⑤ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\quad P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & a-x \end{vmatrix} = (1-x).(2-x).(a-x)$

$P_A(x)=0 \Leftrightarrow \{a, 1, 2\}$

<u>Ettabaida</u>

① $a \neq 2,3 \Rightarrow \begin{cases} a \to \vec{v_1} \\ 2 \to \vec{v_2} \\ 1 \to \vec{v_3} \end{cases} \to D = \begin{pmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \cdot P \begin{pmatrix} \frac{-1}{2-a} & 1 & 1 \\ \frac{-1}{2-a} & 0 & 1 \\ -(2-a) & 0 & 0 \end{pmatrix}$

② $a=2, \quad P_A(x) = (2-x)^2.(1-x) \begin{cases} 2 \to \vec{v_1}, \vec{v_2} \\ 1 \to \vec{v_3} \end{cases} \to A \not\sim D$

③ $a=3, \quad P_A(x) = (2-x).(1-x)^2. \begin{cases} 2 \to \vec{v_1} \\ 1 \to \vec{v_2}, \vec{v_3} \end{cases} \to D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$V(a) = \{ x \in \mathbb{R}^3 / Ax = ax \}$

$x = \frac{-z + z/2-a}{1-a} = \frac{-z.(2-a) + z}{(1-a).(2-a)} = \frac{z.(-2+a+1)}{(1-a).(2-a)} = \frac{-z.\cancel{(a-1)}}{\cancel{(1-a)}.(2-a)}$

$\begin{cases} (1-a)x + y + z = 0 \\ (2-a)y + z = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$ $\quad \boxed{x = \frac{-z-y}{(1-a)}} \ \boxed{a \neq 1}$ $\quad \boxed{y = \frac{-z}{2-a}} \ \boxed{a \neq 2}$ $\quad \boxed{z = z}$

$\boxed{a \neq 1,2}$

Hobeto

$z = -y-(1-a)x = +\frac{1}{2-a} - (1-a).x$

$\begin{pmatrix} \frac{-z}{2-a} \\ \frac{-z}{2-a} \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2-a} \\ -\frac{1}{2-a} \\ 1 \end{pmatrix}$

↳ Modu errazagoa, ushan t!

$z = -y.(2-a)$

$\boxed{x} = \frac{-z-y}{1-a} = \frac{+y.(2-a)-y}{1-a} = \boxed{y} \to \boxed{a \neq 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ x \\ -(2-a) \end{pmatrix}}$

Ez dator bat!

$V(2) = \{ x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 2.x \}$

$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ (a-2)z = 0 \end{cases}$ $\quad \to \boxed{z=0}$, $\to a-2=0$

<u>1. Kasua</u> $z=0 \quad x=y \quad \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Kasua $\boxed{a=2} \quad z=0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V(1) = \{ x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 1x \}$

$\begin{cases} + y + z = 0 \\ + y + z = 0 \\ (a-1)z = 0 \end{cases}$ $\quad \to \boxed{z=y}$, $\to \boxed{a=1}$, $\to \boxed{z=0}$

1. Kasua
$z=0$
$y=0$
$x=x$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Kasua
$a=1$
$z=z$
$y=z$
$x=x$
$\begin{pmatrix} x \\ z \\ z \end{pmatrix} = \boxed{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Atzetik aurrera hasiko nait.

2011/06/01

5. ARIKETA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 1 \\ 0 & 3-x & 1 \\ 0 & 0 & a-x \end{vmatrix} = (1-x).(3-x).(a-x)=0$$

$$\{a, 1, 3\}$$

Eztabaida

① $a \neq 1, 3$ $\quad \begin{cases} a \to \vec{v_1} \\ 1 \to \vec{v_2} \\ 3 \to \vec{v_3} \end{cases}$

$$D = \begin{pmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -(3-a) & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

② $a = 1$

$P_A(x) = (1-x)^2.(3-x)$ $\quad \begin{cases} 1 \to \vec{v_1} \\ \quad\ \vec{v_2} \\ 3 \to \vec{v_3} \end{cases}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

③ $a = 3$

$P_A(x) = (1-x) \cdot (3-x)^2$ $\quad \begin{cases} 1 \to \vec{v_1} \\ 3 \to \vec{v_2} \\ \quad\ \vec{v_3} \end{cases}$

$$A \nsim D$$

$V(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = ax\}$

$$\begin{cases} (1-a)x + 2y + z = 0 & \longrightarrow x = \dfrac{-z-2y}{1-a} = \\ (3-a)y + z = 0 & \longrightarrow y = \dfrac{-z}{3-a} \\ \cancel{0=0} & \boxed{z=z} \end{cases}$$

Beste modu batera ebatzita

$z = -(3-a)y$

$$x = \frac{-z-2y}{1-a} = \frac{+(3-a)y-2y}{1-a} = \frac{y.(3-a-2)}{1-a} = \frac{y\,\cancel{(1-a)}}{\cancel{(1-a)}} \Rightarrow \boxed{x=y} \Bigg] \to \begin{pmatrix} y \\ y \\ -(3-a)y \end{pmatrix} = \boxed{y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -(3-a) \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{a \neq 1}$$

$V(1) = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 1x\}$

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ (a-1)z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \boxed{z=0} \\ \searrow \boxed{a-1=0} \end{matrix}$$

1. Kasua

$z=0 \to y=0 \to x=x \qquad x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Kasua

$(a-1)=0 \to z=z \Rightarrow y = \dfrac{z}{2} \Rightarrow x=x \qquad \begin{pmatrix} x \\ \frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V(3) = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 3x\}$

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \\ (a-3)z = 0 \end{cases}$$

1. Kasua

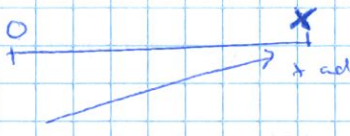
$\nearrow \boxed{z=0} \to y = x \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Kasua

$\searrow a \neq 3 \quad \boxed{z=0} \dashrightarrow \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f^{v} = \frac{-12x^4 + 72x^2 - 12}{(1+x^2)^4}$$

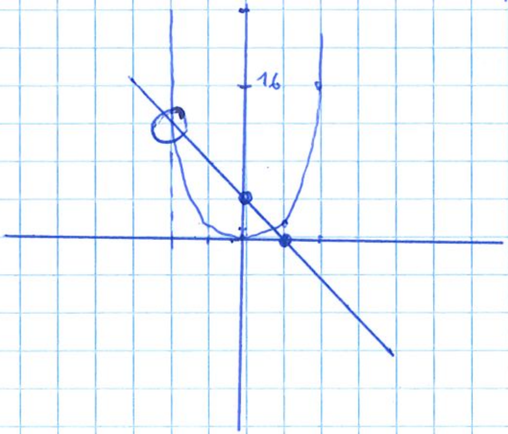
$$\hookrightarrow R_3(x) = \frac{-12z^4 + 72z^2 - 12}{(1+z^2)^4} \qquad 0 < z < x$$



x adibidez 0,1 hartuta.

$\boxed{3}$ $x^4+x-1=0$

$x^4=-x+1$



TARTEA

$[-3,-1] \dashrightarrow$ $f(-3)\cdot f(-1)<0$

$f(x)=x^4+x-1$

Jarraitu
Deribagarria

$\boxed{f'(x)=4x^3+1}$

c_n	$f(c_n)$	$f'(c_n)$	c_{n+1}
-2	13	-31	$-1{,}58064516$
c_2	3,6615524	$-14{,}7965828$	$-1{,}3331858$
c_3	$8{,}2590943\cdot10^{-1}$	~~[illegible]~~ $-8{,}47833445$	$-1{,}2357718$
	$9{,}63601836\cdot10^{-2}$	$-6{,}54876635$	$-1{,}2210375$
	$1{,}96812314\cdot10^{-3}$	$-6{,}28224617$	$-1{,}22074425$
	$1{,}05272652\cdot10^{-6}$	$-6{,}27669301$	$\boxed{-1{,}22074408}$

(!?)

AMA!

$\boxed{4}$ a) $f(x)=\ln(1+x^2)$ $c=0$ 3 ordena.

$$f'=\frac{2x}{1+x^2}=2x\cdot(1+x^2)^{-1} \Rightarrow f'(0)=0$$

$$f''=2\cdot(1+x^2)^{-1}+(-1)\cdot(1+x^2)^{-2}\,2x\cdot2x \Rightarrow f''(0)=2+0=\boxed{2}$$

$$f'''=2(-1)\cdot(1+x^2)^{-2}-\left[4x^2\cdot(-2)\cdot(1+x^2)^{-3}\cdot2x+4\cdot2\cdot x\cdot(1+x^2)^{-2}\right] \Rightarrow \boxed{f'''(0)=-2}$$

$f^{IV}=$

$$2(1+x^2)^{-1}\cdot\left[1-(1+x^2)^{-1}\cdot2x^2\right]$$

$$\hookrightarrow f''=\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$$

$$\hookrightarrow f'''=\frac{(-4x)\cdot(1+x^2)^{\cancel{2}}-2\cancel{(1+x^2)}\cdot2x\cdot(-2x^2+2)}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-4x-4x^3-4x\cdot(-2x^2+2)}{(1+x^2)^3}=\frac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}$$

$+8x^3-8x$

$$\hookrightarrow \boxed{f^{IV}}=\frac{(12x^2-12)\cdot(1+x^2)^{3}-3\cdot\cancel{(1+x^2)^2}\cdot(2x)\cdot(4x^3-12x)}{(1+x^2)^{\cancel{6}\,4}}=$$

$$=\frac{\cancel{12x^2}+12x^4-12-\cancel{12x^2}-24x^4+72x^2}{(1+x^2)^4}=\boxed{\frac{-12x^4+72x^2-12}{(1+x^2)^4}}$$

2014/01/13

1 $y(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

1 IZATE EREMUA

$D(y) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, (x+1)^2 \neq 0 \}$

- $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$ ean funtzioak ez du balio errealik hartzen

$D(y) = \mathbb{R} - \{-1\}$

2 Ard. E.P

OX ard. $\rightarrow y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\boxed{P(0,0)}$

OY ard $\rightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ $P(0,0)$

3 Simetria

$y(-x) = \frac{-x^3}{(-x+1)^2} \neq y(x) \neq -y(+x)$ Ez dauka.

4 Asintotak

Bertikala $D(y) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty$

$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{-}{+} = \boxed{-\infty}$

$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{-}{+} = \boxed{-\infty}$

Zeiharra $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+2x+1 \\ \hline -x^3-2x^2-x & x-2 \\ \quad -2x^2-x & \\ \quad +2x^2+4x+2 & \\ \quad\quad 3x+2=0 & \end{array}$$

$\boxed{y = x-2}$

$(3x+3)-2x)$

$$y' = \frac{3x^2 \cdot (x+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x+1)} \cdot x^3}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{3x^2 (x+1) - 2x^3}{(x+1)^3} = \boxed{\frac{x^2 \cdot (\overset{x+3}{3x+1-2x})}{(x+1)^3}}$$

$= ~~\frac{x^2 \cdot (x+1)}{(x+1)^{3/2}} = \boxed{\frac{x^2}{(x+1)^2}}~~$

$\parallel$

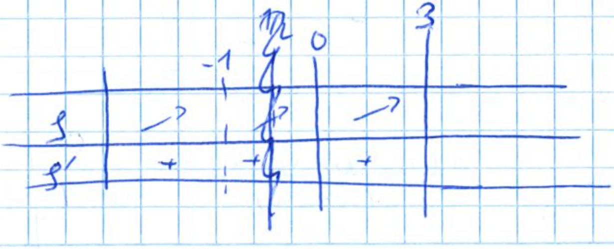
0

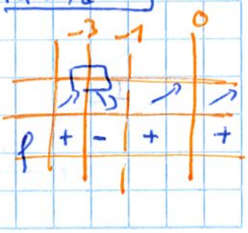
$\boxed{x=0}$

$\boxed{x=-3}$

5 MAX, MIN

$\frac{x^2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$





~~$y' = \frac{x^2}{(x+1)^2} \dashrightarrow y'' = \frac{2x\cdot(x+1)^{2} - 2\cancel{(x+1)}\cdot x^2}{(x+1)^{\cancel{4}3}} = \frac{2x\cdot(x+1) - 2x^2}{(x+1)^3} = \frac{2x\cdot(\cancel{x}+1-\cancel{x})}{(x+1)^3}$~~

~~$y'' = \frac{2x}{(x+1)^3} = 0 \quad \boxed{x=0}$~~

	-1		0	
	∪	∩		∪
f''	+	−		+

~~I.P(0,0)~~

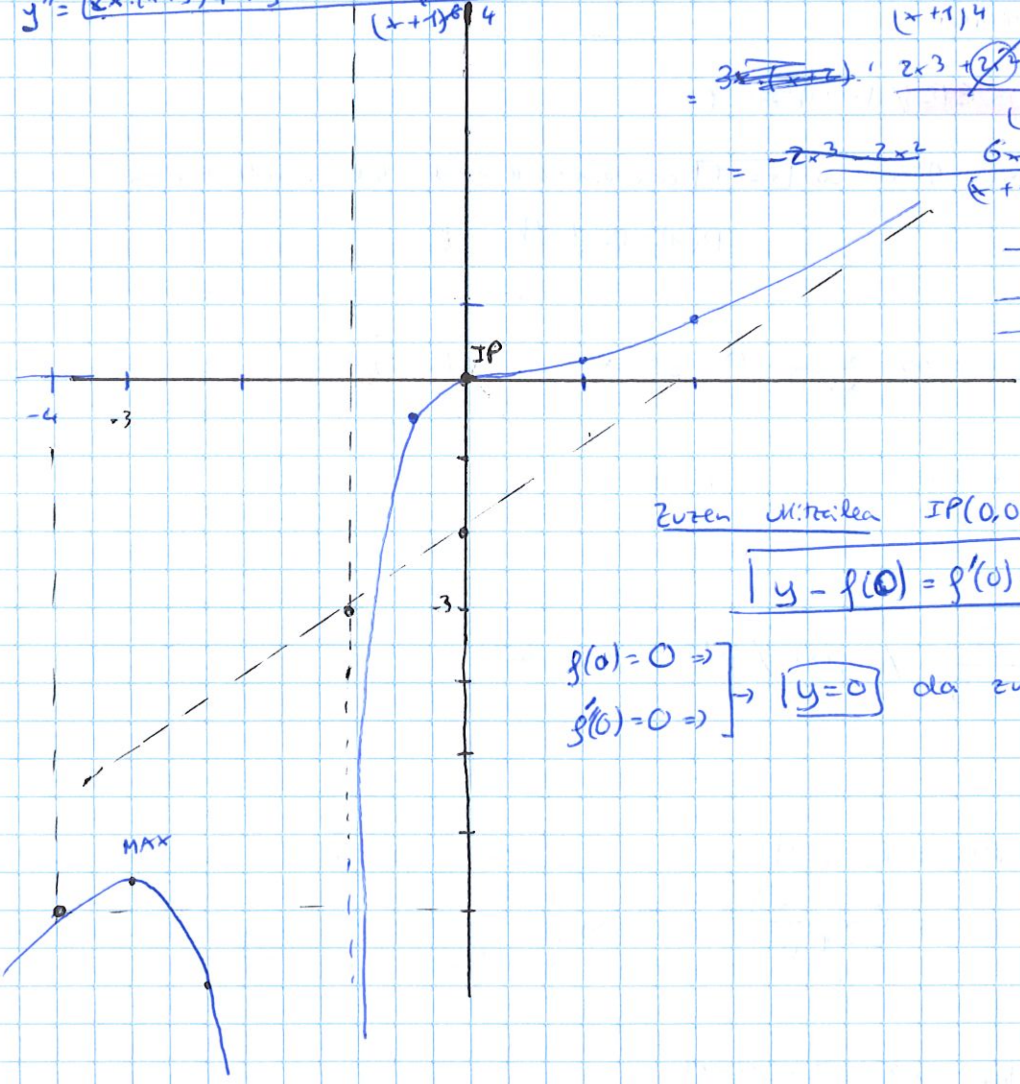
$y' = \frac{x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^3}$

$y'' = \frac{[2x\cdot(x+3) + x^2]\cdot(x+1)^{\cancel{3}} - 3\cancel{(x+1)^2}\cdot x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^{\cancel{6}4}} = \frac{[2x^2+6x+x^2]\cdot(x+1) - 3x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^4}$

$= \cancel{3x\cdot(x+1)}\cdot \frac{2x^3 + \cancel{2x^2} + \cancel{6x^2} + 6x + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} - \cancel{3x^3} - \cancel{9x^2}}{(x+1)^4}$

$= \frac{\cancel{-2x^3 - 2x^2}\ 6x}{(x+1)^4} = 0 \quad \boxed{x=0}$

	-1		0	
f	∩	∩		∪
f''	−	−		+



Zuzen ukitzailea IP(0,0)

$\boxed{y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0)}$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \Rightarrow \\ f'(0) = 0 \Rightarrow \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{y=0}$ da zuzen ukitzailea.

b) $y' = K\cdot y(t)\cdot(P - y(t))$ $\boxed{\begin{array}{l} P = 10000 \\ y = 50 \quad t = 0s \end{array}}$

$y' = K\cdot y(t)\cdot(10000 - y)$ → BANANDUA EDA.

$\frac{dy}{dt} = K\cdot y\cdot(10000-y) \Rightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{y\cdot(10000-y)}}_{I} = \int K\,dt$

I?

$\frac{1}{\ldots} = \frac{A}{y} + \frac{B}{10000-y} = \frac{A\cdot(10000-y) + B\cdot y}{y\cdot(10000-y)}$

0	A = 1/100000
10000	B = 1/10000

$\ln|y| - \frac{1}{10000}\ln|10000-y$

$$\frac{1}{10000} \ln\left|\frac{y}{1000-y}\right| = K.t + C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{10000-y}\right| = 10000K.t + \underbrace{10000C}_{C}$$

$$\frac{y}{10000-y} = e^{10000K.t+C} \Rightarrow y = (10000 \cdot e^{10000K.t+C} - y \cdot e^{10000K.t+C})$$

$$y \cdot (1 + e^{1000K.t+C}) = 10000 \cdot e^{10000K.t+C}$$

$$\boxed{y = \frac{10000\, e^{10000.K.t} \cdot C}{1 + e^{1000.K.t} \cdot C}}$$

$t = 0_s$

$y = 50$

$$50 = \frac{10000C}{1+C} \Rightarrow 50 + 50C = 10000C$$

$$50 = 950C \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{19}}$$

$y = 10000 \cdot e$

2

$$I = \int \frac{x^3 + 4x^2 + 6x + 5}{(x+1)^2}\, dx$$

$$\begin{array}{rl} x^3 + 4x^2 + 6x + 5 & \underline{|\, x^2 + 2x + 1} \\ \underline{-x^3 - 2x^2 - x} & x + 2 \\ /\ \ 2x^2 \ \ 5x + 5 & \\ \underline{-2x^2 - 4x - 2} & \\ /\ \ x + 3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 4x^2 + 6x + 5}{(x+1)^2} = x + 2 + \boxed{\frac{x+3}{(x+1)^2}}$$

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A.(x+1) + B}{(x+1)^2}$$

0	$3 = A + B$ $\quad$ $A = -1$
-1	$4 = B \Rightarrow B = 4$

$$I = \int (x+2)\,dx + \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{4}{(x+1)^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \ln|x+1| + 4.\frac{(x+1)^{-2+1}}{-1}$$

$$\boxed{I = \frac{x^2}{2} + 2x - \ln|x+1| - \frac{4}{x+1}}$$

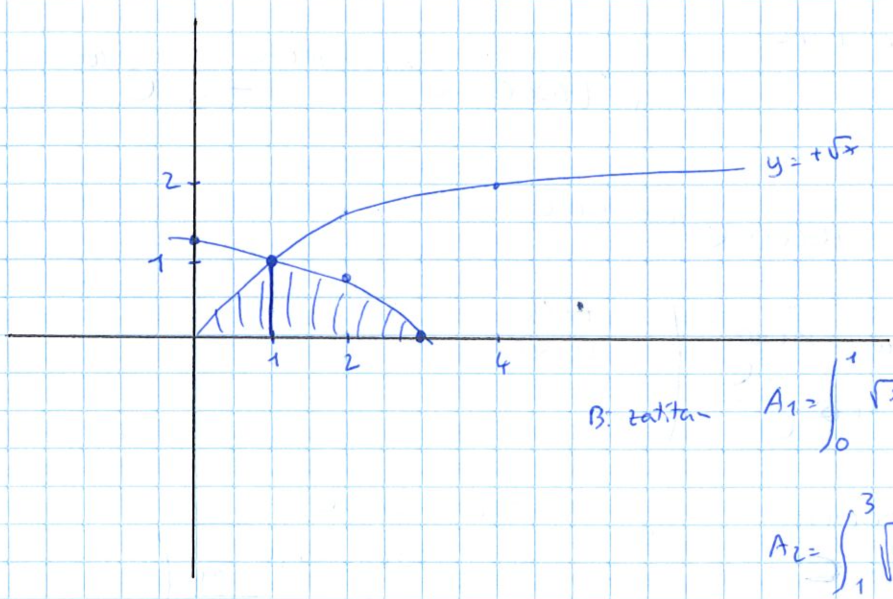
b) $x = y^2 \dashrightarrow y = \pm\sqrt{x}$

$x = -2y^2+3 \dashrightarrow y^2 = \frac{x-3}{-2} \Rightarrow \boxed{y} = \boxed{\pm\sqrt{\frac{x-3}{-2}}} = \pm\sqrt{\frac{3-x}{2}}$

Ox ardatzak.

$D(y) = \frac{3-x}{2} > 0$

$-x > -3 \quad \boxed{x<3}$



B: zatitan $A_1 = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx =$

$A_2 = \int_1^3 \sqrt{\frac{3-x}{2}}\, dx$

$\boxed{A_1} = \left[\frac{x^{+1/2+1}}{3/2}\right]_0^1 = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{2\cdot\sqrt{1}^3}{3} = \boxed{\frac{2}{3}u^2}$

$\boxed{A_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^3 \sqrt{3-x}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^3 -(3-x)^{+1/2}\, dx = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(3-x)^{1/2+1}}{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = -\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(3-x)^{3/2}}{3}\right]_1^3$

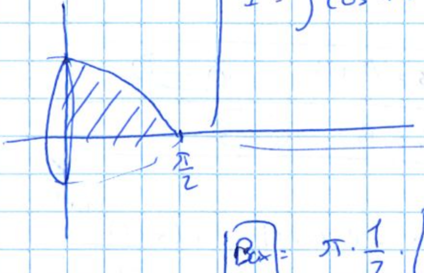
$= \left[\cancel{\frac{-2}{\sqrt{2}\cdot 3}\cdot\frac{\sqrt{(3-3)^3}}{3}}\xrightarrow{}0\right] - \left[-\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{(3-1)^3}}{3}\right] = +\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{3} = \boxed{\frac{4}{3}u^2}$

$\boxed{A_T =} \frac{2}{3}+\frac{4}{3} = \frac{6}{3} = \boxed{2u^2}$

c) $B_{Ox} = \pi\int_0^{\pi/2} (\cos x)^2\, dx =$

$I = \int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\int 1\, dx + \int \cos 2x\, dx\right]$

$= \frac{1}{2}\cdot\left[x + \frac{1}{2}\cdot\sin 2x\right]$



$\boxed{B_{Ox}} = \pi\cdot\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{2}+\cancel{\frac{1}{2}\cdot\sin 2\frac{\pi}{2}}\xrightarrow{}0 - \cancel{\frac{1}{2}\cdot\sin 0}\xrightarrow{}0\right]$

$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}u^3$

7. orrialdea.

Azterketa 2001

ARIKETA 1

a) $y = x^3+16$

$A(0,0) \Rightarrow$ funtziotik kanpo!

$$\boxed{y - f(a) = f'(a).(x-a)}$$

$\hookrightarrow y(a) = a^3+16$

$\hookrightarrow y'(x) = 3x^2 \Rightarrow y'(a) = 3a^2$

$0 - a^3 - 16 = 3a^2.(-a)$

$a^3+16 = 3a^3$

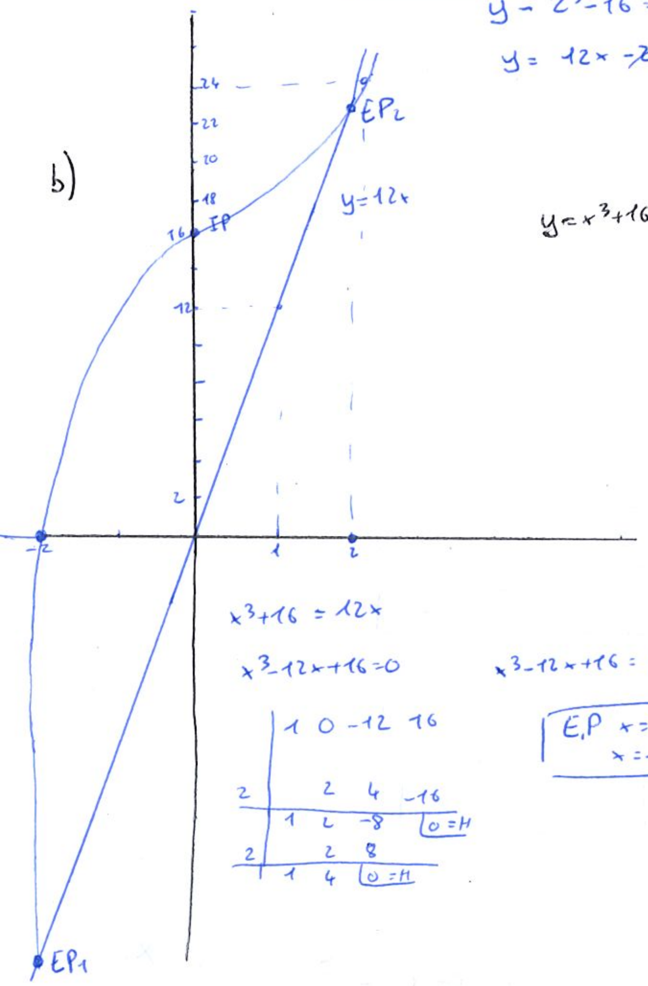
$16 = 2a^3 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = \boxed{a=2}$

Ukitzailearen ekuazioa

$y - 2^3 - 16 = 12.(x-2)$

$y = 12x - \cancel{24} + \cancel{24} \rightarrow \boxed{y = 12x}$

b)



$y = x^3+16 <$

EP? $x=0 \Rightarrow y=16$ $P(0,16)$

$y=0 \Rightarrow x=2$ $P(2,0)$

MAX, MIN?

$y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow$

		0	
f	↗		↗
f'	+		+

$f'' = 6x = 0$

		0	
f	∩		∪
f''	−		+

$x^3+16 = 12x$

$x^3-12x+16=0$

	1	0	-12	16
2		2	4	-16
	1	2	-8	$\boxed{0=H}$
2		2	8	
	1	4	$\boxed{0=H}$	

$x^3-12x+16 = (x-2)^2.(x+4)$

$\boxed{\text{E.P } x=2 \quad x=-4 \text{ ean}}$

$$\boxed{A} = \int_{-4}^{2}(x^3+16-12x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6x^2+16x\right]_{-4}^{2}$$

$$= \left(\frac{16}{4} - 6.4+16.2\right) - \left(\frac{4^4}{4} - 6.4^2 - 16.4\right)$$

$$= 12+96 = \boxed{108u^2}$$

ARIKETA 2

a) $f(x) = e^x - c.x, \quad c>0$ gorakortasun eta beherakortasun tarteak?

$\boxed{f'(x) = e^x - c}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = c \Rightarrow x = \ln c$

$\Downarrow$

posiblea da $c>0$

		ln c	
f			
f'			

1 = ln c

2 = ln c

3 - ln c

$\boxed{\mathbb{R} = \text{gorakorra}}$

Et du inflexio puntuik

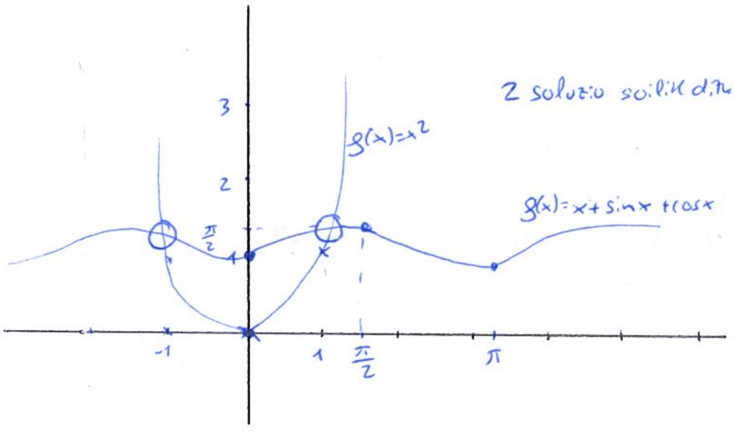
$f'(1) = e^{1} - \boxed{c} > 0$ — 1 — 2 — 3

<u>3. ARIKETA</u>

① zaila

$x^2 = x \cdot \sin x + \cos x$

Gogoratu! Kalkulagailua radianetan!



2 soluzio soilik ditu

<u>Soluzio positiboa</u>

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tartean dago.

$\boxed{g(x) = x^2 - x \cdot \sin x - \cos x}$ funtzioa tarte horretan deribagarria eta jarraia.

Bolzanoren teorema betetzen da gainera, tarte horretan.

$\boxed{g(0) \cdot g(\frac{\pi}{2}) < 0}$

n	C_n	$g(C_n)$	$g'(C_n)$	C_{n+1}
1	1	$-3,8177324 \cdot 10^{-1}$	1,45469769	1,26154271
2	C_2	$8,54458840 \cdot 10^{-2}$	1,20141283	1,19012154
		$-6,00834096 \cdot 10^{-2}$	1,93805695	1,22112342
		$1,32496114 \cdot 10^{-3}$	2,02390152	$\boxed{1,22046876}$

$$\boxed{C_{n+1} = C_n - \frac{g(C_n)}{g'(C_n)}} \begin{array}{l} \to g(x) \\ \to g'(x)? \end{array}$$

$2x - (\cancel{\sin x} + x \cdot \cos x) + \cancel{\sin x}$

$\boxed{g'(x) = 2x - x \cdot \cos x}$

(*) $\boxed{\begin{matrix} m=1 \\ n=0 \end{matrix}}$

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+2z=-3 \\ \cancel{x+2y+z=3} \\ 2x+y+3z=0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} 2x+y+3z=0 \\ x-y+2z=-3 \\ \hline 3x \quad / \quad +5z=-3 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\frac{9-\lambda}{5} \\ z=\frac{-3-3x}{5}=\frac{-3.(1+\lambda)}{5} \end{array}}$$

$$\boxed{y} = -3z-2x = -3.\left[\frac{-3.(1+\lambda)}{5}\right]-2\lambda$$

$$=\frac{9(1+\lambda)}{5}-2\lambda = \frac{9+9\lambda-10\lambda}{5} =$$

$$=\boxed{\frac{9-\lambda}{5}}$$

$\boxed{m \neq 1 \text{ denean}}$

hein(A) = hein(A|B) = 3 = n = 3

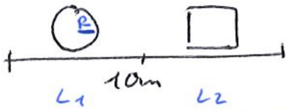
CRAMER $\Longrightarrow$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ n & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{-18}\ \cancel{+6}\ -n\ -4n\ \cancel{+3}\ \cancel{+9}}{|A|} = \frac{-\cancel{5}n}{\cancel{5}.(m-1)} = \boxed{-\frac{n}{m-1}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & n & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9m+2n-6\ \ -12+m.n+9}{|A|} = \boxed{\frac{9m+m.n+2n-9}{5m-5}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} m & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2mn-3-6+12-3m-n}{|A|} = \boxed{\frac{2mn-3m-n+3}{5m-5}}$$

4. ARIKETA



$\boxed{\text{L1 eta L2 -ren azalera minimoak?}}$

Datua:

$P = 10m = 2\pi R + 4L$

Minimizatu nahi dena AZALERA

$$A = \pi R^2 + L^2 \xrightarrow[]{L=\frac{10-2\pi R}{4}=\frac{5-\pi R}{2}}$$

$$A = \pi R^2 + \cancel{\frac{5^2\pi^2 R^2}{4}} \quad \left(\frac{5-\pi.R}{2}\right)^2$$

$$~~A'(R) = 2\pi.R + \frac{25\pi^2}{\cancel{4}2}.\overset{2.}{\cancel{2}}R = \pi.R.\left(2-\frac{25\pi}{2}\right)~~$$

$$~~A'(R)=0 \Leftrightarrow 2\pi R = -\frac{25\pi^2 R}{2}~~$$

$$A' = 2\pi R + 2.\left(\frac{5-\pi R}{2}\right).\left(\frac{5}{2}-\frac{\pi.R}{2}\right)' = 2\pi R + \cancel{2}.\left(\frac{5-\pi R}{2}\right)\left(\frac{-\pi}{\cancel{2}}\right) = \pi.\left(2R - \frac{5-\pi R}{2}\right)$$

$$A'=0 \Leftrightarrow 2R = +\left(\frac{5-\pi R}{2}\right) \Rightarrow +4R = 5-\pi R \Rightarrow R(4+\pi) = +5 \Rightarrow \boxed{R=\frac{+5}{4+\pi}}$$

~~Azalera~~. Sokaren luzera

$$\boxed{L_1} = 2\pi R = 2.\pi.\frac{5}{4+\pi} = \boxed{\frac{10\pi}{4+\pi}}$$

$$\boxed{L_2} = 4L = \frac{10.4}{4+\pi} = \boxed{\frac{40}{4+\pi}}$$

$$\boxed{L} = \frac{10-2\pi.\frac{5}{4+\pi}}{4} = \frac{10.(4+\pi)-10\pi}{4.(4+\pi)}$$

$$= \frac{10.(\cancel{4}+\cancel{\pi}-\cancel{\pi})}{\cancel{4}.(4+\pi)} = \boxed{\frac{10}{4+\pi}} \checkmark$$

4. ARIKETA

$g(x) = \sqrt[3]{1000+x}\,,\ c=0$

$P_3(x)$?

