MATEMATIKA I. ARIKETAK 2016/17

Aurkibidea

Matematika Ieko gaien teoria *Carbajal*ek, *Sydsaeter*rek eta *Hammond*ek eginiko *Matemáticas para el Análisis Económico* (gazteleraz) liburuan aurkitu dezakezue:

GAIA **ZEIN ORRITAN**

1 Aurretikoak

1.- Ordenatu txikitik handira zenbaki hauek, kalkulagailua erabili gabe: $\frac{3}{2}, \frac{-5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{-3}{2}, 0$.

2.- Kalkulatu, kalkulagailua erabili gabe, $8 \times 2 - 4 + 3 \times 6 + 5$.

Aurreko kalkuluan jarri dagozkion parentesiak emaitza 17 izan dadin.

3.- Kalkulatu, kalkulagailua erabili gabe, $\frac{9 \times 8^{\frac{2}{3}}}{6}$ eta $\frac{3 \times 4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$.

4.- Sinplifikatu:

$\frac{x+1}{x^2+1}$, $\frac{x+1}{x^2+x}$, $\frac{x+1}{x^2-1}$, $\frac{x^3y^2}{xy^2}$, $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{a^2}$, $\frac{ax_1^{b+1}x_2^{a}}{bx_1^{b}x_2^{a-1}}$, $(x^{\frac{1}{a}}y^b)^{\frac{a}{b}}$.

5.- Ekuazio hauetan askatu dagokion aldagaia:

$a = \frac{3}{4}(b-2) + b$, b aldagaia.

$ax - b = cx + d$, x aldagaia.

$ab\sqrt[3]{x} = c$, x aldagaia

$\frac{\frac{1}{a} - x}{\frac{1}{a} - y} = z$, a aldagaia.

6.- $x \in \mathbb{R}$ zein baliotarako beteko da $3x - 2 > 4x + 5$?

7.- $x \in \mathbb{R}$ zein baliotarako beteko da $x^2 < 3$?

8.- $x \in \mathbb{R}$ zein baliotarako beteko da $x^3 \leq 8$?

9.- $x \in \mathbb{R}$ zein baliotarako beteko da $x^2 + 2x < 4$?

10.- $x \in \mathbb{R}$ zein baliotarako beteko da $x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 + 7$?

11.- $x \in \mathbb{R}$ zein baliotarako beteko da $\frac{x+1}{x} \geq \frac{x}{x-1}$?

12.- 140 euro balio duen produktu batengatik 111 euro ordaintzen badugu, egin diguten beherapena %20 baino handiagoa ala txikiagoa da?

13.- 1.000 euro irabazten duen bati soldata %2a igotzen badiote eta geroago %3a, zein da bere soldata berria?

14.- $x \in \mathbb{R}$ zein baliotarako beteko da $|x-4| \leq 3$?

15.- $x \in \mathbb{R}$ zein baliotarako beteko da $|x+4| > 3$?

16.- Biz zenbaki errealen multzo hau: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^5 \leq 6\}$. Bornatua al da? Zeintzuk dira multzoaren gorena eta beherena?

17.- Biz zenbaki errealen multzo hau: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-3| \geq 4\}$. Bornatua al da? Zeintzuk dira multzoaren gorena eta beherena?

18.- Biz zenbaki errealen multzo hau: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-3| < 4\}$. Bornatua al da? Zeintzuk dira multzoaren gorena eta beherena?

2 Aldagai bateko funtzio errealak

1.- Biz $f(x)=11$ funtzioa. Kalkulatu $f(0)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a)$ eta $f(a+h)-f(a)$, $a,h\in\mathbb{R}$.

2.- Biz $f(x)=1-x^2$ funtzioa. Kalkulatu $f(0)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$ eta $f(1/3)$. *x*-ren zein baliotarako beteko dira berdintza hauek?

a) $f(x)=f(-x)$.

b) $f(x-1)=f(x)-f(1)$.

c) $f(2x)=2f(x)$.

3.- Biz $f(x)=\dfrac{x}{2+x^2}$ funtzioa.

Kalkulatu: $f(0)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$ eta $f(1/3)$.

Frogatu $f(-x)=-f(x)$ dela *x*-ren balio guztietarako, eta $f(2/x)=f(x)$ dela $x\neq 0$ denean.

4.- Aurkitu funtzio hauen existentzi eremua:

a) $f(x)=x^2-3x+2$.

b) $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

c) $h(x)=\sqrt{x-3}$.

d) $m(x)=\dfrac{4x+2}{2x^2-4}$.

e) $p(x)=\ln(x-1)$.

f) $q(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x-3}}$.

g) $t(x)=(x-1)^{1/2}-(x+2)^{-1/2}$.

5.- Kalkulatu $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-4}}$ eta $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-4}}$ funtzioen existentzi eremuak. Berdinak al dira?

x-ren zein baliotarako beteko da $f(x)=g(x)$?

Grafikoak

6.- Irudikatu funtzio hauek:

a) $f(x)=x+2$.

b) $g(x)=3x-1$.

c) $h(x)=2-x$.

d) $m(x)=\dfrac{1}{x}$.

e) $n(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

f) $p(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

g) $q(x)=x^2-1$.

h) $s(x)=(x-1)^2$.

i) $t(x)=2-x^2$.

7.- $f(x)=x^2$ funtzioaren grafikoa kontutan hartuta, irudikatu $g(x)=(x+1)^2$, $h(x)=-(x+1)^2$ eta $j(x)=-(1-x)^2$.

Funtzio linealak

8.- Biz $f(x)=ax+b$ funtzioa, $a,b\in\mathbb{R}$ konstanteak izanik. a eta b-ren zein baliotarako beteko da $f(x+y)=f(x)+f(y)$, x,y guztietarako?

9.- $f(x)=|x|$ bada, zein baldintzatan beteko da $f(x+y)=f(x)+f(y)$, hots, $|x+y|=|x|+|y|$?

10.- $f(x)=\sqrt{x}$ bada, zein baldintzatan beteko da $f(x+y)=f(x)+f(y)$, hots $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$?

11.- f lineala bada, $f(2)=4$ eta $f(4)=2$ izanik, aurkitu $f(x)$ x-ren edozein baliotarako.

12.- Produktu bateko x unitate ekoizteko kostua x-ren funtzio lineala da; 200 unitate ekoizteak 500 euroko kostua du eta 500 unitate ekoizteak, 1.100€. Aurkitu ekoizten den kantitatearen arabera kostua adierazten duen ekuazio lineala.

13.- (a) Idatzi (2,1) eta (3,4) puntuetatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa. Zein da zuzenaren malda?

(b) Idatzi malda 3 duen eta (1,-2) puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa.

(c) Idatzi koordenatu-ardatzak (0,3) eta (4,0) puntuetan mozten dituen zuzenaren ekuazioa. Zein da bere malda?

(d) Idatzi (1,1) eta (4,−1) puntuetatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa.

(e) Idatzi (1,−1) eta (2,1) puntuetatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa.

(f) Idatzi malda 2 duen eta (3,3) puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa.

Funtzio polinomikoak

14.- Garatu berreketa hauek ($a \in \mathbb{R}$) polinomio moduan:

$$(x+1)^2;\ (x-a)^2;\ (x-2)^3;\ (x+a)^3;\ (x+a)^4 .$$

15.- Aurkitu polinomio hauen erro oso guztiak eta deskonposatu faktore linealen biderketa moduan:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

b) $g(x) = x^2 + 5x + 4$.

c) $h(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

d) $m(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$.

e) $n(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x + 1$.

f) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

g) $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 18x + 8$.

16.- Justifikatu, zatiketa egin gabe, zatiketa hauen artean zeinetan den hondarra zero (zatiketa zehatza):

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x+1},\quad \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x+1}.$$

17.- Kalkulatu parabola hauen erpinak eta irudikatu parabolak.

(a) $x^2 = y + 2$; (b) $y = x^2 - 2x + 2$; (c) $y = x^2$;

(d) $y = x^2 + 2$; (e) $y = (x-1)^2$; (f) $y = (x-1)^2 + 3$.

Funtzio potentzialak

18.- Kalkulatu, kalkulagailua erabili gabe:

$$\frac{2\cdot(-3)^{-1/3}}{\sqrt[6]{8}};\quad (5^2+13^2)^{-1/2};\quad (0{,}027)^{-1/3}.$$

19.- Sinplifikatu faktore bakar bat lortu arte:

$$\left[\left(\left(a^{1/2}\right)^{2/3}\right)^{3/4}\right]^{4/5};\quad a^{1/2}a^{2/3}a^{3/4}a^{4/5};\quad \frac{\left((2a)^{-2}\right)^{-1}\left((4a)^{-1}\right)^{-2}}{a^{-2}},\quad a^{4/3}\,\frac{\sqrt[3]{a}\cdot a^{3/4}}{a^{1/12}\sqrt{a}}.$$

20.- Ekuazio hauetatik zeintzuk dira identitateak, hots, edozein x, y-rako egiazkoak:

$$(3^x)^2 = 3^{x^2};\quad 2^{1/x} = \frac{1}{2^x}\,(x \neq 0);\quad 5^{-1/x} = \frac{1}{5^x}\,(x\neq 0);\quad 4^{-1/x} = \frac{1}{4^{1/x}}\,(x \neq 0);$$

$$b^{x+2y} = b^x (b^y)^2;\quad a^{\sqrt{xy}} = a^{\sqrt{x}}a^{\sqrt{y}}\ \ (x,y \text{ positiboak}).$$

Funtzio esponentzialak eta logaritmikoak

21.- Aurkitu funtzio hauen existentzi eremua:

a) $y = \ln\left(\dfrac{2x}{2-x}\right)$.

b) $y = \ln|x|$.

c) $y = \ln(\ln(x))$.

d) $y = \ln\left(\ln\left(x^2\right)\right)$.

22.- Aurkitu x-ren balioak non berdintza hauek betetzen diren:

a) $5^x 2^{x+3} = 8$.

b) $2^x 3^{x+1} = 5$.

c) $\ln(\sqrt{x} - 3) = 0$.

d) $3\ln(x)-2\ln(x^2)=4$.

23.- Formula hauetatik zeintzuk dira identitateak ($a,b,c>0$ guztietarako egiazkoak)?

a) $\ln\left(\dfrac{a+b}{c}\right)=\ln(a)+\ln(b)-\ln(c)$.

b) $\ln\left(\dfrac{a+b}{c}\right)=\ln(a+b)-\ln(c)$.

c) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)+\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$.

d) $k\ln(\ln(a))=\ln(\ln(a^k)),\ (a>1,k>0)$.

e) $k\ln(\ln(a))=\ln((\ln(a))^k),\ (a>1)$.

f) $\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)+\ln(c)}=\ln(a(bc)^{-1})$.

Jarraitutasuna eta bitarteko balioa (Bolzanoren teorema)

24.- Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna:

a) $f(x)=3x^2+2x-1$.

b) $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

c) $h(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ 3+x^2, & x\geq 0 \end{cases}$.

d) $k(x)=\begin{cases} 2x, & x<2 \\ 2+x, & x\geq 2 \end{cases}$.

25.- $f(x)=2-x^2$ da $x\leq 0$ denean eta $f(x)=-2+x^2$, $x\geq 2$ denean. Definitu $f(x)$ funtzio lineal moduan $(0,2)$ tartean *f* jarraitua izan dadin $\mathbb{R}$ osoan.

26.- Irudikatu funtzio hauen grafikoak eta esan zein puntutan diren jarraituak:

a) $f(x)=|x|$.

b) $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

27.- Frogatu ekuazio hauek, gutxienez, zero bat dutela adierazitako tartean:

a) $x^7 - 4x^6 + 6x^2 - 2 = 0$, (-1,1) tartean.

b) $x^3 + 2x - 7 = 0$, (0,2) tartean.

c) $\sqrt{x+4} = x + 1$, (1,2) tartean.

28.- a) Frogatu $x^3 + x - 5 = 0$ ekuazioak, gutxienez, soluzio bat daukala 1 eta 2ren artean.

b) Biz $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ funtzioa. Ziurta al daiteke badagoela (1,2) tartean *c* punturen bat non $f(c) = 0$ den?

29.- Biz $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funtzioa. $f(-1) < 0$ eta $f(1) > 0$ baieztatzen diren arren, ez dago $c \in [-1,1]$ non $f(c) = 0$ den.

Zergatik ez da betetzen Bolzanoren teorema?

3 Deribatua: kontzeptua eta interpretazioa

1.- Deribatuaren definizioa erabiliz, kalkulatu $f(x)=2x+1$ funtzioren deribatua, $f'(x)$, definizioa erabiliz.

2.- Biz $f(x)=2x^2+3x-1$ funtzioa. Frogatu $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x+3+2h$ dela. Kalkulatu $f'(x)$. Aurkitu *f* funtzioaren grafikoan (1,4) puntutik pasatzen den zuzen ukitzailearen ekuazioa.

3.- Biz $f(x)=ax^2+bx+c$ funtzioa, $a\neq 0, b,c\in\mathbb{R}$ izanik.

Frogatu $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2ax+b+ah$ dela. Kalkulatu $f'(x)$.

4.- Deribatuaren definizioa erabiliz, egiaztatu $y=|x|$ ez dela deribagarria 0 puntuan, baina bai ordea, $z=x|x|$ funtzioa.

Oinarrizko deribatuen kalkulua

5.- Kalkulatu funtzio hauen deribatuak:

a) $y=3x^3$.

b) $y=\pi^5$.

c) $y=3x^{-5}$.

d) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}$.

e) $y=-\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}$.

6.- Kalkulatu funtzio hauen deribatuak:

a) $f(x)=2x^3-7x$.

b) $g(x)=\sqrt{x}-2x$.

c) $h(x)=x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}$.

d) $m(x)=(2x-7)(3x^3+4x)$.

e) $n(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)(3x^3 - x)$.

f) $p(x) = x^{-2}(x+4)\sqrt{x}$.

g) $q(x) = x^2 - \ln(x)$.

h) $r(x) = \mathrm{e}^x \sqrt{x}$.

i) $s(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

7.- Deribatu eta, posible bada, emaitza sinplifikatu:

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

b) $y = \frac{3x-1}{x^2 - 2x + 1}$.

c) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

d) $y = (2x+1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

e) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

8.- Kalkulatu *x*-ren balioak non $f'(x) = 0$ den:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.

b) $g(x) = x^4 - 3x^2$.

c) $h(x) = \frac{3x+1}{2x^2-1}$.

9.- Puntu guztietan deribagarriak al dira funtzio hauek?

a) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x < 0 \\ 1 + 2x^3, & x \geq 0 \end{cases}$.

b) $g(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x < 0 \\ 1 + 2x, & x \geq 0 \end{cases}$.

c) $h(x) = \begin{cases} 2 + x^2, & x < 0 \\ 4 + 2x^3, & x \geq 0 \end{cases}$.

d) $p(x)=\begin{cases} ax, & x<0 \\ 2ax, & x\geq 0 \end{cases}.$

Hurbilketa lineala

10.- Aurkitu hurbilketa lineala [$f(x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$] kasu hauetan:

a) $f(x)=(1+x)^{-1}$, $x_0=0$ puntuaren ingurunean.

b) $g(x)=(1-x)^{1/3}$, $x_0=2$ puntuaren ingurunean.

c) $h(x)=(1+x^2)^{1/2}$, $x_0=0$ puntuaren ingurunean.

11.- $r\in\mathbb{Q}$ bada, frogatu $f(x)=(1+x)^r$ funtzioaren hurbilketa lineala 0 puntuaren ingurunean $(1+x)^r\simeq 1+rx$ dela. Erabili hurbilketa hori balio hauek kalkulatzeko (gutxi gora behera):

a) $\sqrt[4]{1,02}$.

b) $\sqrt[5]{33}=2\sqrt[5]{1+\frac{1}{32}}$.

c) $(1,03)^{15}$.

Funtzio konposatuak. Katearen erregela

12.- Katearen erregela erabiliz, kalkulatu deribatu hauek:

a) $y=\dfrac{2}{(x^2+x-1)^4}$.

b) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

c) $y=(\sqrt[3]{x}+x)^3$.

d) $y=\sin^2(x)+\cos^2(x)$.

e) $y=\sin^3(x)+\cos(x^3)$.

f) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

g) $y=\sqrt[4]{x^2+1}$.

h) $y=\sin(\cos(x))$.

i) $y = \tan\left(\frac{1}{x}\right).$

j) $y = \sqrt{\cos(x^3)}\,.$

k) $y = \frac{\cos(x)}{x}\,.$

l) $y = \frac{x}{\cos(x)}\,.$

m) $y = \mathrm{e}^{\sin(x)}\,.$

n) $y = \cos\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right).$

o) $y = 3^{\ln(x)}\,.$

p) $y = \sin(\ln(x^3))\,.$

q) $y = \mathrm{e}^{\sin^2(x)}\,.$

~~Ekuazio baten bitartez inplizituki definitutako funtzio baten deribatua~~

13.- Kalkulatu $y' = \frac{dy}{dx}$ deribazio inplizituaren bitartez, *y* *x*-ren funtzioa bada, ekuazio hauek betetzen direnean:

a) $x^2 y = 2\,.$

b) $2x - y + 2xy = 3\,.$

c) $(y+2)^3 = (x+1)^2\,.$

Emaitzak egiaztatu, ekuazio bakoitzean *y* askatuz eta deribatuz.

14.- Aurkitu y' deribazio inplizituaren bitartez, $y = f(x)$ funtzio deribagarriak baldintza hauek betetzen dituelarik:

a) $x^2 + y^2 = r^2$ ($r \in \mathbb{R}$).

b) $x^{1/2} + y^{1/2} = r^{1/2}$ ($r \in \mathbb{R}$).

c) $2x^2 - y^2 = xy\,.$

Deribazio logaritmikoa

15.- Aurkitu funtzio hauen deribatuak deribazio logaritmikoa erabiliz:

a) $y = x^x$ ($x > 0$).

b) $y = x^{\sin(x)}$.

c) $y = (2x+1)^{\frac{1}{x}}$.

d) $y = 5^{-x}$.

e) $y = (1+x^2)^{1-x}$.

f) $y = (x^3+4x-5)^{x^2+5}$.

g) $y = \ln^x(x)$.

h) $y = x^{\ln(x)}$.

i) $y = x^{f(x)}$ (f funtzioa deribagarria da).

j) $y = g(x)^{f(x)}$, $g(x) > 0$ izanik.

k) $y = \dfrac{x^2(1-x)^3}{\sqrt[3]{2x+2}}$.

l) $y = \sqrt{x+2}(x^3-1)(x^2+2x+5)$.

m) $y = x^{-2}(x+4)\sqrt{x}$

~~**Batez besteko balioa**~~

16.- Kalkulatu *z*-ren balio guztiak kasu hauetan, dagozkien $[a,b]$ tartean, $f'(z) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ betetzen delarik:

a) $f(x) = 2x^2$, $[a,b] = [1,3]$ tartean.

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $[a,b] = [2,7]$ tartean.

c) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$, $[a,b] = [1,2]$ tartean.

17.- Batez besteko balioaren teorema ez da betetzen kasu hauetan. Azaldu zergatik, dagozkien grafikoak eginez:

a) $f(x) = |x-3|$, $x \in [1,5]$.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-2,2]$.

18.- Deribatua erabiliz, esan funtzio hauek $[a,b]$ tartearen zein azpitartetan diren gorakorrak eta zeinetan beherakorrak:

a) $f(x)=2x^2+x$, $[-1,3]$ tartean.

b) $g(x)=x^3-2x^2$, $[0,2]$ tartean.

19.- Frogatu $\frac{d}{dx}(\sin^2(x)+\cos^2(x))=0$ dela x balio guztietarako. Zergatik da hori egiazkoa?

Ordena handiko deribatuak. Bigarren ordenako hurbilketa

20.- Aurkitu $\frac{d^2y}{dx^2}$ kasu hauetan:

a) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) $y=\frac{x+3}{x-1}$.

c) $y=\frac{x^2}{x+1}$.

21.- Aurkitu $\sin(x)$ eta $\cos(x)$ funtzioen deribatu guztiak laugarren ordena arte. Zeintzuk dira haien hamazazpigarren ordenako deribatuak?

22.- Zein da $p(x)=x^5-3x^3+2x^2-4$ funtzioaren seigarren deribatua? Eta bosgarrena?

23.- Frogatu $f(x)=x^3|x|$ funtzioa 0 puntuan hiru aldiz deribagarria dela baina ez lau aldiz.

24.- $f(x)=\sqrt{1+x}$ funtzioa $x\geq -1$ denean definituta dago. Aurkitu baldintza hauek betetzen dituen $P(x)=ax^2+bx+c$ bi mailako polinomioa:

$$f(0)=P(0)\,,\quad f'(0)=P'(0)\,,\quad f''(0)=P''(0)\,.$$

Polinomio hori $f(x)=\sqrt{1+x}$ funtzioaren bigarren ordenako hurbilketa da 0 puntuan. Erabili polinomio hori $\sqrt{1,08}$ gutxi gora beherako balioa lortzeko.

Optimizazioa. Maximoak eta minimoak

25.- $[-1,1]$ tartean definitutako $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ funtzioak -1 eta 1 puntuetan minimoa lortzen du, minimo hau 0 izanik; beste edozein puntutan funtzioak balio positiboak hartzen baititu. Ordea, maximoa 0 puntuan lortzen du, $1-x^2 \le 1$ beti delako. Erabili mota horietako arrazonamenduak funtzio hauen maximoak eta minimoak aurkitzeko:

a) $f(x)=5-(x-1)^2$.

b) $g(x)=3(x+1)^4-2$.

c) $h(x)=\dfrac{2}{3x^2+1}$.

d) $j(x)=3-\sqrt{x+2}$, $[0,2]$ tartean.

e) $k(x)=\dfrac{-3}{2x^2-1}$, $[1,3]$ tartean.

26.- Erabili deribatuaren zeinu aldaketak $\mathbb{R}$ osoan funtzio hauen maximoak eta minimoak kalkulatzeko:

a) $f(x)=2x^3+3x^2-12x+4$.

b) $g(x)=\dfrac{3x}{2x^2+5}$.

c) $h(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

d) $p(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+4$.

27.- Aurkitu funtzio hauen maximo eta minimo lokal guztiak eta horiek lortzen dituzten puntuak:

a) $f(x)=5-(x-1)^2$.

b) $g(x)=2x^3-6x^2+2$.

c) $h(x)=x+\dfrac{4}{x}$.

d) $j(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

e) $k(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$.

28.- Emandako tartean aurkitu funtzio bakoitzaren maximo eta minimoak:

a) $f(x)=4x^2-2x+2$, $[1,3]$ tartean.

b) $g(x)=x^3-6x+4$, $[1,4]$ tartean.

c) $h(x)=\dfrac{2x^2+6}{x-1}$, $[2,4]$ tartean.

d) $j(x)=x^5-10x^3$, $[-1,3]$ tartean.

29.- Aurkitu $f(t)=(t^2-3t+3)e^{-t}$ funtzioaren mutur lokalak, $t\geq 0$ denean.

30.- Aurkitu bi zenbaki ez negatibo non haien arteko batura 40 den eta haien arteko biderkadura maximo posiblea den. Zein bikotek emango du biderkadura minimoa?

31.- 100 cm^2-ko errektangelu guztien artean, perimetro txikiena duenaren aldeek zenbat neurtzen dute? Existitzen al da perimetro maximoa duen errektangelua?

32.- Futbol talde batek partidu batera joateko 150 eserleku duen hegazkin bat kontratatzen du. Txartel bakoitzaren prezioa 150 eurokoa da, 100 jarraitzaile baino gutxiagok erosten badute, eta kopuru hau gainditzen bada, bidaiari gehiago bakoitzetik euro bateko beherapena egiten die bidaiari guztiei.

a) Zein da txartelaren prezioa hegazkina betetzen bada?

b) Zein da bildurikoa $100+x$ bidaiariekin?

c) Zein bidaiari kopururekin lortzen du futbol taldeak irabazi handiena?

33.- Biz $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 3 mailako polinomioa.

a) Aurkitu a,b balioak, f funtzioak -2 eta 1 puntuetan optimoak lortzeko. Zeinetan lortzen du maximoa? Eta minimoa?

b) Zergatik ezin dugu c kalkulatu baldintza horiekin?

Funtzioen azterketa eta irudikapena

34.- Aztertu funtzio hauek:

Aurkitu haien existentzi eremua. Zein tartetan dira jarraituak? (Arrazoitu erantzunak).

Aurkitu limiteak jarraitutasun-tarteetako borneetan.

Zein tartetan dira deribagarriak?

Aurkitu mutur lokal eta global guztiak.

Aurkitu ganbiltasun eta ahurtasun-tarteak. Aurkitu inflexio-puntuak.

Irudikatu funtzioak.

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$.

d) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 4$.

e) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 4$.

f) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 2$.

g) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2$.

h) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2-x}$.

35. Aztertu funtzio hauek:

Aurkitu haien existentzi eremua. Zein tartetan dira jarraituak? (Arrazoitu erantzuna).

Aurkitu limiteak jarraitutasun-tarteetako borneetan.

Zein tartetan dira deribagarriak?

Aurkitu mutur lokal eta global guztiak.

Irudikatu funtzioak, inflexio-puntuak kalkulatu gabe.

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

b) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.

c) $h(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5}$.

4 Integrazioa

1. Kalkulatu integral mugagabe hauek:

a) $\int (6x^3 + 5x - 4)dx$.

b) $\int \frac{2x+3}{2x+1}dx$.

c) $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$.

d) $\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx$.

e) $\int e^{-5x}dx$.

f) $\int \left(e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}\right)^2 dx$.

g) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

h) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

i) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

j) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

k) $\int 5x(1-x^2)^3 dx$.

l) $\int \left(\frac{2x^2-3x+1}{4}\right)dx$.

m) $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$.

n) $\int \frac{x^3}{x^2-9}dx$.

o) $\int \frac{x+1}{2x^2+4x}dx$.

p) $\int 4^{3-2x}dx$.

q) $\int 3xe^{-(x^2+1)}dx$.

r) $\int x5^{x^2}dx$.

s) $\int \frac{\sqrt{x}+\ln(x)}{x}dx$.

t) $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$.

u) $\int \sin(x)\cos(x)dx$.

v) $\int (1-2x)^{10}dx$.

2. Kalkulatu integral mugagabe hauek (zatikako metodoa erabiliz):

a) $\int xe^{5x}dx$ b) $\int xe^{5x}dx$ c) $\int 3x\sin(x)dx$ d) $\int 3x\cos(x)dx$ e) $\int x^2e^x dx$

f) $\int x\ln(x)dx$ g) $\int x^2\ln(x)dx$ h) $\int \ln(x)dx$ i) $\int (x-3)e^x dx$ j) $\int (x+5)\sin(4x)dx$

3. Kalkulatu integral mugagabe hauek (ematen den aldagai aldaketa eginez):

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$; Aldaketa: $t = \sqrt{x+1}$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$; Aldaketa: $t = x+1$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$; Aldaketa: $t = x^2+1$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}dx$; Aldaketa: $t = x^2-1$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$; Aldaketa: $t = 1-x$

f) $\displaystyle\int x^3(x^2+1)^8 dx$; Aldaketa: $t = x^2+1$

4. Kalkulatu integral mugatu hauek:

a) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x+5)dx$.

b) $\displaystyle\int_2^6 \frac{1}{e^{3x}}dx$.

c) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{4x}dx$.

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2-3)dx$.

e) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x}dx$.

f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1-2x}{7}dx$.

5. Kalkulatu $x=1$, $y=2x-2$ eta $y=x$ zuzenek $\mathbb{R}^2$ planoan mugatzen duten eremuaren azalera.

6. Kalkulatu $y=x^2$ eta $x=y^2$ parabolek $\mathbb{R}^2$ planoan mugatzen duten eremuaren azalera.

7. Kalkulatu $y=2x^2+1$ parabolak eta $y=2x+1$ zuzenak mugatutako eremuaren azalera.

8. Kalkulatu $y=(x-1)^2$ parabolak eta $y=2x+1$ zuzenak mugatutako eremuaren azalera.

9. Kalkulatu $y=(x-1)^2$ parabolak eta $y=7-x$ zuzenak mugatutako eremuaren azalera.

10. Kalkulatu $y=2x+1$, $y=7-x$ eta $y=1$ zuzenek mugatutako eremuaren azalera.

11. Kalkulatu $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^7}dx$ integrala.

12. Kalkulatu $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$ integrala.

13. Sailkatu eta kalkulatu, existitzen badira, integral hauek:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^5 f(x)dx$ eta $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \le -1 \\ -x^3+3, & -1 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x+2}, & x \ge 1. \end{cases}$$

b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{4} f(x)dx$ eta $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$., $\qquad f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x>1 \end{cases}$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(x)dx$ eta $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $\qquad f(x)=\begin{cases} -e^{x+2}, & x<-1 \\ |x|, & -1\le x\le 2 \\ \dfrac{1}{(x-1)^3}, & x>2. \end{cases}$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(x)dx$ eta $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $\qquad f(x)=\begin{cases} e^{2x}, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x<2 \\ \dfrac{1}{1-x}, & x\ge 2. \end{cases}$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{5} f(x)dx$ eta $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ $\qquad f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x<1 \\ e, & x=1 \\ \dfrac{e}{x^2}, & x>1. \end{cases}$

5 Bektoreak: sarrera

1.- $3(x, y, z)+5(-1,2,3)=(4,1,3)$ bada, kalkulatu *x*, *y* eta *z* osagaiak.

2.- $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ bada, zer esan dezakezu $\boldsymbol{x}$ bektorearen osagaiei buruz?

$\mathbf{0}\boldsymbol{x}=0$ bada, zer esan dezakezu $\boldsymbol{x}$ bektorearen osagaiei buruz?

3.- $\boldsymbol{x}=(1,2,2)$, $\boldsymbol{y}=(0,0,-3)$ eta $\boldsymbol{z}=(-2,4,-3)$ badira,

- Kalkulatu $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$, $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{x}\cdot(3\boldsymbol{y})$, $3\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$.
- Kalkulatu $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{y}\|$ eta $\|\boldsymbol{z}\|$.
- Baieztatu $|\boldsymbol{xy}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$ dela.

4.- Ortogonalak al dira bektore-bikote hauek?

(1,2), (-2,1); (1,-1,1), (-1,1,-1); (*a*,-*b*,1), (*b*,*a*,0).

5.- *x*-ren zein baliotarako dira ortogonalak $(x,-x-8, x, x)$ eta $(x,1,-2,1)$ bektoreak?

6.- *a*-ren zein baliotarako beteko da $\|(1,-2, a)\|=\sqrt{5}$? Eta zein baliotarako beteko da $\|(1,-2, a)\|=\sqrt{6}$? Eta zein baliotarako $\|(1,-2, a)\|=2$?

7.- Kalkulatu $(3,1)$ puntutik pasatzen den eta $(1,-2)$ bektorearekin ortogonala den zuzenaren ekuazioa. $(1,0)$ puntua zuzen horretan al dago?

8.- Kalkulatu $(2,1)$ puntutik pasatzen den eta $(1,2)$ eta $(3,1)$ puntuak lotzen dituen bektorearekin ortogonala den zuzenaren ekuazioa.

9.- Kalkulatu $(4,1,0)$ puntutik pasatzen den eta $(1,-2,3)$ bektorearekin ortogonala den planoaren ekuazioa. $(1,0,2)$ puntua plano horretan al dago?

10.- Kalkulatu $(4,1,0)$ puntutik pasatzen den eta $(3,1,1)$ eta $(2,0,3)$ puntuak lotzen dituen bektorearekin ortogonala den planoaren ekuazioa.

6 Ekuazio linealen sistemak eta matrizeak

1.- Kalkulatu $(1,3,-1)$ bektorearekin ortogonalak diren eta $y-z=1$ planoan dauden $\mathbb{R}^3$–ko bektoreak. Aurkitutako bektoreren batek $x+y=0$ ekuazioa betetzen al du?

