eman ta zabal zazu

A eredua

Irakasgaia: Matematika eta Estatistika **Taldea:** 31
Saila: Matematika Aplikatua eta Estatistika
Azterketa: 2. partziala
Data: 2019ko azaroaren 6a

- ✓ **Kalkulagailua**: kalkulagailua erabil daiteke baldin programagarria ez bada. Erabat debekatuta dago bestelako gailu elektronikoak erabiltzea edo eskura edukitzea.
- ✓ **Iraupena**: behin enuntziatuak emanda, 90 minutuko iraupena izango du azterketak.
- ✓ **Kalifikaziorako irizpideak**: ariketa bakoitzean gehienezko nota lortzeko, planteamenduak, azalpenek eta ebazpenak zuzenak izan behar dute. Gainera, ordena eta argitasuna balioetsiko dira.
- ✓ **Idazketarako tresnak**: ez da aintzat hartuko, ezta zuzenduko ere, erantzunetan arkatzez edo boligrafo gorriz idatzitakoa.

(0,80 puntu) 1. Biz

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t^2}x' = \dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{2x}{t^2}+\dfrac{3}{t}\right) \\ x(1)=2 \end{cases}$$

Kalkula ezazu bere soluzio partikularra.

(0,80 puntu) 2. Biz

$$\begin{cases} x' - \dfrac{1}{t}x = \dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{2t}x^3 \\ x(1)=1 \end{cases}$$

Kalkula ezazu bere soluzio partikularra.

(0,90 puntu) 3. Kalkula ezazu problema honen soluzio partikularra.

$$\begin{cases} (2tx^2+3t^2x)\,\mathrm{d}t + (3t^2x+2t^3+2)\,\mathrm{d}x = 0 \\ x(0)=1 \end{cases}$$

eman ta zabal zazu

B eredua

Irakasgaia: Matematika eta Estatistika **Taldea:** 31
Saila: Matematika Aplikatua eta Estatistika
Azterketa: 1. partziala
Data: 2019ko urriaren 7a

✓ **Kalkulagailua:** kalkulagailua erabil daiteke baldin programagarria ez bada. Erabat debekatuta dago bestelako gailu elektronikoak erabiltzea edo eskura edukitzea.

✓ **Iraupena:** behin enuntziatuak emanda, 90 minutuko iraupena izango du azterketak.

✓ **Kalifikaziorako irizpideak:** ariketa bakoitzean gehienezko nota lortzeko, planteamenduak, azalpenek eta ebazpenak zuzenak izan behar dute. Gainera, ordena eta argitasuna balioetsiko dira.

✓ **Idazketarako tresnak:** ez da aintzat hartuko, ezta zuzenduko ere, erantzunetan arkatzez edo boligrafo gorriz idatzitakoa.

(0.50 puntu) 1. Mikroorganismo-populazio jakin baten hazkundea aztertu nahi da. Esperimentuen arabera, mikroorganismoen hazkundeak honako eredu honi jarraitzen dio:

$$x'(t) = k\,x(t),$$

non $x(t)$ mikroorganismoen kopurua, t aldiunean (orduetan adierazita). Demagun

$$x(6) = 8x_0,$$

non x_0 mikroorganismoen hasierako kopurua baita.

a) Kalkula ezazu proportzionaltasun konstantea (k). 1/6 ln 8

b) Zenbat denbora igaroko da $x(t) = 128\,x_0$ izateko? 14 ordu

(0,75 puntu) 2. Demagun A substantziak B substantziarekin erreakzionatzen duela C produktua eratzeko. Erreaktiboen hasierako masak honako hauek dira: 20 g eta b_0 g, hurrenez hurren. Estekiometriaren arabera, 3 g A-k 1 g B-rekin erreakzionatzen dute. Hasi eta 4 minutura, 20 g C daude, eta 4 minutu geroago, 24 g C.

a) Kalkula ezazu b_0. 10

b) Erreaktibo bakoitzaren zer masa geratuko da erreakzionatu gabe $t \to \infty$ doanean? 0 / 10/3