$g(0) = 10$

$g'(x) = +\frac{1}{3}\cdot(1000+x)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}(1000+x)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{g'(0)=} \frac{1}{300} = \boxed{3,33\cdot10^{-3}}$

$g''(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(-2)}{3}\cdot(1000+x)^{-\frac{5}{3}} \longrightarrow \boxed{g''(0) = 2,22\cdot10^{-6}}$

$g'''(x) = \frac{1}{3^2}(-2)\cdot-\frac{5}{3}\cdot(1000+x)^{-\frac{8}{3}} \longrightarrow \boxed{g'''(0) = 3,701\cdot10^{-9}}$

$g^{IV}(x) = \frac{1\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot(-8)}{3^4}\cdot(100+x)^{-\frac{11}{3}}$ ~~$\Rightarrow g^{IV}(0)$~~

$$P_3(x) = 10 + 3,33\cdot10^{-3}x + \frac{2,22\cdot10^{-6}}{2!}x^2 + \frac{3,701\cdot10^{-9}}{3!}x^3$$

$\sqrt[3]{1000+1} = \sqrt[3]{1001} \Rightarrow \boxed{x=1}$

$\boxed{P_3(1)} = 10 + 3,33\cdot10^{-3} + 1,11\cdot10^{-6} + 6,1683\cdot10^{-10} = \boxed{10,0033311}$

$$R_3(x) = -\frac{2\cdot5\cdot8}{3^4}\cdot(1000+z)^{-\frac{11}{3}}\cdot\frac{x^4}{4!}$$

z bornatu

$\frac{1}{(1000+z)^{11/3}}$

$\boxed{R_3(1)} = -\frac{2\cdot5\cdot8}{3^4\cdot4!}\cdot\frac{1^4}{1000^{11/3}} = \boxed{4,115\cdot10^{-13}}$

3.ARIKETA

$T(x,y)=(x+2y,-y)$

$(0,1)\longmapsto(2,-1)$ $\qquad A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$

$(1,0)\longmapsto(1,0)$

$P_A(x)=|A-xI_2|=\begin{vmatrix}1-x&0\\2&-1-x\end{vmatrix}=(1-x).(-1-x)-$

$P_A(x)=0\iff\begin{matrix}1-x=0\Rightarrow\boxed{x=1}\\-1-x=0\Rightarrow\boxed{x=-1}\end{matrix}$ $\qquad\boxed{\text{Balio propioak }\{-1,1\}}$

$\textcircled{x\in\mathbb{R}^2}$

$V(-1)=\{\cancel{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/A.x=-1.x\}$

$\begin{cases}2x=0\\2x=0\end{cases}\quad\begin{matrix}x=0\\y=y\end{matrix}\Rightarrow V(-1)=\{y.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}/y\in\mathbb{R}\}$

$V(1)=\{x\in\mathbb{R}^2/Ax=x\}$

$\begin{cases}0=0\\2x-2y=0\Rightarrow x=y\end{cases}\Rightarrow V(1)=\{x.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}/\cancel{x}\in\mathbb{R}\}$

$D=\begin{pmatrix}-1&\\&1\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\quad|P|\neq0$

$\boxed{P^{-1}?}$

$|P|=-1$

$P^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

$Adj(P^t)=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}$

$\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}}$

$D=P^{-1}.A.P=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

$\boxed{D}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}}$ ✓

3'.ARIKETA

$\begin{cases}mx-y+2z=-3\\x+2y+z=3\\2x+y+3z=n\end{cases}\Longrightarrow\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}m&-1&2&-3\\1&2&1&3\\2&1&3&n\end{array}\right)}_{A!B}$

$|A|=\begin{vmatrix}m&-1&2\\1&2&1\\2&1&3\end{vmatrix}=6m+\cancel{2}-\cancel{2}-8-m+3=5m-5$

$|A|=0\iff\boxed{m=1}$

$\boxed{m=1\text{ denean}}$

$|A|=0$, $hein(A)\leq2\Rightarrow$ $\underline{hein(A)=2?}$

$\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow$ BAI, $hein(A)=2$

$\underline{hein(A!B)=3?}$

$\begin{vmatrix}-1&2&-3\\2&1&3\\1&3&n\end{vmatrix}=-n\cancel{-18}\cancel{+6}\cancel{+3}\cancel{+9}-4n=-5n=0$

$z_2\ z_3\ z_4$

$\boxed{n=0}$ denean $hein(A!B)=2$

$\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}\neq0$

$\begin{vmatrix}1&-1&-3\\1&2&3\\2&1&n\end{vmatrix}=2n-\cancel{3}-\cancel{6}+\cancel{12}\cancel{+3}-n=\boxed{n=0}$

$z_1\ z_2\ z_4$

$\begin{vmatrix}1&2&-3\\1&1&3\\2&3&n\end{vmatrix}=n\cancel{+9}+\cancel{12}+\cancel{6}-\cancel{9}-2n=\boxed{n=0}$

$z_1\ z_3\ z_4$

$\boxed{m=1,\ n=0\text{ denean}}$

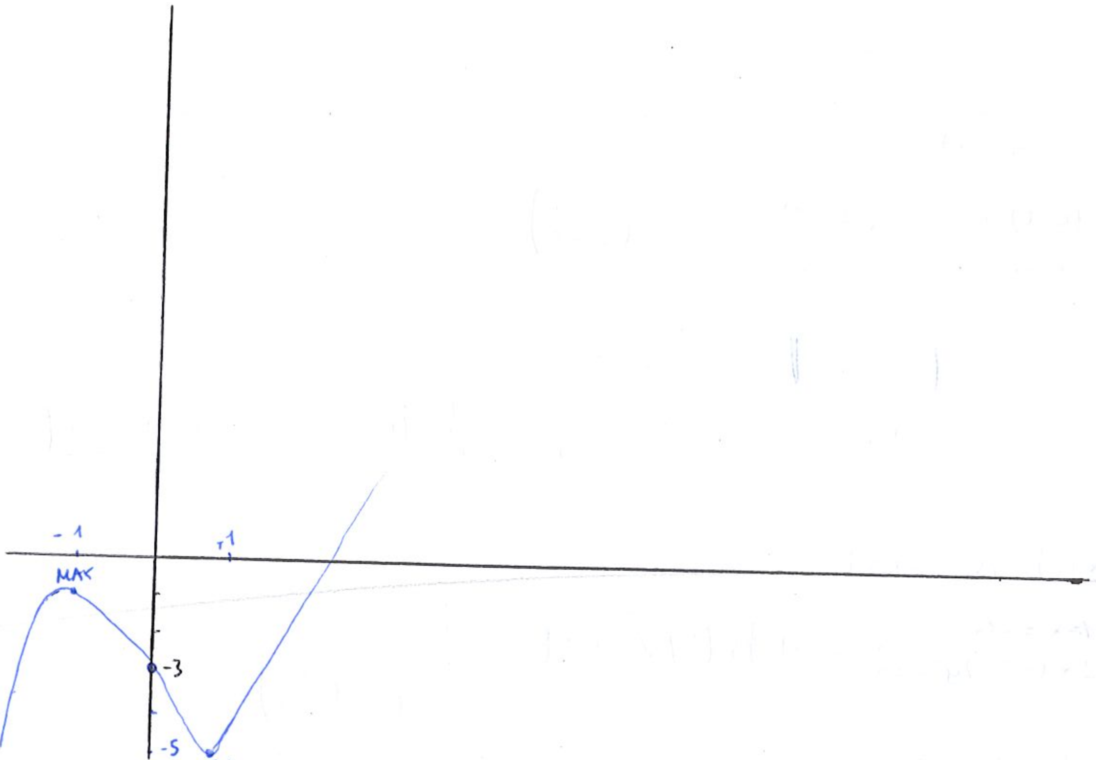
$hein(A)=hein(A!B)=2<n=3$

S.B.Indet. ∞ Esazpena.

$\boxed{m=1,\ n\neq0\text{ denean}}$

$hein(A)=2\neq hein(A!B)=3$

<u>S.Be</u>



2. ARIKETA

a) $I = \int \frac{2x+10}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{2x(+3-3)}{x^2+3x+2}dx + \int \frac{10\,dx}{(x+1).(x+2)} = \int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx + \int \frac{-3}{(x+1).(x+2)} + \int \frac{10\,dx}{(x+1).(x+2)}$

KONTUZ!

$x^2+3x+2=0$

$x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4.2}}{2} \rightarrow x_1 = \frac{-3+1}{2} = \boxed{-1}$, $x_2 = \frac{-3-1}{2} = \boxed{-2}$

$= \ln|x^2+3x+2| + 7.\underbrace{\int \frac{1\,dx}{(x+1).(x+2)}}_{I_1}$

$I_1 = \int \frac{1\,dx}{(x+1).(x+2)}$

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A.(x+2)+B.(x+1)}{(x+1).(x+2)}$

x	$1 = A(x+2) + B.(x+1)$
-2	$1 = -1B \Rightarrow \boxed{B=-1}$
-1	$1 = 1A \Rightarrow A = 1$

$\int \frac{1\,dx}{(x+1).(x+2)} = -\frac{1}{1}\int \frac{1\,dx}{x+2} + \frac{1}{1}.\int \frac{1\,dx}{x+1}\,dx = \boxed{1\left(\ln|x-1| - \ln|x+2|\right) + K}$

$I = \ln|x^2+3x+2| + \frac{\cancel{7}}{3}.\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + K = \ln\left(\frac{(x+1)^2.\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}\right) + K = \boxed{\ln(x+1)^2 + K}$

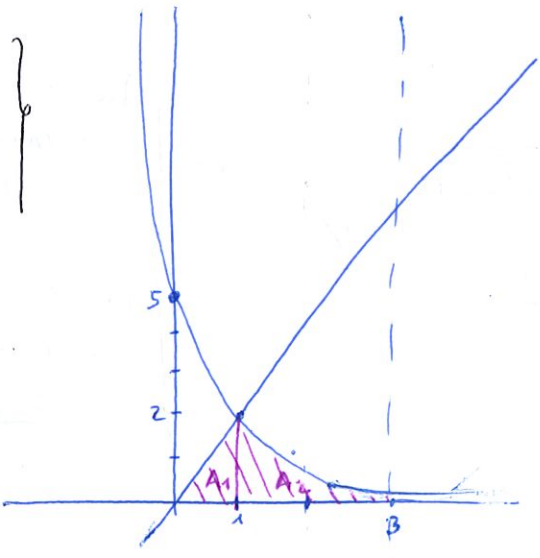
Nola jarri

b) $h(x) = \frac{2x+10}{x^2+3x+2}$

$y = 2x$

$x = 3$

Ox ardatza



$\boxed{A_1} = \int_0^1 (2x)dx = [x^2]_0^1 = \boxed{1u^2}$

$\boxed{A_2} = \int_1^3 \frac{2x+10}{x^2+3x+2}dx = \left[\ln(x+1)^2\right]_1^3$

$= \ln 4^2 - \ln 2^2 = \ln\frac{4^2}{2^2} = \boxed{\ln 4u^2}$

$\boxed{A_T = 1 + \ln 4u^2}$

⑤

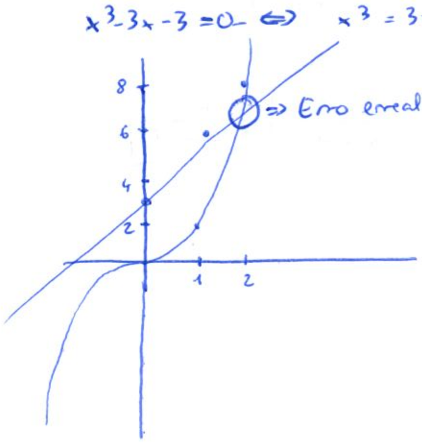
5.orrialdea

Azterketa 2000

1.ARIKETA

a) $f(x)=x^3-3x-3$. Erro erreal bakarra?

$x^3-3x-3=0 \Leftrightarrow x^3=3x+3$



c) $f(x)=A \Rightarrow$ 3 soluzio

$x^3-3x-3-A=0$

2 soluzio izan ditzan?

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -3-a \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0=H} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0=H} & \end{array}$$

$-3-a-2=0$

$\boxed{a=-5}$

$\boxed{a=-5 \text{ denean}}$

3 soluzio $\boxed{\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=-2 \end{array}}$

b) Grafika. $f(x)=x^3-3x-3$

1) IE

$D(f)=\mathbb{R}$

2) EP

Ox- ardatzeko ebaki puntuak $y=0 \Rightarrow x^3-3x-3=0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{-1\neq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{-5\neq 0} \end{array}$$

OY-ardatzeko E.P. $x=0 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow \boxed{P(0,-3)}$

Soluzio erreal bat dela arren, ez da zenbaki oso bat, grafikan ikusten dugun bezala $x=2$ inguruan ebakiko du Ox ardatza baino Ruffiniren erregela erabiliz ezin jakin dezakegu zenbaki erreal ez osoa.

$P(\simeq 2,0)$

3) Asimetria

$f(-x)=-x^3+3x-3 \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow$ Ez dauka simetriarik

4) Periodikotasuna

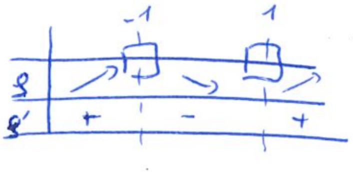
Ez du.

5) Asintotak $\left\langle\begin{array}{l} B \Rightarrow \text{IE}=\mathbb{R} \text{ Ez} \\ H=\lim\limits_{x\to\infty} x^3-3x-3=\infty \text{ Ez paraboliKoa} \\ Z \Rightarrow \text{Ez} \end{array}\right.$

6) Gorakortasuna beherakortasuna / Ganbiltasuna, ahurtasuna.

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \quad x^2-1=0 \left\langle \begin{array}{l} \boxed{x=1} \\ \boxed{x=-1} \end{array}\right.$

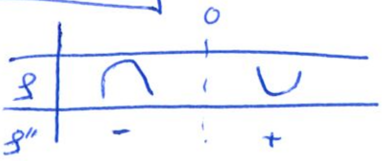


$x=-1$ean $\rightarrow$ MAX eta
$x=1$ean MINIMO posibleak.

Konprobaketa

$f''(x)=6x \left\langle \begin{array}{l} f''(-1)<0 \ \boxed{\text{MAX } x=-1\text{ean}} \\ f''(1)>0 \ \boxed{\text{MIN } x=1\text{ean}} \end{array}\right.$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0\text{an I.P}}$



(*) $\boxed{\begin{matrix} m=1 \\ n=1 \end{matrix}}$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \cancel{3x-y-2z=0} \\ 5x+y=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=2-5\lambda \\ \boxed{z}=1-\lambda-2+5\lambda \\ \quad =\boxed{-1+4\lambda} \end{array}\right.$$

$\boxed{m \neq 1 \text{ denean}}$

$$\left.\begin{array}{l} h(A)=3 \\ hein(A|B)=3 \\ n=3 \end{array}\right\} \text{S.B. Determinatua}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} n & 1 & m \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{8m-8}=\frac{-4+2m+2n}{8m-8}=\frac{\cancel{2}\cdot(m+n-2)}{\cancel{2}\cdot(4m-4)}=\boxed{\frac{m+n-2}{4m-4}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & n & m \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{8m-8}=\frac{6m-10n+4}{8m-8}=\boxed{\frac{3m-5n+2}{4m-4}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & n \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{8m-8}=\frac{-2+3+5n-6}{8m-8}=\frac{5n-5}{8m-8}=\boxed{\frac{5}{8}\cdot\frac{(n-1)}{(m-1)}}$$

4. ARIKETA

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $x \cdot I_2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Atera balio propioak.

Polinomio Karakteristikoa

$\boxed{P_x} = |A - x \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 1-x & a \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)\cdot(2-x) - a = 2 - x - 2x + x^2 - a = x^2 - 3x + 2 - a$

~~$P_x = 0 \iff x^2 - 3x + 2 - a = 0$~~ $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4a1}}{2}$???

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & +2-a \\ 1 & & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{-a = H} \end{array}$$

$-a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$ $\boxed{P_A(x) = (x-1)\cdot(x-2)}$

$x = 3$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2-a \\ 3 & & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 2-a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2an} \end{array}$$

2 balore ≠ ere!

$(1-x)\cdot(2-x) - a = 0 \Rightarrow$

4'. ARIKETA

$$\begin{cases} x + y + mz = n \\ 3x - y - 2z = 0 \\ 5x + y \quad = 2n \end{cases} \dashrightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & n \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)}_{A|B}$$

A

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3m - 10 + 5m + 2 = 8m - 8$

$|A = 0 \iff 8m - 8 = 0$ $\boxed{m = 1}$

$\boxed{m = 1 \text{ denean}}$

A-ren heina

$|A| = 0 \Rightarrow$ beraz heina$(A) \leq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ beraz, heina$(A) \geq 2$

} heina $(A) = 2)$

A|B-ren heina

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & n \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2n + 2 = 2n - 2 = 0$ $\boxed{n = 1}$

hein $(A|B) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & n \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3n + 5n - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 1}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & n \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 10n - 6 = 0 \rightarrow \boxed{n = 1}$

$\boxed{n = 1 \text{ denean}}$

heina $(A) = 2$

heina $(A|B) = 2$

} n = 3 SB. zehaztugabea ⊛

$\boxed{n \neq 1 \text{ denean}}$

hein $(A) = 2$

heina $(A|B) = 3$

} SBe.

3'. ARIKETA

a) $f(x)=\ln(1+x)$ -ren n ordenako Taylorren polinomioa $c=0$-n zentratua.

$f'(x)=\frac{1}{1+x} \longrightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \longrightarrow f'(0)=-1$

$f'''(x)=-1\cdot(-2)\cdot(1+x)^{-3} \longrightarrow f'''(0)=2$

$f^{IV}(x)=-1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(1+x)^{-4} \rightarrow f^{IV}(0)=-3!$

$f^{V}(x)=-1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(1+x)^{-5} \rightarrow f^{V}(0)=4!$

$f^{n}(0)\underset{\downarrow}{=}(n-1)!$

zeinua!

$(-1)^{n+1}$

$$P_{n}(x)=0+x+\frac{(-1)\cdot x^2}{2!}+\frac{2\cdot x^3}{3!}\pm\frac{3!\,x^4}{4!}+\dots+\frac{\overset{\boxed{(-1)^{n+1}}}{(n-1)!}\cdot x^n}{n!}$$

$$\boxed{P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n}}$$

b) $\ln\left(\frac{21}{20}\right)$

$\ln\left(\frac{21}{20}\right)=\ln\left(\overset{1}{\cancel{\frac{20}{20}}}+\frac{1}{20}\right)$ $\boxed{x=\frac{1}{20}}$

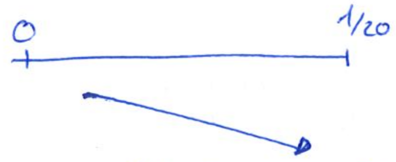
$\boxed{P_3}=\frac{1}{20}-\frac{(1/20)^2}{2}+\frac{(1/20)^3}{3}=\boxed{0,04879}$

Errorea

$$R_3=f^{4}(z)\cdot\frac{(\cancel{x-0})^{n+1}}{(n+1)!}=-\cancel{3!}(1+z)^{-4}\cdot\frac{x^4}{\cancel{4!}\cdot 4}=-\underbrace{\boxed{\frac{1}{(1+z)^{+4}}}}_{\text{Bornatu}}\cdot\frac{x^4}{4}$$

Bornatu

$x<z<c$

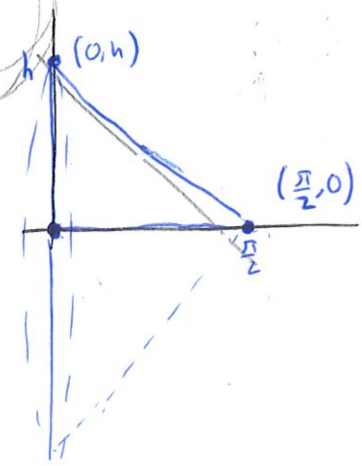


Beherakorra da funtzioa

$$\frac{1}{(1+z)^{+4}}\overset{z=0}{\approx}\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

$$\boxed{R_3\left(\frac{1}{20}\right)=}-1\cdot\frac{(1/20)^4}{4}=\boxed{1,5625\cdot10^{-6}<10^{-3}}$$

b)



$$\boxed{\frac{x-a}{c-a}=\frac{y-b}{d-b}} \Rightarrow \frac{x-\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{y}{h} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{2}{\pi}.h.\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$B_{ox}=\pi\int_a^b [f(x)]^2=\pi\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{2}{\pi}h.\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]dx$$

$$=-\frac{2}{\cancel{\pi}}.\cancel{\pi}.h\int_0^{\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx=-2h.\left[\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}x\right]_0^{\pi/2}$$

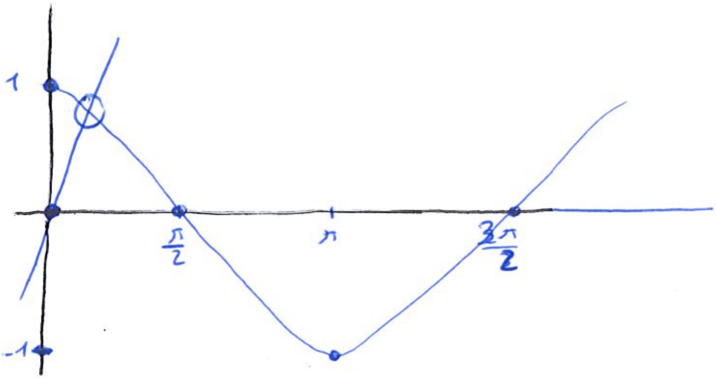
$$=-2h.\left[\frac{(\pi/2)^2}{2}-\frac{\pi}{2}.\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=-2h.\left[\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{4}\right]$$

$$=-2.h.\left(-\frac{\pi^2}{8}\right)=\frac{2h\pi^2}{8}=\boxed{\frac{h\pi^2}{4}u^3}$$

$$B_{ox}=\frac{\pi^3}{4}+2\pi=\frac{h\pi^2}{4} \Rightarrow \cancel{\pi}.\left(\frac{\pi^2+8}{\cancel{4}}\right)=\frac{h\pi^{\cancel{2}}}{\cancel{4}} \Rightarrow \boxed{h=\frac{\pi^2+8}{\pi}}$$

3.ARIKETA

a) $\cos 3x = 4x - 1$ erro positibo bat duela ziurtatu.



Erro bakarra du x-ren ardatz positiboan.

$[0,\frac{\pi}{2}]$ tartean, funtzioa jarraia eta deribagarria da.

Funtzioa

$$\boxed{f(x)=\cos 3x-4x}$$

Bolzanoren teoremarekin ziurtatzen dugu tarte honetan badagoela erro bat

$$f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$$

$$\boxed{\begin{matrix} f(0)=1 \\ f(\frac{\pi}{2})=-\frac{4.\pi}{2} \end{matrix} \quad -\frac{4\pi}{2}<0}$$

Newtonen metodoa aplika dezakegu:

$$\boxed{C_{n+1}=C_n-\frac{f(C_n)}{f'(C_n)}}$$

$f(x)=\cos 3x-4x$

$f'(x)=-3.\sin 3x-4$

n	C_n	$f(C_n)$	$f'(C_n)$	C_{n+1}
1	$\pi/8$	-1,18811289	-6,7716386	$0,215801433=C_2$
	C_2	-0,0655537351	-5,80935392	$0,204517263=C_3$
	C_3	$-4,60906322.10^{-4}$	-4,60928352	$\boxed{0,204417268}$

b) x=3n ukitzailea.

$y = mx + n$ $\nearrow$ $m = g'(3) \Rightarrow$ $g'(3) = 3 \cdot e^{-3} \cdot (2-3) = \boxed{-\frac{3}{e^3}} = \boxed{-0,15}$ $\overset{\text{(m)}}{}$

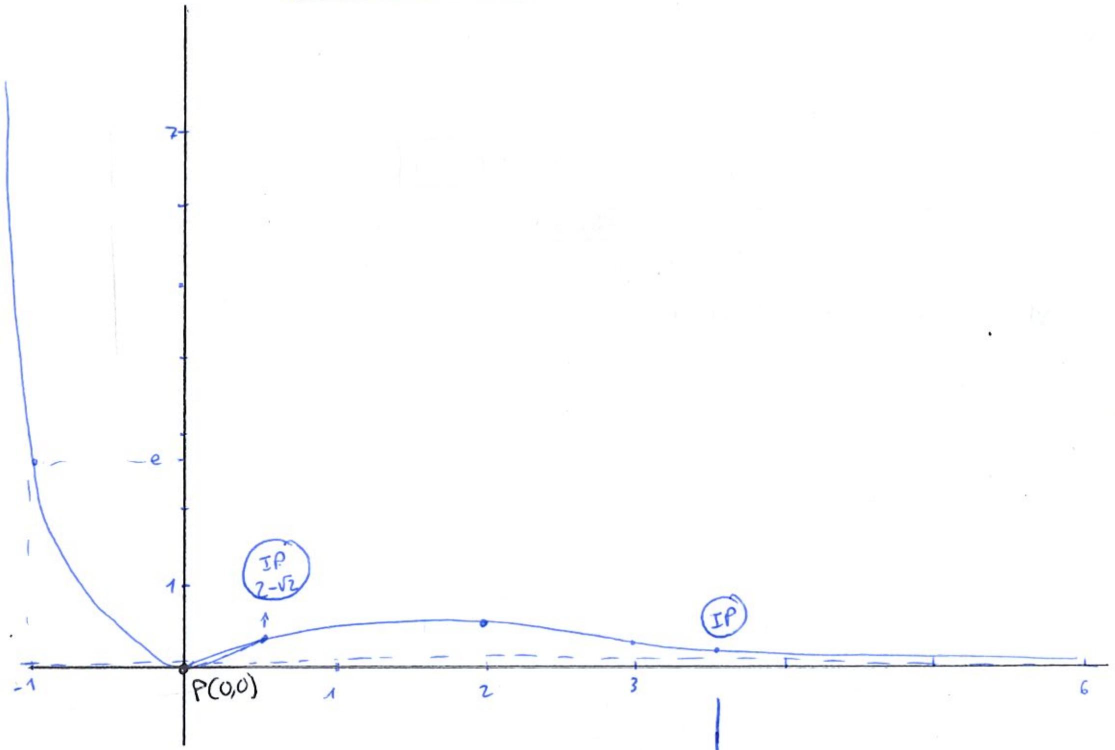
$\searrow$ $P(3, g(3))$ $g(3) = 3^2 \cdot e^{-3} = \boxed{\frac{9}{e^3}}$

(n?)

$\frac{9}{e^3} = -\frac{3}{e^3} \cdot 3 + n$

$\boxed{n} = \frac{2 \cdot 9}{e^3} = \boxed{\frac{18}{e^3}}$

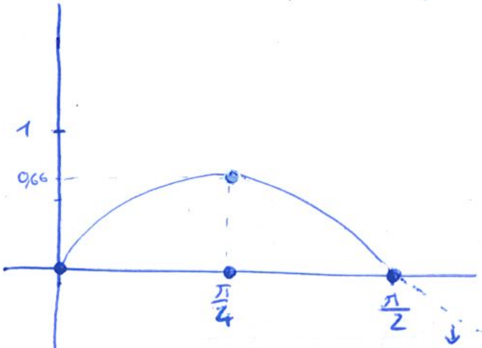
ukitzailea: $\boxed{y = -\frac{3}{e^3}x + \frac{18}{e^3}}$



2. ARIKETA

a) Box ? $y = x\sqrt{\cos x}$ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

{cos x > 0 ⇒ Guri inporta zaiguna $[0, \frac{\pi}{2}]$ tartea



Et dago guntziorik!

$$B_{ox} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \cdot \cos x) dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$\int x^2 \cdot \cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \dashrightarrow du = 2x \\ dv = \cos dx \rightarrow v = \int \cos x = \sin x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = 1dx \\ dv = \sin x\,dx \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\}$

$= x^2 \cdot \sin x - 2\left[-x \cdot \cos x - \int -\cos x \cdot dx\right] = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x + 2\sin x$

Ahaztu gabe!

$$B_{ox} = \pi \cdot \left[x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x\right]_0^{\pi/2} = \pi \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \overset{1}{\cancel{\sin \frac{\pi}{2}}} + \overset{0}{\cancel{2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}} + 2 \cdot \overset{1}{\cancel{\sin \frac{\pi}{2}}}\right] - \pi \cdot 0$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{\pi^2}{4} + 2\right] = \boxed{\cancel{\frac{\pi^3}{4} + 8\pi}} \quad \boxed{\frac{\pi^3}{4} + 2\pi}\ u^3$$

4. orrialdea

Azterketa 2000

1. ARIKETA

a) EP. Asintotak. Gorakortasun, beherakortasun. Ahurtasun, ganbiltasun.

$g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

Funtziotik ateratako informazioa

EP

Ox ardatzean

$y=0 \Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow x^2 \cdot e^{-x}=0 \begin{cases} x^2=0 & x=0 \quad \boxed{P_1(0,0)} \\ e^{-x}=0 & \boxed{x \notin \mathbb{R}} \end{cases}$

OY ardatzean

$x=0 \Rightarrow \boxed{y} = 0^2 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = \boxed{0} \quad \boxed{P_1(0,0)}$

Asintotak

Bertikala $IE=\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ ez dago asintota bertikalik.

Horizontala

$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \frac{\infty}{e^\infty} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{y=0\text{an asintota horizontala}}$

$e^\infty >>> \infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty \cdot e^\infty = \boxed{+\infty}$ mutur ~~hiperbolikoa~~ parabolikoa ✓

Zehiarra

Ez dago.

Lehenengo deribatutik ateratako informazioa

$g'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (-1 \cdot e^{-x}) \cdot x^2 = x \cdot e^{-x}(2-x) \cancel{=0}$ $\begin{cases} \boxed{x=0} \\ e^{-x}=0 \quad x \notin \mathbb{R} \\ \boxed{x=2} \end{cases}$ Puntu kritiko posibleak

$g'(x)=0$

		0 MIN?		2 MAX.	
g	↘		↗		↘
g'	−		+		−

Bigarren deribatuak emandako inform.

$g''(x) = 2 \cdot e^{-x} + (-1 \cdot e^{-x}) \cdot 2x - \left[(-1 \cdot e^{-x}) \cdot x^2 + 2x \cdot e^{-x}\right] = e^{-x} \cdot (2 - 2x + x^2 - 2x)$

$= e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2)$.

Konprobatu puntu kritikoak

$g''(0) > 0$ $\boxed{\text{MIN}}$ $\boxed{x=0\text{n minimoa}}$ $P(0,0)$

$g''(2) < 0$ $\boxed{\text{MAX}}$ $\boxed{x=2\text{n maximoa}}$ $P(^{2}\,\frac{4}{e^2})$

Aztertu ganbiltasun eta ahurtasun-a

$g''(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-4x+2) \cdot e^{-x} = 0 \begin{cases} x^2-4x+2=0 & x = \frac{+4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 2}}{2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \pm \cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} \begin{cases} \boxed{x_1 = 2+\sqrt{2}} \\ \boxed{x_2 = 2-\sqrt{2}} \end{cases} \\ e^{-x} \neq 0 & \boxed{\notin \mathbb{R}} \end{cases}$

		0,58 $2-\sqrt{2}$		3,4 $2+\sqrt{2}$	
g	∪		∩		∪
g''	+		−		+

$x = 2-\sqrt{2}$-n eta $x = 2+\sqrt{2}$-n INFLEXIO PUNTUAK

Matematika. Biozientziak. 2015/06/24

---

1. Irudikatu ondoko funtzioa
$$f(x) = \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}.$$
(Aztertu asintotak, muturrak, inflexio puntuak, ...).

-> GAIZ. EG.NA.

2. i) Kalkulatu ondoko integrala
$$\int \frac{3x+5}{x(x^2+4)}\,dx$$

ii) Izan bitez $f(x) = \sin x$ eta $g(x) = \sin^2 x$. Kalkulatu bi funtzio horiek mugatzen duten eremuaren azalera $x \in [0, \pi]$ tartean dagoelarik.

iii) Kalkulatu aurreko ataleko eremuak OX ardatzarekiko biratzean sortzen duen biraketa bolumena.

3. i) Zehaztu $x^5 = 3 + 5x$ ekuazioaren soluzio kopurua.

ii) Newton-en metodoa erabili ahal izanez gero, hurbildu aurreko ataleko ekuazioaren soluzio positiboa milarenetaraino.

4. i) Aztertu ondoko ekuazio linealetako sistemaren ebazpena a eta b parametroen balioen arabera.
$$\begin{cases} -x+2y=-2z \\ x+az=b-y \\ 3y=2b+3x \end{cases}$$

ii) Ebatzi sistema bateragarri zehaztugabea den kasuetan.

2015/06/24

1.ARIKETA

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}$$

Jarraian funtziotik atera dezakegun informazioa:

Izate eremua

$D(y) = \{ x \in \mathbb{R} / 2+e^{2x} \neq 0 \}$

$2+e^{2x}=0 \Rightarrow e^{2x}=-2 \Rightarrow \ln e^{2x} = \underbrace{\ln -2}_{\nexists}$ $\boxed{D(y)=\mathbb{R}}$

Ardatzekiko ebaki: puntuak

OX ardatzeko e.p. aurkitzeko: $f=0$ $\frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}=0 \Leftrightarrow e^{2x}=0$ $\boxed{x \notin \mathbb{R}}$

OY ardatzarekiko e.p aurkitzeko: $x=0$ $f(x)=\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ $\boxed{P(0, 1/3)}$

Simetria

$f(-x) = \frac{e^{-2x}}{2+e^{-2x}} = \frac{1}{\cancel{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{\frac{2 \cdot e^{2x}+1}{\cancel{e^{2x}}}} = \frac{1}{2 \cdot e^{2x}+1} \neq f(x) \neq -f(x)$ Ez dauka simetririk.

Periodotasuna

Ez du, ez da funtzio trigonometrikoa.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-2x}}{2+e^{-2x}} = \frac{\overset{e^{-\infty}=0}{\cancel{\infty}}}{2}$ $\boxed{y=0}$ $\boxed{y=1}$ $\boxed{y=0 \text{ an}}$

Asintotak

Bertikala $\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}$ beraz, ez da egongo

Horizontala $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty} \text{ INDET}} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} = 1$ $\boxed{y=1\text{ean asintota horizontala}}$

Zeiharra $\Rightarrow$ ez du eukiko

$$f'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot (2+e^{2x}) - 2 \cdot e^{2x} \cdot e^{2x}}{(2+e^{2x})^2} = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot (2+\cancel{e^{2x}}-\cancel{e^{2x}})}{(2+e^{2x})^2} = \boxed{\frac{4 \cdot e^{2x}}{(2+e^{2x})^2}}$$

Jarraian, funtzioaren deribatutik atera dezakegun funtzioari buruzko informazioa:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot e^{2x}}{(2+e^{2x})^2} = 0 \Rightarrow 4 \cdot e^{2x}=0$ $\boxed{x \notin \mathbb{R}}$ Ez dago maximo edo minimo posiblerik.

f	↗
f'	+

$\boxed{\text{Gorakorra } (-\infty, \infty)}$

$$f''(x) = \frac{4 \cdot e^{2x} \cdot 2 \cdot (2+e^{2x})^{\cancel{2}} - 2 \cdot \cancel{(2+e^{2x})} \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot 4 \cdot e^{2x}}{(2+e^{2x})^{\cancel{4}\,3}} = \frac{8 \cdot e^{2x} \cdot (2+e^{2x}-2 \cdot e^{2x} \cdot e^{2x})}{(2+e^{2x})^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 8 \cdot e^{2x} \cdot (2+e^{2x}-2 \cdot e^{4x}) = 0$ $\begin{cases} e^{2x}=0 \\ \boxed{2+e^{2x}-2 \cdot e^{4x}=0} \end{cases}$ $e^{2x} \cdot (1-2 \cdot e^{2x}) = -2 \Rightarrow 1 = -\frac{2}{e^{2x}} + 2 \cdot e^{2x}$

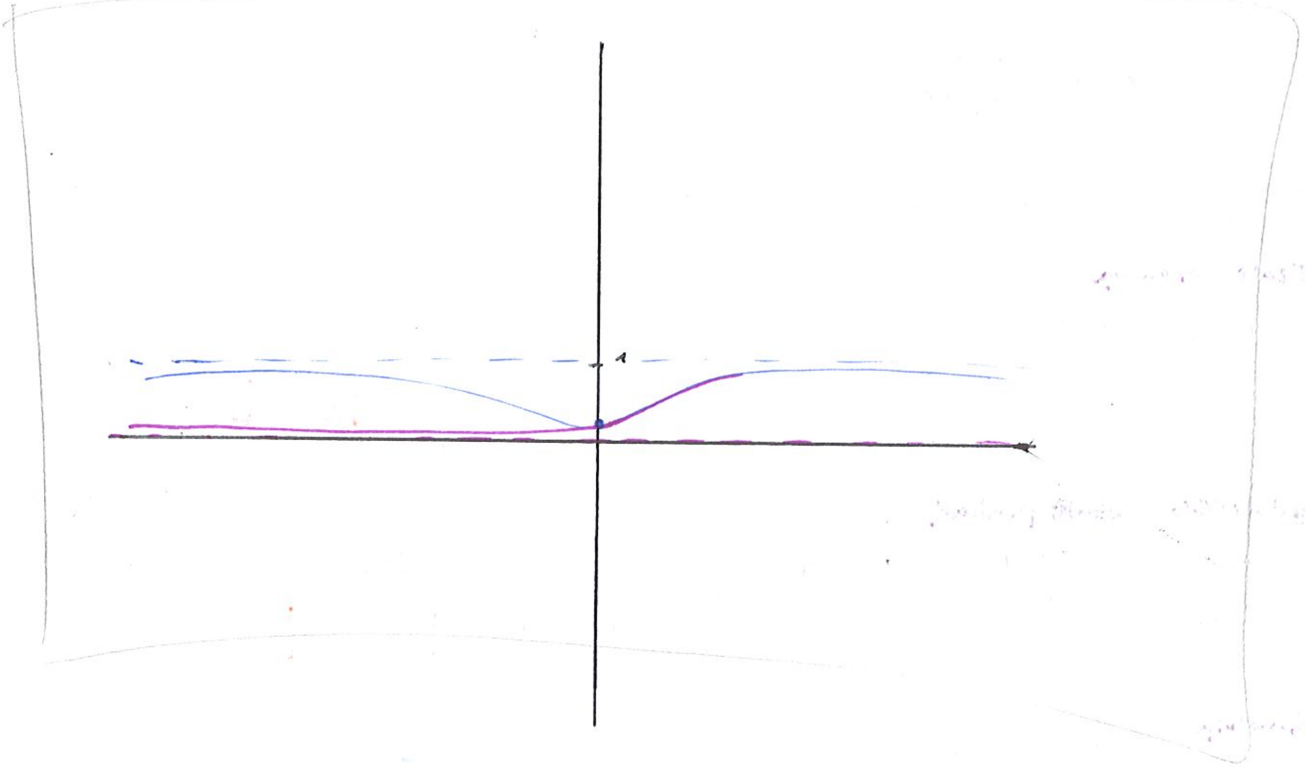
$\ln e^{2x}(-1+2e^{2x}) = \ln 2$

$\ln e^{2x} + \underline{\ln(-1)} + 2e^{2x} = \ln 2$

$\nexists$ Ez du I.P !! ✓

↓

f	∪	
f''	+	-



2. ARIKETA.

a) $I = \int \frac{3x+5}{x\cdot(x^2+4)}\,dx$

$$\frac{3x+5}{x\cdot(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A\cdot(x^2+4) + x\cdot(Bx+C)}{x\cdot(x^2+4)}$$

	$A\cdot(x^2+4)+x(Bx+C)=3x+5$
0	$4A=5 \Rightarrow \boxed{A=5/4}$
1	$5A+B+C=8$
-1	$5A+B-C=2$

$10A+2B \; / = 10 \Rightarrow 5A+B=5$

$5\cdot\frac{5}{4}+B=5$

$\boxed{B=-5/4}$

$\boxed{C=3}$

$$I = \int \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx + \underbrace{\int \frac{-5/4\,x+3}{x^2+4}\,dx}_{I_1}$$

I_1-en ebazpena.

$$I_1 = \int -\frac{5}{4}\cdot\frac{x}{x^2+4}\,dx + \int\frac{3}{x^2+4}\,dx = -\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx + 3\frac{1}{4}\int\frac{1}{\frac{x^2}{4}+4}\,dx$$

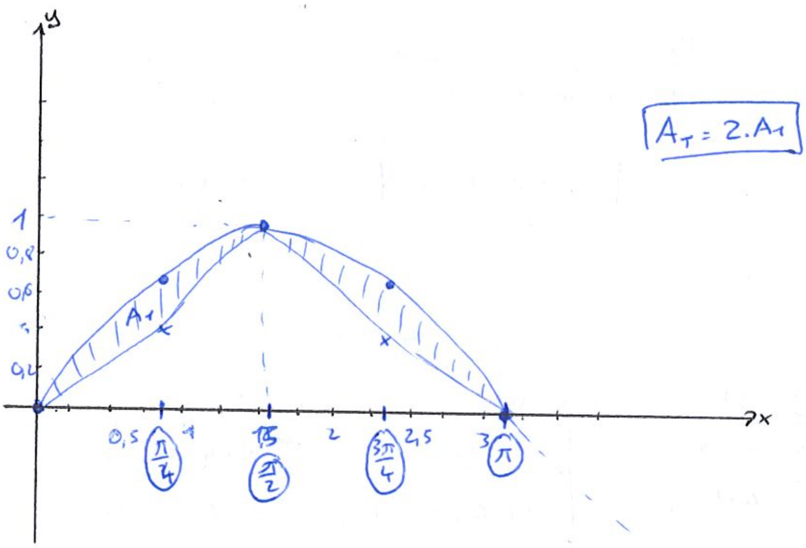
$$= -\frac{5}{8}\ln|x^2+4| + \frac{3}{2\cancel{4}}\frac{\cancel{2}}{1}\int\frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \boxed{-\frac{5}{8}\ln|x^2+4| + \frac{3}{2}\cdot\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+K}$$

$$I = \frac{5}{4}\cdot\ln|x| - \frac{5}{8}\cdot\ln|x^2+4| + \frac{3}{2}\cdot\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+K = \frac{5}{4}\cdot\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right| + \frac{3}{2}\cdot\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+K$$

2015/06/24

2.ARIKETA

b) $g(x) = \sin x$ eta $g(x) = \sin^2 x$ $\quad x \in [0, \pi]$



$\boxed{A_T = 2.A_1}$

$$\boxed{A_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sin^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2 x\,dx}_{I_1}$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx$$

$$= -(-\cos 0) - \left[\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\cos 2x\,dx\right]$$

$$= +1 - \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\cdot\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/2}\right] =$$

$$= +1 - \frac{\pi}{4} + \cancel{\frac{1}{4}\cdot\left[0 - 0\right]}^{0} = \boxed{1 - \frac{\pi}{4}\ u^2}$$

$$\boxed{A_T} = 2.\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}\ u^2}$$

t : cos

dt = -sin x dx

c) B_{ox}? $\quad B_{ox} = \pi\int_0^{\pi} (\sin x - \sin^2 x)^2\,dx =$

$$\int (\sin x - \sin^2 x)^2\,dx = \int (\sin^2 x + \sin^4 x - 2.\sin x.\sin^2 x)\,dx = \underbrace{\int (\sin^2 x)\,dx}_{I_1} + \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right).\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^{dx} - 2\int \sin x.(1 - \cos^2 x)\,dx$$

$$= I_1 + \frac{1}{2^2}\int \underbrace{(1 - \cos 2x - \cos 2x + \cos^2 2x)\,dx}_{I_3} + I_2 = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\sin 2x + \frac{1}{4}\circ\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8}\cdot\sin 4x\right]\right.$$

$$\left. - \cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right]$$

$$\boxed{I_2} = \int \sin x.(1 - \cos^2 x)\,dx = \left|\begin{matrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\,dx \end{matrix}\right| = -\int (1 - u^2)\,du = -u + \frac{u^3}{3} \overset{\text{alderantzizko aldaketa}}{=} \boxed{-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}}$$

$$I_3 = x - 2\int \cos 2x + \int (\cos^2 2x)\,dx = x - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\sin 2x + \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)dx = x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x,$$

$$= \boxed{\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8}\cdot\sin 4x}$$

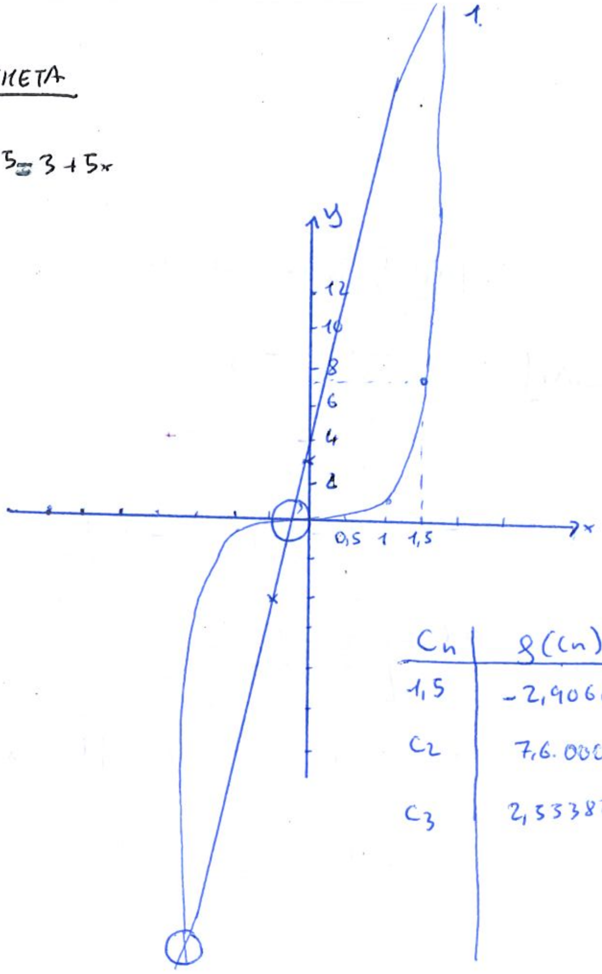
$$\boxed{B_{ox}} = \pi.\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\sin 2x + \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} - \cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi.\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} - (-1) - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] = \pi\left[\frac{4\pi + 3\pi}{8} + 2 - \frac{2}{3}\right] = \boxed{12,8\,u^3}$$

$\boxed{y \neq B_{ox} = 0,258\pi^3}$

3.ARIKETA

$x^5 = 3+5x$



3 erro ditu $f(x)=x^5-5x-3$ funtzioak.

Erro positiboa aurkitzeko, $[1,3]$ tartean erroa dagoela ziurtatuko dugu

$\boxed{f(1) \cdot f(3) < 0}$ Betetzen da, Newtonen metodoa aplikatuko dugu.

$f'(x)=5x^4-5$

c_n	$f(c_n)$	$f'(c_n)$	c_{n+1}
1,5	-2,90625	20,3125	$1{,}64307692 = c_2$
c_2	$7{,}6.0000266 \cdot 10^{-1}$	31,4419481	$1{,}61840538 = c_3$
c_3	$2{,}53382864 \cdot 10^{-2}$	29,3443949	$\boxed{1{,}61803507}$

4.ARIKETA

$$\begin{cases} -x+2y = -2z \\ x+az = b-y \\ 3y = 2b+3x \end{cases}$$

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & +2 & +2 & 0 \\ 1 & 1 & a & b \\ -3 & 3 & 0 & 2b \end{array}\right.}_{A}\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\b\\2b\end{array}}\right)}_{A|B}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & +2 & +2 \\ 1 & 1 & a \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6-6a+6+3a = -3a+12$$

$|A|=0 \iff -3a+12=0 \quad \boxed{4=a}$

$\boxed{a=4 \text{ denean}}$

- $|A|=0$, $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ denez, hein$(A)=2$
- hein$(A|B)$?

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & b \\ 3 & 0 & 2b \end{vmatrix} = 16b+6b-4b = 18b = 0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ -3 & 3 & 2b \end{vmatrix} = -2b-6b+3b-4b = 9b = 0 \quad \boxed{b=0}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & b \\ -3 & 0 & 2b \end{vmatrix} = -8b-6b+4b = 0 \quad \boxed{b=0}$$

$$\begin{cases} b=0 \text{ denean} & \text{hein}(A|B)=2 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \\ b\neq 0 \text{ denean} & \text{hein}(A|B)=3 \end{cases}$$

a=4 denean eta b=0 denean n=3 izanik

hein$(A) = 2 =$ hein$(A|B) = 2 < n=3$

S.B. Indeterminatua.

$-x+2y+2z=0 \quad \boxed{z} = \frac{+x-2y}{2} = -\frac{y}{2} \quad \boxed{= \frac{-\lambda}{2}}$

$-3x+3y=0 \rightarrow \boxed{x=y} \boxed{=\lambda}$

$\boxed{y=\lambda}$

a=4 denean eta b≠0 denean n=3 izanik

hein$(A)=2 \neq$ hein$(A|B)=3$

S.Be

$\boxed{a\neq 4 \text{ denean}}$

$|A|\neq 0$ hein$(A)=$ hein$(A|B)=3=n=3$ SBD (ez digu ebazteko eskatzen).

Matematika. Biozientziak.

2015/01/12

Ez ahaztu!

!

1. Izan bedi $y(x) = xe^{-2x}$ funtzioa. Egin $y(x)$ funtzioaren irudikapen grafikoa eta baita irudikatu bere zuzen ukitzailea bere inflexio puntuan. (Aztertu $y(x)$ funtzioaren gorakortasun, beherakortasun, ahurtasun eta ganbiltasun tarteak; asintotak, muturrak eta inflexio puntuak).

2. i) Kalkulatu ondoko integrala:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

ii) Kalkulatu $y = x^2$ eta $y = x^4$ kurbek mugatzen duten eremuaren azalera, non $x \geq 0$ den.
iii) Kalkulatu aurreko ataleko eremuak OX ardatzarekiko biratzean sortzen duen biraketa-bolumena.

3. i) Kalkulatu $c = 0$ puntuan zentraturiko $f(x) = \ln(1 + 3x)$ funtzioaren Taylor-en 4. ordenako polinomioa. Eman baita hondarraren adierazpena.
ii) Erabili aurreko atala $\ln(23/20)$-ren hurbilketa lortzeko. Eman hondarraren estimazioa.

$\ln(1+3x) = \ln(23/20)$

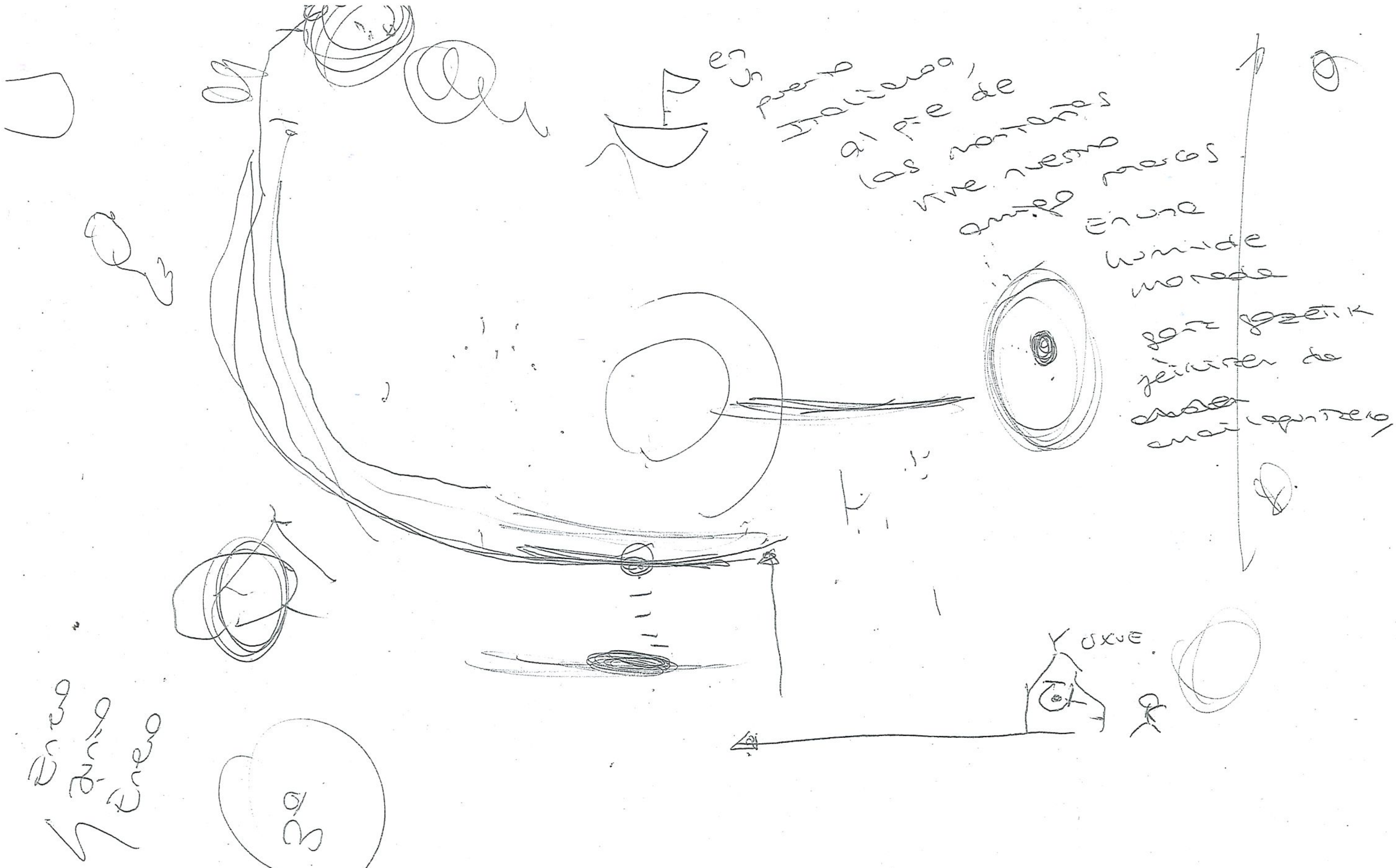
4. Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Zehaztu b parametroaren balioak $\boxed{\lambda = 0}$, A matrizearen balio propio bakuna eta $\lambda = 3$, A matrizearen balio propio bikoitza izan daitezan.
ii) Izan bedi $b = 0$. Kalkulatu P matrize bat non $P^{-1}AP$ diagonala den.

dimentsioa

$V_{OX} = \pi \int_a^b (f(x))^2$



en un puerto Italiano, al pie de las montañas vive nuestro amigo marcos En una humilde morada

gotz gozetik jeiutzen da

amai laguntzeko,

Matekko azterketa 2015/01/12

1. ARIKETA

$y(x) = x \cdot e^{-2x}$

1) Funtziotik bertatik atera dezakegun informazioa:

1.1 ASINTOTAK

Bertikala: $IE = \mathbb{R}$ beraz, ez dago.

Horizontala: $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0 \text{ n asintota horizontala}}$

($e^{\infty} >>>> \infty$ baino)

Zeiharra: Ez dago

1.2 EBAK. PUNTUAK

Ox ardatzean? $y=0 \Leftrightarrow x \cdot e^{-2x}=0$ $\begin{cases} x=0 & \boxed{P(0,0)} \\ e^{-2x}=0 & x \notin \mathbb{R} \end{cases}$

OY ardatzean? $x=0 \Leftrightarrow y=0 \rightarrow P(0,0)$

2) Funtzioaren lehenengo deribatutik atera dezakegun informazioa: $f'(x) = e^{-2x} + (-2) \cdot x \cdot e^{-2x} = \boxed{e^{-2x} \cdot (1-2x)}$

2.1 GORAKORTASUN eta BEHERAKORTASUN tarteak, MAX eta MIN posibleak.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-2x} \cdot (1-2x) = 0$ $\begin{cases} \boxed{x=\frac{1}{2}} \\ e^{-2x}=0 \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$

		0,5 MAX.	
f	↗		↘
f'	+		−

Gorakorra $(-\infty, 0{,}5)$
Beherakorra $(0{,}5, \infty)$

3) Bigarren deribatuarekin lortutako informazioa: $f''(x) = -2(e^{-2x}) \cdot (1-2x) + e^{-2x} \cdot (-2) = -2 e^{-2x}(1-2x+1)$

3.1 AHURTASUN eta GANBILTASUN tarteak, Inflexio puntuak

- Maximoaren konprobaketa $f''(0{,}5) < 0$ beraz MAX. $x = 0{,}5$ ean $\boxed{P_{MAX}(0{,}5; 0{,}184)}$
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow -4 \cdot e^{-2x} \cdot (1-x) = 0$ $\begin{cases} \boxed{x=1} \dashrightarrow \boxed{IP\left(1, \frac{1}{e^2}\right)} \\ -4 \cdot e^{-2x} = 0 \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$

		1	
f	∩		∪
f''	−		+

Ahurra $(1, \infty)$
Ganbila $(-\infty, 1)$

Inflexio puntuan, zuzen ukitzailea?

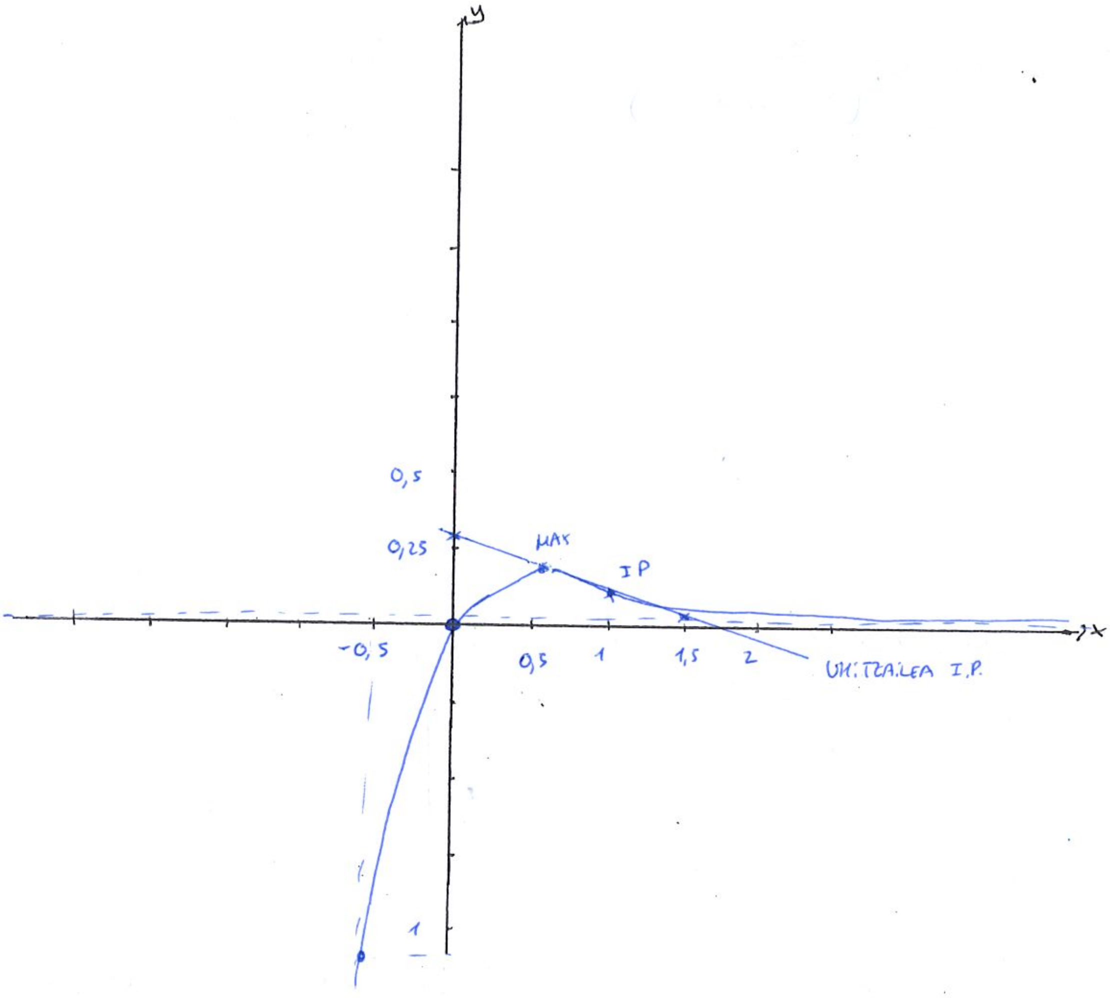
$IP\left(1, \frac{1}{e^2}\right)$

$g'(x) = e^{-2x} \cdot (1-2x)$

$\rightarrow \boxed{y - y_0 = g'(\cancel{x}) \cdot (x - x_0)} \rightarrow g'(1) = \boxed{-\frac{1}{e^2}}$

$\boxed{y = mx + n}$

$\frac{1}{e^2} = -\frac{1}{e^2} \cdot 1 + n \Rightarrow \boxed{\frac{2}{e^2} = n} \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2}}$



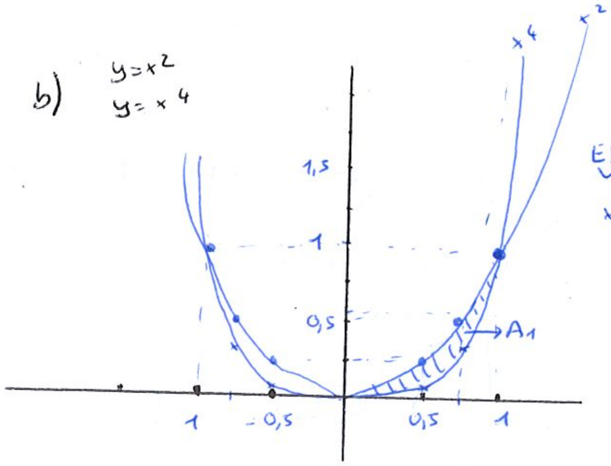
2.ARIKETA

$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} dx$

(2015/01/12)

2. ARIKETA

b) $y = x^2$
$y = x^4$



Ebaki puntuak
EP

$x^2 = x^4 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2.(x^2-1) = 0 \rightarrow \boxed{x=0},\ x=-1,\ \boxed{x=1}$

$x^4 - x^2 = 0 \quad x^2.(x^2+1)$

$$\boxed{A_1} = \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \boxed{\frac{2}{15}u^2}$$

c) $\boxed{B_{0x}} = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 2.x^2.x^4 + x^8)dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \frac{\pi.8}{315} = \boxed{0{,}08u^3}$

$0{,}41 = \frac{2}{15}\pi$

3. ARIKETA

a) $g(x) = \ln(1+3x)$, $c = 0$ 4. ordenako polinomioa eta honderraren adierazpena.

$g(0) = 0$

$g'(x) = \frac{1}{1+3x} \Rightarrow g'(0) = 1$

$g''(x) = -1.(1+3x)^{-2} \Rightarrow g''(0) = -1$

$g'''(x) = -1.(-2).(1+3x)^{-3} \Rightarrow g'''(0) = 2$

$g^{IV}(x) = -1.(-2).(-3).(1+3x)^{-4} \Rightarrow g^{IV}(0) = -6$

$g^{V}(x) = -1.(-2).(-3).(-4).(1+3x)^{-5}$

HURBILKETA

$\boxed{P_4(x)} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{\cancel{2}.x^3}{\cancel{3!}.3} - \frac{\cancel{6}.x^4}{\cancel{4!}.4} = \boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}}$

$R_4(x) = \cancel{4!}.(1+3z)^{-5}.\frac{x^5}{\cancel{5!}.5} = \frac{1}{(1+3z)^5}.\frac{x^5}{5}$

$\frac{1}{(1+3z)^5}$ 0 ———— 1/20 → Beherakorra. z=0n baliorik handiena

$\boxed{R_4(x) = \frac{x^5}{5}}$ ERROREA

b) $\ln(23/20) = \ln(1+3x)$

$\ln(1+\frac{3}{20}) = \ln(1+3x) \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{20}}$

$\boxed{P_4(1/20)} = \frac{1}{20} - \frac{(1/20)^2}{2} + \frac{(1/20)^3}{3} - \frac{(1/20)^4}{4} = \boxed{4{,}879.10^{-2}}$

$\boxed{R_4(1/20)} = \frac{(1/20)^5}{5} = \boxed{6{,}25.10^{-8}}$

4. ARIKETA

$\boxed{x=\lambda}$

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&2&b\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$P_A(x)=\begin{vmatrix}3-x&1&1\\0&2-x&b\\0&1&1-x\end{vmatrix}=(3-x).(2-x).(1-x)-b.(3-x)=$$

$$P_A(x)=0 \Leftrightarrow (\cancel{3-x})(2-x).(1-x)=b.(\cancel{3-x}) \Rightarrow \boxed{x=3}$$

$$2-2x-x+x^2=b$$

$$\boxed{x^2-3x+2-b=0}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & +2-b \\ 3 & & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & \boxed{+2-b=0} \end{array} \quad \boxed{b=2}$$

$\downarrow$

x

b=2 denean

$x_{1,2}=3$

$x_3=0$ } -> balio propioak

b) $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

$$P_A(x)=\begin{vmatrix}3-x&1&1\\0&2-x&0\\0&1&1-x\end{vmatrix}=(3-x).(2-x).(1-x)$$

$$P_A(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}x_1=1\\x_2=2\\x_3=3\end{matrix}}$$

$V(1)=\{x\in\mathbb{R}^3 / Ax=x\}$

$$\begin{cases}2x+y+z=0\\y=0\\y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2x\\x=x\\y=0\end{cases}\qquad V(1)=\left\{x\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}\right\}$$

$V(2)=\{x\in\mathbb{R}^3 / Ax=2x\}$

$$\begin{cases}x+y+z=0\\0=0\\y-z=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=2z\\z=z\\y=z\end{cases}}\qquad V(2)=\left\{z\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} / z\in\mathbb{R}\right\}$$

$V(3)=\{x\in\mathbb{R}^3 / Ax=3x\}$

$$\begin{cases}y+z=0\\-y=0\\y-z=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=x\\y=0\\z=0\end{cases}\qquad V(3)=\left\{x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}\right\}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

① Polinomio Karakteristikoa

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & +1 & -1 \\ 0 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & x-4 \end{vmatrix} = (x-a)\cdot(x-3)\cdot(x-4)$$

② Balio propioak

$$\boxed{\begin{matrix} x=a \\ x=+3 \\ x=4 \end{matrix}}$$

$\dashrightarrow$ $\underline{a=3}$ $2\vec{v}(3)$, $1\vec{v}(4)$

$\dashrightarrow$ $\underline{a=4}$ $2\vec{v}(4)$, $1\vec{v}(3)$

$\dashrightarrow$ $\underline{a \neq 4,3}$ $\vec{v}(3)$, $\vec{v}(4)$, $\vec{v}(1)$

③ Azpiespazioak

$V(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ Ax = ax\}$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ (a-3)y - z = 0 \\ (a-4)\cdot z = 0 \end{cases}$$

$\dashrightarrow$ $a \neq 4$ $\boxed{z=0}$ $\boxed{y=0}$ $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dashrightarrow$ $a = 4$ $\boxed{z=z}$ $\boxed{y=z}$ $(a=3)$ $\dashrightarrow$ Geroako utzi

$a \neq 3$

$\boxed{y=y}$ $y=z$

$V(3) = \{x \in \mathbb{R}^3 / \ Ax = 3x\}$

$$\begin{cases} (3-a)x + y - z = 0 \\ -z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{z=0} \quad (3-a)x + y = 0$$

$\dashrightarrow$ $\underline{3=a}$ $x=x$, $y=0$ $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dashrightarrow$ $\underline{3 \neq a}$ $x=x$, $y=-x(3-a)$ $\begin{pmatrix} x \\ x(3-a) \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \end{pmatrix}$

$V(4) = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 4x\}$

$$\begin{cases} (4-a)x + y - z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \boxed{y=z} \dashrightarrow (4-a)x = 0$$

$\dashrightarrow$ $\underline{a=4}$ $x=x$, $\begin{pmatrix} x \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dashrightarrow$ $\underline{a \neq 4}$ $x=0$, $\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ EMAITZA

$\boxed{a=3}$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |P| = 0 \quad A \sim D$$

3 ?? ez (1 0 0) ezta?

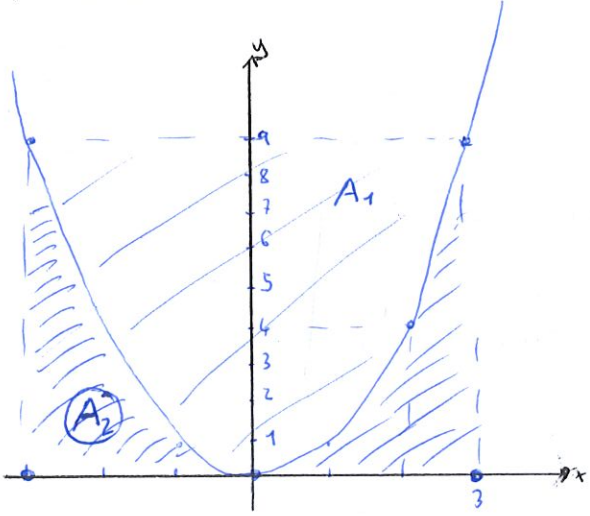
$\boxed{a=4}$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad A \sim D$$

$\boxed{a \neq 4,3}$

$$D = \begin{pmatrix} a & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. ARIKETA



$$B_{oy} = 2\pi \int_{-3}^{3} x\,|g(x)|\,dx =$$

$$B_z = 2\pi \int_{-3}^{3} x \cdot |x^2|\,dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-3}^{3} = 2\pi \left[\left(\frac{3^4}{4}\right) - \left(\frac{3^4}{4}\right)\right]$$

$$B_z = \underset{\downarrow}{2 \cdot}\; 2\pi \int_{0}^{3} x^3\,dx = 4\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{3} = 4\pi\,\frac{3^4}{\cancel{4}} = \boxed{81\pi\,u^3}$$

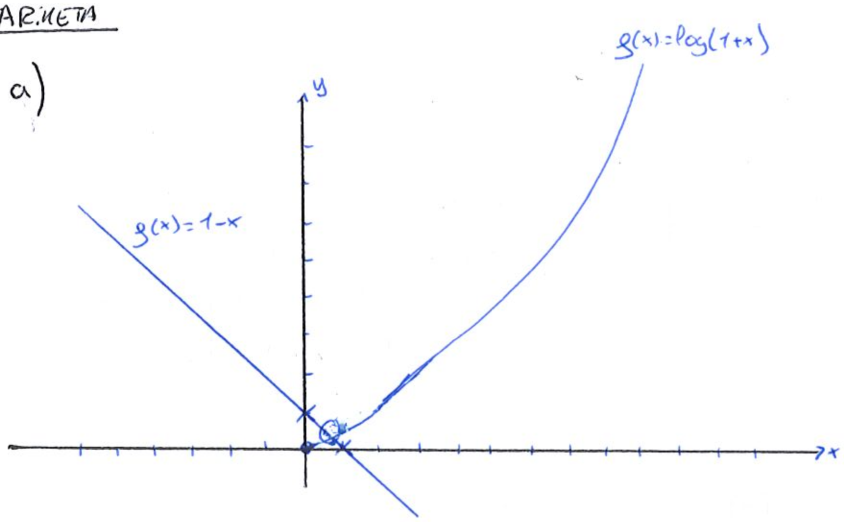
simetrikoak dira.

y = 9 funtzioa

$$B_{oy} = 2 \cdot 2\pi \int_{0}^{3} 9\,dx = 2\pi\left[9x\right]_{0}^{3} = 2\pi \cdot 27 = \boxed{54\pi\,u^3}$$

3. ARIKETA

a)



$$g(x) = \log(1+x) + x - 1$$

[0, 1] tartean funtzioa deribagarria eta jarraia da.

$\boxed{g(0), g(1) < 0}$ Betetzen da.

Newtonen metodoa aplika daiteke.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} + 1$$

$5{,}05672094 \cdot 10^{-1}$

n	C_n	$g(C_n)$	$g'(C_n)$	C_{n+1}
1	0,5	$-9{,}45348919 \cdot 10^{-2}$	1,66666667	0,505672094
2	C_2	$-8{,}50885342 \cdot 10^{-2}$	1,66415523	0,556802261
3	C_3	$-5{,}63854829 \cdot 10^{-4}$	1,64234234	0,557145581
		$-2{,}36993670 \cdot 10^{-8}$	1,64220071	$\boxed{0{,}557145595}$

3. ARIKETA

a) $f(x) = \sqrt[5]{243+x}$ $\quad c=0$. 2. ordenako Taylorren polinomioa.

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(c) + \frac{f'(c).(x-c)^1}{1!} + \frac{f''(c).(x-c)^2}{2!}}_{P_2(x) \Rightarrow \text{HURBILKETA}} + \underbrace{\frac{f^{n+1}(z).(x-c)^{n+1}}{n+1!}}_{\text{ERROREA } R_n(x)}}$$

$f'(x) = \frac{1}{5}.(243+x)^{-\frac{4}{5}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{5.81} = \frac{1}{405}$

$f''(x) = \frac{-4}{25}.(243+x)^{-\frac{9}{5}} \Rightarrow f''(0) = \frac{4}{492075}$

$f(0) = 3$

$f'''(x) = +\frac{4.9}{125}.(243+x)^{-\frac{14}{5}}$

$P_2(x) = 3 + \frac{x}{405} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x^2}{\cancel{2}.492075}$

$$\boxed{P_2(x) = 3 + \frac{x}{405} + \frac{2x^2}{492075}}$$

b) $f(x) = \sqrt[5]{243+x} = \sqrt[5]{244} \Rightarrow \boxed{x=1}$

$\boxed{P_2(1)} = 3 + \frac{1}{405} + \frac{2}{492075} = \boxed{3{,}00247320}$

$R_2(x) = \frac{\cancel{4.9}\ 6}{125.(243+z)^{14/5}} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3!}}$ $\quad \left\{ \begin{matrix} \text{Bornak} \\ \boxed{z=0} \end{matrix} \right\}$ $\quad R_2(x) = \frac{6.x^3}{125.4782969}$

$$\boxed{R_2(1) = \frac{6.}{125.4782469} = 100356076.10^{-8} < 10^{-6} \text{ baino}}$$

4. ARIKETA

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\quad P_A(x) = |A - xI_3| = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 3 \\ 0 & 2-x & 2 \\ 0 & 0 & a-x \end{vmatrix} = (1-x).(2-x).(a-x)$

$P_A(x)=0 \Leftrightarrow (1-x).(2-x).(a-x)=0$

$\boxed{\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = a \end{matrix}}$ Balio propioak $\{a, 1, 2\}$

$V(a) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \, / \, Ax = ax \}$

$\left\{ \begin{matrix} (1-a)x + 3z = 0 \rightarrow z = \cancel{\frac{-(1-a)x}{3}} \\ (2-a)y + 2z = 0 \rightarrow y = \frac{-2z}{(2-a)} \Rightarrow \cancel{y = \frac{\frac{-2.[-(1-a)x]}{3}}{2-a}} = \frac{2.(1-a).x}{3.(2-a)} \\ \cancel{0=0} \end{matrix} \right.$

$\begin{pmatrix} x \\ \frac{2.(1-a)x}{3.(2-a)} \\ -\frac{(1-a).x}{3} \end{pmatrix}$

$$\boxed{z = -\frac{(2-a)y}{2}}$$

$x = \frac{3z}{(1-a)} = -\frac{3}{2(1-a)}(2-a)y$

$a \neq 0$

$y.\begin{pmatrix} -\frac{3(2-a)}{2(1-a)} \\ 1 \\ -\frac{(2-a)}{2} \end{pmatrix}$

$V(1) = \{ x \in \mathbb{R}^3 / Ax = x \}$

$$\begin{cases} 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ (a-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=0} \quad \boxed{y=0} \quad \rightarrow \boxed{\begin{matrix} a=1 \\ z=0 \end{matrix}}$$

A Kasua

$z=0$
$y=0$ $\dashrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z = z$
x B KASUA bektore?

$\boxed{a=1}$ $z=0$ $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Bektore bakarra.

2. Kasu daude bicla bakarra?

$V(2) = \{ x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 2x \}$

$$\begin{cases} -x + 3z = 0 \dashrightarrow x = 0 \\ 2z = 0 \dashrightarrow z = 0 \\ (a-2)z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

A KASUA

$z=0$
$x=0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

B KASUA

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ONDORIOA

$A \nsim D$ $\boxed{\begin{matrix} a=2 \\ a=1 \end{matrix}}$ denean

$a=2$ $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{|P| = 0}}$

$a=1$ $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\underline{|P| = 0}$

$A \sim D$ $\begin{matrix} a \neq 2 \\ a \neq 1 \end{matrix}$ denean

$D = \begin{pmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -\frac{3.(2-a)}{2.(1-a)} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-2(2-a)}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $|P| \neq 0$

4. ARIKETA

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ 3x + y - mz = 1 \end{cases} \dashrightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 \cancel{-1} \cancel{+3} + 3m \cancel{-2} + m$$

$$|A| = m \cdot (-2m + 4)$$

$$|A| = 0 \iff 2m \cdot (4 - m) = 0 \begin{matrix} \nearrow \boxed{m = 0} \\ \searrow \boxed{m = 4} \end{matrix}$$

1. KASUA

m=0 denean

$$\left(\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right)$$

A-ren heina aztertuko dugu:

- $|A| = 0$ $\quad hein(A) \leq 2$ printzipioz. $\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ beraz, $\boxed{hein(A) = 2}$

A|B-ren heina aztertuko dugu:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cancel{1} \quad -1 \neq 0 \text{ beraz } \boxed{hein(A|B) = 3}$$

$hein(A) \neq hein(A|B)$

S.Be

?

2. Kasua

m=4 denean

$$\left(\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right)$$

A-ren heina aztertuko dugu

- $|A| = 0$ $\boxed{hein(A) = 2}$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$

A|B-ren heina

- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{1} - 16 \cancel{-1} - 1 + 4 + 4 \neq 0$

$hein(A|B) = 3$

S.Be

zerbait gaizki hasieran?

3. Kasua

m≠0 eta m≠4 denean

- $|A| \neq 0 \rightarrow hein(A) = 3$
- $hein(A|B) = 3$

$\Big\} \rightarrow n = 3 \Rightarrow$ SBDet.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-m^2 - 1 \cancel{+1} + m \cancel{-1} + m}{|A|} = \boxed{\frac{-(m^2 - 2m + 1)}{2m \cdot (4 - m)}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2m \cancel{-1} + 3 \cancel{+3} \cancel{-2} + m}{|A|} = \boxed{\frac{-m + 3}{2m(4 - m)}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2m + 1 \cancel{+3} - 3m \cancel{-2} \cancel{-1}}{|A|} = \boxed{\frac{-m + 1}{2m \cdot (4 - m)}}$$

2012 / 2013

$y'' + y' = e^x + x^2$ → Ec. difer. lineal con coef. constantes

$$y(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solución} \\ \text{homogéneo}}}{yh(x)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solución} \\ \text{particular}}}{yp(x)}$$

~~$R(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$~~

a) $yh(x)$?

$y'' + y' = 0 \longrightarrow R(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$

$\lambda(\lambda+1) = 0$ → $\boxed{\lambda = 0}$; $\lambda + 1 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = +1}$

λ-s reales y distintos ; por tanto,

$$yh(x) = c_1 \cdot e^{0x} + c_2 \cdot e^{-1x} \Rightarrow \boxed{yh(x) = c_1 + c_2 \cdot e^{-x}}$$ Homogéneo

b) $yp(x)$?

Kasuk:

1º $f(x) = P_n(x)$

2º $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$

3º $f(x) = P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x$

4º $f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta(x)]$

$y'' + y' = e^x + x^2$ → NO ES NINGUNO DE ESTOS CASOS
Por eso los hacemos por separado

1) $y'' + y' = e^x$ (2º) $e^x \cdot 1$

$\alpha = 1 \quad \beta = 0 \quad (\cos 0 = 1) \longrightarrow \lambda = \alpha + \beta i = 1 + 0i = 1$

$R(1) \neq 0 \rightarrow S = 0$ (caso a) $\longrightarrow y_p = x^S \cdot e^{\alpha x} [\bar{P}_k(x) \cdot \cos\beta x + \bar{Q}_k(x) \cdot \sin\beta(x)]$

$$y_p = x^0 \cdot e^{1 \cdot x} \cdot \underset{\substack{\parallel \\ \text{grado} \\ \text{mínimo}}}{\bar{P}_k(x)} \Rightarrow e^x \cdot A$$ — konstantea

2) $y'' + y' = x^2$ (1º) polinomio

$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \longrightarrow \lambda = 0 + 0i = 0$

$R(0) = 0 \rightarrow S = 1$ (zenbatetan errepikatzen) $\rightarrow y_p = x^1 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot \underbrace{\bar{P}_k(x)}_{2} = x^1 \cdot (Bx^2 + Cx + D)$

ii) Kondizioak :

① f, f' ta f'' jarraiek die I interbalo guztiñ.
$\mathbb{R}$ guztiñ jarraiek

$$\begin{cases} f = x^3 + 3x + 7 \\ f' = 3x^2 + 3 \\ f'' = 6x \end{cases}$$

② Grafikoi beitu ikusi deiken guzxi gara beherako interbaloa [-1,2] dala, adibidez. Interbaloa ondo aukerauta egnga, baldinda $f(a) \cdot f(b) < 0$ bada. → $f(-1) \cdot f(2) < 0$

$(-3) \cdot (7) = -21 < 0$ ✓ Hau ezpada beteten, interbaloa zabaldu ta baize konprobau.

③ $f'(x)$ ta $f''(x)$-n zeinue ezta aldatzen I guztiñ zeha $I = [-1,2]$

$f'(x) = 3x^2 + 3 \longrightarrow f'(-1) = + \quad f'(2) = +$

$f''(x) = 6x \longrightarrow f''(-1) = + \quad f''(2) = +$

(Pasau deike $f'(x)$ I guztiñ ⊕ dala ta $f''(x)$ I guztiñ ⊖ dala eztaukebe zeron iguala (zon).

3 kondizioak beteteie. Oaiñ Newton ingoden:

FCn	F'Cn	$Cn - \frac{FCn}{F'Cn}$
a	b	c
d	...	...

Cn = tartek gehittu ta zati bi

Cn funtzion ta deribatun ordezkau.

c ordezkau funtzion ta deribatun, ta d lortu.

$Cn = \frac{-1+2}{2} = 1'5$

FCn	F'Cn	$Cn - \frac{FCn}{F'Cn}$
14'875	9'75	-0'0256
6'923	3'0019	-2'3317
-12'673	19'3104	-1'6754
-2'7292	11'4208	-1'4364
-0'273	9'1897	-1'4066
-3'621·10[illegible]	8'9355	-1'4061
8'2909·10[illegible]	-2'93135	-1'4058

3. zifra dezimalak aurrekoan koinziditzean momentun bukatuko deu algoritmoa.

$\longrightarrow$ ⊖1'406 ?

1'406

4. ariketa

i) Izan bedi $f(x) = \sqrt[4]{81+x}$ funtzioa. Kalkulatu $c = 0$ puntuan zentraturiko Taylorren 3. ordenako garapena eta eman baita hondarraren adierazpena.

ii) Erabili aurreko atala $\sqrt[4]{82}$ -ren hurbilketa lortzeko eta eman errorearen estimazioa.

i)

Formula:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \underbrace{\frac{f^{IV}(c)}{4!}(x-c)^4}_{Rn(x)}$$

$$f(0) = f(0) + \frac{f'(0)\,x}{1} + \frac{f''(0)\,x^2}{2!} + \frac{f'''(0)\,x^3}{3!} + \underbrace{\frac{f^{IV}(0)\,x^4}{4!}}_{Rn(x)}$$

$f(0) = \sqrt[4]{81} = 81^{-1/4} = 3$

$f'(0) = [(81)^{1/4}]' = 1/4 \cdot 81^{-3/4} = 9'25 \cdot 10^{-3}$

$f''(0) = 1/4 \cdot (-3/4) \cdot 81^{-7/4} = -8'57 \cdot 10^{-5}$

$f'''(0) = 1/4 \cdot (-3/4)(-7/4) \cdot 81^{-11/4} = 1'85 \cdot 10^{-6}$

$Rn \rightarrow f^{IV}(0) = 1/4\ (-3/4)(-7/4)(-11/4)\ 81^{-15/4} \Rightarrow R_3(x)$

$$f(0) = 3 + 9'25 \cdot 10^{-3}x - \frac{8'57 \cdot 10^{-5}x^2}{2!} + \frac{1'85 \cdot 10^{-6}x^3}{3!} + \overbrace{\frac{-0'9(81+c)(x-0)^4}{4!}}^{R_3(x)}$$

$$f(0) = 3 + 9'25 \cdot 10^{-3}x - \frac{8'57 \cdot 10^{-5}}{2}x^2 + \frac{1'85 \cdot 10^{-6}x^3}{6} - \frac{0'9(81+c)}{24}x^4$$

Con $c \in (x, 0)$

ii) $\sqrt[4]{82} = \sqrt[4]{81+x}$ → Despejau x ta, geo ordezkatu Taylor juztik (hondarran ez! Hondarra c-n menpe dauelako.

$\sqrt[4]{82} = \sqrt[4]{81+x}$

$82 = 81 + x$

$x = 82 - 81$

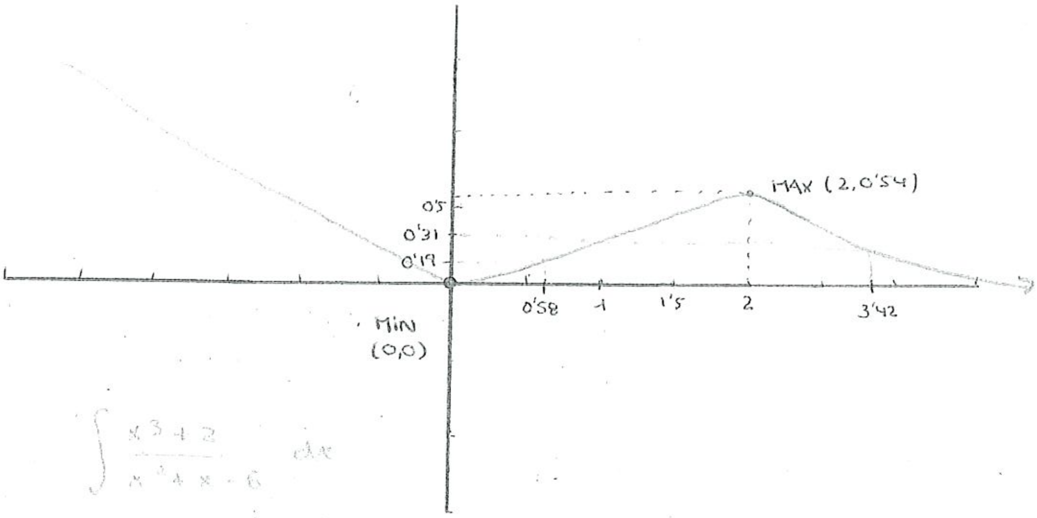
$\boxed{x = 1}$

$$f(1) \simeq 3 + 9'25 \cdot 10^{-3}(1) - \frac{8'57 \cdot 10^{-5}}{2}(1)^2 + \frac{1'85 \cdot 10^{-6}(1)^3}{6}$$

$f(1) \simeq 3'009207458$

$\sqrt[4]{82} = 3'009216698$

$R = \sqrt[4]{82} - f(1) = 0'00000923967$



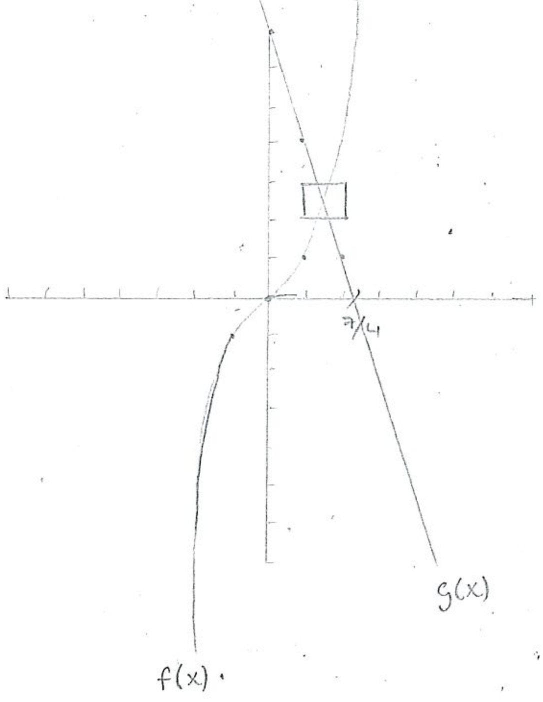
2. ariketa $\int \frac{x^3+2}{x^2+x-6}\,dx$

3. ariketa

i) Frogatu $x^3+3x-7=0$ ekuazioak soluzio bakarra duela.

ii) Hurbildu soluzio hori milareraino Newtonen metodoa erabilita.

i) Grafikoki marraztukoen (beti bi marra): $\underbrace{x^3}_{f(x)} = \underbrace{7-3x}_{g(x)}$



	x^3	$7-3x$
x 1]	1	4
x 2]	8	1
x -1]	-1	10
x = 0]	0	7
x = -2]	-8	13
x = 7/4]		0

A PARTIR DEL PUNTO DE CORTE CUANDO X TIENDE A INFINITO, X^3 SIEMPRE VA POR ENCIMA DE LA RECTA 7-3X ; Y CUANDO VAMOS A PARTIR DEL PUNTO DE CORTE HACIA -∞, x^3 SIEMPRE ESTÁ POR DEBAJO DE 7-3x.

POR TANTO, AL PARTIR DEL PUNTO DE CORTE NUNCA SE VUELVEN A CORTAR CON LO CUAL ESA ECUACIÓN SÓLO TIENE UNA ECUACIÓN.

- MUTURRAK:

$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ $\qquad f'(x) = \frac{u}{v} = \frac{u' \cdot v - uv'}{v^2}$

	u	v
(x)	x^2	e^x
(x)	$2x$	e^x

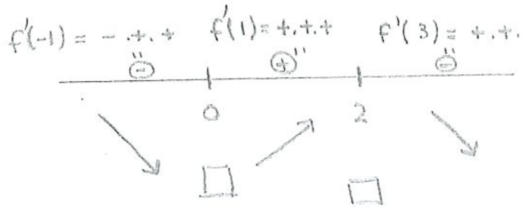
$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(2x - x^2)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{2x - x^2}{e^x} = \frac{x(2-x)}{e^x}$

$f'(x) = 0$ izan bar da $\rightarrow \frac{x(2-x)}{e^x} = 0$

$\downarrow$

$x(2-x)(e^{-x}) = 0 \rightarrow e^x = 0$ ∄ ; $\rightarrow x(2-x) = 0$

$\hookrightarrow x(2-x) = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$; $\rightarrow 2-x = 0 \rightarrow \boxed{x=2}$



$x = 0$ denen, f-k minimo lokala izango da, ta bere balorea $f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \rightarrow (0,0)$ izango.

$x = 2$ denen f-k maximo lokala izango da, ta bere balorea $f(2) = 2^2\ e^{-2} = 0'54 \rightarrow (2, 0'54)$ izango.

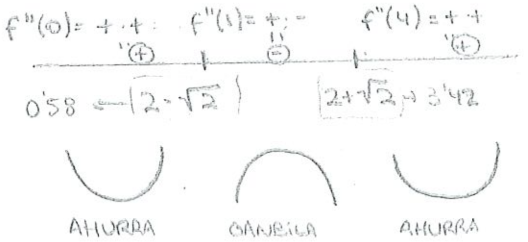
- INFLEXIO PUNTUK:

Kondizioa: $f''(0)$

$f''(x) = e^{-x}(-1)(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = -e^{-x} \cdot x(2-x) = e^{-x}(-2x + x^2) + e^{-x}(2-2x) =$

$= e^{-x}(-2x + x^2 + 2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \rightarrow e^{-x} = 0$ ∄ ; $\rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} \rightarrow x = \boxed{2 + \sqrt{2}}$; $\rightarrow x = \boxed{2 - \sqrt{2}}$



$x = 2 - \sqrt{2}$ denen, f-k inflexio puntu bat euko da ta bere balorea $f(2-\sqrt{2}) = (2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{-(2-\sqrt{2})} = 0'19 \rightarrow (2-\sqrt{2}, 0'19)$ izango

$x = 2 + \sqrt{2}$ denen, f-k inflexio puntu bat euko da ta bere balorea $f(2+\sqrt{2}) = (2+\sqrt{2})^2 \cdot e^{-(2+\sqrt{2})} = 0'38 \rightarrow (2+\sqrt{2}, 0'38)$ izango

f ahurra izango da $(-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, \infty)$ tartean zehar.

f ganbila izango da $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ tartean zehar.

~~[illegible]~~

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \qquad (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

$$1-\lambda = 0 \rightarrow \underline{\lambda = 1}$$
$$3-\lambda = 0 \rightarrow \underline{\lambda = 3}$$
$$5-\lambda = 0 \rightarrow \underline{\lambda = 5}$$

Balore propioak

Bektore propio asko dauzkte balore bakoitzek:

$$\underline{S = 1} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 / (A - 1I)\, v = \bar{0}, \quad v \neq \bar{0} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 1 \\ 0 & 3-1 & 1 \\ 0 & 0 & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2V_2 + V_3 = 0 \longrightarrow 2V_2 = 0 \rightarrow \underline{V_2 = 0} \\ \cancel{2V_2 + V_3 = 0} \\ 4V_3 = 0 \longrightarrow \underline{V_3 = 0} \end{cases}$$

$$S(1) = (V_1, 0, 0)$$
$$\underline{S(1) = (1, 0, 0)}$$

$$\underline{S = 3} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 / (A - 3I)\, v = \bar{0} \,/\, \bar{v} \neq \bar{0} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-3 & 2 & 1 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 5-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left. \begin{array}{c} -2V_1 + 2V_2 + V_3 = 0 \\ V_3 = 0 \\ 2V_3 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2V_1 + 2V_2 = 0 \rightarrow 2V_1 = 2V_2 \\ \qquad \underline{\underline{V_1 = V_2}} \\ \underline{V_3 = 0} \end{array}$$

$$S(3) = (V_1, V_1, 0)$$
$$\underline{S(3) = (1, 1, 0)}$$

$\underline{S = 5} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 / (A - 5I)v = \bar{0} \,,\ v \neq 0 \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1-5 & 2 & 1 \\ 0 & 3-5 & 1 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -4V_1 + 2V_2 + V_3 &= 0 \\ -2V_2 + V_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow -4V_1 + 2V_2 + 2V_2 = 0 \rightarrow -4V_1 + 4V_2 = 0 \quad 4V_1 = 4V_2 \quad \boxed{V_1 = V_2} \\ &\rightarrow 2V_2 = V_3 \rightarrow \boxed{V_3 = 2V_2} \end{aligned}$$

$S(5) = (V_1, V_1, 2V_1)$

$\hookrightarrow (1, 1, 2)$

$\underline{\text{Diagonalizatzea}}$: $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

$$\underset{\underline{D}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{\underline{P^{-1}}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}} \underset{\underline{A}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \underset{\underline{P}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

2012 - 2013 (5.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ ; \quad A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(a-\lambda) = 0$$

$(1-\lambda) \Rightarrow \lambda = 1$

$(2-\lambda) \Rightarrow \lambda = 2$

$(a-\lambda) \Rightarrow \lambda = a$

1) $a \neq 1 \wedge a \neq 2 \rightarrow$ 3 balore real desberdin $\rightarrow$ A diagonalgarria.

2) $a = 1$

$\hookrightarrow \lambda_1 = \textcircled{1}$ (doblea) $\quad \lambda_2 = 2$ ← [illegible]

Dimentsioa ta errepikatzea aldiz bat badatoz, diagonalgarrie izango.

$$\begin{vmatrix} \cancel{0} & 2 & 6 \\ \cancel{0} & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{a} \end{vmatrix} \qquad 6 - 6 = 0 \qquad \underline{\underline{rg = 1}}$$

$\dim = 3 - 1 = \boxed{2} \rightarrow$ 2 da ta 2 aldiz errepikatzea. Beraz, $a = 1$ denean diagonalg.

- $S(5) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 / (A - 5I)\,v = \bar{0} \,,\ v \neq 0 \right\}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} -4v_1 + 2v_2 + v_3 &= 0 \\ -2v_2 + v_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &-4v_1 + 2v_2 + 2v_2 = 0 \rightarrow -4v_1 + 4v_2 = 0 \rightarrow \boxed{v_2 = v_1} \\ &v_3 = 2v_2 \rightarrow \boxed{v_3 = 2v_1} \end{aligned}$$

$$S(5) = \left\{ (v_1, v_1, 2v_1) \in \mathbb{R}^3 / v \neq 0 \right\} \longrightarrow 1, 1, 2$$

2. Proceso de diagonalización

Diagonalizar una matriz $A \in M_n$ es hallar una matriz diagonal semejante a ella de tal manera que se cumpla $\underset{\text{matriz diagonal}}{D} = P^{-1} . \underset{\text{la que nos dan al principio}}{A} . P$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \boxed{S_1} & \boxed{S_2} & \boxed{S_3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\overset{D}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} = \overset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}} \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \overset{P}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

3. Utilidades de la diagonalización

La diagonalización tiene múltiples aplicaciones. Una de ellas es la potenciación de matrices.

A^n?

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \rightarrow P \cdot D \cdot P^{-1} = \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I} \cdot A \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I} \rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\rightarrow \quad A^n = (P\cdot D\cdot P^{-1})^n = (P\cdot D\cdot \cancel{P^{-1})\cdot(P\cdot D\cdot P^{-1})\cdot \ldots (P\cdot D\cdot P^{-1}})$$

$$= P\cdot D^n\cdot P^{-1} = P\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ 0 & \ddots & \lambda_p^n \end{pmatrix}\cdot P^{-1}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{11.000}\ ?$$

$$A^{11000} = P\cdot D^{11000}\cdot P^{-1}$$

$$A^{11000} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^{11000} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{11000} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{11000} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

4. Cuándo una matriz es diagonalizable

Una matriz es diagonalizable cuando:

a) Si todos sus valores propios son reales y distintos

b) Si alguno de ellos se repite, la dimensión del conjunto de vectores propios asociados al valor propio que se repite tiene que ser igual al número de veces que se repite . dicho valor propio.

Fórmula: $\dim S(\lambda) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{dimensión} \\ \text{de la matriz}}}{n} - rg\,(A - \lambda I)$

Ejercicio 5 2012 - 2013

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

i- Decir cuando es diagonalizable la matriz A, en función del parámetro a.

ii- Si a = I, calcular la matriz P, tal que $P^{-1}.A.P$ sea una matriz diagonal.

i) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$(1-\lambda)(2-\lambda)(a-\lambda) = 0$

$1-\lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

$2-\lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 2}$

$a-\lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = a}$

Diagonalizazioa. $\boxed{D = P^{-1} \cdot A \cdot P}$

A → Beak ematein matrizea (ariketak).

D → matrize diagonala.

P → Bektore propiok (aurrez aurkitutakoak) ⟶ $P = \begin{pmatrix} S_1 & S_3 & S_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{D}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}} \cdot \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \cdot \underset{P}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Matrizen potentziazioa: A^{11000}, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ izanik...

$$\boxed{A^{11000} = P \cdot D^{11000} \cdot P^{-1}}$$

$$A^{11000} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^{11000} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{11000} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{11000} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Matrize bat diagonalgarria izango da, baldintzak:

- Balore propio guztik diferente eta errealak badie.
- Batenbat errepikatuz gero, errepikatzean maiztasuna ta balore propiokin asoziatutako bektoren dimentsioa bat badatoz.

↳ Dimentsioa neurtzeko formula: $\boxed{\dim S(\lambda) = n - rg\ (A - \lambda I)}$

n → matrizen dimentsioa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Esan noiz den matrizea diagonalgarria.

Lehenengo, $A - |\lambda I|$ ingodeu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(a-\lambda) = 0$$

Balore propiok: $\boxed{\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = a \end{matrix}}$

Beraz, matrize hau diagonalgarria izango da: $a \neq 1$ eta $a \neq 2$ denean.

$a = 1$ bada: $\boxed{\begin{cases} \lambda_1 = 1 & \text{(bikoitza)} \\ \lambda_2 = 2 & \text{(xinplea)} \end{cases}}$

$$\dim = 3 - rg(A - 1I) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 6 \\ 0 & 2-1 & 3 \\ 0 & 0 & \underset{0}{a-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{0} & 2 & 6 \\ \cancel{0} & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \quad rg = 1$$

6-6 = 0

$\dim = 3 - 1 = \underline{2}$ 2 aldiz errepikatzea ta dimentsioa 2 da. Beraz, diagonalgarria da $\lambda = 1$ denean.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \longrightarrow a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + b \cdot f \cdot g$$

Balore propiok $\Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Balore propio bakoitzek infinitu bektore propio daukake. Hauek aurkitzeko, balore propiok separatun hartukotou, λ partez balore hoi emonez;

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{S(1)}{\lambda = 1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$A \times \mathbb{V} = \bar{0}$ emonbarda: beraz, $\mathbb{V}$ bektorekin biderkatu ta hau zeroa berdinduko deu $\mathbb{V} \neq \bar{0}$ izanbarda derior!

$(A - 1I) \cdot \mathbb{V} = \bar{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Biderketa} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0V_1 + 2V_2 + 1V_3 = 0 \\ 0V_1 + 2V_2 + 1V_3 = 0 \\ 0V_1 + 0V_2 + 4V_3 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2V_2 + V_3 = 0 \\ 4V_3 = 0 \end{array}$$

Beraz, $V_3 = 0 \longrightarrow 2V_2 + 0 = 0 \rightarrow V_2 = 0$

V_1 eztanez agertze, edozein balio izangoda (zero ez, ze kasu honten V_2 ta V_3 0 die ta ezinda zero izan).

$S(1)$, beraz, $\{(V_1, 0, 0)\} \rightarrow (1, 0, 0)$

$(A - 3I) \cdot \mathbb{V} = \bar{0}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2V_1 + 2V_2 + 1V_3 = 0 \\ 0V_1 + 0V_2 + 1V_3 = 0 \\ 0V_1 + 0V_2 + 2V_3 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2V_1 + 2V_2 + 1V_3 = 0 \\ 1V_3 = 0 \\ 2V_3 = 0 \end{array}$$

Beraz, $V_3 = 0$ eta $2V_1 = 2V_2 \Rightarrow V_1 = V_2$

$V_1 \neq 0$

$S(3)$: $\{(V_1, V_1, 0)\} \longrightarrow (1, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4V_1 + 2V_2 + V_3 = 0 \Rightarrow -4V_1 + 4V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = V_2 \\ -2V_2 + V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = 2V_2 \end{array} \right.$$

$V_1 = V_2 = 1/2\, V_3$

$S(5)$: $\{(V_1, V_1, 2V_1)\} \longrightarrow (1, 1, 2)$

A

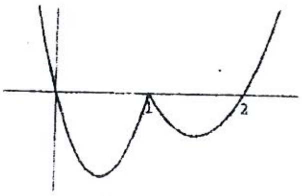
Test. Matemáticas. Biología. Curso 1999-2000 Test 1. Modelo A

---

1. La ecuación de la recta tangente a $y = \log x$ en el punto $x = 1$ es:
A) $y = x - 1$. B) $y - 1 = x$. C) No existe.

2. La derivada de orden 100 de $f(x) = x \log x$ es:
A) $-98!x^{-99}$. B) $99!x^{-99}$. C) $98!x^{-99}$.

3. En el siguiente dibujo aparece la gráfica de la **derivada** de la función f.



Entonces la función f tiene:
A) un máximo en $x = 1$. B) un mínimo en $x = 2$. C) un máximo en $x = 2$.

4. Una función derivable 15 veces tiene el siguiente desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$:

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^3}{5} + \frac{x^{13}}{5} - \frac{x^{14}}{15!} + R_{15}(x)$$

La derivada de orden 14 en $x = 0$ es:
A) $-\frac{1}{15}$. B) $-\frac{1}{15!}$. C) $\frac{1}{14!}$.

5. De entre los números reales que satisfacen que su triplo es igual a su cubo más uno, se verifica que en el intervalo $[0, 3]$ están situados:
A) ninguno. B) uno. C) dos.

NO

6. Dada la función $F(x) = \int_1^x \log t \, dt$ se verifica que $F'(e)$ es igual a:
A) e^{-1} B) 1 C) 0

7. La integral $\int \arctan x \, dx$ es igual a:
A) $\frac{1}{1+x^2} + k$ B) $x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + k$. C) $\frac{1}{2}(\arctan x)^2 + k$.

8. La integral definida

$$\int_1^5 (3 + \cos^2(e^x))\, dx$$

A) es mayor que 12. B) es igual a 0. C) es menor que 3.

NO

9. Si la curva $y = f(x)$, para $x \in [0, 1]$, gira alrededor del eje OX, entonces el área de la superficie del cuerpo generado es igual a:.
A) $2\pi \int_0^1 |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ B) $\pi \int_0^1 |f(x)|^2\, dx$. C) $2\pi \int_0^1 |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

10. El volumen del cuerpo generado por $f(x) = xe^x$, al girar alrededor del eje OX, en el intervalo $[0, 1]$ es igual a:
A) $\pi(\frac{e^2+1}{4})$. B) $\pi(\frac{e^2-1}{2})$. C) $\pi(\frac{e^2-1}{4})$.

Test. Matemáticas. Biología. Curso 1999-2000

Test 1. Modelo A

---

1. La función f es tal que $f(1) = 2$ y $f'(1) = 4$. Si $g(x) = e^x$, entonces se tiene que $(g \circ f)'(1)$ es igual a:
[✓ A)] $4e^2$. B) 8. C) $2e^4$.

2. La función $f(x) = x^2 e^{-2x}$ tiene:
A) un mínimo en $x = 1$ B) un maxímo en $x = 0$ C) una asíntota horizontal en $+\infty$.

2'. La función $f(x) = x^2 e^{-2x}$ tiene:
A) dos puntos de inflexión B) una asíntota vertical C) una asíntota horizontal en $-\infty$.

2''. La función $f(x) = x^2 e^{-2x}$ es:
A) decreciente en $(-\infty, 1)$ B) creciente en $[0, 1]$ C) creciente en $(0, 2)$

3. En el punto $x = 0$, la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^3 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\log(1+x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

A) no es continua. [✓ B)] es continua pero no es derivable. C) es derivable.

4. La derivada de orden 98 de la función $f(x) = \sin^2 x$, en el punto $x = \pi/2$ es:
A) 2^{97}. [✓ B)] -2^{97}. C) 0.

4'. De una función derivable veinte veces en la retca real se sabe que su desarrollo de Taylor de orden siete centrado en 0 es:

$$f(x) = 3 - x + \frac{x^4}{10} - \frac{x^7}{120} + R_7(x)$$

donde $R_7(x)$ es el resto. Entonces se puede afirmar que la derivada septima de f en el punto $x = 0$ vale:
A) 0. B) 42. [✓ C)] Ninguna de las anteriores

5. El mínimo y el máximo de la función $f(x) = 1 + x^3 + x^5$ son, respectivamente:
A) 2 y 0. B) 1 y 2. [✓ C)] Ninguna de las anteriores.

6. En el desarrollo de Taylor, centrado en 0, de la función $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$, el coeficiente de x^4 es:
A) $1/4!$. B) $-1/4!$. [✓ C)] 1.

7. Si la curva $y = f(x)$, para $x \in [0, 1]$, gira alrededor del eje de abscisas, entonces el volumen del cuerpo generado es igual a:
A) $2\pi \int_0^1 [f(x)]^2\, dx$ [✓ B)] $\pi \int_0^1 [f(x)]^2\, dx$. C) $2\pi \int_0^1 |x|\, [f(x)]^2\, dx$.

8. El área de la figura encerrada por $y = \sin x$, $y = 0$, para $x \in [0, 2\pi]$ es igual a:
A) 0 [✓ B)] 4 C) 2π

Test. Matemáticas. Biología. Curso 1999-2000

9. De los cilindros rectos que se pueden inscribir en una esfera, el de volumen máximo tiene un volumen igual a: A) un tercio del volumen de la esfera B) un octavo del volumen de la esfera [✓ C)] ninguna de las anteriores

10. La parte racional de la integral

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

es igual salvo constantes a

[✓ A)] $\frac{x}{(x^2+1)}$ B) $\frac{1}{(x^2+1)^2}$ C) $\frac{1}{(x^2+1)^3}$

10′. La primitiva que sigue

$$\int x^2 \ln(x)\,dx$$

es igual salvo constantes a

A) $x^2\ln(x) - x\ln(x) + x$ [✓ B)] $\frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}$ C) $\frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{3}$

Algunos problemas de optimización:

1. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima entre los que tienen dos vértices en el eje OX y los otros dos en la parte superior de la curva $y = 12 - x^2$.

2. La forma de una ventana es rectangular y con un semicírculo en la parte superior. Por propiedades de los cristales, el del semicírculo deja pasar la mitad de luz que el del rectángulo. Si se supone que el perímetro de la ventana es fijo, ¿ qué proporciones dejan pasar más luz?

3. Determinar el punto situado sobre la curva $y = \sqrt{x}$ más cercano al punto $(2, 0)$.

Matemáticas.

Primero de Biología. Enero 2000.

(Tres puntos)

Ejercicio 1.

a) Estudiar el crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, asíntotas y puntos de corte con los ejes de la siguiente función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

b) Escribir la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abcisa $x = 3$. Representar la gráfica de f y la de su recta tangente en el punto $x = 3$.

(Tres puntos)

Ejercicio 2.

a) Calcular el volumen del sólido engendrado al girar, alrededor del eje OX, la región encerrada por la curva $y = x\sqrt{\cos x}$ y el eje OX con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

b) Calcular h para que el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(0, h)$ engendre, al girar en torno al eje Konocrena OX, un sólido con el mismo volumen que el del apartado a).

- -

(Dos puntos)

Ejercicio 3.

a) Dada la ecuación $\cos 3x = 4x$, comprobar que existe una única raíz positiva.

b) Aproximar la raíz anterior con 3 cifras decimales exactas.

(Dos puntos)

Ejercicio 3′.

a) Escribir el desarrollo de Taylor de orden n, centrado en $x = 0$ de la función $f(x) = \ln(1 + x)$, dando la expresión del resto.

b) Con ayuda de uno de los desarrollos del apartado anterior, calcular $\ln(\frac{21}{20})$ con error menor que 10^{-3}.

- -

(Dos puntos)

Ejercicio 4.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determinar, según los valores de a, si A tiene dos valores propios reales distintos, un valor propio doble o ningún valor propio real.

b) Si $a = 6$ ¿se puede diagonalizar A? En caso afirmativo encontrar D diagonal y P tal que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D \, .$$

(Dos puntos)

Ejercicio 4′.

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$\begin{cases} x + y + mz &= n \\ 3x - y - 2z &= 0 \\ 5x + y &= 2n. \end{cases}$$

a) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de m y n.

b) Encontrar las soluciones en todos los casos en que sea compatible indeterminado.

Nota: *Los ejercicios 1 y 2 son obligatorios. Además debe contestarse uno entre el 3 y el 3′, y otro entre el 4 y el 4′.*

Matemáticas.

Primero de Biología. Septiembre 2000.

Ejercicio 1.

(Tres puntos)

a) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x - 3$ demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

b) Representar la gráfica $y = f(x)$.

c) Encontrar un valor de A para el cual la ecuación $f(x) = A$ tenga tres soluciones y otro valor para el que dicha ecuación tenga dos soluciones.

Ejercicio 2. $\int$ integral

(Tres puntos)

INTEGRACIÓN

a) Hallar la primitiva de la función $h(x) = \dfrac{2x+10}{x^2+3x+2}$.

b) Dibujar un esquema del recinto del plano limitado por la gráfica de la función $h(x)$, la recta de ecuación $y = 2x$, el eje OX y la recta $x = 3$, y hallar el área de dicho recinto.

– – – – – – – – – – – – – –

Ejercicio 3.

(Dos puntos)

Dada la aplicación lineal T de R^2 en R^2 definida por

$$T(x, y) = (x + 2y, -y) .$$

a) Escribir la matriz A asociada a la aplicación T.

b) Encontrar los valores propios y vectores propios de A.

c) Calcular una matriz inversible P tal que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P \quad \text{sea diagonal.}$$

d) Calcular A^n para todo n natural.

Ejercicio 3′.

(Dos puntos)

a) Estudiar la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales definido por:

$$\begin{cases} mx - y + 2z &= -3 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 2x + y + 3z &= n \end{cases}$$

en función de los valores de m y n.

b) Resolver en los casos en que sea compatible indeterminado.

– – – – – – – – – – – – –

Ejercicio 4.

(Dos puntos)

Un alambre de 10m. de longitud se corta en dos trozos; con uno de ellos se hace una circunferencia y con el otro un cuadrado.

¿Cuál es el tamaño de los trozos que hace mínima la suma de las áreas encerradas?

Ejercicio 4′.

(Dos puntos)

a) Escribir el desarrollo de Taylor de orden tres, centrado en $x = 0$, para la función

$$f(x) = \sqrt[3]{1000 + x}$$

indicando la forma del resto.

b) Mediante la utilización del desarrollo obtenido en a) calcular, de forma aproximada, la raíz cúbica de 1001 dando, razonadamente, una estimación del error cometido.

Nota: *Los ejercicios 1 y 2 son obligatorios. Además debe contestarse uno entre el 3 y el 3′, y otro entre el 4 y el 4′.*

TODO

Test. Matemáticas: Biología. Curso 2000-2001 Test 1. Modelo H

---

1. Una función f es tal que $f(1) = 3$ y $f'(1) = 2$. Si $g(x) = e^x$, entonces se tiene que $(g \circ f)'(1)$ es igual a:
A) $3e^2$. B) 16. C) $2e^3$.

2. De los rectángulos que se pueden inscribir en una circunferencia de radio r, el de área máxima tiene un área igual a:
A) $2r^2$. B) πr^2. C) r^2.

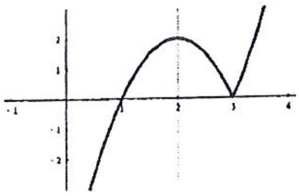
3. La ecuación de la recta tangente a $y = \sqrt{1 + x - x^2}$ en el punto $x = 1$ es:
A) $y = x - 3$. B) $y = (3 - x)/2$. C) No existe.

4. Un desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$, que empieza

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

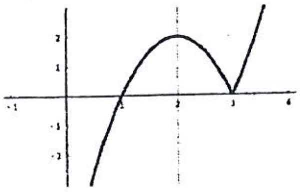
corresponde a la función:
A) e^{-x}. B) $\log(1 + x)$. C) ninguno de los anteriores.

5. En el siguiente dibujo aparece la gráfica de la **derivada** de una función f,



Entonces la **función** f tiene:
A) un máximo en $x = 2$. B) un mínimo en $x = 1$. C) un extremo en $x = 3$.

6. En el siguiente dibujo aparece la gráfica de la **derivada** de la función f,



Entonces la **función** f tiene un punto de inflexión en:
A) $x = 1$. B) $x = 2$. C) no tiene puntos de inflexión.

7. Los tres primeros términos del desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$, de la función $f(x) = e^{2x}$ son.
A) $x - (x^3/3!) + (x^5/5!)$. B) $1 + 2x + 2x^2$. C) $1 + x + (x^2/2)$.

8. La derivada de orden 101 de $f(x) = \sin 2x$, en el punto $x = \pi$ es:
A) -2^{101}. B) 0. C) 2^{101}.

9. La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x^2}{x - 2}$ tiene una asíntota oblicua que es la recta:
A) $y = 3x^2 + 2$. B) $y = 3x + 6$. C) $y = x + 2$.

10. Una función f tiene el siguiente desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$:

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{16} + \frac{x^8}{64} - \frac{x^{16}}{16!} + R_{16}(x)$$

entonces, la derivada de orden 8 de la función en $x = 0$ es:
A) $-1/8!$. B) $1/8!$. C) 630.

Matemáticas. MatBio

Primero de Biología. Grupos 01, 02 y 03. 5 de Febrero de 2001.

Ejercicio 1. (3 puntos)
Se considera la curva $y = x^3 + 16$ y el punto exterior a la misma $A = (0,0)$.
a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por A y es tangente a la curva. ukitzaile
b) Encontrar el área del recinto limitado por la curva y la recta tangente del apartado anterior.

Ejercicio 2. (3 puntos)
a) Dada la función $f(x) = e^x - cx$, siendo $c > 0$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y demostrar que tiene un sólo mínimo, para cada valor positivo de c.
b) Encontrar el valor de dicho mínimo para el caso particular $c = e$.
c) ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $e^x - cx = 0$, para los distintos valores de $c > 0$?

Ejercicio 3. (2 puntos)
Probar que la ecuación

SP ST

$$x^2 = x \sin x + \cos x$$

tiene exactamente 2 soluciones. Aproximar hasta las centésimas la solución positiva.
↳ ehunekoa.

Ejercicio 3'. (2 puntos)
a) Escribir el desarrollo de Taylor de orden 6, centrado en $x = 0$, de la función $f(x) = \log(1 + x)$, dando la expresión del resto.
b) Con ayuda del desarrollo del apartado anterior, calcular $\log(1,01)$ dando una estimación del error cometido.

Ejercicio 4. (2 puntos)
Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
a) Calcular sus valores y vectores propios.
b) Determinar una matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal.
c) Calcular A^{543} y A^{544}.

Ejercicio 4'. (2 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +my & -z & = 1 \\ mx & +3y & & = 0 \\ 2mx & +7y & -mz & = 0 \end{array}\right.$$

a) Estudiar su compatibilidad en función de m.
b) Resolver en todos los casos en que sea compatible.

Nota: Los ejercicios 1 y 2 son **obligatorios**. Además hay que hacer **uno** entre los 3 y 3' y **otro** entre los 4 y 4'. La valoración de los ejercicios está indicada en el enunciado de cada uno de ellos.

Matemáticas. MatBio
Primero de Biología. Grupos 01, 02 y 03. 10 de Septiembre de 2001.

Ejercicio 1. (3 puntos)
a) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \quad \text{y} \quad g(x) = \sin^3(x^4 - x)$$

b) Calcular las siguientes integrales:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad \text{y} \quad \int \frac{2+3x+x^2}{x^3-x^2+x-1}\,dx$$

Ejercicio 2. (3 puntos)
a) La parábola de ecuación $y = x^2$ divide al rectángulo de vértices

$$(-3,0)\ , \quad (3,0)\ , \quad (3,9) \quad \text{y} \quad (-3,9)$$

en dos recintos: uno sobre la curva, y el otro, debajo de la curva. Comprobar que los volúmenes de los cuerpos generados por ambos recintos, al girar en torno al eje OY son iguales.
b) Calcular también el volumen del sólido generado al girar el recinto bajo la curva en torno al eje OX.

Ejercicio 3. (2 puntos)
a) Hacer la representación gráfica de $f(x) = 1 - x$ y $g(x) = \log(1+x)$.
b) Aproximar, con tres cifras decimales, la única solución de la ecuación:

$$x + \log(1+x) = 1$$

utilizando el método de Newton.

Ejercicio 3'. (2 puntos)
a) Escribir el desarrollo de Taylor de orden dos, centrado en $x = 0$, para la función

$$f(x) = \sqrt[5]{243 + x}$$

indicando la forma del resto.
b) Mediante la utilización del desarrollo obtenido en a) calcular la raíz de orden 5 de 244 con error menor que 10^{-6}.

Ejercicio 4. (2 puntos)
a) Encontrar todos los valores de a para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.
b) Siendo $a = 3$, calcular una matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal.

Ejercicio 4'. (2 puntos)
a) Estudiar la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & +y & -z & = 1 \\ x & +my & +z & = 1 \\ 3x & +y & -mz & = 1 \end{array}\right.$$

en función de las valores de m.
b) Resolver en los casos en que el sistema sea compatible.

Nota: Los ejercicios 1 y 2 son **obligatorios**. Además hay que hacer uno entre los 3 y 3' y otro entre los 4 y 4'. La valoración de los ejercicios está indicada en el enunciado de cada uno de ellos.

TODO

Test. Matemáticas. Biología. Curso 2001-2002 Test 1. Modelo A

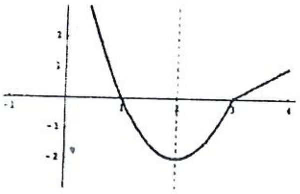
---

1. La función f es tal que $f(1) = 2$ y $f'(1) = -1$. Si $g(x) = \sqrt{1+x^3}$, entonces se tiene que $(g \circ f)'(1)$ es igual a:
A) -2. B) $\sqrt{2}$. C) 1.

2. La derivada de orden 1234 de la función $f(x) = x\,e^x$ en el punto $x = 0$ es:
A) 1234. B) 0. C) 1.

3. La recta tangente a la curva $y = x^3 - 2$ en el punto $(-1, -3)$:
A) corta de nuevo a la curva en otro punto. B) no puede cortar de nuevo a la curva.
C) Ninguna de las anteriores.

4. En el siguiente dibujo aparece la gráfica de la **derivada** de la función f,



Entonces la función f tiene un punto de inflexión en:
A) $x = 2$. B) $x = 3$. C) no tiene puntos de inflexión.

5. El coeficiente de x^{123} en el desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$, de la función $f(x) = x\,e^x$ es:
A) $1/(122)!$. B) $1/(123)!$. C) $1/123$.

6. La segunda cifra decimal de la primera raíz positiva de $x^3 - 3x - 3 = 0$ es:
A) 0. B) 1. C) 2.

7. El desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$, que empieza

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \cdots$$

corresponde a la función:
A) e^{-x} B) $\sin x$. C) $\log(1+x)$.

8. La gráfica de la función $f(x) = (x^2-2)/(x-3)$ tiene una asíntota oblicua que es la recta:
A) $y = x + 3$ B) $y = x^2 - 3$. C) $y = x - 3$.

9. El punto sobre la parábola $y^2 = 2x$ más cercano al punto $(1, 4)$ es:
A) $(2, 2)$ B) Su abscisa es igual a 3. C) Su ordenada es igual a $\sqrt{6}$.

10. La función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x+2} & \text{si} \quad x \in (0,1) \\ \alpha\,x + \beta & \text{si} \quad x \in (1,2) \end{cases}$$

es derivable en todo el intervalo $(0, 2)$ cuando:
A) $\alpha = -2/3$ y $\beta = 8/3$ B) α cualquiera y $\beta = 8/3$ C) $\alpha = -2/3$ y β cualquiera

Matemáticas. MatBio

Primero de Biología. Grupos 01 y 16. 5 de Febrero de 2002.

Ejercicio 1. (3 puntos)
a) Se considera la curva $y = 2x^3 - 4x^2 + 1$. Determinar los intervalos de crecimiento y de concavidad, extremos y punto de inflexión. Calcular la recta tangente a la misma que pasa por su punto de inflexión. Dibujar la gráfica de la curva y de esta tangente.
b) Hallar la derivada segunda de $f(x) = e^{\sqrt{1+x^2}}$.
c) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{3x+5}{x^2(x-1)}\,dx$$

Ejercicio 2. (3 puntos)
Las curvas $y = 2x^3$ e $y^3 = 8x$ dividen al rectángulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$ y $(1,2)$ en tres recintos: uno por encima de las curvas, otro entre ellas y otro más por debajo de las dos curvas.
a) Dibujar dichos recintos.
b) Calcular el área del recinto comprendido entre las dos curvas.
c) Calcular el volumen del sólido generado al girar el recinto del apartado anterior alrededor del eje OX.

Ejercicio 3. (2 puntos)
Utilizando el método de Newton, calcular el valor de la raíz positiva (es única) de la ecuación

$$x^3 - 3x - 3 = 0$$

con error menor que una milésima.

Ejercicio 3'. (2 puntos)
a) Escribir el desarrollo de Taylor de orden 3, centrado en $x = 0$, de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ y estimar el error que se comete al despreciar el resto para $x = 1/27$.
b) Utilizando el apartado anterior, calcular $\sqrt[3]{28}$ dando una estimación del error cometido ($28 = 27\,\frac{28}{27}$).

Ejercicio 4. (2 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax & +y & -bz & = -2b \\ x & +2y & +5z & = 1 \\ 2x & +4y & +3z & = 6 \end{cases}$$

a) Estudiar su compatibilidad en función de los parámetros.
b) Resolver el sitema en los casos en que sea compatible indeterminado.

Ejercicio 4'. (2 puntos)
Dada la matriz $A_m = \begin{pmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{pmatrix}$
a) ¿Para qué valores de m es A_m diagonalizable?
b) Para los valores de m encontrados en el apartado anterior, determinar las matrices P_m y diagonal D_m de tal suerte que $D_m = P_m^{-1} \cdot A_m \cdot P_m$.

Nota: Los ejercicios 1 y 2 son **obligatorios**. Además hay que hacer **uno** entre los 3 y 3' y **otro** entre los 4 y 4'. La valoración de los ejercicios está indicada en el enunciado de cada uno de ellos.

Matemáticas. MatBio

Primero de Biología. Grupos 01 y 16. 12 de Septiembre de 2002.

Ejercicio 1. (3 puntos)

a) Se considera la curva $y = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$. Determinar sus asíntotas, los intervalos de crecimiento y de concavidad, los extremos y puntos de inflexión. Dibujar la gráfica de la curva.

b) Hallar la derivada de $f(x) = \sin\left(\arctan\left(\dfrac{1+x^2}{9x}\right)\right)$.

c) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}\, dx$$

Ejercicio 2. (3 puntos)

Sea R el recinto del plano limitado por $y = x(4-x)$ y las rectas tangentes a esta curva en los puntos $(0,0)$ y $(4,0)$ y situado en el primer cuadrante.

a) Dibujar dicho recinto.

b) Calcular su área.

c) Calcular el volumen del sólido generado al girar el recinto alrededor del eje OX.

Ejercicio 3. (2 puntos)

a) Hacer la representación gráfica de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

b) ¿Cuántos valores de x satisfacen la ecuación $f(x) = 0$? ¿Cuántos están en el intervalo $[0,1]$? ¿Y en el intervalo $[1,2]$?

b) Utilizando Newton, aproximar hasta las milésimas uno de dichos valores

Ejercicio 3'. (2 puntos)

a) Escribir el desarrollo de Taylor de orden n, centrado en $x = 0$, para la función

$$f(x) = e^{2x}$$

indicando la forma del resto.

b) Mediante la utilización del desarrollo obtenido en a) calcular $e^{0,02}$ con error menor que 10^{-6}.

Ejercicio 4. (2 puntos)

a) Estudiar la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & -y & -z & = 0 \\ 3x & +y & +nz & = 0 \\ mx & +y & +z & = 0 \\ x & +my & +z & = 0 \end{array}\right.$$

en función de las valores de los parámetros n y m.

b) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Ejercicio 4'. (2 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Demostrar que es diagonalizable cualquiera que sea el valor del parámetro m.

b) Si $m = 2$, determinar una matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea una matriz diagonal D.

c) Calcular A^{2001} y A^{2002}.

Nota: Los ejercicios 1 y 2 son **obligatorios**. Además hay que hacer **uno** entre los 3 y 3' y **otro** entre los 4 y 4'. La valoración de los ejercicios está indicada en el enunciado de cada uno de ellos.

TODO

Test. Matemáticas. Biología. Curso 2002-2003 Test 1. Modelo I

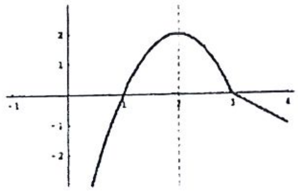
---

1. La función f es tal que $f(1) = 0$ y $f'(1) = -1$. Si $g(x) = \sin x$, entonces se tiene que $(g \circ f)'(1)$ es igual a:
A) 0. B) $\cos 2$. C) -1.

2. La derivada de orden 2002 de la función $f(x) = x \cos x$ en el punto $x = 0$ es:
A) 2002. B) 1. C) 0.

3. Una de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 2x + 4$ que pasa por el punto $(0,0)$ (exterior a la curva) es:
A) $y = 2x$. B) $y = -2x$. C) Ninguna de las anteriores.

4. En el siguiente dibujo aparece la gráfica de la **derivada** de la función f,



Entonces la función f es creciente en el intervalo:
A) $(1,4)$. B) $(2,4)$. C) $(1,3)$.

5. La derivada en $x = 3$ de la función $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 4$ es:
A) 2. B) -4. C) Ninguna de las anteriores.

6. La gráfica de la función $f(x) = x^2/(x+1)$ tiene una asíntota oblicua cuya **pendiente** es:
A) 2. B) 1. C) -1.

7. La **segunda** cifra decimal de la primera raíz positiva de $x^3 - 3x - 1 = 0$ es:
A) 2. B) 1. C) 7.

8. El desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$, que empieza

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

corresponde a la función:
A) e^{-x} B) $\sin x$. C) $\log(1+x)$.

9. Si la suma de dos números enteros y positivos es 30, el **máximo** producto que pueden alcanzar es:
A) 900. B) 225. C) $+\infty$.

10. Al utilizar el método de integración por partes en la integral $\int x^4 e^x\,dx$, los cambios adecuados son:
A) $u = x^4$, $dv = e^x dx$ B) $u = x^2$, $dv = x^2 e^x dx$ C) $u = e^x$, $dv = x^4 dx$

Matemáticas. MatBio

Primero de Biología. Grupos 01 y 16. 3 de Febrero de 2003.

Ejercicio 1. (3 puntos)

a) Hallar la derivada de $f(x) = \arctan\sqrt{x+1} + \arcsin(\cos\sqrt{x+1})$.

b) Se consideran las funciones $f(x) = a\,x - x^2$ y $g(x) = \ln(1+2x)$. Encontrar el valor de a para el cual las dos funciones tienen la misma recta tangente en $x = 0$.

c) Para el valor de a hallado en el apartado anterior, representar f y su recta tangente en $x = 0$.

Ejercicio 2. (3 puntos)

a) Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$$

b) Hallar el área del recinto del plano limitado por las curvas $y = 2x - x^2$ e $y = 2x - 4$.

c) Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje OX el triángulo de vértices $(-1,2)$, $(0,3)$ y $(1,2)$.

Ejercicio 3. (2 puntos)

a) Determinar el valor de a para que la curva $y = a\,x^3 - 3x + 1$ tenga un mínimo en el punto $x = 1$.

b) Siendo a el valor obtenido en el apartado anterior, utilizar el método de Newton para obtener la solución de la ecuación $a\,x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ que se encuentra en el intervalo $[-1,1]$ con error menor que una milésima.

Ejercicio 3'. (2 puntos)

a) Escribir el desarrollo de Taylor de orden 3, centrado en $x = 0$, de la función $f(x) = \sqrt[4]{81+x}$ indicando la forma del resto.

b) Utilizando el apartado anterior, calcular de forma aproximada $\sqrt[4]{82}$, dando una estimación del error cometido.

Ejercicio 4. (2 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +mz & = n \\ 2x & -y & +2z & = 0 \\ 3x & -3y & & = 2n \end{array}\right.$$

a) Estudiar su compatibilidad en función de los parámetros m y n.

b) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Ejercicio 4'. (2 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores y los vectores propios y una matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal.

b) Utilizando la matriz diagonal encontrada en el apartado anterior, calcular A^4 y A^5.

Nota: Los ejercicios 1 y 2 son **obligatorios**. Además hay que hacer **uno** entre los 3 y 3' y **otro** entre los 4 y 4'. La valoración de los ejercicios está indicada en el enunciado de cada uno de ellos.

Matemáticas. MatBio

Primero de Biología. Grupos 01 y 16. 15 de Septiembre de 2003.

Ejercicio 1. (3 puntos)
a) Hallar la derivada de $f(x) = \sin^3(x^4 - x)$.
b) Se consideran las funciones $f(x) = 1 + a\,x + x^2$ y $g(x) = e^{2x}$. Encontrar el valor de a para el cual las dos funciones tienen la misma recta tangente en $x = 0$.
c) Para el valor de a hallado en el apartado anterior, representar f y su recta tangente en $x = 0$.

Ejercicio 2. (3 puntos)
a) Calcular la integral

$$\int x^3\, e^{3x}\, dx$$

b) Hallar el área del recinto acotado del plano limitado por la curva $y = x^3$ y su recta tangente en $x = 1$.
c) Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje OX el cuadrado de vértices $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ y $(0, 1)$.

Ejercicio 3. (2 puntos)
a) Demostrar que la ecuación $x^4 - 4x^2 = 2$ tiene una única solución en $[2, +\infty)$.
b) Utilizar el método de Newton para obtener dicha solución con error menor que una milésima.

Ejercicio 3'. (2 puntos)
a) Escribir el desarrollo de Taylor de orden 3, centrado en $x = 0$, de la función $f(x) = \sqrt[3]{64 + x}$ indicando la forma del resto.
b) Utilizando el apartado anterior calcular de forma aproximada $\sqrt[3]{65}$ dando una estimación del error cometido.

Ejercicio 4. (2 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -x & +2y & = -2z \\ x & +\alpha\, z & = \beta - y \\ 3y & & = 2\beta + 3x \end{cases}$$

a) Estudiar su compatibilidad en función de los parámetros α y β.
b) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Ejercicio 4'. (2 puntos)
Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
a) Calcular los valores y los vectores propios y una matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal.
b) Utilizando la matriz diagonal encontrada en el apartado anterior, calcular A^5 y A^6.

Nota: Los ejercicios 1 y 2 son **obligatorios**. Además hay que hacer **uno** entre los 3 y 3' y **otro** entre los 4 y 4'. La valoración de los ejercicios está indicada en el enunciado de cada uno de ellos.

1020

Test. Matemáticas. Biología. Curso 2003-2004 Test 1. Modelo I

---

1. La función f es tal que $f(e) = e + 1$ y $f'(e) = (e - 1)/(e + 1)$. Si $g(x) = \log[(x^2 - x)/x]$, entonces se tiene que $(g \circ f)'(e)$ es igual a:
A) $(e - 1)/(e(e + 1))$. B) $(e - 1)/(e + 1)$. C) 1.

2. La gráfica de la función $f(x) = (x^3 + bx^2)/(2x^2 + 5)$ tiene, cualquiera que sea $b > 0$, una asíntota oblicua que es la recta de ecuación:
A) $y = x/2$. B) $y = (x + b)/2$. C) Ninguna de las anteriores.

3. La función $f(x) = x^4 e^{-x}$ tiene un mínimo local en $x = 0$ y además tiene:
A) un mínimo local en $x = 4$. B) un máximo local en $x = 4$. C) una asíntota vertical.

4. La función $f(x) = \log(1 + x + x^2)$ tiene rectas tangentes de pendiente igual a 1 en dos puntos diferentes. Dichas rectas tangentes son:
A) $y = x + 1$; $y = x - 1$. B) $y = x$; $y = x - \log 3$. C) $y = x$; $y = x + \log 3 - 1$.

5. Si determinamos el rectángulo cuya base se encuentra sobre el eje de abcisas y cuyos vértices superiores están situados en la parábola de ecuación $y = 9 - x^2$ que tiene área máxima, entonces su perímetro es igual a.
A) $6 + \sqrt{3}$. B) $12 + 4\sqrt{3}$. C) Ninguna de las anteriores.

6. La segunda cifra decimal de la primera raíz positiva de $x^3 - 3x + 1 = 0$ es:
A) 2. B) 3. C) 4.

7. Los primeros términos del desarrollo de Taylor, centrado en $x = \pi/2$, de la función $f(x) = \sin x$ son:
A) $1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$. B) $1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$. C) $1 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$.

8. Si la función $f(x)$ tiene un desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$, que se escribe:

$$x^2 + \frac{x^3}{7!} + \frac{x^5}{2 \cdot 5!} + R_5(x)$$

Entonces se cumple que $f^{(3)}(0)$:
A) es igual a $1/7!$ B) es un valor del intervalo $[2, 5]$. C) es igual a $1/840$.

9. Para calcular una primitiva de la función racional $f(x) = (5x + 11)/[(x^2 - x)(x^2 + 1)]$, la descomposición en fracciones simples adecuada es:
A) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$. B) $\frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$. C) Ninguna de las anteriores.

NO -1 10. Para $A > 0$, una primitiva de la función $f(x) = (Ax + A)/(x^2 + 4x + 4 + A)$ es:
A) $5 - \sqrt{A}\arctan\left(\frac{2 + x}{\sqrt{A}}\right) + \frac{A}{2}\log(A + (2 + x)^2)$.
B) $2\arctan\left(\frac{2 + x}{\sqrt{A}}\right) + \frac{\sqrt{A}}{2}\log(A + (2 + x)^2)$.
C) $1 - \sqrt{A}\arctan\left(\frac{2 + x}{A}\right) + \frac{1}{2}A^2\log(2 - x)$.

Matemáticas. MatBio

Primero de Biología. Grupos 01 y 02. 2004 f

Ejercicio 1. (4 puntos)
Sea $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+5x+4}$.
a) Hacer su representación gráfica y dibujar el recinto plano limitado por la gráfica de la función, la tangente a la misma en $x = 0$ y la recta $x = 3$, dentro del primer cuadrante.
b) Calcular el área de dicho recinto.

Ejercicio 2. (2 puntos)
Hallar el desarrollo de Taylor de orden n, centrado en $a = 0$, de la función $f(x) = \log(1-5x)$, dando la expresión del resto.

Ejercicio 3. (2 puntos)
Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la curva $y = xe^{2x}$, al girar alrededor del eje OX, en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 4. (2 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} ax & +\,y & +z & = & b \\ & 5y & +z & = & 2b \\ -2x & +3y & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Estudiar su compatibilidad en función de los parámetros a y b.
b) Resolver el sistema sólo en los casos en que sea compatible indeterminado.

Ejercicio 4'. (2 puntos)
Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
a) Calcular los valores y los vectores propios en función del parámetro a, y, cuando sea posible, una matriz P tal que la matriz $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal.
b) Utilizando la matriz diagonal encontrada en el apartado anterior, cuando $a = 2$, calcular A^5 y A^6.

Nota: Los ejercicios 1, 2 y 3 son **obligatorios**. Además hay que hacer otro entre los 4 y 4'. La valoración de los ejercicios está indicada en el enunciado de cada uno de ellos.

Matemáticas. MatBio

Primero de Biología. Grupos 01 y 02. 2004 s

Ejercicio 1. (4 puntos)
a) Sea $f(x) = xe^{-x}$. Dibujar el recinto del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y sus rectas tangentes en $x = 0$ y $x = 1$.
b) Calcular el área de dicho recinto.

Ejercicio 2. (2 puntos)
Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una única solución. Aproximar dicha solución hasta las milésimas utilizando el método de Newton.

Ejercicio 3. (2 puntos)
a) Calcular la integral

$$\int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2}\, dx$$

b) Calcular el volumen del sólido de revolución generado, al girar alrededor del eje OX, el recinto limitado por la gráfica de la función $y = 4 - \frac{x^2}{2}$ y la recta de ecuación $y = 2$, en el intervalo $[-2, 2]$.

Ejercicio 4. (2 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +\ y & +\ z & = & m \\ x & +2y & +3z & = & m \\ x & +ny & +3z & = & 2m \end{array}\right.$$

a) Estudiar su compatibilidad en función de los parámetros m y n.
b) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Ejercicio 4'. (2 puntos)
Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ 4 & a-2 \end{pmatrix}$
a) Calcular los valores y los vectores propios en función del parámetro a.
b) Cuando sea posible, encontrar una matriz P tal que la matriz $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal.

Nota: Los ejercicios 1, 2 y 3 son **obligatorios**. Además hay que hacer **otro** entre los 4 y 4'. La valoración de los ejercicios está indicada en el enunciado de cada uno de ellos.

Matematika. MatBio

Biología. 31 eta 32 Taldeak. 2004 S

---

1. Ariketa (4 puntu)

a) Izan bedi $f(x) = xe^{-x}$ funtzioa, irudikatu funtzio hau (ikerketa osoa eginez). Irudikatu baita $f(x)$ funtzioak eta bere zuzen ukitzaileak $x = 0$ eta $x = 1$ puntuetan mugatzen duten eremua.

b) Kalkulatu eremu horren azalera.

---

2. Ariketa (2 puntu)

Frogatu $x^3 + x - 1 = 0$ ekuazioak soluzio bakarra duela. Newton erabiliz, hurbildu soluzio hori milarenerano.

---

3. Ariketa (2 puntu)

a) Kalkulatu honako integrala

$$\int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2}\,dx$$

b) $y = 4 - \dfrac{x^2}{2}$ funtzioak eta $y = 2$ zuzenak, $[-2, 2]$ tartean eremu bat mugatzen dute. Kalkulatu OX ardatzarekiko biratzerakoan, eremu horrek sortzen duen biraketa bolumena, .

---

4. Ariketa (2 puntu)

Izan bedi ekuazio linealetako sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ x + 2y + 3z = m \\ x + ny + 3z = 2m \end{cases}$$

a) Aztertu bere bateragarritasuna m eta n parametroen arabera.

b) Ebatzi sistema bateragarria den kasuetan.

4'. Ariketa (2 puntu)

Izan bedi honako matrizea $A = \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ 4 & a-2 \end{pmatrix}$

a) Kalkulatu bere balio eta bektore propioak a parametroaren arabera.

b) Ahal denean, aurkitu P matrize bat non $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ matrizea diagonala den.

Oharra: 1, 2 eta 3 ariketak **derrigorrezkoak** dira. Horrez gain, **bat** aukeratu behar da 4 eta 4' ariketen artean.

Matemáticas. 1º de Biología. 10P2 Curso 2004-2005

---

1. La función f es tal que $f(e^{-1}) = e^{-1}$ y $f'(e^{-1}) = e^{-1}$. Si $g(x) = \log x^3$, entonces se tiene que $(g \circ f)'(e^{-1})$ es igual a:
A) 3. B) $3e^2$. C) $3e^{-2}$.

2. La gráfica de la función $f(x) = x^3/(x^2 + a\,x + 1)$ tiene, cualquiera que sea a, una asíntota oblicua que es la recta de ecuación:
A) $y = x - a$. B) $y = x + a$. C) Ninguna de las anteriores.

3. En la Figura 1 está representada la gráfica de la derivada de la función f. Entonces, la función f tiene:
A) un máximo en $x = 3$. B) un máximo en $x = 6$. C) un mínimo en $x = 6$.

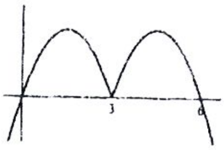


Figura 1: Gráfica de f'.

4. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x\,e^{-x}$ en su punto de inflexión es:
A) $-e^{-2}$. B) e^2. C) 0.

5. El producto de dos números positivos a y b es igual a 144. Entonces, su suma $a + b$ es mínima cuando:
A) $a = b$. B) $a = 0$. C) b es pequeño.

6. La segunda cifra decimal de la raíz de la ecuación $4 - x = \log x$ es:
A) 2. B) 0. C) 3.

7. Los primeros términos del desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$, de la función $f(x) = \sin(3\,x)$ son:
A) $3x - \dfrac{9x^3}{2} + \dfrac{81x^5}{40}$. B) $3x^2 - \dfrac{9x^4}{2} + \dfrac{81x^6}{40}$. C) $3x + \dfrac{9x^3}{2} + \dfrac{81x^5}{40}$.

8. Si la función $f(x)$ tiene un desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$, que se escribe:

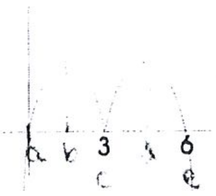
$$x + \frac{x^3}{7!} + \frac{x^5}{2 \cdot 5!} + \frac{13x^{13}}{(12)!} + R_{14}(x)$$

Entonces se cumple que $f^{(13)}(0)$:
A) es igual a $(13)!$ B) es un valor del intervalo $[0, x]$. C) es igual a $(13)^2 = 169$.

9. Una primitiva de la función $\sin^5 x \cos^2 x$ es:
A) $1 + \dfrac{1}{3}\cos^3 x - \dfrac{2}{5}\cos^5 x$. B) $-7 + \dfrac{1}{3}\cos^3 x - \dfrac{2}{5}\cos^5 x + \cos^6 x$. C) Ninguna de las anteriores.

10. Para calcular una primitiva de la función $f(x) = x^3/\sqrt{4 + x^2}$, un cambio de variable adecuado es:
A) $x = 2\sin t$. B) $x = 2\tan t$. C) $x = 2/\cos t$.

Test número: Modelo: A



Irudia 2: f' Grafika.

Matematika. Biologia 1.maila 2004-2005.

1. 2 irudia, f funtzio baten **deribatuarena** da, orduan funtzio horrek:
   A) maximoa du $x = 3$ puntuan. [✓ B)] maximoa du $x = 6$ puntuan . C) minimoa du $x = 6$ puntuan.

2. $y = xe^{-x}$ funtzioaren zuzen ukitzailearen malda bere **inflexio putuan**:
   [✓ A)] $-e^{-2}$ da. B) e^2 da. C) 0 da.

3. a eta b zenbaki positiboen biderkadura 144 da. Orduan, bere batura $a + b$ noiz da **minimoa**?
   [✓ A)] $a = b$ denean. B) b txikia denean. C)$a = 0$ denean.

4. $\log x = 4 - x$ ekuazioaren erroaren **bigarren** zifra dezimala
   A) 2 da. B) 0 da. C) 3 da.

5. $f(x) = \sin 3x$ funtzioaren $x = 0$ puntuan zentraturiko Taylor-en garapenaren lehenengo gaiak honakoak dira:
   [✓ A)] $3x - \frac{9x^3}{2} + \frac{81x^5}{40}$. B) $3x^2 - \frac{9x^4}{2} + \frac{81x^6}{40}$. C) $3x + \frac{9x^3}{2} + \frac{81x^5}{40}$.

6. $f(x)$ funtzioaren $x = 0$ puntuan zentraturiko Taylor-en garapena honakoa da:

$$x + \frac{x^3}{7!} + \frac{x^5}{2 \cdot 5!} + \frac{13x^{13}}{31} + R_{14}(x)$$

   Orduan $f^{(13)}(0)$:
   A) $(13)!$ da. [✓ B)] $[0, x]$ tarteko balioa da. C) $(13)^2 = 169$ da.

7. $\sin^5 x \cos^2 x$ efuntzioaren jatorrizkoa:
   A) $1 + \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{2}{5}\cos^5 x$ da. B) $-7 + \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{2}{5}\cos^5 x + \cos^6 x$. C) Ez bata ez bestea.

8. $f(x) = x^3/\sqrt{4 + x^2}$ funtzioaren jatorrizkoa bilatzeko, aukeratu aldagai aldaketarik egokiena:
   A)$x = 2/\cos t$. B) $x = 2\tan t$. C) $x = 2\sin t$.

9. Izan bedi f funtzio bat non $f(e^{-1}) = e^{-1}$ eta $f'(e^{-1}) = e^{-1}$den. $g(x) = \log x^3$ bada, orduan $(g \circ f)'(e^{-1})$:
   [✓ A)] 3 da. B) $3e^2$ da. C) $3e^{-2}$ da.

10. Edozein a parametrorako, $f(x) = x^3/(x^2 + a\,x + 1)$ funtzioaren asintota zeihararraren ekuazioa:
    A) $y = x - a$ da. B) $y = x + a$ da. C) Ez bata ez bestea.

Izen Abizenak: Juliane Abaigar Etxaniz **Eredua: B**

Matemáticas. 1^o de Biología.
Curso 2004-2005

Examen. 3 de Febrero de 2005. jcp/fc

Ejercicio 1. (2 puntos)

Representar gráficamente $y = (x^2 + x)\, e^{-x}$. Determinar, y dibujar, las rectas tangentes a dicha curva en sus puntos de inflexión.

Ejercicio 2. (2 puntos)

Calcular las siguientes primitivas:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx \quad \text{y} \quad \int \frac{5 - x}{2x^2 + x - 1}\, dx$$

Ejercicio 3. (2 puntos)

Se considera el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, a)$, con $a > 0$. Encontrar el valor de a para el cual los volúmenes de los sólidos generados al girar dicho triángulo alrededor de los ejes OX y OY son iguales.

Ejercicio 4. (2 puntos)

Dos postes de alturas 12 y 28 metros están separados por una distancia de 30 metros. Encontrar un punto en el suelo situado en la recta que une la base de los postes de tal suerte que un cable que una las cimas de dichos postes con ese punto del suelo tenga longitud **mínima**.

Ejercicio 5. (2 puntos)

Hallar el desarrollo de Taylor de orden 3, centrado en $a = 0$, de la función $f(x) = \sqrt{100 + x}$, dando la expresión del resto. Con ayuda del desarrollo anterior, calcular $\sqrt{101}$ y estimar el error cometido.

Ejercicio 6. (2 puntos)

Demostrar que la ecuación

$$1 - 5x = \sin x$$

tiene una **única solución**. Calcular, con el método de Newton, una aproximación hasta las milésimas de dicha solución.

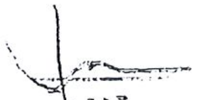
Nota: Los ejercicios 1, 2 y 3 son **obligatorios**. Además hay que hacer **otros dos** entre los 4, 5 y 6. La valoración de los ejercicios está indicada en el enunciado de cada uno de ellos.

Matematika. Biologia 1. Maila 2004-2005

Azterketa. 2005/02/03.

1. Ariketa (2 puntu)

Irudikatu $y = (x^2 + x)\,e^{-x}$ funtzioa. Kalkulatu eta marraztu y funtzioaren zuzen ukitzaileak bere inflexio puntuetan. ukitzaileak → $y = x$ eta $y = -\frac{5x}{e^3} + \frac{15+0{,}6e^3}{e^3}$



2. Ariketa (2 puntu)

Kalkulatu honako integralak:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{y} \quad \int \frac{5-x}{2x^2+x-1}\,dx$$

$= \left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)\left[\cos bx\,\frac{e^{ax}}{a} + \frac{b}{a}\sin bx \cdot \frac{e^{ax}}{a}\right] + k$

↳ $= -4\ln|x+1| + 3\ln|x-\frac{1}{2}| + k$

a eta b parametroak izanik.

---

3. Ariketa (2 puntu) Izan bedi $a > 0$, eta $(0,0)$, $(1,0)$ eta $(1,a)$ puntuek osatzen duten triangelua. Aurkitu a parametroaren balioa zeinekiko triangelu hori OX eta OY ardatzekiko biratzerakoan biraketa bolumen berdina sor dezan. $a = 1$

---

4. Ariketa (2 puntu) Izan bitez bi poste, 12 eta 28 metro luerakoak hurrenez hurren eta beraien arteko distantzia 30 metrokoa delarik. Aurkitu bi posteen onarriak lotzen dituen zuzenean puntu bat non kable batek lotzen baditu puntu hori eta posteen muturrak, kable horren luzera **minimoa** den.

---

5. Ariketa (2 puntu) → $\sqrt{101} = 10{,}0498750$

Kalkulatu $f(x) = \sqrt{100+x}$ funtzioaren $c = 0$ puntuan zentraturiko Taylor-en 3. ordenako garpena ,ondarra ere jarri egin behar da. Aurrko kalkukua kontuan harturik, kalkulatu $\sqrt{101}$ eta estimatu egin den errorea.

---

6. Ariketa (2 puntu)

Ebatzi honako ekuazio linealetako sistema, a parametroaren arabera. (Kasuistika egin eta ebatzi sistema bateragarria den kasuetan.)

$$\begin{cases} -x + y - az = 7 \\ ax - 3y + 4z = 0 \\ ax - y + z = 0 \end{cases}$$

$a = 1$ eta $a = \frac{1}{2}$
S. Bateraezina

$a \neq 1$ eta $a \neq \frac{1}{2}$ > S.B.D.

$x = \frac{7}{-2a^2+3a-1}$

$y = \frac{21a}{-2a^2+3a-1}$

$z = \frac{14a}{-2a^2+3a-1}$

Oharra: 1. 2 eta 3 ariketak **derrigorrezkoak** dira. Horrez gain, beste **bi** aukeratu behar dira 4,5 eta 6. ariketetatik.

Matemáticas. 1º de Biología. Curso 2004-2005

Examen. 2005. jcp/fc(2)

Ejercicio 1. (2 puntos)

a) Encontrar la asíntonta oblicua, en $+\infty$, de la curva $y = f(x)$, siendo

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 3x + 1}$$

b) Determinar en qué puntos de la curva $y = x/(x+1)$ las rectas tangentes a esta curva son **paralelas** a la asíntota calculada en el apartado a). Escribir las ecuaciones de dichas rectas tangentes y dibujarlas.

Ejercicio 2. (2 puntos)

Calcular las siguientes primitivas: ? $\frac{1}{2}$ arctg $\frac{x}{2}$.

$$\int \frac{ax+b}{x^2+4}\,dx \quad \text{y} \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$$

Ejercicio 3. (2 puntos)

Las curvas de ecuación $y^2 = 2px$ y $x^2 = 2py$ determinan, en el primer cuadrante, una región S. Calcular su área y el volumen del sólido generado al girar dicha región S alrededor del eje OX.

Ejercicio 4. (2 puntos)

Queremos construir un tetrabrik (prisma rectangular) para que contenga un litro de leche (volumen igual a 1), y de tal suerte que el lado mayor de la base mida **el doble** que el lado menor. Determinar sus dimensiones para que la superficie total (suma de las áreas de las 6 caras) del tetrabrik sea **mínima**.

Ejercicio 5. (2 puntos)

Hallar el desarrollo de Taylor de orden 5, centrado en $a = 0$, de la función $f(x) = \log(1+3x)^2$, dando la expresión del resto. Con ayuda del desarrollo anterior, calcular $\log(1,69)$ y estimar el error cometido.

Ejercicio 6. (2 puntos)

Determinar el número de soluciones de la ecuación Q4 = soluc.

$$2x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

y calcular, con el método de Newton, una aproximación hasta las milésimas de la solución que es negativa.

Nota: Los ejercicios 1, 2 y $\overset{-4}{3}$ son **obligatorios**. Además hay que hacer **otro** entre los 4, 5 y 6. La valoración de los ejercicios está indicada en el enunciado de cada uno de ellos.

Matemáticas. 1º de Biología. Curso 2005-2006

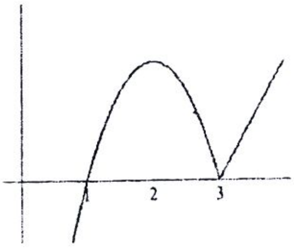
---

1. Se sabe que f es una función tal que $f(1) = 0$, $f'(1) = 2$ y $f''(1) = -3$. Si $h(x) = e^{f(x)}$, entonces $h''(1)$ vale:
A) e. B) -1. C) 1.

2. La función $f(x) = (x^4 + ax^3)/(x^3 + 2x + 1)$ tiene, cualquiera que sea $a > 0$, una asíntota oblicua que es la recta de ecuación:
A) $y = x - a$. B) $y = x + 2a$. C) $y = x + a$.

3. La función $f(x) = \log(x/(x^2 + 1))$, que está definida para $x > 0$, verifica que su recta tangente es horizontal si:
A) $x = 2$. B) $x = 1$. C) $x = 3$.

4. La siguiente figura es la gráfica de la **derivada** f' de una función f. Entonces f tiene



A) un mínimo en $x = 1$ B) un máximo en $x = 2$ C) un mínimo en $x = 3$.

5. Un alambre de 10 m. de longitud se corta en dos trozos. Con uno se hace una círculo y con el otro un cuadrado. Si la suma de las áreas de las dos figuras es mínima, el radio del círculo es:
A) 5. B) $5/(4 + \pi)$. C) $3/(4 + \pi)$.

6. Los primeros términos del desarrollo de Taylor, centrado en $x = 1$, de una función $f(x)$ son

$$1 + (x - 1) + \frac{(x-1)^2}{3!} - \frac{(x-1)^3}{2!} - \frac{(x-1)^5}{6!} + R_6 \qquad \text{entonces:}$$

A) $f'''(1) = 0$ B) $f''(1) = \frac{1}{4}$ C) $f'''(1) = -3$

7. La función $f(x) = \log(3 + 4x)$ verifica que $f^{(100)}(0)$ es igual a:
A) $(99)!(4/3)^{100}$. B) $-(99)!(4/3)^{100}$. C) $-(99)!(4/3)^{99}$.

8. Sabemos que existe un valor de x mayor que 2 para el cual $x^5 - 80x + 1 = 0$. Entonces, las primeras cifras decimales de dicho valor son:
A) $x = 2{,}98773...$ B) $x = 2{,}98756...$ C) $x = 2{,}987912....$

9. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + \ y + \ z &= a \\ x - 2y + a\,z &= 0 \\ x - \ y + a\,z &= a \end{cases}$$

A) tiene solución para todo a. B) tiene solución para $a \neq 1$ C) tiene solución para $a \neq -1$.

10. La matriz A es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

A) para todo a B) para $a \neq 2$ C) para $a \neq 1$

Modelo: A

Test número:

Matemáticas. 1^o de Biología. 9. 02. 2006 Curso 2005-2006

1. a) Dada la función $f(x) = xe^{-x}$, encontrar las rectas tangentes que pasan por los puntos de abscisa 0 y 1.

b) Determinar también los **extremos** y los puntos de inflexión de f y hacer su **representación gráfica** junto con las rectas tangentes del apartado anterior.

2. a) Calcular las siguientes primitivas:

$$\int x\ e^{-x}\,dx\ ,\quad \int \frac{18x^2+9x+2}{6x+1}\,dx$$

b) Calcular el área del recinto R del plano, situado en el primer cuadrante, y limitado por $y = xe^{-x}$ y las rectas tangentes a esta curva en los puntos $(0,0)$ y $(1, e^{-1})$ (Nota: Ver problema 1).

c) Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar el recinto R del apartado anterior en torno al eje OX.

3. a) **Demostrar** que la ecuación $x^3 = 1 - 5x$ tiene una única solución.

b) Aproximar dicha solución hasta las milésimas, usando para ello el método de Newton.

4. a) Hallar el desarrollo de Taylor de orden tres para la función $f(x) = 10\sqrt[3]{1+x}$, centrado en $x = 0$, dando la expresión del resto.

b) Utilizar el desarrollo del apartado anterior para calcular de forma aproximada $\sqrt[3]{1001}$.

5. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Demostrar que es diagonalizable para todos los valores de m y hallar, si $m = 2$, la matriz diagonal D y la matriz P, tales que $P^{-1}AP = D$. Calcular también las matrices A^{2005} y A^{2006}.

Nota: Todos los ejercicios se valoran sobre **2** puntos.

Matemáticas. 1º de Biología. 11. 09. 2006. Curso 2005-2006

1. a) Determinar las asíntotas, extremos y puntos de inflexión de:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$$

b) Encontrar y dibujar junto con la gráfica de f la recta tangente a la misma que pasa por el punto exterior a la curva $(0, 1/2)$.

2. Sea R el recinto del plano situado en el primer cuadrante y limitado por $y = x(10-x)$ y las rectas tangentes a esta curva en los puntos $(0,0)$ y $(10,0)$.
a) Dibujar dicho recinto.
b) Calcular su área.
c) Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar el recinto R en torno al eje OX.

3. a) Demostrar que la ecuación $x^5 = 1 - 5x$ tiene una única solución.
b) Aproximar dicha solución hasta las milésimas, usando para ello el método de Newton

4. a) Hallar el desarrollo de Taylor de orden tres para la función $f(x) = \log(1+x)$, centrado en $x = 0$, dando la expresión del resto
b) Utilizar el desarrollo del apartado anterior para calcular de forma aproximada $\log(21/20)$.
(Nota: Se trata de logarítmos neperianos).

5. Se considera el sistema S

$$\left\{ \begin{array}{llll} & (m-6)y & +3z & = 0 \\ 2x & +y & -z & = m-4 \\ (m+1)x & +2y & & = 3 \end{array} \right.$$

Estudiar su compatibilidad en función de m y resolver en los casos en que sea posible.

Nota: Todos los ejercicios se valoran sobre 2 puntos.

Matemáticas. 1º de Biología. Curso 2006-2007

---

① La función f es tal que $f(1) = \sqrt{8}$ y $f'(1) = 3$. Si $h(x) = f(x)\sqrt{1+[f(x)]^2}$, entonces se tiene que $h'(1)$ es igual a:
A) 1. B) 17. C) -1.

2. Se sabe que la gráfica de la función $f(x) = (x^2 + ax + b)/(3x + c)$ tiene a la recta $y = x/3$ como asíntota oblicua. Entonces se verifica que
A) $c = 3a$. B) $c = a$. C) Ninguna de las anteriores.

3. La función $f(x) = x^2 e^{-ax}$ tiene un mínimo local en $x = 0$ y un máximo local en $x = 1/2$, entonces:
A) $a = 2$. B) $a = 3$. C) $a = 4$.

4. La recta tangente a $f(x) = x^5 + 4$ que pasa por el punto exterior a la gráfica de f de coordenadas $(0, 0)$ tiene pendiente igual a:
A) 0 B) 3. C) 5.

5. Sean m y n dos números cuya diferencia es 1. Entonces el valor mínimo que puede alcanzar su producto $m \cdot n$ es:
A) $-1/2$. B) $-1/4$. C) $-1/8$.

6. La ecuacion $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres soluciones. La tercera cifra decimal de la menor de las soluciones positivas es:
A) 7. B) 8. C) 6.

7. Si la función $f(x)$ tiene un desarrollo de Taylor de orden 5, centrado en $a = -2$, dado por:

$$\frac{(x+2)^2}{\alpha} + \frac{(x+2)^4}{\beta} + \frac{(x+2)^5}{\gamma} + R_5(x)$$

entonces se cumple que:
A) $f^{(3)}(-2) = 2/\alpha$ B) $f^{(3)}(-2) = 0$ C) $f^{(3)}(-2) = 4/\beta$

8. La derivada de orden 20 de la función $f(x) = \log(3x + 4)$, en el punto $x = 0$ es:
A) $f^{(20)}(0) = (3/4)^{20}\,(19)!$ B) $f^{(20)}(0) = -(3/4)^{20}\,(19)!$ C) $f^{(20)}(0) = (3/4)^{19}\,(20)!$

9. Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces A es diagonalizable para
A) Cualquier valor de a. B) Para $a \neq 3$. C) Ninguna de las anteriores.

10. El sistema de ecuaciones S dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + az = 2 \end{cases}$$

es incompatible para:
A) $a = 3$. B) $a = 4$. C) Ningún valor de a.

Test número: Modelo: A

Matemáticas. 1º de Biología. 09. 02. 2007 Curso 2006-2007

---

1. a) Dada la función $f(x) = (ax+b)\,e^{-x}$, determinar los valores de a y b para que su gráfica pase por el punto $(0,2)$ y para que su **derivada segunda** se anule para $x = 4/3$. Encontrar sus asíntotas, intervalos de crecimiento, extremos y puntos de inflexión. Hallar también la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión.

b) Hacer la **representación gráfica** de la función y de la recta tangente del apartado anterior.

2. a) Calcular la primitiva:

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+x-6}\,dx$$

b) Calcular el **área** del recinto R del plano, situado en el primer cuadrante, y limitado por la gráfica de $y = x(8-x)$ y las **dos** rectas tangentes a esta curva que pasan por el punto **exterior** a la misma $(4, 32)$.

c) Hallar el **volumen** del sólido de revolución generado al girar el recinto R del apartado anterior en torno al eje OX.

3. a) **Demostrar** que la ecuación $\sin x = 1 - x$ tiene una **única** solución.

b) Aproximar dicha solución hasta las milésimas, usando para ello el método de Newton.

4. a) Determinar el desarrollo de Taylor de orden tres para la función $f(x) = \log(1-5x)$, centrado en 0, dando la expresión del resto.

b) Utilizar el desarrollo del apartado anterior para calcular de forma aproximada $\log(0,95)$.

5. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) Estudiar cuándo es **diagonalizable** en función del parámetro a.

b) Para $a = 7$, calcular la matriz diagonal D y una matriz invertible P, y su inversa P^{-1}, tales que $P^{-1}AP = D$.

Nota: Todos los ejercicios se valoran sobre 2 puntos.

Matemáticas. 1º de Biología. 04. 09. 2007 Curso 2006-2007

---

1. a) Hallar las asíntotas oblicuas de la función

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + c}{x^2 + ax + b}$$

b) Calcular la derivada segunda de la función

$$g(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 5}$$

c) Encontrar una primitiva de la función

$$h(x) = x^2 e^{ax}$$

2. Se considera la función $f(x) = x^2 \sin x$.
a) Hallar la ecuación de su recta tangente en $x = \pi$.
b) Representar el recinto R del plano limitado por la gráfica de la función, la recta tangente del apartado anterior y la recta $y = \pi^2 x$.
c) Calcular el área del recinto R.

3. a) Demostrar que la ecuación $3x - 1 + \sin x = 0$ tiene una única solución.
b) Aproximar dicha solución hasta las milésimas, usando para ello el método de Newton.

4. a) Determinar el desarrollo de Taylor de orden tres para la función $f(x) = \log(1 + 2x)$, centrado en 0, dando la expresión del resto
b) Utilizar el desarrollo del apartado anterior para calcular de forma aproximada $\log(6/5)$.

ln 6/5 = 0'12

5. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

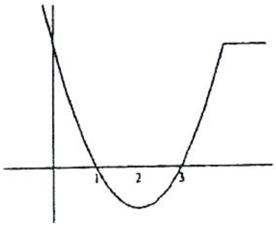
a) Estudiar cuándo es diagonalizable en función del parámetro a.
b) Para $a = 7$, calcular la matriz diagonal D y una matriz invertible P, y su inversa P^{-1}, tales que $P^{-1}AP = D$.

Nota: Todos los ejercicios se valoran sobre 2 puntos.

1. Las funciones derivables f y g son tales que $f(2) = 2$, $f'(2) = 0$, $g(2) = 3$ y $g'(2) = -3$. Si $h(x) = f(x)g(x) + e^{f(x)g(x)}$, entonces $h'(2)$ es igual a:
A) $-2(e^2+1)$. B) $-6(e^6+1)$. C) Ninguna de las anteriores.

2. Se sabe que la gráfica de la función racional $f(x) = (ax^2 + bx + 2007)/(x-1)$ tiene a la recta $y = 2x+1$ como asíntota oblicua. Entonces se verifica que
A) $a = 2$, $b = -1$. B) $a = -2$, $b = -1$. C) $a = -1$, $b = 2$.

3. La siguiente figura es la gráfica de la derivada de una función f. Entonces f tiene



A) Un máximo en $x = 1$. B) Un mínimo en $x = 2$. C) Un máximo en $x = 3$.

4. La recta tangente a $f(x) = e^x \ln(\sqrt{x})$ en el punto de abscisa $x = 1$ es:
A) $y = (e/2)(x+1)$. B) $y = (-e/2)(x-1)$. C) $y = (e/2)(x-1)$.

5. Sean m y n dos números positivos tales que la suma del primero más el cuadrado del segundo es igual a 12. Entonces el valor máximo que puede alcanzar el producto de m por n es:
A) 16. B) 8. C) 4.

6. La ecuacion $x^3 + 5x - 3 = 0$ tiene una única solución. Las segunda cifra decimal de dicha solución es:
A) 1. B) 3. C) 6.

7. La función $f(x)$ tiene un desarrollo de Taylor de orden 3, centrado en 1, dado por:

$$a + b(x-1)^2 - \frac{c}{2}(x-1)^3 + R_3(x)$$

siendo: $f(1) = 2$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = 6$ y $f'''(1) = 1$. Entonces se cumple que:
A) $a = 2$, $b = 3$ y $c = -1/3$. B) $a = 3$, $b = 2$ y $c = -1/3$. C) $a = 2$, $b = -3$ y $c = 1/3$.

8. Los primeros términos del desarrollo de Taylor, centrado en 0, de la función $f(x) = 2 + \ln(1+ax)$ son:
A) $2 + ax + \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^3}{3}x^3$. B) $2 + ax - \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^3}{3}x^3$. C) $2 + ax - \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^3}{3}x^3$.

9. Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces A es diagonalizable:
A) Para $a \neq 0$. B) Para $a \neq 7$. C) Para $a \neq 0$ y $a \neq 7$.

10. El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - 3z = 1 \\ ax + by + bz = a + 2b \end{cases}$$

A) Es incompatible para $b = 0$. B) Es incompatible para $a = 0$. C) Es compatible siempre.

Modelo: A

Test número:

Matemáticas. 1^o de Biología. 25 de Enero de 2008 Curso 2007-2008

1. i) Encontrar las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}.$$

ii) Determinar dos números positivos cuya suma sea 30 y tal que su producto sea **máximo**.

2. i) Dada la función $f(x) = x(4 - x)$, hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a $y = f(x)$ y que pasan por los puntos $P = (0, 0)$ y $Q = (3, 3)$.

ii) Representar el recinto del plano limitado por la gráfica y las rectas tangentes del apartado anterior y calcular su **área** .

iii) Calcular el **volumen** del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar el recinto del apartado anterior alrededor del eje de abscisas (eje OX).

3. i) Sea $f(x) = x^3 - 27x + 25$. **Demostrar** que la ecuación $f(x) = 0$ tiene **tres** soluciones, de las cuales una de ellas se encuentra entre 0 y 3.

ii) Aproximar dicha solución hasta las milésimas, usando para ello el método de Newton.

4. i) Hallar el desarrollo de Taylor de orden tres, para la función $f(x) = \log(a + bx)$, centrado en $x = 0$, dando la expresión del resto.

(Nota: log significa logarítmo neperiano).

ii) Utilizar el desarrollo del apartado anterior, con $a = 1$ y $b = -3$, para calcular de forma aproximada $\log(0,97)$, estimando el error que se comete al despreciar el resto.

5. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & a \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudiar su diagonalización en función de los valores del parámetro a.

Nota: Todos los ejercicios se valoran sobre **2** puntos.

Matemáticas. 1º de Biología. 12 de Septiembre de 2008 Curso 2007-2008

1. i) Encontrar las asíntotas oblicuas de la función

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 + 3x + 2}.$$

ii) Determinar dos números positivos cuyo producto sea 144 y tal que su suma sea mínima.

2. i) Dada la función $f(x) = x^3 + 8$, hallar la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ y que pasa por el punto exterior a la gráfica $P = (0, 10)$.
ii) Representar el recinto del plano limitado por la gráfica y la recta tangente del apartado anterior y calcular su área.
iii) Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar el recinto del apartado anterior alrededor del eje de abscisas (eje OX).

3. i) Demostrar que la ecuación $e^{-x} = 2x$ tiene una única solución.
ii) Aproximar dicha solución hasta las milésimas, usando para ello el método de Newton.

4. i) Hallar el desarrollo de Taylor de orden tres, para la función $f(x) = \sqrt[4]{81 + x}$, centrado en $x = 0$, dando la expresión del resto.
ii) Utilizar el desarrollo del apartado anterior para calcular de forma aproximada $\sqrt[4]{82}$, estimando el error que se comete al despreciar el resto.

5. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

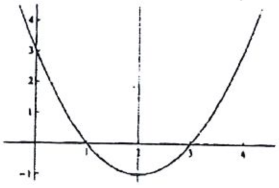
Estudiar su diagonalización en función de los valores del parámetro a.

Nota: Todos los ejercicios se valoran sobre 2 puntos.

1. Dada una función f que cumple $f(0)=0$, $f'(0)=0$ y $f''(0)=1$, se considera la función $g(x)=\log(1+f(x))$ (*Nota*: log es logarítmo neperiano), entonces $g''(0)$ es igual a:
A) 0. B) 1. C) 2.

2. La gráfica de la función **racional** $f(x)=(x^3+3x^2)/(2x^2+b)$ tiene, cualquiera que sea $b\neq 0$, una asíntota oblicua que es la recta:
A) $y=x/b$. B) $y=(x+3)/2$. C) Ninguna de las anteriores.

3. La siguiente figura es la gráfica de la **derivada** de una función f.



Entonces la función f tiene:
A) Un mínimo en $x=2$. B) Un máximo en $x=1$. C) Un máximo en $x=3$.

4. La recta **tangente** a $f(x)=x^5+128$ que pasa por el punto **exterior** a la gráfica de f, de coordenadas $(0,0)$ tiene pendiente igual a:
A) 0. B) 80. C) 5.

5. Dada la función $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}$, se tiene que:
A) $f^{(100)}(0)=0$. B) $f^{(101)}(0)=(101)!$. C) $f^{(100)}(0)=2$.

6. Sea $f(x)=x^2e^{-2x}$. Entonces
A) $f(x)<1$, para todo $x\geq 0$. B) Existe $x\geq 0$ tal que $f(x)=5$ C) Ninguna de las anteriores.

7. El rectángulo cuya base se encuentra sobre el eje de abscisas y cuyos vértices superiores están situados en la parábola de ecuación $y=9-x^2$ y que tiene **área máxima**, tiene un **perímetro** que es igual a:
A) $6+\sqrt{3}$. B) $12+4\sqrt{3}$. C) Ninguna de las anteriores.

8. El desarrollo de Taylor de orden 5, centrado en $a=2$, de una función $f(x)$ es:

$$1+\frac{(x-2)}{3!}-7\frac{(x-2)^2}{2!}-\frac{(x-2)^3}{4!}+\frac{(x-2)^4}{3!}+R_5\ , \qquad \text{entonces:}$$

A) $f'''(2)=1$ B) $f''(2)=-\frac{1}{4}$ C) $f''''(2)=4$.

9. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ 2x+y+(a+1)z=a \\ x-y+az=a \end{cases}$$

A) tiene solución para $a\neq 1$ B) tiene solución para todo a. C) tiene solución para $a\neq -1$.

10. La matriz

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -14 & -8 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{verifica:}$$

A) tiene tres autovalores diferentes B) es diagonalizable C) no es diagonalizable.

Test número: **Modelo: A**

Matemáticas. 1º de Biología. 27 de Enero de 2009 Curso 2008-2009

---

1. i) Hallar la derivada de orden n, en el punto $x = 0$, de la función $f(x) = \log(5+2x)$.

ii) Encontrar las asíntotas de $y = f(x)$, siendo

$$f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-4}.$$

Demostrar que la curva anterior tiene **tres** extremos relativos (máximos o mínimos).

iii) Calcular el **perímetro** del rectángulo de área **máxima** que tiene uno de sus lados sobre el eje OX y los vértices superiores sobre la parábola de ecuación $y = 9 - x^2$.

2. i) Calcular la integral

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-4}\,dx.$$

ii) Se considera el triángulo de vértices los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(a,1)$. Hallar el volumen del sólido que se genera al girar dicho triángulo alrededor del eje OX.

iii) Calcular el valor de a para que el volumen anterior coincida con el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OX el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,a)$.

3. i) **Demostrar** que la ecuación $x^3 = 3x + 3$ tiene solución **única**.

ii) Aproximar dicha solución hasta las milésimas, usando para ello el método de **Newton**.

4. i) Hallar el desarrollo de **Taylor** de orden cinco, para la función $f(x) = \sqrt{4+x}$, centrado en 0, dando la expresión del resto.

ii) Utilizar el desarrollo del apartado anterior, para calcular de forma aproximada $\sqrt{41/10}$, estimando el error que se comete.

5. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

i) Estudiar cuándo es diagonalizable, en función de los valores del parámetro a.

ii) Siendo $a = 3$, calcular una matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal.

Nota: Todos los ejercicios se valoran sobre **2** puntos.

Matemáticas. 1º de Biología. 9 de Septiembre de 2009 (09.09.09) Curso 2008-2009

---

1. i) Hallar la derivada de orden n, en el punto $x = 0$, de la función $f(x) = \sqrt{3+2x}$.
ii) Encontrar las asíntotas de $y = f(x)$, siendo

$$f(x) = \frac{x+5}{x^2+5x+4}.$$

Demostrar que la curva anterior tiene dos extremos relativos (un máximo y un mínimo).
iii) Determinar las dimensiones de un prisma (tetra brik) para que tenga una capacidad de 1 litro y tal que su área lateral (suma de las áreas de sus seis caras) sea **mínima**, suponiendo que las longitudes de los lados de los rectángulos de las bases están en proporción de dos a uno.

2. i) Calcular la integral

$$\int \frac{3x+5}{x^2(x-1)}\,dx.$$

ii) Las curvas $y = 2x^3$ e $y^3 = 8x$ dividen al rectángulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$ y $(1,2)$ en tres recintos planos: uno por encima de las curvas, otro entre las curvas y otro por debajo de ellas. Dibujar dichos recintos y calcular el área del recinto comprendido entre las curvas.
iii) Calcular el volumen del sólido generado al girar el recinto del apartado anterior alrededor del eje OX.

3. i) Demostrar que la ecuación $4x - 2 = \cos x$ tiene solución **única**.
ii) Aproximar dicha solución hasta las milésimas, usando para ello el método de Newton.

4. i) Hallar el desarrollo de Taylor de orden cinco, para la función $f(x) = \log(1+x)$, centrado en 0, dando la expresión del resto.
ii) Utilizar el desarrollo del apartado anterior, para calcular de forma aproximada $\log(21/20)$, estimando el error que se comete.

5. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

i) Estudiar cuándo es diagonalizable, en función de los valores del parámetro a.
ii) Siendo $a = 5$, determinar la matriz diagonal D y una matriz P tal que $A \cdot P = P \cdot D$.

Nota: Todos los ejercicios se valoran sobre 2 puntos.

Matemáticas. 1º de Biología. Curso 2009-2010

---

1. Dadas las funciones f y g que cumplen: $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $g(0) = 2$ y $g'(0) = 6$, se considera la función $h(x) = \sin[f(x) \cdot g(x)]$, entonces $h'(0)$ es igual a:

A) 6. B) 3. C) 2π.

2. La recta $y = 3x - 1$ es una asíntota oblicua de la función racional $f(x) = (ax^2 + bx - 20)/(x - 1)$, entonces:

A) $a = 3, b = -4$. B) $a = -1, b = 3$. C) $a = 3, b = -1$.

3. La función $f(x) = x\, e^{2b^2/x^2}$, con $b > 0$, tiene:

A) Un mínimo en $x = 2b$. B) Un máximo en $x = 2b$. C) Un mínimo en $x = -2b$.

4. La recta **tangente** a $f(x) = x^3 + 16$ que pasa por el punto **exterior** a la gráfica de f, de coordenadas $(0, 0)$ tiene pendiente igual a:

A) 12. B) 0. C) 2.

5. Si $x = 1000000$, los números $a = x^{2009}$ y $b = 12^x$ verifican:

A) $a < b$. B) $a = b$. C) $a > b$.

6. Si $3a + b = 196$, la función $f(a) = a^3 + b$ tiene un máximo si:

A) $a = -1$. B) $a = 1$. C) $a = 14$.

7. El desarrollo de Taylor, centrado en $a = 0$, de la función $f(x) = \sqrt{1 + \alpha x}$ comienza:

A) $1 + \frac{\alpha x}{2} - \frac{\alpha^2 x^2}{8} + \cdots$. B) $1 + \frac{\alpha x}{2} - \frac{\alpha^2 x^2}{16} + \cdots$. C) $1 + \frac{\alpha x}{2} + \frac{\alpha^2 x^2}{8} + \cdots$.

8. La tercera cifra decimal (milésimas) de la única solución de la ecuación $\log(1 + x) = 1 - x$ es (Nota: son logarítmos **neperianos**):

A) 7 B) 6 C) 5.

9. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + y + az = 2 \end{cases}$$

A) Para $a = 7$ es compatible indeterminado B) Para $a = 5$ es incompatible. C) Ninguna de las anteriores.

10. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{verifica:}$$

A) no es diagonalizable si $a = 7$. B) es diagonalizable si $a = 7$. C) para cualquiera valor de a tiene tres autovalores diferentes.

Modelo: A

Test número:

Matemáticas. 1º de Biología. 26 de Enero de 2010 Curso 2009-2010

---

1. i) Encontrar las asíntotas y los extremos de $y = f(x)$, siendo

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 6}.$$

ii) Se consideran los rectángulos con dos vértices en el eje OX y los otros dos en la parte de la curva $y = 16 - x^2$ situada por encima del eje. Calcular, de entre dichos rectángulos, las dimensiones del que tiene área **máxima.**

2. i) Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$$

ii) Se considera la región del plano limitada, en el primer cuadrante, por $y = x^2$, $y = 6x$ e $y = -2x + 8$.
a) Trazar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular su área.
b) Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar el recinto anterior en torno al eje OX.

3. i) **Demostrar** que la ecuación $x^3 - 12x + 24 = 0$ tiene solución **única.**
ii) Aproximar dicha solución hasta las milésimas, usando para ello el método de **Newton.**

4. i) Hallar el desarrollo de **Taylor** de orden tres, para la función $f(x) = \log(2 + 5x)$, centrado en 0, dando la expresión del resto. (**Nota**: logarítmo neperiano).
ii) Utilizar el desarrollo del apartado anterior, para calcular de forma aproximada $\log(41/20)$, estimando el error que se comete.

5. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Encontrar el valor de a para que la matriz tenga los valores propios: $\lambda = 0$, simple y $\lambda = 3$, doble.
ii) Siendo $a = 0$, calcular una matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal.

Nota: Todos los ejercicios se valoran sobre **2** puntos.

3.ARIKETA

$g(x) = \log(1+x)\ ,\ c=0$

a) $P_n(x) = g(c) + \frac{g'(c)\cdot(x-c)^1}{1!} + \frac{g''(c)(x-c)^2}{2!} + \frac{g'''(c)\cdot(x-c)^3}{3!} + \dots \ \frac{g^n(c)\cdot(x-c)^n}{n!}$

Jarraian Taylorren polinomioaren koefizienteak kalkulatuko ditugu: (koefizienteen deribatuen zatic)

$g(c) = \ln(1+0) = 0$

$g'(x) = (1+x)^{-1} \Rightarrow g'(0) = 1$

$g''(x) = -1\cdot(1+x)^{-2} \Rightarrow g''(0) = -1$

$g'''(x) = -1(-2)\cdot(1+x)^{-3} \Rightarrow g'''(0) = 2!$

$g^{IV}(x) = -1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(1+x)^{-4} \Rightarrow g^{IV}(0) = -3!$

$g^{V}(x) = -1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(1+x)^{-5} \Rightarrow g^{V}(0) = 4!$

$g^{VI}(x) = -1\cdot(2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(1+x)^{-6} \Rightarrow g^{VI}(0) = -5!$

$g^{VII}(x) = +6!\cdot(1+x)^{-7} \Rightarrow$ errorearen kalkulurako

HURBILKETA

$P_6(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{\cancel{2!}\cdot x^3}{\cancel{3!}\,3} - \frac{\cancel{3!}\ x^4}{\cancel{4!}\ \cancel{4}4} + \frac{\cancel{4!}\ x^5}{\cancel{5!}\,5} - \frac{\cancel{5!}\ x^6}{\cancel{6!}\,6}$

$\boxed{P_6(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}}$

Taylorren 6.ordenako polinomioa.

b) $\log(1+0{,}01) = \log(1+x)$ ⇒ x = 0,01 puntuan egingo dugu hurbilketa

$\boxed{P_6(0{,}01)} = 0{,}01 - \frac{(0{,}01)^2}{2} + \frac{(0{,}01)^3}{3} - \frac{(0{,}01)^4}{4} + \frac{(0{,}01)^5}{5} - \frac{(0{,}01)^6}{6} = \boxed{9{,}95\cdot 10^{-3}}$

Errorearen estimazioa

$R_6(x) = 6!\cdot(1+z)^{-7}\cdot\frac{x^7}{7!} = \frac{\cancel{6!}\ x^7}{\cancel{7!}\cdot 7} = \frac{x^7}{7}$

$\frac{1}{(1+z)^7}$ Bornatu behar dugu. $\exists z \in (0, 0{,}01)$

Funtzioa tarte horretan beherakorra denez z = 0-rekin bornatuko dugu

$\frac{1}{(1+z)^7} \approx \frac{1}{1^7} =$ ①

$\boxed{R_6(0{,}01)} = \frac{0{,}01^7}{7} = \boxed{1{,}428\cdot 10^{-15}}$

4.ARIKETA

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Polinomio karakteristikoa

$P_A(x) = |A - xI_n| = \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 4 & -3-x \end{vmatrix} = (3-x)\cdot(-3-x)+8 = -9 - \cancel{3x} + \cancel{3x}\ x^2 + 8 = x^2-1$

Balio propioak

$P_A(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+1) = 0$ $\begin{cases} \boxed{x=1} \\ \boxed{x=-1} \end{cases}$ Balio propioak $\{-1, 1\}$

Balio propioei dagozkien bektore propioak

$V(-1) = \{x \in \mathbb{R}^2 / Ax = -1x\}$

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = -x \Rightarrow 4x - 2y = 0 \rightarrow 2x = y \\ 4x - 3y = -y \Rightarrow 4x - 2y = 0 \end{cases}$ ⇒ $\boxed{\text{Bektorea } x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$\boxed{V(-1) = \{x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}\}}$

$V(1) = \{ x \in \mathbb{R}^2 / Ax = x \}$

$\begin{cases} 3x - 2y = x \rightarrow 2x - 2y = 0 \\ 4x - 3y = y \rightarrow 4x - 4y = 0 \end{cases} > \boxed{x = y} \rightarrow$ Bektorea $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{V(1) = \{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \}}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $|P| \neq 0$ $A \sim D$ A diagonalgarria da. $\Rightarrow$

Konprobaketa Diagonalgarria den matrize baten ondokoa bete behar du

$\boxed{D = P^{-1} \cdot A . P}$ P^{-1}-en kalkulua ⊛

⊛

P^{-1}?
① Pausua $|P| = 1$
② Pausua $P^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
③ Pausua $Adj(P^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
④ Pausua $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$ ✓

c) A^{543} eta A^{544}?

$\boxed{A = P . D . P^{-1}}$ $\nearrow$ $A^2 = P . D . \underbrace{P^{-1} . P}_{I} . D . P^{-1} = P . D^2 . P^{-1}$

$\boxed{A^n = P . D^n . P^{-1}}$

$\boxed{A^{543} = P . D^{543} . P^{-1}}$ $\Rightarrow$ D-ren n.garren berredura bilatuko dugu jarraian formula hau kalkulatu ahal izateko

D^n? $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{n = \text{bakoitia}}$ $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{n = \text{bikoitia}}$ $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{543} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$A^{544} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. ARIKETA

$\begin{cases} x + my - z = 1 \\ mx + 3y = 0 \\ 2mx + 7y - mz = 0 \end{cases}$

$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & m & -1 \\ m & 3 & 0 \\ 2m & 7 & -m \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)}_{A|B}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 3 & 0 \\ 2m & 7 & -m \end{vmatrix} = -3m - 7m + 6m + m^3 = m^3 - 4m$

$|A| = 0 \Leftrightarrow m . (m-2) . (m+2) = 0$

$\downarrow$

4. Kasu dira aztertu beharrekoak

1. Kasua

$m = 0$

$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$

- $|A| = 0$ denez hein $(A) \leq 2$. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ denez, $\boxed{\text{hein}(A) = 2}$
- hein$(A|B)$? Badakigu hein $(A|B) \leq 3$, dela printzipioz.

⊛ Hein $(A|B) = 3$ izateko 3x3-ko determinanteren batek EZ nulua izan behar du. 1. zutabea, 3. zutabea eta 4. zutabea proportzionalak direnez, beti determinantea nulua.

$\boxed{\text{hein}(A/B) \leq 2}$

⊛ $\boxed{\text{hein}(A|B) = 2,}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ delako.

S.B. Indeterminatua $\Leftarrow$

Sarrian ebazpena

$\boxed{\text{hein}(A) = \text{hein}(A|B) = 2 < n = 3}$

Matematika. Biozientziak. 2013/01/14 2012-2013

1. i) Irudikatu $f(x) = x^2 e^{-x}$ funtzioa. Aztertu asintotak, muturrak, inflexio puntuak eta gorakortasun, beherakortasun, ahurtasun eta ganbiltasun tarteak.

2. i) Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+x-6}\,dx$$

ii) Izan bedi R lehen koadrantean kokaturiko eremua. Eremu hau $y = x(8-x)$ kurbak eta $(4, 32)$ kurbaren kanpoko puntutik pasatzen diren bi zuzen ukitzaileak mugatzen dute. Kalkulatu R-ren azalera.

iii) Izan bedi $f(x) = \sin x$ funtzioa, kalkulatu, $[0, \pi/2]$ tartean, OX ardatzarekiko biratzerakoan sortzen duen biraketa bolumena.

3. i) **Frogatu** $x^3 + 3x - 7 = 0$ ekuazioak soluzio **bakarra** duela.

ii) Hurbildu soluzio hori milareraino Newton-en metodoa erabilita.

4. i) Izan bedi $f(x) = \sqrt[4]{81+x}$ funtzioa. Kalkulatu $c = 0$ puntuan zentraturiko Taylor-en 3. ordenako garapena eta eman baita hondarraren adierazpena.

ii) Erabili aurreko atala $\sqrt[4]{82}$-ren hurbilketa lortzeko eta eman errorearen estimazioa.

5. Izan bedi

ULERTUTA.

Noiz den
diagonalgarrie
ta noiz ez
↓

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

i) Aztertu A-ren diagonalgarritasuna a parametroaren balioen arabera.

ii) Izan bedi $a = 3$. Kalkulatu P matrizea non $P^{-1}AP$ diagonala den.

6. i) Aurkitu ondoko ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra

$$y'' + y' = e^x + x^2.$$

ii) Populazio baten murriztutako hazkunde modelo bat *Von Bentalanffy*-rena da, honek t adineko arrain baten $L(t)$ luzerak ondoko legea betetzen duela ziurtatzen du:

$$L' = 2(34 - L).$$

Jakinda $L(0) = 2$ dela, zehaztu edozein t adinetarako aipaturiko arrainaren luzera.

Matematika. Biozientziak. 2013/01/14 2012-2013

1. i) Irudikatu $f(x) = x^2e^{-x}$ funtzioa. Aztertu asintotak, muturrak, inflexio puntuak eta gorakortasun, beherakortasun, ahurtasun eta ganbiltasun tarteak.

2. i) Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+x-6}\,dx$$

ii) Izan bedi R lehen koadrantean kokaturiko eremua. Eremu hau $y = x(8-x)$ kurbak eta $(4, 32)$ kurbaren kanpoko puntutik pasatzen diren bi zuzen ukitzaileak mugatzen dute. Kalkulatu R-ren azalera.

iii) Izan bedi $f(x) = \sin x$ funtzioa, kalkulatu, $[0, \pi/2]$ tartean, OX ardatzarekiko biratzerakoan sortzen duen biraketa bolumena.

3. i) **Frogatu** $x^3 + 3x - 7 = 0$ ekuazioak soluzio **bakarra** duela.

ii) Hurbildu soluzio hori milareraino Newton-en metodoa erabilita.

4. i) Izan bedi $f(x) = \sqrt[4]{81+x}$ funtzioa. Kalkulatu $c = 0$ puntuan zentraturiko Taylor-en 3. ordenako garapena eta eman baita hondarraren adierazpena.

ii) Erabili aurreko atala $\sqrt[4]{82}$-ren hurbilketa lortzeko eta eman errorearen estimazioa.

5. Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

i) Aztertu A-ren diagonalgarritasuna a parametroaren balioen arabera.

ii) Izan bedi $a = 3$. Kalkulatu P matrizea non $P^{-1}AP$ diagonala den.

6. i) Aurkitu ondoko ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra

$$y'' + y' = e^x + x^2.$$

ii) Populazio baten murriztutako hazkunde modelo bat *Von Bentalanffy*-rena da, honek t adineko arrain baten $L(t)$ luzerak ondoko legea betetzen duela ziurtatzen du:

$$L' = 2(34 - L).$$

Jakinda $L(0) = 2$ dela, zehaztu edozein t adinetarako aipaturiko arrainaren luzera.

⑥ ii) $L' = 2(34-L)$ $L(t)$ Si L depende del tiempo → $\frac{\quad}{dt}$

$$\frac{dL}{dt} = 2(34-L)$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] Y & (x) \\ L \arrow[u, leftarrow] & (t) \arrow[u, leftarrow] \end{tikzcd}$$

Variables separadas (1er tipo):

$$\frac{\overset{\nearrow y}{dL}}{34-L} = 2(\overset{\nearrow x}{dt})$$

Integramos y ponemos la constante donde esté el x.

$$-1\int\frac{-1dL}{34-L} = \int 2\,dt$$

$$-\ln|34-L| = 2t + K$$

Despejamos la y (en este caso la L)

$$\ominus \ln|34-L| = 2t+K$$

$$\ln|34-L|^{(-1)} = 2t+K$$

$$\cancel{e^{\ln}}(34-L)^{-1} = e^{2t}\cdot e^{K}$$

$$(34-L)^{-1} = e^{2t}+K$$

$$\frac{1}{34-L} = e^{2t}+K \longrightarrow \frac{1}{e^{2t}+K} = 34-L \longrightarrow \boxed{L(t) = 34 - \frac{1}{e^{2t}+K}}$$

Solución general

$L(0) = 2$

$$2 = 34 - \frac{1}{\underbrace{e^{\overset{\to=0}{2t}}}_{e^0=1}+K} \longrightarrow 2 = 34 - \frac{1}{K+1} \longrightarrow 2 = 34 - 1/K \longrightarrow \frac{1}{K} = 32;\ k = 1/32$$

$$\boxed{k = 1/32}$$

Solución particular

i)

2013/01/14

1. ARIKETA

$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

Funtziotik bertatik ateratako informazioa

Izate eremua

$D(f) = \mathbb{R}$

Ardatzekiko ebaki puntuak

- OX ardatzekoak bilatzeko $P(x,0)$ $\Big] \rightarrow \boxed{y=0} \rightarrow x^2 \cdot e^{-x} = 0 \begin{cases} x^2 = 0 & \boxed{x=0} \quad \boxed{P(0,0)} \\ e^{-x} = 0 & x \notin \mathbb{R} \end{cases}$

- OY ardatzekoak bilatzeko $P(0,y)$ $\Big] \rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow f = 0 \Rightarrow P(0,0)$

Simetria

$f(x) = f(-x)$ SIMETRIA OY ardatzarekiko
$f(x) = -f(-x)$ " Jatorriarekiko

$\rightarrow f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{+x} = x^2 \cdot e^{+x} \neq f(x) \neq -f(x)$ Ez dago simetriarik.

Asintotak

Bertikala $\Rightarrow$ $D(y) = \mathbb{R}$ $\rightarrow$ ez dago.

Horizontala $\Rightarrow$ $\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-x} = \boxed{\frac{\infty}{\infty} \text{ INDET.}} = 0 \quad [e^{\infty} >>>> \infty]$ $\boxed{y = 0n}$

Zeiharra $\Rightarrow$ Ez da egongo.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (2x - x^2) = e^{-x} \cdot x \cdot (2-x)$$

Gorakortasun, beherakortasun, MAX eta MIN posibleak

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} \cdot x \cdot (2-x) = 0 \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=2} \\ e^{-x} = 0 \quad x \notin \mathbb{R} \end{cases}$

		0		2	
f	↘		↗		↘
f'	−		+		−

Gorakorra $(0, 2)$
Beherakorra $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Maximoa $x = 2$an
Minimoa $x = 0$an
$\rightarrow$ Konprobaketa 2. deribatuarekin

$$f'' = -e^{-x} \cdot (2x - x^2) + (-2x+2) \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (-2x + x^2 - 2x + 2) = e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2]$$

Ganbiltasun, ahurtasun eta inflexio puntuak

$f''(0) = 1 \cdot 2 = 2 > 0$ $\boxed{\text{MIN } x = 0\text{an}}$ $P_{MIN}(0, f(0))$ $\boxed{P_{MIN}(0,0)}$

$f''(2) = \frac{4-8+2}{} = \frac{-2}{e^2} < 0$ $\boxed{\text{MAX } x = 2\text{an}}$ $\boxed{P_{MAX}\left(2, \frac{4}{e^2}\right)}$

$f'' = 0 \Leftrightarrow e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2) = 0 \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0 \quad x = \frac{+4 \pm \sqrt{16-8}}{2} \begin{cases} \boxed{2+\sqrt{2}} \\ \boxed{2-\sqrt{2}} \end{cases} \\ e^{-x} = 0 \quad x \notin \mathbb{R} \end{cases}$

		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	
f	∪		∩		∪
f''	+		−		+

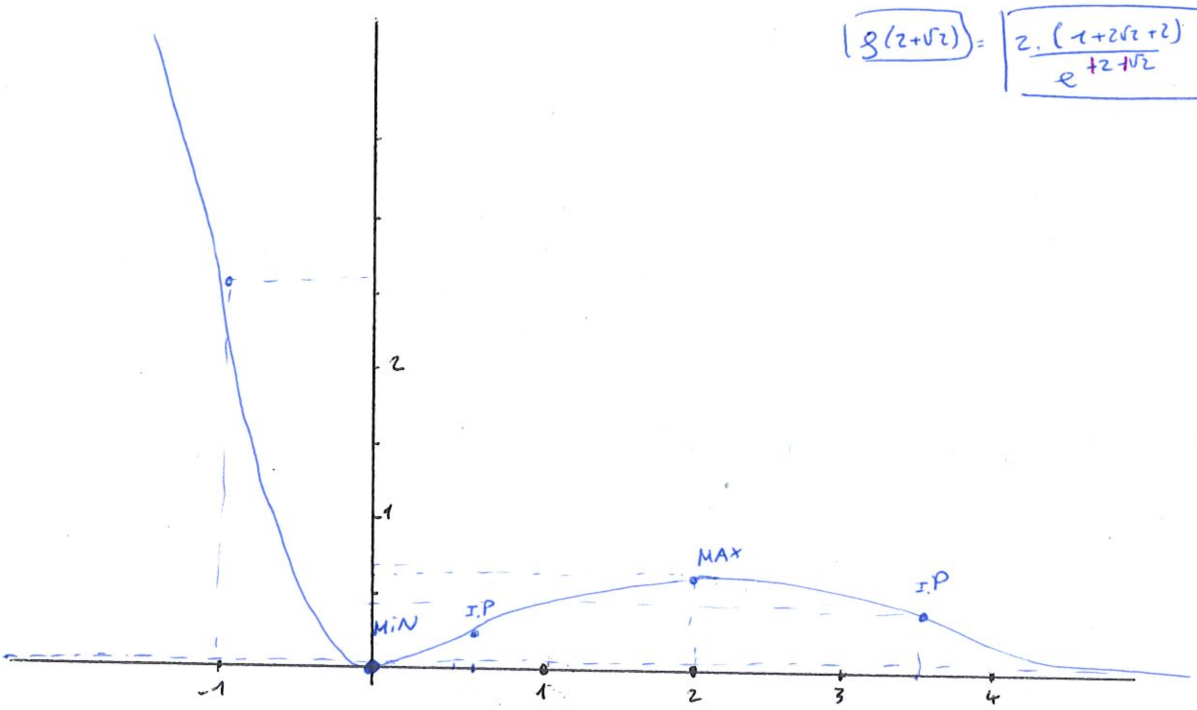
Ahura $(-\infty, 2-\sqrt{2}] \cup (2+\sqrt{2}, +\infty)$
ganbila $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$

$IP_1(2-\sqrt{2}, 0{,}19)$
$IP_2(2+\sqrt{2}, 0{,}88)$

$$\boxed{f(2-\sqrt{2})} = (2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2+\sqrt{2}} = \frac{2-2\sqrt{2}\cdot 2+4}{\cancel{e^{-2+\sqrt{2}}}}$$

$$= \boxed{\frac{2\cdot(1-2\sqrt{2}+2)}{e^{-2+\sqrt{2}}}}$$ Bidertzen!

$$\boxed{f(2+\sqrt{2})} = \boxed{\frac{2\cdot(1+2\sqrt{2}+2)}{e^{+2+\sqrt{2}}}}$$



2. ARIKETA

a) $I = \int \frac{x^3+2}{x^2+x-6}\,dx$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \quad +2 & x^2+x-6 \\ \hline -x^3-x^2+6x & x-1 \\ \quad -x^2+6x+2 & \\ \quad +x^2+x-6 & \\ \quad\quad 7x-4 = H & \end{array}$$

$$\frac{x^3+2}{x^2+x-6} = \frac{(x-1)\cdot\cancel{(x^2+x-6)}}{\cancel{x^2+x-6}} + \frac{7x-4}{x^2+x-6} = x-1+\frac{7x-4}{x^2+x-6}$$

$x^2+x-6=0$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot6}}{2} = \frac{-1\pm5}{2} \to \boxed{x_1=2},\ \boxed{x_2=-3}$$

$$\frac{x^3+2}{x^2+x-6} = x-1+\boxed{\frac{7x-4}{(x-2)\cdot(x+3)}}$$

$$\frac{7x-4}{(x-2)\cdot(x+3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+3)} \dashrightarrow$$

	$7x-4 = A\cdot(x+3)+B\cdot(x-2)$
$x=-3$	$-21-4=-5B \Rightarrow \boxed{5=B}$
$x=2$	$10=5A \Rightarrow \boxed{A=2}$

$$\boxed{\frac{7x-4}{(x-2)\cdot(x+3)} = \frac{2}{x-2}+\frac{5}{x+3}}$$

$$\frac{x^3+2}{x^2+x-6} = x-1+\frac{2}{x-2}+\frac{5}{x+3}$$

$$I = \int x\,dx - \int 1\,dx + \int\frac{2}{x-2}\,dx + \int\frac{5}{x+3}\,dx = \boxed{\frac{x^2}{2} - x + 2\cdot\ln|x-2| + 5\cdot\ln|x+3| + K}$$

2013/01/14

$\boxed{2}$ b) $y = \cancel{x} \cdot (8-x)$
$P(4, 32)$ $\Big] \to$ zuzen ukitzailea

$y - f(a) = f'(a) \cdot (x-a)$

$f'(x) = (8-x) + x \cdot (-1) = -2x + 8$

$\boxed{f'(a) = -2a+8}$

$\boxed{f(a) = a \cdot (8-a)}$

$y = x \cdot (8-x) = -x^2 + 8x$

$E =$
$x_E = \frac{-8}{-2} = +4$

$P(4, 32)$

ⓐ? $\boxed{y - a \cdot (8-a) = (-2a+8) \cdot (x-a)}$

$32 - a \cdot (8-a) = (-2a+8) \cdot (4-a) \Rightarrow \cancel{32} - \cancel{8a} + a^2 = -\cancel{8a} + 2a^2 + \cancel{32} - 8a$

$a^2 - 8a = 0 \Rightarrow a \cdot (a-8) = 0 \to \boxed{a=0}$, $\boxed{a=8}$

$\boxed{y = 8x}$

$\boxed{\text{Zuzen ukitzailea 1}}$

$y - 8 \cdot \cancel{(8-8)}^{0} = -8 \cdot (x-8)$

$\boxed{y = -8x + 64}$

B: zuzen ukitzaileek bat egiten dute

$8x = -8x + 64$

$2 \cdot 8x = 64$ $\boxed{x = 4}$

8x eta parabolak bat egiten dute

$8x = x \cdot (8-x)$

$8x = 8x - x^2 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

-8x +64 eta parabolak bat egiten dute

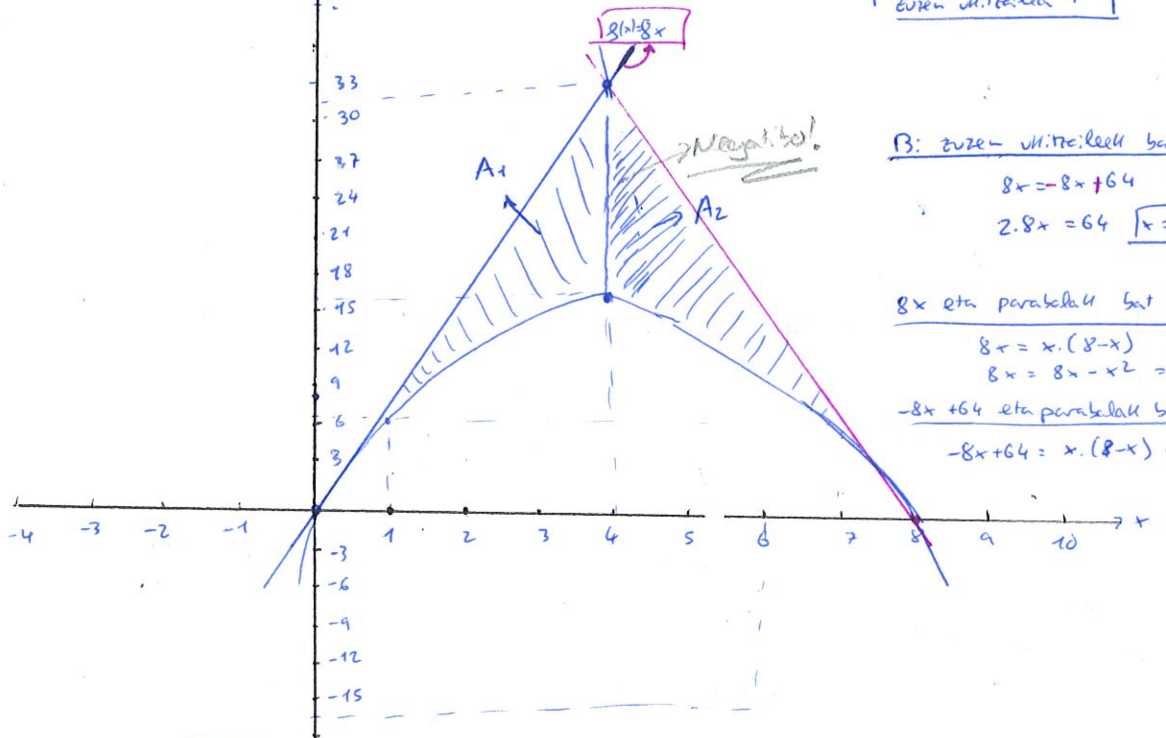
$-8x + 64 = x \cdot (8-x) \Rightarrow -8x + 64 = 8x - x^2$

$x^2 - \cancel{64}16x + 64 = 0$

$x = \frac{+16 \pm \cancel{16\sqrt{15}}^{0}}{2}$ $\boxed{x = 8}$

~~$x_1 = 63$~~

~~$x_2 = 10{,}16$~~

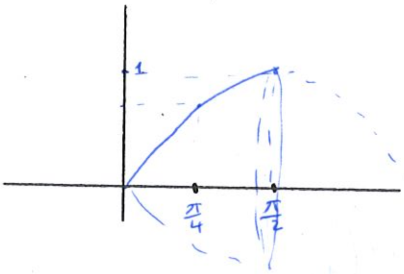


Simetrikoa $\boxed{A_T = 2A_1}$

$\boxed{A_1} = \int_0^4 [8x - x \cdot (8-x)] \, dx = \int_0^4 x \cdot (\cancel{8} - \cancel{8} + x) \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{4^3}{3} = \boxed{\frac{64}{3} u^2}$

$\boxed{A_T} = 2 \cdot \frac{64}{3} = \boxed{\frac{128}{3} u^2}$

c) $f(x) = \sin x$ $[0, \pi/2]$ Ox ardatzarekiko biratzean $\underline{B_{Ox}}$?

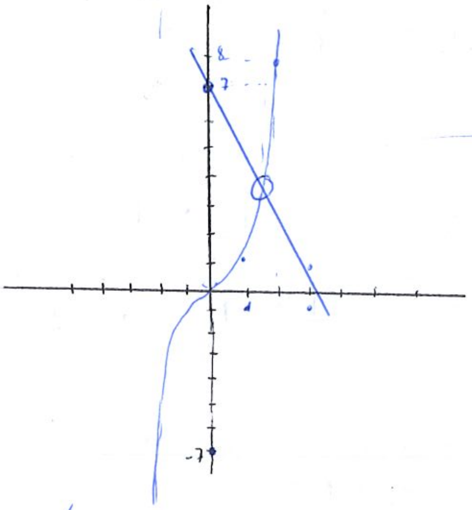


$\boxed{B_{Ox}} = \pi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \pi \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \, dx - \int_0^{\pi/2} + \frac{\cos 2x}{2} dx \right)$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \right]_0^{\pi/2} = \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi^2}{4} u^3}$

$\boxed{3}$ $f(x)=x^3+3x-7$ /④

$x^3=-3x+7$



$\boxed{5}$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&6\\0&2&3\\0&0&a\end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I_3|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&6\\0&2-\lambda&3\\0&0&a-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda).(2-\lambda).(a-\lambda)$$

$\boxed{P_A(\lambda)=0} \Leftrightarrow (1-\lambda).(2-\lambda).(a-\lambda)=0 \to \boxed{\lambda=1}$, $\boxed{\lambda=2}$, $\boxed{\lambda=a}$ Balio propioak $\{a,1,2\}$

$\boxed{4}$ $V(a)$? $V(a)=\{x\in\mathbb{R}^3/Ax=ax\}$

$$\begin{cases}(1-\;)x+2y+6z=ax\\(2-\;)y+3z=ay\\ \cancel{0=0}\end{cases} \boxed{y=\frac{-3z}{2-a}}$$

~~$x=\frac{6z-2y}{1-a}=\frac{6z+\frac{2\cdot3z}{2-a}}{1-a}=\frac{6.(2-a)z+6z}{(2-a).(1-a)}=\frac{6z.(2-a+1)}{(2-a).(1-a)}$,~~

~~$a\neq$ $a\neq2$ denean $V(a)=z\begin{pmatrix}\frac{3-a}{(2-a).(1-a)}\\ \frac{-3}{2-a}\\ z\end{pmatrix}$~~

$$\hookrightarrow\begin{cases}(1-a)x+2y+6z=0\\(2-a)y+3z=0\\0=0\end{cases}$$

$$\boxed{z=\frac{-(2-a)y}{3}}=\boxed{\frac{-(2-a)x}{6}}$$

$$\boxed{y}=\frac{-6z-(1-a)x}{2}=+\frac{\frac{\cancel{6}.(2-a)y}{\cancel{3}}}{\cancel{2}}-\frac{(1-a)x}{2}=\boxed{(2-a)y-\frac{(1-a)x}{2}}$$

$$(2-a-1)y=\frac{(1-a)x}{2}\Rightarrow(\cancel{1-a})y=\frac{(\cancel{1-a})x}{2}\Rightarrow\boxed{y=\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{V(a)=\left\{x\begin{pmatrix}1\\1/2\\ \frac{a+2}{6}\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\right\}}$$

$V(1)=\{x\in\mathbb{R}^3/Ax=x\}$

$$\begin{cases}2y+6z=0\\y+3z=0\\(a-1)z=0\end{cases}$$

$\to \boxed{z=0} \dashrightarrow a\neq1 \dashrightarrow y=0$, $x=x$ $\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ 2.Kasua

$\to \boxed{a=1} \dashrightarrow$ $z=z$, $\boxed{y=-3z}$, $\boxed{x=x}$ $\boxed{\text{1.Kasua}}$ $\begin{pmatrix}x\\-3z\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$

$V(2)=\{x\in\mathbb{R}^3/Ax=2x\}$

$$\begin{cases}-1x+2y+6z=0\\ \cancel{3z=0}\\(a-2)z=0\end{cases}$$

$\to \boxed{z=0} \dashrightarrow$ ~~$a\neq2$ $\begin{pmatrix}x\\x/2\\0\end{pmatrix}$~~

$\to \boxed{a=2} \dashrightarrow$ ~~$z=0$, $y=\frac{x}{2}$, $x=x$~~ $\dashrightarrow \begin{pmatrix}x\\x/2\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{a\neq2 \text{ edo } a=2}$ $z=0$, $x=2y$ $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

2013/01/14

⑤ $V(a)$? $\left| \begin{array}{l} (1-a)x + 2y + 6z = 0 \\ (2-a)y\ \overset{3}{\cancel{6}}z = 0 \\ \cancel{0=0} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2y-6z \cancel{-(1-a)x}}{1-a} = \dfrac{-2y+\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{(2-a)y}{\cancel{3}}}{1-a} = \dfrac{y\cdot(-2+\overset{4}{\cancel{12}}-\overset{2}{\cancel{6}}a)}{1-a} \\ y = y \\ z = \dfrac{-(2-a)y}{3} \end{array} \right.$

$\boxed{1 \neq a}$

$= y\left(\dfrac{\overset{2}{\cancel{10}}-\overset{2}{\cancel{6}}a}{1-a}\right)$

$x = 2y$

$$a \neq 1 \begin{pmatrix} \cancel{\frac{10-6a}{1-a}}^{2} y \\ y \\ -(2-a)y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \overset{2}{\cancel{\frac{10-6a}{1-a}}} \\ 1 \\ -(2-a)\cancel{y} \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -(2-a) \end{pmatrix}$$

EMAITZA

$\boxed{a \neq 1,2} \rightarrow D = \begin{pmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -(2-a) & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{a = 1} \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{a = 2} \Rightarrow A \not\sim D \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} : \quad P \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{6}$ a) $y'' + y' = e^x + x^2$

b) $L' = 2(34-L)$

$\dfrac{dL}{dt} = 2\cdot(34-L) \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dL}{34-L} = \int 2\,dt \Rightarrow -\int \frac{-1}{34-L}\,dL = 2\int 1\,dt \Rightarrow -\ln|34-L| = 2t+K$

$\boxed{e^{\ln|34-L|} = e^{-2t+K}} \Rightarrow 34-L = e^{-2t}\cdot \underbrace{e^{K}}_{\equiv K} \Rightarrow \boxed{L = -K\cdot e^{-2t}+34}$ SOLUZIO OROKORRA

$\boxed{L(0)=2}$

$2 = -K\cdot e^{-2\cdot 0}+34 \Rightarrow 2 = -K+34 \Rightarrow \boxed{K = +32}$ $\Big\} \rightarrow$ SOLUZIO PARTIKULARRA $\boxed{L = -32\cdot e^{-2t}+34}$

$L = -\dfrac{1}{\frac{1}{32}\cdot e^{2t}} + 34$

$\boxed{y = \dfrac{e^{-2t}+68}{2}}$

2013/06/26

$\boxed{1}$ $y = \frac{x^2}{x^2+3}$

Izate eremua

$D(y) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x^2+3 \neq 0 \}$

$x^2 = -3 \Rightarrow x = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$ $\rightarrow \boxed{D(y) = \mathbb{R}}$

Ardatzerekiko ebaki puntuak

OX ardatzerekiko ebaki puntuak $P(x,0)$ $\rightarrow \boxed{y=0}$ $\quad \frac{x^2}{x^2+3} = 0 \quad \boxed{x=0} \quad \boxed{P(0,0)}$

OY ardatzerekiko ebaki puntuak $P(0,y)$ $\rightarrow \boxed{x=0}$ $\quad y = \frac{0}{3} = 0 \quad y=0 \quad P(0,0)$

Simetria

$f(-x) = -f(x)$ Jatorriarekiko

$f(x) = f(-x)$ OY ardatzarekiko

$\rightarrow \boxed{f(-x)} = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+3} = \frac{x^2}{x^2+3} = \boxed{f(x)}$ $\boxed{\text{OY ardatzarekiko simetria}}$

Asintotak

Bertikala ⇒ $D(y) = \mathbb{R}$ Ez dago

Horizontala ⇒ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = \boxed{\frac{\infty}{\infty} \text{ INDET}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \boxed{1}$ $\boxed{y = 1\text{ean}}$

Zeiharra ⇒ ez da egongo

$$\boxed{y'} = \frac{2x\cdot(x^2+3) - 2x\cdot(x^2)}{(x^2+3)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 6x - \cancel{2x^3}}{(x^2+3)^2} = \boxed{\frac{6x}{(x^2+3)^2}}$$

Gora., Behe. MAX, MIN

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{(x^2+3)^2} = 0$ $\boxed{x = 0\text{an}}$

		0 MIN	
f	↘	☐	↗
f'	−		+

Gorakorra $(0, \infty)$
Beherakorra $(-\infty, 0)$

$$\boxed{y''} = \frac{6\cdot(x^2+3)^{\cancel{2}} - 2\cdot\cancel{(x^2+3)}\cdot 2x\cdot 6x}{(x^2+3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{6x^2+18 - 24x^2}{(x^2+3)^3} = \boxed{\frac{-18\cdot(x^2-1)}{(x^2+3)^3}}$$

Ahurra, Ganbila, I.P

MIN $x=0$n?

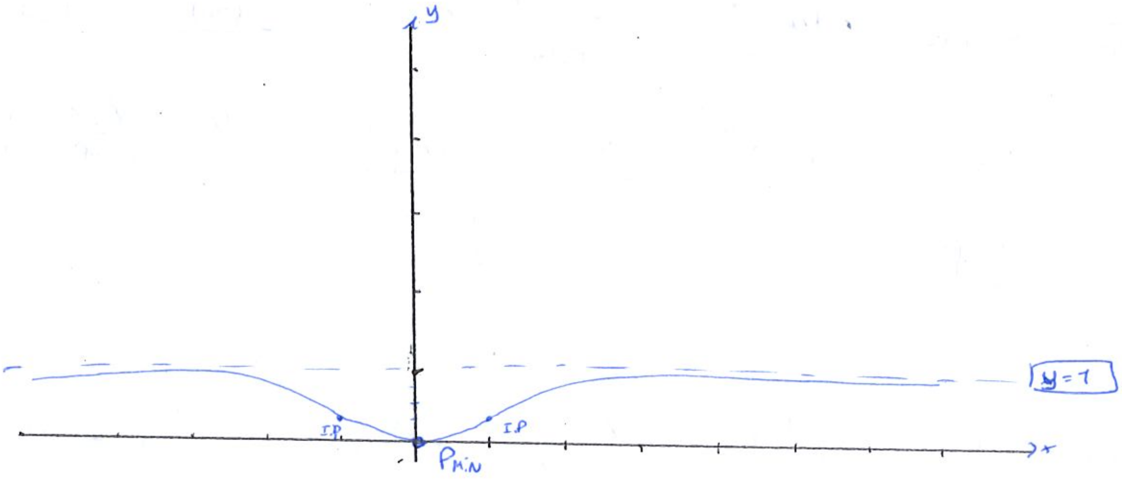
$y''(0) > 0$ MIN $x=0$an $\boxed{P_{min}(0,0)}$

$y''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-18\cdot(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = 0$ $\rightarrow \boxed{x=1}$, $\boxed{x=-1}$

		−1		1	
f	∩	☐	∪	☐	∩
f''	−		+		−

Ahurra $(-1, 1)$
Ganbila $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$I.P_1(-1, 1/4)$
$IP_2(1, 1/4)$

2013/06/26



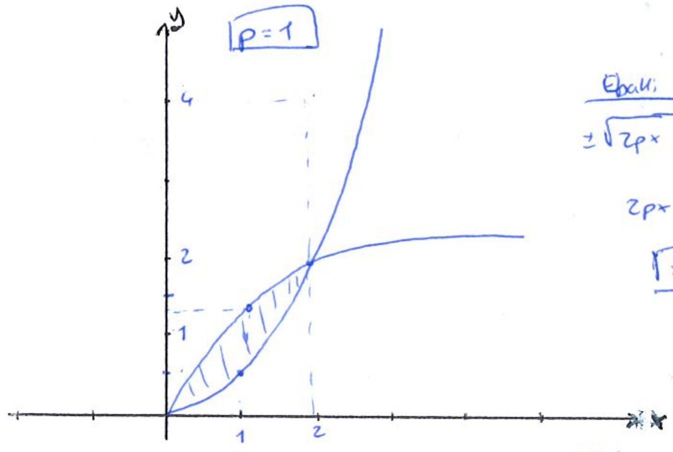
12 Kalkulatu:

a) $\int x\cdot e^{-x}dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = 1dx \\ dv = e^{-x}dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right\} = -x\cdot e^{-x} - \int -e^{-x}\cdot 1dx = -x\cdot e^{-x} + (-1)\cdot e^{-x} + K$

$= \boxed{-e^{-x}\cdot(x+1)+K}$

b) $y^2 = 2px \xrightarrow{p>0} y = \pm\sqrt{2px}$

$x^2 = 2py \longrightarrow y = \frac{x^2}{2p}$

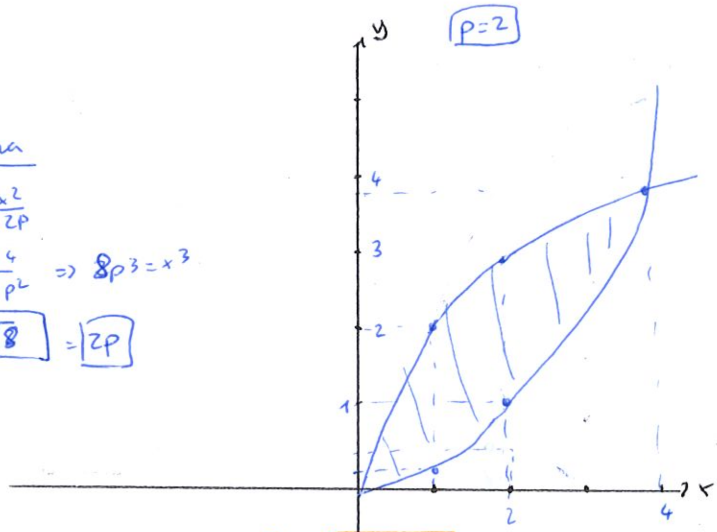


Ebaki puntua

$\pm\sqrt{2px} = \frac{x^2}{2p}$

$2px = \frac{x^4}{4p^2} \Rightarrow 8p^3 = x^3$

$\boxed{x = p\sqrt[3]{8}} = \boxed{2p}$



Aldatzen doa azalera.

KENKETA!

!

$\boxed{\int_0^{2p}\frac{\sqrt{2px}}{\frac{x^2}{2p}}dx} = 2p\sqrt{2p}\cdot\left[\frac{-2}{3}x^{-3/2}\right]_0^{2p} = \frac{-2}{3}\cdot\frac{2p\cdot\sqrt{2p}}{\sqrt{(2p)^3}} = -\frac{2}{3}\frac{2p\cdot\sqrt{2p}}{2p\cdot\sqrt{2p}} = \boxed{1u^2}$ p>0

↱ $-2\cdot2\cdot p\,u^2 = \boxed{-4pu^2}$

↳ Negatibo?

$\int\frac{\sqrt{2px}}{\frac{x^2}{2p}}dx = \int\frac{2p\cdot\sqrt{2p}\cdot\sqrt{x}}{x^2}dx = 2p\cdot\sqrt{2p}\cdot\int x^{\frac{1}{2}-2}dx = \boxed{2p\cdot\sqrt{2p}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}+K}$

$B_{ox} = \pi\int_0^{2p}\left(\frac{\sqrt{2px}}{\frac{x^2}{2p}}\right)^2 dx = \pi\cdot\int_0^{2p}\frac{2px}{x^4/4p^2}dx = \pi\cdot\int_0^{2p}\frac{8\cdot p^3 x}{x^{4}3}dx = \pi\cdot8\cdot p3\cdot\int_0^{2p}x^{-3}dx = \pi\cdot8\cdot p^3\cdot\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_0^{2p}$

$= \frac{\pi\cdot8\cdot p^3}{-2}\cdot\left[\frac{1}{2^2p^2}\right] = -\pi\frac{8\cdot p^3}{8\,p^2} = \boxed{-\pi p\,u^3}$ → Negatibo benira?

$$A = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)dx = \left[\frac{2\cdot\sqrt{2p}\cdot x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{6p}\right]_0^{2p} = \frac{2\cdot\sqrt{2p}\cdot\sqrt{(2p)^3}}{3} - \frac{(2p)^3}{6p} = \frac{2\cdot(2p)^2\cdot 2p - (2p)^3}{6p}$$

$$\int\sqrt{2px} = \sqrt{2p}\int x^{+\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{2p}\cdot x^{3/2}}{3}$$

$$\int\frac{x^2}{2p}dx = \frac{1}{2p}\cdot\frac{x^3}{3}$$

$$\boxed{A} = \frac{(2p)^3\cdot(2-1)}{6p} = \frac{2^{\cancel{3}\,2}\cdot p^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{p}} = \boxed{\frac{4p^2}{3}}u^2$$

$$B_{ox} = \pi\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)^2 dx = \pi\int_0^{2p}\left[(\sqrt{2px})^2 - \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{2px}\cdot x^2}{\cancel{2}p} + \frac{x^4}{2^2p^2}\right]dx = \pi\int_0^{2p}\left[2px - \frac{x^2\cdot\sqrt{2px}}{p} + \frac{x^4}{4p^2}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{\cancel{2}px^2}{\cancel{2}} - \frac{\sqrt{2\cdot p}}{p}\cdot\frac{x^{5/2+1}}{7/2} + \frac{1}{4p^2}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^{2p} = \pi\cdot\left[p(2p)^2 - \frac{2\sqrt{2p}}{p}\cdot\frac{(2p)^{7/2}}{7} + \frac{(2p)^5}{4p^2\cdot 5}\right]$$

$$= \pi\left[4\cdot p^3 - \frac{2\cdot(2p)^3\cdot\sqrt{2p}\cdot\sqrt{2p}}{p\cdot 7} + \frac{2^{\cancel{5}\,3}\cdot p^{\cancel{5}\,3}}{\cancel{4}\cdot\cancel{p^2}\cdot 5}\right] = \pi\cdot\left[4p^3 - \frac{2\cdot 2^4\cdot p^{\cancel{4}\,3}}{7\cancel{p}} + \frac{2^3\cdot p^3}{5}\right]$$

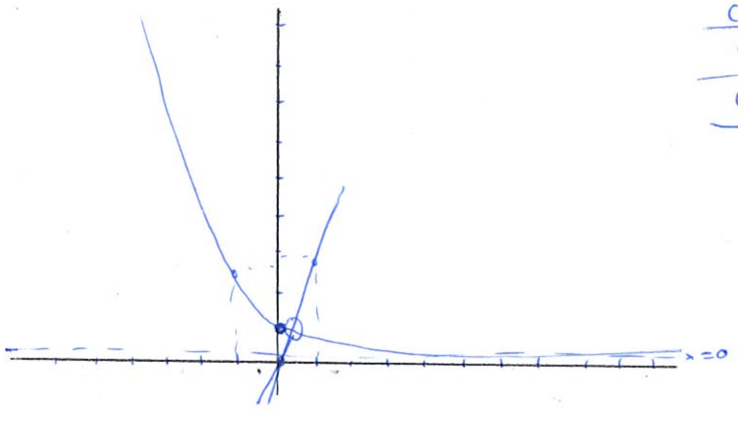
$$= \pi\cdot\left[\frac{35\cdot(4\cdot p^3) - 5\cdot 2^5\cdot p^3 + 7\cdot(2^3\cdot p^3)}{35}\right] = \frac{\pi\cdot p^3}{35}\cdot(35 - 5\cdot 2^5 + 7\cdot 2^3) = \boxed{\frac{-69\pi\cdot p^3}{35}}$$

↳ negatibo!!

3 $e^{-x} = 3x - 1$ soluzio balkorra.

$\boxed{g(x) = e^{-x} - 3x}$ $\boxed{g'(x) = -e^{-x} - 3}$

c_n	$g(c_n)$	$g'(c_n)$	c_{n+1}
0,25	$2,88007831\cdot 10^{-2}$	$-3,77880078$	0,257621659
c_2 -	$2,26162380\cdot 10^{-5}$	$-3,77288759$	0,257627724



4 Taylor 3.ordenakoa $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ $c=0$

$\boxed{g(0) = 4}$ (2/3)

$$g'(x) = \frac{1}{3}\cdot(64+x)^{\frac{1}{3}-1} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{3\cdot 16}$$

$$g''(x) = \frac{1\cdot(-2)}{3^2}\cdot(64+x)^{-\frac{2}{3}-1} \Rightarrow g''(0) = \frac{-2}{3^2\cdot 1024}$$

$$g'''(x) = \frac{1\cdot(-2)\cdot(-5)\,(64+x)^{-\frac{8}{3}}}{3^3} \Rightarrow g'''(0) = \frac{10}{3^3\cdot 65536}$$

$$g^{IV}(x) = \frac{1\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot(-8)\cdot(64+x)^{-\frac{11}{3}}}{3^4}$$

$$P_3(x) = 4 + \frac{x}{3\cdot 16} - \frac{\cancel{2}x^2}{3^2\cdot 1024\cdot\cancel{2}!} + \frac{10x^3}{3^2\cdot 65536\cdot 3!}$$

$$= \boxed{4 + \frac{x}{48} - \frac{x^2}{9216} + \frac{5x^3}{1769472}}$$

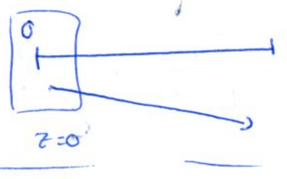
$$R_3(x) = \frac{-\cancel{2}\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot(64+\cancel{z})^{11/3}}\cdot\frac{(x)^4}{\cancel{4}!\,3\cdot 4} = \frac{-40x^4}{3^5\cdot 4\cdot 351729986}$$

$\sqrt[3]{65} \approx P_3(1) = 4,02072765$

Hondarra $R_3(1) = -1,16499588\cdot 10^{-10}$

$\exists z \in (0,x)$

$\frac{1}{(64+z)^{11/3}}$ - - - >



2013/06/26

5

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $P_A(x) = |A - xI_2| = \begin{vmatrix} 1-x & a \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)\cdot(2-x) = -a$

$P_A(x) = 0 \iff 2 - x - 2x + x^2 = -a \Rightarrow x^2 - 3x + 2 + a = 0$

$$\begin{array}{r|rrl} & 1 & -3 & +2+a \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{a=0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrl} & 1 & -3 & +2+a \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{a=0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrl} & 1 & -3 & +2+a \\ 3 & & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & \boxed{2+a=0} \end{array}$$

$\boxed{a=-2}$

.. v(0) ez da existitzen.

1.KASUA

A parametroaren arabera aztertu. $\boxed{a=0} \rightarrow P_A(x) = (1-x)\cdot(2-x)$

$\boxed{a \neq 0 \text{ den kasuetan?}}$

6 $y' = 2y(x+1)$

$\int \frac{dy}{y} = \int 2\cdot(x+1)dx \Rightarrow \underline{\ln|y|} = 2\cdot\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + K = \underline{x^2 + 2x + K}$

$e^{\ln|y|} = e^{x^2+2x+K} \Rightarrow \boxed{y =} e^{x^2+2x} \cdot \underbrace{e^K}_{\equiv K} = \boxed{e^{x^2+2x} \cdot K}$

$y(1) = 1$

$1 = e^{1+2} \cdot K \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{e^3}}$

1.KASUA

$v(1) = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = x\}$

$\begin{cases} 0 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\boxed{x = -y} \rightarrow v(1) = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\}$

$v(2) = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 2x\}$

$\begin{cases} -x + \cancelto{0}{ay} = 0 \\ +x \qquad = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} y = y \\ x = 0 \end{matrix}} \Rightarrow v(2) = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $|P| \neq 0$ $\boxed{A \sim D}$

b) $a = 6$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $P_A(x) = (1-x)\cdot(2-x) - 6 = 2 - x - 2x + x^2 - 6 = x^2 - 3x - 4$

$P_A(x) = 0 \iff x = \frac{+3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{+3 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow \boxed{x_1 = 4} \\ \searrow \boxed{x_2 = -1} \end{matrix}$

$v(4) = \ldots$

$\begin{matrix} -3x + 6y = 0 & x = 2y \\ x - 2y = 0 & x = 2y \end{matrix} > v(4) = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v(-1) = \ldots$

$\begin{matrix} 2x + 6y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{matrix}$ $v(-1) = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $|P| \neq 0$

$A \sim D$

$\boxed{D = P^{-1} \cdot A \cdot P}$

$\boxed{P^{-1}?}$ $|P| = 5$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & +3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ✓

54

Matematika. Biozientziak. 2013/06/26 2012-2013

NTZIO ARRUNTA
RUDIKAPENA

1\. i) Irudikatu $y = x^2/(x^2+3)$ funtzioa eta zehaztu asintotak, muturrak eta inflexio puntuak.

NTEGRAL
MUGAGABEA

→ 2. i) Kalkulatu ondoko integrala

$$\int xe^{-x}\,dx.$$

GRAL
MUGATUA

ii) Izan bitez $p > 0$ eta R lehenengo koadrantean kokaturiko eremua, $y^2 = 2px$ eta $x^2 = 2py$ kurbek mugatzen dutena. Kalkulatu R-ren azalera. (INTEGRAL. MUGATUA)

iii) Aurkitu aurreko ataleko eremuak OX ardatzarekiko biratzerakoan sortzen duen biraketa bolumena.

ZANO
\+ MAXIMO-MINIMO

3\. i) Frogatu $e^{-x} = 3x$ ekuazioak soluzio bakarra duela.

Bolzano + Maximo-minimoak kalkulatu

NEWTON

ii) Hurbildu soluzio hori milareneraino Newton-en metodoa erabilita (erabili ahal izanez gero).

0'001

TAYLOR

4\. i) Izan bedi $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ funtzioa. Kalkulatu $c = 0$ puntuan zentraturiko Taylor-en 3. ordenako garapena, baita hondarraren adierazpena ere.

ii) Erabili aurreko atala $\sqrt[3]{65}$-ren hurbilketa lortzeko eta eman errorearen estimazioa.

BEKTOREAK
[illegible] BEREZIAK

→ 5. Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ez azpiespazioak bakarrik

i) Aztertu A-ren diagonalgarritasuna a parametroaren balioen arabera.

ii) Izan bedi $a = 6$. Kalkulatu P matrizea non $P^{-1}AP$ diagonala den.

Matrizeak
edo bektoreak
agertu ahal dira

→ Seguruenik
bektoreak

→ 6. i) Aurkitu ondoko ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra

AZIO
FERENTZIALAK

$$y'' - 3y' = e^x + 1.$$

ii) Laborategi batean bakterio berri baten hazkundea ondoko legearekin elkartuta dagoela aztertu dute:

$$y' = 2y(x+1).$$

Jakinda $y(1) = 1$ dela, zehaztu edozein x denboratarako aipaturiko bakterioaren egoera ematen duen funtzioa.

$$y' = 2y(x+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y(x+1)$$

$$\int \frac{dy}{2y} = \int (x+1)\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \cancel{x} + k$$

$$\boxed{\ln y = x^2 + 2x + k}$$

$$y = e^{x^2+2x+k}$$

$$y(1) = 1$$

$$0 = 1 + 2 + k$$

$$k = -3$$

→ Beraz, $\boxed{y = e^{x^2+2x-3}}$

2012/01/11

$\boxed{1}$ $y = x \cdot e^{-x}$

<u>EB.</u>

$P(0,0)$

Asintotak

$B \Rightarrow$ Et du $D(y) = \mathbb{R}$

$H \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

$Z \Rightarrow$ Et du.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot e^x}{x} = \boxed{\infty = m}$

$y' = e^{-x} + (-1) \cdot e^{-x} \cdot x = e^{-x} \cdot (1-x)$

$y' = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0 \quad x \notin \mathbb{R}$

$\boxed{1 = x}$

		$\boxed{1}$	
f	↗		↘
f'	+		−

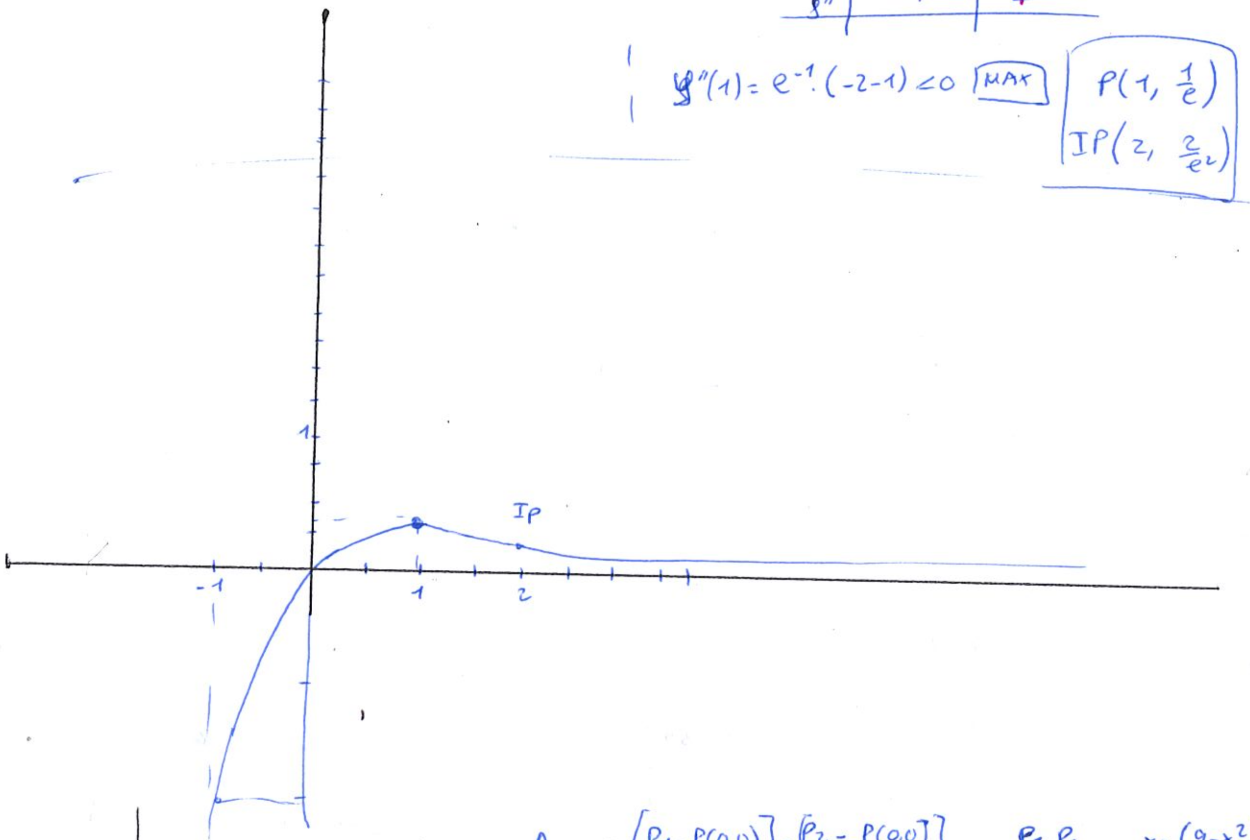
$y'' = +e^{-x} \cdot (-1) + (-1) \cdot e^{-x} \cdot (1+x) = e^{-x} \cdot \overset{-2+x}{(\cancel{-1} - 1 + x)}$

$\boxed{x = \cancel{+}2}$

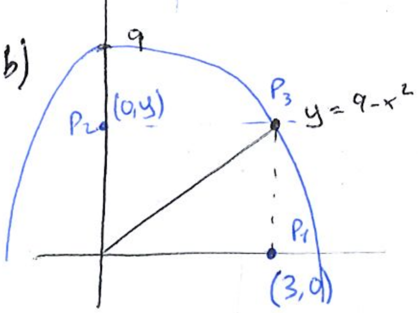
		2	
	∩		∪
f''	−		+

$y''(1) = e^{-1} \cdot (-2-1) < 0 \ \boxed{MAX}$

$$\boxed{\begin{array}{l} P\left(1, \frac{1}{e}\right) \\ IP\left(2, \frac{2}{e^2}\right) \end{array}}$$



b)



$A_{MAX} = \frac{[P_1 - P(0,0)] \cdot [P_2 - P(0,0)]}{2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{2} = \frac{x \cdot (9-x^2)}{2}$

$A_{MAX}' = \frac{1}{2} \cdot \left[(9-x^2) + (-2x) \cdot x\right] = \frac{9 - x^2 - 2x^2}{2} = \frac{-3x^2+9}{2}$

$\boxed{A_{MAX}' = 0} \Leftrightarrow \frac{-3x^2+9}{2} = 0 \quad x^2 = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$

$A_{MAX}'' = \frac{1}{2} \cdot (-6x)$

$A_{MAX}''(+\sqrt{3}) < 0 \ \boxed{MAX \quad x = \sqrt{3}}$

$A_{MAX}''(-\sqrt{3}) > 0$ MIN

$P_1(0, 6)$

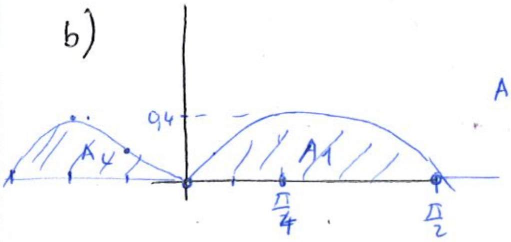
$P_3(x, y) = P_3(\sqrt{3},$

②

$$I=\int x^2\cdot\cos x\,dx = \left\{\begin{array}{l} u=x^2 \to du=2x\,dx \\ dv=\cos x\,dx \to v=\int\cos x\,dx=\sin x\end{array}\right\} = x^2\cdot\sin x-\int 2x\cdot\sin x\,dx = \left\{\begin{array}{l} u=x\to du=dx\\ \sin x\overset{dx}{=}dv\to v=-\cos x\end{array}\right\}$$

$$= x^2\sin x - 2\cdot\left(-x\cos x+\int \cos x\,dx\right) = \boxed{x^2\sin x+2x\cdot\cos x-2\sin x}$$

b)



$A_1=A_2$

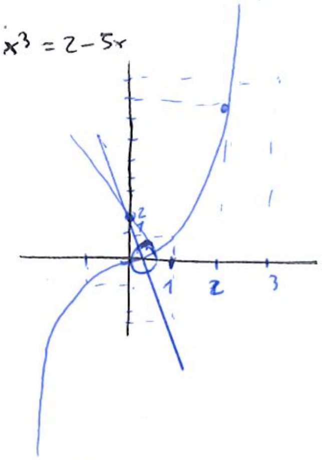
$A_T=2.A_1$

$$A_1=\int_0^{\pi/2}(x^2\cdot\cos x)\,dx=\left[x^2\sin x+2x\cdot\cos x-2\sin x\right]_0^{\pi/2}$$

$$=0+\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-2\right]=-2+\frac{\pi^2}{4}=\boxed{0,4674\,u^2}$$

$$\boxed{A_T=0,9348\,u^2}$$

③ a) $x^3=2-5x$



Jarraiu...

$\boxed{g(x)=x^3+5x-2}$ $\boxed{g'(x)=3x^2+5}$

$\boxed{g(1).g(0)<0}$

$$C_{n+1}=C_n-\frac{g(C_n)}{g'(C_n)}$$

n	C_n	$g(C_n)$	$g'(C_n)$	C_{n+1}
1	0,3	-0,473	5,27	0,389753321 $=C_2$
2	C_2	$7,97311482.10^{-3}$	5,45572295	0,388241901 $=C_3$
3	C_3	$2,50542483.10^{-6}$	5,45231180	$\boxed{0,388241441=C_4}$

④ $g(x)=\ln(1-x)$

$g(0)=\ln 1=0$

$g'(x)=\frac{-1}{1-x}=-1.(1-x)^{-1}\Rightarrow g'(0)=-1$

$g''(x)=-1.(1-x)^{-2}\Rightarrow g''(0)=-1!$

$g'''(x)=-1.(-2).(-1).(1-x)^{-3}\Rightarrow g'''(0)=-2!$

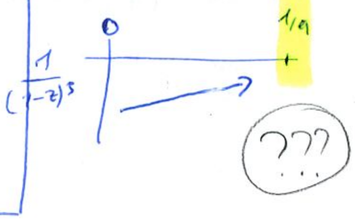
$g^{IV}(x)=(-1)(-2).(-3).(1-x)^{-4}\Rightarrow g^{IV}(0)=-3!$

$g^{V}(x)=1.(-2).(-3).(-1).(1-x)^{-5}$ ⇒ HONDARRA

$$P_4(x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3!}-\frac{3!\,x^4}{4!}$$

$$=\boxed{-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}}$$

$$R_4(x)=-\cancel{4!}(1-z)^{-5}\cdot\frac{x^5}{5\cancel{!}}$$



$$\boxed{R_4(x)=-\frac{x^5}{(1-1/9)^5\cdot 5}}$$

8.omialdea

Azterketa 2001

1. ARIKETA

a) $g(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$

$$g(x) = \arctan u \Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{u'}{1+u^2}}$$

Pausoka kalkulatuko dugu deribatua.

$$u' = \frac{(1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2+1}{\cancel{(1+x^2)^2}}$$

$$1+u^2 = 1 + \frac{(x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^4+2x^2+1+x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{-(x^2-1)}{\cancel{(1+x^2)^2}}}{\frac{x^4+3x^2+1}{\cancel{(1+x^2)^2}}} = \boxed{-\frac{x^2-1}{x^4+3x^2+1}}$$

$x^4+3x^2+1 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ +1 & & -1 & 1 & & \\ \hline & 1 & -1 & & & \end{array}$$

$g(x) = \sin^3(x^4-x) = (\sin(x^4-x))^3$

$$g'(x) = 3 \cdot (\sin(x^4-x))^2 \cdot (\sin(x^4-x))' = 3 \cdot \sin^2(x^4-x) \cdot (4x^3-1) \cdot (\cos(x^4-x)) = \boxed{3 \cdot (4x^3-1) \cdot \cos(x^4-x) \cdot \sin^2(x^4-x)}$$

b) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \\ dx = \frac{2dt}{t^2+1} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\frac{2t}{\cancel{t^2+1}}} \cdot \frac{2dt}{\cancel{t^2+1}} = \int t^{-1} dt = \ln|t| + K = \boxed{\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + K}$$

x+3x+2
1 2
2 1:0

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0:H} \end{array}$$

x^2+1

$$\to \frac{x^2+3x+2}{(x-1)\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1) \cdot x^2+1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+3x+2 = A(x^2+1)+(Bx+C)\cdot(x-1) \\ \hline 1 & 6 = 2A \quad \boxed{A=3} \\ \hline 0 & 2 = A + (-Bx) - C \quad -2+3 = +\cancel{Bx}+C \quad \boxed{\cancel{Bx}+C = 1} \\ \hline -1 & 0 = 2A + (+2B) + (-C) \end{array}$$

$2B = -2A + C$

$2B = -2 \cdot 3 + 1 = -$

$\boxed{B = -5/2}$

$$I = \int \frac{2+3x+x^2}{x^3-x^2+x-1} dx =$$

$$I = \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{-5/2x+1}{x^2+1} dx$$

$$I = 3\ln|x-1| + \left(-\frac{5}{2}\right)\int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = 3\ln|x-1| + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \arctan(x)$$

$$= \boxed{3\ln|x-1| - \frac{5}{4} \cdot \ln|x^2+1| + \arctan(x) + K}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x - z = 1 \\ 3y = 0 \\ \cancel{7y = 0} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x} = 1+z = \boxed{1+z} \\ \boxed{y=0} \\ \boxed{z=\lambda} \end{array}\right.$$

2. Kasua

$m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

- $|A|=0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ $\boxed{\text{hein}(A)=2}$
- hein $(A|B)$?

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \quad \boxed{\text{hein}(A|B)=3}$$

$\rightarrow$ S.Be. $h(A) \neq \text{hein}(A|B)$

3. Kasua

$m=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

- $|A|=0$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ $\boxed{\text{hein}(A)=2}$
- hein $(A|B)$?

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \quad \boxed{\text{hein}(A|B)=3}$$

$\rightarrow$ S.B.e

4. Kasua

$\boxed{m \neq 0, \ m \neq 2, \ m \neq -2}$

- $|A| \neq 0$ hein$(A)=3$
- hein$(A|B)=3$

$\rightarrow$ S.B.D $\boxed{\text{hein}(A) = \text{hein}(A|B) = 3 = n}$ Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3\cancel{m}}{\cancel{m}.(m-2).(m+2)} = \boxed{\frac{-3}{m^2-4}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ m & 0 & 0 \\ 2m & 0 & -m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-m^{\cancel{2}}}{\cancel{m}.(m^2-4)} = \boxed{-\frac{m}{m^2-4}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 3 & 0 \\ 2m & 7 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7m - 6m}{|A|} = \boxed{\frac{1}{m^2-4}}$$

Matematika.2012/01/11 2012 / 01 / 11 2011-2012

Irudikatu $y = xe^{-x}$ funtzioa.

Izan bedi T lehen koadrantean kokaturiko triangelu zuzen bat. Triangelu horren kateto bat abzisa ardatzean dago, beste kateto bertikalak erpin bat abzisa ardatzean eta beste erpina $y = 9 - x^2$ parabolan ditu eta hirugarren aldeak (hipotenusa) azken erpina eta jatorriko puntua lotzen ditu. Mota honetako triangeluen artean kalkulatu azalera maximoa duena.

2 Kalkulatu ondoko integrala

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

Kalkulatu $y = x^2 \cos x$ kurbak $[-\pi/2, \pi/2]$ tartean mugatzen duen eremuaren azalera.

i) **Frogatu** $x^3 = 2 - 5x$ ekuazioak soluzio **bakarra** duela.
ii) Newton-en metodoa erabilita, hurbildu soluzio hori milareraino.

LOGARITMOK BETI NEPERIANOK IZANGOIE !

i) Izan bedi $f(x) = \log(1 - x)$ funtzioa. Eman $c = 0$ puntuan zentraturiko Taylor-en laugarren ordenako polinomioa eta baita hondarraren adierazpena.

Erabili aurreko atalean lortutakoa $\log(8/9)$-ren hurbilketa lortzeko.

$\log(8/9) = \log(0'88) = \log(1-$

$\log(101/100) = \log(1'01) = \log(1+$

Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Aztertu A-ren diagonalgarritasuna a parametroaren arabera.

~~6.~~ Eman ondoko ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra

$$y'' - 4y = e^{2x}.$$

Matematika. Biologia. 2011/06/01

---

1. Ariketa Irudikatu $y = (x^2 + x)\, e^{-x}$ funtzioa. Kalkulatu eta marraztu y funtzioaren zuzen ukitzaileak bere inflexio puntuetan.

2. Ariketa
Kalkulatu honako integralak:

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx \quad \text{eta} \quad \int \frac{5-x}{2x^2+x-1}\, dx.$$

3. Ariketa
Izan bitez bi poste, 12 eta 28 metro luzerakoak hurrenez hurren eta beraien arteko distantzia 30 metrokoa delarik. Aurkitu puntu bat bi posteen oinarriak lotzen dituen zuzenean, non kable batek lotzen baditu poste bakoitzaren muturra puntu horrekin kable horren luzera **minimoa** den.

4. Ariketa
Kalkulatu $f(x) = \sqrt{100+x}$ funtzioaren $c = 0$ puntuan zentraturiko Taylor-en 3. ordenako garapena , eman baita hondarraren adierazpena. Aurreko kalkukua kontuan harturik, kalkulatu $\sqrt{101}$ eta estimatu egin den errorea.

5. Ariketa
Izan bedi A honako matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

i) Aztertu bere diagonalgarritasuna a parametroaren balioen arabera.
ii) Izan bedi $a = 5$, zehaztu D matrize diagonala eta P matrizea non $A \cdot P = P \cdot D$ den.