



Elastikotasunaren teoria
eta materialen erresistentzia

Ruben Ansola Loyola



Udako Euskal Unibertsitatea

ELASTIKOTASUNAREN TEORIA ETA MATERIALEN ERRESISTENTZIA

Ruben Ansola Loyola

Udako Euskal **Unibertsitatea**
Bilbo, 2005



HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE
ETA IKERKETA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

«Liburu hau Hezkuntza, Unibertsitate eta
Ikerketa Sailaren laguntzaz argitaratu da»

© Udako Euskal Unibertsitatea

© Ruben Ansola

ISBN: 84-8438-068-8

Lege-gordailua: BI-1746-05

Inprimategia: RGM, Bilbo

Azalaren diseinua: Iñigo Ordozgoiti

Hizkuntza-zuzenketen arduraduna: Jose Ramon Etxebarria Bilbao

Banatzaileak: UEU. Erribera 14, 1. D BILBO telf. 946790546 Faxa. 944793039

Helbide elektronikoa: argitalpenak@ueu.org

www.ueu.org

Zabaltzen: Igerabide, 88 DONOSTIA

Galarazita dago liburu honen kopia egitea, osoa nahiz zatikakoa, edozein modutara delarik ere, edizio honen Copyright-jabeen baimenik gabe.

Dianari

Eskuartearen duzun liburu honetan Elastikotasunaren Teoria eta Materialen Erresistentzia deituriko irakasgaien oinarriak aurkezten dira. Liburua hamalau kapituluatan dago banatuta. Lehenbiziko sei kapituluatan Elastikotasunaren Teoriako kontzeptu garrantzitsuenak garatzen dira, gainerako gaien ulermenerako ezinbestekoak direnak. Bigarren zatia Materialen Erresistentziari eskainita dago, eta bertan, teoriaren gain, zenbait ariketa ebatzi ere jasotzen dira. Liburu hau euskaraz ikasten edo irakasten duten ikasle nahiz irakasleei zuzenduta dago. Izan ere, azken urteotan euskara poliki-poliki sartuz joan da goi mailako eskoletan. Ezinbestekoa da, beraz, eskaera horri erantzuna emango dioten testuliburuak prestatu eta argitaratzea.

Erabiltzaile guztiok lan honi probetxu ona atera diezaiozuela espero dut. Horrela balitz, ordaindutat izango nuke neure burua. Estimatu nituzke liburu hau erabiliko dutenen iritzi eta kritikak; beste argitalpen baterako edota jarraipena emateko iradokizun ezin hobekak izango lirateke. Azkenik, eskerrak eman nahi nizkieke Bilboko Ingeniaritza Goi Eskolan irakaskuntzan daramatzadan urteetan lagundu eta gidatu nauten Mekanika Saileko irakasleei, besteak beste, José Antonio Tárrago eta Javier Canales katedradunei. Bukatzeko, ez nituzke aipatu gabe utzi nahi urte horietan zehar eduki ditudan ikasleak, beraien arreta eta ekarpen baliotsuengatik. Halaber, eskerrik beroenak UEU kultur erakundeari, honelako lanen sustatzaile izateagatik. Bihoazkie denei nire eskerrik beroenak.

Aurkibidea

1. SARRERA	11
1.1. Kontzeptu orokorrak	11
1.2. Elastikotasunaren teoria eta materialen erresistentzia.	12
1.3. Egituren diseinua	13
1.4. Egituretako elementu arruntak	14
1.5. Egituretako materialak	14
1.6. Oinarrizko hipotesiak	16
1.7. Liburuaren edukia	16
2. TENTSIO KONTZEPTUA	19
2.1. Sarrera	19
2.2. Barneko eta kanpoko indarrak.	19
2.3. Tentsio kontzeptua	23
2.4. Puntu bateko tentsio-egoera. Tentsio-matrizea	25
2.5. Oreka-ekuazioak	29
2.6. Erreferentzia-sistemaren aldaketa	33
2.7. Tentsio nagusiak	36
2.8. Osagai intrintsekoen muturreko balioak	39
2.9. Tentsio oktoedrikoa.	43
2.10. Tentsio esferikoa eta desbiderapen-tentsioa	44
2.11. Mohr-en zirkuluak	45
3. DEFORMAZIOAREN TEORIA OROKORRA	51
3.1. Sarrera	51
3.2. Deformazio unitarioak.	52
3.3. Deformazio txikien teoria. Deformazio unitarioen esanahi fisikoa	55
3.4. Deformazio-matrizea.	58
3.5. Biraketa-matrizea	61
3.6. Bateragarritasun-ekuazioak	64
4. SOLIDO ELASTIKOAREN PORTAERA-LEGEAK	67
4.1. Sarrera	67
4.2. Trakzio-saiakuntza	68
4.3. Deformazio-energia elastikoa	74
4.4. Hooke-ren lege orokorra	77
4.5. Material elastiko isotropoen portaera-legeak. Lame-ren ekuazioak	84

4.6. Konstante elastikoak	87
4.7. Tentsio eta deformazio termikoak	92
5. PROBLEMA ELASTIKOAREN EBAZPENA	95
5.1. Sarrera	95
5.2. Desplazamenduen formulazioa. Navier-en ekuazioak	98
5.3. Tentsioen formulazioa. Michell-en eta Beltrami-ren ekuazioak	100
5.4. Ekuazio-sistemaren ebazpena	103
5.5. Saint Venant-en printzipioa	104
5.6. Gainezarpen-printzipioa	105
5.7. Elastikotasun laua	106
5.8. Airy-ren funtzioa	115
5.9. Problema elastikoaren ebazpena printzipio bariatzionalen bidez	120
6. HUTSEGITE-TEORIAK	127
6.1. Sarrera	127
6.2. Hutsegite-teorien oinarriak	128
6.3. Tentsio normal maximoaren teoria	132
6.4. Luzetarako deformazio unitario maximoaren teoria	135
6.5. Tentsio ebakitzailen maximoaren teoria	136
6.6. Deformazio-energia maximoaren teoria	138
6.7. Distorsio-energia maximoaren teoria	140
6.8. Mohr-en teoria	144
6.9. Portaera harikorra eta portaera hauskorra	149
7. PIEZA PRISMATIKOAK	153
7.1. Sarrera	153
7.2. Sekzioko esfortzuak pieza prismatikoetan	154
7.3. Pieza prismatikoekin osatutako egiturak	157
7.4. Euskarriak eta erreakzioak	159
7.5. Esfortzuen diagramak	162
7.6. Pieza prismatikoen oreka-ekuazio diferentzialak	165
8. ARDATZEKO INDARRA	169
8.1. Sarrera	169
8.2. Tentsio-egoera trakzio edo konpresio hutsean	170
8.3. Deformazio-egoera trakzio edo konpresio hutsean	172
8.4. Pisu propioaren eragina	174
8.5. Egitura hiperestatikoak trakziopean eta konpresiopean	177
8.6. Hasierako tentsioak	182
8.7. Tentsio termikoak	184
8.8. Deformazio plastikoak trakziopean eta konpresiopean	186
8.9. Horma meheko presio-ontzien kalkulua	191

9. MAKURDURAREN TEORIA OROKORRA	195
9.1. Sarrera	195
9.2. Makurdura hutsa	195
9.3. Makurdura bakuna	208
9.4. Horma meheko sekzioen makurdura	221
9.5. Makurdura asimetrikoa	229
9.6. Habe heterogeneoak	232
9.7. Makurdura konposatua eta konpresio eszentrikoa	234
9.8. Makurdura plastikoa	242
10. DEFORMAZIOAK MAKURDURAPEAN	253
10.1. Sarrera	253
10.2. Kurba elastikoaren metodoa	254
10.3. Momentuen azaleren metodoa: Mohr-en teoremak	257
10.4. Habe konjokatuaren metodoa	262
10.5. Indar ebakitzailaren eragina	263
10.6. Tenperaturaren aldaketak sortutako makurdura	268
10.7. Gainezarpen-printzipioa deformazioen kalkuluan	271
11. EGITURA HIPERESTATIKOEN KALKULUA	273
11.1. Sarrera	273
11.2. Egitura hiperestatikoaren kalkulurako metodoak	274
11.3. Indarren metodoa egitura hiperestatikoaren kalkulurako	278
11.4. Hiru momentuen ekuazioa	281
11.5. Habeen desplazamendu horizontalak	288
11.6. Lotura zurrinak dituzten egiturak: Portikoak	290
11.7. Simetria- eta antisimetria-propietateak	295
11.8. Tenperaturaren eragina sistema hiperestatikoetan	298
12. BIHURDURAREN TEORIA OROKORRA	303
12.1. Sarrera	303
12.2. Sekzio zirkularreko piezen bihurtura	304
12.3. Bihurdura isostatikoa eta bihurtura hiperestatikoa	311
12.4. Transmisio-ardatzen kalkulua	314
12.5. Makurdurarekin konbinaturiko bihurtura	315
12.6. Sekzio zirkularra ez duten piezen bihurtura	319
12.7. Horma meheko sekzio zabalduen bihurtura	323
12.8. Horma meheko sekzio itxien bihurtura	327
12.9. Bihurdura plastikoa	334

13. METODO-ENERGETIKOAK	337
13.1. Sarrera	337
13.2. Deformazio-energia elastikoa	338
13.3. Deformazio-energiaren espresioa esfortzu desberdinen funtzioan	344
13.4. Clapeyron-en teorema	348
13.5. Elkarrekikotasun-teoremak	349
13.6. Castigliano-ren lehen teorema	352
13.7. Engesser-en lehenengo teorema eta Castigliano-ren bigarren teorema ...	356
13.8. Karga unitarioaren metodoa	358
13.9. Engesser-en bigarren teorema	361
13.10. Talken teoria	363
14. GILBORDURA	367
14.1. Sarrera	367
14.2. Egonkortasuna eta zutabeen gilbordura	368
14.3. Euler-en karga kritikoa	370
14.4. Zutabeen karga kritikoa lotura-baldintzen arabera	374
14.5. Eszentrikoki kargatutako zutabeak	383
14.6. Sekantearen formula	386
14.7. ω koefizienteen metodoa	390
BIBLIOGRAFIA	393

1. Sarrera

1.1. KONTZEPTU OROKORRAK

Elastikotasunaren Teoria eta Materialen Erresistentzia gorputz deformagarrien portaera ikasten duten zientziak dira. Bi jakintzagai horiek Mekanika izenaz ezagutzen den irakasgaiaren barnean koka ditzakegu. Mekanikak gorputzen higidura ulertzeko balio diguten tresnak eskaintzen dizkigu, eta arlo desberdin ugariz dago osatuta. Sarritan, atal horien arteko muga definitzea ez da lan erraza izaten. Arlo horiek bata bestetik bereizteko erabiltzen den oinarritzko irizpidea aztertutako partikula edo gorputzen izaera da. Dakigun bezala, partikula bat dimentsiorik gabeko puntu material bat da. Partikula horietako zenbait elkartzuz gero, gorputz bat lortuko genuke. Horrela, likido eta gasen partikulak ikasten dituen mekanikaren atalari “Fluidoaren Mekanika” deritza, eta gorputz zurrunk aztertzen dituenari “Solidoen Mekanika”. Elastikotasunaren Teoria eta Materialen Erresistentzia azken talde horretan daude kokaturik.

Solidoak aztertzeke orduan, bi motatako solidoak desberdindu behar ditugu: zurrunk eta deformagarriak. Solido deformagarriak itxura- edo forma-aldaketak jasan ditzaketen gorputzak dira. Forma-aldaketa horiei *deformazioak* deritze. Alderantziz, solido zurrunek ezin dezakete inolako itxura-aldaketarik eduki; hots, solido perfektuak direla suposatzen da. Beste era batera esanda, solido zurrunek translazioak edo biraketak bakarrik eduki ditzakete, eta horien puntuen arteko posizio erlatiboa inoiz ez da aldatzen. Halere, zehatzak izan nahi badugu, solido guztiak dira deformagarriak, ez baitago zurruntasun infinitua duen materialik. Hau da, deformatzen ez den solidorik ez da existitzen. Dena den, zenbait kasutan solidoa zurrunk dela onar dezakegu akats handirik egiteko beldurrik gabe. Esate baterako, gorputz baten abiadura edo azelerazioak aztertu nahi ditugunean, ez dago gorputzaren forma-aldaketa ikasi beharrik.

Elastikotasunaren Teoriak eta Materialen Erresistentziak, ordea, abiapuntu modura solidoak deformagarriak direla onartzen dute beti, eta, beraz, solido deformagarrien mekanikari dagokion irakasgai bat da. Ondorioz, liburu honetan gorputzaren higidurak ez du garrantzirik edukiko, eta alde batera utziko dugu. Izan ere, aztertuko ditugun egiturak orekan —hau da, geldirik— dauden sistemak izango dira.

1.2. ELASTIKOTASUNAREN TEORIA ETA MATERIALEN ERRESISTENTZIA

Elastikotasunaren Teoriaren eta Materialen Erresistentziaren helburuak berdinak diren arren, bien artean desberdintasun garrantzitsuak daude. Ikus ditzagun, labur bada ere, bi jakintzagai horien berezitasun azpimarragarriak.

Elastikotasunaren Teoriak gorputz elastikoak aztertzen ditu, hots, indarrak desagertu eta gero hasierako itxura eta neurriak berreskuratzen dituztenak. Gorputz horietako puntuetan, kanpotik eragiten duten akzioen eta gorputzaren erantzunaren artean dagoen erlazioa matematikoki formulatzen du. Elastikotasunaren Teoriak lortzen dituen ondorioak orokorrak dira eta edozein forma duten gorputzen kalkulurako aplikatu daitezke. Liburu honetan Elastikotasunaren Teoriaren oinarriko kontzeptuak baino ez ditugu agertuko, eta portaera lineala duten kasuetara mugatuko gara. Ikusiko dugun bezala, Elastikotasunaren Teoriaren formulazio matematikoak oso konplexuak dira eta gutxitan lor daitezke soluzio esplizituak; eta metodo numerikoak erabili behar dira, planteatzen dituen ekuazioak askatu ahal izateko.

Materialen Erresistentziak, aldiz, gorputz guztientzat orokorrak diren emaitzak lortzen saiatu ordez, egituretan sarrien erabiltzen diren elementuak bakarrik ikasten ditu. Hau da, elementu tipikoak aztertzen ditu. Elementu horien geometria nahiko sinplea izaten da eta, horretaz baliatuz, analisia errazten duten hipotesi sinplifikatzaileak erabili daitezke, eta soluzioa Elastikotasunaren Teoriaren bidez baino azkarrago lor daiteke. Dударik gabe, Materialen Erresistentziaren bidez lortzen den soluzioa ez da Elastikotasunaren Teoriak eskaintzen duena bezain zehatza. Halere, hurrengo atal batean azalduko ditugun elementu tipikoen kasuan, Materialen Erresistentzia aplikatuz lor daitezkeen emaitzak zeharo onargarriak dira, egindako akatsa arbuiagarria izanik.

Bi jakintzagai horien artean bada beste desberdintasun garrantzitsu bat ere. Elastikotasunaren Teoria, izenak aditzera ematen duen bezala, gorputz elastikoen analisisira mugatzen da. Materialen Erresistentziak, aldiz, portaera elastikoa galdu duten egituren analisia egin dezake. Portaera plastikoa aztertzen duten jakintzagaiei *plastikotasuna* eta *biskoelastikotasuna* deritze. Halere, Elastikotasunaren Teoriaren desabantailarik handiena erabiltzen dituen formulazioen konplexutasuna da. Izan ere, gorputzeko puntu bakoitzean planteatzen dituen ekuazioak zeharo orokorrak diren arren, gutxitan aska daitezke soluzio esplizitua lortzeko, egitura oso sinpleak izan ezean. Dena den, Elastikotasunaren Teoria ez da baztertu behar, horrek argituko dizkigulako Materialen Erresistentzian erabiliko ditugun oinarriko kontzeptu eta magnitudeak. Gainera, Elastikotasunaren Teoriaren bidez Materialen Erresistentzian lortutako emaitzen zehaztasuna neur daiteke, egindako hurbilketak egokiak diren jakin ahal izateko.

Gaur egun, konputagailuek azken urteotan ezagutu duten bilakaera sakona dela-eta, Elastikotasunaren Teoriak planteatutako ekuazioak numerikoki ebatz daitezke, eta horrela geometria eta mugako baldintza konplexuak dituzten problemenez ere soluzioak lor daitezke. Era horretan, Elastikotasunaren Teoria eta Materialen Erresistentzia garai batean baino bateratuago daudela esan dezakegu.

1.3. EGITUREN DISEINUA

Gorago aipatu dugun bezala, liburu honetan aurkezten diren jakintzagaien helburua egiturak diseinatu eta kalkulatzeko balioko dituzten tresnak eskaintzea da. Egitura elementu desberdinen bidez osatutako edozein sistema da, kanpotik eragiten dioten indarrak eusteko gai dena. Aulkiak, mahaiak, zuhaitzak, hegazkinak, armiarma-sareak eta abar egiturak dira.

Zentzuzko diseinuak egin ahal izateko, beharrezkoa da materialen portaera ongi ezagutzea. Hori dela-eta, Materialen Erresistentzia eta Elastikotasunaren Teoria oinarritzko irakasgaiak dira ingeniartzako alor askotan. Liburu honetan zehar materialen portaera ulertzeko balioko dituzten formulak eta ekuazioak aurkeztuko ditugu.

Ingeniariek eta arkitektoek zeresan eta erantzukizun handia daukate egituren diseinuan. Egiturak mota askotakoak eta oso desberdinak izan daitezkeen arren (zubiak, itsasontziak, etxebizitzak, urtegiak, etab.), badira guztientzat berdinak diren zenbait ezau-garri. Esate baterako, lehen izendatu ditugun egitura guztiak gizakien behar desberdinak betetzeko pentsatuta daude. Arestian aurreratu dugun bezala, egitura guztien beste betebeharrak bat kanpoko eraginei aurre egitea da, behera etorri gabe. Eutsi behar dieten indar horien artean, haizearen presioa, elurraren pisua, uraren bultzada, automobilen pisua eta abar aipa ditzakegu. Horiez gain, egiturak kanpoko eragin desberdin ugari jasan ditzake, adibidez, tenperatura-aldaketen eragina, euskarrien ustekabeko mugimenduak, muntaian egindako akatsek sortutakoak, etab. Eragin horiek guztiak sinbolikoki eta zenbait hurbilketa egin ondoren adieraziko ditugu. Izan ere, suposatutako indarren zehaztasunak eragin ikaragarria izan dezake azken emaitzan eta, beraz, kontu handiarekin aztertu behar dira indarrak.

Egituretan parte hartzen duten aldagaien kopurua oso handia denez, egitura bat diseinatzeko orduan jarraitu behar den lehenengo pausoa modelo matematiko sinplifikatu bat lortzea da, benetan garrantzitsuak diren aldagaiak kontuan hartuz. Ondoren, modelo matematiko horri hurrengo gaitan ikusiko ditugun ekuazio eta erlazio matematikoak aplikatuko dizkiogu. Kalkuluak egiten hasi aurretik aurrez aurre definitutakoak egin behar da, hau da, behin-behineko neurri batzuk aukeratu behar ditugu abiapuntu modura. Ondoren, Elastikotasunaren Teoriaren eta Materialen Erresistentziaren bidez egituraren erantzuna kalkula daiteke, hau da, kanpoko eraginen ondorioz gorputzeko puntuetan agertzen diren tentsio eta deformazioen balioak lor daitezke. Balio horiek onargarriak ez badira, elementuaren diseinua aldatu beharko dugu, eta prozesua berriro errepikatu, diseinu egokia lortu arte. Egituren diseinua, beraz, iterazio-prozesu bat da.

Datozen kapituluetan ikusiko dugun bezala, egiturak oinarritzko baldintza batzuk bete behar ditu onargarria izateko. Alde batetik, egiturak *erresistentzia* egokia eduki behar du, hau da, kanpoko kargei hautsi gabe eutsi behar die. Ez da hau, halere, egiturak bete behar duen baldintza bakarra. Hautsi gabe irauteaz gain, egiturak *zurruntasun* egokia eduki behar du, hots, kanpoko indarrei gehiegizko deformaziorik jasan gabe eutsi behar die. Izan ere, egitura bat hautsi ez arren, deformazioak handiegiak badira, egitura onartezina bihur daiteke. Azkenik, egitura *egonkorra* izan behar da, hau da, ezin eduki ditzake ustekabeko deformazio nabarmenak. Azken baldintza hau gilbordura izeneko fenomenoarekin erlazio-natuta dago, azken kapituluaren ikusiko dugun bezala. Bukatzeko, ez da ahaztu behar egitura

bat egokia den ala ez erabakitzeko orduan, erresistentziaz edo zurruntasunaz gain beste hainbat baldintza ere kontuan hartu behar direla, adibidez, ekonomikoak eta estetikoak.

1.4. EGITURETAKO ELEMENTU ARRUNTAK

Egituren funtsezko helburua, beraz, jasaten dituzten indarrei aurre egitea da. Esate baterako, etxebizitza batean eragiten duen haizearen indarra edo elurraren pisua egituraren oinarrietara transmititu beharra dago. Gauza bera esan daiteke zubi baten gainetik igarotzen diren beribilek eragiten duten pisuaz. Indar horiek egituraren zehar transmititzen dira oinarriko euskarrietara iritsi arte, eta transmititzeko modua egituraren geometriaren menpe dago. Egiturek forma eta itxura oso desberdinak eduki ditzakete eta hemen guztiak izendatzea ezinezkoa izango litzateke. Halere, egitura gehienak elementu gutxi batzuk konbinatuz lor daitezke. Egituretan sarritan agertzen diren elementu tipiko horiek dira, hain zuzen, Materialen Erresistentziak aztertzen dituenak. Elementu arrunt horien portaera ezagutzeko, egitura ugari kalkulatzeko gai izango gara.

Elementu horiek hiru taldetan sailka daitezke: pieza prismatikoak, xaflak eta oskolak. Gorputz horiek dituzten berezitasun geometrikoei esker, kalkulua asko errazten duten hurbilketak eta hipotesi sinplifikatzaileak egin ditzakegu. Ikus ditzagun laburki hiru elementu horien ezaugarriak.

Pieza prismatikoak luzera handia daukaten piezak dira, zeharkako sekzioaren neurriekin alderatuz. Hau da, dimentsio bat beste biak baino askoz handiago da. Elementu horiek maiz agertzen dira egituretan (habeak, zutabeak, ardatzak etab.), eta hiruretatik garrantzitsuenak direla esan dezakegu. Bestetik, *xaflak* lodiera txikiko elementu lauak dira. Beste era batera esanda, dimentsio bat beste biak baino askoz txikiagoa da. Pieza prismatikoaren bi dimentsiotako kasua direla esan daiteke. Xaflak ere sarritan erabiltzen diren elementuak dira, adibidez, eraikuntzetako solairuak egiteko. Azkenik, *oskolak* ere lodiera txikia duten elementuak dira, baina ez dira lauak izaten xaflak bezala. Bien artean dagoen diferentzia oskolek duten kurbadura da. Hori dela-eta, xaflek eta oskolek lan egiteko duten era oso desberdina da. Oskolak *lamina* hitzarekin ere ezagutzen dira. Oskolen adibide dira ur- eta gas-biltegiak, elizetako kupulak, ontzi-kroskoak, etab.

Hiruretatik garrantzitsuena eta gehien erabiltzen dena pieza prismatikoa dela esan dezakegu. Hori dela-eta, liburu honetan Materialen Erresistentziari eskainitako gaietan pieza prismatikoak eta horiekin osatutako egiturak baino ez ditugu aztertuko. Salbuespen gisa oskolen kalkulurako oinarritzko arau batzuk ere ikusiko ditugu, presiopean dauden horma meheko ontzien analisisa egiteko balioko digutenak. Analizatu beharreko elementua hiru talde horietakoren batean sailkatu ezin daitekeenean, ezingo dugu Materialen Erresistentzia erabili, eta Elastikotasunaren Teoria aplikatu beharko dugu.

1.5. EGITURETAKO MATERIALAK

Egitura batek kanpoko kargei eusteko duen gaitasuna, erabilitako materialen menpe dago neurri handi batean. Lehen esandakoaren hariari helduz, materialen ezaugarri garrantzitsuenak *erresistentzia* eta *zurruntasuna* dira. Ez dago dudarik ingeniartzako aplikazio gehienetan erresistentzia handiko materialak erabiltzea komeni dela. Altzairua sarrien

erabiltzen den materiala da, erresistentzia altua duelako eta portaera oso antzekoa trakziopean nahiz konpresiopean. Beste material batzuk, ordea, harriak edo hormigoiak adibidez, konpresiopean erresistentzia egokia duten arren, oso ahulak dira trakziopean.

Egiturek beren pisu propioa ere jasan behar dutenez, materialen erresistentziaren eta dentsitatearen arteko erlazioa oso adierazgarria da, eta erabakigarria gerta liteke zenbait kasutan. Hegazkinen kasuan, adibidez, erlazio horrek garrantzi handia du, hegazkina ahalik eta arinena izatea komeni baita. Hori dela-eta, hegazkinetan aluminioa edo titanioa bezalako materialak erabiltzen dira, altzairuaren antzeko erresistentzia baina pisu askoz txikiagoa dutelako.

Erresistentziaz gain, materialak zurruntasun egokia eduki behar du, hau da, ezin ditzake deformazio handiegia izan kanpoko indarrek eragiten dutenean. Kautxua, adibidez, ez da etxebizitzak egiteko material egokia. Kontuan hartu behar da, gainera, egitura bat behera etorri ez arren, jasaten dituen deformazioak handiegia badira, buruhauste handiak ekar ditzakeela. Izan ere, etxebizitza bateko habeen deformazioa handiegia bada, pitzadurak ager daitezke solairuetako hormetan eta zoruan, onartezina dena.

Eraikuntzako materialek eduki behar duten beste propietate bat *elastikotasuna* da. Indarrak desagertu ondoren materialek hasierako forma berreskuratzeko duten gaitasunari elastikotasuna deritzo. Kontuan hartu behar da, egitura askotan indarrak ez direla konstanteak izaten, agertu eta desagertu egiten direla. Indar horiek sortzen dituzten deformazioak metatuz joango balira, denbora laburrean deformazio onartezinak sortuko lirarteke. Alderantziz, egituraren portaera elastikoa bada, indarrek sortzen dituzten deformazioak desagertu egiten dira indarrak aplikatzeari utzi ondoren. Altzairua, egurra edo hormigoia bezalako materialek portaera elastikoa agertzen dute aplikatutako indarrak muga baten azpitik daudenean.

Material guztiak lehenago edo beranduago hautsi egiten diren arren, hausteko duten era oso desberdina izan daiteke. *Harikorrak* deritzen materialek deformazio handiak jasaten dituzte hautsi baino lehen. Altzairua, aluminioa eta metal gehienak harikorrak dira. Alderantziz, material hauskorrak bat-batean apurtzen dira, ia deformaziorik jasan gabe. Harria edo hormigoia bezalako materialak hauskorrak dira. Gehienetan material harikorrak hauskorrak baino komenigarriagoak izaten dira, hautsi baino lehen asko deformatzen direlako, hutsegitea gertu dagoela ohartaraziz.

Esandakoaren arabera, material guztiek desabantailak dauzkatela ondoriozta daiteke. Hori dela-eta, maiz material desberdinak nahasten dira, desabantaila horiek gainditu ahal izateko. Arestian aipatu dugun bezala, hormigoia ahula da trakziopean, baina konpresio-erresistentzia altua du. Gainera, erakargarria egiten duten zenbait ezaugarri dauzka: ez da erretzen, beste material batzuekin konparatuz nahiko merkea da, eta forma desberdin askotako elementuak eraiki daitezke. Eta trakziopean duen erresistentzia handitzeko, altzairuzko barrak sartzen zaizkio, *hormigoi armatua* deitzen dena lortuz. Gaur egun erabiltzen diren material berri asko hormigoi armatuaren printzipio berean oinarritzen dira, *material konposatuak* kasu. Material konposatu gehienek plastikoazko oinarri bat edukitzen dute, beirazko zuntzen bidez zurruntzen dena. Horrela, aldi berean plastikoaren malgutasuna eta zuntzen erresistentzia dituen materiala lortzen da.

1.6. OINARRIZKO HIPOTESIAK

Liburu honetan zehar aztertuko ditugun gorputzek oinarrizko hipotesi batzuk betetzen dituztela onartuko dugu. Hipotesiak honako hauek dira: jarraitutasuna, homogeneotasuna eta isotropia. Horrez gain, deformazioak txikiak direla suposatuko dugu.

Gorputz bati dagokion bolumen guztia materiaz beteta dagoenean, gorputza *jarraitua* dela esaten da. Beste hitz batzuetan esanik, maila mikroskopikoan topatuko genukeen egitura atomiko erreala ez da kontuan hartzen. Era berean, materialak akatsik ez duela onartuko dugu (pitzadurak, burbuilak, hutsuneak etab.). Hipotesi hori betetzen dela onartzeak kalkulu infinitesimala aplikatzeko aukera emango digu. Izan ere, gorputz jarraituen propietateak eta portaera definitzen duten funtzioak ere jarraituak izango dira. Halaber, aztertuko ditugun gorputzak *homogeneoak* direla suposatuko dugu, hots, puntu guztietako propietateak berdinak direla. Azkenik, puntu bateko propietateak norabide guztietan berdinak direnean, materiala *isotropoa* dela esaten da.

Material errealak perfektuak ez direnez, goian aipatutako baldintzak gutxitan betetzen dira. Altzairu-puska bati mikroskopio baten laguntzaz so eginez gero, kristal desberdin ugariz osatuta dagoela ikusiko genuke, eta kristal horietako bakoitzaren portaera ez dela isotropoa. Hormigoi-zati bat aztertuz gero, antzeko irudia edukiko genuke. Halere, hipotesi horiek betetzen direla onartuz lortzen diren emaitzak bat datoz saiakuntza esperimentalen bidez lortzen direnekin. Izan ere, kristal horien kopurua ikaragarri handia da, eta bakoitzaren norabidea, aleatorioa. Ondorioz, kristal bakoitzaren portaera isotropoa izan ez arren, maila makroskopikoan agerian gelditzen den portaera isotropoa da. Gainera, lehen aipatutako hipotesiak onartzeak asko erraztuko dizkigu kalkuluak. Dena den, kontu handiarekin ibili behar da hiru hipotesietako bat ez dela betetzen oso nabaria denean, zeren kasu horretan hemen ikusiko ditugun zenbait espresio eta formula alferrikakoak bihur baitaitezke.

Bukatzeko, aztertuko ditugun egituren deformazioak txikiak direla suposatuko dugu. Hipotesi hau benetako gorputz askotan betetzen da, egiturak diseinatzen direnean bilatzen den helburuetako bat zurruntasun egokia lortzea delako. Hau da, egitura erreala askotan ez da alde handirik egoten hasierako geometriaren eta bukaerakoaren artean, eta itxura oso antzekoa edukitzen dute. Deformazioak gehienetan txikiak izaten direla ulertzeko, nahikoa da etxebizitza bati edo zubi bati so egitea. Kasu horietan egiturak jasaten duen deformazioa ia sumaezina izaten da. Hipotesi hori oso garrantzitsua da, datozen gaitan ikusiko dugun bezala.

1.7. LIBURUAREN EDUKIA

Liburu honen lehen zatia Elastikotasunaren Teoriari eskainita dago. Kapitulu edo gai horietan zehar materialen portaera ulertzeko oinarrizkoak diren magnitudeak ikusiko ditugu. Bigarren gaian tentsio kontzeptua eta indarren orekarekin erlazioatutako ekuazioak aurkezten dira. Ondoren, hirugarren gaian puntu bateko deformazio-egoera nola defini daitezkeen azaltzen da. Tentsioak eta deformazioak aztertu ondoren, laugarren gaian portaeralegeak nola lor daitezkeen ikusiko dugu. Bosgarren gaian portaera elastikoa duten gorputzen erantzuna kalkulatzeko erabili behar den ekuazio-sistemara iritsiko gara, eta sistema hori ebazteko metodo batzuk deskribatuko ditugu. Elastikotasunaren Teoriaren inguruko gaiak

bukatzeko, seigarrenean hutsegite-teoria garrantzitsuenak azalduko dira, materialen haustura edo isurpena noiz gertatzen diren auresateko balio dutenak.

Ondoren, Materialen Erresistentziarekin hasiko gara. Zazpigarren gaian pieza prisma-tikoaren berezitasunak aurkeztu eta gero, hurrengo ataletan sekzioko esfortzu desberdinak analizatuko ditugu banaka-banaka. Lehenik eta behin, zortzigarren gaian ardatzeko indarrak sortzen dituen tentsio eta deformazioak nola kalkulaten diren ikusiko dugu. Bederatzigarren gaian, momentu makurtzailearen ondorioz agertzen diren tentsioen kalkulua aztertzen da, eta hamargarrenean, makurdurapean dauden pieza prisma-tikoen deformazioa. Momentu makurtzaileak sortutako tentsio eta deformazioak kalkulaten ikasi eta gero, hamaikagarren gaian egitura hiperestatikoak deskribatzen dira. Azkenik, pieza prisma-tikoetan eragin dezaketen esfortzuekin bukatzeko, hamabigarren gaian momentu bihurtzailea azalduko dugu. Egituren kalkuluan daukaten garrantzia dela-eta, hamahirugarren gaia teorema energetikoei eskainita dago, eta bertan printzipio eta teorema garrantzitsuenak ondorioztatzen dira. Liburua bukatzeko, hamalagarren kapituluan zutabeen gilbordura ikasten da.

2. Tentsio kontzeptua

2.1. SARRERA

Gorputz jarraitu baten portaera ezagutu eta kanpotik jasaten dituen eraginei nola erantzuten dien jakin ahal izateko, lehenik eta behin gorputzaren oreka estatikoa ziurtatzeko bete behar diren baldintzak aztertuko ditugu. Ezaguna den bezala, gorputz bat orekan egon dadin, ondoko ekuazioen bidez emanik datozen lege estatikoak bete behar dira, hots, indar guztien batura nulua izatea, eta indar guztien momentu baliokidea edozein punturekiko nulua izatea, non x , y eta z hiru ardatz independente diren.

$$\begin{array}{ccc} \sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & \sum M_y = 0 & \sum M_z = 0 \end{array} \quad (2-1)$$

Jarraian ikusiko dugun bezala, gorputzaren kanpoaldetik eragiten duten indarrek eta gorputzaren barnean sortzen direnek ere bete behar dituzte (2-1) ekuazioak. Oreka-baldintza horiek egitura bere osotasunean hartuta aplikatzen direnean, gorputz librearen diagrama erabiliz, kanpoko indarren eta euskarrietako erreakzioen arteko erlazioa aurki daiteke. Egitura-zati desberdinetan banatu ondoren aplikatuz gero, berriz, goiko ekuazioen bidez gorputzaren barnean agertzen diren indarrak lor daitezke. Barne-indar horien deskribapena eta gorputzean zehar nola banatzen eta transmititzen diren ikastea izango da, hain zuzen, gai honen helburu nagusia.

Bigarren kapitulu honetan, beraz, magnitude estatikoak eta horien arteko erlazioak izango ditugu aztergai. Gorputz batean eragin dezaketen indar-mota desberdinak sailkatu eta gero, tentsio kontzeptua aurkeztuko da. Ondoren, puntu bateko tentsio-egoeraren deskribapena egingo dugu, eta tentsioaren osagaiek bete behar dituzten ekuazioak lortuko ditugu. Tentsio nagusiak definitu eta horien propietateak azaldu ondoren, azkenik, tentsioen adierazpen grafiko garrantzitsuenak jasoz bukatuko dugu gaia.

2.2. BARNEKO ETA KANPOKO INDARRAK

Ingurune jarraitu baten analisia egiteko ezagutu behar diren indarrak bi talde desberdinetan sailka daitezke: *kanpoko indarrak* eta *barneko indarrak*.

Jatorria gorputzetik at duten indarrei *kanpoko indarrak* deritze eta gorputzaren deformazio eta materialarekiko independenteak dira. Indar horien artean, bi talde bereiz daitezke: *bolumen-indarrak* eta *azaleko indarrak* (edo *gainazal-indarrak*). *Bolumen-indarrek* gorputzeko puntu guztietan eragiten dute, eta beraz, inguruneari dagokion

bolumen osoan zehar banatuta egoten dira. Mota horretako indarren adibide dira, esate baterako, pisua eta inertzia-indarra. Puntu bakoitzean, indarren bolumen-unitateko balioari $\Phi(x, y, z)$ deituko diogu. Eskuarki, bektore honek hiru osagai dauzka:

$$\Phi = \Phi_x \mathbf{i} + \Phi_y \mathbf{j} + \Phi_z \mathbf{k}. \quad (2-2)$$

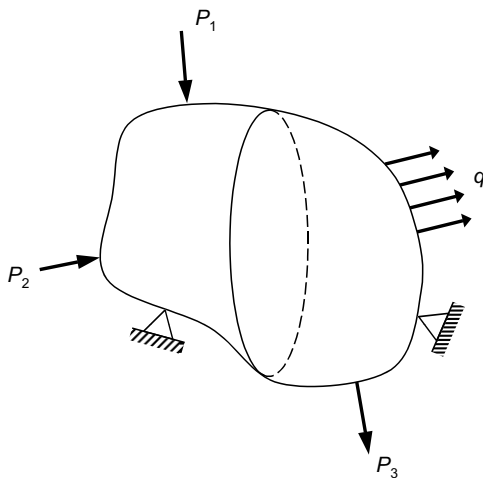
Ikus daitekeenez, bolumen-unitateko indarra posizioaren funtzioa da eta, beraz, balio desberdinak eduki ditzake aukeratutako puntuaren arabera.

Gainazal-indarrak, berriz, gorputzaren gainazalean eragiten duten indarrak dira; adibidez, zubiek jasan behar dituzten zamak, fluido batek urtegiko hormaren aurka egiten duen bultzada, egituren euskarrietako erreakzioak, etab. Gainazaleko puntuetan eragiten duen azalera-unitateko indarra $\mathbf{T}(x, y, z)$ funtzioaren bidez adieraziko dugu eta, oro har, bolumen-indarrekin gertatzen den bezala, puntu bakoitzean bektore desberdin bat edukiko dugu, hots:

$$\mathbf{T} = T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k}. \quad (2-3)$$

Horrez gain, gainazal-indarrak bi motatakoak izan daitezke: *puntualak* eta *banatuak*. Indarrak azalera infinitesimal batean, hau da, puntu batean aplikatuta daudenean, *puntualak* edo *konzentratuak* direla esango dugu. Azalera-zati finitu batean aplikatuta badaude, aldiz, *indar banatuak* deituko diegu. Dena dela, sailkapen hori ez da zeharo zehatza, ezin esan daitekeelako benetako indar puntualak existitzen direnik. Izan ere, indar bar aplikatu ahal izateko, beti da beharrezkoa azalera finitu bat edukitzea, txikia bada ere. Beraz, hitzaren esanahi hertsia hartuta, indar guztiak dira banatuak. Halere, indarra aplikatzen den azalera egituraren hedadura baino askoz txikiagoa denean, oker handirik gabe suposa daiteke puntu bakar batean eragiten duela.

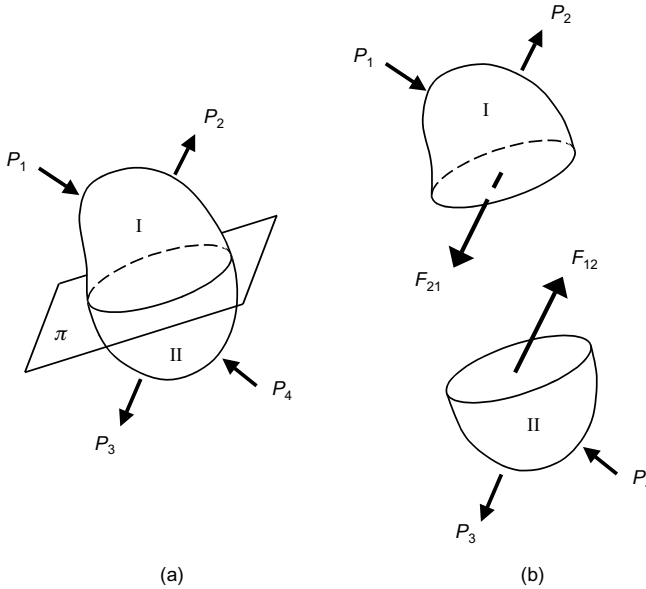
Goian aipatutako indar-mota desberdinak 2.1. irudiko gorputzean adierazi dira. Indar banatuak azalera- edo luzera-unitateko ematen dira eta q letraz izendatuko ditugu. Indar puntualentzat berriz, letra larriak erabiliko ditugu.



2.1. irudia.

Azter ditzagun orain *barneko indarrak*. Kanpotik eragiten dieten indarrei erantzuteko, gorputzak deformatu egiten dira eta, ondorioz, gorputzen barnean indar berri batzuk agertuko zaizkigu. Izan ere, edozein gorputz osatzen duten partikulen artean, erakarpin-indarrak egoten dira beti. Hori dela-eta, gorputza kanpoko indarren eraginpean deformatuz partikulen arteko posizio erlatiboa aldatzen denean, interakzio-indar batzuk agertzen dira, *barne-indar* deituko ditugunak. Indar horiek kanpoko indarrei aurre egiten diete eta gorputzaren hasierako itxura berreskuratzen saiatzen dira.

Barne-indarrak agerian uzteko, Cauchy-k aurkezturiko *sekzioen metodoa* edo *ebaketa-printzipioa* erabiliko dugu. Horretarako, suposa dezagun orekan dagoen gorputz jarraitu batean kanpoko indar batzuek eragiten dutela, 2.2.a. irudian adierazten den bezala.



2.2. irudia.

Gorputza orekan dagoenez, estatikaren ekuazioak bete beharko dira, hau da, \mathbf{P}_i indar guztien batura nulua izan beharko da:

$$\sum_i \mathbf{P}_i = 0. \quad (2-4)$$

Demagun orain gorputza π plano irudikari baten bidez bi zatitan banatzen dugula (ikus 2.2.b. irudia). Ondorioz, ebaketa egin ondoren, \mathbf{P}_i deitu ditugun indarretako batzuk gorputzaren zati batean geldituko dira aplikaturik, eta gainerakoak, beste zatian. Beraz, (2-4) ekuazioa honelaxe idatz dezakegu:

$$\sum_i \mathbf{P}_i^1 + \sum_i \mathbf{P}_i^2 = 0 \Rightarrow \sum_i \mathbf{P}_i^1 = - \sum_i \mathbf{P}_i^2, \quad (2-5)$$

non \mathbf{P}_i^1 eta \mathbf{P}_i^2 gorputzaren goiko eta beheko zatian aplikatutako indarrak diren, hurrenez hurren. Bistakoa den bezala, gorputza ebaki eta zati horietako bakoitza bere aldetik aztertzen badugu, jada ez dira oreka egoteko behar diren baldintzak beteko, indar berri batzuk agertu ezean. Preseski, (2-5) ekuaziotik ondoriozta daitekeen bezala, bolumen-zati bakoitzean aplikatuta dauden indarren batura ez da nulua izango gehienetan. Halere, abiapuntu gisa gorputza orekan dagoela suposatu dugunez, gorputz horren puska guztiek orekan jarraitu behar dute. Ondorioz, oreka ziurtatzeko, ezinbestekoa da π planoaren gainazalean —hau da, gorputz barruan— zenbait indar agertzea. Goian esan bezala, indar horiei *barne-indar* deituko diegu, eta ebakidura-planoan zehar zabalduta daudela suposatuko dugu.

Azter dezagun orain, adibidez, I zatiaren oreka estatikoa. Zati horretan π planoan zehar eragiten duten barne-indarrei F_{21} deituko diegu. Indar guztien baturak zero eman behar duenez, erlazio hau bete beharko da:

$$\sum_i \mathbf{P}_i^1 + \mathbf{F}_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{21} = -\sum_i \mathbf{P}_i^1 = \sum_i \mathbf{P}_i^2. \quad (2-6)$$

Ikus daitekeen bezala, F_{21} bektorea eta II zatian eragiten duten \mathbf{P}_i^2 indarren batura baliokideak dira. Izan ere, beheko zatian eragiten duten kanpoko indarrak gorputzean zehar transmititzen dira, eta ondorioz, goiko zatian barne-indar batzuk agerrarazten dituzte. Beste era batean esanda, F_{21} indar-multzok haxe adierazten du: II zatiak I zatian daukan eragina, hots, π planoan zehar egiten dion indarra.

Era berean, II zatian estatikaren legeak aplikatuko bagenitu, honako hau edukiko genuke:

$$\sum_i \mathbf{P}_i^2 + \mathbf{F}_{12} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{12} = -\sum_i \mathbf{P}_i^2 = \sum_i \mathbf{P}_i^1. \quad (2-7)$$

Beraz, \mathbf{F}_{12} barne-indarra I zatian aplikatutako \mathbf{P}_i^1 indarren baturaren berdina da. Kasu honetan, \mathbf{F}_{12} bektoreak gorputzaren goiko zatiak behekoari egiten dion indarra adierazten du. Azkenik, (2-6) eta (2-7) erlazioak (2-5) ekuazioan ordeztuz gero, honako hau lortzen da:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}; \quad (2-8)$$

hau da, ebakidura-planoan agertzen diren barne-indarrak berdinak dira baina aurkako noranzkoa dute. Eraitza hori ez da harrizkoa, zeren, Newton-en akzio-erreakzio printzipioaren arabera, gorputz batek beste bati egiten dion indarra bigarrenak lehenengoari egiten dionaren berdina baita, aurkako zeinuarekin.

Arestian esandakoa laburtuz, egitura batean kanpoko indar-multzok batek eragiten duenean, barne-indar batzuk agertu behar dira, gorputzaren zati desberdinetan oreka-baldintzak bete daitezten. Barne-indar horiek ebaketa-printzipioa eta estatikaren ekuazioak erabilia kalkula daitezke. Ebakidura-planoan aukeratutako aurpegiaren arabera, agertzen diren indarrek balio berdina baina aurkako noranzkoa edukiko dute.

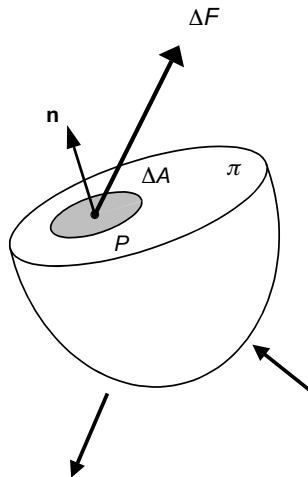
Bukatzeko, higitzen ari den gorputz baten analisisa egitea nahiko bagenu, goian esandako guztia baliokoa litzateke. Egin beharreko aldaketa bakarra, kanpoko indarrei inertzia-indarrak gehitzea izango litzateke. Era horretan, problema dinamikoa problema

estatiko bihurtzen da (D’Alambert-en printzipioa) eta egitura orekan balego bezala azter dezakegu, estatikaren ekuazioen bidez.

2.3. TENTSIO KONTZEPTUA

Tentsio hitza nahiko hitz arrunta da eguneroko bizitzan, eta makina bat esanahi desberdin eduki ditzake. Jarraian ikusiko dugun bezala, guri dagokigun alorrean, tentsioa barne-indarrak gorputzean zehar nola banatzen diren ezagutzeko balioko digun oinarritzko magnitudea da.

Tentsio kontzeptua definitzeko, har dezagun berriro 2.2.b. irudian agertzen den gorputzaren behealdeko zatia. Izan bedi P delakoa ebakidura-planoan kokaturiko puntu bat, eta ΔA delakoa puntu horren inguruan dagoen azalera txiki bat (ikus 2.3. irudia). Planoaren norabide-bektoreari \mathbf{n} deituko diogu eta kanpoaldera zuzenduta egongo da. Aurreko atalean ikusi dugun bezala, plano horretan zehar barne-indar batzuk transmititzen dira, gorputzaren zatiek elkarri egiten dizkioten indarren ondorioz. Indar horien banaketa π ebakidura-planoan zehar jarraitua dela suposatuko dugu. ΔA azalera zehar eragiten ari den indarra $\Delta \mathbf{F}$ bektorearen bidez adieraziko dugu eta, oro har, edozein norabide eduki ahal izango du.



2.3. irudia.

Demagun orain ΔA azalera zerorantz jotzen duela. Orduan, limitean, $\Delta \mathbf{F}$ indarraren eta ΔA azalera arteko erlazioari P puntuan π planoarekiko dagoen tentsioa deritzo. Hots:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA}, \quad (2-9)$$

non $\boldsymbol{\sigma}_n$ delakoa tentsio bektorea den. Bektore horrek π ebakidura-planoan zehar P puntuan azalera-unitateko egiten den indarra adierazten du. Bestalde, (2-9) ekuazioan, $\Delta \mathbf{F}/\Delta A$ frakzioa limite finitu baterantz doala suposatzen da, eta ΔA azalera eragiten duten indarren momentua nulua dela edozein punturekiko. Beraz, ingurune jarraituak aztertzeko erabiliko dugun eremuan, azalera-unitateko indarra goian definitutako tentsio bektorearen bidez dator emana; baina azalera-unitateko transmititzen diren momentuak nulua direla suposatuko dugu.

Aurreko espresioan agertzen diren magnitudeak indarra eta azalera dira; beraz, nazioarteko SI sisteman tentsioa N/m^2 -tan, hau da, pascal-etan (Pa) neurtzen da. Halere, denbora luzez tentsioa kg/cm^2 -tan neurtu izan da, eta ez da harritzekoa oraindik ere unitate hori zenbait leku eta testuliburutan aurkitzea.

Oro har, puntu bateko tentsio-bektorea desberdina da aukeratzen den π ebakidura-planoaren arabera edo, beste era batera esanda, \mathbf{n} norabide-bektorearen arabera. Hori dela-eta, $\boldsymbol{\sigma}$ hizkiari n azpindizea gehituko diogu, P puntuko tentsioa norabide-bektorearen menpe dagoela adierazteko:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}(P, \mathbf{n}). \quad (2-10)$$

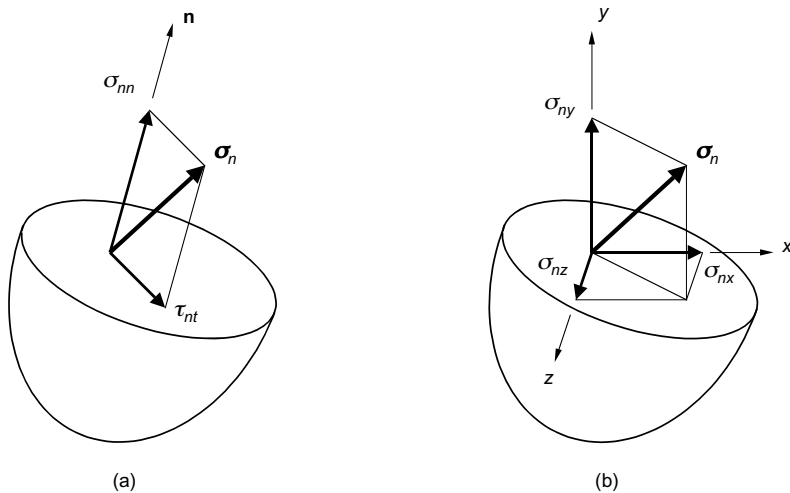
Izan ere, 2.3. irudiko π planoaren ordez beste edozein plano (edo norabide) aukeratu izan bagenu, lortutako $\boldsymbol{\sigma}_n$ tentsioaren balioa desberdina izango litzateke. Horregatik, puntu berean egon daitekeen tentsio-bektoreen kopurua infinitua da, eta beraz, beharrezkoa izango da tentsioa zein planorekiko kalkulatzen den adieraztea. Hurrengo atalean frogatuko dugun bezala, puntu eta norabide batez osaturiko bikote bakoitzari $\boldsymbol{\sigma}_n$ tentsio-bektore bakarra dagokio.

Akzio-erreakzio printzipioaren arabera, 2.2.b. iruditik hauxe ondoriozta daiteke:

$$\boldsymbol{\sigma}(P, -\mathbf{n}) = -\boldsymbol{\sigma}(P, \mathbf{n}) = -\boldsymbol{\sigma}_n, \quad (2-11)$$

hau da, puntu batean tentsioa aurkakoak diren \mathbf{n} eta $-\mathbf{n}$ norabideetan kalkulatuz gero, balio berdina lortzen da baina aurkako zeinuarekin. Hots, ebakidura-planoaren aurpegi batean dagoen tentsioa, beste aurpegi dagoen berdina da, baina kontrako noranzkoarekin.

Arestian esan bezala, kasu orokorrean, $\boldsymbol{\sigma}_n$ tentsio bektoreak ez du \mathbf{n} bektorearen norabide bera edukiko, hau da, ez da planoarekiko elkarzut izango. Beraz, bektore hori bi osagai desberdinetan bana dezakegu, 2.4.a. irudian adierazten den bezala. Osagai horiei *osagai intrintsekoak* deritze, eta erreferentzia-sistemarekiko independenteak dira.



2.4. irudia.

Planoarekiko elkarzut den osagaiari *tentsio normala* (σ_{nn}) deituko diogu, eta bere modulua tentsio-bektorea \mathbf{n} norabidean proiektatuz lor daiteke:

$$\sigma_{nn} = \sigma_n \cdot \mathbf{n} \quad (2-12)$$

Tentsio normala positiboa denean, *trakziozkoa* dela esaten da, eta negatiboa denean, berriz, *konpresiozkoa*. Osagai horren esanahi fisikoa garrantzitsua da, puntu batean gorputzaren zati batek bestean daukan eragina azaltzen baitu, “tira” edo “bultza” egiten dion adieraziz; trakziozko tentsioek banantzeko joera adierazten dute, eta konpresiozkoek elkartzekoa.

Bigarren osagai intrintsekoa, *tentsio ebakitzaila* edo *ukitzaila* deitzen da (τ_{nt}), eta σ_n tentsio-bektorea π planoan proiektatuta lortzen da (ikus 2.4.a. irudia). Osagai honek gorputzaren zati batek bestearen gainean labaintzeko daukan joera adierazten du. Osagai intrintsekoak elkarzutak direnez, tentsio normalaren eta tentsio ebakitzailaren moduluen artean honako erlazio hau betetzen da:

$$\sigma_n^2 = \sigma_{nn}^2 + \sigma_{nt}^2 \quad (2-13)$$

Osagai intrintsekoek gain, tentsio-bektorea deskonposatzeko orduan ardatz koordinatuak ere erabil daitezke, 2.4.b. irudian agertzen den eran. Kasu horretan x , y eta z ardatzekiko paraleloak diren hiru osagai lortuko ditugu, σ_{nx} , σ_{ny} eta σ_{nz} , *osagai globalak* deitzen direnak. Moduluak aztertuz, tentsio-bektorearen eta osagai globalen arteko erlazioa hau da:

$$\sigma_n^2 = \sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2 \quad (2-14)$$

Ez da ahaztu behar, tentsio-bektorea plano batekiko emanda egon behar dela beti. Ondorioz, puntu bateko tentsio-bektoreak ezin daitezke besterik gabe bektorialki batu, indar arruntak balira bezala, plano berarekiko adierazirik ez badatoz.

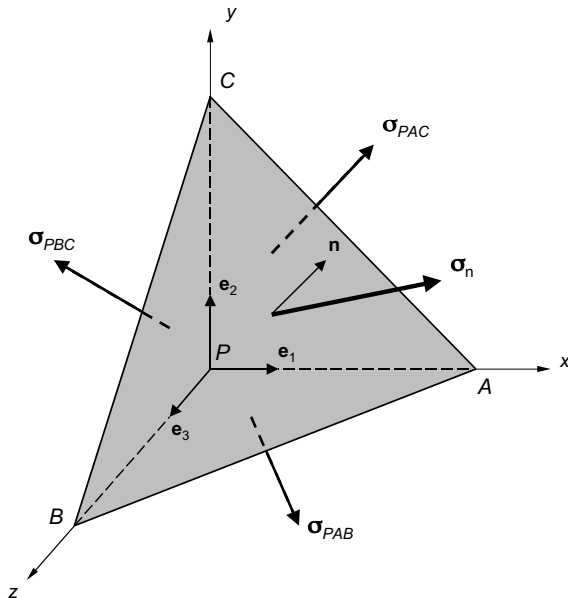
2.4. PUNTU BATEKO TENTSIO-EGOERA. TENTSIO-MATRIZEA

Lehen ikusi dugunez, kanpoko indarren eraginpean dagoen gorputz bateko puntuetan infinitu tentsio-bektore topa daitezke, puntutik pasatzen diren planoen kopurua ere infinitua baita. Tentsio-bektore horiek guztiak puntuaren *tentsio-egoera* definitzen dute. Segidan ikusiko dugun bezala, tentsio-egoera ezagutzeko, nahikoa da elkarzutak diren hiru norabidetan eragiten duten tentsio-bektoreak kalkulatzeko. Horiek lortu ondoren, beste edozein planori dagokion tentsio-bektorea lortu ahal izango dugu, atal honetan frogatuko den bezala.

Har dezagun orekan dagoen ingurune jarraitu bat eta izan bedi P delakoa ingurune horren barneko puntu bat. Puntu horren inguruan, tetraedro infinitesimal bat isolatuko dugu, non PBC , PAB eta PAC hiru aurpegiak x , y eta z ardatzekiko elkarzutak diren, hurrenez hurren, 2.5. irudian erakusten den bezala. Laugarren aurpegia — ABC aurpegia— plano arbitrario bat da, \mathbf{n} bektore unitarioarekiko elkarzuta, eta horren kosinu zuzentzaileak n_x , n_y eta n_z dira.

Tetraedro hori orekan egongo da kanpotik eragiten dioten bolumen- eta gainazal-indarren eraginpean. Gainazal-indarrak tetraedroa inguratzen duen materialak transmitituko akzioen ondorio dira, eta tetraedroaren lau aurpegietan eragiten dute. Isolatutako bolu-

menaren neurriak txikiak direnez, kanpoko indarren balioa tetraedroaren puntu guztietan berdina dela suposatuko dugu, hots, P puntuan duten balioaren berdina dela.



2.5. irudia.

Esan bezala, estatikako ekuazioen arabera indar horien guztien batura nulua izan behar da. Hortaz, 2.2. atalean erabilitako idazkera berrartuz, bolumen- eta gainazal-indarrek honako oreka-ekuazio hau bete beharko dute:

$$d\Phi + d\mathbf{T} = 0. \quad (2-15)$$

Bolumen-indarrek tetraedroaren puntu guztietan eragiten dutenez —kanpokoetan eta barnekoetan, alegia—, indar horien baliokidea honelaxe idatz dezakegu:

$$d\Phi = \Phi \cdot dV, \quad (2-16)$$

non Φ delakoa bolumen-unitateko indarra den. Gainazal-indarrek, berriz, tetraedroaren kanpoko gainazalean bakarrik eragiten dute, hau da, gorputzaren lau aurpegietan. Beraz, indar horiek honelaxe idatz ditzakegu:

$$d\mathbf{T} = d\mathbf{T}_{PBC} + d\mathbf{T}_{PAC} + d\mathbf{T}_{PAB} + d\mathbf{T}_{ABC}, \quad (2-17)$$

non (2-17) ekuazioko batugaiek tetraedroaren lau aldeetan aplikatutako gainazal-indarrak adierazten dituzten. Indar horietako bakoitza, P puntuan ardatz koordinatuen norabidean dauzkagun tentsioen funtzioan idatz daiteke, berehala ikusiko dugun bezala.

P puntuan x ardatzaren norabidean dagoen tentsio-bektoreari $\sigma_x = \sigma(P, \mathbf{e}_1)$ deituko diogu, ardatz horren norabidea daukan bektore unitarioa \mathbf{e}_1 izanik. Era berean, y eta z ardatzetako tentsio-bektoreak, hau da, \mathbf{e}_2 eta \mathbf{e}_3 norabideei dagozkienak, $\sigma_y = \sigma(P, \mathbf{e}_2)$ eta $\sigma_z = \sigma(P, \mathbf{e}_3)$ izango dira, hurrenez hurren. Lehen aipatu dugunez, tetraedroaren hiru

aurpegi ardatz koordinatuekiko elkarzutak dira. Beraz, plano horien norabide-bektoreek \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 eta \mathbf{e}_3 bektore unitarioen norabide bera edukiko dute, baina kontrako noranzkoa, norabide-bektoreak gorputzaren kanpoaldera zuzenduta daudelako. Beraz,

$$\begin{aligned}\sigma_{PBC} &= \sigma(P, -\mathbf{e}_1) = -\sigma(P, \mathbf{e}_1) = -\sigma_x, \\ \sigma_{PAB} &= \sigma(P, -\mathbf{e}_2) = -\sigma(P, \mathbf{e}_2) = -\sigma_y, \\ \sigma_{PAC} &= \sigma(P, -\mathbf{e}_3) = -\sigma(P, \mathbf{e}_3) = -\sigma_z.\end{aligned}\quad (2-18)$$

Berriz, ABC planoari dagokion tentsioa $\sigma_n = \sigma(P, \mathbf{n})$ eran adieraziko dugu, plano hori \mathbf{n} norabide arbitrarioarekiko elkarzuta baita. Orduan, 2.3. atalean emandako definizioa gogoratzuz, tentsioak azalera-unitateko indarra adierazten duenez, (2-17) ekuazioa era honetan berridatz daiteke:

$$d\mathbf{T} = \sigma_n dA_{ABC} - \sigma_x dA_{PBC} - \sigma_y dA_{PAB} - \sigma_z dA_{PAC}.\quad (2-19)$$

Hemen dA_{ABC} , dA_{PBC} , dA_{PAC} eta dA_{PAB} tetraedroaren aurpegien azalerak dira.

Ardatz koordinatuekiko elkarzutak diren azalerak plano inklinatuaren azaleraren funtzioan idatz daitezke, \mathbf{n} bektore unitarioaren kosinu zuzentzaileez baliatuz:

$$\begin{aligned}dA_{PBC} &= \mathbf{n}_x \cdot dA_{ABC}, \\ dA_{PAB} &= \mathbf{n}_y \cdot dA_{ABC}, \\ dA_{PAC} &= \mathbf{n}_z \cdot dA_{ABC}.\end{aligned}\quad (2-20)$$

Hiru erlazio horiek (2-19) ekuaziora eramanez gero, azaleko indarrentzat honako espresio hau lortzen dugu:

$$d\mathbf{T} = (\sigma_n - \sigma_x n_x - \sigma_y n_y - \sigma_z n_z) dA_{ABC},\quad (2-21)$$

eta bolumen- eta gainazal-indarrak (2-15) oreka-ekuazioan ordeztuz:

$$(\sigma_n - \sigma_x n_x - \sigma_y n_y - \sigma_z n_z) dA_{ABC} + \Phi dV = 0.\quad (2-22)$$

Tetraedroaren bolumena zerorantz doaneko limitean, ABC plano inklinatua P puntutik pasatuko da, eta σ_n bektoreak puntu horretan \mathbf{n} norabidean dagoen tentsioa adieraziko digu. Beraz, limitean bolumen infinitesimala azalera infinitesimalarekin parekatuz arbuia-garria denez:

$$(\sigma_n - \sigma_x n_x - \sigma_y n_y - \sigma_z n_z) dA_{ABC} = 0,\quad (2-23)$$

hots,

$$\sigma_n = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z.\quad (2-24)$$

Beraz, (2-24) ekuaziotik ondoriozta daitekeen bezala, hiru norabide elkarzuten tentsio-bektoreak ezagutzuz gero, beste edozein plano arbitrarioi dagokion tentsioa kalkula daiteke. Ikus dezagun orain nola berridatz dezakegun espresio hori matrizeen bidez. Ardatz koordinatuen norabideetan kalkulaturako tentsio-bektoreek —hau da, σ_x , σ_y eta σ_z -k bektoreek— edozein norabide eduki dezakete. Bektore bakoitzaren hiru osagaiak honelaxe deituko ditugu:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_x &= \sigma_{xx}\mathbf{e}_1 + \tau_{xy}\mathbf{e}_2 + \tau_{xz}\mathbf{e}_3, \\
\boldsymbol{\sigma}_y &= \tau_{yx}\mathbf{e}_1 + \sigma_{yy}\mathbf{e}_2 + \tau_{yz}\mathbf{e}_3, \\
\boldsymbol{\sigma}_z &= \tau_{zx}\mathbf{e}_1 + \tau_{zy}\mathbf{e}_2 + \sigma_{zz}\mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{2-25}$$

Osagai horien lehenengo azpindizeak tentsio-bektoreak zein planori dagokion adierazten du, eta bigarrenak, osagaiaren norabidea. Osagai normalak, hau da, plano koordinatuekiko elkarzutak direnak, σ hizkia izendatuko ditugu, eta osagai ebakitzailak, berriz, τ hizkia. Era berean, $\boldsymbol{\sigma}_n$ tentsio ezezagunak hiru osagai edukiko ditu:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{nx}\mathbf{e}_1 + \sigma_{ny}\mathbf{e}_2 + \sigma_{nz}\mathbf{e}_3 \tag{2-26}$$

Honelatan, bada, (2-25) eta (2-26) ekuazioak (2-24) espresioan ordeztzen baditugu,

$$\begin{aligned}
\sigma_{nx}\mathbf{e}_1 + \sigma_{ny}\mathbf{e}_2 + \sigma_{nz}\mathbf{e}_3 &= (\sigma_{xx}\mathbf{e}_1 + \tau_{xy}\mathbf{e}_2 + \tau_{xz}\mathbf{e}_3) n_x + \\
&+ (\tau_{yx}\mathbf{e}_1 + \sigma_{yy}\mathbf{e}_2 + \tau_{yz}\mathbf{e}_3) n_y + (\tau_{zx}\mathbf{e}_1 + \tau_{zy}\mathbf{e}_2 + \sigma_{zz}\mathbf{e}_3) n_z,
\end{aligned} \tag{2-27}$$

eta eskuinaldeko terminoak berrantolatuz:

$$\begin{aligned}
\sigma_{nx}\mathbf{e}_1 + \sigma_{ny}\mathbf{e}_2 + \sigma_{nz}\mathbf{e}_3 &= (\sigma_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z) \mathbf{e}_1 + \\
&+ (\tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z) \mathbf{e}_2 + (\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z) \mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{2-28}$$

Azkenik, berdintza-ikurraren alde bateko eta besteko batugaiak osagaiz osagai berdintzen baditugu, honako hiru ekuazio hauetara iristen gara:

$$\begin{aligned}
\sigma_{nx} &= \sigma_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z, \\
\sigma_{ny} &= \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z, \\
\sigma_{nz} &= \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z.
\end{aligned} \tag{2-29}$$

Matrizeen bidez, hiru ekuazio horiek honelaxe adieraz daitezke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}, \tag{2-30}$$

edo laburrago:

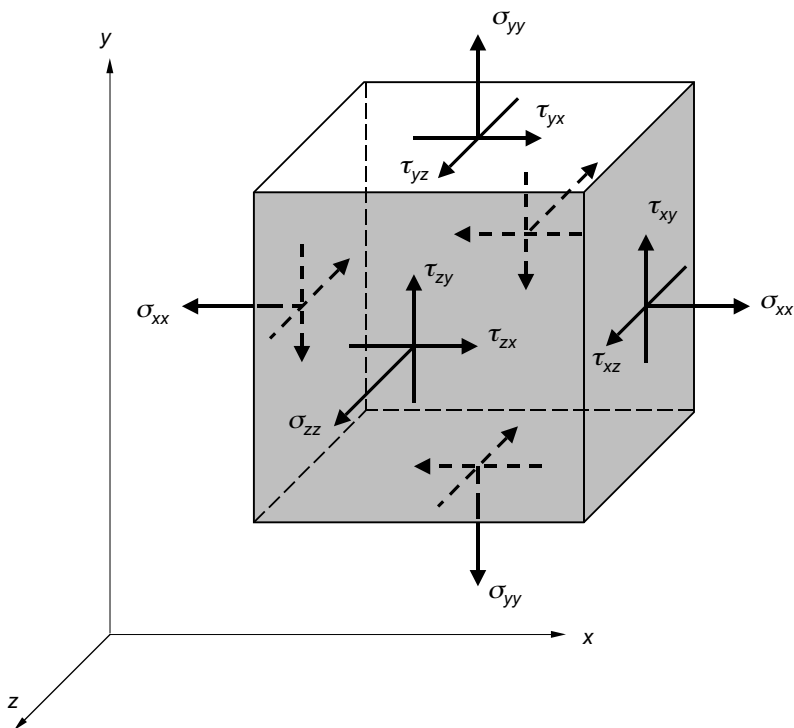
$$\boldsymbol{\sigma}_n = \vec{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}. \tag{2-31}$$

(2.31) espresioa *Cauchy-ren formula* da, eta puntu batean edozein norabidetan dagoen tentsio-bektorea kalkulatzeko balio du. $\vec{\mathbf{T}}$ matrizeari *tentsio-matrizea* deritzo eta, ikus daitekeenez, matrize horren zutabeak x , y eta z norabideetako tentsio-bektoreak dira, hain zuzen. Beraz, lehen aurreratu dugun bezala, elkarzutak diren hiru planotako tentsio-bektoreak ezagutuz gero, puntuaren tentsio-egoera definituta geratzen da, zeren ekuazio horrek P puntuan $\boldsymbol{\sigma}_n$ eta \mathbf{n} bektoreen artean dagoen bana-banako erlazioa definitzen baitu. Oro har, tentsio-matrizearen bederatzi osagaiak P puntuaren posizioaren funtzioak izango dira. Funtzio horiek x , y eta z koordinatuekiko jarraituak direla onartuko dugu.

Puntu bateko tentsio-egoera adierazpen grafiko baten bidez ere deskriba daiteke. Demagun P puntua paralelepipedo txiki baten zentroan dagoela, eta paralelepipedo horren

aurpegiak ardatz koordinatuekiko elkarzutak direla (ikus 2.6. irudia). Aurpegi horietako bakoitzean, x , y eta z norabideei dagozkien tentsio-bektoreak marraztuko ditugu, hiru osagaiak adieraziz. Beraz, adierazpen grafikoa osatzeko, nahikoa da tentsio-matrizearen zutabeetan dauden balioak paralelepipedoaren aurpegi bakoitzean irudikatzea.

Hortaz, 2.6. irudian ikusten den bezala, paralelepipedoaren hiru aurpegi agerian daude eta beste hirurak ezkutuan. Agerian dauden planoen norabide-bektoreek, x , y eta z ardatzen noranzko positiboa dute. Aurpegi horietan kokatzen diren tentsioak positiboak direla esango dugu ardatzen noranzko positiboa dutenean, eta negatiboak aurkakoak direnean. Sarritan, ezkutuan geratzen diren aurpegi-tentsioak marraztu gabe uzten dira, ez baitute informazio berririk ematen. Gogora dezagun, paralelepipedoa dimentsio gabea dela; ondorioz, aurrez aurre dauden aurpegi- plano beraren bi aurpegiak baino ez dituzte adierazten. Beraz, agerian dauden planoetako tentsioak ezagutuz gero, ezkutuan gelditzen diren tentsioak definituta gelditzen dira, aurrekoen modulu bera baina aurkako noranzkoa dutelako.



2.6. irudia.

2.5. OREKA-EKUAZIOAK

Aurreko atalean puntu bateko tentsio-bektorearen eta \mathbf{n} norabidearen artean dagoen erlazioa azertu da. Atal honetan, tentsioa gorputzeko puntu batetik bestera koordinatuen arabera nola aldatzen den ikusiko dugu. Izan ere, segidan egiaztatuko dugun bezala,

tentsio-matrizeko bederatzi osagaiek ezin dezakete edozein balio eduki; aitzitik, baldintza batzuk bete behar dituzte. Baldintza horiek estatikaren ekuazioak aplikatuta ondoriozta daitezke, eta gorputzaren barneko puntuetan nahiz gainazalekoetan bete behar dira.

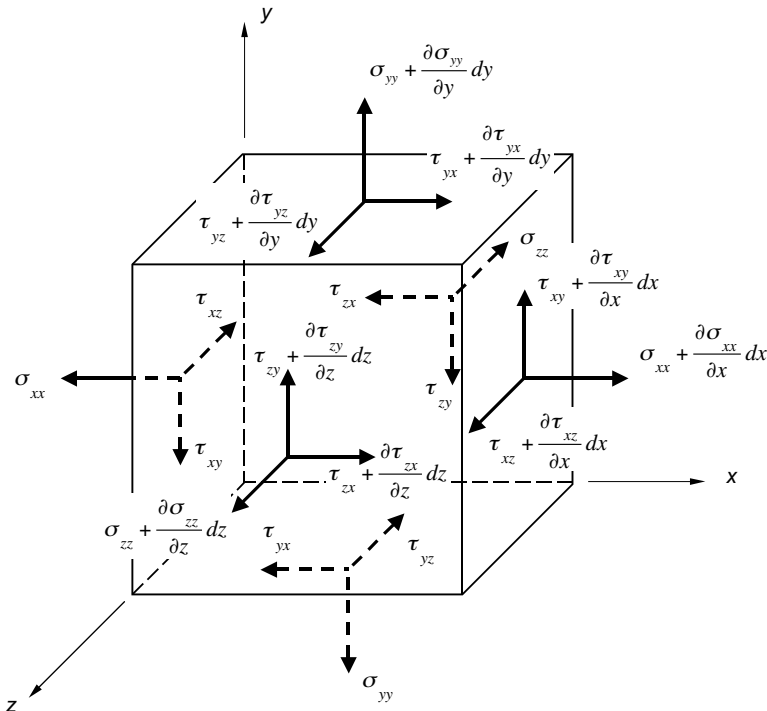
2.5.1. Barneko oreka-ekuazioak

Gorputzaren barneko puntuetan tentsioaren osagaiek bete behar dituzten baldintzak topatzeko, har dezagun berriro paralelepipedo infinitesimal bat P puntuaren inguruan. Paralelepipedo horren neurriak dx , dy eta dz izango dira, eta aldeak ardatz koordinatuekiko paraleloak izango dira. Oraingoan, osagaien balioak 2.6. irudian marraztutako desberdinak izango dira, kasu honetan aurpegiak bata bestetik distantzia infinitesimalera baitaude. Beste era batera esanda, aurpegi batetik paraleloa den beste aurpegi batera igarotzean, tentsioak aldatu egiten dira, gutxi bada ere.

Demagun x ardatzarekiko elkarzuta den ezker aldeko planoan tentsio normalaren balioa σ_{xx} dela, 2.7. irudian agertzen den bezala. Eskuineko plano bertikalean, beraz, seriezko garapena aplikatuz, tentsio normalak balio hau edukiko du:

$$\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx, \quad (2-32)$$

bi planoen arteko distantzia dx delako, hain zuzen. Paralelepipedoaren beste aurpegietako tentsioak modu berean marraztuko genituzke, 2.7. irudia osatuz.



2.7. irudia.

Suposa dezagun orain, gainazalean eragiten duten indarrez gain, paralelepipedoa bolumen-indar baten eraginpean dagoela. Paralelepipedoa orekan egon behar denez, estatikaren legeak bete beharko dira x , y eta z norabideetan. Adibide gisa, x norabidea daukaten indarrak batuko bagenitu eta batura honek nulua izan behar duela inposatuko bagenu, ekuazio honetara iritsiko ginatke:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \Phi_x dx dy dz = 0, \end{aligned} \quad (2-33)$$

non Φ_x delakoa bolumen-indarraren x osagaia baita. Beste bi norabideetan gauza bera eginez,

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \sigma_{yy} dx dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{xy} dy dz + \\ & \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zy} dx dy + \Phi_y dx dy dz = 0 \\ & \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_{zz} dx dy + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{xz} dy dz + \\ & \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yz} dx dz + \Phi_z dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2-34)$$

eta espresioak sinplifikatu ondoren, azkenik, hiru ekuazio hauek lortuko genituzke:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \Phi_x = 0, \\ & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \Phi_y = 0, \\ & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \Phi_z = 0. \end{aligned} \quad (2-35)$$

Hiru ekuazio horiei, *barneko oreka-ekuazioak* deritze eta tentsioaren osagaiak bete beharreko baldintzak definitzen dituzte. Ekuazio horiek gorputzeko puntu guztietan bete behar dira, aukeratutako erreferentzia-sistema edozein izanik ere.

Ikus ditzagun orain tentsioaren osagai ebakitzaileek bete behar dituzten beste baldintza batzuk. Berehala frogatuko dugun bezala, tentsio-matrizearen bederatzi osagaietatik sei bakarrik dira independenteak. Frogapena egiteko, har dezagun berriro 2.7. irudiko paralelepipedo infinitesimala. Goian esan genuen bezala, paralelepipedoa orekan egoteko, momentuen baturak nulua izan behar du x , y eta z ardatzen inguruan. Adibide gisa z ardatzaren inguruan eta erdiko puntuarekiko kalkulatu bagenu, batura horrek itxura hau edukiko luke:

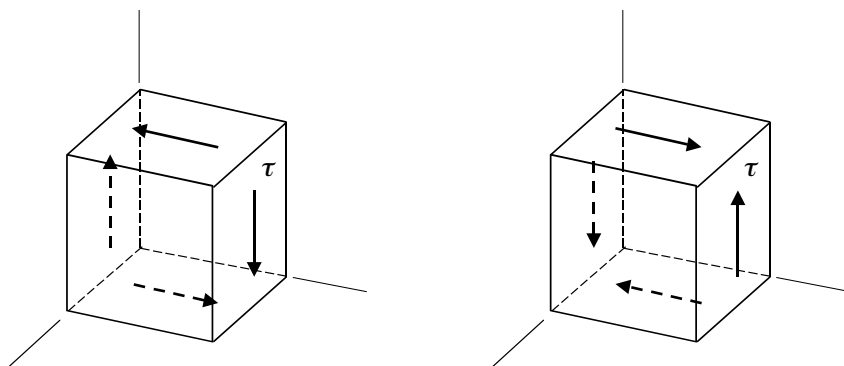
$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} = 0. \quad (2-36)$$

Modu berean, beste bi ardatzekiko momentuak kalkulatu gero, hauexek lortuko genituzke:

$$\begin{aligned} \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dx}{2} + \tau_{xz} dydz \frac{dx}{2} - \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy \frac{dz}{2} - \tau_{zx} dxdy \frac{dz}{2} &= 0, \\ \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dxdy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dxdy \frac{dz}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (2-37)$$

eta goi mailako infinitesimoak arbuaiatu ondoren:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}. \end{aligned} \quad (2-38)$$

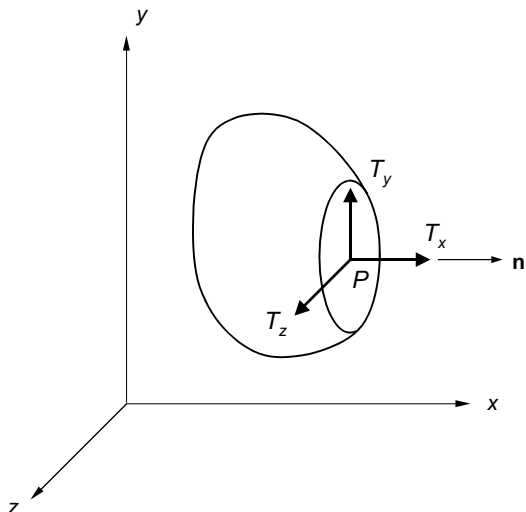


2.8. irudia.

Goiko hiru ekuazioei *tentsio ebakitzailen elkarrekotasun-teoremak* deritze. Espresio horietatik hauxe ondoriozta daiteke: paralelepipedoaren ertz batekiko elkarzutak diren tentsio ebakitzailak berdinak izan behar dira beti. Hots, tentsio-matrizea simetrikoa da, eta puntu bateko tentsio-egoera definitzeko nahikoa da tentsioaren sei osagai independente hauek ezagutzea: σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{xz} eta τ_{yz} . Gainera, goian esandakoaren arabera, plano batean tentsio ebakitzaileren bat badago, horrekiko elkarzutak diren beste hiru plano egongo dira tentsio ebakitzaileren balio berarekin. Preseski, 2.8. irudian tentsio horiek eduki ditzaketen noranzkoak agertzen dira. Izan ere, tentsio ebakitzailak eduki ditzaketen noranzkoak irudiko bi aukera horietara mugatzen dira, zeren indarren eta momentuen oreka-baldintzak errespetatuza osa daitezkeen konbinazio bakarrak baitira.

2.5.2. Mugaldeko oreka-ekuazioak

Demagun orain aztertu nahi dugun P puntua gainazalean dagoela, eta T_x , T_y eta T_z balioak puntu horretan azalera-unitateko aplikatuta dagoen indarraren osagaiak direla, 2.9. irudian adierazten den bezala. Puntu horretan gainazalarekiko elkarzuta den \mathbf{n} norabidean σ_n tentsioa kalkulatu gero, tentsio hori eta azalera-unitateko indarra bat etorri behar dira. Hori guztia erraz uler daiteke 2.5. irudiko tetraedroaren plano inklinatua gorputzaren gainazalean kokatuta dagoela pentsatzen badugu.



2.9. irudia.

Kasu horretan, (2-29) ekuazioan lortutako espresioak honelaxe geldituko lirateke:

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z, \\ T_y &= \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z, \\ T_z &= \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z. \end{aligned} \quad (2-39)$$

Ekuazio horiei *mugaldeko oreka-ekuazioak* deritze, eta gainazaleko puntuetako tentsioa azalera-unitateko aplikatuta dauden indarren berdina izan behar dela adierazten dute. Adibidez, 2.9. irudian bezala gainazala x ardatzarekiko elkarzuta balitz, orduan $T_x = \sigma_{xx}$, $T_y = \tau_{xy}$ eta $T_z = \tau_{xz}$ izango lirateke.

2.6. ERREFERENTZIA-SISTEMAREN ALDAKETA

Arestian esan dugun bezala, puntu bateko tentsio-egoera definitzeko, tentsio-matrizearen sei osagai independenteak kalkulatu behar dira. Horretarako, nahikoa da elkarzutak diren hiru norabideri dagozkien tentsio-bektoreak ezagutzea. Hiru norabide horiek, eskuarki, guk aukeratutako erreferentzia-sistema cartesiarraren hiru ardatzak izango dira, hots, x , y eta z norabideak. Ondorioz, aukeratutako oinarriaren arabera, tentsio-matrizea desberdina izango da, nahiz eta denek tentsio-egoera bera adierazi. Zenbait kasutan, komenigarria izaten da tentsio-egoeraren deskribapena erreferentzia-sistema desberdinetan nolakoa den ezagutzea, eta ardatz-sistema batetik beste batera pasatzen jakitea. Hauxe da, hain zuzen, atal honen helburua: oinarri-aldaketa bat egiten denean tentsio-matrizea nola aldatzen den ikustea.

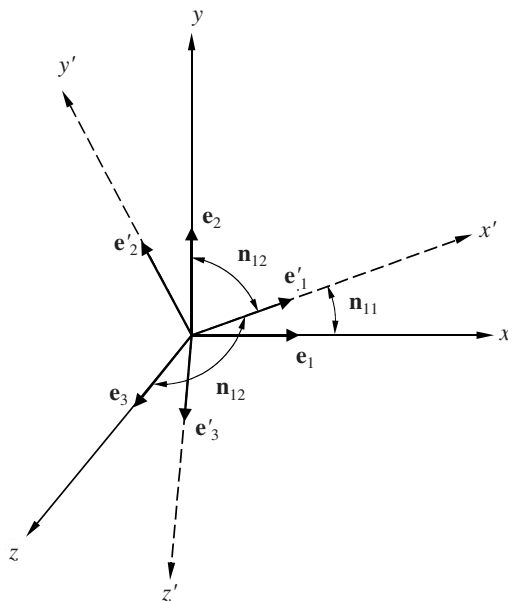
	x	y	z
x'	n_{11}	n_{12}	n_{13}
y'	n_{21}	n_{22}	n_{23}
z'	n_{31}	n_{32}	n_{33}

2.1. taula.

Izan bitez xyz oinarri zaharra eta $x'y'z'$ oinarri berria (2.10. irudia). Erreferentzia-sistema horien bektore unitarioei ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) eta ($\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$) deituko diegu, hurrenez hurren. Bi ardatz-sistemen artean dagoen erlazioa, 2.1 taularen bidez laburbil daiteke. Taula horretan, ardatz berriek erreferentzia-sistema zaharrarekiko osatzen dituzten angeluen kosinuak adierazten dira, hots, $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ eta \mathbf{e}'_3 bektore unitarioen kosinu zuzentzaileak. Beraz, oinarri berriko bektore unitarioak honelaxe idatz daitezke bektore unitario zaharren funtzioan:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= n_{11}\mathbf{e}_1 + n_{12}\mathbf{e}_2 + n_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= n_{21}\mathbf{e}_1 + n_{22}\mathbf{e}_2 + n_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= n_{31}\mathbf{e}_1 + n_{32}\mathbf{e}_2 + n_{33}\mathbf{e}_3,\end{aligned}\tag{2-40}$$

non n_{ij} koefizienteak \mathbf{e}'_i bektoreak \mathbf{e}_j ardatzarekiko duen osagaia adierazten baitu.



2.10. irudia.

(2-40) ekuazioa honelaxe idatz dezakegu matrizeen bidez:

$$\mathbf{e}' = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{e}, \quad (2-41)$$

non

$$\mathbf{e}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{21} & n_{21} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}. \quad (2-42)$$

Demagun orain \mathbf{r} bektorearen koordinatuak (x, y, z) eta (x', y', z') direla goiko bi erreferentzia-sistemekiko, hots:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2 + z'\mathbf{e}'_3. \quad (2-43)$$

Hortaz, (2-43) ekuazioko espresioak beste era honetan ere idatz ditzakegu:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}^T\mathbf{e} = \mathbf{x}'^T\mathbf{e}', \quad (2-44)$$

non \mathbf{x} eta \mathbf{x}' direlakoak \mathbf{r} bektorearen osagaiak dauzkaten bektoreak baitira (\mathbf{x}^T eta \mathbf{x}'^T bektoreen irauliak izanik). Ordezka dezagun orain (2-41) ekuazioa (2-44) espresioan:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{e} = \mathbf{x}'^T\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{e}. \quad (2-45)$$

Beraz,

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{x}'^T\tilde{\mathbf{N}}, \quad (2-46)$$

eta ekuazioaren bi aldean irauliak kalkulatu gero,

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{N}}^T\mathbf{x}'. \quad (2-47)$$

Lortu dugun ekuazioak bektore baten osagaiak erreferentzia-sistema batetik bestera nola aldatzen diren adierazten du. Erlazio hori (2-31) ekuazioko Cauchy-ren formularen $\boldsymbol{\sigma}_n$ eta \mathbf{n} bektoreei aplikatu gero, hauxe edukiko genuke:

$$\tilde{\mathbf{N}}^T\boldsymbol{\sigma}'_n = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{N}}^T\mathbf{n}'. \quad (2-48)$$

Ekuazioaren alde biak \mathbf{N} matrizeaz ezkerretik biderkatuz eta oinarria ortonormala izateagatik $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^T = \mathbf{I}$ dela kontuan harturik:

$$\boldsymbol{\sigma}'_n = \tilde{\mathbf{N}} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{N}}^T\mathbf{n}'. \quad (2-49)$$

Beraz, erreferentzia-sistema berrian $\boldsymbol{\sigma}'_n$ tentsio-bektorearen eta \mathbf{n} norabide-bektorearen artean dagoen erlazioa honako hau da:

$$\boldsymbol{\sigma}'_n = \tilde{\mathbf{T}}' \cdot \mathbf{n}', \quad (2-50)$$

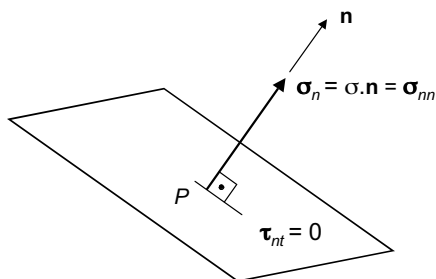
eta, ondorioz, erreferentzia-sistema batetik bestera pasatzean, espresio hau erabiliko dugu tentsio-matrize berria kalkulatzeko:

$$\mathbf{T}' = \tilde{\mathbf{N}} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{N}}^T. \quad (2-51)$$

2.7. TENTSIO NAGUSIAK

Lehenago 2.4. atalean ikusi genuen bezala, Cauchy-ren formularen bidez P puntu batean \mathbf{n} norabideari dagokion tentsio-bektorea kalkula dezakegu. Tentsio-bektore horrek edozein norabide eduki dezake, eta, oro har, norabidea ez da \mathbf{n} -ren berdina izango. Beraz, tentsio-bektoreak bi osagai edukiko ditu gehienetan: normala eta ebakitzaila. Hori azaldu ondoren, atal honetan bi galdera hauei erantzuten saiatuko gara:

- Posiblea al da tentsio-bektorea \mathbf{n} norabidearekiko paraleloa izatea, hau da, osagai ebakitzaila nulua izatea?
- Horrela bada, zein norabide dira ezaugarri hori dutenak?



2.11. irudia.

Tentsio-bektoreak osagai normala soilik duenean, \mathbf{n} norabidearekin lerrotatuta egongo da, hots, planoarekiko elkarzuta izango da, 2.11. irudian ikus daitekeen bezala. Beraz, bektore hori honelaxe idatz dezakegu:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma \mathbf{n}, \quad (2-52)$$

σ delakoa tentsioaren modulua izanik. Norabide honi dagokion tentsioa kalkulatzeko, (2-31) ekuazioko formula erabil dezakegu. Bi espresioak berdinduz:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n} = \sigma \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{n}, \quad (2-53)$$

non $\tilde{\mathbf{I}}$ delakoa 3×3 dimentsioko matrize unitarioa den. Gauzak horrela, (2-53) ekuazioko batugai guztiak berdintzaren alde batera eramaten baditugu, hauxe izango dugu:

$$(\tilde{\mathbf{T}} - \sigma \tilde{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2-54)$$

Hain zuzen, (2-54) espresioa autobalio eta autobektoreen problema baten adierazpen matematikoa da, ingeniartzako hainbat arlotan sarritan agertzen dena. Espresio hori garatuz gero, hiru ekuazio eta hiru ezezaguneko sistema lineal honetara iristen gara:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2-55)$$

Ekuazio-sistema hori homogenea denez, soluzio nabaria $n_x = n_y = n_z = 0$ izango litzateke. Dena den, guri ez zaigu soluzio nabaria interesatzen, zeroren desberdina den

bektore bat topatu nahi dugulako. Horretarako, sistema definitzen duen matrizearen determinanteak nulua izan behar du, hau da,

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (2-56)$$

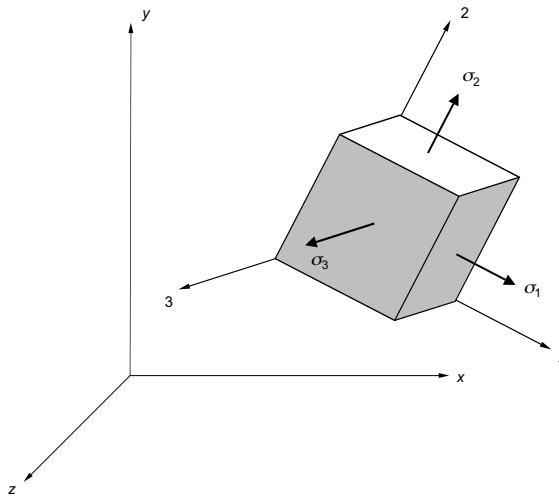
Goiko determinantea kalkulatu ondoren, hirugarren mailako ekuazio hau lortzen da:

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) - \\ (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2) = 0. \end{aligned} \quad (2-57)$$

Polinomio horren erroei (autobalioak) *tentsio nagusiak* deritze, eta σ_1 , σ_2 eta σ_3 letrez izendatuko ditugu. Tentsio nagusiei dagozkien norabideak (autobektoreak) *norabide nagusiak* dira $-\mathbf{n}_1$, \mathbf{n}_2 eta \mathbf{n}_3 , eta horiekiko elkarzutak diren planoak, *plano nagusiak*. Kontuan hartu behar da, $(\mathbf{T} - \sigma\mathbf{I})$ matrizearen determinantea nulua denez, bi ekuazio independente lor daitezkeela gehienez. Beraz, hirugarren ekuazio bat lortzeko, autobektoreen moduluek unitatea balio behar dutela inposatuko dugu, kosinu zuzentzaileak erlazionatzen dituen ekuazio honetaz baliatuz:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (2-58)$$

Aljebran frogatzen den bezala, (2-55) problemako autobalioak —hots, tentsio nagusiak— zenbaki errealak dira beti, eta erreferentzia-sistemarekiko independenteak. Gainera, norabide nagusiak elkarrekiko elkarzutak dira, eta triedro ortogonal bat osatzen dute. Beraz, puntu bateko tentsio-egoera adierazteko orduan, edozein erreferentzia-sistema erabili ordez norabide nagusiekin definitutako ardatz-sistema erabiliko bagenu, 2.6. irudiko paralelepipedoaren aurpegietan tentsio ebakitzzaileak nuluak izango lirateke (ikus 2.12. irudia), eta tentsio-matrizea matrize diagonal izango litzateke, hots:

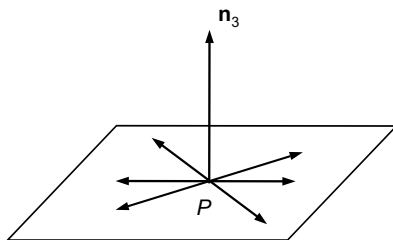


2.12. irudia.

$$\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (2-59)$$

(2-55) ekuazio-sistema askatu eta gero, hiru egoera desberdinen aurrean egon gaitzke, tentsio nagusiek hartzen dituzten balioen arabera. Azter ditzagun laburki hiru kasuak.

- $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$. Hiru erroak desberdinak direnez, hiru norabide nagusi lor daitezke, hau da, \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 eta \mathbf{n}_3 . Norabide horiek elkarrekiko elkarzutak dira eta erreferentzia-sistema errektangeluar bat osa dezakete.
- $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$. Kasu honetan ekuazio-sistemak erro bikoitz bat dauka. Beste bien desberdina den erroa σ_3 bada, tentsio honi dagokion \mathbf{n}_3 norabidea da definituta dagoen bakarra. Beste erroei dagozkien bi norabideak ez daude zehazturik, eta \mathbf{n}_3 norabidearekiko plano elkarzut batean kokatutako edozein izan daiteke norabide nagusi (ikus 2.13. irudia). Egoera honi *egoera zilindrikoa* deritzo, puntuko tentsio-egoerak biraketa-simetria baitu \mathbf{n}_3 ardatzaren inguruan. Gainera, ardatz horrekiko elkarzutak diren norabide guztietan tentsio ebakitzaileak nuluak dira.



2.13. irudia.

- $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Hiru erroak berdinak direnean, egoera *hidrostatikoa* dela esan ohi da, tentsio-egoerak simetria esferikoa duelako. Kasu honetan, norabide guztiak dira nagusiak, hau da, ez dago tentsio ebakitzailearik, eta hiru norabiderekin osatutako edozein erreferentzia-sistema erabil daiteke ardatz-sistema nagusi modura. Egoera hori geldidagoen fluido baten barruan agertzen dena da, hain zuzen ere.

Idatz dezagun orain (2-57) ekuazioa espresio laburrago honen bidez:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (2-60)$$

non

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2-61)$$

Arestian aipatu dugun bezala, (2-55) problemako autobalioak erreferentzia-sistemarekiko independenteak dira. Beraz, (2-60) polinomioaren erroak —hau da, tentsio nagusiak— bakarrak dira eta balio bera edukiko dute beti puntuaren tentsio-egoera adierazteko erabil-tzen den koordenatu-sistema aldatu arren. Hori dela-eta, I_1 , I_2 eta I_3 koefizienteei *aldaezinak* edo *inbarianteak* deritze, konstanteak izan behar dutelako edozein ardatz-sistemarentzat. (2-61) ekuazioko espresioak polikiago aztertzen baditugu, I_1 koefizientea tentsio-matrizea-ren *traza* edo *aztarna* dela ikusiko dugu. I_2 koefizienteari, berriz, *aldaezin koadratikoa* derit-zo eta hiru minoreen batura da. Azkenik, I_3 aldaezina tentsio-matrizearen determinantea da.

Tentsio-egoera definitzeko 2.12. irudiko norabide nagusiak aukeratzen baditugu —hots, (2-59) matrize diagonalaren erabil-tzen badugu—, aldaezinen balioak honako hauek izango dira:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3, \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (2-62)$$

Aldaezin horiek eginkizun garrantzitsua betetzen dute puntu bateko tentsio-egoera aztertzeko orduan, zeren horren izaera nolakoa den ulertzen laguntzen baitute. Bestalde, (2-62) ekuazioko aldaezinak dituzten balioen arabera, sailkapen hau egin dezakegu:

- a. $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$, $I_3 \neq 0$. Hiru aldaezinak zeroren desberdinak direnean, tentsio-egoera *hiru ardatzekoa* dela esaten da.
- b. $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$, $I_3 = 0$. Hiru aldaezinetako bat zero denean, tentsio nagusietako batek ere nulua izan behar du. Kasu honi *bi ardatzekoa* edo *laua* deritzo eta aparteko garrantzia dauka, beranduago ikusiko dugun bezala. Tentsio-egoera hori makur-dura bakunean edo presiopean dauden horma meheko ontzietan agertzen da.
- c. $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$. Bi aldaezin nulua direnean, derrigorrez bi tentsio nagusi zero izan behar dira. Kasu honetan ardatz bakarrek egoera edukiko genduke. Egoera hori trakzio eta konpresio bakuna aztertzen dugunean agertuko zaigu.

2.8. OSAGAI INTRINTSEKOEN MUTURREKO BALIOAK

Puntu bateko tentsioen analisia egiten denean, askotan interesgarria izaten da osagai normalen eta osagai ebakitzaileen balio maximoak edo balio minimoak zein planotan agertzen diren ezagutzea.

Izan ere, puntu bateko tentsioa norabide desberdinetan kalkulatzeko, gehienez osagaien balioak ere desberdinak izango dira. Atal honetan puntu batean tentsio normalarentzat eta tentsio ebakitzailearentzat topa daitezkeen baliorik handienak eta txikienak kalkulatzeko ikusiko dugu. Hurrengo gai batean ikusiko dugun bezala, datu horiek guztiak ezagutzea oso garrantzitsua da materialen hutsegitea ulertu eta aurrean ahal izateko.

2.8.1. Tentsio normalaren muturreko balioak

Tentsio normalaren muturreko balioak kalkulatzeko, norabide nagusiekin osatutako erreferentzia-sistema erabiliko dugu abiapuntu modura. Beraz, (2-59) ekuazioko matrize diagonalean oinarrituz, P puntuko tentsioa \mathbf{n} norabidean honelaxe kalkulatu genduke:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \vec{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix}. \quad (2-63)$$

Hemen, n_1 , n_2 eta n_3 balioak aukeraturiko norabidearen kosinu zuzentzaileak dira. Osagai normala lortzeko, tentsio-bektorea \mathbf{n} norabidez biderkatuko dugu berriro:

$$\sigma_{nn} = \boldsymbol{\sigma}_n^T \cdot \mathbf{n} = \left\{ \sigma_1 n_1, \sigma_2 n_2, \sigma_3 n_3 \right\} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (2-64)$$

Tentsio normalaren muturreko balioak kalkulatzeko, (2-64) espresioa n_1 , n_2 eta n_3 norabideekiko deribatuko dugu eta zero balioaz berdinduko dugu, funtzio baten maximo edo minimoak dauden puntuetan lehenengo deribatuak nulua izan behar baitu. Dena dela, ez da ahaztu behar \mathbf{n} bektorearen osagaiek (2-58) erlazioa bete behar dutela, norabide-bektorea unitarioa izateagatik. Baldintza hori inposatu ahal izateko, lehenik eta behin hiru osagaietako bat askatuko dugu eta σ_{nn} -ren espresioan ordeztuko dugu, deribatua egin baino lehen. Adibidez, n_3 osagaia askatuko bagenu, hauxe edukiko genuke:

$$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2, \quad (2-65)$$

eta (2-64) espresioan ordeztuz:

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 - \sigma_3 n_1^2 - \sigma_3 n_2^2. \quad (2-66)$$

Goiko espresioa n_1 eta n_2 balioekiko deribatuz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \sigma_1} &= 2(\sigma_1 - \sigma_3)n_1 = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial n_2} &= 2(\sigma_2 - \sigma_3)n_2 = 0. \end{aligned} \quad (2-67)$$

Kasurik orokorrean hiru tentsio nagusiak desberdinak izango dira; ondorioz, (2-67) ekuazioko berdintzak bete daitezten, norabidearen osagaiek balio hauek edukiko dituzte:

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1. \quad (2-68)$$

Gauza bera errepikatuko bagenu baina oraingoan n_1 eta n_2 osagaiak askatuz (n_3 askatu beharrean), hauxe lortuko genuke:

$$\begin{aligned} n_1 = \pm 1, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0, \\ n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1, \quad n_3 = 0. \end{aligned} \quad (2-69)$$

Emaitza horietatik ondoriozta daitekeen bezala, tentsio normalaren muturreko balioak —hau da, baliorik handienak eta txikiak— norabide nagusietan topatuko ditugu. Beraz, tentsio nagusiak tentsio normalaren maximo eta minimoak dira. Adibide gisa, tentsio nagusiak honelaxe ordenaturik daudela suposatuko bagenu,

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad (2-70)$$

orduan, trakziorik handiena (edo konpresiorik txikiena) σ_1 izango litzateke, eta trakziorik txikiak (edo konpresiorik handienak) σ_3 balioa edukiko luke.

2.8.2. Tentsio ebakitzaileren muturreko balioak

Bila dezagun orain tentsio ebakitzaileren balio maximo eta minimoak zein planotan dauden. Tentsio ebakitzailere txikiak norabide nagusietan agertzen dira, norabide horietan osagai normala bakarrik egotean ebakitzailera nulua delako. Balio maximoak kalkulatzeko, (2-63) eta (2-64) espresioetan oinarrituko gara. Lehenik eta behin, tentsio ebakitzaileren modulua lortuko dugu, hots:

$$\tau_{nt}^2 = \sigma_n^2 - \sigma_{mn}^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2. \quad (2-71)$$

Aurreko atalean egin dugun modu berean, norabide-bektorearen bi osagai hirugarrenaren funtzioan idatziko ditugu. Hortaz, (2-65) erlazioa tentsio ebakitzaileren espresiora eramanez:

$$\tau_{nt}^2 = \sigma_n^2 - \sigma_{mn}^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 (1 - n_1^2 - n_2^2)) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 (1 - n_1^2 - n_2^2))^2, \quad (2-72)$$

eta n_1 eta n_2 balioekiko deribatuz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial n_1} &= 4(\sigma_1 - \sigma_3) \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \right] n_1 = 0, \\ \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial n_2} &= 4(\sigma_2 - \sigma_3) \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right] n_2 = 0. \end{aligned} \quad (2-73)$$

Goiko bi ekuazioak tentsio nagusien edozein balioentzat bete daitezzen, honako hiru aukera hauek dauzkagu:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0, & n_2 &= 0, & n_3 &= \pm 1, \\ n_1 &= \pm \sqrt{1/2}, & n_2 &= 0, & n_3 &= \pm \sqrt{1/2}, \\ n_1 &= 0, & n_2 &= \pm \sqrt{1/2}, & n_3 &= \pm \sqrt{1/2}. \end{aligned} \quad (2-74)$$

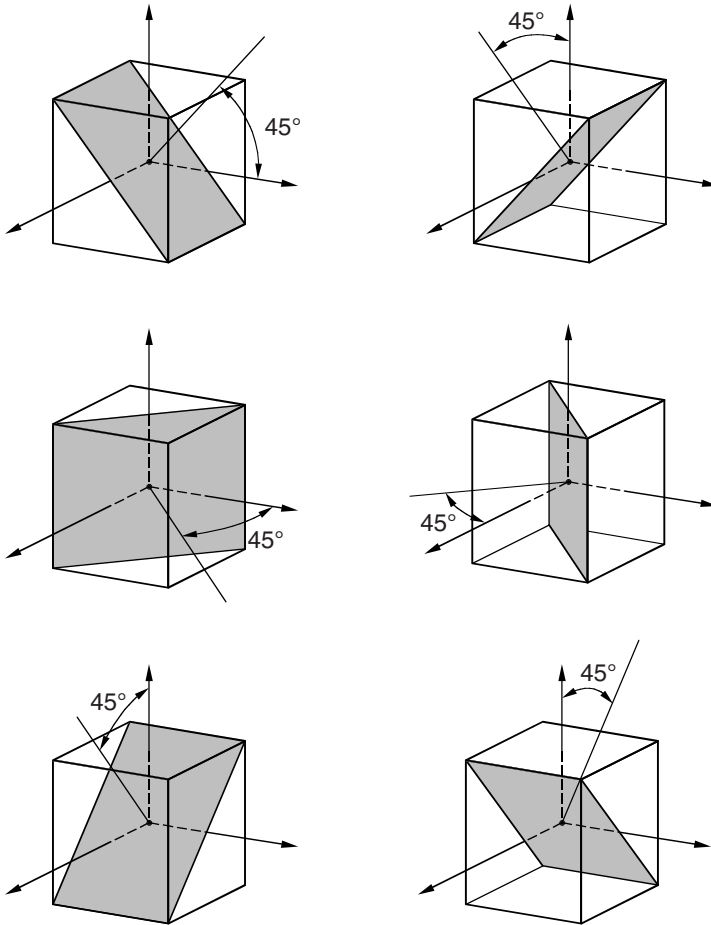
Beste bi norabideekin prozedura bera jarraitu ondoren, taula honetan laburbildu diren norabide hauek lortuko genituzke:

n_1	± 1	0	0	0	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$
n_2	0	± 1	0	$\pm \sqrt{1/2}$	0	$\pm \sqrt{1/2}$
n_3	0	0	± 1	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$	0

2.2. taula.

Goian aurreratu genuen bezala, aurkitu ditugun norabideetako batzuk norabide nagusiak dira, tentsio ebakitzailere txikienei dagozkienak, hain zuzen. Beste hiru aukerek tentsio ebakitzailere handienak zein norabidetan agertuko diren adierazten dute. Ikusten den

bezala, norabide horiek ardatz nagusien erdikariak dira. Beraz, tentsio ebakitzaille maximoak norabide nagusiekiko 45° -tara egongo dira, 2.14. irudian ikus daitekeen bezala. Dena dela, tentsio-matrizea simetrikoa denez, balio horietako bakoitza beste hiru planotan errepikatuta agertuko da. Izan ere, 2.2. taulako zutabeetan lau konbinazio posible agertzen dira, zeinuak positiboak eta negatiboak izan baitezke. Konbinazio horiek elkarrekiko elkarzutak diren lau planori dagozkie, tentsio ebakitzailleen elkarrekikotasuna azaldu zenean ikusi genuen bezala (ikus 2.8. irudia).



2.14. irudia.

Tentsio ebakitzailleen balio maximoak lortzeko, nahikoa da 2.2. taulako azken hiru zutabeetan datozen osagaiak (2-72) espresioan ordeztea eta erro karratua kalkulatzea. Balio hauek lortuko genituzke:

$$\tau_{12} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \quad \tau_{13} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}. \quad (2-75)$$

Lortutako balioetatik, gehienetan hiruretako bat bakarrik izango da tentsio ebakitzaille maximoa, hots, hiruretatik handiena; eta beste biak maximo erlatiboak dira. Beraz, ebakitzaille maximoa kalkulatzeko espresioa honelaxe idatz dezakegu:

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|}{2}, \quad (2-76)$$

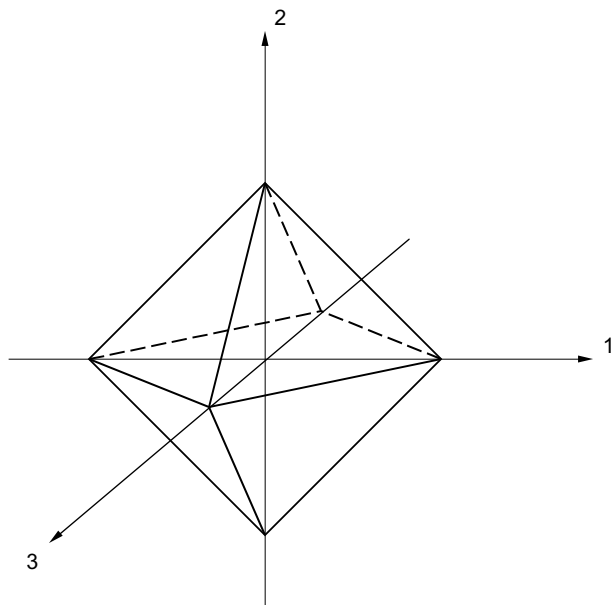
non σ_{\max} eta σ_{\min} balioak tentsio nagusi handiena eta txikiena diren, hurrenez hurren.

Atal honetan tentsio normalaren eta ebakitzaillearen muturreko balioei buruz aurkeztutako emaitzen azterketa sakonagoa hurrengo atal batean egingo dugu, eta bertan, Mohr-en zirkuluen adierazpen grafikoaren bidez, hemen ikusitako guztiaren esanahia zehazkiago argituko da.

2.9. TENTSIO OKTAEDRIKOA

Norabide nagusiekin angelu berdinak osatzen dituzten planoei *plano oktaedrikoak* deritze. Plano horien guztien norabide-bektoreek modulu bereko osagaiak dituzte, hau da, $|n_x|=|n_y|=|n_z|$. Gainera, (2-58) ekuazioaren arabera norabide-bektoreak unitarioa izan behar duenez, plano oktaedrikoen kosinu zuzentzaileek balio hau edukiko dute:

$$n_x = n_y = n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (2-77)$$



2.15. irudia.

Hain zuzen, 2.15. irudian ikusten den bezala, zortzi plano oktaedriko daude. Plano horietako tentsioaren osagai intrintsekoei *tentsio normal oktaedrikoak* (σ_{okt}) eta *tentsio ebakitzaille oktaedrikoak* (τ_{okt}) deritze. Tentsio normal oktaedrikoa (2-77) espresioiko osagaiak (2-64) ekuazioan ordeztuz lor daiteke:

$$\sigma_{\text{okt}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}, \quad (2-78)$$

non I_1 delakoa tentsio-matrizearen lehenengo aldaezina baita. Beraz, tentsio normal oktaedrikoa puntuko batez besteko tentsioa dela esan dezakegu. Era berean, (2-71) ekuazioan oinarrituz, tentsio ebakitzaille oktaedrikoa honako hau izango litzateke:

$$\tau_{\text{okt}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}, \quad (2-79)$$

edo, aldaezinen funtzioan,

$$\tau_{\text{okt}} = \frac{1}{3} \sqrt{2I_1^2 - 6I_2}. \quad (2-80)$$

Ikusten den moduan, tentsio oktaedrikoen balioak aldaezinen funtzioan adieraz daitezke. Beraz, nahiz eta tentsio oktaedrikoak norabide nagusiekiko definituta egon, edozein tentsio-matrizerentzat kalkula daitezke. Bestetik, (2-61) ekuazioko aldaezinen espresioak goian ordeztu ondoren, σ_{okt} eta τ_{okt} honelaxe berridatz ditzakegu:

$$\sigma_{\text{okt}} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}, \quad (2-81)$$

$$\tau_{\text{okt}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2 + 6\tau_{yz}^2}. \quad (2-82)$$

2.10. TENTSIO ESFERIKOA ETA DESBIDERAPEN-TENTSIOA

Edozein tentsio-matrize bi matrizeren batura modura idatz daiteke, modu honetan:

$$\ddot{\mathbf{T}} = \ddot{\mathbf{T}}_e + \ddot{\mathbf{T}}_d, \quad (2-83)$$

non $\ddot{\mathbf{T}}_e$ delakoa tentsio-matrize esferikoa den eta $\ddot{\mathbf{T}}_d$ delakoa desbiderapen-matrizea. Matrize esferikoa, definizioz, honako hau da:

$$\ddot{\mathbf{T}}_e = \sigma_b \ddot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \sigma_b & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_b \end{bmatrix}. \quad (2-84)$$

Hemen, σ_b batez besteko tentsioa da, hots, tentsio normal oktaedrikoa:

$$\sigma_b = \sigma_{\text{okt}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{I_1}{3}. \quad (2-85)$$

Desbiderapen-matrizea lortzeko, nahikoa da tentsio-matrizearen eta matrize esferikoaren arteko kendura kalkulatzeko:

$$\ddot{\mathbf{T}}_d = \ddot{\mathbf{T}} - \ddot{\mathbf{T}}_e = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_b & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_b & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_b \end{bmatrix}. \quad (2-86)$$

Bukatzeko, interesgarria da ikusi berri ditugun bi tentsio-matrize berezi horien tentsio oktaedrikoak kalkulatzeko. Preseski, $\ddot{\mathbf{T}}_e$ eta $\ddot{\mathbf{T}}_d$ matrizeen osagaiak (2-81) eta (2-82) ekuazioetan ordeztuz, balio hauetara iristen gara:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{okt}}^e &= \sigma_{\text{okt}}, & \tau_{\text{okt}}^e &= 0, \\ \sigma_{\text{okt}}^d &= 0, & \tau_{\text{okt}}^d &= \tau_{\text{okt}}. \end{aligned} \quad (2-87)$$

Aurrerago ikusiko dugun bezala, emaitza horiek zeresan handia dute gorputzen bolumen-aldaketa eta forma-aldaketa aztertzeko orduan. Gainera, desbiderapen-matrizea materialen portaera elastikoaren bukaera aurrerako erabiliko dugun hutsegite-irizpide garrantzitsu baten oinarri eta abiapuntua da.

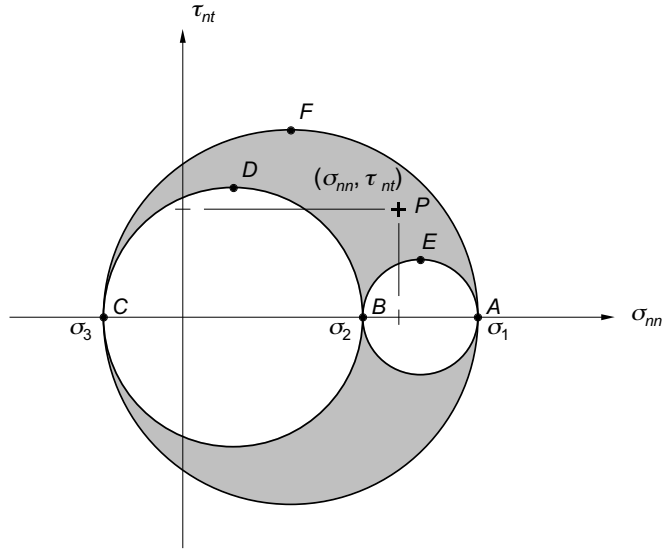
2.11. MOHR-EN ZIRKULUAK

Lehenago 2.4. atalean ikusi dugun bezala, puntu bateko tentsio-egoera ezagutuz gero edozein norabideri dagokion tentsio-bektorea kalkula daiteke Cauchy-ren formularen bidez. Segidan ikusiko dugun bezala, tentsioen eta norabideen artean dagoen erlazio hori grafikoki ere adieraz daiteke. Eraikuntza grafiko honen bidez, puntu batean norabide bati dagokion tentsioa kalkula daiteke; eta, alderantziz, tentsio bektore bati dagokion norabidea zein den aurki daiteke.

Adierazpen grafikoa egiteko bi ardatzez osatutako koordenatu-sistema bat erabiliko dugu (σ_{nn}, τ_{nt}) , 2.16. irudian ikus daitekeen bezala. Demagun P puntuan \mathbf{n} norabidean dagoen tentsio-bektorearen osagai intrintsekoak σ_{nn} eta τ_{nt} direla. Osagai normalaren balioa abzisa-ardatzean neurtuz gero, eta osagai ebakitzailarena ordenatu-ardatzean, puntu bat defini dezakegu aipaturiko koordenatu-sisteman. Beraz, puntu horren koordenatuek \mathbf{n} norabideari dagozkion osagai intrintsekoak adierazten dituzte. Norabide desberdinak aukeratzuz gauza bera errepikatuko bagenu, lortutako puntu guztien leku geometrikoa azalera bat izango litzateke. Azalera hori zein den kalkulatzeko, nahikoa da tentsio nagusiak abzisa-ardatzera eramatea eta $(\sigma_1 - \sigma_2)$, $(\sigma_1 - \sigma_3)$ eta $(\sigma_2 - \sigma_3)$ diametroko hiru zirkulu marraztea, *Mohr-en zirkuluak* deritzenak. Puntutik pasatzen diren norabide guztien adierazpena, nahitaez, zirkulu horiek mugatzen duten azaleraren barruan erori behar da, jarraian frogatuko dugun bezala. Aipa ditzagun adierazpen grafiko horren zenbait berezitasun interesgarri:

- A , B eta C puntuek norabide nagusiak adierazten dituzte, tentsio ebakitzaila zero baita puntu horietan (ikus 2.16. irudia). Gainera, lehen aurreratu genuen bezala, ez dago tentsio nagusi maximoa baino handiagoa den tentsio normalik, ezta tentsio nagusi minimoa baino txikiagorik ere.
- D , E eta F puntuek tentsio ebakitzaila maximoak dauzkaten norabideak adierazten dituzte. Puntu horien koordenatuak $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$, $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ eta $(\sigma_2 - \sigma_3)/2$ dira, 2.8.2. azpiatalean frogatu genuen bezala. Tentsio ebakitzaila maximoa D puntuak adierazten duen planoan aurkituko da, horixe baita ordenatu handiena duena.

- c. Bi tentsio nagusi berdinak direnean, adierazpen grafikoak bi zirkulu bakarrik edukiko ditu, hiru eduki beharrean.
- d. Azkenik, hiru tentsio nagusiak berdinak badira, Mohr-en diagrama puntu batean laburtzen da, eta tentsio ebakitzailea nulua da norabide guztietan (egoera hidrostatikoa).



2.16. irudia.

Froga dezagun orain lehen egindako baieztapena, alegia, P puntutik pasatzen diren norabide guztiei dagozkien (σ_{nm}, τ_{nt}) koordenatuak 2.16. irudian marraztutako eremuaren barnean egon behar direla. Frogaketa egiteko, ezagunak zaizkigun ekuazio hauetaz baliatuko gara:

$$\sigma_n^2 = \sigma_{nm}^2 + \sigma_{nt}^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2, \quad (2-88)$$

$$\sigma_{nm} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, \quad (2-89)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (2-90)$$

eta tentsio nagusiak (2-70) ekuazioan agertzen den bezala ordenaturik daudela onartuko dugu, hau da, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ direla. (2-88) ekuaziotik, osagai ebakitzailea honelaxe idatz daiteke:

$$\tau_{nt}^2 = \sigma_n^2 - \sigma_{nm}^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_{nm}^2. \quad (2-91)$$

Behin baino gehiagotan egin dugun bezala, n_3 osagaia askatu eta (2-89) eta (2-91) espresioetan ordeztuz:

$$\sigma_{nm} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 (1 - n_1^2 - n_2^2) = n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_3) + n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_3, \quad (2-92)$$

$$\tau_{nt}^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 (1 - n_1^2 - n_2^2) - \sigma_{nm}^2 = n_1^2 (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) + n_2^2 (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) + \sigma_3^2 - \sigma_{nm}^2. \quad (2-93)$$

Bestalde, (2-92) espresiotik n_2 aska daiteke:

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_{nn} - \sigma_3) - n_1^2(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_3)}, \quad (2-94)$$

eta (2-93) espresioan ordeztuz:

$$\begin{aligned} \tau_{nt}^2 &= n_1^2(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) + \frac{(\sigma_{nn} - \sigma_3) - n_1^2(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_3)}(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 + \sigma_3) - (\sigma_{nn}^2 - \sigma_3^2) = \\ &= n_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3), \end{aligned} \quad (2-95)$$

Azkenik, hauxe geratzen da:

$$n_1^2 = \frac{\tau_{nt}^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}. \quad (2-96)$$

Modu berean, ondoko bi espresio hauek lor daitezke:

$$n_2^2 = \frac{\tau_{nt}^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \quad (2-97)$$

$$n_3^2 = \frac{\tau_{nt}^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \quad (2-98)$$

Beraz, hiru espresio horiekin Mohr-en diagraman (σ_{nn}, τ_{nt}) koordenatuak dituen puntu bati dagokion norabidearen kosinu zuzentzaileak lor daitezke, hau da, osagai intrintseko jakin batzuek dauzkan tentsio-bektorea zein norabidetan egongo den.

Aurreko hiru espresioak positiboak izan behar dira, kosinu zuzentzaileen karratuak —hau da, n_x^2 , n_y^2 eta n_z^2 — positiboak direlako. Tentsio nagusientzat suposatu dugun ordenaren arabera —hots, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ —, (2-96) eta (2-98) ekuazioetako izendatzaileak positiboak izango dira, eta (2-97) ekuaziokoarena, berriz, negatiboa. Ondorioz,

$$\begin{aligned} \tau_{nt}^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3) &\geq 0, \\ \tau_{nt}^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_3)(\sigma_{nn} - \sigma_1) &\leq 0, \\ \tau_{nt}^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_2) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2-99)$$

Hiru inekuazio horiek beste era honetan berridatz daitezke:

$$\begin{aligned} \tau_{nt}^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2, \\ \tau_{nt}^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2, \\ \tau_{nt}^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (2-100)$$

Lehenengo inekuazioaren arabera, norabide jakin bati dagokion puntua $1/2(\sigma_2 - \sigma_3)$ erradioko zirkulu baten kanpoaldean egon behar da. Zirkulu hori 2.16. irudian BC diametroa duena da, eta beraren zentroa abzisa-ardatzean dago $1/2(\sigma_2 + \sigma_3)$ distantziara. Bigarren inekuazioak (σ_{nn} , τ_{nt}) puntua AC diametroko zirkuluaren barnean egon behar dela adierazten du. Zirkulu horren erradioa $1/2(\sigma_3 - \sigma_1)$ da, eta zentroaren koordinatu horizontala $1/2(\sigma_3 + \sigma_1)$. Azkenik, hirugarren ekuazioak agertzen du (σ_{nn} , τ_{nt}) puntua AB diametroko zirkuluaren kanpoan egon behar dela. Zirkulu horren zentroa $1/2(\sigma_1 + \sigma_2)$ distantziara kokatuta dago, eta erradioaren balioa $1/2(\sigma_1 - \sigma_2)$ da. Laburbilduz, Mohr-en diagraman \mathbf{n} norabideari dagokion puntua hiru zirkuluek mugatzen duten eremuan egon behar da nahitaez, hots, 2.16. irudian itzalezatua ageri den barrutian.

Azter dezagun sakonkiago Mohr-en hiru zirkuluek definitzen duten eremua. Hain justu, (2-95) ekuazioan $1/4(\sigma_2 + \sigma_3)^2$ espresioa batuz eta kenduz gero, hauxe lortzen da:

$$\tau_{nt}^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2. \quad (2-101)$$

Eta ekuazio horretan n_1 konstantea dela suposatuko bagenu,

$$\tau_{nt}^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = r^2. \quad (2-102)$$

Preseski, (2-102) espresioa zentroa D puntuan duen zirkunferentzia baten ekuazioa da, eta beraren erradioa n_1 balioaren menpe dago. Kosinu zuzentzaile horren balioa $n_1 = 0$ denean, zirkuluaren erradioa $1/2(\sigma_2 - \sigma_3)$ izango da, eta A eta B puntuetatik pasatuko da (ikus 2.17. irudia). Bestalde, $n_1 = 1$ denean, erradioaren balioa $\sigma_1 + 1/2(\sigma_2 + \sigma_3)$ da, eta C puntutik pasatzen da. Beste bi kosinu zuzentzaileekin kalkulu bera egin ondoren, 2.17. irudian agertzen diren sei zirkuluak marraz daitezke. Hain zuzen, 2.3. taulan zirkulu horien guztien zentroak eta erradioak laburbildu dira, n_1 , n_2 eta n_3 osagaien funtzioan.

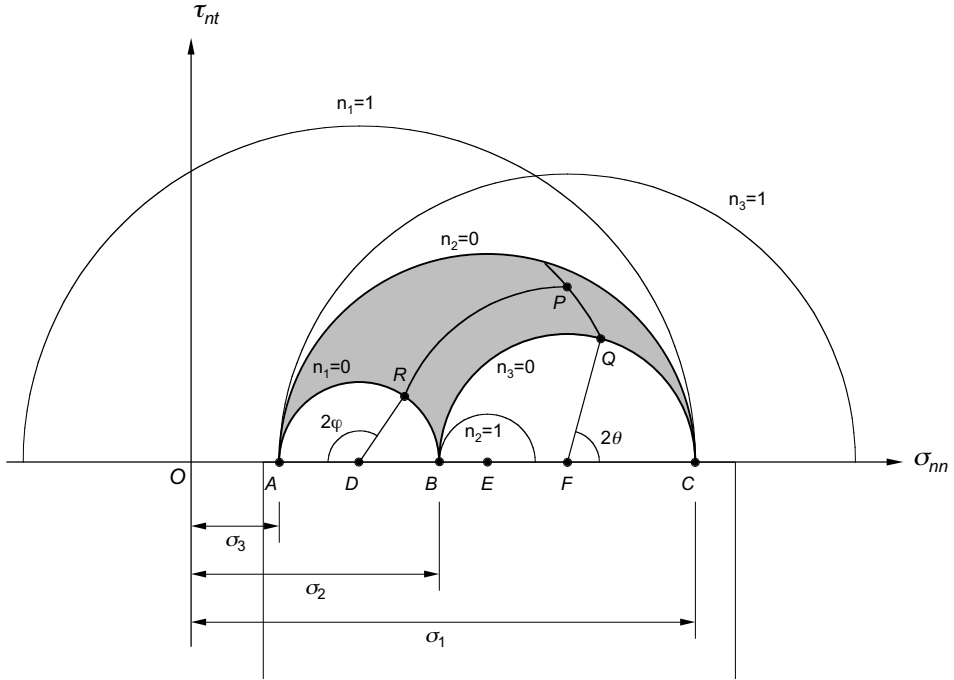
	n_1		n_2		n_3	
	0	1	0	1	0	1
Erradioa	$\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)$	$\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)$	$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)$	$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_2 \right)$	$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)$	$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_3 \right)$
Zentroa	$D \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)$		$E \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)$		$F \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)$	

2.3. taula.

Bektore unitarioaren osagaiak 0 eta 1 artean egon behar dutela kontuan hartzen badugu, puntu bateko tentsio-bektore guztien adierazgarri den leku geometrikoak honako hauek bete beharko ditu:

$$\begin{aligned} 0 &\leq n_1^2 \leq 1, \\ 0 &\leq n_2^2 \leq 1, \\ 0 &\leq n_3^2 \leq 1, \end{aligned} \quad (2-103)$$

eta hori 2.17. irudian adierazitako eremuarekin bat dator, hain zuzen.



2.17. irudia.

(σ_{nn}, τ_{nt}) erako puntu adierazgarri guztien leku geometrikoa zein den ezagutu ondoren, hurrengo pausoa \mathbf{n} norabide bakoitzari dagokion puntua topatzea da. Horretarako, izan bedi norabide nagusiekin osatutako erreferentzia-sistema cartesiar bat, eta demagun 1-2 plano nagusian kokatutako norabide bat ($n_1 = \cos\theta$, $n_2 = \sin\theta$, $n_3 = 0$). Norabide hori eta ondoko erlazio trigonometriko hauek,

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad (2-104)$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta,$$

(2-89) eta (2-91) ekuazioetan ordeztuz:

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 = \sigma_1 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_2 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta, \quad (2-105)$$

$$\tau_{nt}^2 = \sigma_1^2 \cos^2\theta + \sigma_2^2 \sin^2\theta - (\sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 4\sin^2\theta \cos^2\theta, \quad (2-106)$$

eta beraz,

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} 2\sin\theta \cos\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta. \quad (2-107)$$

Goiko ekuazioen arabera, (σ_{nn}, τ_{nt}) puntua $n_3 = 0$ zirkuluaren gainean kokatutako Q puntua da (ikus 2.17. irudia). θ angelua ezagututa, arazorik gabe kalkula dezakegu beraren posizio zehatza. Suposa dezagun orain $n_1 = \cos\theta$ osagaia konstantea dela. Orduan, \mathbf{n} bektoreak θ angeluko kono bat irudikatuko luke 1 norabide nagusiaren inguruan. Ondorioz, (2-102) ekuazioaren arabera, \mathbf{n} horiei dagozkien (σ_{nn}, τ_{nt}) puntuak D zentroko zirkunferentzia batean egongo lirатеke. Baina $n_3 = 0$ denean zirkulua nondik pasatzen den ezaguna denez, zirkunferentzia hori Q puntutik pasatu beharko litzateke, 2.17. irudian azaltzen den bezala. Beraz, zirkunferentzia-arku horretan 1 norabide nagusiarekin θ angelua osatzen duten norabide guztiak egongo lirатеke adierazirik.

Beste alde batetik, \mathbf{n} bektorea 2-3 planoan kokatua balego ($n_1 = 0, n_2 = \sin\varphi, n_3 = \cos\varphi$), goiko eragiketa berak egin ondoren, hauxe edukiko genuke:

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta, \\ \tau_{nt} &= \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{2-108}$$

Beraz, lehenengo arrazonomendu bera erabiliz, norabide berri horri dagozkion puntua $n_1 = 0$ zirkuluan kokatutako R puntua izango litzateke. Aurreko kasuan bezala, $n_3 = \cos\varphi$ konstantea balitz, \mathbf{n} bektoreak φ angeluko kono bat deskribatuko luke 3 norabide nagusiaren inguruan eta, ondorioz, norabide horiei dagozkien puntuak F zentroko zirkunferentzia batean topatuko genituzke. Lehen bezala, $n_1 = 0$ denean arkua R puntutik pasatu behar dela dakigunez, zirkunferentzia horren kokapena zehaztuta geratzen da.

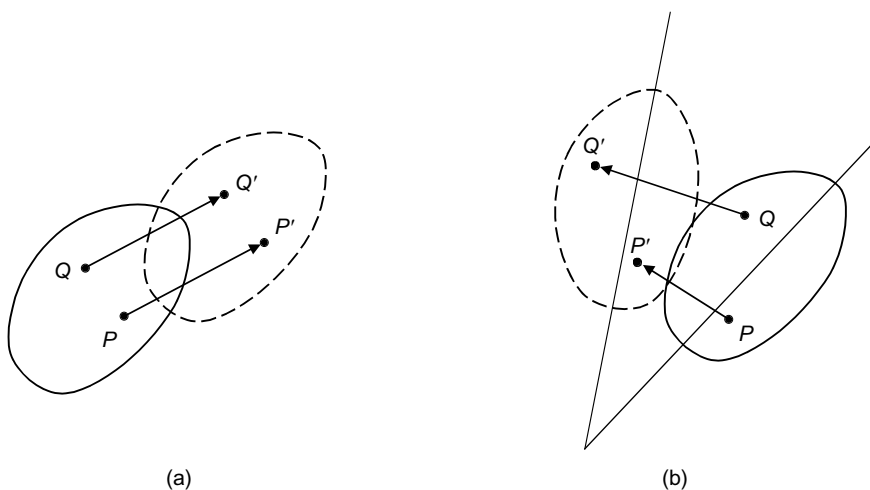
Azkenik, $\mathbf{n}(\cos\theta, \cos\psi, \cos\varphi)$ norabide orokor bat edukiko bagenu, Mohr-en zirkuluetan dagozkion (σ_{nn}, τ_{nt}) puntua topatzeko, lehen marraztu ditugun bi arkuen arteko ebakipuntua kalkulatu genuke. P puntu hori lortzeko, nahikoa da bi kosinu zuzentzaile bakarrik erabiltzea, hirugarrena aurreko bien funtzioa izango baita.

Mohr-en diagramekin bukatzeko, egin ditzagun osagai intrintsekoen balio maximo eta minimoei buruzko zenbait zehaztasun. Izan ere, adierazpen grafiko horren berezitasunak azaldu ondoren, 2.8. atalean esandakoak argiago ulertuko ditugu. Preseski, 2.17. irudian ikusten den bezala, aztertu nahi den \mathbf{n} norabidea plano nagusi batean badago, hau da, kosinu zuzentzaileetakoren bat nulua bada, norabide horren adierazlea den puntua Mohr-en zirkuluen gainean eroriko da. Adibidez, 1-2 planoan kokatutako norabideek hirugarren osagaia nulua dute ($n_3 = 0$), eta dagozkien (σ_{nn}, τ_{nt}) puntuak diametroaren muturretan σ_1 eta σ_2 dituen zirkuluan egongo dira. Beraz, norabide horietan topatu ahal izango dugun osagai normal handiena σ_1 izango da, eta txikiena, σ_2 . Beste bi plano nagusiak hartuta, ondorio berberera iritsiko ginateke. Beraz, tentsio nagusiak osagai normalaren maximo eta minimoak dira plano nagusietan dauden norabideentzat, binaka hartzen ditugunean. Antzera gertatzen da tentsio ebakitzaileen muturreko balioekin. Alegia, (2-75) ekuazioan idatzi genituen hiru balioek, plano nagusietan kokatuta dauden norabideetan ager daitezkeen ebakitzaile handienak adierazten dituzte, hots, Mohr-en zirkulu bakoitzean dauden ordenatu handienak.

3. Deformazioaren teoria orokorra

3.1. SARRERA

Bigarren kapituluaren indarrekin eta gorputzen orekarekin erlazionaturiko kontzeptuak aztertu genituen. Kapitulu honetan ingurune jarraituek jasaten dituzten desplazamendu eta deformazioei buruz jardungo dugu. Guztiontzat ezaguna den bezala, gorputz batean indar batzuek eragiten dutenean, gorputzeko puntuak higitu egiten dira eta posizioz aldatzen dira. Solidoa zurruna denean, gorputzak translazioak eta biraketak soilik eduki ditzake; ondorioz, nahiz eta puntuak higitu, ez dago deformaziorik, puntuen arteko posizio erlatiboa ez baita aldatzen. Adibide gisa, 3.1. irudian solido zurrun baten translazioa eta biraketa marraztu ditugu. Bi kasu horietan, P eta Q puntuen arteko distantzia konstante mantendu da. Gorputza deformagarria denean, ostera, puntuen arteko posizio erlatiboa aldatu egin daiteke, deformazio bat agertzen baita. Beraz, desplazamenduak kalkulatu ahal izateko, solido deformagarrien kasuan deformazio kontzeptua ulertu eta analizatu behar da. Magnitude hori neurtu ondoren, kanpoko kargen eraginpean gorputzak hartuko duen geometria berria ezagut daiteke.



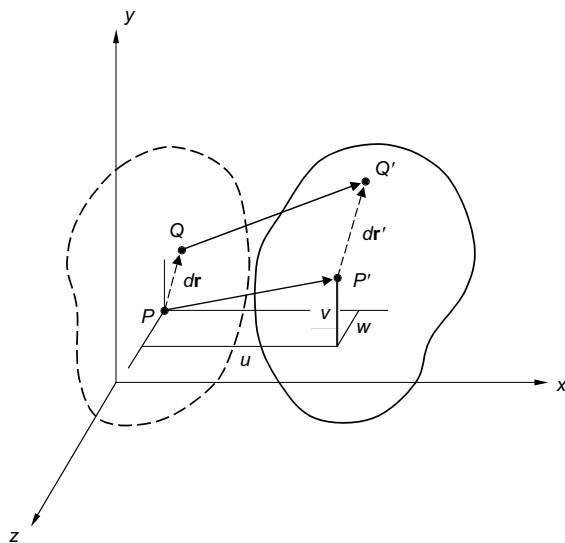
3.1. irudia.

Gai honetan zehar ikusiko den bezala, deformazioak neurtzeko izarigabeko magnitudeak erabiliko ditugu, alegia, *magnitude adimentsionalak*. Magnitude horiek definitu ahal izateko, bi puntu lotzen dituen elementu lineal batean oinarrituko gara. Elementu lineal

horren luzera-aldaketa eta angelu-aldaketa aztertuz gorputzaren deformazioa neurtzea lortuko dugu. Hasieran egingo dugun garapena orokorra izango da eta deformazio handi nahiz txikiengat balioko du. Dena den, sarrerako kapituluari adierazi genuen bezala, hemen interesatzen zaizkigunak deformazio txikiak dira. Beraz, hurrengo pausoa lortutako espresioak deformazio txikien kasuan nola sinplifikatzen diren ikustea izango da. Ondoren, puntu bateko deformazio-egoera definitzen duen matrizea aurkeztuko dugu, eta tentsioen matrizearekin duen antzekotasuna agertuko. *Bolumen-aldaketa unitarioa* definitu eta nola kalkulatu daitekeen ikusi ondoren, deformazio-matrizearen osagaiak bete behar dituzten baldintzak ondorioztatuko ditugu, *bateragarritasun-ekuazioak* deritzenak.

3.2. DEFORMAZIO UNITARIOAK

Deformazioen analisiarekin hasteko, suposa dezagun hasieran deformatu gabe dagoen ingurune jarraitu bat. Gorputzaren pausaguneko egoera horri *egoera neutroa* deituko diogu, eta puntu desberdinen posizioa zehazteko erreferentzia-sistema kartesiar bat erabiliko dugu. Izan bedi P puntua, bere hasierako koordenatuak (x, y, z) izanik, 3.2. irudian adierazten den bezala, eta P -tik distantzia infinitesimal batera kokatutako Q puntua. Puntu horren koordenatuak, P -tik oso gertu dagoenez, $(x + dx, y + dy, z + dz)$ izango dira. Bi puntu horiek egoera neutroan lotzen dituen bektoreari $d\mathbf{r}$ deituko diogu. Gorputza deformatu eta oreka berreskuratu ondoren, bi puntu horien posizioa hasierakoaren desberdina izango da. P puntuaren posizio berriari P' deituko diogu, eta Q puntuarenari Q' .



3.2. irudia.

Koordenatuen balio berriak (x', y', z') eta $(x' + dx', y' + dy', z' + dz')$ izango dira, hurrenez hurren, eta P' eta Q' puntuak lotzen dituen bektorea $d\mathbf{r}'$. Egoera neutroko P eta Q puntuen koordenatuak osagaiz osagai kenduko bagenitu, $d\mathbf{r}$ bektorearen osagaiak lortuko genituzke, hau da, (dx, dy, dz) . Bestetik, P' eta Q' puntuen koordenatuekin gauza bera egingez, $d\mathbf{r}'$ bektorearenak —hots, (dx', dy', dz') — direla ikusiko genuke. Koordenatu horiek guztiak 3.1. taulan jaso dira.

Hasierako egoera	Egoera deformatua
$P(x, y, z)$	$P'(x', y', z')$
$Q(x+dx, y+dy, z+dz)$	$Q'(x'+dx', y'+dy', z'+dz')$
$d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$	$d\mathbf{r}'(dx', dy', dz')$

3.1. taula.

\vec{PP}' eta \vec{QQ}' bektoreei *desplazamendu-bektoreak* deritze, eta horien koordenatuak kalkulatzeko nahikoa da bukaerako koordenatuei hasierakoak kentzea. Puntuak x, y eta z norabideetan dauzkaten desplazamenduei u, v eta w deituko diegu, hurrenez hurren. Adibidez, P puntuaren desplazamendu-bektorea hauex da:

$$\vec{PP}'(u, v, w) \begin{cases} u = x' - x \\ v = y' - y \\ w = z' - z \end{cases} \quad (3-1)$$

Oro har, puntuak desplazamendu desberdinak edukiko dituzte. Beraz, desplazamendu-bektorearen hiru osagaiak gehienetan puntuko funtzioak izango dira, eta x, y eta z koordenatuen funtzioan adieraziko dira. Funtzio horiek jarraituak direla onartuko dugu aztertzen ari garen ingurune jarraitu osoan zehar. Bestalde, puntu baten inguruan dagoen deformazio-egoera aztertzeko, $d\mathbf{r}$ bektoreak jasaten duen aldaketa kalkulatu dugu. Izan ere, lehen esan dugun bezala, deformazioaren izaera ulertzeko, puntuen arteko posizio erlatiboaren aldaketa analizatu behar da. Helburu horrekin, bata bestetik oso gertu dauden P eta Q puntuak aukeratuko ditugu, eta bien artean dagoen distantzia nola aldatzen den ikusiko dugu. Aldaketa hori deskribatzeko era egokia $d\mathbf{r}$ eta $d\mathbf{r}'$ bektoreen moduluen karratuak hartu eta horien arteko kenketa kalkulatzeko da, hots:

$$dr^2 - dr'^2. \quad (3-2)$$

Gorputza solido zurrun gisa higitzen denean, P eta Q puntuen arteko distantzia erlatiboa ez da aldatzen; ondorioz, $d\mathbf{r}$ eta $d\mathbf{r}'$ bektoreak berdinak dira. Kasu horretan, (3-2) espresioak balio nulua izango luke, deformaziorik ez dela egon adieraziz. Bestalde, bi puntuak lotzen dituen elementu linealaren luzera edo norabide erlatiboa aldatuko balitz, goiko espresioa ez litzateke nulua izango, deformazio bat gertatu dela erakutsiz. Goiko bektoreen moduluen karratuak, 3.1. taulan oinarrituz, hauexek izango lirateke:

$$\begin{aligned} dr^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ dr'^2 &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \end{aligned} \quad (3-3)$$

Bestetik, (3-1) ekuazioetatik x', y' eta z' askatuz eta (3-3) espresioetan ordeztuz:

$$dr'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dudx + 2dvdy + dwdz + du^2 + dv^2 + dw^2. \quad (3-4)$$

Beraz, moduluen karratuen arteko kendura honelaxe geratuko litzateke:

$$dr'^2 - dr^2 = 2(dudx + dvdy + dwdz) + du^2 + dv^2 + dw^2. \quad (3-5)$$

Bestalde, u , v eta w funtzioak x , y eta z koordenatuetan jarraituak direla suposatu dugunez, honelaxe idatz ditzakegu diferentzialak:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = u_x dx + u_y dy + u_z dz, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = v_x dx + v_y dy + v_z dz, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz = w_x dx + w_y dy + w_z dz. \end{aligned} \quad (3-6)$$

non, idazkera erraztearren, desplazamenduen deribatu partzialei u_i , v_i eta w_i ($i = x, y, z$) deitu diegun.

Hain zuzen, (3-6) espresioako osagaiak matrize batean bil daitezke, (3-7) ekuazioan agertzen den bezala. Matrize horri *desplazamendu-gradienteen matrizea* deritzo.

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}. \quad (3-7)$$

Azkenik, (3-6) berdintzak lortu berri dugun (3-5) ekuazioan ordeztuz:

$$\begin{aligned} dr'^2 - dr^2 &= 2 \left[u_x + \frac{1}{2} (u_x^2 + v_x^2 + w_x^2) \right] dx^2 + \\ &+ 2 \left[v_y + \frac{1}{2} (u_y^2 + v_y^2 + w_y^2) \right] dy^2 + \\ &+ 2 \left[w_z + \frac{1}{2} (u_z^2 + v_z^2 + w_z^2) \right] dz^2 + \\ &+ 2(u_y + v_x + u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y) dx dy + \\ &+ 2(u_z + w_x + u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z) dx dz + \\ &+ 2(v_z + w_y + u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z) dy dz. \end{aligned} \quad (3-8)$$

Dena den, (3-8) berdintza honelaxe idatz daiteke laburki:

$$dr'^2 - dr^2 = 2\varepsilon_{xx} dx^2 + \varepsilon_{yy} dy^2 + 2\varepsilon_{zz} dz^2 + 4\varepsilon_{xy} dx dy + 4\varepsilon_{xz} dx dz + 4\varepsilon_{yz} dy dz, \quad (3-9)$$

non

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_x + \frac{1}{2} (u_x^2 + v_x^2 + w_x^2), \\ \varepsilon_{yy} &= v_y + \frac{1}{2} (u_y^2 + v_y^2 + w_y^2), \\ \varepsilon_{zz} &= w_z + \frac{1}{2} (u_z^2 + v_z^2 + w_z^2), \end{aligned} \quad (3-10)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(u_y + v_x + u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y \right), \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(u_z + w_x + u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z \right), \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(v_z + w_y + u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z \right).
\end{aligned} \tag{3-11}$$

Preseski, (3-10) eta (3-11) espresioak desplazamendu-deformazioen erlazioak dira. Bertan agertzen diren dimentsio gabeko magnitudeei *deformazio unitarioak* deritze eta erabat definitzen dute puntu bateko tentsio-egoera. Lehenengo hirurak *luzetarako deformazio unitarioak* dira, eta azken hirurak *deformazio unitario angeluarrak*. Erraz frogatu daitezkeen bezala, deformazio angeluarrak simetrikoak dira, hau da:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \tag{3-12}$$

Beraz, puntu bateko deformazio-egoera definitzeko, sei balio ezagutu behar dira, tentsio-egoerarekin gertatzen zen bezalaxe. Esan genuen bezala, sei deformazio unitario horiek, puntu baten inguruan edozein norabidetan zuzendutako elementu lineal baten aldaketa neurtzeko balio dute. Datu horrek aukeratutako puntuko deformazio-egoera zehazteko balioko digu, jarraian ikusiko dugun bezala.

Hurrengo atalera pasatu baino lehen, aipa dezagun lortutako erlazio horiek orokorrak direla; hau da, deformazio handi nahiz txikiengatik erabil daitezke. Dena den, teoria honen aplikazioko kasu gehienetan deformazioak txikiak izaten direnez, ikus dezagun orain zein den deformazio unitarioen esanahia deformazio txikien kasuan.

3.3. **DEFORMAZIO TXIKIEN TEORIA.** **DEFORMAZIO UNITARIOEN ESANAHI FISIKOA**

Ingeniaritzako kasu praktiko askotan, egituretako puntuek jasaten dituzten desplazamenduak txikiak izaten dira gorputzaren neurriekin konparatzen direnean. Beraz, deformazioak gehienetan txikiak izaten direnez, (3-10) eta (3-11) espresioetan bigarren mailako infinitesimoak arbuia egin daitezke, eta horrela espresio laburrago hauek lortzen dira:

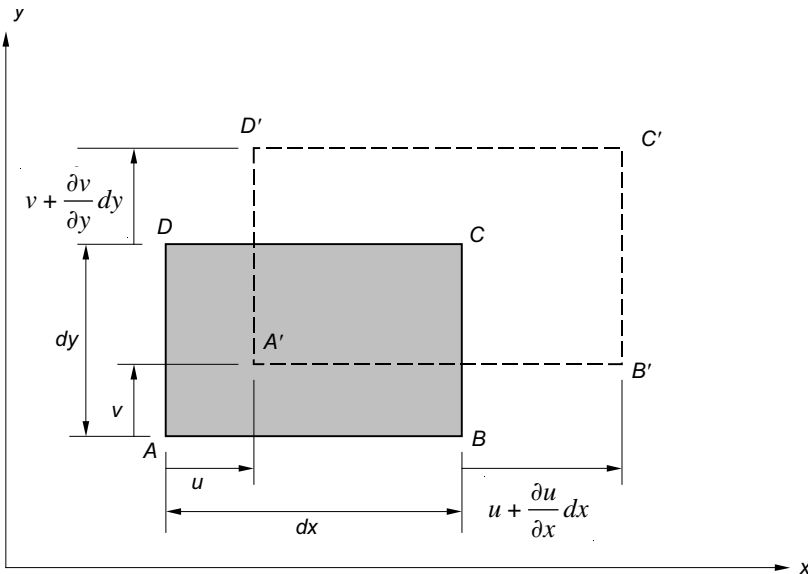
$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= v_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} &= w_z = \frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3-13}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_y + v_x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(u_z + w_x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xz}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(v_z + w_y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{yz}.\end{aligned}\quad (3-14)$$

non deformazio angeluarren bikoitzari γ deitu diogun, hau da, $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. Deformazio angeluarrak maizago idazten dira γ -ren funtzioan ε -en funtzioan baino, lehenengoak esanahi fisiko argiagoa duelako, segituan ikusiko dugun bezala. Nabaria den bezala, deformazio unitarioen espresioak linealak dira termino koadratikoak arbuiatu eta gero. Dena den, ez da ahaztu behar (3-13) eta (3-14) ekuazioak deformazioak txikiak diren kasuetarako baino ez direla baliozkoak.

Ikus dezagun orain zein den lortutako deformazio unitario horien guztien esanahi fisikoa. Has gaitzen lehenengo luzetarako deformazio unitarioekin, hau da, (3-13) ekuazioetan agertzen direnekin. Alboko 3.3. irudian, xy planoan kokatutako paralelepipedo infinitesimal bat ageri da. Suposa dezagun paralelepipedo horren aldean luzerak aldatu egiten direla deformazioaren ondorioz, eta saia gaitzen, adibidez, x ardatzarekiko paraleloa den AB aldearen luzera-aldaketa unitarioa kalkulatzeko:

$$\frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx}.\quad (3-15)$$



3.3. irudia.

Beraz, ