreko apartatuan esan de moduan, oreka posizioetan V funtzio potentzialak balio gerakorra hartzen du. Oreka posizioa egonkorra izango da balin eta V funtzioak minimo bat badu posizio horretan.

Inolako orokortasun galtzerik ez dakarren hurrengo bi baldintzak onartuko dira:

1. Oreka posizioko energia potentziala nulua da:

$$V_{\text{orka}} = 0$$

2. Oreka posizioan, koordenatu orokortuen balioa nulua da:

$$q_i = 0, \forall i = 1, n \Rightarrow V = V_{\text{orka}}$$

19.3 ENERGIA POTENTZIAL ETA ZINETIKOAREN ADIERAZPEN LABURTUAK.

Sistema oreka posizioaren inguruan mugitzen ari denerako, energia zinetiko eta energia potentzialaren adierazpen hurbildu baliagarriei deituko zaie energia zinetiko eta potentzialaren adierazpen laburtuak.

19.3.1 Energia potentzialaren adierazpen laburtua.

Sistema baten $V(q_1, q_2, q_3 \dots q_n)$ energia potentzial ezagunaren adierazpena, oreka egonkorreko posizioaren inguruko McLaurin-en seriean garatuz:

$$V \cong V_{\text{orka}} + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{\text{orka}} \cdot q_i + \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\text{orka}} \cdot \frac{q_i q_j}{2} + \sum_{i,j,k=1}^n \left. \frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right|_{\text{orka}} \cdot \frac{q_i q_j q_k}{6} + \dots$$

Onartu denez orekan $V_{\text{oreka}} = 0$, eta kontutan izanik oreka posizioan potentzialak balio

gerakorra duela (minimoa) $\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{\text{oreka}} = 0$; aurreko serie-garapena laburtuko da

hurrengoan:

$$V \cong \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\text{oreka}} \cdot \frac{q_i q_j}{2} + \sum_{i,j,k=1}^n \left. \frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right|_{\text{oreka}} \cdot \frac{q_i q_j q_k}{6} + \dots$$

Hirugarren ordenako gaiak eta handiagoak mesprezatuz, koordenatu orokortuaren balioak txikiak direnez, lortuko da energia potentzial laburtuaren adierazpena:

$$V_{\text{laburtua}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\text{oreka}} \cdot q_i q_j$$

Batukarian koordenatu orokortuak biderkatzen dituen $\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\text{oreka}}$ gaia, funtzio

potentzialaren Hessiar matrizearen termino orokorra da. Matrize hau, simetrikoa da V funtzio potentzialak beharrezkoak diren deribagarritasun eta jarraitasun baldintzak betetzen dituen neurrian.

$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\text{oreka}}$ terminoa, normalean K_{ij} moduan adieraziko da eta orekako Hessiar

matrizea adieraziko da $[K]$ matrize moduan, zurruntasun matrize deituko zaiolarik.

Energia potentzial laburtuak, modu matrizialean hurrengo adierazpena hartuko du:

$$V_{\text{laburtua}} = \frac{1}{2} \{q\}^T \cdot [K] \cdot \{q\}$$

Adierazpen hau forma koadratiko batena da. Mugimendua oreka egonkorreko posizioaren inguruan gertatzen bada, $V_{\text{oreka}} > 0$ bete behar da, ondorioz $[K]$ matrize definitu positiboa izan behar duelarik.

19.3.2 Energia zinetikoaren adierazpen laburtua.

Sistema materiala N masa puntualez osatuta badago, energia zinetikoaren adierazpena

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \cdot v_{\alpha}^2$$

izango litzateke.

Lotura eskleronomoak izatean, puntuaren posizio bektorea koordenatu orokortuen menpeko da bakarrik eta ez da denbora modu esplizituan azalduko; hau da

$$\vec{r}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha}(q_1, \dots, q_n)$$

$$\vec{v}_{\alpha} = \frac{d\vec{r}_{\alpha}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i$$

Beraz, energia zinetikoak hartuko duen adierazpena izango da:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_j \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

T_{ij} aldi berean, (q_1, \dots, q_n) koordenatu orokortuen menpeko izango da (eta ez denboraren menpeko). T_{ij} funtzioaren serie garapena eginaz:

$$T_{ij} \cong T_{ij}|_{\text{oreka}} + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} \right|_{\text{oreka}} \cdot q_k + \sum_{k,l=1}^n \left. \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{\text{oreka}} \cdot \frac{q_k q_l}{2} + \dots$$

eta energia zinetikoaren adierazpenean ordezkaturuz:

$$T \cong \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n T_{ij}|_{\text{or}} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} \right|_{\text{oreka}} q_k \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j + \dots$$

Gai esanguratsuenak lehenengo batukarikoak izatean:

$$T \cong \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n T_{ij}|_{\text{oreka}} \dot{q}_i \dot{q}_j = T_{\text{laburtua}}$$

$T_{ij}|_{\text{oreka}}$ gaia M_{ij} moduan adierazten da eta ondorioz:

$$T_{\text{laburtua}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Eta modu matritzialean:

$$T_{\text{oreka}} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}\}$$

$[M]$ matrize simetrikoa da eta energia zinetikoa beti positiboa denez $[M]$ matrizearen bidez lortutako forma koadratikoa definitu positiboa da. $[M]$ matrizeari sistemako masa matrizea deituko zaio.

