AZTERKETETAKO ARIKETAK GAIKA SAILKATUTA

1- Matrize, Determinante eta Sistemak.

- Urtarrila 2011, lehen ariketa.
- Maiatza 2011 lehen partziala, lehen ariketako A.
- Uztaila 2011, lehen ariketako A eta B.
- Urtarrila 2012, lehen ariketa eta bigarren ariketako 1 ariketa.
- Maiatza 2012, lehen ariketako 1 ariketa.
- Uztaila 2012, lehen ariketako 1 eta 2 ariketak.
- Urtarrila 2013, lehen ariketa.
- Maiatza 2013 lehen partziala, lehen ariketako 1 eta 2 ariketak.
- Uztaila 2013, lehen ariketako 1 eta 2 ariketak.
- Urtarrila 2014, 1 eta 2 ariketak.
- Maiatza 2014 lehen partziala, 1 ariketa.
- Ekaina 2014, 1 eta 2 ariketak.
- Urtarrila 2015,1 ariketa.
- Maiatza 2015 lehen partziala, 1A), 1B) eta 1C) ariketak.
- Ekaina 2015, 1A), 1B) eta 1C) ariketak.

2- Espazio Bektorialak.

- Urtarrila 2011, bigarren ariketa eta hirugarren ariketako A.
- Maiatza 2011 lehen partziala, lehen ariketako B eta C eta bigarren ariketako A.
- Uztaila 2011, lehen ariketako C.
- Urtarrila 2012, bigarren ariketako 3 ariketa, hirugarren ariketako 1 eta 3 ariketak,
laugarren ariktako 1 ariketa eta bostgarren ariketako 1 ariketa.
- Maiatza 2012, lehen ariketako 2 eta 3 ariketak eta bigarren ariketako 1 ariketa.
- Uztaila 2012, lehen ariketako 3 eta 4 ariketak.
- Urtrrila 2013, bigarren ariketa, hirugarren ariketako 1a) eta 1b) eta laugarren ariketa.
- Maiatza 2013 lehen partziala, lehen ariketako 3 ariketa eta bigarren ariketa.
- Uztaila 2013, lehen ariketako 3 ariketa eta bigarren ariketa.
- Urtarrila 2014, 3 eta 5 ariketak.
- Maiatza 2014 lehen partziala, 2 eta 3a) ariketak.
- Ekaina 2014, 3 ariketa.
- Urtarrila 2015, 2, 3, 4 eta 5c) ariketak.
- Maiatza 2015 lehen partziala, 2A), 2B) eta 3) ariketak.
- Ekaina 2015, 2A), 2B) eta 3. ariketak.

3- Aplikazio Linealak.

- Urtarrila 2011, 3 ariketako B eta laugarren ariketa.
- Maiatza 2011 lehen partziala, bigarren ariketako B eta C.
- Uztaila 2011, bigarren ariketa.
- Urtarrila 2012, bigarren ariketako 2 ariketa, hirugarren ariketako 2 ariketa, bostgarren ariketako 2 ariketa eta seigarren ariketa.
- Maiatza 2012, bigarren ariketako 2 eta 3 ariketak.
- Uztaila 2012, bigarren ariketako 1 eta 2 ariketak.
- Urtarrila 2013, hirugarren ariketako 1c) ariketa, bostgarren ariketa eta seigarren ariketa.
- Maiatza 2013 lehen partziala, hirugarren ariketa.
- Uztaila 2013, hirugarren ariketa.
- Urtarrila 2014, laugarren ariketa, zazpigarren ariketa eta zortzigarren ariketa.
- Maiatza 2014 lehen partziala, 3. ariketako b), c) eta d) atalak eta 4. ariketa.
- Urtarrila 2015, 5a), 5b) eta 6 ariketak.
- Maiatza 2015 lehen partziala, 4A) eta 4B) ariketak.
- Ekaina 2015, 4. ariketa.

4- Biderkadura eskalardun espazioak.

- Maiatza 2011, bigarren partziala, lehen ariketako A eta bigarren ariketako B.
- Uztaila 2011, lehen partziala, hirugarren ariketako A.
- Maiatza 2012, bigarren partziala, lehen ariketako 1) ariketa.
- Uztaila 2012, bigarren partziala, lehen ariketako 1) ariketa.
- Maiatza 2013, bigarren partziala, lehen ariketako 1) ariketa.
- Uztaila 2013, bigarren partziala, bigarren ariketako 1) ariketa.
- Maiatza 2014, bigarren partziala, lehen ariketa.
- Uztaila 2014, laugarren eta bostgarren ariketak.
- Maiatza 2015 bigarren partziala, 1A) eta 1B) ariketak.
- Ekaina 2015, 5. ariketa.

5- Antzekotasun transformazioen bidez diagonalizatzea.

- Maiatza 2011, bigarren partziala, lehen ariketako B.
- Uztaila 2011, bigarren partziala, lehen ariketako A.
- Uztaila 2012, bigarren partziala, lehen ariketako 2) ariketa.
- Maiatza 2013, bigarren partziala, lehen ariketako 2) ariketa.
- Uztaila 2013, bigarren partziala, bigarren ariketako 2) ariketa.
- Maiatza 2014, bigarren partziala, bigarren ariketa.
- Uztaila 2014, seigarren ariketa.
- Maiatza 2015 bigarren partziala, 2. ariketa.
- Ekaina 2015, 6. Ariketa.

6- Antzekotasun transformazioen bidez triangularizazioa.

- Maiatza 2011, bigarren partziala, bigarren ariketako A.
- Uztaila 2011, bigarren partziala, lehen ariketako B.
- Maiatza 2012, bigarren partziala, lehen ariketako 3) ariketa.
- Uztaila 2012, bigarren partziala, lehen ariketako 3) ariketa.
- Maiatza 2013, bigarren partziala, bigarren ariketako 1) ariketa.
- Uztaila 2013, bigarren partziala, lehen ariketa.
- Maiatza 2014, bigarren partziala, hirugarren ariketa.
- Maiatza 2015 bigarren partziala, 3. ariketa.
- Ekaina 2015, 7. ariketa.

ZENBAKIZKO METODOAK.

1- Sarrera.

- Uztaila 2011, bigarren partziala, bigarren ariketako B.
- Maiatza 2015 bigarren partziala, 6. ariketa.

2- Ekuazio linealetako sistemak.

- Maiatza 2011, bigarren partziala, hirugarren eta laugarren ariketak.
- Uztaila 2011, bigarren partziala, bigarren ariketako A eta hirugarren ariketako A.
- Maiatza 2012, bigarren partziala, bigarren ariketako 1) eta 2) ariketak.
- Uztaila 2012, bigarren partziala, lehen ariketako 4) ariketa eta bigarren ariketako 1) ariketa.
- Maiatza 2013, bigarren partziala, bigarren ariketako 2) ariketa eta hirugarren ariketako 1) ariketa.
- Uztaila 2013, bigarren partziala, bigarren ariketako 2) eta hirugarren ariketako 1) ariketa.
- Maiatza 2014, bigarren partziala, laugarren eta bostgarren ariketak.
- Uztaila 2014, bigarren partziala, zazpigarren eta zortzigarren ariketak.
- Maiatza 2015 bigarren partziala, 4. ariketa.
- Ekaina 2015, 8 eta 9. ariketak.

3- Hurbilketa minimo koadratikoa.

- Maiatza 2011, bigarren partziala, bostgarren ariketa.
- Uztaila 2011, bigarren partziala, hirugarren ariketako B.
- Maiatza 2012, bigarren partziala, lehen ariketako 2) eta bigarren ariketako 3) ariketak.
- Uztaila 2012, bigarren partziala, bigarren ariketako 2) eta 3) ariketak.
- Maiatza 2013, bigarren partziala, hirugarren ariketako 2) ariketa.
- Uztaila 2013, bigarren partziala, hirugarren ariketako 2) ariketa.
- Maiatza 2014, bigarren partziala, seigarren ariketa.
- Uztaila 2014, bigarren partziala, bederatzigarren ariketa.

- Maiatza 2015 bigarren partziala, 5. ariketa.

- Ekaina 2015, 10. ariketa.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMATIKA APLIKATUA SAILA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

ALJEBRA LINEALA AZTERKETA **2015/06/22**

Abizenak:
Izena: **Taldea:**

A. 1	A. 2	A. 3	A. 4	A. 5	A. 6	A. 7	A. 8	A. 9	A. 10	**NOTA**

Denbora: 3 ordu **Puntuazio totala: 16 puntu**

1) A) Eztabaidatu ia hurrengo baieztapenak zuzenak diren ala ez:

a) A eta B matrizeak simetrikoak badira, orduan AB simetrikoa ere da.
b) A matrizea simetrikoa bada eta P matrizea karratua bada, orduan $\mathrm{PAP^t}$ simetrikoa ere da.
c) A matrizea antisimetrikoa bada eta B matrizea simetrikoa bada, orduan AB simetrikoa izango da baldin eta soilik baldin AB=-BA bada.

(0.75 puntu)

B) Zein oinarrizko transformazio aplika daiteke $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrizeari $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea erabiliz?

(0.25 puntu)

C) Kalkula ezazu $A = \begin{pmatrix} B & I_3 \\ D & (0) \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa blokeka *a*-ren balio posibleen arabera, non $D = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ den. Zeintzuk dira *a*-ren balio horiek? Zehaztu A^{-1} matrizea osatzen duten bloke desberdinen ordena.

(1 puntu)

2) A) Izan bitez V 6 dimentsioko espazio bektoriala eta W_1 eta W_2 V-ren 4 dimentsioko bi azpiespazio bektorial. Ondorioztatu $W_1 \cap W_2$ eta $W_1 + W_2$ azpiespazioen dimentsioak. V espazio bektoriala W_1 eta W_2 azpiespazioen batura zuzena izan daiteke?

(0.5 puntu)

B) $\mathbb{P}_2$ espazio bektorialean $\{p_1(t) = 1 + t,\ p_2(t) = t + t^2\}$ polinomioak kontsideratzen dira.

a) Froga ezazu linealki askeak direla. **(0.25 puntu)**

b) $\mathbb{P}_2$ -ren oinarri bat lortu non $p_1(t)$ eta $p_2(t)$ oinarri horren barnean dauden eta $p(t)=1+t-t^2$ polinomioaren koordenatuak oinarri horrekiko $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ izanik. **(0.5 puntu)**

3) Izan bitez 2. ordenako matrize karratuen $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazio bektoriala eta $V=\left\{A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in E_{2x2}\right\}$ $E_{2x2}(\mathbb{R})$ -ren azpiespazio bektoriala hurrengo ekuazio parametrikoekin:

$$\begin{cases} a_{11}= \lambda \qquad\quad +2\cdot\nu \\ a_{12}= \lambda + \quad \mu \; +5\cdot\nu \\ a_{21}=5\cdot\lambda-3\cdot\mu+\;\nu \\ a_{22}=-\lambda+\quad \mu \;+\;\nu \end{cases} \quad / \;\; \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$$

a) V-ren oinarri bat eta ekuazio kartesiarrak lortu. **(1 puntu)**

b) V-ren azpiespazio osagarri bat lortu. **(0.25 puntu)**

c) $E_{2x2}(\mathbb{R})$ -ren beste azpiespazio bektorial hau kontsideratuz:

$$W=\left\{B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \;/\; 2\cdot b_{11}+3\cdot b_{12}=b_{22}\right\}$$

$V\cap W$ eta $V+W$ -ren ekuazio kartesiarrak eta oinarri bana aurkitu. **(1 puntu)**

4) $\mathbb{P}_2(x)$ 2 maila edo gutxiagoko polinomioen espazio bektoriala da. Hurrengo aplikazio lineala emanik:

$$f:\mathbb{P}_2(x)\longrightarrow\mathbb{P}_2(x)$$

$$p(x)\longrightarrow f(p(x))=x\cdot(2\cdot p(x+1)-p(x)-p(x-1))$$

a) Aplikazioaren matrizea aurkitu $\mathbb{P}_2(x)$-ren oinarri kanonikoarekiko. **(0.5 puntu)**

b) Aplikazioaren izaera aztertu:
b.1) aplikazioaren matrizea erabili gabe. **(0.75 puntu)**
b.2) matrizea erabiliz. **(0.25 puntu)**

c) Ker f eta Im-ren oinarri bana eta elkartutako ekuazio inplizituak lortu. Ker f eta Im f azpiespazio osagarriak dira? Arrazoitu erantzuna. **(0.75 puntu)**

5) E_3 espazio euklidear batean biderkadura eskalar bat definitzen da $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ oinarri ortonormal batekiko. Oinarri aldaketa bat egiten da, oinarri berria $B'=\{e_1=u_1,e_2=-u_1+u_2,e_3=-u_2+u_3\}$ izanik.

a) Kalkulatu biderkadura eskalarrari dagokion matrizea B' oinarriarekiko. **(0.5 puntu)**

b) $C_{B'}(x)=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ eta $C_{B'}(y)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ bektoreak kontsideratuz, osatzen duten angelua bilatu.

(0.5 puntu)

6) Izan bitez B={v_1, v_2, v_3} 3 dimentsiotako espazio bektorial errealaren oinarri bat eta f endomorfismo bat non: $f(v_1+v_2)=4v_1+4v_2$, $f(v_3)=v_3$ eta $f(v_2)=2v_1+2v_2$.

a) A-ren autobalio eta autobektoreak kalkulatu, non A f endomorfismoari dagokion matrizea den B oinarriarekiko. f endomorfismoa aplikazio injektiboa al da? **(1.25 puntu)**

b) A ortogonalki diagonalgarria al da? Zergatik? Egia bada, matrizea ortogonalki diagonalizatu. Gezurra bada, antzeko matrizerik sinpleena kalkulatu. **(0.5 puntu)**

7) Izan bedi hurrengo endomorfismoa, $f:\mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^7$, non B={$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$} oinarriarekiko f-ri dagokion matrizea hau da: $J=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&2&1&0\\0&0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&0&2\end{pmatrix}$.