2.- Aurkitu $(-2,1,-2)$ eta $(-1,2,2)$ bektoreekin ortogonala den eta 1 luzera duen bektore bat.

3.- Aurkitu $(1,3)$ bektorearekin ortogonala den $\mathbb{R}^2$-ko bektore bat non beraien osagaiek $2x+y=-4$ zuzenaren ekuazioa betetzen duten.

4.- Kalkulatu $(1,0,-2)$ eta $(2,1,3)$ bektoreekin ortogonala den eta hirugarren osagaia 2 duen bektore bat.

5.- Adierazi, posible bada, $(3,5)$ bektorea $(2,2)$ eta $(3,1)$ bektoreen konbinazio lineal moduan.

6.- Adierazi, posible bada, $(1,3,-2)$ bektorea $(1,0,2)$ eta $(1,3,-1)$ bektoreen konbinazio lineal moduan.

7.- Klasean egin den froga batean 20 galdera daude. Ongi dagoen erantzun bakoitzagatik 3 puntu lortzen dira eta erantzun gabe utzitako edo erantzun oker bakoitzagatik 2 puntu galtzen dira. Erantzun (ebatzi grafikoki eta analitikoki):

a) Ikasle batek 15 puntu lortu baditu:

i) Zenbat galdera erantzun ditu ongi?

ii) Zenbat puntu lortuko lituzke erantzun zuzen bakoitzak 4 puntu balioko balu eta okerrak edo erantzun gabe utzitako bakoitzagatik 3 puntu kenduz gero?

b) 21 puntu lortzea posible al da?

c) Ariketak 10 galdera baditu eta puntuaketa hasierakoa bada (erantzun zuzenak (+3) eta okerrak (-2)), zenbat erantzun zuzen egin behar dira 15 puntu lortzeko?

8.- Ebatzi grafikoki eta analitikoki ekuazio linealen sistema hauek:

a) $\begin{cases} x-2y=10 \\ x-y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x+y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=5 \\ y-x=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=5 \\ x+3y=a \end{cases}$

9.- a) Idatzi eta adierazi grafikoki (2,3) soluzio bakarra duen bi ezezagun eta bi ekuazio linealen sistema.

b) Idatzi eta adierazi grafikoki (3,-1) soluzio bakarra duen bi ezezagun eta hiru ekuazio linealen sistema.

10.- Ebatzi sistema mailakatu hauek:

a) $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ y-3z=-1 \\ 3z=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y-z=2 \\ y+z=1 \\ -z=3 \end{cases}$

11.- Matrize baten *aztarna* haren diagonal nagusiko elementuen baturari deitzen zaio. Demagun $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak direla.

a) Kalkulatu *A*, *B*, *AB*, 3*A*-2*B* matrizeen aztarnak.

b) *C* eta *D* bi matrize karratuen aztarnak 3 eta 2 badira, hurrenez hurren, kalkula daiteke *CD* matrizearen aztarna? Eta 2*C*-*D* matrizearena? Azaldu erantzunak.

12.- Aurkitu X^2+Y^2 matrizea, *X* eta *Y* baldintza hauek betetzen dituzten 2×2 ordenako matrize karratuak badira:

$$5X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}, \qquad 3X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

13.- Aurkitu baldintza hauek betetzen dituzten *A* eta *B* matrizeak:

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad 2A-3B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

14.- a) Bira $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eta $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrizeak.

Aurkitu *a*, *b*, *c* eta *d*-ren arteko erlazioak *AM*=*MA* baieztatzeko.

b) Bira $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ eta $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ matrizeak.

Kalkulatu, posible bada, CB, BC^t, B^tC, BB^t, B^tB, CC^t eta C^tC.

15.- A matrize karratua ortogonala dela esaten da $AA^t = I$ betetzen bada, A^t matrizea A-ren iraulia eta I identitate matrizea izanik. A eta B tamaina bereko matrize ortogonalak badira, aztertu AB ere ortogonala den ala ez.

16.- Sailkatu eta ebatzi sistema mailakatu hauek:

a) $\begin{cases} x-2y-z=2 \\ y+3z=-1 \\ 2z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ y+2z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+4y+z=2 \\ 2y+z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2z=-4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y-z+t=2 \\ y+z-t=1 \\ -z+t=3 \\ -t=-3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y-z+t=2 \\ y+z-t=1 \\ 2t=6 \end{cases}$

17.- Sailkatu sistema hauek eta ebatzi bateragarri indeterminatuak direnean:

a) $\begin{cases} x-2y+z=5 \\ 3y-3z=b \\ az=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ y-2z=b \\ az=a+b-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y+z=5 \\ y+2z=b+3 \\ az=a+b \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ y-2z=a+b \\ az=b-2 \end{cases}$

18.- Sailkatu eta ebatzi sistema hauek Gauss-en metodoa erabiliz:

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+3y+2z=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-2y+z=5 \\ 2x-y-2z=-1 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x-4y+6z=7 \\ 5x+2y-4z=5 \\ x+3y-5z=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ 2x+y-3z=5 \\ -x+7y+9z=-10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+4y+2z=1 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+4y+2z=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$

19.- Kalkulatu, mailakatuz, matrize hauen heina:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 6 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

20.- Sailkatu eta ebatzi ekuazio linealen sistema homogeneo hauek:

a) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+4y+2z=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$

21.- Inbertitzaile batek A eta B enpresen akzioak ditu. Inbertsio osoa 10.000 eurokoa da eta 855€ko dibidenduak eman dizkio. A enpresako akzio bakoitzak 24€ balio ditu eta urtean 2,5€ko dibidendua ematen dio; B enpresako akzio bakoitzak 16€ balio ditu eta urtean 1,2€ko dibidendua ematen dio. Kalkulatu inbertitzaileak enpresa bakoitzeko zenbat akzio dituen. (150 eta 400).

22.- Festa bat egiteko behar den dirua biltzeko asmoarekin, ikasle talde batek kamisetak, bufandak eta erlojuak saltzen ditu. Kamiseta bakoitza 8 eurotan saltzen da, bufanda bakoitza 12 eurotan eta erloju bakoitza 20 eurotan. Bestalde, unitate bakoitzeko kostua 5, 9 eta 12 eurokoa da, hurrenez hurren. Sarrerak 2760 eurokoak izan dira eta kostu osoa 1850 eurokoa. Guztira 220 unitate saldu direla jakinik, kalkulatu zenbat kamiseta, bufanda eta erloju saldu diren. (70, 100 eta 50).

23.- Bi lagunek 20.000 eurona inbertitzen dute. Batek A euro jartzen ditu %4 interesera, B euro %5 interesera eta geratzen zaiona %6ra. Besteak A euro jartzen ditu %5 interesera, B euro %6 interesera eta geratzen zaiona %4ra. Kalkulatu A, B eta C kopuruak lehenak 1.050 euroko eta bigarrenak 950 euroko interesak lortzen badituzte. (5.000, 5.000 eta 10.000).

24.- Espekulatzaile batek 3 artelan erosten ditu, guztira 2 milioi eurotan. Hauek salduz, %20, %50 eta %25eko mozkinak, hurrenez hurren, lortzea espero du, honela irabaziak 600.000 eurokoak izateko. Baina gehiago lortzen du, 1,7 milioi euro, mozkinak %80, %90 eta %85ekoak baitira. Zenbat kosta zitzaion artelan bakoitza? (0,5 milioi, 0,5 milioi eta milioi 1).

25.- Lehengo egunean hiru lagun, Miren, Gorka eta Mikel, erosketak egitera irten ziren. Disko denda batean prezio bereko 3, 1 eta 2 CD erosi zituzten, hurrenez hurren; liburu dendan, prezio bereko 1, 1 eta 4 liburu, hurrenez hurren eta etxera joan aurretik taberna batera sartu eta garagardo batzuk edan zituzten (2, 1 eta 3, hurrenez hurren). Hurrengo egunean Fakultatean esan zuten 100, 50 eta 120 euro gastatu zituztela, hurrenez hurren.

a) Formulatu problema ekuazio linealen sistema bat bezala produktu bakoitzeko prezioak jakiteko eta frogatu hiruetako batek ez zuela egia esan, hau da, ez zuela gastatu esan zuena. (Soluzio bateraezina).

b) Gezurra Mikelek esan bazuen, benetan zenbat gastatu zuen? (150).

26.- Asiatik etorri berria den enplegatu batek bidaian gastatu duen diruaren azalpenak eman ditu: hoteletan, Japonian, egunean 30$ gastatu ditu, Txinan 20$ eta Hego Korean 20$; jatetxetan (egunean) 20$ Japonian, 30$ Txinan eta 20$ Hego Korean, eta garraiotan egunero 10$ herrialde bakoitzean. Guztira 340$ gastatu ditu hoteletan, 320$ jatetxetan eta 180$ garraioetan.

Enpresako idazkariak dio kontuak oker daudela. Zergatik? Enplegatuak dio orain, garraioetan 140$ gastatu zituela. Idazkariak kostu hau onartzen du. Zergatik?

7 Espazio bektorialak

1.- Aztertu bektore hauek linealki independenteak diren ala ez:

a) $\boldsymbol{x}_1 = (1,3),\ \boldsymbol{x}_2 = (5,6).$

b) $\boldsymbol{x}_1 = (1,3),\ \boldsymbol{x}_2 = (5,6),\ \boldsymbol{x}_3 = (2,1).$

c) $\boldsymbol{x}_1 = (1,3,-2),\ \boldsymbol{x}_2 = (-3,-5,6),\ \boldsymbol{x}_3 = (0,5,-6).$

d) $\boldsymbol{x}_1 = (1,3,-2),\ \boldsymbol{x}_2 = (-3,-5,6),\ \boldsymbol{x}_3 = (-1,1,2).$

e) $\boldsymbol{x}_1 = (1,3,-2),\ \boldsymbol{x}_2 = (-3,-5,6),\ \boldsymbol{x}_3 = (0,0,0).$

f) $\boldsymbol{x}_1 = (1,3,-2),\ \boldsymbol{x}_2 = (-3,-5,6),\ \boldsymbol{x}_3 = (-1,1,2),\ \boldsymbol{x}_4 = (1,3,5).$

g) $\boldsymbol{x}_1 = (1,3,-2),\ \boldsymbol{x}_2 = (-3,-5,6),\ \boldsymbol{x}_3 = (1,3,5).$

h) $\boldsymbol{x}_1 = (1,0,0),\ \boldsymbol{x}_2 = (1,1,0),\ \boldsymbol{x}_3 = (1,1,1).$

i) $\boldsymbol{x}_1 = (1,0,0),\ \boldsymbol{x}_2 = (1,1,0),\ \boldsymbol{x}_3 = (1,1,1),\ \boldsymbol{x}_4 = (2,3,4).$

j) $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,0,0),\ \boldsymbol{x}_2 = (1,0,1,0),\ \boldsymbol{x}_3 = (1,0,1,1),\ \boldsymbol{x}_4 = (0,1,0,1).$