Energia zinetikoaren adierazpena lortzeko, sistema oreka posizioan dagoelarik $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 \dots \dot{q}_n$ abiadura orokortuaz mugitzen ari dela suposatuko da.

19.4 MUGIMENDUAREN EKUAZIOAK

Sistemaren mugimenduaren ekuazioak lortzeko Lagrangeren ekuazioak aplikatuko dira.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Lagrangiarraren adierazpenean, potentzial laburtuak eta energia zinetiko laburtuak eraturako Lagrangiar laburtua erabiliko da.

$$L = T_{\text{laburtua}} - V_{\text{laburtua}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot q_i q_j$$

Deribatuz:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_{kj} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_{ik} \dot{q}_i$$

eta $M_{kj} = M_{jk}$ denez

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^n M_{kj} \dot{q}_j$$

Ondorioz, Lagrangeren ekuazioko lehenengo gaia

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^n M_{kj} \ddot{q}_j$$

izango da.

Bestalde

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = - \sum_{j=1}^n K_{jk} q_j$$

Beraz, Lagrangeren ekuazioa izango da:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^n M_{kj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n K_{jk} q_j = \sum_{j=1}^n (M_{kj} \ddot{q}_j + K_{jk} q_j) = 0, \forall k = 1 \dots n$$

Modu matritzialean adieraziz:

$$[M] \cdot \{\ddot{q}\} + [K] \cdot \{q\} = \{0\}$$

Hau da, bigarren ordenako n ekuazio diferentzialeko sistema bat lortzen da.

Ekuazio hauen soluzioak

$$\{q\} = \{a\} \cdot e^{-i\omega t}$$

modukoak dira, non $\{a\}$ zenbakizko bektore bat den eta ω parametroa. Lehenengo bi deribatuak kalkulatu

$$\{\dot{q}\} = -i\omega \cdot \{a\} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\{\ddot{q}\} = -\omega^2 \cdot \{a\} \cdot e^{-i\omega t}$$

eta ekuazio sisteman ordezkatzuz lortuko da:

$$-\omega^2 \cdot [M] \cdot \{a\} \cdot e^{-i\omega t} + [K] \cdot \{a\} \cdot e^{-i\omega t} = \{0\}$$

Aurrekoa egia izateko, bete behar da

$$([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \{a\} = \{0\}$$

Masa matrizearen alderantzizkoarekin biderkatuz:

$$([M]^{-1} \cdot [K] - \omega^2 \cdot [I]) \cdot \{a\} = \{0\}$$

$([M]^{-1} \cdot [K])$ matrize biderketari, sistemaren , matrize dinamikoa deitzen zaio eta $[B]$ bezala adieraziko da. Beraz,

$$([B] - \omega^2 \cdot [I]) \cdot \{a\} = \{0\} \text{ edo } [B] \cdot \{a\} = \omega^2 \cdot \{a\}$$

Hau da, matrize dinamikoaren autobalio eta autobektoreen problema ebatzi behar da. Masa matrize eta zurruntasun matrizearen propietateak kontutan izanik, demostra

daiteke beti aurkituko direla proposatutako moduko $2n$ soluzio linealki independente. ω balio positiboek, sistemaren frekuentzia natural deituko zaie eta dagokion autobektoreari frekuentziari elkartutako oszilazio modoa. ω -ren balioak, $[[\mathbf{K}] - \omega^2 \cdot [\mathbf{M}]] = 0$ determinantearen erroak dira.

Hasierako baldintza batzuk beteko dituen mugimendu konkretua $2n$ soluzio linealki independenteen konbinaketa linealak emango du.

$$\begin{aligned} \{q\} &= C_1 \{a_1\} \cdot e^{-i\omega_1 t} + \dots + C_n \{a_n\} \cdot e^{-i\omega_n t} + \\ &+ C_{n+1} \{a_{n+1}\} \cdot e^{i\omega_1 t} + \dots + C_{2n} \{a_{2n}\} \cdot e^{i\omega_n t} = C'_1 \{a_1\} \cdot \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \dots + C'_n \{a_n\} \cdot \cos(\omega_n t - \varphi_n) \end{aligned}$$

20 PERKUSIOEN DINAMIKA I

20.1 OROKORTASUNAK

Newton-en bigarrenko legetik:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

hurrengo adierazpenak planteatu daitezke:

$$\vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{v} \Rightarrow \int_0^t \vec{F} \cdot dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} m \cdot d\vec{v}$$

non,

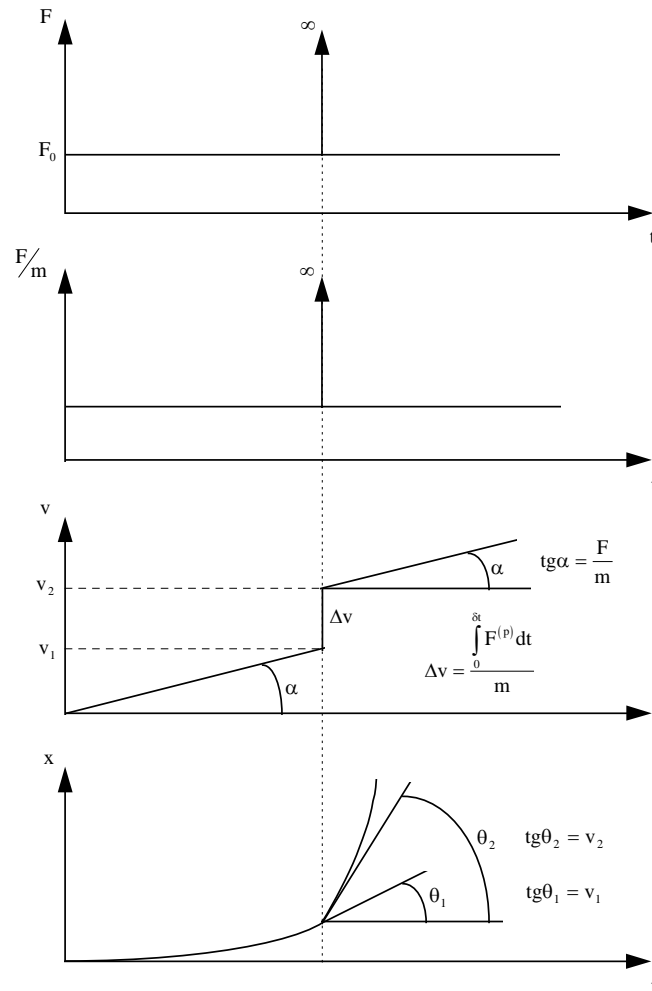
$\vec{F} \cdot dt$ gaiari, **indarraren bulkada elementala** deituko zaion, eta

$\int_0^t \vec{F} \cdot dt$ gaiari, $[0,t]$ tartean **indarrak egiten duen bulkada** deituko zaion.

Indarraren modulua gero eta handiago balitz, denbora tartea gero eta txikiagoa izan beharko luke bulkadaren balioa berdina izan dadin. Indarra infiniturantz doanean, denbora tartea infinitesimala izango litzateke. Bien biderketa den bulkadari, \vec{P} **perkusio** deituko zaio, eta bera sortzen duen $\vec{F}^{(p)}$ indarrari, **perkusio indarra**.

$$\vec{P} = \int_0^{\delta t} \vec{F}^{(p)} \cdot dt$$

Perkusio indarrak eta perkusioak, indar normalen moduan, barneko eta kanpokoetan bananduko dira. Kanpokoak, berriz, zatituko dira aplikatuetan eta loturetakoetan.



20.1 irudia

Demagun puntu material batek traiektoria zuzen bat deskribatzen duela konstante den \vec{F}_0 indarraren eraginagatik. t_p aldiunean, \vec{P} perkusioa aplikatzen zaio. Goiko irudian, azaltzen dira puntu material horri dagozkion indarra/denbora, azelerazio/denbora, abiadura/denbora eta posizio/denbora diagramak.

Partikularen mugimendua orokorra denerako, perkusioen dinamikako hurrengo hipotesiak ezarriko dira.

- 1^a. Partikula material batek perkusio bat jasaten duenean, desplazamendu aldaketarik gabe, bat-bateko abiadura aldaketa jasango du.
- 2^a. Modu jarraian abiadura eremua aldatuko litzatekeen *gezurretako denborari*, perkusio-denbora deituko zaio.
- 3^a. Abiadura eremuaren aldaketa, higidura kantitatearen teorema eta momentu zinetikoaren teorema erabiliz lortuko dira. Horretarako Dinamikako mugimendu finituetarako egokituko dira teorema hauek.

20.2 PERKUSIOEN DINAMIKAKO OINARRIZKO TEOREMAK.

20.2.1 Higidura kantitatearen teorema.

Biz N partikulaz osatutako sistema mekanikoa. Sistemaren gainean indar normalek eta perkusio-indarrek aktuatzen dute. Higidura kantitatearen teorema sistemako partikula bati aplikatuz, hurrengo idatziko da:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{ak_i} + \vec{F}_{ak_i}^{(p)}$$

Aurreko adierazpena, sistema mekaniko guztira zabalduz:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ak_i} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ak_i}^{(p)} \\ d\vec{p} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ak_i} dt + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ak_i}^{(p)} dt \end{aligned}$$

Aurreko bigarren ekuazioa, perkusio denbora zehazten duen δt tartean integratuz eta 1 eta 2 azpindizeak erabiliz perkusio aurreko eta ondorengo magnitude zinetikoak adierazteko, lortuko da:

$$\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \int_0^{\delta t} \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ak_i} dt + \int_0^{\delta t} \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ak_i}^{(p)} dt$$

Bigarrenengo ataleko lehenengo integrala, magnitude infinitesimala da, \vec{F}_{ak_i} indarrak modulu finitua duenez eta δt integrazioko tartea infinitesimo bat denez. Beraz:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{ak_i} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{kan_i} + \sum_{i=1}^N \vec{P}_{bar_i}$$

Barneko indar perkusionalen batura, barneko indar normalena bezala, anulatu egiten da eta era berean, barneko perkusioen batura ere anulatu egiten da. Beraz:

$$\Delta\vec{p} = M\vec{v}_{G2} - M\vec{v}_{G1} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{ex_i}$$

Ekuazio hau da higidura kantitatearen teoremaren adierazpen matematikoa: *Sistema mekaniko baten higidura kantitatearen gehikuntza, kanpoko perkusioen baturaren berdina da.*

20.2.2 Momentu zinetikoaren teorema

Sistema materialeko i partikularen momentu zinetiko bektorea deribatuz:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{H}_{O_i}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\vec{OA}_i \times m_i \vec{v}_i \right) = (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \times m_i \vec{v}_i + \vec{OA}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \\ &= -\vec{v}_O \times \vec{p}_i + \vec{OA}_i \times \vec{F}_{ak_i} + \vec{OA}_i \times \vec{F}_{ak_i}^{(p)} = \\ &= \vec{p}_i \times \vec{v}_O + \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i} + \vec{OA}_i \times \vec{F}_{bar_i} + \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i}^{(p)} + \vec{OA}_i \times \vec{F}_{bar_i}^{(p)} \end{aligned}$$

Emaitza hau sistema guztira zabalduz eta kontutan izanik barneko indarren momentu ordezkaria nulua izango dela, lortuko da:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{H}_O}{dt} &= \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \times \vec{v}_O + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i} + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{bar_i} + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i}^{(p)} + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{bar_i}^{(p)} = \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \times \vec{v}_O + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i} + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i}^{(p)}\end{aligned}$$

Ondorioz:

$$d\vec{H}_O = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \times \vec{v}_O dt + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i} dt + \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i}^{(p)} dt$$

eta integratuz:

$$\int_{\vec{H}_{O1}}^{\vec{H}_{O2}} d\vec{H}_O = \int_0^{\delta t} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \times \vec{v}_O dt + \int_0^{\delta t} \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i} dt + \int_0^{\delta t} \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i}^{(p)} dt$$

Bigarrego ataleko bi lehenengo integralak modulu infinitesimaleko bektoreak dira, \vec{p}_i higidura kantitatea, \vec{v}_O abiadura eta \vec{F}_{kan_i} indarra modulu finituko bektoreak bai dira eta δt integrazio-tartea infinitesimo bat da. Beraz:

$$\vec{H}_{O2} - \vec{H}_{O1} = \Delta\vec{H}_O = \int_0^{\delta t} \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i}^{(p)} dt = \sum_{i=1}^N \int_0^{\delta t} \vec{OA}_i \times \vec{F}_{kan_i}^{(p)} dt = \sum_{i=1}^N \left[\vec{OA}_i \times \int_0^{\delta t} \vec{F}_{kan_i}^{(p)} dt \right]$$

$$\Delta\vec{H}_O = \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{P}_{ex_i}$$

Beraz, momentu zinetikoaren teorema, perkusioen dinamikara egokituz, esan daiteke: *Sistema mekaniko baten momentu zinetikoaren gehikuntza, kanpoko perkusioen momentuaren berdina da.*

20.2.3 Energiaren teorema.

Partikula baten energia zinetikoa da:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Eta, perkusio aurretik eta ondorengo energia zinetikoa adieraziz hurrenez hurren:

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{i1}^2 \qquad T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{i2}^2$$

Sistema mekanikoan gertatuko den energia zinetikoaren gehikuntza perkusioak gertatutakoan, izango da:

$$\begin{aligned} \Delta T = T_2 - T_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_{i2}^2 - v_{i1}^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1}) \cdot (\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}) = \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{P}_{ak_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2} \end{aligned}$$

20.3 PERKUSIOAK JASATEN DITUEN SOLIDO ZURRUNA

Partikula material batetarako ezarri diren perkusioen dinamikako hipotesiak, solido zurrunaren kasurako hurrengo moduan orokortu daitezke.

1. Perkusioak jasaten dituen solido zurruna batek, bere abiadura eremuaren bat-bateko aldaketa jasango du, inolako posizio aldaketarik gabe.
2. Modu jarraian abiadura eremua aldatuko litzatekeen *gezurretako denborari*, perkusio-denbora deituko zaio.

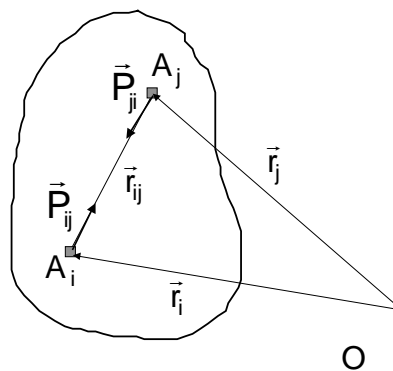
3. Abiadura eremuaren aldaketa, higidura kantitatearen teorema eta momentu zinetikoaren teorema erabiliz lortuko dira. Horretarako Dinamikako mugimendu finituetarako egokituko dira teorema hauek.

Higidura kantitatearen teorema eta momentu zinetikoaren teorema, edozein sistema mekanikori aplika daitezke ez baita da inolako baldintzarik ezarri ekuazioak ateratzerakoan, eta, beraz, baita solido zurrunei ere aplikatuko dira.

Momentu zinetikoaren teorema grabitate zentroan aplikatzen bada:

$$(\{\omega_2\} - \{\omega_1\})^T [I_G] \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \vec{GA}_i \times \vec{P}_{kan_i}$$

Energía zinetikoaren teorema aplikatzerakoan, barneko perkusioak kontutan hartu beharrik ez dago, energia zinetikoaren gehikuntza kanpoko perkusioen menpeko delako. Barneko perkusioak binaka bilduz, bektore bikotearen batura anulatzen delarik, eta A_i eta A_j puntuen arteko abiaduraren adierazpena erabiliz:



20.2 irudia

$$\vec{P}_{bar_{ij}} \cdot \vec{v}_i + \vec{P}_{bar_{ji}} \cdot \vec{v}_j = -\vec{P}_{bar_{ij}} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) = -\vec{P}_{bar_{ij}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{ij})$$

Perkusioek Newton-en hirugarren legea beteko dutenez:

$$\vec{P}_{\text{bar}_{ij}} = \lambda \cdot \vec{r}_{ij}$$

eta beraz:

$$-\vec{P}_{\text{bar}_{ij}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{ij}) = -\lambda \cdot \vec{r}_{ij} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{ij}) = 0$$

Ondorioz:

$$\vec{P}_{\text{bar}_{ij}} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2} + \vec{P}_{\text{bar}_{ji}} \cdot \frac{\vec{v}_{j2} + \vec{v}_{j1}}{2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{P}_{\text{bar}_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2} = 0$$

Energiaren teoremaren adierazpena, solido zurrunen kasurako izango da:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \sum_{i=1}^N \vec{P}_{\text{akt}_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{\text{kan}_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2} + \sum_{i=1}^N \vec{P}_{\text{bar}_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2} = \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{P}_{\text{kan}_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{\text{apl}_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2} + \sum_{i=1}^N \vec{P}_{\text{lot}_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2} \end{aligned}$$

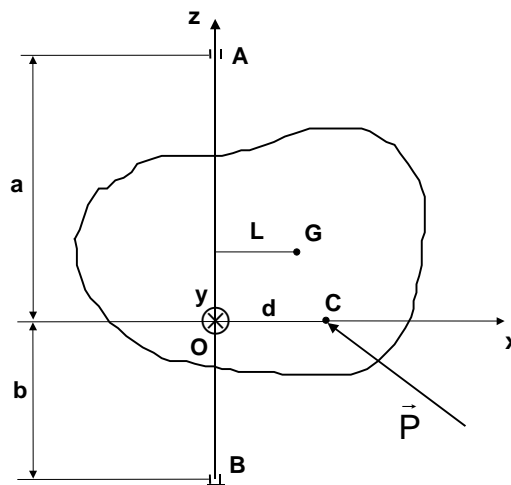
Perkusioen dinamikan, perkusiorik gabekoan gertatzen zen bezala, demostra daiteke energiaren teorematik aterako den ekuazioa, higidura kantitate eta momentu zinetikoaren teoremak aplikatuz lortuko diren ekuazioen konbinaketa dela.

Solidoen loturak, perkusioak azaltzen direnean, hurrengo moduan sailkatuko dira:

- *Lotura iraunkorra*: beti existitzen denean.
- *Lotura etengabea*: perkusioak irauten duten tartean existitzen denean.
- *Lotura etendua*: perkusioa gertatzen den tartean irauten ez duena.

20.4 PERKUSIOAK JASATEN DITUEN ARDATZ FINKODUN SOLIDOA: PERKUSIO-ZENTROA.

Biz ardatz finko batekiko biratzen duen solido zurruna. Jarraian aztertuko da solidoari perkusio bat aplikatzerakoan, lotura-perkusiorik azaldu ez dadin zer baldintza bete behar diren.



20.3 irudia

Aplikaturako indarrekin gertatzen zen bezala, solido zurrunetan aplikaturako perkusioak, bektore labainkorren bidez adieraziko dira. Ondorioz ez dago inolako orokortasun galtzerik perkusioaren C aplikatze puntua, G grabitate zentroak eta AB biraketa ardatzak definitutako planoan dagoela onartzen bada. Problema errazteko, plano hau XOZ planotzat hartuko da, OZ ardatza biraketa ardatza izango da eta OX ardatzean C puntua egongo da.

Dinamikako oinarriko teorema aplikatuz, hurrengo lortuko da:

$$M\vec{v}_{G2} - M\vec{v}_{G1} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{kan,i} \Rightarrow \begin{cases} 0 = P_x + A_x + B_x \\ ML(\omega_2 - \omega_1) = P_y + A_y + B_y \\ 0 = P_z + B_z \end{cases}$$

$$\Delta \vec{H}_O = \sum_{i=1}^N \vec{OA}_i \times \vec{P}_{kan_i} \Rightarrow \begin{cases} -C_y(\omega_2 - \omega_1) = -A_y \cdot a + B_y \cdot b \\ -C_x(\omega_2 - \omega_1) = -P_z \cdot d + A_x \cdot a + B_x \cdot b \\ I_z(\omega_2 - \omega_1) = P_y \cdot d \end{cases}$$

A loturako lotura-perkusioaren osagaiak A_x eta A_y dira eta B loturakoak berriz B_x , B_y eta B_z .

Sei ekuazio hauen bidez, lotura-perkusioen 5 osagaiak lortuko dira eta perkusioa gertatu ondorengo abiadura angeluarraren balioa.

Lotura-perkusiorik ez badu azaldu behar, aurreko ekuaziotatik lortuko da:

$$\begin{aligned} ML(\omega_2 - \omega_1) &= P_y \\ 0 &= P_x \\ 0 &= P_z \\ C_y(\omega_2 - \omega_1) &= 0 \\ C_x(\omega_2 - \omega_1) &= 0 \\ I_z(\omega_2 - \omega_1) &= P_y \cdot d \end{aligned}$$

Ondorioz:

$$\begin{aligned} P_x &= P_z = 0 \\ P_y &= P \\ C_x &= C_y = 0 \\ d &= \frac{I_z}{ML} \end{aligned}$$

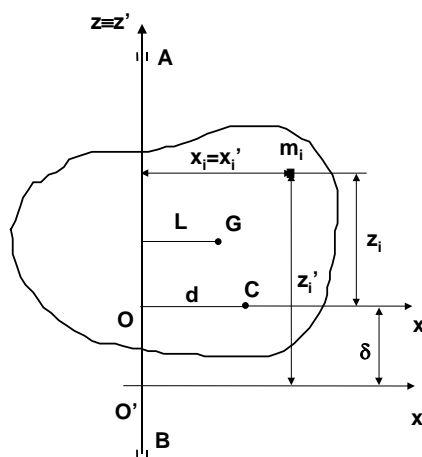
Beraz, solidoaren gainean perkusio bat aplikatzen bada, lotura-perkusiorik ez azaltzeko bete behar diren baldintzak hurrengoak izango dira:

- Aplikatutako perkusioa, biraketa-ardatzak eta grabitate-zentroak definitutako planoari elkarzuta izan behar zaio.

- Biraketa-ardatzak O puntuko inertzi ardatz nagusi izan behar du.
- Perkusioaren ekintza zuzena eta biraketa ardatzaren arteko distantziak I_z / ML balio behar du.

Baldintza hauek beteko dituen C puntuari **perkusio-zentroa** deituko zaio. Hiru dimentsiotako solido baten kasuan, nahiko konplikatu izan daiteke OX ardatza kokatzea, hau da a eta b-ren balioak definitzea.

Solidoa laua bada eta biraketa-ardatza solidoaren planoan badago kalkulua errazagoa da.



20.4 irudia

Demagun solidoaren grabitate-zentroa ezaguna dela eta erreferentzia-sistema bat hartuz, $Y'O'Z'$ eta $Y'O'X'$ planoekiko inertzi biderketa ere ezaguna bela. $C_x = 0$ enez solidoa laua izatean, kalkulatu behar dena da OX ardatzaren posizioa $C_y = 0$ baldintza bete dadin.

Beraz, beharrezkoa da:

$$C_y = \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i = 0$$

Kontutan izanik:

$$z_i = z'_i - \delta$$

Beteko da:

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i z'_i - \delta \sum_{i=1}^N m_i x_i = 0$$

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i z'_i}{\sum_{i=1}^N m_i x_i} = \frac{C_{x'z'}}{ML}$$

21 PERKUSIOEN DINAMIKA II

21.1 GALDUTAKO ABIADUREN ENERGIA ZINETIKOA

Partikula batek perkusio aurretik duen abiadurari kentzen bazaio perkusio ondorengoa, lortutako abiadurari deituko zaio *partikularen galdutako abiadura*. Sistema mekaniko baten T_w , *galdutako abiaduren energia zinetikoa* izango da sistemak edukiko lukeen energia zinetikoa, *galdutako abiadurekin* mugituko balitz.

$$\begin{aligned} T_w &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2})^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2}) \cdot (\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2}) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1}) \cdot (\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1}) = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{akt_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1}}{2} \end{aligned}$$

Ikusienez, sistema solido zurrunez osatuta dagoenean:

$$\vec{P}_{bar_{ij}} \cdot \vec{v}_i + \vec{P}_{bar_{ji}} \cdot \vec{v}_j = -\vec{P}_{bar_{ij}} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) = -\vec{P}_{bar_{ij}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{ij}) = -\lambda \cdot \vec{r}_{ij} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{ij}) = 0$$

eta ondorioz, galdutako abiaduren energia zinetikoa kalkulatzekoan, barneko perkusiorik ez dago kontutan hartuko:

$$T_w = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{kan_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1}}{2}$$

21.2 CARNOT-EN TEOREMA

Solido zurrunez osatutako sistema mekaniko batek, perkusioak jasaterakoan edukiko duen energia zinetikoaren gehikuntza da:

$$\Delta T = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{kan_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2}$$

Adierazpen honi, galdutako abiaduren energia zinetikoarena gehituz, beteko da:

$$\Delta T + T_w = T_2 - T_1 + T_w = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{kan_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} + \vec{v}_{i1}}{2} + \sum_{i=1}^N \vec{P}_{kan_i} \cdot \frac{\vec{v}_{i2} - \vec{v}_{i1}}{2} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{kan_i} \cdot \vec{v}_{i2}$$

Kanpoko perkusioak, aplikatu eta loturako perkusioetan banatuz:

$$T_2 - T_1 + T_w = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{ap_i} \cdot \vec{v}_{i2} + \sum_{i=1}^N \vec{P}_{lot_i} \cdot \vec{v}_{i2}$$

Loturak perfektuak eta etengabeak badira,

$$T_2 - T_1 + T_w = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{ap_i} \cdot \vec{v}_{i2}$$

eta, azkenik, aplikatutako perkusiorik ez balego:

$$T_2 - T_1 + T_w = 0$$

$$T_1 - T_2 = T_w$$

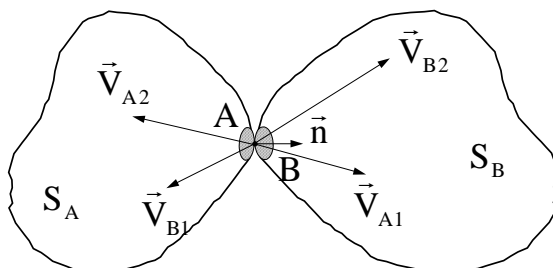
Hau da, Carnot-en teoremaren adierazpen matematikoa. Solido zurrunez osatutako sistema mekaniko batetan, mugitzen ari dena eta lotura perfektu etengabeak dituen, bat-batean lotura berri perfektu eta etengabeak sartzen badira, gertatuko den energia zinetikoaren gutxitzea, galdutako abiaduren energia zinetikoaren berdina izango da.

21.3 SOLIDO DEFORMAEZINEN ARTEKO TALKAK.

Bi solido zurrunek elkar ukitzen dutenean, gutxienez bietako batek, bat-bateko abiadura eremuaren aldaketa bat jasaten du. Fenomeno fisiko honi, **talka** deitzen zaio. Denbora tarte mesprezagarri batetan gertatuko da eta elkar jotzen duten sistema materialen koordenatuen inolako aldaketarik gabe gertatzen da.

S_A solidoko A puntuaren eta S_B solidoko B puntuaren ukipena hasterakoan, puntuen abiadurek, hurrengo baldintza beteko dute:

$$(\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1}) \cdot \vec{n} > 0$$



21.1 irudia

Beraz, gorputzak hurbiltzen jarraitu nahi dute eta, ukipen puntuaren ingurune txiki batetan deformatu egingo dira. Talkaren fase horretan, solidoen arteko lotura indarrak

oso balio handiak hartuko ditu denbora tarte oso txikian. Hau da, talka gertatzen denean, perkusioak azalduko dira ukipenean.

Lehenengo fase hau amaitzean, beteko da:

$$(\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1}) \cdot \vec{n} = 0$$

Eta gorputzen arteko urruntzea hasiko da, lotura indarra gutxituz anulatu arte. Fase berri hau, hurrengo baldintza zinematikoak mugatuko da:

$$(\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1}) \cdot \vec{n} < 0$$

Azken fase honetan, solidoek partzialki edo guztiz ukipen puntuaren inguruko jatorrizko forma berreskuratuko dute.

Beraz, solido zurrunaren deformaiezintasuna eta talkaren fenomenoak bateraezinak direla dirudi. Hala ere, gertatuko diren deformazioak oso txikiak diren eta talka gertatuko den denbora ere oso txikia izango denez, solido zurruntzat egokitutako Dinamikako oinarritzko teoremak aplika daitezke, talkan gertatuko dena kontutan hartu gabe.

Aurreko gaiko perkusioen dinamikako teoremak aplikatzerakoan, ordea, ikusten da beharrezkoa dela ekuazio gehigarri bat. Gorputzen arteko talkan azalduko diren perkusioak, gorputzen izaeraren menpeko eta gainazalen leunetaren menpeko dira. Gorputzak guztiz elastikoak badira, talkan ez da inolako energia galtzerik gertatuko, deformatzerakoan bereganatutako energia guztia itzuliko bai dute. Izaera ezelastiko edo plastikoa duten gorputzek ordea, deformazioko energia zati bat gorde egingo dute.

Gorputzen talka haurreko izaera, koefiziente experimental baten bidez definituko da. Koefiziente honi **itzultze koefizientea** edo **Newton-en koefizientea** deituko zaio:

$$\varepsilon = -\frac{(\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{B2}) \cdot \vec{n}}{(\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1}) \cdot \vec{n}}$$

Guzti hau kontutan izanik, Darboux-ek hurrengo hipotesiak ezarri zituen:

1^a. Solidoen arteko talka gertatzen denean, abiadura eremuaren bat-bateko aldaketa gertatuko da baina ez da koordenatu aldaketarik gertatuko.

2^a. Modu jarraian abiadura eremua aldatuko litzatekeen *gezurretako denborari*, perkusio-denbora deituko zaio.

- 3^a. Abiadura eremuaren aldaketa, higidura kantitatearen teorema eta momentu zinetikoaren teorema erabiliz lortuko dira. Horretarako Dinamikako mugimendu finituetarako egokituko dira teorema hauek.
- 4^a. Talkan sortutako perkusioek, Newton-en hirugarrengo legea beteko dute.
- 5^a. Marruskadurarik ez badago, perkusioak ukipen gainazalari elkarzutak dira.
- 6^a. Marruskaduradun talketan, perkusioen osagai normal eta tangentialak, solidoen arteko marruskaduraren Coulomb-en legeak beteko dituzte.
- 7^a. Talka amaituko da, Newton-en hipotesitik ateratzen den abiadura erlazioa beteko denean.

$$(\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{B2}) \cdot \vec{n} = -\varepsilon(\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1}) \cdot \vec{n}$$

ε koefizientearen arabera, talkak hiru multzotan sailkatuko dira:

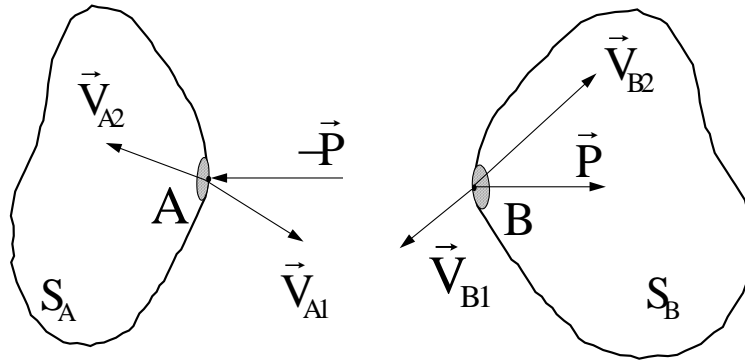
$\varepsilon = 0$	Talka plastikoa
$0 < \varepsilon < 1$	Talka inelastikoa
$\varepsilon = 1$	Talka elastikoa

Solidoen geometria kontutan izanik, hurrengo talkak desberdinduko dira.

- **Talka eszentrikoa:** masa-zentroak lotzen ditun zuzena, ukipen puntutik pasatzen ez denean.
- **Talka zentrala:** masa-zentroak lotzen ditun zuzena, ukipen puntutik pasatzen denean. Kasu honetan, bi aukera daude:
 - **Zuzena:** \vec{v}_{A1} eta \vec{v}_{B1} abiadurek, masa-zentroak lotzen dituen zuzenaren norabidea dute.
 - **Zeiharra:** aurreko baldintza ez denean betetzen.

21.4 MARRUSKADURARIK GABEKO TALKAN GERTATUTAKO ENERGIA ZINETIKOAREN ALDAKUNTZA.

Bira S_A eta S_B solidoak. Elkar talkatzen dute marruskadurarik gabe eta talkaren izaera definituko duen itzultze-koefizientea ε izanik.



21.2 irudia

Gorputzen energia zinetikoaren gehikuntza

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_A &= -\frac{\vec{P}}{2} \cdot (\vec{v}_{A2} + \vec{v}_{A1}) \\ \Delta T_B &= \frac{\vec{P}}{2} \cdot (\vec{v}_{B2} + \vec{v}_{B1}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\Delta T = \frac{\vec{P}}{2} \cdot [(\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{B2}) + (\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1})]$$

adierazpenek ematen dute.

Galdutako abiaduren energia zinetikoa izango da:

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_{wA} &= -\frac{\vec{P}}{2} \cdot (\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{A1}) \\ \Delta T_{wB} &= \frac{\vec{P}}{2} \cdot (\vec{v}_{B2} - \vec{v}_{B1}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_w = -\frac{\vec{P}}{2} \cdot [(\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{B2}) - (\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1})]$$

Itzultze koefizientea erabiliz:

$$\varepsilon = -\frac{(\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{B2}) \cdot \vec{P}}{(\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1}) \cdot \vec{P}} \quad \Rightarrow \quad (\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{B2}) \cdot \vec{P} = -\varepsilon \cdot (\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1}) \cdot \vec{P}$$

Eta aurreko ekuazioetan ordezkaturuz:

$$-\Delta T = \frac{\vec{P}}{2} \cdot [(\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{B2}) + (\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1})] = \frac{\vec{P}}{2} \cdot (\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1}) \cdot (-\varepsilon + 1)$$

$$T_w = -\frac{\vec{P}}{2} \cdot [(\vec{v}_{A2} - \vec{v}_{B2}) - (\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1})] = -\frac{\vec{P}}{2} \cdot (\vec{v}_{A1} - \vec{v}_{B1}) \cdot (-\varepsilon - 1)$$

Adierazpen hauen bidez, energia zinetikoaren aldakuntza eta galdutako abiaduren energia zinetikoaren arteko erlazioa lor daiteke:

$$-\frac{\Delta T}{T_w} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad -\Delta T = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot T_w$$

Aurreko ekuaziotik atera daiteke marruskadura gabeko talka elastikoetan, sistemako energia zinetikoa kontserbatu egingo dela. Beraz $\varepsilon = 1$ baldintzaren ordeztu erabil daiteke hurrengo hau:

$$T_{A1} + T_{B1} = T_{A2} + T_{B2}$$