Arrazoitu hurrengo galderak:

a) Zeintzuk diren f-ri dagozkion autobalioak eta haien anizkoiztasun aljebraiko eta geometrikoak? **(0.5 puntu)**

b) Zein da $\left\{\underset{\sim}{x}\in\mathbb{R}^7 \,/\, (A-2I)^2\,\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{0}\right\}$ azpiespazioaren dimentsioa? **(0.25 puntu)**

8) **a)** Aztertu ea $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&3&2&2\\2&6&5&6\\1&4&3&5\\1&5&4&2\end{pmatrix}$ matrizea $\mathrm{A}=\mathrm{L}\cdot\mathrm{U}\ /\ \mathrm{l}_{i,i}=1$ moduan faktoriza daitekeen pibotajea erabili gabe. Arrazoitu erantzuna. **(0.25 puntu)**

b) Kalkulatu faktorizazioa pibotaje partziala eta eskala aldaketa erabiliz eta idatzi dagokion P, L eta U matrizeak. **(1.5 puntu)**

c) Aurreko faktorizaziotik abiatuz, ebatzi hurrengo sistema: $\mathrm{A}\cdot\mathbf{x}=$ (1 1 0 -1) ^{t}. **(0.5 puntu)**

9) Garatu Gauss-Seidel metodoaren adierazpen matriziala, hau da, $\mathrm{A}\cdot\underset{\sim}{x}=\underset{\frown}{b}$ sistema lineala bada, $\underset{\sim}{x}^{k+1)}=\mathrm{T}\cdot\underset{\sim}{x}^{k)}+\underset{\sim}{c}$ Gauss-Seidel errepikapen metodoarekiko baliokidea den $\underset{\sim}{x}=\mathrm{T}\cdot\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{c}$ sistema eman. **(1 puntu)**

10) Kalkulatu $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ funtzioa [-1,1] tartean hobekien hurbiltzen duen 2. mailako polinomioa, polinomio ortogonalak erabiliz.

<u>1. Oharra</u>: $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2dx}{1+x^2}=2-\dfrac{\pi}{2}$.

<u>2. Oharra</u>: Polinomio ortogonalen oinarria arrazoituz ondorioztatu.

(1.5 puntu)

ALJEBRA LINEALEKO AZTERKETA **30/05/2015**

Abizenak:

Izena: **Taldea:**

1. Ariketa	2. Ariketa	3. Ariketa	4. Ariketa	**NOTA**

Denbora: Ordu 1 eta 45 minutu **Puntuazio totala: 10 puntu**

1. PARTZIALA

1) A) Izan bedi A n ordenako matrize karratu bat non bere determinantea β den. Ondorengo eragiketak aplikatzen dira:

1. A-ren alderantzizkoa egiten da B matrizea lortzeko.

2. B matrizearen edozein bi errenkada trukatzen dira eta C matrizea lortzen da.

3. D matrizea C matrizearen edozein bi zutabe trukatuz lortzen den emaitza da.

4. D matrizea $\alpha \neq 0$ parametro erreal batez biderkatzen da eta emaitza E matrizea da.

5. E-ren i-garren errenkada $1/\alpha$ parametro errealaz biderkatzen da eta F matrizea lortzen da.

6. F matrizearen j zutabean (j-1) eta j zutabeen batura ordezkatzen da eta emaitza G matrizea da.

7. H matrizea G matrizearen iraulia da.

Zein dira B, C, D, E, F, G eta H-ren determinanteak? **0.75 puntu**

B) Kalkulatu honako determinante honen balioa:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & a+3b & \dots & a+(n-1)b & a+nb \\ -a & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a & a \end{vmatrix}_{(n+1)x(n+1)}$$

Puntu 1

C) Lortu $b=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^t$ itxurako bektore zutabe guztiak, zeinetarako gutxienez $A \cdot x = b$ sistemaren soluzio bat existituko den, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ matrizea izanik. **0.75 puntu**

2) A) Izan bitez E $\mathbb{K}$ gorputz gaineko espazio bektorial bat eta $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ E-ren bektore linealki independenteen multzo bat. Frogatu ondoko erlazioa betetzen duten $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ bektoreen multzoa

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \mathbf{u}_n = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + ... + \mathbf{e}_n \end{cases}$$

, multzo aske bat ere dela. **0.25 puntu**

B) Lortu R^3-ko S azpiespazioaren dimentsioa a eta b balioen arabera. $S = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} \; non\; a, b \in \mathbb{R}\right\}$

Lortu S-ren ekuazio parametriko eta kartesiarrak kasu bakoitzean. **1.5 puntu**

3) $\mathbb{P}_2$ espazio bektorialean ondoko azpiespazioa definitzen da: $\mathrm{M} = \mathrm{Span}\{x^2 - 1,\ x + 1,\ 3 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 10\}$

a) Lortu M-ren oinarri bat barnean duten $\mathbb{P}_2$ –ko oinarri guztien itxura. **Puntu 1**

b) Lortu M-ren azpiespazio betegarri bat. **0.5 puntu**

c) $\mathbb{P}_2$ espazioan ondoko oinarriak definitzen dira: **1.25 puntu**

$$\mathrm{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1-x)^2,\ \mathbf{e}_2 = x \cdot (1-x),\ \mathbf{e}_3 = x^2\} \text{ eta } \mathrm{B}' = \{\mathbf{e}'_1 = x^2 - 1,\ \mathbf{e}'_2 = x + 1,\ \mathbf{e}'_3 = 1\}$$

c.1) Lortu $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{C_B}(\mathbf{e}'_1) & \mathrm{C_B}(\mathbf{e}'_2) & \mathrm{C_B}(\mathbf{e}'_3) \end{pmatrix}$ iragaite matrizea.

c.2) Lortu, koordenatuen definizioa erabiliz, $p = 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2$ polinomioaren koordenatuak B' oinarrian.

c.3) Lortu, c.1) ataleko P matrizea erabiliz, $p = 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2$ polinomioaren koordenatuak B oinarrian.

4) A) **<u>3 ordenako matrize diagonalen</u>** V espazio bektorialean, ondoko aplikazioa definitzen da:

$$\begin{aligned} f: V &\rightarrow P_2(x) \\ A &\rightarrow f(A) = \mathrm{aztarna}(A) \cdot x^2 + \mathrm{aztarna}(A) \end{aligned}$$

a) Frogatu aplikazioa lineala dela.

b) Lortu aplikazioaren adierazpen matriziala, V eta $P_2(x)$-ren oinarri kanonikoekiko.

c) Lortu nukleoaren oinarri bat

1.5 puntu

B) Frogatu aplikazio linealen oinarrizko teorema. **1.5 puntu**

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

ALJEBRA LINEALEKO AZTERKETA 2015/01/07

Abizenak:

Izena: **Taldea:**

1. Arik	2. Arik	3. Arik	4. Arik	5. Arik	6. Arik	**NOTA**

Denbora: 2 ordu **Puntuazio totala: 18 puntu**

1. PARTZIALA

1.- a) Izan bedi $A \in E_{n\times n}(\mathbb{R})$ non bere determinantearen balioa $\alpha \in \mathbb{R}$ den. Kalkula itzazu hurrengo matrizeen determinanteen balioak: $2A$, $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, A^{a}, $2A^{3}$, $A\cdot A^{t}$, $A\cdot B$ ($B\in E_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrize diagonal bat da non bere elementuak $1,2,\ldots,n$ diren)

(2 puntu)

b) Izan bedi $A\in E_{n\times n}(\mathbb{R})$ non $4A + A^{3} - \beta\cdot I_{n} = (0)$ betetzen den. Kalkula itzazu β parametroaren balioak A matrizea erregularra izan dadin. Zein da A^{-1} matrizearen adierazpena β balio horietarako? **(1.5 puntu)**

c) Baliokideak al dira $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ eta $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ sistemak, non $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ diren? Arrazoitu erantzuna sistemak ebatzi gabe. **(0.75 puntu)**

d) $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (0) & A_{22} \end{pmatrix}$ matrizearen bloke guztiak erregularrak dira. Kalkula ezazu A^{-1}.

(1 puntu)

2.- a) Izan bedi 2 ordenako matrize karratu erreal guztien espazio bektoriala, $E_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Izan bedi U, $E_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren azpiespazio bektorial bat non bere elementuek hurrengo baldintza betetzen duten: beraien diagonal nagusiko elementuen batura 0 da. Aurki itzazu azpiespazio honetako A matrizeak, ekuazio inplizituak, ekuazio parametrikoak eta oinarri bat. **(1 puntu)**

b) Izan bedi $W = \left\{ B\in E_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ B^{t} = -B \right\}$. Aurki itzazu azpiespazio honetako B matrizeak, ekuazio inplizituak, ekuazio parametrikoak eta oinarri bat. **(1 puntu)**

c) Aurki itzazu $U \cap W$ eta U+W. **(1 puntu)**

3.- Izan bitez $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ eta $B'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_4\}$ E-ren, 4 dimentsioko espazio bektorial baten, bi oinarri, non ondorengoa betetzen den: $\begin{cases}\mathbf{e}'_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}'_2=\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}'_3=\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}'_4=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4\end{cases}$.

a) Aurki itzazu, oinarri aldaketaren P iragaite matrizea erabiliz, **x** bektorearen koordenatuak B' oinarriarekiko bektorearen koordenatuak B oinarriarekiko $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ badira.

(0.5 puntu)

b) Azpiespazio baten ekuazioak B oinarriarekiko x – t = 0, y + z = 0 badira, lor itzazu azpiespazioaren ekuazioak B' oinarriarekiko. **(0.75 puntu)**

c) Demagun E= $E_{2\times2}(\mathbb{R})$ eta $B'=\left\{\mathbf{e}'_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\mathbf{e}'_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\mathbf{e}'_3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\mathbf{e}'_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ direla. Aurkitu **a)** ataleko **x** bektoreari dagokion matrizea eta baita $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ oinarria ere. Kalkula ezazu $P_1=\left(C_{B'}(\mathbf{e}_1)\ \ C_{B'}(\mathbf{e}_2)\ \ C_{B'}(\mathbf{e}_3)\ \ C_{B'}(\mathbf{e}_4)\right)$ matrizea. Zein erlazioa dago matrize honen eta **a)** atalean lortutako P matrizearen artean?
(1.25 puntu)

4.- Izan bedi $\begin{array}{l}\|\cdot\| : P_n \longrightarrow \mathbb{R}\\ p(x)=a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n \longrightarrow \|p\|=|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|\end{array}$ aplikazioa.

Azter ezazu ea aplikazio hau norma bat den. Norma ez bada, idatz itzazu betetzen ez diren axiomak. **(0.75 puntu)**

5.- a) Adieraz eta froga ezazu aplikazio lineal injektiboen karakterizazioa. **(0.5 puntu)**

b) Izan bedi $f: E \longrightarrow F$ bi espazio bektorialen arteko aplikazio lineal injektibo bat. Froga ezazu $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ E-ren oinarri bat bada, orduan $f(B) = \{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), ..., f(\mathbf{e}_n)\}$ Imf -ren oinarri bat dela. **(1 puntu)**

c) Justifika ezazu dim(E)=n bada, E-ren n bektore linealki independenteek espazio bektorial horren oinarri bat osatzen dutela. **(0.5 puntu)**

6.- Izan bitez $P_2(x)$ eta $P_3(x)$ 2 edo maila txikiagoko, eta 3 edo maila txikiagoko polinomio erreal guztien espazio bektorialak, hurrenez hurren. Izan bedi hurrengo aplikazioa:

$$\begin{aligned} f: P_2(x) &\to P_3(x) \\ p(x) &\to f[p(x)] = x^2 \cdot p'(x) - \int p(x)dx \end{aligned}$$

a) Froga ezazu aplikazioa lineala dela. **(0.5 puntu)**

b) Kalkula ezazu f-ri elkartutako matrizea $B = \{1, x, x^2 + 1\}$ eta $B' = \{1, x, x^2 - 1, x^3 - 1\}$ oinarrietan. **(1.5 puntu)**

c) Matrizea erabili gabe, aurki itzazu f aplikazioaren nukleoaren eta irudiaren oinarri bat, ekuazioak eta dimentsioak, hurrenez hurren. **(1.5 puntu)**

d) Izan bedi $U = \{p(x) \in P_2(x) / p(x) = p(-x)\}$. f(U)-ren oinarri bat lor ezazu.

(1 puntu)

Oharra: Integralak konstanterik gabe kalkulatu (Adibidez, $\int x dx = \frac{x^2}{2}$) .

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMATIKA APLIKATUA SAILA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

ALJEBRA LINEALEKO AZTERKETA 2014/6/25

Abizenak:
Izena: **Taldea:**

1. Arik.	2. Arik.	3. Arik.	4. Arik.	5. Arik.	6. Arik.	7. Arik.	8. Arik.	9. Arik.	**NOTA**

Denbora: 3 ordu **Puntuazio totala: 10 puntu**

1. Izan bitez B eta C bi 4. ordenako matrize karratu, non:

$$|B|=2,\ \text{Azt}\,(B)=1,\ |C|=3,\ \text{Azt}\,(C)=-4.$$

Eta honako adierazpen hauek emanda:

$$|B\cdot C^2|,\ |B+C|,\ |2\cdot B^{-1}|,\ \text{Azt}\,(3\cdot B+C),\ \text{Azt}\,(B\cdot C)$$

Esan zeinek kalkulatu ahal dira zuzenean, B eta C matrizeei buruzko informazioa erabiliz eta lortu haien balioak. Arrazoitu zergatik ezin diren kalkulatu beste adierazpenak. (0.5 p)

2. Izan bedi $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ matrizea, non a,b,c eta d zenbaki errealak diren.

Ondokoak eskatzen dira:

a) Kalkulatu $A\cdot A^t$ biderkadura.
(0.1 p)

b) Lortu $A\cdot A^t$ adierazpenaren determinantea eta emaitza hori erabiliz, kalkulatu A matrizearen determinantea. (0.4 p)

3. $\mathbb{P}_3$ hiru edo maila txikiagoa eta koefizienteak $\mathbb{R}$ espazioan dituzten polinomioen espazio bektorialean B'= {1, x, x·(x-1), x·(x-1)·(x-2)} oinarria emanik, ondokoak eskatzen dira:

a) Lortu $p(x)=3x^3+2x-5$ polinomioaren koordenatuak aurreko B' oinarrian, honako bi modu hauetan:

a.1) Bektore baten koordenatuei buruzko definizioa erabiliz. (0.25 p)

a.2) Oinarri aldaketako P matrizea erabiliz, $\mathbb{P}_3$ -ren oinarri kanonikotik abiatuz.