(0,75 puntu) 3. Demagun 100 ℓ-ko depositu bi ditugula: A eta B. Andelak gatz-soluzio banaz beteta daude, kontzentrazioak $1\,\frac{g}{\ell}$ eta $3\,\frac{g}{\ell}$ izanik, hurrenez hurren. Une batetik aurrera, $2\,\frac{g}{\ell}$-ko soluzio bat sartzen da lehenengo depositura, $Q\,\frac{\ell}{\min}$-ko abiaduran, eta, abiadura berean, likidoa ateratzen da lehenengo depositutik bigarrenera. Halaber, likidoa ateratzen da bigarren andeletik, berriz ere abiadura berean.

a) Kalkula ezazu Q abiadura ekuazio hau bete dadin 10

$$x(20) = y(20).$$

b) Kalkula itzazu bi depositu etako gatz-soluzioen kontzentrazioak $t \to \infty$ doanean. 2 g / l

Orain, demagun bigarren depositua sistema horretatik isolatzen dugula; hala, gatz-soluzioa ez da sartzen, ez eta ateratzen ere. Demagun T_0 °C dela andelaren hasierako tenperatura, eta $\frac{1}{4}T_0$°C, ingurumen-tenperatura.

(c) Kalkula ezazu energia transmisioaren koefizientea (k), jakinda $t = 1$ minutuan andelaren tenperatura $T = \frac{3}{4}T_0$ °C dela. ln 3/2

DESINTEGRAZIO ERREAKTIBOAK

$$x' = -kx(t)$$

$$x(t) = x_0 e^{-kt} \qquad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \quad \text{egun} \quad k: \text{ordu}^{-1}$$

$$k = \frac{-1}{t} \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

POPULAZIOEN HAZKUNDEA

$$x(t) = x_0 e^{kt}$$

$$k = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

HOZTE LEGEA

$$T(t) = T_i + (T_0 - T_i)\, e^{-kt}$$

EREDU LOGISTIKOA

$$x(t) = \frac{a x_0 e^{at}}{b x_0 e^{at} - b x_0 + a}$$

$$t = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x\,(b x_0 - a)}{x_0\,(b x - a)}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{a x_0 e^{at}}{b x_0 e^{at} - b x_0 + a} = \lim_{t\to\infty} \frac{a\,\cancel{x_0 e^{at}}}{b\,\cancel{x_0 e^{at}}} = \frac{a}{b}$$

ERREAKZIO KIMIKOAK

$$\underset{M}{A} + \underset{N}{B} \rightarrow C \qquad \alpha = \frac{M}{M+N} \qquad 1-\alpha = \frac{N}{M+N}$$

$$ckt = \ln\left[\frac{a_0\,[b_0 - (1-\alpha)x]}{b_0\,(a_0 - \alpha x)}\right] = ckt \qquad x = \frac{a_0 b_0\,(e^{ckt} - 1)}{\alpha b_0\, e^{ckt} - a_0(1-\alpha)}$$

$$ck = \frac{1}{t_1} \ln\left[\frac{a_0\,[b_0 \pm (1-\alpha)x_1]}{b_0\,(a_0 - \alpha x_1)}\right]$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{a_0 b_0 (e^{ckt} - 1)}{\alpha b_0 e^{ckt} - a_0 (1-\alpha)} = \frac{a_0 b_0 (\cancel{e^{ckt}} - 1)}{\alpha b_0 \cancel{e^{ckt}}} = \frac{a_0}{\alpha}$$

— $ck > 0$ baldin bada → A muga faktorea

- $\lim_{t\to\infty} (a_0 - \alpha x(t)) = a_0 - \alpha \lim_{t\to\infty} = a_0 - \alpha \frac{a_0}{\alpha} = 0$

$$\lim_{t\to\infty} (b_0 - (1-\alpha) x(t)) = b_0 - (1-\alpha) \lim_{t\to\infty} x(t) = b_0 - (1-\alpha)\frac{a_0}{\alpha} = —$$

— $ck < 0$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{a_0 b_0 (\overset{0}{e^{ckt}} - 1)}{\alpha \underline{b_0 e^{ckt}} - a_0 (1-\alpha)} = \lim_{t\to\infty} \frac{a_0 b_0 (-1)}{-a_0 (1-\alpha)} = \frac{b_0}{1-\alpha}$$