2.- Esan $\boldsymbol{y}$ bektorea $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_m$ bektoreen konbinazio lineala den, kasu hauetan:

a) $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,0),\ \boldsymbol{x}_2 = (2,2,1),\ \boldsymbol{x}_3 = (0,0,2)$ eta $\boldsymbol{y} = (3,4,5)$.

b) $\boldsymbol{x}_1 = (1,2,1),\ \boldsymbol{x}_2 = (2,3,3),\ \boldsymbol{x}_3 = (1,2,2)$ eta $\boldsymbol{y} = (3,4,5)$

c) $\boldsymbol{x}_1 = (1,2,3),\ \boldsymbol{x}_2 = (2,3,1)$ eta $\boldsymbol{y} = (1,1,2)$

d) $\boldsymbol{x}_1 = (1,3,-1),\ \boldsymbol{x}_2 = (2,3,1)$ eta $\boldsymbol{y} = (2,1,3)$

e) $\boldsymbol{x}_1 = (1,2,1),\ \boldsymbol{x}_2 = (3,1,2)$ eta $\boldsymbol{y} = (2,3,1)$

f) $\boldsymbol{x}_1 = (3,3,1),\ \boldsymbol{x}_2 = (1,2,2)$ eta $\boldsymbol{y} = (-1,1,3)$

g) $\boldsymbol{x}_1 = (1,2,1,3),\ \boldsymbol{x}_2 = (2,3,1,4)$ eta $\boldsymbol{y} = (1,3,0,4).$

h) $\boldsymbol{x}_1 = (1,2,1,3),\ \boldsymbol{x}_2 = (2,3,1,4)$ eta $\boldsymbol{y} = (1,3,2,5).$

i) $\boldsymbol{x}_1 = (1,0,2,1),\ \boldsymbol{x}_2 = (3,2,1,4)$ eta $\boldsymbol{y} = (-2,2,1,-3).$

j) $\boldsymbol{x}_1 = (1,0,1,3),\ \boldsymbol{x}_2 = (2,3,1,4),\ \boldsymbol{x}_3 = (1,1,3,0)$ eta $\boldsymbol{y} = (0,1,1,2).$

k) $\boldsymbol{x}_1 = (1,0,1,3),\ \boldsymbol{x}_2 = (2,3,1,4),\ \boldsymbol{x}_3 = (1,1,3,0)$ eta $\boldsymbol{y} = (0,1,1,1).$

l) $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,0,0),\ \boldsymbol{x}_2 = (1,0,1,0),\ \boldsymbol{x}_3 = (1,0,1,1),\ \boldsymbol{x}_4 = (0,1,0,1)$ eta $\boldsymbol{y} = (0,0,0,1).$

m) $\boldsymbol{x}_1 = (1,2,0),\ \boldsymbol{x}_2 = (2,5,0),\ \boldsymbol{x}_3 = (0,0,2),\ \boldsymbol{x}_4 = (0,0,0)$ eta $\boldsymbol{y}$, $\mathbb{R}^3$-ko edozein bektore.

3.- Aurkitu bi bektore linealki independenteak $\mathbb{R}^3$-ko $x+2y-3z=0$ planoan. Zergatik ezin dugu aurkitu hiru bektore linealki independente plano horretan?

4.- Aurkitu bektore hauen artean independenteak diren kopuru handiena (heina):

$$\boldsymbol{x}_1=(1,-1,0,0),\ \boldsymbol{x}_2=(1,0,-1,0),\ \boldsymbol{x}_3=(1,0,0,-1),\ \boldsymbol{x}_4=(0,1,-1,0),\ \boldsymbol{x}_5=(0,1,0,-1).$$

5.- Demagun $\boldsymbol{x}_1=(1,3,3)$, $\boldsymbol{x}_2=(3,9,-1)$ eta $\boldsymbol{x}_3=(-2,-6,h)$ bektoreak direla.

a) *h*-ren zein baliotarako da $\boldsymbol{x}_3$ bektorea $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ sistemaren konbinazio lineala?

b) *h*-ren zein baliotarako da $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ bektore-sistema librea?

6.- $\boldsymbol{x}_1=(1,3)$, $\boldsymbol{x}_2=(3,8)$ eta $\boldsymbol{x}_3=(2,5)$ bektoreek $\mathbb{R}^2$ espazioko oinarria osatzen al dute? Aurkitu bi era ezberdin $(1,1)$ bektorea adierazteko $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ eta $\boldsymbol{x}_3$ bektoreen konbinazio lineala moduan.

8 Determinanteak

1.- Kalkulatu matrize hauen determinanteak:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&2&-4\\4&1&-2\\5&2&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&4&-5\\8&7&-2\\2&-1&8\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&-1&0&1\\1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}-3&1&0&6\\-5&0&2&0\\4&-5&-3&-2\\0&0&-4&-5\end{pmatrix}.$$

2.- Alderanzkarriak al dira matrize hauek? Horrela den kasuan, kalkulatu alderantzizko matrizea:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&2&-4\\4&1&-2\\5&2&-3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}3&4&-5\\8&7&-2\\2&-1&8\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&2&1\\5&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

3.- Kalkulatu matrize hauen heina:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\2&-1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\2&1&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&3&4&2\\4&2&0&3\\3&3&3&4\end{pmatrix}.$$

4.- Kalkulatu matrize hauen heina parametroen balio ezberdinetarako:

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\2&-1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&a&2\\2&5&4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&2&3\\4&a&1\\2&-1&3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}a&2&3\\a&3&1\\2&-1&3\end{pmatrix}.$$

5.- Sailkatu ekuazio linealen sistema hauek parametroen balio ezberdinetarako:

$$\text{a)}\begin{cases}x+2y=2\\2x+ay=3\end{cases},\quad \text{b)}\begin{cases}x+2y+z=2\\2x+3y+z=a\\x+3y+2z=1\end{cases},\quad \text{c)}\begin{cases}ax-y-z=1\\x-ay-z=1\\x-y-z=1\end{cases}.$$

ARIKETEN SOLUZIOAK

1. GAIA

1.- $-\frac{3}{2} < -\frac{5}{4} < 0 < \frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

2.- 35.

3.- 6, 16.

4.- $\frac{x+1}{x^2+1},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x-1},\ x^2,\ \sqrt[3]{a},\ \frac{a}{b}x_1x_2,\ \sqrt[b]{x}y^a$.

5.- $b = \frac{4a+6}{7}$, $x = \frac{b+d}{a-c}$, $x = \left(\frac{c}{ab}\right)^3$, $a = \frac{1-z}{x-zy}$.

6.- $x < -7$, edo beste modu batean, $x \in (-\infty, -7)$.

7.- $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, edo beste modu batean, $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

8.- $x \le 2$, edo beste modu batean, $x \in (-\infty, 2]$.

9.- $-1-\sqrt{5} < x < -1+\sqrt{5}$, edo beste modu batean, $x \in (-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5})$.

10.- Ez da existitzen $x \in \mathbb{R}$ non $x^2+2x+4<0$ den.

11.- $0 < x < 1$, edo beste modu batean, $x \in (0,1)$.

12.- %20 baino handiagoa.

13.- 1050,6 euro.

14.- $1 \le x \le 7$, edo beste modu batean, $x \in [1,7]$.

15.- $x \in (-\infty,-7) \cup (-1,+\infty)$.

16.- $\{x \in \mathbb{R} / x^5 \le 6\} = \{x \in (-\infty, \sqrt[5]{6}]\}$. Multzo hori ez da bornatua. Multzoaren gorena $\sqrt[5]{6}$ da eta ez du beherenik.

17.- $\{x \in \mathbb{R} / |x-3| \ge 4\} = \{x \in (-\infty,-1] \cup [7,+\infty)\}$. Multzo hori ez da bornatua. Multzoak ez du ez gorenik ezta beherenik ere.

18.- $\{x \in \mathbb{R} / |x-3| < 4\} = \{x \in (-1,7)\}$. Multzo hori bornatua da. Beraren gorena 7 da eta beherena -1.

2. GAIA

1.- $f(0)=11,\ f(\sqrt{3})=11,\ f(a)=11,\ f(a+h)-f(a)=11-11=0$.

2.- $f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(\sqrt{3})=-2,\ f(1/3)=8/9$.

a) Edozein zenbaki errealetarako beteko da berdintza.

b) $x = 1/2$.

c) Ez da existitzen berdintza hori beteko duen balio errealik.

3.- $f(0)=0,\ f(-1)=\frac{-1}{3},\ f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{5},\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{46}$.

4.-

a) $E = \mathbb{R}$.

b) $E = \mathbb{R}-\{1\}$.

c) $E = [3,+\infty)$.

d) $E = \mathbb{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

e) $E = (1,+\infty)$.

f) $E = (-\infty,-3] \cup (3,+\infty)$.

g) $E = [1,+\infty)$.

5.- $E(f) = (-\infty,-2] \cup (4,+\infty)$.

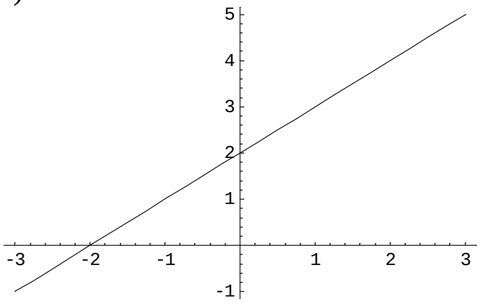
$E(g) = (4,+\infty)$.

f eta *g* funtzioak ez dira berdinak, beraien existentzi eremua ez delako berdina.

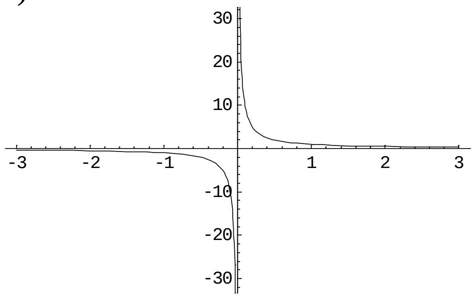
$x > 4$ denean beteko da $f(x)=g(x)$.

6.-

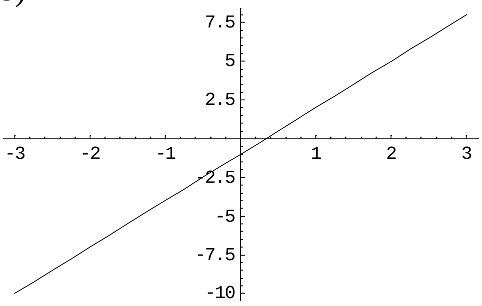
a)



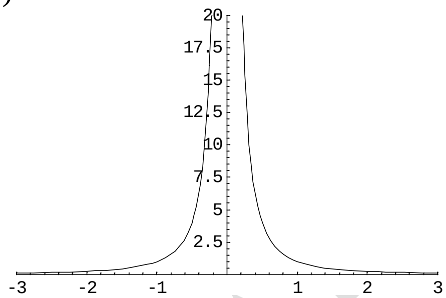
d)



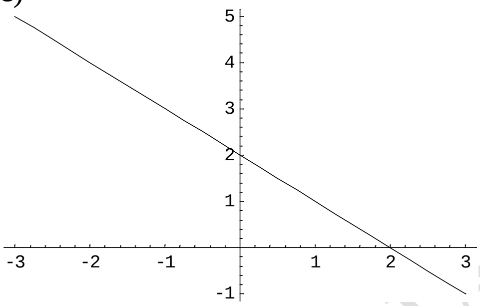
b)



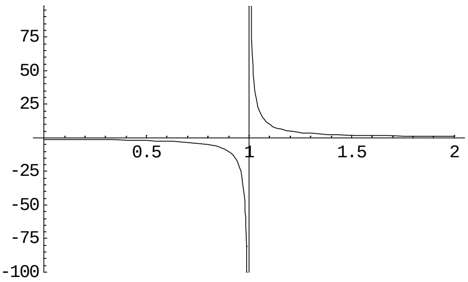
e)



c)

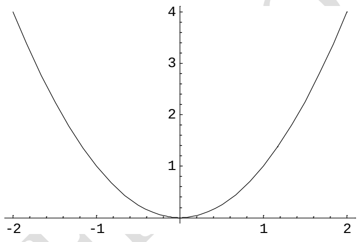


f)

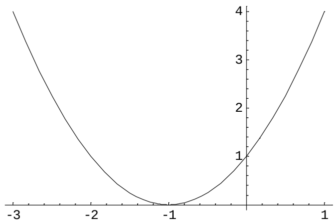


7.-

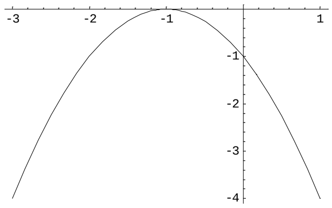
$f(x) = x^2$



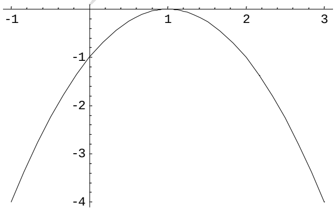
$g(x) = (x+1)^2$



$h(x) = -(x+1)^2$



$j(x) = -(1-x)^2$



8.- $\forall a \in \mathbb{R}$ eta $b = 0$

9.- $x, y > 0$ edo $x, y < 0$ edo ($x = 0$ edo $y = 0$).

10.- $x = 0$ edo $y = 0$.

11.- $f(x) = 6 - x$.

12.- $f(x) = 2x + 100$.

13.- a) $y = 3x - 5$. Zuzenaren malda 3 da.

b) $y = 3x - 5$.

c) $y = -\frac{3}{4}x + 3$. Zuzenaren malda $-\frac{3}{4}$ da.

d) $y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$.

e) $y = 2x - 3$.

f) $y = 2x - 3$.

14.- $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$.

$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$.

15.- a) Erro osoak: 1, 2.
$f(x) = (x-1)(x-2)$

b) Erro osoak: -1, -4.
$g(x) = (x+1)(x+4)$

c) Erro osoak: 1, 2, -2.
$h(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$

d) Erro osoak: -1, 2.
$m(x) = (x+1)^2(x-2)^2$

e) Erro osoak: -2, 1, 2.
$n(x) = \frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-2)$

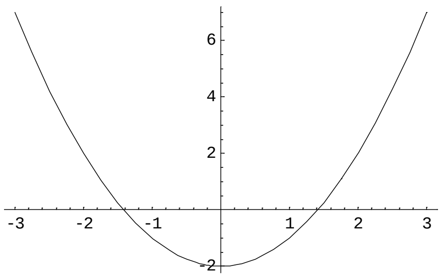
f) Erro osoak: 0, 1, 2.
$p(x) = x(x-1)(x-2)$.

g) Erroak: 2, -4, ½.
$q(x) = (x-2)(x+4)(2x-1)$.

16.- $\frac{x^3 - 2x + 1}{x+1} \to$ hondarra ez da zero.

$\frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x+1} \to$ hondarra zero da.

17.- a) Erpina: $(0,-2)$. Simetria ardatz bertikala: $x = 0$.



b) Erpina: $(1,1)$. Simetria ardatz bertikala.

c) Erpina: (0,0). Simetria ardatz bertikala.

d) Erpina: (0,2). Simetria ardatz bertikala.

e) Erpina: (1,0). Simetria ardatz bertikala.

f) Erpina: (1,3). Simetria ardatz bertikala.

18.- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{-3}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{194}}$; $\dfrac{10}{3}$.

19.- $\sqrt[5]{a}$; $a^{163/60}$; $64a^6$; $a^{11/6}$.

20.- Gezurra; Gezurra; Gezurra; Egia, Egia, Gezurra.

21.- a) $E=(0,2)$; b) $E=\mathbb{R}-\{0\}$; c) $E=(1,+\infty)$; d) $E=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

22.- a) $x=0$; b) $x=\dfrac{\ln 5-\ln 3}{\ln 2+\ln 3}$; c) $x=16$; d) $x=\mathrm{e}^{-4}$.

23.- a) Gezurra; b) Egia; c) Egia; d) Gezurra; e) Egia; f) Gezurra.

24.- a) $E=\mathbb{R}$. *f* jarraitua da beraren existentzi eremuan.

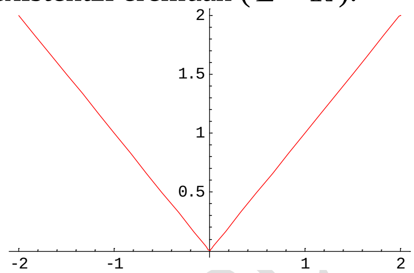
b) $E=\mathbb{R}-\{0\}$. *g* jarraitua da beraren existentzi eremuan.

c) $E=\mathbb{R}$. *h* jarraitua da $(\mathbb{R}-\{0\})$ -n.

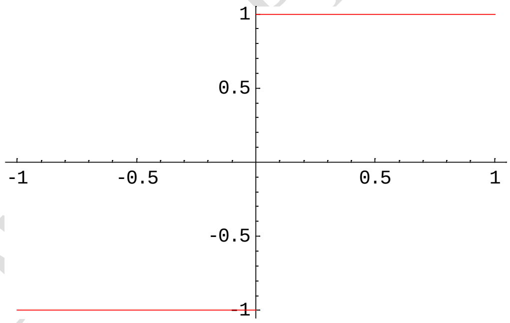
d) $E=\mathbb{R}$. *k* jarraitua da beraren existentzi eremuan.

25.- $f(x)=2$ izan behar da $(0,2)$ tartean, *f* jarraitua izateko $\mathbb{R}$ osoan.

26.- a) *f* jarraitua da beraren existentzi eremuan ($E=\mathbb{R}$):



b) *g* jarraitua da beraren existentzi eremuan $(E=\mathbb{R}-\{0\})$:



28.- b) Ez.

29.- *f* ez da jarraitua $x=0$ puntuan, bereziki ez da jarraitua $[-1,1]$ tartean. Beraz, ezin daiteke Bolzanoren teorema erabili, *f* funtzioak errorik duen jakiteko.

3. GAIA

1.- $f'(x)=3$.

2.- $f'(x)=4x+3$.

$y=7x-3$.

3.- $f'(x)=2ax+b$.

5.- a) $y'=9x^2$; b) $y'=0$; c) $y'=-\dfrac{15}{x^6}$; d) $y'=-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$; e) $y'=\dfrac{4}{(x^2)\sqrt[3]{x}}$.

6.-

a) $f'(x)=6x-7$. b) $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2$. c) $h'(x)=1+x-\dfrac{x^2}{4}$.

d) $m'(x)=24x^3-63x^2+16x-28$. e) $n'(x)=4x(3x^2+1)$. f) $p'(x)=-\dfrac{x+12}{2x^2\sqrt{x}}$.

g) $q'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$. h) $r'(x)=\dfrac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}}$. i) $s'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$.

7.-

a) $y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$. b) $y'=-\dfrac{3x+1}{(x-1)^3}$. c) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$.

d) $y'=\dfrac{x+2}{x^3}$. e) $y'=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

8.- a) $x=1/3$.

b) $x=0,-\sqrt{3},\sqrt{3}$.

c) Ez da existitzen x-ren baliorik $f'(x)=0$ izateko.

9.- a) Bai; b) Ez; c) Ez; d) $p(x)$ deribagarria da $\mathbb{R}$-n, $a=0$ bada.

10.- a) $f(x)\simeq 1-x$; b) $f(x)\simeq \dfrac{x}{3}+1$; c) $f(x)\simeq 1$.

11.- a) $\sqrt[4]{1,02}\simeq 1+\dfrac{1}{4}(0,02)$; b) $\sqrt[5]{33}\simeq 2\left(1+\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{32}\right)$; c) $(1,03)^{15}\simeq 1+15(0,03)$.

12.-

a) $y'=-\dfrac{8(2x+1)}{(x^2+x-1)^5}$

b) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

c) $y'=3\left(\sqrt[3]{x}+x\right)^2\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+1\right)$

d) $y'=0$

e) $y'=3\sin^2(x)\cos(x)-3x^2\sin(x^3)$

f) $y'=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

g) $y'=\dfrac{2x}{4\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}$

h) $y'=-\sin(x)\cos(\cos(x))$

i) $y'=-\dfrac{1}{x^2\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

j) $y'=-\dfrac{3x^2\sin(x^3)}{2\sqrt{\cos(x^3)}}$

k) $y'=-\dfrac{x\sin(x)+\cos(x)}{x^2}$

l) $y'=\dfrac{\cos(x)+x\sin(x)}{\cos^2(x)}$

m) $y'=\cos(x)e^{\sin(x)}$

n) $y'=-\dfrac{x(2\ln(x)-1)}{\ln^2(x)}\sin\left(\dfrac{x^2}{\ln(x)}\right)$

o) $y'=\dfrac{\ln(3)}{x}3^{\ln(x)}$

p) $y'=\dfrac{3}{x}\cos(\ln(x^3))$

q) $y'=2\sin(x)\cos(x)e^{\sin^2(x)}$

13.- a) $y'=\dfrac{2-2xy}{x^2}$; b) $y'=-\dfrac{2(y+1)}{2x-1}$; c) $y'=\dfrac{2}{3}\dfrac{x+1}{(y+2)^2}$.

14.- a) $y'=-\dfrac{x}{y}$; b) $y'=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; c) $y'=\dfrac{4x-y}{x+2y}$.

15.- a) $y'=(\ln(x)+1)x^x$.

b) $y' = \left(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} \right) x^{\sin(x)}$.

c) $y' = \left[-\frac{\ln(2x+1)}{x^2} + \frac{2}{x(2x+1)} \right] (2x+1)^{1/x}$.

d) $y' = -5^{-x}\ln(5)$.

e) $y' = \left[-\ln(1+x^2) + \frac{2x(1-x)}{1+x^2} \right] (1+x^2)^{1-x}$.

f) $y' = \left[2x\ln(x^3+4x-5) + \frac{(x^2+5)(3x^2+4)}{x^3+4x-5} \right] (x^3+4x-5)^{x^2+5}$.

g) $y' = \left[\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)} \right] \ln^x(x)$.

h) $y' = \frac{2\ln(x)}{x} x^{\ln(x)}$.

i) $y' = \left[f'(x)\ln(x) + \frac{f(x)}{x} \right] x^{f(x)}$.

j) $y' = \left[\frac{f'(x)g(x)}{f(x)} + g'(x)\ln(f(x)) \right] (g(x))^{f(x)}$.

k) $y' = \left[\frac{2}{x} - \frac{3}{1-x} - \frac{1}{3(x+1)} \right] \frac{x^2(1-x)^3}{\sqrt[3]{2x+2}}$.

l) $y' = \left[\frac{1}{2(x+2)} + \frac{3x^2}{x^3-1} + \frac{2x+2}{x^2+2x+5} \right] \sqrt{x+2}(x^3-1)(x^2+2x+5)$.

m) $y' = \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{2x} \right) x^{-2}(x+4)\sqrt{x}$.

20.- a) $y'' = -\frac{x+3}{4x^2\sqrt{x}}$; b) $y'' = \frac{8}{(x-1)^3}$; c) $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$.

21.- $y = \sin(x)$ bada, hamazazpigarren ordenako deribatua $y^{(17)} = \cos(x)$ da.
$y = \cos(x)$ bada, hamazazpigarren ordenako deribatua $y^{(17)} = -\sin(x)$ da.

22.- $p(x)$-ren bosgarren ordenako deribatua $p^{(5)}(x) = 120$ da.
$p(x)$-ren seigarren ordenako deribatua $p^{(6)}(x) = 0$ da.

25.- a) *f* funtzioak maximo bat du $(1,5)$ puntuan.
b) *g* funtzioak minimo bat du $(-1,-2)$ puntuan.
c) *h* funtzioak maximo bat du $(0,2)$ puntuan.
d) *j* funtzioak maximo bat du $\left(0, 3-\sqrt{2}\right)$ puntuan, eta minimo bat $\left(2,1\right)$ puntuan.
e) *k* funtzioak maximo bat du $\left(3, -\frac{3}{17}\right)$ puntuan, eta minimo bat $(1,-3)$ puntuan.

26.- a) *f* funtzioak ez du muturrik.
b) *g* funtzioak maximo bat du $x = \sqrt{\frac{15}{6}}$ puntuan, eta minimo bat du $x = -\sqrt{\frac{15}{6}}$ puntuan.
c) *h* funtzioak maximo bat du $x = 1$ puntuan, eta minimo bat du $x = -1$ puntuan.
d) *p* funtzioak ez du maximorik, eta minimo bat du $x = -1$ puntuan.

27.- a) *f* funtzioak maximo lokal bat du $(1,5)$ puntuan.
b) *g* funtzioak maximo lokal bat du $(0,2)$ puntuan, eta minimo lokal bat $(2,-6)$ puntuan.

c) h funtzioak ez du mutur lokalik.

d) j funtzioak ez du mutur lokalik.

e) k funtzioak maximo lokal bat du $\left(3, \frac{1}{8}\right)$ puntuan.

28.- a) f funtzioak maximo bat du $(3, 32)$ puntuan, eta minimo bat $(1, 4)$ puntuan.

b) g funtzioak maximo bat du $(4, 44)$ puntuan, eta minimo bat $(\sqrt{2}, 4-4\sqrt{2})$ puntuan.

c) h funtzioak maximo bat du $(2,14)$ puntuan, eta minimo bat $(3,12)$ puntuan.

d) j funtzioak maximo bat du $(-1, 9)$ puntuan, eta minimo bat $(\sqrt{6}, -24\sqrt{6})$ puntuan.

29.- f funtzioak maximo lokalak ditu $(0, 3)$ eta $(3, 3e^{-3})$ puntuetan, eta minimo lokal bat du $(2, e^{-2})$ puntuan.

30.- $x = 20$, $y = 20$. Ez dago biderkadura minimoa emango duen bikoterik.

31.- $x = 10$ cm, $y = 10$ cm. Ez da existitzen perimetro maximoa duen errektangelurik.

32.- a) 100 euro.

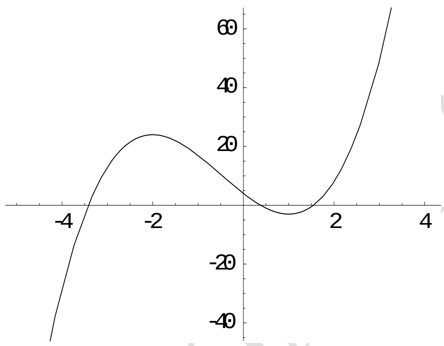
b) $(150 - x)(100 + x)$.

c) 125 bidaiarirekin.

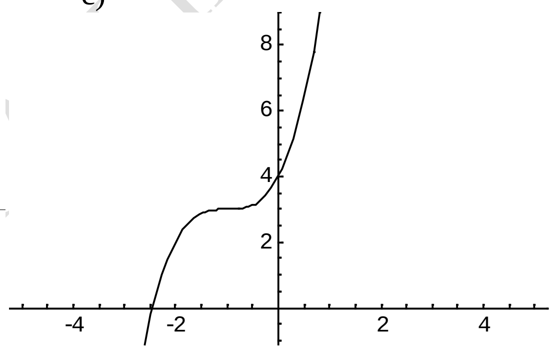
33.- $a = \frac{3}{2}$, $b = -6$. f funtzioak maximoa lortzen du $x = -2$ puntuan, eta minimoa $x = 1$ puntuan. c kalkulatzeko f funtzioaren puntu bat jakin behar dugu.

34.-

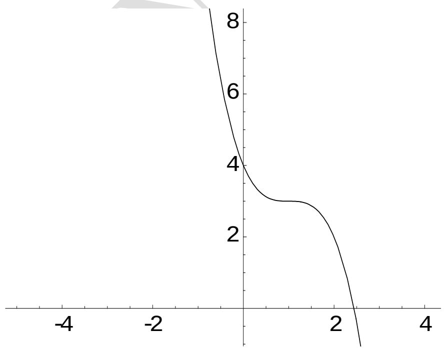
b)



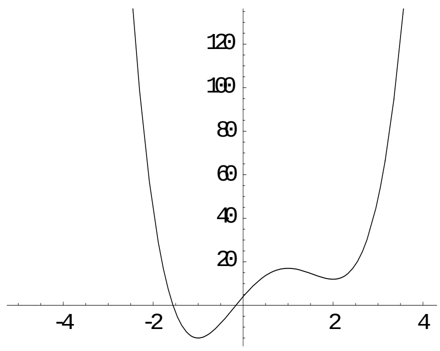
c)



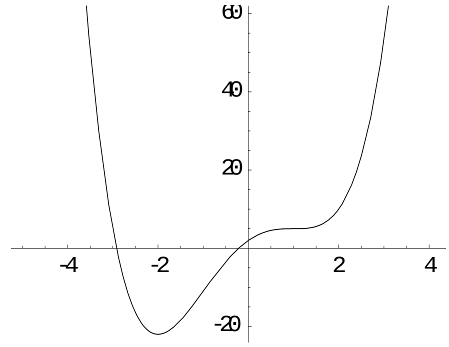
d)



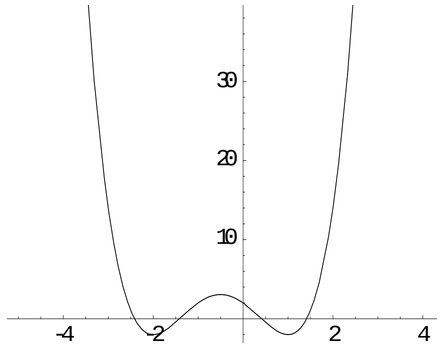
e)



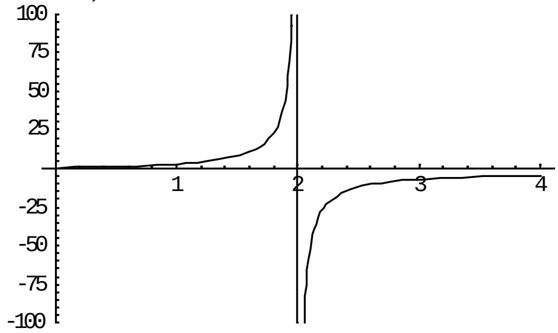
f)



g)

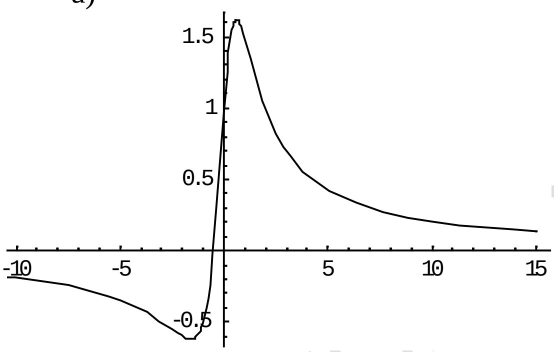


h)

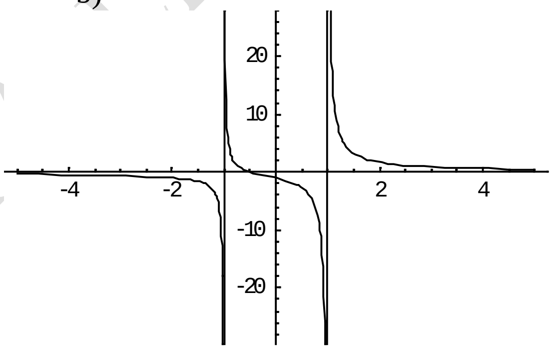


35.-

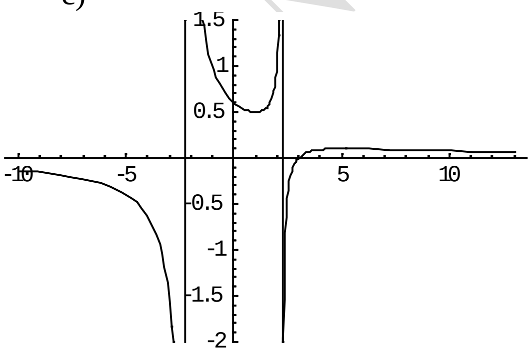
a)



b)



c)



4. GAIA

1.-

a) $\frac{1}{2}(3x^4+5x^2-8x)+k$

l) $\frac{4x^3-9x^2+6x}{24}+k$.

b) $x+\ln|2x+1|+k$.

c) $\frac{x^2}{2}+2x+4\ln|x+3|+k$.

d) $\ln|x^3+1|+k$.

e) $-\frac{1}{5}e^{-5x}+k$.

f) $\frac{3}{2}e^{\frac{2x}{3}}-\frac{3}{2}e^{-\frac{2x}{3}}-2x+k$.

g) $3\sqrt{x^2-1}+k$.

h) $-e^{\frac{1}{x}}+k$.

i) $\ln(e^x+1)+k$.

j) $2\sin\sqrt{x}+k$.

k) $-\frac{5}{8}(1-x^2)^4+k$.

m) $\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+k$.

n) $\frac{x^2}{2}+\frac{9}{2}\ln|x^2-9|+k$.

ñ) $\frac{1}{4}\ln|2x^2+4x|+k$.

o) $\frac{-1}{2\ln 4}4^{3-2x}+k$.

p) $-\frac{3}{2}e^{-(x^2+1)}+k$.

q) $\frac{5^{x^2}}{2\ln 5}+k$.

r) $2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln^2(x)+k$.

s) $-\ln|\cos(x)|+k$.

t) $\frac{1}{2}\sin^2(x)+k$.

u) $\frac{-1}{22}(1-2x)^{11}+k$.

2.- a) xe^x-e^x+k.

b) $\frac{xe^{5x}}{5}-\frac{1}{25}e^{5x}+k$.

c) $-3x\cos(x)+3\sin(x)+k$.

d) $3x\sin(x)+3\cos(x)+k$.

e) $x^2e^x-2xe^x+2e^x+k$.

f) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+k$.

g) $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+k$.

h) $x\ln(x)-x+k$.

i) $(x-3)e^x-e^x+k$.

j) $-(x+5)\frac{\cos(4x)}{4}-\frac{1}{16}\sin(4x)+k$.

3.- a) $2\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}-\sqrt{x+1}\right)+k$.

b) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}+k$.

c) $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}\right)+k$.

d) $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)+k$.

e) $-2(1-x)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+k$

f) $\frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+1)^{10}}{10}-\frac{(x^2+1)^9}{9}\right)+k$.

4.- a) $\frac{35}{6}$.

b) $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{e^{18}}-\frac{1}{e^6}\right)$.

d) $-\frac{16}{3}$.

e) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)$.

c) $\frac{1}{4}$. f) $\frac{10}{7}$.

5.- $\frac{1}{2}$ u^2.

6.- $\frac{1}{3}$ u^2.

7.- $\frac{1}{3}$ u^2.

8.- $\frac{32}{3}$ u^2.

9.- $\frac{125}{6}$ u^2.

10.- 12 u^2.

11.- $\frac{1}{6}$.

12.- $\frac{1}{3}$.

13.- Denak 1. motako integral inpropioak dira (funtzio bornatua tarte ez bornatuan).

a) 7+ln(7) –ln(3). Bigarrena, dibergentea.
b) Dibergentea.
c) 2+e eta dibergentea.
d) 1–e eta 3–e.
e) 11/6 eta dibergentea.
f) $2e-\frac{e}{5}$ eta 2e.

5. GAIA

1.- $x=3,\quad y=-3,\quad z=-4.$

2.- $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.
$\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$.

3.- $-6,-6,9,9,-18,-18.$
$3,3,\sqrt{29}.$

4.- Bai, ez, bai.

5.- $-2,4.$

6.- $a=0,\ a=-1,1,\ \nexists a$.

7.- $x-2y=1$. Bai.

8.- $-2x+y=-3.$

9.- $x-2y+3z=2$. Ez.

10.- $x+y-2z=5$.

6. GAIA

1.- $(-3-2z,1+z,z),\ z\in\mathbb{R}.$ $(1,-1,-2)$ bektoreak $(z=-2).$

2.- $\frac{1}{3}(-2,-2,1).$

3.- $\left(-\dfrac{12}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

4.- $(4,-14,2)$.

5.- $(3,5)=3(2,2)-(3,1)$.

6.- $\nexists$.

7.- a) i) 11 ongi, 9 gaizki.
ii) 17.
b) Ez.
c) 7 ongi.

8.- a) $(0,-5)$; b) $(3,1)$; c) $\varnothing$; d) $\varnothing$; e) $a=6$ S.B.D.: $(3,1)$, $a\neq 6$ S. Bateraezina .

9.- Adibidez, a) $\begin{cases}3x-2y=0\\ y=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+3y=0\\ x=3\\ y=-1\end{cases}$

10.- a) $x=12, y=-4, z=-1.$ b) $x=3, y=4, z=-3.$

11.- a) 3; 3; -1; 3.
b) Ez. Bai.

12.- $\begin{pmatrix}-14 & 17\\ -10 & -7\end{pmatrix}$.

13.- $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

14.- a) $a=-c+d; b=-c;\ c,d\in\mathbb{R}$.
b) $\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-3\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$; $\nexists$; $\begin{pmatrix}6 & 7 & -4\\ 7 & 10 & -3\\ -4 & -3 & 5\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 5 & 14 & -4\\ -1 & -4 & 5\end{pmatrix}$; 6; $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

15.- Bai.

16.- a) Bateragarri determinatua. $x=-10,\ y=-7,\ z=2.$
b) Bateragarri indeterminatua. $x=4-4z,\ y=1-2z,\ z\in\mathbb{R}.$
c) Bateragarri indeterminatua. $x=\dfrac{4+z}{3},\ y=\dfrac{-1-z}{2},\ z\in\mathbb{R}.$
d) Bateragarri indeterminatua. $x=4-y,\ z=-2,\ y\in\mathbb{R}.$
e) Bateragarri determinatua. $x=-9,\ y=4,\ z=0,\ t=3.$
f) Bateragarri indeterminatua. $x=-9+3z,\ y=4-z,\ t=3;\ \ z\in\mathbb{R}.$

17.- a) $a=0$ bada, bateraezina $\forall b\in\mathbb{R}$;
$a\neq 0$ bada, bateragarri determinatua $\forall b\in\mathbb{R}$.
b) $a\neq 0$ bada, bateragarri determinatua $\forall b\in\mathbb{R}$.
$a=0, b=1$ badira, bateragarri indeterminatua. $x=\dfrac{3z+2}{3},\ y=2z+1,\ z\in\mathbb{R}.$
$a=0, b\neq 1$ badira, bateraezina.
c) $a\neq 0$ bada, bateragarri determinatua $\forall b\in\mathbb{R}$.
$a=0, b=0$ badira, bateragarri indeterminatua. $x=14-7z,\ y=3-2z,\ z\in\mathbb{R}.$
$a=0, b\neq 0$ badira, bateraezina.
d) $a\neq 0$ bada, bateragarri determinatua $\forall b\in\mathbb{R}$.
$a=0, b=2$ badira, bateragarri indeterminatua. $x=\dfrac{3z+4}{3},\ y=2z+2,\ z\in\mathbb{R}.$
$a=0, b\neq 2$ badira, bateraezina.

18.- a) Bateragarri determinatua. $x=\frac{5}{7},\ y=\frac{8}{7}.$

b) Bateragarri determinatua. $x=\frac{14}{13},\ y=\frac{5}{13}.$

c) Bateragarri indeterminatua. $x=5+5z,\ y=-2-4z,\ z\in\mathbb{R}.$

d) Bateragarri determinatua. $x=1,\ y=-1,\ z=2.$

e) Bateraezina.

f) Bateragarri indeterminatua. $x=3+2z,\ y=-1-z,\ z\in\mathbb{R}.$

g) Bateragarri determinatua. $x=3,\ y=-\frac{7}{4},\ z=\frac{5}{2}.$

h) Bateragarri determinatua. $x=0,\ y=0,\ z=0.$

19.- 2; 3; 2; 2; 3; 3.

20.- a) Bateragarri determinatua. $x=0,\ y=0.$

b) Bateragarri determinatua. $x=0,\ y=0.$

c) Bateragarri indeterminatua. $x=5z,\ y=-4z,\ z\in\mathbb{R}.$

d) Bateragarri determinatua. $x=0,\ y=0,\ z=0.$

e) Bateragarri determinatua. $x=0,\ y=0,\ z=0.$

21.- 150 eta 400.

22.- 70, 100 eta 50.

23.- 5000, 5000 eta 10000.

24. 0,5 milioi, 0,5 milioi eta milioi bat.

25. a) Sistema bateraezina. b) 150.

26. a) Sistema bateraezina. b) a) Orain sistema bateragarria da.

7. GAIA

1.- a) Bai. b) Ez. c) Bai. d) Ez. e) Ez. f) Ez. g) Bai. h) Bai. i) Ez. j) Bai.

2.- a) Ez. b) Bai. c) Ez. d) Bai. e) Ez. f) Bai. g) Ez. h) Bai. i) Ez. j) Ez. k) Ez. l) Bai. m) Bai.

3.- Adibidez $(1,1,1)$ eta $(2,-1,0)$.

4.- 3.

5.- a) $\forall h\in\mathbb{R}$. b) $\nexists$.

6. Ez. Adibidez, $(1,1)=-4(1,3)+(3,8)+(2,5)$ eta $(1,1)=-(1,3)-2(3,8)+4(2,5)$.

8. GAIA

1.- 1; -5; 0; -2; 745.

2.- Bai; bai; bai; ez; bai.

3.- 2; 3; 3.

4.- $r(A)=2\ \forall a\in\mathbb{R}$. $a=\frac{5}{2}\rightarrow r(B)=1,\ a\neq\frac{5}{2}\rightarrow r(B)=2$.

$a=\frac{29}{3}\rightarrow r(C)=2,\ a\neq\frac{29}{3}\rightarrow r(C)=3$. $a=14\rightarrow r(D)=2,\ a\neq 14\rightarrow r(D)=3$.

5.- a) $a\neq 4$ bada, bateragarri determinatua.
$a=4$ bada, bateragarri indeterminatua.

b) $a\neq 5$ bada, bateraezina.
$a=5$ bada, bateragarri indeterminatua.

c) $a\neq 1$ bada, bateragarri determinatua.

$a = 1$ badira, bateragarri indeterminatua.