(0.25 p)

b) Izan bedi W={ $\alpha_1+\alpha_2\cdot x-\alpha_2\cdot x^2+\alpha_1\cdot x^3 \,/\, \alpha_1,\alpha_2\in R$ } azpiespazio bektoriala, lortu azpiespazio honen ekuazio cartesiarrak B' oinarrian. (0.5p)

4. Egiaztatu S sistema aske bat dela baldin S = {$\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2},\ldots, \mathbf{u_p}$} E espazio euklidear batean bektoreen sistema ortogonal bat bada. (p 1)

5. $\mathbb{R}^3$ espazioan, ondoko matrizea B oinarri kanonikoarekiko duen biderkadura eskalar bat definitzen da:

$$G_B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ondokoak eskatzen dira:

a. Lortu B^* oinarri ortonormal bat S bektoreen sistematik abiatuz eta Gram-Schmidt-en ortogonalketa metodoa erabiliz,

$S=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t\right\}$ izanik. (0.5 p)

b. Lortu B oinarritik B^*oinarrira iragaite matrizea. (0.25 p)

c. Lortu B^* oinarrian biderkadura eskalarraren adierazpen matriziala (0.25 p)

6. Izan bedi V hiru dimentsioko azpiespazio bektorial erreal bat, non B ={$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$} oinarri bat hartzen den, eta honako propietateak dituen f: V → V endormorfismoa izanik:

i) $\mathbf{u_1 + u_2 + 2u_3}$ bektorearen irudia bektore bera da.

ii) $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^t \in V / x_2 - x_3 = 0\right\}$ f-ren azpiespazio propio bat da.

iii) f endomorfismoari dagokion A matrizearen aztarna B oinarrian 5 da

Ondokoak eskatzen dira:

a) Lortu f-ren autobalioak. (0.75 p)

b) Lortu f-ren A matrizea B oinarrian, B oinarriaren bektoreen irudiak kalkulatuz aldez aurretik. (0.75 p)

c) Lortu A-ren antzekoa den ahalik eta matrizerik errazena, baita P iragaite matrizea. (0.25 p)

7. **a)** Aztertu ea honako matrize hau positibo definitua den ala ez, zenbakizko metodo bat erabiliz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$$ (0.75 p)

b) Aurreko atalean lortutako emaitza erabiliz, ebatzi ondoko sistema**:** (0.75 p)

$$\begin{cases} x - y = 1\\ -x + 2y - z = -2\\ - y + 2z = -1\end{cases}$$

8. Aztertu Gauss-Seidel-en errepikapen metodoaren konbergentzia edo dibergentzia, ondoko sistema ebazteko: (1.5 p)

$$\begin{cases} x + t = 2\\ x + 5y - t = 5\\ x + z = 1\\ 2z + t = 5\end{cases}$$

9. Kalkulatu $f(x)=x\cdot|x|$ funtzioaren 2. mailako hurbilketa polinomikorik onena [-2, 2] tartean, minimo karratuen bitartez eta polinomio ortogonalak erabiliz. Horretarako, $w(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $t\in[-1,1]$ pisu funtzioa gogoan hartu.

<u>Oharrak:</u> Chebyshev-en polinomioen errepikapenezko erlazioa ondokoa da:

$T_{n+1}(x)=2x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x)$, $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$. izanik

Polinomioen normak ondokoak dira: $\|T_n(x)\|^2=\begin{cases}\pi/2 & \text{if } n\neq 0\\ \pi & \text{if } n=0\end{cases}$

Erabili $\int_0^{\pi/2}\cos^3 z\,dz = 2/3$ eragiketak egitean. (1.25 p)

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMATIKA APLIKATUA SAILA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

ALJEBRA LINEALEKO AZTERKETA 2014/5/19

Abizenak:

Izena: **Taldea:**

1. Arik	2. Arik	3. Arik	4. Arik	5. Arik	6. Arik	**NOTA**

Denbora: 2 ordu **Puntuazio totala: 10 puntu**

2. PARTZIALA

1) Izan bedi ondoko matrizeak $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialean eta $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ oinarri kanonikoarekiko definitzen duen biderkadura eskalarra,

$$G=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 5 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Zehaztu r parametroaren balioa x eta y bektoreek osatzen duten angelua $\frac{\pi}{2}$ izan dadin,

$$x=\begin{pmatrix}1\\ r\\ 0\end{pmatrix}\ y=\begin{pmatrix}2r\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ \text{eta}\ r>0\ \text{izanik.}$$

b) $S=\left\{\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_1-x_2\\ 0\end{pmatrix}, \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}$ azpiespazioa emanda, lortu S-ren azpiespazio ortogonalaren ekuazio cartesiarrak.

c) Kalkulatu biderkadura eskalarraren matrizea $B'=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ oinarriarekiko.

2) Honako A eta D antzeko matrizeak emanik, non α,β,γ eta δ zenbaki errealak diren,

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ 3 & -1 & 3\\ 3 & \delta & 2\end{pmatrix}\quad \text{eta}\quad D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

a) Esan zeintzuk diren A-ren autobalioak eta baita beren anizkoiztasun aljebraiko eta geometrikoak.

b) Kalkulatu α,β,γ eta δ aurreko ataleko emaitzak erabiliz (egin ariketa A-ren aztarna eta determinantea erabili gabe).

c) Lortu P matrize erregular bat non $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$ betetzen den.

3) $\mathbb{R}^6$ espazioko f endomorfismo bat emanik non bere polinomio karakteristikoa $p_A(x)=(x+2)^6$ den eta

$$\dim V_1(-2)=\dim \mathrm{Ker}\,(A+2I)=4 \quad \text{eta} \quad \dim V_2(-2)=\dim \mathrm{Ker}\,(A+2I)^2=5.$$

Lortu f-ren Jordanen J forma kanonikoa eta azaldu nola bilatu behar den oinarria non f-ri egokitutako matrizea oinarri horrekiko J den.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak $L \cdot U = P^t \cdot A$ betetzen duela jakinik, non

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/7 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/7 \end{pmatrix} \text{eta } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Erantzun galdera hauek arrazoituz,

a) Zein izan da pibotaje partzialaren azken bektorea Gaussen metodoa pibotaje partziala eta eskala aldaketa erabiliz?
b) Zein elementu izan da k=2 pausuaren pibotea?
c) Zeintzuk izan dira lehenengo pausuaren biderkatzaileak?
d) Kalkulatu A-ren determinatea eta bere alderantzizkoaren bigarren zutabea aurreko faktorizazioa erabiliz.

5) **a)** Aztertu Jacobi eta Gauss-Seidel-en konbergentzia eta konbergentziaren abiadura $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ sistemarako, non $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Kalkulatu $A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sistemaren soluzioaren hurbilketa bat metodorik azkarrena erabilita %6 zehaztasunarekin, hasierako hurbilketa bezala (0, 0, 0.07, 0.2) bektorea hartuz. 3 digitu esanguratsurekin lan egin.

6) **a)** Definitu: E espazio bektorial batean f bektore baten minimo koadratiko hurbilketa onena $H \subset E$ azpiespazio bektorial batean.

b) Minimo koadratikoen metodoa erabiliz, malguki batentzat F indarra x luzeerarekin erlazionatzen duen ($F = a_0 + a_1 \cdot x$) formula lineala bilatu nahi da. Datu hauek ezagutzen dira, F indarraren balio ezberdinak malgukian kargatzean x luzeera ezberdinak ematen dituena,

F (Kp-tan)	10	20	30
x (cm-tan)	2	3.5	6

Egin ariketa bi eratan,
b.1) Ekuazio normalen sistema ebatziz.
b.2) Polinomio ortogonalak erabiliz.
Egin eragiketak 2 zenbaki hamartarretara biribilduz.

ALJEBRA LINEALEKO AZTERKETA 19/05/2014

Abizenak:

Izena: **Taldea:**

1. Ariketa	2. Ariketa.	3. Ariketa.	4. Ariketa.	**NOTA**

Denbora: 1 ordu 45 minutu **Puntuazio totala: 10 puntu**

<u>1. PARTZIALA</u>

1) Kalkulatu M matrizearen alderantzizkoa α balioen arabera, blokeen teoria erabiliz. α-ren zein baliok egiten du M matrizea erregular?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1.5 puntu)

2) Izan bedi 2 ordenako matrize karratu errealen espazio bektorialean, $E_{2x2}(\mathbb{R})$, honako U eta V azpiespazioak,

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_{2x2}(\mathbb{R}) \,/\, A \cdot X = X \cdot A \right\}$$

$$V = \left\{ Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E_{2x2}(\mathbb{R}) \,/\, A \cdot Y^t = Y \right\}$$

non $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ondokoa eskatzen da.

a) Kalkulatu U eta V azpiespazioetako X eta Y matrizeak. Idatzi bi azpiespazioen ekuazio parametrikoak eta aurkitu U-ren B_U oinarri bat eta V-ren B_V beste oinarri bat.
(1.5 puntu)

b) Kalkulatu ebakidura azpiespazioa, $U \cap V$, eta batura, $U+V$, bakoitzaren oinarri bat, ekuazio inplizitu eta parametrikoak emanez. (1.25 puntu)

c) Zenbat eratara deskonposatu daiteke $M \in (U+V)$ matrize bat U azpiespazioko matrize bat eta V azpiespazioko beste matrize baten batura bezala? Arrazoitu erantzuna.
(0.5 puntu)

3) **a)** Froga ezazu K gorputz baten gaineko n dimentsioko E espazio bektorial batetako bektore baten koordenatuak oinarri batekiko bakarrak direla. (0.5 puntu)

b) Froga ezazu $f : E \longrightarrow F$ aplikazio lineal baten nukleoa E espazio bektorialaren azpiespazio bat dela. (0.25 puntu)

c) Demagun $f: \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ bi espazio bektorialen arteko aplikazio lineal bat dela. Froga ezazu $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ E -ren bektore multzo menpekoa bada, orduan $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), ..., f(\mathbf{u}_p)\}$ ere F -ren multzo menpekoa dela. (0.25 puntu)

d) Demagun $f: \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ K gorputz gaineko E eta F espazio bektorialen arteko aplikazio lineal bat dela, non n eta m E eta F -ren dimentsioak diren, hurrenez hurren. dim Ker f = p bada, non 0<p<n, froga ezazu p = n - dim Im f . (1 puntu)

4) Demagun $\mathbb{P}_3(\mathrm{x})$ koefiziente errealeko hiru maila edo gutxiagoko polinomioen espazio bektoriala dela eta $\mathrm{E}_{2\mathrm{x}2}(\mathbb{R})$ bi ordenako matrize karratu errealen espazio bektoriala. Izan bedi horrela definitutako aplikazio lineala,

$$f: \mathbb{P}_3(\mathrm{x}) \longrightarrow \mathrm{E}_{2\mathrm{x}2}(\mathbb{R}) \quad / \quad f(\mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + \mathrm{d}) = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b}-\mathrm{d} \\ \mathrm{c}-\mathrm{b} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Kalkulatu f -ren adierazpen matriziala $\mathbb{P}_3(\mathrm{x})$ eta $\mathrm{E}_{2\mathrm{x}2}(\mathbb{R})$ -ko oinarri kanonikoetan (1 puntu)

b) Kalkulatu Im f azpiespazioaren ekuazio inplizituak. (0.5 puntu)

c) Kalkulatu Ker f -ren oinarri bat. (0.5 puntu)

d) Injektiboa al da f? Sobrejektiboa al da f? Arrazoitu erantzunak. (0.25 puntu)

e) Kalkulatu f-ri egokitutako matrizea $\mathbb{P}_3(\mathrm{x})$-ko $\mathbb{B}^* = \{\mathrm{x}^3,\ \mathrm{x}^2 + \mathrm{x},\ 1 + \mathrm{x},\ 1\}$ oinarrian a) atalean ateratako matrizea erabiliz dagokion oinarri kanonikoetan. (0.75 puntu)

f) Kalkulatu p(x) polinomioa non bere irudiak hau betetzen duen $f(\mathrm{p}(\mathrm{x})) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(0.25 puntu)

ALJEBRA LINEALA OHIKO DEIALDIA 2014ko URTARRILAK 17

Abizenak:

Izena: **Taldea:**

1. arik.	2. arik.	3. arik.	4. arik.	5. arik.	6. arik.	7. arik.	8. arik.	**NOTA**

Denbora: 2 ordu **Puntuak guztira: 10 puntu**

1.- Adierazi honako baieztapen hauek **egiazkoak ala gezurrezkoak** diren. Arrazoitu erantzunak kontraadibide bat ematen beharrezkoa den kasuetan:

a) A eta B bi matrize karratu badira non A·B = (0) den, orduan, A=(0) edo B=(0) da.

b) A matrize karratua alderanzkarria (erregularra) da baldin eta soilik baldin bere iraulia den A^t matrizea alderanzkarria bada.

c) Ez da existitzen era berean simetrikoa eta antisimetrikoa den matrizea.

d) n orden bakoitiko matrizea antisimetriko bada, ez da alderanzkarria.

(puntu 1)

2.- Izan bedi honako ekuazio linealetako sistema, non *b* balio erreal bat da:

$$\begin{cases} x + y + bz = 1 \\ x + by + z = 1 \\ bx + y + z = 1 \end{cases}$$

Eztabaidatu *b* parametroaren arabera eta ebatzi posiblea denean, **oinarrizko eragiketak erabilita.**

(1.25 puntu)

3.- Demagun $\mathbb{R}^3$ espazioan **v** bektorearen koordenatuak $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ oinarrian $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ direla. Zehaztu zein izango den $\mathbf{u_3} \in \mathbb{R}^3$ bektorea baldin eta honako baldintza hauek gertatzen badira: $\mathbf{u_3}$ bektoreak $\mathbf{u_1} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$ eta $\mathbf{u_2} = \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$ bektoreekin oinarri bat osatu behar du eta **v** bektorearen koordenatuak oinarri berri horretan $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ izan behar dira.

(0.5 puntu)

4.- Izan bedi $f : E \longrightarrow F$ aplikazio lineal bat, non E eta F $\mathbb{K}$ gorputzaren gaineko n eta m ordenako espazio bektorialak diren, hurrenez-hurren. Izan bitez $U = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, .., \mathbf{u_n}\}$ eta $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_m}\}$ E eta F espazioen oinarri bana. **Froga ezazu** f aplikazioari elkartutako matrizea U eta V oinarrietan A matrize bakarra dela, non $\forall \mathbf{x} \in E$ bektoreak $C_V(\boldsymbol{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{A} \cdot C_U(\mathbf{x})$ berdintza betetzen duen. $C_V(\boldsymbol{f}(\mathbf{x}))$ moduan ***f* (x)** bektorearen koordenatuak V oinarrian adierazten dira eta $C_U(\mathbf{x})$ moduan **x** bektorearen koordenatuak U oinarrian. Interpretatu matrizea.

(puntu1)

5.- Izan bitez honako azpiespazio bektorial hauek:

$$\mathrm{S}=\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\\ \mathrm{z}\\ \mathrm{t}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\ /\ -\mathrm{x}+\mathrm{y}=0,\ \mathrm{t}=\mathrm{z}\right\}\ \text{eta}\ \ \mathrm{T}=\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\\ \mathrm{z}\\ \mathrm{t}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\ /\ \mathrm{x}=a\mathrm{y}-a\mathrm{t},\ \mathrm{z}=-a\mathrm{y}+a\mathrm{t}\right\}$$

a) Kalkula ezazu “a” konstantearen balioa S+T azpiespazioaren dimentsioa 3 izateko. (1.25 puntu)

b) Aurreko atalean lortutako a balioarekin, lor ezazu $\mathrm{S}\cap\mathrm{T}$ azpiespazioaren oinarri bat. (0.5 puntu)

6.- Izan bedi $V=\left\{A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{11} & a_{12}\\ 0 & 0 & a_{11}\end{pmatrix}/\,a_{11},a_{12},a_{13}\in\mathbb{R}\right\}$ $E_{3x3}(\mathbb{R})$ espazioaren azpiespazio bektoriala. Izan bedi honako aplikazioa:

$$\begin{array}{ccc} f:\mathrm{V} & \to & \mathbb{R}\\ A & \to & f(A)=|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{13}|\end{array}$$

Aztertu ea aplikazio horrek norma bat definitzen duen, axioma guztiak egiaztatzen. (0.75 puntu)

7.- Izan bedi $\mathbb{P}_2(\mathrm{x})$ 2 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektorial erreala. Honako aplikazio lineala kontsideratzen da:

$$\begin{array}{l} f:\mathbb{P}_2(\mathrm{x})\longrightarrow\mathbb{P}_2(\mathrm{x})\\ \mathrm{p(x)}\longrightarrow f(\mathrm{p(x)})=\mathrm{p(x)}+\mathrm{x}^2\cdot\mathrm{p}\left(\dfrac{1}{\mathrm{x}}\right)\end{array}$$

a) Lor ezazu f aplikazioaren **adierazpen matriziala** oinarri kanonikoan. (0.5 puntu)

b) Lortu, aplikazioari **elkartutako matrizea erabili gabe**, Ker f eta Im f espazioen ekuazio inplizituak eta oinarri bana. (0.75 puntu)

c) f injektiboa da? f suprajektiboa da? Arrazoitu erantzunak. (0.25 puntu)

d) Ker f eta Im f betegarriak dira? Arrazoitu erantzuna. (0.5 puntu)

8.- Izan bedi $f:\mathrm{E}\longrightarrow\mathrm{F}$ aplikazio lineala $\mathrm{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ eta $\mathrm{B}'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\}$ oinarriei elkartutako matrizea $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ dena, non B eta B’ E eta F espazioen oinarriak diren, hurrenez-hurren. Aplikazio berari elkartutako matrizea $\mathrm{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ eta $\mathrm{U}=\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ oinarrietan $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 1/2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ bada, eskatzen da:

a) Ondorioztatu baliokidetasun erlazioa $\mathbf{A}_1$ eta $\mathbf{A}_2$ matrizeen artean eta kalkula ezazu F espazioari dagokion U oinarria. (puntu 1)

b) Lor ezazu E-ren bektorea(k) f aplikazioaren bitartez non bere irudia $\mathbf{v}=4\mathbf{u}_1+3\mathbf{u}_2$ den. Lortutako bektore multzoa E-ren azpiespazio bektorial bat da? Arrazoitu erantzuna. (0.75 puntu)

ALJEBRA LINEALA – Ez-Ohiko Deialdia – Lehen Partziala (2013ko ekainak 28)

Lehen partzialaren denbora: 1:30.

Puntuazio osoa: 10 puntu.

Guztira ariketa kopurua: 3. Erabili koaderno ezberdina ariketa bakoitza egiteko.

1. ARIKETA

1. Izan bedi A n ordenako matrize erregularra.

a) Froga ezazu $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$ berdintza betetzen dela.

b) A matrizea simetrikoa bada, orduan A^{-1} ere simetrikoa da. Froga ezazu.

(0.5 puntu)

2. Bloke matrizeen partiketa bidez, kalkula ezazu hurrengo matrizearen alderantzizkoa:

$$\mathbf{A=}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(puntu 1)

3. Izan bedi V espazio bektoriala $V = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ jarraitua} \right\}$. Aztertu

$$\begin{aligned} \| \ \| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\to \|f\| = \int_{-1}^{1} f(x)dx \end{aligned}$$

aplikazioa norma den ala ez. Norma ez bada, adierazi zeintzuk diren betetzen ez diren baldintzak kontradibide batekin.

(puntu 1)

2. ARIKETA

1. Izan bitez F eta G E espazio bektorialaren bi azpiespazio bektorial non $E = F \oplus G$ gertatzen den. Orduan $\mathbf{z} \in E$ bektore bakoiza modu bakar batean deskonposa daiteke F-ko bektore bat eta G-ko beste bekore baten batura moduan. Froga ezazu.

(puntu 1)

2. Izan bedi V R^3 espazioaren azpiespazio bektoriala:

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathrm{R}^3 \,/\, x=a+c,\ y=b+c,\ z=a+b+2c \quad \text{non}\ \ a,b,c\in\mathrm{R}\right\}$$

a) Lor ezazu V azpiespazioaren oinarri bat eta ekuazio inplizitu eta parametrikoak. (puntu 1)

b) Lor itzazu W R^3 espazioaren azpiespazioak, V azpiespazioarekin betegarriak direnak (puntu 1)

3. Izan bedi M $E_{2x2}(\mathrm{R})$ espazioaren azpiespazio bektoriala:

$M=\left\{\begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} \,/\, a,b,c\in\mathrm{R}\right\}$. Lor ezazu M-ren oinarri bat eta osatu B' $E_{2x2}(\mathrm{R})$ espazioaren oinarri bat izan arte, non $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ matrizearen koordenatuak $\begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 5/2 \\ 7 \end{pmatrix}$ diren.

(1.5 puntu)

3. ARIKETA

Izan bedi f R^3 espazioko endomorfismoa. Honako datu hauek ezagutzen dira:

a) Bere heina 1 da.

b) $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ oinarrian non $u_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t$, $u_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t$, $u_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$ diren, nukleoaren ekuazio inplizituak honako hauek dira:

$$y_1+y_2=0$$
$$ay_1-y_2+(a+1)y_3=0$$

c) $f(u_1+u_2+u_3)=u_1+u_2+u_3$

Eskatzen da:

a) Kalkula ezazu arrazoituz, nukleo eta irudi multzoaren dimentsioak. Lor itzazu a parametroaren balio posibleetarako nukleoaren ekuazio inplizituak oinarri kanonikoan. (puntu 1)

b) f aplikazioaren adierazpen matriziala oinarri kanonikoan eta B_1 oinarrian. Adierazi bi matrize horien artean dagoen erlazioa.

(2 puntu)

<u>ALJEBRA LINEALA Ez-Ohiko Deialdia – 2. Partziala (2013ko ekainak 28)</u>

Bigarren partzialaren denbora: 1:30.

Puntuazio osoa: 10 puntu.

Guztira ariketa kopurua: 3. Erabili koaderno ezberdina ariketa bakoitza egiteko.

1. ARIKETA

2 orden karratuko matrize baten Jordanen matrizea ondorioztatu. (1.5 puntu)

2. ARIKETA

1. $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialean $\mathbf{x}_B = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t$ eta $\mathbf{y}_B = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t$ bektoreen arteko biderkadura eskalarra $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ oinarriarekiko honela definitzen da:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_3 - x_1 y_3 - x_3 y_1$$

Lor itzazu:

a) Aurkitu biderkadura eskalarraren adierazpen matriziala B oinarrian.

b) Arrazoitu B oinarria ortogonala den ala ez. Ez bada ortogonala, lor ezazu B oinarritik abiatuta oinarri ortogonal bat Gram-Schmidten metodoarekin.

c) Izan bitez $\mathbf{x}_{B_1} = (2 \quad 0 \quad 0)^t$ eta $\mathbf{y}_{B_1} = (0 \quad 0 \quad 3)^t$ $B_1 = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$ oinarriarekiko bi bektore. Lor ezazu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ biderkaduraren balioa.

(1.5 puntu)

2. Markatu $\boxed{E}$ esaldia egiazkoa bada edo $\boxed{G}$ esaldia gezurrezkoa bada.

Erantzun zuzena: 0.25
Erantzun okerra: - 0.25
Erantzunik gabe: 0

a) Gaizki baldintzatutako problema batean, algoritmo aproposa erabilita, ebatzi egiten dira hasieran egindako errore batek eragindako arazoak. $\boxed{E}\boxed{G}$

b) Matrize bat ez bada hertsiki diagonal menperatzailea, Gauss-Seidelen metodoa ez da konbergentea. $\boxed{E}\boxed{G}$

c) $|A| \neq 0$ bada eta aritmetika zehatza erabiltzen bada, ez da beharrezkoa pibotaje teknikak erabiltzea $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema ebazteko. $\boxed{E}\boxed{G}$

d) Gaussen metodoarekin eta Doolitleren metodoarekin lortzen diren LU faktorizazioak berdinak dira. $\boxed{E}\boxed{G}$

(puntu 1)

2. Erabaki arrazoituz $a \in \mathrm{R}$ parametroak bete behar duen baldintza $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea R gorputzaren barruan diagonalgarria izan dadin. Diagonalgarria den kasuan, lor ezazu dagokion D matrize diagonala, iragaite matrizea eta A^n $n \in \mathbb{N}$ kasuetarako adierazpena.

(1.5 puntu)

3. ARIKETA

1. Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -6 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ eta $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eskatzen da:

a) Zenbakizko algoritmo bat erabilita, aztertu A matrizea positibo definitua ote den.

(puntu 1)

b) Beharrezkoa da pibotaje metodoa erabiltzea $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ sistemaren ebazpenean? Arrazoitu erantzuna. (0.25 puntu)

c) Gauss-Seidelen errepikapenezko metodoa konbergentea izango litzateke sistema ebazteko? Arrazoitu erantzuna. (0.25 puntu)

d) Ebatzi $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ sistema, metodo trinko egokiena erabilita.

(puntu 1)

2. $[-2,2]$ tartean $f(t) = \dfrac{t^4}{16}$ funtzioa 3 edo maila txikiagoko polinomio batekin hurbildu minimo karratuen metodoarekin **Legendreren polinomioak** erabilita.

Oharra:

$$\|p_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}; \quad p_0(x) = 1; \quad p_1(x) = x; \quad p_2(x) = \frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2};$$

$$p_3(x) = \frac{5}{2}\cdot x^3 - \frac{3}{2}\cdot x; \; p_4(x) = \frac{35}{8}\cdot x^4 - \frac{15}{4}\cdot x^2 + \frac{3}{8}; \quad p_5(x) = \frac{63}{8}\cdot x^5 - \frac{35}{4}\cdot x^3 + \frac{15}{8}\cdot x$$

(2 puntu)

.

<u>**ALJEBRA LINEALA – Ohiko Deialdia – Lehen Partziala (2013ko Maiatzak 20)**</u>

Bigarren partzialaren denbora: 1 ordu eta 45 minutu

Puntuazio osoa: 10 puntu

Guztira ariketa kopurua: 3. Erabili koaderno ezberdina ariketa bakoitza egiteko.

<u>1 ARIKETA</u>

1. Bi maila edo gutxiagoko polinomioen espazio bektorialean honako biderkadura eskalarra definitzen da:

$$<,>: \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \quad \to \mathbb{R}$$
$$(p,q) \quad \to <p,q> = p(0)\cdot q(0) + p'(0)\cdot q'(0) + \frac{1}{4} p''(0)\cdot q''(0)$$

a) Lortu biderkadura eskalarrari dagokion matrizea $B = \{e_1, e_2, e_3\} = \{1+x^2, x+x^2, 1+x+x^2\}$ oinarriarekiko.

b) Ortogonalak al dira $1+x^2$ eta $x+x^2$ polinomioak? Ortogonalak ez izatekotan ortogonaliza itzazu Gram-Schmidt metodoa erabilita.

c) Bila ezazu polinomio bat e_1 eta e_2 polinomioekin angelu berdina izan dezan.

(1.5 puntu)

2. Demagun $A, B \in E_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\bar{x}_1 \neq \bar{0}, \bar{x}_2 \neq \bar{0}$. Arrazoitu baieztapen hauek egia ala gezurra diren:

a) $A\,\bar{x}_1 = \lambda\,\bar{x}_1$ eta $B\,\bar{x}_1 = \mu\,\bar{x}_1$ bada, orduan $\lambda + \mu$ balioa A+B-ren balio propioa da.

b) $A\,\bar{x}_1 = \lambda\,\bar{x}_1$ eta $B\,\bar{x}_1 = \mu\,\bar{x}_1$ bada, orduan $\bar{x}_1$ bektorea ez da A· B-ren bektore propioa.

c) $A\,\bar{x}_1 = \lambda\,\bar{x}_1$ eta $A\,\bar{x}_2 = \mu\,\bar{x}_2$ bada, orduan $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ bektorea A-ren $\lambda + \mu$ balio propioari egokitutako bektore propioa da.

(0.75 puntu)

<u>2 ARIKETA</u>

1. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea

a) Lor ezazu J matrizea, A matrizeari dagokion Jordan matrizea, eta dagokion Jordan oinarria. (Puntu 1)

b) A matrizea endomorfismo bati egokitua badago, frogatu aurreko atalean lortutako J matrizea eta endomorfismoari egokitutako matrizea Jordan oinarriarekiko berdinak direla. (0.5 puntu)

2. Izan bedi honako ekuazio linealetako sistema

$$\begin{aligned} 10x_1 - \ \ x_2 \qquad\quad &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 5 \end{aligned}$$

a) Jacobi eta Gauss-Seidel errepikapen metodoen artean, heuretariko ze metodo gomendatuko zenuke sistema hori ebazteko konbergentzia eta konbergentziaren abiaduraren arabera? Zergatik? (0.5 puntu)

b) Errepikapen metodo egokiena erabilita, bi iterazio egin hasierako $x^{(0)} = (0,0,0)^t$ bektorea bada. Kalkulatu egindako errorea (%). Eragiketak 4 zifra esanguratsurekin egin. (Puntu 1)

<u>3 ARIKETA</u>

1. Aplikatu Gauss-en metodoa eskala aldaketa eta pibotaje partziala erabilita. Adierazi egindako pauso guztiak, hau da, biderkatzaileak, eskala faktoreak eta pibotaje bektorea.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 10 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Puntu 1)

b) Aurreko atalean lortutako informazioa erabili metodoari dagozkion P, L eta U matrizeak ateratzeko eta horien artean sortzen den berdinketa identifikatu.

(0.75 puntu)

c) A-ren determinantea kalkulatu aurreko datuak erabilita. (0.25 puntu)

d) Sistema hau ebatzi aurreko ataletan lortutako datuak erabilita:

$A \cdot \underset{\sim}{x} = (-13\ \ 20\ \ 10)^t$ (0.75 puntu)

2. Taula honetako datuak kontutan izanik:

Planeta	**a** **Eguzkitik Batezbesteko distantzia (Unitate Astronomikoetan)**	**D** **Biraketa periodoa (Lur urtetan)**
Merkurio	0.39	0.24
Lurra	1	1
Jupiter	5.20	11.8
Urano	19.2	84.0
Pluton	39.5	248

$D = k \cdot a^b$ itxurako funtzio potentzial bat datu horietara doitu minimo koadratikoen metodoa erabilita. Planteatu hurbilketan egindako errore minimo koadratikoa. Egin eragiketak 3 zifra esanguratsutara biribilduz. (2 Puntu)

ALJEBRA LINEALA – Ohiko Deialdia – Lehen Partziala (2013ko Maiatzak 20)

Lehen partzialaren denbora: 1 ordu eta 30 minutu

Puntuazio osoa: 10 puntu

Guztira ariketa kopurua: 3. Erabili koaderno ezberdina ariketa bakoitza egiteko.

1 ARIKETA

1.- a) $A = \left(\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline (0) & B \end{array}\right)$ matrizea emanik, non B matrize erregular bat den. Ondorioztatu A^{-1} eta A^3 matrizeen balioak.

b) Aurreko atalean lortutakoa erabili matrize honen alderantzizkoa kalkulatzeko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1.5 puntu)

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ matrizea emanik, bilatu oinarrizko hiru matrize, Q_1, Q_2 *eta* Q_3 , non $A \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 = L$ betetzen den, L matrize behe triangeluar bat izanik (Puntu 1)

3. $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \ \text{jarraia}\}$ espazio bektoriala izanik, aztertu $U = \{f \in V \ / \ f(1) = f(0) = f(-1)\}$ azpimultzoa V-ren azpiespazio bektoriala den ala ez.

(0.5 puntu)

2 ARIKETA

1. Izan bedi $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ 2x2 ordenako matrize karratuen espazio bektoriala. Froga ezazu $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ espazioko edozein matrize $\begin{pmatrix} 0 & 3\cdot b + 2\cdot a \\ 2\cdot b & a \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} c-d & 0 \\ c+d & 0 \end{pmatrix}$ itxurako bi matrizeen batura bezala adieraz daitekeela era bakar batean. **Espazio eta azpiespazio bektorialen kontzeptuak bakarrik erabiliz.** (2 puntu)

2. $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialean $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ oinarri bat eta $\mathbf{x}$ bektore bat daukagu non bere B-rekiko koordenatuak $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ diren. $S=\{e_1+e_2, e_1+e_2+e_3\}$ multzo askea emanik, $\mathbb{R}^3$-ko B' oinarri bat lortu arte osatu, non aurreko $\mathbf{x}$ bektorearen koordenatuak B' oinarriarekiko $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ izan daitezen. (Puntu 1)

3. Froga ezazu E espazio bektorialean $\mathbf{x}$ bektore bat era bakar batean adieraz daitekeela B oinarriko bektoreen konbinazio lineala moduan.

(0.5 puntu)

3 ARIKETA

1. Endomorfismo hau emanik:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{P}_3 &\longrightarrow \mathbb{P}_3 \\ p(x) &\longrightarrow p''(1)\,x+p(0) \end{aligned}$$

a) Kalkulatu f-ri egokitutako matrizea $B=\{1, x-1, x^2, x^3\}$ oinarriarekiko.

(0.75 puntu)

b) Kalkulatu Kerf-ren oinarri bat bi era ezberdinetan:

b1) Aurreko matrizea erabilita.

b2) Zuzenean (matrizea erabili gabe)

(Puntu 1)

c) $\mathbb{P}_3$-ko azpiespazio bektorial hau emanik:

$$S=\{p(x)\in\mathbb{P}_3 \ / \ p'(x)=p'(-x) \quad \forall x\in\mathbb{R}\}$$

Im(S)-ren oinarri bat lortu. (Puntu 1)

2. Demagun f E espazioan definitutako endomorfismo bat dela eta

$B_1=\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}$ Kerf-ren oinarri bat eta

$B_2=\{u_1,u_2,\cdots,u_p,v_1,v_2,\cdots,v_r\}$ E-ren oinarri bat.

<u>Frogatu</u> $\{f(v_1), f(v_2),\cdots,f(v_r)\}$ Imf-ren oinarri bat dela, oinarritzen zaren propietateak frogatuz. (0.75 puntu)

ALJEBRA LINEALA (Urtarrila 2013)

Denbora: *3 ordu.*

Kalifikazioa: *10 puntu.*

Ariketeen zenbaki kopurua: 6.

Orri honetan 3 ariketa daude, ordu 1 eta 30 minutuko iraupen batekin. Ariketa bakoitzarentzat koaderno desberdinak erabili.

LEHEN ARIKETA

1) Izan bedi A hurrengo matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a) Aurkitu, arrazoituz, α parametroaren zein balioetarako den A matrizea ortogonala..

(0.25 puntu)

b) Aurkitu, arrazonatuz, α parametroaren zein balioetarako den A matrizea antisimetrikoa.

(0.25 puntu)

c) Izan bitez B matrize bat non $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$ moduan definitzen den, eta C matrize antisimetriko bat. Erabaki zein den A matrizea honako berdintza hau eman dadin:

$$A^{-1} \cdot B + B = (B \cdot A + B + C)^t + C$$ (0.5 puntu)

2) Kalkulatu, arrazonatuz, hurrengo n ordenako matrize karratuaren determinantea:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$$

(0.5 puntu)

BIGARREN ARIKETA

1) Eman ezazu espazio bektorialaren definizioa. Eman ezazu azpiespazio bektorialaren definizioa. Eman itzazu azpiespazio bektorialaren baldintza(k) beharrezkoak eta nahikoak. (0.75 puntu)

2) Izan bedi $\mathbb{P}_3(x)$ 3 edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala, eta $S=\{p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \ / \ p'(-1)=0\}$ $\mathbb{P}_3(x)$-ren azpiespazio bektorial bat.

- **a)** Aurkitu S-ren oinarri bat eta bere ekuazio inplizituak. (0.5 puntu)
- **b)** Osatu, arrazonatuz, S-ren oinarria $\mathbb{P}_3(x)$-ren oinarri bat lortu arte. (0.25 puntu)
- **c)** Aurkitu S-ren ekuazio inplizituak b) atalean lortu duzun oinarriarekiko. (0.25 puntu)
- **d)** Aurkitu $\mathbb{P}_3(x)$-ren azpiespazio bektorial bat, T, S-rekin betegarria izan dadin. Idatzi $p(x)=1+x+x^2$ polinomioa S-ren polinomio bat eta T-ren beste polinomio baten batura moduan. (0.5 puntu)

HIRUGARREN ARIKETA

1) Izan bedi V, 2 ordenako **matrize simetriko** errealen espazio bektoriala. Izan bedi F hurrengo matrizeek sortzen duten V-ren azpiespazio bektoriala:

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

a) Kalkulatu F azpiespazioaren dimentsioa eta oinarri bat. (0.5 puntu)

b) F-ren ekuazio kartesiarrak kalkulatu oinarri kanonikoarekiko, eta aztertu ea $\begin{pmatrix}1&3\\3&2\end{pmatrix}$ matrizea F-ren barne dagoen. (0.75 puntu)

c) Hurrengo aplikazioa ematen da:

$$\begin{array}{rcl} f: V & \to & \mathbb{R} \\ A=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix} & \to & f(A)=|a|+|b|+|c| \end{array}$$

Aztertu ea norma den. Norma ez bada, idatzi betetzen ez diren axiomak.

(0.5 puntu)

ALJEBRA LINEALA (Urtarrila 2013)

Orri honetan 3 ariketa daude, ordu 1 eta 30 minutuko iraupen batekin. Ariketa bakoitzarentzat koaderno desberdinak erabili.

LAUGARREN ARIKETA

1) Izan bedi F $\mathbb{R}^4$-ren azpiespazio bektorial bat hurrengo ekuazioekin $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$ eta G $\mathbb{R}^4$ -ren azpiespazio bektoriala hurrengo ekuazio parametrikoekin $\begin{cases} x_1=\lambda+2\gamma \\ x_2=\lambda+2\gamma \\ x_3=2\lambda+\gamma \\ x_4=2\lambda+\gamma \end{cases}$, $\lambda,\gamma\in\mathbb{R}$.

Aurkitu F -ren oinarria bat eta $F\cap G$ -ren beste oinarri bat. (0.5 puntu)

BOSTGARREN ARIKETA

1) **a)** Izan bedi f endomorfismo lineal bat, dimentsio finitoko espazio bektorial batean definituta. Frogatu f injektiboa bada orduan f suprajektiboa izango dela ere.

(0.25 puntu)

b) Izan bedi $\mathrm{f}:\mathrm{E}\longrightarrow\mathrm{F}$ bi espazio bektorialen arteko aplikazio lineal bat. Frogatu $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_p\}$ E-ren sistema askea bada eta f injektiboa bada, orduan $\{\mathrm{f}(\mathbf{u}_1),\mathrm{f}(\mathbf{u}_2),\ldots,\mathrm{f}(\mathbf{u}_p)\}$ F-ren sistema aske bat izango dela. (0.5 puntu)

c) Beharrezkoa al da, $\mathrm{f}:\mathrm{E}\longrightarrow\mathrm{F}$ injektiboa izatea menpekotasun lineala mantentzeko? Erantzuna arrazonatu eta adierazi zein ondoriotan oinarritzen zaren.
(0.25 puntu)

2) Izan bedi $\mathbb{P}_n(x)$, n edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala. Hurrengo aplikazio lineala definitzen da:

$$\begin{aligned} \mathrm{f}:\mathbb{P}_n(x)&\longrightarrow\mathbb{P}_n(x) \\ p(x)&\longrightarrow p(x)-p'(x) \end{aligned}.$$

a) Aztertu aplikazioaren izaera, bere matrizea kalkulatu gabe.
(0.5 puntu)

b) $\mathbb{P}_n(x)$ -ren oinarri kanonikoan aplikazio horren matrizea kalkulatu.
(0.5 puntu)

SEIGARREN ARIKETA

1) Izan bedi $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{P}_2(x)$ aplikazio lineal bat non:

- $(0,a,b)$ itxura duen $\mathbb{R}^3$-ren bektore bakoitzaren irudia $a\cdot x + b\cdot x^2$ polinomioa da.
- f-ren nukleoa $\mathbb{R}^3$ espazioaren azpiespazio bektorial bat da, non bektoreek hiru osagaiak berdinak dituzte.

Eskatzen da:

a) Oinarri kanonikoetan aplikazioaren matrizea aurkitu. (0.5 puntu)

b) f(S)-ren oinarri bat aurkitu, non S $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat da, hurrengo ekuazio parametrikoak dituena: $\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha + \beta \\ x_3 = \alpha \end{cases}$.

(0.25 puntu)

c) Aurkitu, posible diren 2 era desberdinez, aplikazioaren matrizea $\mathbb{R}^3$-ren $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ oinarria eta $\mathbb{P}_2(x)$-ren oinarri kanonikoa erabilita.

(0.75 puntu)

2) Izan bedi $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo bat, oinarri kanonikoetan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ matrizea elkartuta duena. Aurkitu Ker f eta Im f azpiespazioen dimentsioak a eta b balioen arabera. (0.5 puntu)

ALJEBRA LINEALA – Lehen Partziala (2012ko ekainak 29)

Lehen Partzialaren denbora: 1.5 ordu

Lehen Ariketa: ordu 1 **Bigarren Ariketa: 30 minutu**

Puntuazio osoa: 10 puntu.

Guztira Ariketa Kopurua: 2. Erabili koaderno ezberdina ariketa bakoitza egiteko

LEHEN ARIKETA

1.- Matrize bat *idenpotentea* dela estaten da baldin eta $A^2 = A$ gertatzen bada eta *inbolutiboa* dela baldin eta $A^2 = I$ gertatzen bada non I identitate matrizea da. Izan bedi A *idenpotente* ez nulua eta izan bedi $B = a \cdot A - I$. Aurkitu *a*-ren balioak zeinerako B matrizea *inbolutiboa* izango da. **(0.75 puntu)**

2.- Kalkulatu arrazoituz baina garatu gabe, hurrengo determinantearen balioa:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & e & b+c+d+f+g+h \\ 1 & b & f & a+c+d+e+g+h \\ 1 & c & g & a+b+d+e+f+h \\ 1 & d & h & a+b+c+e+f+g \end{vmatrix}.$$

(0.75 puntu)

3.- a) Izan bedi $S=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_q\}$ E espazio bektorial baten q bektoreen multzo bat. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_q$ bektoreen konbinazio lineal guztiek osatzen duten multzoa kontsideratzen da. Froga ezazu multzo hori, S barruan duen *E-ren azpiespazio bektorial txikiena* dela. Nola deitzen da azpiespazio hori?

(1.75 puntu)

b) Izan bitez B_1, B_2 eta B_3 dimentsio finituko espazio bektorial baten hiru oinarri. Izan bedi P_1 B_1–etik B_2–ra doan iragaite matrizea eta P_2 B_2–tik B_3–ra doana. Ondorioztatu arrazoituta P_3 iragaite matrizea, B_1–etik B_3–ra doan iragaite matrizea. Azaldu zer adierazten duen P_3 matrizeak.

(1.25 puntu)

4.- Izan bedi $F_{4x4}(\mathbb{R})$ 4 ordenako matrize tridiagonal karratuen espazio bektoriala:

$$F_{4x4}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} / a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Izan bedi U matrize tridiagonal simetrikoen azpiespazio bektoriala eta V matrize antisimetriko tridiagonalen azpiespazio bektoriala. Froga ezazu $F_{4x4}(\mathbb{R})$ U eta V azpiespazioen batura zuzena dela.

(2 puntu)

DENBORA: ORDU 1

BIGARREN ARIKETA

1. Izan bedi hurrengo aplikazioa $f: \mathbb{P}_2(x) \to E_{2x2}(\mathbb{R}) / \ f(p) = \begin{pmatrix} p(1) - p(0) & 0 \\ 0 & p'(0) \end{pmatrix}$

non $\mathbb{P}_2(x)$ 2 edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala den eta $E_{2x2}(\mathbb{R})$ 2 ordenako matrize karratuen espazio bektoriala.

a) Frogatu f aplikazio lineal bat dela. **(0.5 puntu)**

b) Aurkitu f-ren nukleoaren ekuazio kartesiarrak eta oinarri bat. **(puntu 1)**

c) Aurkitu f-ren irudiaren ekuazio kartesiarrak eta oinarri bat. **(puntu 1)**

2.- Izan bedi V espazio bektorial erreal bat eta B V-ren oinarri bat. $\lambda \in \mathbb{R}$ balio bakoitzarentzat hurrengo endomorfismoa kontsideratzen da: $f_\lambda : V \longrightarrow V$. Endomofismo horri elkartutako matrizea B oinarrian honako hau da:

$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$. Sailkatu f_λ endomorfismoa λ parametroaren balioen arabera.

(puntu 1)

DENBORA: 30 MINUTU

ALJEBRA LINEALA – Bigarren Partziala (2012ko Ekainak 29)

Lehen Partzialaren denbora: 1.5 ordu

Lehen Ariketa: ordu 1 **Bigarren Ariketa: 30 minutu**

Puntuazio osoa: 10 puntu.

Guztira Ariketa Kopurua: 2. Erabili koaderno ezberdina ariketa bakoitza egiteko

LEHEN ARIKETA

1.- Izan bedi E biderkadura eskalarra duen espazio bektorial erreal bat eta $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ E-ren oinarri bat. E-ren biderkadura eskalarrari buruz jakina da:

$$\|\mathbf{e}_1\|=1, \|\mathbf{e}_2\|=\sqrt{2}\ , \|\mathbf{e}_3\|=\sqrt{3}\ , \|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\|=\sqrt{3},$$

$U_1=\{\mathbf{x}\in E\ /\ x_1-x_2+3x_3=0\}$ eta $U_2=\mathrm{Span}\{\mathbf{e}_3\}$ azpiespazio ortogonalak dira.

- **a)** Aurkitu biderkadura eskalar horri elkartutako G matrizea B oinarrian. **(puntu 1)**
- **b)** Aurkitu E-ren oinarri ortogonal bat biderkadura eskalar horrekiko. **(0.5 puntu)**

2.- Bilatu zer baldintza bete behar dituzte $a,b,c\in\mathbb{R}$ balioak honako matrize hau diagonalgarria izan dadin.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Diagonalgarria den kasuetan, aurkitu D matrize diagonala eta P matrizea non $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$. Kalkulatu A^n berreturak n bikoitia denean.

(2.25 puntu)

3.- Izan bedi $C=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ $f:E\to E$ endomorfismo bati elkartutako

matrizea E-ren $B^*=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4,\mathbf{u}_5,\mathbf{u}_6,\mathbf{u}_7,\mathbf{u}_8\}$ oinarri batean.

a) Aurkitu f endomorfismoaren balio propioak eta bere anizkoiztasun aljebraiko eta geometrikoak. **(0.5 puntu)**

b) A endomorfismo berari elkartutako matrizea bada E-ren B beste oinarri batean, kalkulatu $\left\{\mathbf{x} \,/\, \mathrm{A}^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$ eta $\left\{\mathbf{x} \,/\, \mathrm{A}^4 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$ azpiespazioen dimentsioak. Adierazi arrazoituz B^* oinarriko bektoreetatik zeintzuk diren Ker f azpiespaziokoak. **(1.5 puntu)**

4.- Kalkulatu A matrizearen alderantzizkoaren 2. zutabea Crouten metodoa erabilita.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1.75 puntu)

DENBORA: ORDU 1

<u>BIGARREN ARIKETA</u>

1.- Izan bedi $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ sistema lineala. Enuntziatu bi baldintza nahikoak, Gauss-Seidelen iteraziozko metodoak konbergitzen duela ziurtatzeko. **(0.5 puntu)**

2.- **<u>Ondorioztatu</u>** espazio bektorial baten f bektore bati hobekien hurbiltzen den (minimo karratuen teknika erabilita) elementua kalkulatzeko ekuazio normalak, holako elementua 2 dimentsioko azpiespazio bektorial baten barne dagoenean. **(puntu 1)**

3.- Aurkitu $y = b \cdot x^a$ motako funtzio bat, minimo karratuen teknika erabilita, taularen datuei hobekien hurbiltzen dena:

x	0.02	0.2	1.2
y	0.15	0.36	0.53

Borobildu bi zifra esanguratsuetara. **(puntu 1)**

DENBORA: 30 MINUTU

ALJEBRA LINEALA – Ohiko Deialdia – Lehen Partziala (2012ko Maiatzak 21)

Lehen partzialaren denbora:1.5 ordu

Puntuazio osoa:10 puntu

Guztira ariketa kopurua:2. Erabili koaderno ezberdina ariketa bakoitza egiteko.

LEHEN ARIKETA

1) a) Defini ezazu matrize batean *errenkadazko oinarrizko eragiketa* bat egiteak esan nahi duena. Zer da *errenkadazko oinarrizko matrizea* eta zer da *zutabezko oinarrizko matrizea*?

b) Izan bitez $A=\begin{pmatrix}2&7\\8&1\\9&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8&1\\2&7\\9&5\end{pmatrix}$ eta $C=\begin{pmatrix}2&9\\8&9\\9&14\end{pmatrix}$. Adierazi B eta C matrizeak A matrizea bider oinarrizko matrize bat bezala.

(puntu 1)

2) Izan bedi $\mathbb{P}_3(x)$ 3 edo maila txikiagoko polinomioen espazio erreala eta $S=\left\{p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \;\;/\;\; a+b=c+d=0\right\}$ bere azpiespazio bat.

a) Bila ezazu S azpiespazioaren oinarri bat.

b) Osatu arrazoituz, S oinarria $\mathbb{P}_3(x)$ espazioaren oinarri bat izan arte.

c) Bila ezazu T azpiespazio bektoriala, S azpiespazioari betegarria dena. Idatzi $p(x)=1+x^3$ polinomioa S-ko polinomio bat eta T-ko polinomio baten batura bezala.

(2.25 puntu)

3) Izan bitez $\mathbb{R}^4$ espazioko honako azpiespazio hauek:

$$U=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{eta} \quad V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} / \; x_1-x_2+x_3+x_4=0 \;\; \text{y} \;\; x_2-x_4=0\right\}.$$

Bilatu $U\cap V$ eta $U+V$ azpiespazioen ekuazio inplizituak, ekuazio parametrikoak eta oinarri bana.

(1.75 puntu)

BIGARREN ARIKETA

1) Izan bedi E espazio bektorial erreala eta $B=\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}\}$ E espazioaren oinarri bat. Izan bitez E espazioren honako bektore hauek:

$\mathbf{u_1}=\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}$, $\mathbf{u_2}=\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}$
$\mathbf{v}=\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$, $\quad \mathbf{w}=\mathbf{e_1}-3\mathbf{e_2}-2\mathbf{e_3}$

Izan bedi $S=\text{Span}\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\}$ E espazioaren 2 dimentsioko azpiespazio bektoriala.

- **a)** Froga ezazu {**v**, **w**} S azpiespazioren beste oinarri bat dela.
- **b)** $\mathbf{x}=-2\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2}\in S$ bektorea hartuta, bila itzazu bere koordenatuak $\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\}$ oinarrian. Lor itzazu ere bektore beraren koordenatuak {**v**, **w**} oinarrian $\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\}$ eta {**v**, **w**} arteko iragaite matrizea erabilita.

(2 puntu)

2) 2 ordenako matrize karratu errealen espazio bektorialean, $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazioan, izan bedi honako azpiespazio bektorial hau:

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,/\, a-d=0\right\}.$$

Izan bedi $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^2$ aplikazio lineala honako baldintzak betetzen dituena:

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **a)** U espazioaren oinarri bat eta $\mathbb{R}^2$ espazioaren oinarri kanonikoak erabilita, lor ezazu f aplikazioari elkartutako matrizea.
- **b)** Lor itzazu nukleo eta irudi multzoaren dimentsioak. Lor ezazu nukleoren oinarri bat.

(2 puntu)

3) Izan bedi E n dimentsioko espazio bektoriala eta $f:E\longrightarrow E$ aplikazio lineal bat. Frogatu **zehaztasunez** Ker f azpiespazioaren dimentsioa p bada (0<p<n), orduan Im f azpiespazioaren dimentsioa n-p dela.

(puntu 1)

ALJEBRA LINEALA – Ohiko Deialdia–Bigarren Partziala (2012ko Maiatzak 21)

Bigarren partzialaren denbora: 1:35

Puntuazio osoa: 10 puntu

Guztira ariketa kopurua:2. Erabili koaderno ezberdina ariketa bakoitza egiteko.

LEHEN ARIKETA

1) Izan bedi $\mathbb{R}^3$ espazioan honako aplikazio hau:

$$< >: \mathbb{R}^3 \text{ x } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad /$$

$$<(x_1,\ x_2, x_3)^t, (y_1,\ y_2, y_3)^t >= (x_1 + x_2)\cdot(y_1 + y_2) + \alpha \cdot x_2 \cdot y_2 + (x_2 - x_3)\cdot(y_2 - y_3)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ parametroaren balio batzuetarako, aplikazio horrek biderkadura eskalar bat definitzen du.

a) Lor ezazu biderkadura eskalar horri elkartutako matrizea $\mathbb{R}^3$ espazioaren oinarri kanonikoarekiko.

(0.5 puntu)

b) Bila ezazu **zenbakizko metodo** bat erabilita, α parametroaren zein balioetarako aurreko adierazpenak biderkadura eskalarra definitzen duen.

(1.25 puntu)

2) Lor ezazu $f(x) = x^2$ funtzioarentzat $[0,1]$ tartean lehen mailako hurbilketa minimio koadratiko onena $w(x) = x$ pisu funtzioa eta **polinomio ortogonalak** erabilita.

(1.25 puntu)

3) Izan bedi $\mathbb{P}_3(x)$ 3 edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala eta T: $\mathbb{P}_3(x) \to \mathbb{P}_3(x)$ endomorfismo bat. $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ oinarrian aplikazio horri elkartutako matrizea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ da. Kalkula ezazu A matrizearen matrize antzeko sinpleena eta dagokion oinarri polinomikoa.

(2 puntu)

BIGARREN ARIKETA

1) Gaussen ezabapen metodoa pibotaje partzialaren bitartez eta eskala aldaketa erabilita, ebatzi honako $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\frown}{b}$ sistema.

$$\begin{cases} 3x + 5y + 3z + 7t = -8 \\ 3x + 4y + z + 2t = -3 \\ 3x + 5y + 3z + 5t = -6 \\ 6x + 8y + z + 5t = -8 \end{cases}$$

Eman itzazu faktorizazio prozesutik lortzen diren L, U eta P matrizeak. Zer lortzen da L eta U matrizeak biderkatzean?

Oharra: A matrizea ez da berrordenatu behar problema ebaztean.

(2 puntu)

2) a) Aztertu a parametroaren balioen arabera honako ekuazio linealetako sistemaren Gauss-Seiden errepikapenezko metodoaren konbergentzia edo dibergentzia.

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x + 4 \cdot y - z = 0 \\ a \cdot y + z = 2 \end{cases}$$

(1.25 puntu)

b) a=1.25 baliorako, egin Gauss-Seidelen metodoaren **iterazio bat,** hasierako bektore bezala $\underset{\sim}{x}^0 = (-0.5, 0.5, 1.45)^t$ bektorea erabilita. Kalkula ezazu egindako errore **portzentaia.** Egin eragiketak 3 digitu esanguratsura borobiltzen.

(0.75 puntu)

3) Izan bedi honako taula hau

x_i	**-5.00**	**-4**	**-2**	**1**
y_i	**$2.16 \text{x} 10^{11}$**	**$1.46 \text{x} 10^{9}$**	**66079**	**0.02**

Minimo karratuen metodoa erabilita, lortu datu horietara hobekien hurbiltzen den funtzioa. (Egin eragiketak 2 dezimaletara borobiltzen)

(puntu 1)

ALJEBRA LINEALA – Lehen Partziala (2012ko Urtarrilaren 9an)

Denbora: *3 ordu (1.5 lehen 3 ariketeentzat, 1.5 azken 3 ariketeentzat)*

Kalifikatzeko sistema: *24 puntuetatik.*

Ariketeen kopurua: 6. Erabili koaderno desberdinak ariketa bakoitzerako.

Orri honetan 3 ariketa aurkituko dituzue. Ordu eta erdi bat daukazue 3 ariketa hauek egiteko.

LEHEN ARIKETA

1) Bloke-matrizeen partiketa bidez kalkula ezazu A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.5 puntu)

2) Eztabaidatu hurrengo ekuazio sistema k, a, b, c $\in \mathbb{R}$ parametroen arabera:

$$\begin{cases} x - y = a \\ y - z = b \\ k \cdot x + z = c \end{cases}$$

Soluziorik dauden kasuetan ebatzi sistema. (puntu 1)

3) Hurrengo n ordenako determinantea kalkulatu:

$$\begin{vmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & . & . & . & x_n \\ x_1 & x_2+1 & x_3 & . & . & . & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+1 & . & . & . & x_n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ x_1 & x_2 & x_3 & . & . & . & x_n+1 \end{vmatrix}$$

(puntu 1)

BIGARREN ARIKETA

1) Hurrengo n ordenako matrizeen determinantea aurkitu:

a) n bakoiti ordenako matrize antisimetriko bat.
b) Matrize ortogonal bat.
c) A matrizea non $A^2 = A$.
d) A matrize baten matrize adjuntua. (1.5 puntu)

2) Izan bedi $f: E \longrightarrow F$ bi espazio bektorialen arteko aplikazio lineal bat non $\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$. Frogatu **zehaztasunez** $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ E-ren oinarri bat bada, orduan $f(B) = \{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), ..., f(\mathbf{u}_n)\}$ Im f-ren (edo f(E)-ren) oinarri bat dela.
(1.5 puntu)

3) Izan bitez $\mathbf{u}_1$ eta $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ bi bektore linealki independienteak eta $A \in E_{nxn}(\mathbb{R})$ matrize erregular bat. Frogatu $\mathbf{v}_1 = A \cdot \mathbf{u}_1$ eta $\mathbf{v}_2 = A \cdot \mathbf{u}_2$ ere direla $\in \mathbb{R}^n$ dauden bi bektore linealki independienteak. (puntu 1)

HIRUGARREN ARIKETA

1) Idatzi eta frogatu oinarri ez-osoaren teorema E espazio bektorial batean non E-ren dimentsioa n da. (puntu 1)

2) Izan bedi $f: E \longrightarrow F$ E eta F $\mathbb{K}$-gaineko bi espazio bektorialen arteko aplikazio lineal bat. E-ren dimentsioa n da eta F-ren dimentsioa m.

Aurkitu aplikazio linealaren adierazpen matriziala B_E (E-ren oinarri bat) eta B_F (F-ren oinarri bat) oinarrietan. Adierazpen matrizial hau erabiltzen aurkitu aplikazio linealaren adierazpen matriziala E-ren oinarria B_E^* bada (B_E oinarria aldatu dugu). Idatzi agertzen diren matrizeen ordenak eta adierazi laburki nola kalkulatzen diren matrize horiek.

(1.25 puntu)

3) Izan bedi E 3 dimentsioko espazio bektorial bat eta $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ E-ren oinarri bat:

a) □ zein baliotarako $P = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ matrizea izan daiteke B eta E-ren beste oinarri baten, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, iragaite matrizea? (0.5 puntu)

b) Aurkitu P matrizea eta B' oinarria non $\mathbf{x} \in E$ bektore baten koordenatuak B oinarrian (2,1,2) dira eta B' oinarrian (1,0,1) dira. (puntu 1)

c) Aurkitu E-ren oinarri bat barruan daukala **b)** kasuaren $\mathbf{x} \in E$ bektorea (0.75 puntu)

ALJEBRA LINEALA – Lehen Partziala (2012ko Urtarrilaren 9an)

Orri honetan 3 ariketa aurkituko dituzue. Ordu eta erdi bat daukazue 3 ariketa hauek egiteko.

LAUGARREN ARIKETA

1) Izan bitez $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazio bektorialaren hurrengo bi azpiespazio bektorialak:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & a+b \end{pmatrix} \;/\; a,b \in \mathbb{R} \right\},\; S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;/\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) S_1 eta S_2 azpiespazio bektorialen ekuazio inplizituak kalkulatu. (puntu 1)

b) $S_1 \cap S_2$ -ren eta $S_1 + S_2$ -ren oinarri bat, dimentsioa eta ekuazio parametrikoak aurkitu. (2 puntu)

2) Izan bedi $\|\cdot\|_\infty : C[a,b] \to \mathbb{R} \;/\; \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Frogatu norma dela.

(puntu 1)

BOSTGARREN ARIKETA

1) Aztertu ezazu ea S den $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat: $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 16 \right\} \subset \mathbb{R}^3$. S ez bada $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat, betetzen ez diren baldintza guztientzat aurkitu ezazu aurkako adibide bat (hau da, betetzen ez diren baldintza bakoitzarentzat aurkitu ezazu adibide bat non baldintza hori ez da betetzen (puntu 1)

2) Izan bedi hurrengo aplikazioa:

$$\begin{aligned} f: \; E_{2x2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(x) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longrightarrow f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = a + (b-c)x + dx^2 \end{aligned}$$

a) Frogatu f lineala dela. (puntu 1)

b) Kalkula ezazu (urrats guztiak adierazten) f aplikazioaren nukleoaren oinarri bat eta ekuazio kartesiarrak. (puntu 1)

c) Izan bedi U 2 ordenako matrize simetrikoen espazio bektoriala eta V $V=\left\{p(x)\in\mathbb{P}_2(x)\ \ /\ \ p(-x)=-p(x)\right\}$. $f(U)$ eta V betegarriak al dira? (Adierazi erantzuna). (1.5 puntu)

SEIGARREN ARIKETA

Izan bedi $\mathbb{R}^4$ espazio bektorialaren hurrengo endomorfismoa:

I. Endomorfismoaren nukleoa da azpiespazio bektoriala hurrengo ekuazio kartesiarrekin: $x_1+x_2+x_3=0,\ \ x_4=0.$

II. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ bektorearen irudia bektore bera da eta $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ bektorearen irudia bektore bera da.

Eskatzen da:

a) Aurkitu ezazu endomorfismoaren matrizea $\mathbb{R}^4$-ren oinarri kanonikoan.

(1.5 puntu)

b) Izan bedi hurrengo azpiespazio bektoriala

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\ \ /\ \ x_1+x_2+x_3-x_4=0,\ \ x_4=0,\ \ \ x_1-x_2-2x_4=0\right\}$$

Existitzen al da $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4$ bektore bat non $f(\mathbf{x})\in V$? (0.5 puntu)

c) Aurkitu ezazu endomorfismoaren matrizea hurrengo oinarrian:

$$B'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$ **<u>Ezin da erabili matrize antzekoen berdintza</u>**.

(1.5 puntu)

ALJEBRA LINEALA – Lehen partziala (2011ko uztailak 7)

Lehen partzialeko denbora: 1:30

Puntuak guztira: 10 puntu.

Guztira 3 ariketa daude. Egin ariketa bakoitza koaderno ezberdin batean.

LEHEN ARIKETA

A) Bila ezazu A matrizearen alderantzizkoa beharrezkoak diren pauso guztiak ematen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(puntu 1)

B) Esan honako baieztapen hauek egia edo gezurra diren. Emandako erantzuna arrazoitu laburki. Baieztapena gezurra bada, eman kontradibide bat.

1) A eta B bi matrize karratu badira, non $A \cdot B = (0)$ den, orduan A = (0) edo B=(0).

2) A $n \geq 2$ ordenako matrize erregularra bada eta 2. errenkadari A matrizearen lehen errenkadaren multiplo bat gehitzen bazaio, orduan, emandako matrizea ere erregularra da.

3) Izan bitez B eta B' $\mathbb{R}^3$ espazioaren bi oinarri. P matrizea B'-tik B-ra doan iragaite matrizea bada, orduan P^{-1} B-tik B'-ra doan iragaite matrizea da.

4) Izan bitez S eta T E espazio bektorialaren bi azpiespazio. Orduan, $S \cup T$ E espazio bektorialaren azpiespazio bektoriala da. Gainera, S + T azpiespazioaren berdina izango da.

(2 puntu)

C) **1)** Froga ezazu bi azpiespazio bektorialen arteko ebakidura ere azpiespazio bektoriala dela.

(0.75 puntu)

2) Izan bedi $\mathbb{R}^4$ espazio bektoriala eta izan bitez bere bi azpiespazio bektorial hauek.

$$W_1 = \text{Span}\left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W_2 = \text{Span}\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lor ezazu $W_1 \cap W_2$ ebakidura azpiespazioaren oinarri bat eta dagozkion ekuazio inplizitu eta parametrikoak. **(1.25 puntu)**

BIGARREN ARIKETA

A) Izan bitez E eta F $\mathbb{K}$ gorputzaren gaineko n eta m ordenako bi espazio bektorial, hurrenez hurren. Izan bedi $f: E \longrightarrow F$ aplikazio lineala. Froga ezazu:

$\operatorname{Ker} f = 0_E$ bada, orduan E-ren edozein bektore linealki independenteen multzoa f aplikazioaren bidez F-ren bektore linealki independenteen multzo batean bihurtzen da.

(1.25 puntu)

B) Izan bedi $\mathbb{P}_2(x)$ 2 edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala. Izan bedi honako aplikazio lineala:

$$f: \mathbb{P}_2(x) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$p(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 \longrightarrow f(p(x)) = \begin{pmatrix} a - 2c \\ b + c \\ 2a + \alpha c \end{pmatrix}$$

1) Bila ezazu $\alpha \in \mathbb{R}$ balioa, f aplikazioa <u>ez izateko bijektiboa</u>. α parametroaren balio horretarako, bila itzazu nukleo eta irudi multzoaren oinarri eta ekuazio inplizituak. **(1.25 puntu)**

2) Izan bedi $\alpha = 0$ balioa eta $S = \operatorname{Span}\{1, 1+x\}$. **Kalkulatu gabe**, ondoriozta ezazu f(S) azpiespazioaren dimentsioa. **(0.5 puntu)**

C) Izan bedi $\mathbb{P}_2(x)$ 2 edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala. Izan bedi honako aplikazio lineala:

$$f: \mathbb{P}_2(x) \longrightarrow \mathbb{P}_2(x)$$

$$p(x) \longrightarrow f(p(x)) = p(x) + p'(x)$$

Bila ezazu f aplikazioari elkartutako matrizea hasiera eta bukaerako espazioetako oinarriak $\{2, x+1, x^2-1\}$ badira. **(puntu 1)**

HIRUGARREN ARIKETA

A) Izan bedi E 3 dimentsioko espazio bektorial bat eta B bere oinarri bat. Erabaki $a / a \in \mathbb{R}$ parametroaren zein balioetarako G matrizea biderkadura eskalarrari elkartutako matrizea den.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a = 3 baliorako, kalkulatu **u** eta **v** bektoreek sortzen duten angelua, B oinarrian adierazita $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ badira, hurrenez hurren. **(puntu 1)**

<u>ALJEBRA LINEALA – Bigarren partziala (2011ko uztailak 7)</u>

Bigarren partzialeko denbora: 1:30

Puntuak guztira: 10 puntu.

Guztira 3 ariketa daude. Egin ariketa bakoitza koaderno ezberdin batean.

<u>LEHEN ARIKETA</u>

A) Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea. Diagonaliza ezazu ortogonalki A metrizea eta eman dagozkion P eta D matrizeak.

<u>**Oharra:**</u> A-ren balio propioak $\lambda_1 = 5$ bakuna eta $\lambda_2 = -1$ bikoitza.

(1.5 puntu)

B) Lor ezazu honako matrize honi dagokion Jordanen forma kanonikoa eta dagokion P matrizea.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.5 puntu)

<u>BIGARREN ARIKETA</u>

A) Bila itzazu honako matrize honen balio propio menderatzailea eta elkartutako bektore propioa potentzien metodoa erabilita:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{hasierako bektorea } \underset{\sim}{x}^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Metodoa %3ko zehaztasuna lortzen denean geldituko da (balio propio eta bektore propioaren kalkuluan). Eragiketak **5 digitu esanguratsura** biribiltzen egin behar dira.

(puntu 1)

B) Defini itzazu eta eman adibide bana honako kontzeptu hauentzat:

1) Zenbakiz egonkorra den algoritmoa.

2) Gaizki baldintzatutako sistema.

3) Mozte errorea.

4) Algoritmo konbergentea

(2 puntu)

HIRUGARREN ARIKETA

A) Azaldu zehazki Gaussen algoritmoaren k. pausoa eta pauso horri dagokion eragiketa kostua.

(1.5 puntu)

B) R eta W magnitudeen artean duten $R = b \cdot W^a$ itxurako erlazioa bilatu nahi da. Horretarako, honako datu hauek ezagunak dira_

W	0.017	0.174	1.11	1.74
R	0.154	0.363	0.531	2.23

Eraldatu $R = b \cdot W^a$ adierazpena adierazpen lineal batean bihurtzeko, eta minimo karratuen metodoa aplikatu. **Platea ezazu** emandako errore minimo koadratikoa eta doitzean emandako errore erreala.
Egin eragiketak **3 digitu esanguratsura** biribiltzen.

(2.5 puntu)

ALJEBRA LINEALA– Bigarren Partziala (2011ko Maiatzak 6)

Denbora osoa: 2.5 ordu.

Azterketaren puntuazioa: 20 puntu.

Guztira 5 ariketa daude. Egin ariketa bakoitza koaderno ezberdin batean.

Orri honetan 3 ariketa daude. Zati hau egiteko denbora osoa 1 ordu 15 minutu dira.

LEHEN ARIKETA

A) Froga ezazu $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ sistema ortogonala, sistema askea dela.

(1.5 puntu)

B) Zehaztu k parametroaren balioak honako matrize hau diagonalgarria izan dadin.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad / k \in \mathbb{R}$$

Diagonalgarria den kasuan, eman dagozkion matrize diagonala eta antzekotasun matrizea.

(2 puntu)

BIGARREN ARIKETA

A) Izan bedi $f : \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}^9$ endomorfismo bat: *f* aplikazioari elkartutako *A* matrizearen polinomio karakteristikoa $p_A(x) = (\lambda - x)^9$ da. Erabaki zein den dagokion Jordanen forma, *J*, eta azaldu nola bilatu behar den oinarria honako hau betetzen bada:

$\dim V_1(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 4;$ $\dim V_2(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2 = 6$

$\dim V_3(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^3 = 8;$ $\dim V_4(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^4 = 9$

(1.5 puntu)

B) a) Froga ezazu matrize antzekoek polinomio karakteristiko bera dutela.

(0.5 puntu)

b) Froga ezazu A matrizea diagonalgarria bada, non bere balio propio guztiak 1 eta -1 diren, orduan $A^{-1} = A$ berdintza gertatzen dela.

(0.5 puntu)

c) Froga ezazu ondoko baieztapena: A eta B n ordenako bi matrize badira, $A \cdot B = A - B$ berdintza betetzen dutenak, eta 2 balioa B matrizearen balio propioa bada, orduan, -2 A-ren balio propioa da. Adierazi zein bektore propiori egongo den elkartuta balio propio hori.

(1 puntu)

HIRUGARREN ARIKETA

A) Deskribatu aurrerako ordezkapen prozesuaren algoritmoa n ekuazio eta n ezezagun dituen sistema triangeluar batentzat. Kalkula ezazu dagokion eragiketa kostua.

(2 puntu)

B) Gaussen ezabapen metodoa pibotaje partzialaren bitartez eta eskala aldaketa erabilita, lor itzazu arrazoituz L, U eta P matrizeak. Matrize horiek $P^t \cdot A$ faktorizazioa eman behar dute.

A matrizea honako hau da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntu)

ALJEBRA LINEALA – Bigarren Partzial (2011ko Maiatzak 6)

Orri honetan 3 ariketa daude. Zati hau egiteko denbora osoa 1 ordu 15 minutu da.

Egin ariketa bakoitza koaderno ezberdin batean.

LAUGARREN ARIKETA

A) Lor ezazu Gauss-Seidel metodoaren adierazpen matriziala, hau da, lor ezazu T matrizea non $\underset{\sim}{x}^{k+1} = T \cdot \underset{\sim}{x}^{k} + \underset{\sim}{c}$ berdintza betetzen den.

(2 puntu)

B) Izan bedi honako ekuazio linealetako sistema:

$$\begin{cases} 2x & + & 10y & + & z & = & 13 \\ 10x & + & y & + & z & = & 12 \\ 2x & + & 2y & + & 10z & = & 14 \end{cases}$$

Bila ezazu sistema horren soluzioa Gauss-Seidelen metodoa erabiltzen %1eko zehaztasunarekin. Hasierako balioa $\underset{\sim}{x}^{0} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bektorea da eta egin eragiketak 5 digitu esanguratsura biribiltzen. **(3 puntu)**

BOSGARREN ARIKETA

A) Izan bedi honako taula:

x_i	0	0.5	1
y_i	3	0	4

Minimo karratuen metodoa erabilita, lortu arrazoituz datuetara hobekien egokitzen den zuzena, polinomio ortogonalak erabilita. **Plantea** ezazu emandako errore minimo koadratikoa.

(1.5 puntu)

B) Izan bedi honako taula:

x_i	1	2	3	4
y_i	0	3	5	7

Minimo karratuen metodoa erabilita, lortu arrazoituz datuetara hobekien egokitzen den $y = a\,x^3$ itxurako kurba. **(puntu 1)**

C) Minimo karratuen metodoa erabilita, lortu arrazoituz datuetara hobekien egokitzen den $y = 1 - B\,e^{A \cdot x}$ itxurako kurba:

x_i	1	2	3
y_i	-4	-11.3	-29

Egin lana bi dezimaletara biribiltzen. **(puntu 1)**

ALJEBRA LINEALA – Lehen partziala (2011ko maiatzaren 28a)

Lehen partzialaren denbora:1.5 ordu

Puntuazio osoa:10 puntu

Guztira ariketa kopurua:3. Erabili koaderno ezberdina ariketa bakoitza egiteko.

LEHEN ARIKETA

A) 1) Froga ezazu edozein M matrize karratu matrize simetriko eta antisimetriko baten batura moduan deskonposa daitekeela.

2) Froga ezazu matrize baten alderantzizkoaren iraulia matrize horren irauliaren alderantzizkoa dela.

3) Froga ezazu A matrize simetrikoa alderanzkarria bada, bere alderantzizkoa ere simetrikoa dela.

(1.5 puntu)

B) Izan bedi E 55 dimentsioko espazio bektoriala. Izan bitez U eta V E espazioaren bi azpiespazio bektorial, non bere dimentsioak 36 eta 28 dira, hurrenez hurren. Zeintzuk dira U+V eta $U \cap V$ azpiespazioek har dezaketen dimentsiorik txikiena eta handiena?

(puntu 1)

C) 2 ordenako matrize karratu eta errealen espazio bektorialean, $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazioan, honako bi azpiespazio hauek kontsideratzen dira:

U matrize simetrikoek osatzen duten azpiespazio bektoriala.

V matrize behe triangeluarren osatzen duten azpiespazio bektoriala.

1) Kalkula itzazu U eta V azpiespazioen dimentsio eta oinarri bana.

2) Kalkula itzazu U eta V azpiespazioen ekuazio inplizitu eta parametrikoak.

3) Lor itzazu $U \cap V$ eta $U + V$ azpiespazioen dimentsio eta oinarri bana. U eta V azpiespazio betegarriak dira? Arrazoitu erantzuna.

(2 puntu)

BIGARREN ARIKETA

A) Egiazta ezazu honako azpimultzo hau azpiespazio bektoriala den edo ez.

$S = \left\{ B \in E_{2x2}(\mathbb{R}) \ / \ A \cdot B + B = (0) \right\}$ non A $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazioko matrize finkoa den.

(0.5 puntu)

B) 2 ordenako matrize karratu eta errealen espazio bektorialean, $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazioan, honako azpiespazio bektorial hau kontsideratzen da:

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;/\; a+d=0\right\}$$

Izan bedi $f:U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ honako baldintza hauek betetzen dituen aplikazio linela:

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Lor ezazu f aplikazioari elkartutako matrizea, U azpiespazioaren oinarri bat eta $\mathbb{R}^2$ espazioaren oinarri kanonikoa erabilita.
2) Lor itzazu nukleoaren eta irudi multzoaren dimentsioak. Lortu ere nukleoaren oinarri bat.

(**2 puntu**)

C) Izan bedi $f:E \longrightarrow E$ endomorfismo bat. B oinarriari elkartutako matrizea honako hau da:

$$A_1=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Endomorfismo beraren matrizea baina hasierako espazioan B oinarria eta bukaerako espazioan U oinarria kontsideratzen badira, honako matrize hau lortzen da:

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lor ezazu B eta U oinarrien arteko erlazioa.

(1.5 puntu)

HIRUGARREN ARIKETA

A) $\mathbb{R}^2$ **-**ren espazio euklidearrean $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ eta $\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ bektoreen arteko biderkadura eskalarra $B=\left\{\mathbf{e_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ oinarriarekiko honela definitzen da:

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}>= x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$$

1) Elkartutako matrizea erabili gabe, froga ezazu adierazpen horrek biderkadura eskalar bat definitzen duela.

2) Lor ezazu biderkadura eskalarra definitzen duen matrizea aurretik definitutako B oinarrian eta $B'=\left\{\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u_2}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ oinarrian. **(1.5 puntu)**

ALJEBRA LINEALA – Bigarren partziala (2011ko maiatzaren 28a)

Lehen partzialaren denbora:1.5 ordu

Puntuazio osoa:10 puntu

Guztira ariketa kopurua:3. Erabili koaderno ezberdina ariketa bakoitza egiteko.

LEHEN ARIKETA

A) Zer baldintza bete behar dute $a, b \in \mathbb{R}$ balioek honako matrize hau ortogonalki diagonalgarria izan dadin? Posiblea den kasuan diagonaliza ezazu ortogonalki.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.5 puntu)

B) **1)** Izan bedi A matrize diagonalgarria, D matrize diagonala eta P antzekotasun matrizea dituena. Froga ezazu A^n matrizea ere diagonalgarria dela, bere forma diagonala D^n izanik.

2) Eman itzazu 3 ordenako bi matrize erreal ezberdin non bien polinomio karakteristikoa berdina da.

3) Izan bitez A eta B n ordenako bi matrize. Froga ezazu $A \cdot B$ matrizearen balio propioa $\lambda = 0$ balioa bada, orduan $\lambda = 0$ ere $B \cdot A$ matrizearen balio propioa dela.

(1.5 puntu)

BIGARREN ARIKETA

A) Izan bedi A n ordenako matrize erregularra. Azaldu zehazki A matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko bi metodoak L.U faktorizaziotik abiatuta.

(1.5 puntu)

B) Zehaztu zenbakizko metodo baten bitartez, a eta b parametroek bete behar dituzten baldintzak honako matrize hau positibo definitua izan dadin.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Enuntziatu ezazu zein den erabili duzun teorema eta metodo horren ezaugarriak.

(1.5 puntu)

HIRUGARREN ARIKETA

A) Honako ekuazio linealetako sistema errepikapenezko metodo baten bitartez ebatzi nahi da.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ -x_2 + 4x_3 - x_6 = 2 \\ -x_1 + 4x_4 - x_5 = 2 \\ -x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 = 1 \\ -x_3 - x_5 + 4x_6 = 2 \end{cases}$$

Zein izango da metodorik egokiena? Enuntziatu ezazu ondorioztatzeko erabili duzun emaitza teorikoa.

(1.5 puntu)

B) Izan bitez E espazio euklidearra eta $H = \mathrm{Span}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ E espazioaren azpiespazio bat.

Izan bedi $\mathbf{f} \in E$ eta $\mathbf{u}$ $\mathbf{f}$-ren H espazioko hurbilketa minimo koadratiko onena. Orduan, $\mathbf{f} - \mathbf{u} \in H^{\perp}$ gertatzen da, non $H^{\perp}$ H azpiespazioaren azpiespazio ortogonala da. Ondorioztatu ekuazio normalen sistema eta adierazi matrizialki. Nola gelditzen da sistema hori H azpiespazioaren oinarri ortogonala aukeratzen bada?

(puntu 1)

C) Kalkula ezazu minimo karratuen metodoa erabilita, [-π/2, π/2] tartean f(t) = cos(t) funtziora hobekien hurbiltzen den parabola. Legendreren polinomio ortogonalak erabili.
Oharra: Legendreren polinomioen honakoa betetzen dute:

$$\begin{cases} (n+1)\cdot P_{n+1}(x) = (2n+1)x \cdot P_n(x) - n \cdot P_{n-1}(x) \\ P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \end{cases} \quad \text{eta} \quad \| P_n(x) \|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

Integrala: $\int_{-1}^{1} x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \cdot dx = \frac{1}{\pi^3}(4\cdot\pi^2 - 32)$.

(1.5 puntu)

ALJEBRA LINEALA – Lehen partziala (2011ko urtarrilak 18)

Denbora osoa: 3 ordu.

Azterketaren puntuzazioa: 24 puntu.

Guztira 5 ariketa daude. Egin ariketa bakoitza koaderno ezberdin batean.

Orri honetan 3 ariketa daude. Zati hau egiteko denbora osoa 1 ordu 45 minutu.

LEHEN ARIKETA

A) **1)** Defini itzazu honako matrize hauek:

- **i)** Matrize antisimetrikoa (eman ezazu adibide bat).
- **ii)** Matrize ortogonala (eman identitate matrizea ez den adibide bat).
- **iii)** Matrize baliokideak.
- **iv)** Matrize antzekoak.

(puntu 1)

2) Froga ezazu matrize ortogonal baten determinantearen balioa +1 edo -1 dela.

(puntu 1)

3) Izan bitez A, B, X, Y n ordenako matrize erregularrak non A matrizea ortogonala eta simetrikoa ere den. Lor ezazu X eta Y matrizeen balioak A eta B matrizeen menpe, honako sistema hau betetzen dutela jakinik:

$$\begin{cases} X \cdot Y^{-1} = A^t \cdot B \cdot X^{-1} \\ Y = B^{-1} \cdot A \cdot X \end{cases}$$

(puntu 1)

B) Izan bedi honako ekuazio linealetako sistema:

$$\begin{cases} x + (m+1)y + 2z = 0 \\ (m+1)x + y + 2z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

1) Sistema ebatzi gabe, eztabaida ezazu sistema zein motatakoa den $m \in \mathbb{R}$ parametroaren menpe.

2) $m = 0$ kasuan, eman ezazu ekuazio horiek betetzen dituen azpiespazioaren dimentsioa eta oinarri bat.

(1.5 puntu)

BIGARREN ARIKETA

A) Izan bitez F eta G E espazio bektorialaren bi azpiespazio bektorial. E espazio bektoriala F eta G azpiespazioen batura zuzena bada, hau da $E = F \oplus G$ gertatzen bada, orduan, $\mathbf{x} \in E$ bektore bakoitza modu bakar batean deskonposa daiteke $\mathbf{y} \in F$ bektore baten eta $\mathbf{z} \in G$ bektore baten batura moduan. Froga ezazu.

(1.5 puntu)

B) Izan bedi $E_{2x3}(\mathbb{R})$ 2x3 ordenako matrize errealen espazio bektoriala. Froga ezazu espazio horretako edozein matrize era bakar batean adieraz daitekeela honako itxura hauek dituzten bi matrizeren batura moduan: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} m & n & p \\ m & n & p \end{pmatrix}$. Arrazoi ezazu espazio eta azpiespazio bektorialen kontzeptuak erabilita.

(3 puntu)

HIRUGARREN ARIKETA

A) Izan bedi $\mathbb{P}_3(x)$ 3 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektorial erreala. Izan bedi $S=\{p(x)\in\mathbb{P}_3(x) \quad / \quad p(-1)=0\}$ bere azpimultzo bat.

1) Froga ezazu S $\mathbb{P}_3(x)$ espazioaren azpiespazio bektoriala dela. Bilatu S azpiespazioaren oinarri bat, ekuazio parametrikoak eta ekuazio inplizutuak.

(1.5 puntu)

2) Osatu arrazoituz S azpiespazioaren oinarria $\mathbb{P}_3(x)$ espazioaren oinarri bat lortu arte. **(0.75 puntu)**

3) Lortu S azpiespazioaren ekuazio inplizituak 2 atalean lortu den oinarriarekiko.

(1.25 puntu)

B) **1)** Izan bitez E eta F $\mathbb{K}$ gorputzaren gaineko n eta m dimentsioko espazio bektorialak hurrenez hurren. Izan bedi $f: E \longrightarrow F$ aplikazio lineala.

B_E eta B_F (E eta F espazioen oinarriak) oinarriei elkartutako aplikazio linealaren adierazpen matriziala jatorri bezala hartuta, ondorioztatu aplikazio linealaren adierazpen matriziala F espazioaren oinarria B_F^* oinarriagatik aldatzen bada.

Adierazi matrizeen dimentsioak eta azaldu nola lortzen diren matrize horiek laburki.

(1.5 puntu)

2) Izan bedi $f: E \longrightarrow F$ aplikazio lineala. $B_E=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ eta $B_F=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ oinarriei elkartuta $A_1=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrizea dago. F espazioaren oinarria $B_F^*=\{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1\}$ oinarriagatik aldatzen bada, elkartutako matrizea $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dela lortzen da. Kalkula ezazu A_1 matrizea. **(puntu 1)**

ALJEBRA LINEALA – Lehen partziala (2011ko urtarrilak 18)

Orri honetan 2 ariketa daude. Egiteko denbora osoa 1:15. Egin ariketa bakoitza koaderno ezberdin batean.

LAUGARREN ARIKETA

A) Izan bedi $f: E \longrightarrow F$ bi espazio bektorialen arteko aplikazio lineala eta S E espazioaren azpiespazio bektorial bat. Froga ezazu $S = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ bada, orduan, $f(S) = \mathrm{Span}\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), ..., f(\mathbf{u}_n)\}$ gertatzen dela. **(1.5 puntu)**

B) Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{P}_2(x)$ aplikazio lineala ($\mathbb{P}_2(x)$ 2 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektoriala da). $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parametroentzat honako baldintzak betetzen dira:

$$f(1\,1\,1)^t = 2 \cdot \beta + \alpha \cdot x, \quad f(0\,-1\,\,1)^t = \alpha \cdot x + \beta \cdot x^2, \quad f(0\,\,0\,\,1)^t = \beta + (\alpha - 1) \cdot x$$

1) Lortu aplikazio linealari elkartutako matrizea ohiko oinarrietan. **(puntu 1)**

2) Lortu α eta β parametroen balioak f ez-injektiboa izan dadin. **(puntu 1)**

3) Lortu Ker f eta Im f azpiespazioen oinarriak α eta β parametroen arabera.

(1.5 puntu)

4) Izan bedi $S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \ / \ a + c = 0, b + c = 0 \right\}$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala. Lortu f(S) α eta β parametroen arabera. **(0.5 puntu)**

BOSGARREN ARIKETA

A) Eman ezazu normaren definizioa. **(puntu 1)**

B) Izan bedi $\mathbb{P}_2(x)$ 2 edo maila txikiagoko polinomio errealen espazio bektoriala. Honako biderkadura eskalarra definitzen da:

$$\langle \ , \ \rangle : \mathbb{P}_2(x) \times \mathbb{P}_2(x) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle p, q \rangle \quad \to \langle p, q \rangle = p(0) \cdot q(0) + \int_{-1}^{1} p'(t) \cdot q'(t) \cdot dt$$

1) Lortu biderkadura eskalarraren G matrizea $\mathbb{P}_2(x)$ espazioaren ohiko oinarrian. Zer esan daiteke oinarriko bektoreei buruz biderkadura eskalar hori erabilita?

(1.5 puntu)

2) Lor ezazu $p(x) = x - 1$ eta $q(x) = x^2 - x$ polinomioek sortzen duten angelua biderkadura eskalar honekiko. **(puntu 1)**