- $\lim_{t\to\infty} (a_0 - \alpha x(t)) = \overset{0}{a_0} - \alpha \lim_{t\to\infty} = a_0 - \alpha \frac{b_0}{1-\alpha} = —$

- $\lim_{t\to\infty} (b_0 - (1-\alpha) x(t)) = b_0 (1-\alpha) \lim_{t\to\infty} x(t) = b_0 - (1-\alpha) \cdot \frac{b_0}{1-\alpha} = 0$

DEPOSITU BAT

$Q = l/min$

$t = min$

$C_0 = g/l$

$$x(t) = C_1 V_0 + (C_0 - C_1) V_0 e^{-Q/V_0 t}$$

BI DEPOSITU

- $V_0 Q_2 - V_2 Q \neq 0$

$$y(t) = C_1 V_2 + \left[V_2 (C_2 - C_1) - \frac{(C_0 - C_1) Q_2 V_0 V_2}{V_0 Q_2 - V_2 Q} \right] e^{-\frac{Q_2}{V_2} t} + \frac{(C_0 - C_1) Q_2 V_0 V_2}{V_0 Q_2 - V_2 Q} e^{-Q}$$

- $V_0 Q_2 - V_2 Q = 0$

$$y(t) = C_1 V_2 + [V_2 (C_2 - C_1) + (C_0 - C_1) Q_2 t] e^{-Q_2/V_2 t}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} C_1 V_0 + (C_0 - C_1) V_0 e^{-Q/V_0 t} = C_1 V_0 + (C_0 - C_1) V_0 \lim_{t\to\infty} e^{-Q/V_0 t}$$

$C_A = g/l$

$C_B = g/l$

ALDAGAI BANANDUETAKO EKUAZIO DIFERENTZIALA

$x' = f(t,x) = g(t)\,h(x)$

$\overset{dx}{x'\,dt} = g(t)\,h(x)\,dt \rightarrow dx = g(t)\,h(x)\,dt \qquad \int \frac{1}{h(x)}dx = \int g(t)\,dt$

1. ORDENEKO EKUAZIO DIFERENTZIAL LINEALAK

$x' = a(t) + b(t)$

$x(t) = e^{\int a(t)\,dt}\left[k + \int b(t)\,e^{-\int a(t)dt}\,dt\right]$

$x' = \underset{b}{\bigcirc} \pm \underset{a}{\bigcirc}\,x$

ALDAGAI BANANDUETAKO EKUAZIO BIHURGARRIA

$x' = f(t,x) \neq g(t)\,h(x)$

Aldagai aldaketa $(t,x) \rightarrow (t,u)$ $x \rightarrow u$

EKUAZIO DIFERENTZIAL HOMOGENEOA

$x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$ edo $x' = f\left(\frac{t}{x}\right)$

1. homogeneoa dela ziurtatu $(kx, kt) = x'$
2. $x = u$ $t = 1$ aldagai aldaketa $x' \rightarrow f(u)$ izateko
3. $\frac{1}{f(u) - u}\,du = \frac{1}{t}\,dt$ integratu ondoren
4. Aldagai aldaketa $u = \frac{x}{t}$ → gogoratu ln ren propietateez

EKUAZIO DIFERENTZIAL ZEHATZAK

$x' : P(t,x) + Q(t,x) = 0 \rightarrow x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$

1. $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ → zehatza da
2. $\begin{cases} U(t,x) = \int P\,dt + \underset{a}{h(x)} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} \rightarrow \text{emaitza} + h'(x) = Q \\ \text{edo} \\ U(t,x) = \int Q\,dx + \underset{b}{h(t)} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} \rightarrow \text{emaitza} + h'(t) : P \end{cases}$

$h'(x) \rightarrow h$ aleratzeko integratu → ordezkatu a edo b egin dugunaren arabera

EKUAZIO DIFERENTZIAL ZEHATZERA BIHURGARRIA

1. $\frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial t}$
2. $\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}$
3. $u(t)\begin{cases} e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{P}dx} \\ e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{Q}dt} \end{cases}$ → faktore integratzailea · P eta Q

$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial Q_1}{\partial T}$ → zehatza da

BERNOULLIREN EKUAZIO DIFERENTZIALA

$x' = a(t)x + b(t)x^2$

① $u' = \underbrace{(1-n)\cdot a t \, x}_{a_1} + \underbrace{(1-n)\cdot b(t)x^2}_{b_2}$

② $u(t) = e^{\int a_1 dt} \left[k + \int b_1 e^{-\int a_1 dt} dt \right]$

③ Aldapai aldaketa $u = x^{1-n}$

KASU OROKORRA

Aldapai aldaketa ematen digutenean

1) x' isolatu eta sinplifikatu

2) Aldapai aldaketa x isolatu eta x' atera deribatuz

3) $x'_1 = x'_2$ jarri → aldagai aldaketa egin (emandakoa) eta u' bakandu

4) Aldagai banandueratakoa denez bi aldeak integratu

5) Aldagai aldaketa desegin → soluzio orokorra

DERIBADAK

$f(x)^a \rightarrow a\, f'(x) \cdot f(x)^{a-1}$

$\ln f(x) \rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}$

$e^{f(x)} \rightarrow f'(x)\, e^{f(x)}$

$\sin f(x) \rightarrow \cos f(x)$

$\cos f(x) \rightarrow -\sin f(x)$

$\int u \, dv \, dt = u \cdot v - \int du \cdot v \, dt$

$u = \_\_ \quad du = \_\_ \, dt$

$v = \_\_ \quad dv = \_\_ \, dt$

ALPES: A = arc cos, arc sin; L = logari; P = polinomio x^2 x^3 $2x$; E = e^x; S = $\sin x$, $\cos x$

$\ln\left(\frac{p}{q}\right) = \ln p - \ln q$

$\ln(p q) = \ln p + \ln q$

$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

INTEGRALAK

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

$\int e^x dx = e^x + k$

$\int n \, dx = nx + k$

$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} = e^{f(x)} + k$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$

$\int f(x)^n \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(x) + k$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$

$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos$

$\int f'(x) \cos x \, dx = \sin x + k$

$\int f'(x) \sin x \, dx = -\cos x + k$

1) PROBABILITATEA

- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
- Independenteak → $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$
- $P(\bar A \cup \bar B) = P(\overline{A\cap B})$ • $P(\bar A \cap B) = P(B) - P(A\cap B)$
- $P(\bar A\cap \bar B) = P(\overline{A\cup B})$ • $P(A\cap \bar B) = P(A) - P(A\cap B)$

• $P(\bar A | B) = \frac{P(\bar A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$

- Bayers: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

A} { beti!

$P(A_2) = P(A_2|B_1)\, P(B_2) + P(A_2|A_1)\cdot P(A_1) + P(A_2|B_2)\cdot P(B_2)$

$P(A\cap B)$	$P(A\cap \bar B)$	$P(A)$
$P(\bar A\cap B)$	$P(\bar A\cap \bar B)$	$P(\bar A)$
$P(B)$	$P(\bar B)$	1

- diskretua da, aldagaien balio finitua
- 2 emaitza soilik ✓
- independenteak gertaerak
- arrakastako p etengabea

kopuru bat soilik → Poisson

2) ZORIZKO ALDAGAIAK

$P(\_ \le x \le \_) = \left(\frac{\_ - \mu}{\sigma} < z < \frac{\_ - \mu}{\sigma}\right) = P(\_ < z < \_)$

Binomiala

n $q = 1 - p$

p x = arrakasta kop

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ edo nCk

• $n > k$

$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$n < 10$ taulan begiratu: balioak eta elkarren artean segitu

n oso handia denean $n > 10$

$n \geq 30$ binomiala → normala
$np \geq 5$ $P(x=k)$ $P(k - 0'5 < x < k + 0'5)$
$nq \geq 5$ $P(x \geq k)$ $P(x > k - 0'5)$
$P(x \leq k)$ $P(x < k + 0'5)$

$P(a \leq x \leq b) = P(a - 0'5 < x < b + 0'5)$
$P(a < x < b) = P(a + 0'5 < x < b - 0'5)$

normala

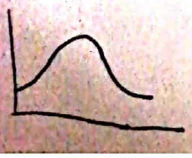
$\mu = n\cdot p$ $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q}$ Tipifikazioa $\frac{k-\mu}{\sigma}$

$P(z \leq k) \to P(z < k)$ $P(k_1 < z < k_2) \to P(z < k_2) - P(z < k_1)$

$P(z \geq k) \to 1 - (P(z < k))$ $P(-k_1 < z < -k_2) \to P(k_2 < z < k_1) \to P(z < k_1) - P(z < k_2)$

$P(-k_1 < z < k_2) \to P(z < k_2) - [1 - (P(z < k_1)]$

• Pearson



Student t_n

Ficher Snedecor

③ HIPOTESI TESTAK

1 - populazioa μ σ^2 p $\mu_1 - \mu_2$ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ Populazio bereko laginak $\mu_1 = \mu_2$ eta $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

2 - Lagina $\bar{x}$ s^2 $\hat{s}^2$

ez badira independenteak $D = X - Y$ $d_i = x_i - y_i$ $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{x} - \bar{y}$

$s_d^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \bar{d}^2$ $\hat{s}_d^2 = \frac{n}{n-1} s_d^2$

-1 hipotesi nulua Ho $\mu = \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 =$ —

hipotesi alternatiboa $\mu \neq \mu_2$ - bi isats $\mu > \mu_0$ eskuineko isatsa $\mu < \mu_0$ ezkerreko

-2 test estadistikoa aukeran taulatik

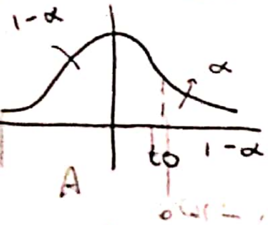
$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \sim T_{n-1}$$

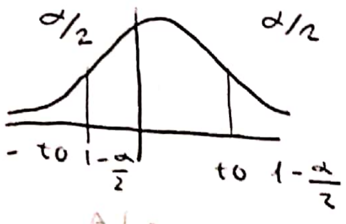
-3 estimazioaren kalkulua Ho egia dela pentsatuz

to → puntu estimazioa

-4 irudikatu eta puntu kritikoa aurkitu

eskuinean





3 lehenengoa bada isatsa ezkerrean

$C_\alpha(-\infty, \ldots)$

$\alpha = 0'1,\ 0'05,\ 0'01$

-5 onarpen eremua eta eremu kritikoa

$A_{1-\alpha}$ [-PK, PK]

$C_\alpha(-\infty, -PK) \cup (PK, \infty)$

-6 Puntu estimazioa eremu kritikoan dagoenean (C_α), gure datuak hauko ezapuratuak dira hipotesi nulua baztertzeko → Alternatiboa. Ebidentzia estadistikoa dela eta α = — mailan ondorioztatu da...

hipotesi NULUA onarpen eremuan dagoelako eta datu hauek ezapuratuak onartu

ESTADISTIKA

	klase marka	maiztasun abs	maiztasun abs	maiztasun erlatiboa	metatu	ehunekoa	
ieak	x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$100f_i$	%
		$\overline{n}$		$f = \frac{n_i}{n}$ / 1		$100F_i$	$\frac{100f_i}{100}$

Batazbestekoa $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i n_i$

Bariantza s^2: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - \bar{x}^2$

Desbiderapen tipikoa s: $\sqrt{s^2}$

Kuasibariantza $\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{n}{n-1} s^2$

Kuasidesbiderapen tipikoa: $\hat{s} \rightarrow \sqrt{\hat{s}^2}$

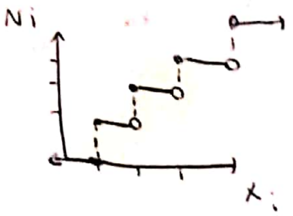
BI ALDAGAI BADAUDE

$n_{i\cdot}$ eta $N_{i\cdot}$
$n_{\cdot j}$ eta $N_{\cdot j}$ // x_i eta y_j

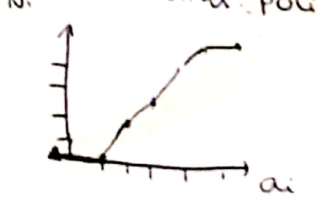
Kobariantza: $S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) n_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} x_i y_j n_{ij} - \bar{x} \cdot \bar{y}$

Korrelazio koefizientea $\rightarrow r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2 \cdot S_y^2}} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$

Taldekatuak ez: DIAGRAMA



N_i taldekatua: poligonoa



Histograma:
lehendabizi poligonoak irudikatu, maiztasunako balioa / tartean dauden poligonoa zenbat nop ondoren $a_2 - a_1$ tartean erdiko puntuan hartu, ixx.tartean lehenengo tartean erditik tartearen distantzia eta puntuak lotu

ERREGRESIO LINEALA - ZUZENA

- x jakin y ez $y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$. Y jakin x ez $x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2}(y - y^2)$

Datu taldekatuak

$N_{i-1} < \frac{\alpha n}{100} < N_i$

$P_\alpha = a_1 + \frac{\frac{\alpha n}{100} - N_{i-1}}{n_i}(a_2 - a_1)$

$\frac{\alpha n}{100} = \square \rightarrow N_i$ begiratu eta hor badago handiena

Taldekatu gabeko datuak

$P_\alpha \rightarrow \frac{\alpha n}{100} = \square$

$\square$ begiratu N_i
- zuzenean ez dago, aurrekoa
- zuzenean dago, batez bestekoa urrengoarekin

r baliagarria da $\geq 0'5$

r	aldagaien arteko erlazioa	zuzenen joera	korrelazioa	aurreikuspenaren fidagarritasuna
1	funtzionala		erabatekoa	%100
(0'8, 1)	zorizkoa	gorakorra	oso sendoa	%100r
(0,6 , 0'8)	zorizkoa		sendoa	
(0'2, 0'6)	zorizkoa		neurrizkoa	
(0, 0'2)	zorizkoa		ahula	
0	planoan sakabanaturiko puntuak	~~~	ez dago	0
(-0'2 , 0)	zorizkoa	beherakorra	ahula	%100r
(-0'6, -0'2)	zorizkoa		neurrizkoa	
(-0'8, -0'6)	zorizkoa		sendoa	
(-1, -0'8)	zorizkoa		oso sendoa	
-1	funtzionala		erabatekoa	%100

m → multzoaren elementu kop

n → elementu kop aukeratzen direnak

La place $P(a) = \frac{\text{aldeko kasuak}}{\text{kasu denak}}$

errore tipikoa: $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x)-y_i)^2}$

	ordena	errepikapen kop etapun	denak dira berdinak	
Aldakuntza arrunta	✓	✗	✓	$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$
Errepikatzeko aldakuntza	✓	✗	✗	$Vr_{m,n} = m^n$
Permutazio arrunta	✓	✓	✓	$P_m = m!$
Errepikatzeko permutazio	✓	✓	✗	$Pr_{m,m_1 \cdots m_k} = \frac{m!}{m_1! \cdots}$
Konbinazio arrunta	✗	✗	✓	$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$
Errepikatzeko konbinazioa	✗	✗	✗	$Cr_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-}{n!(m-}$

- Lineala $y = ax+b$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

1.1

- Logaritmikoa $a \ln x + b$

$(X,Y) = (\ln x, y)$, (X, y)

$y = a \ln + b \to y = aX + b$

$X = \ln x$

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

1.4

- Esponentziala $y = be^{ax}$

$Y = \ln y$ $B = \ln b$

$Y = ax + B$

2.1

- Potentziala: $y = bx^a$

$B = \ln b$ $b = e^B$

$X = \ln x$ $Y = \ln y$

2.3

- Hiperbolikoa: $y = \frac{a}{x} + b$

$X = \frac{1}{x}$ $Y = y$

2.4

- Erregresio michaelarra

$y = \frac{bx}{x+a}$ $Y = AX + B$

$X = \frac{1}{x}$ $Y = \frac{1}{y}$

$A = \frac{a}{b} \to a = Ab$

$B = \frac{1}{b}$ $b = \frac{1}{B}$

- Logistikoa $\frac{1}{1+be^{ax}}$

$Y = ax + B$ $B = \ln b$

$Y = \ln(\frac{1}{y} - 1)$ $b = e^B$

$Y = ax + \ln b$

- Parabolikoa: $ax^2 + bx + c$

3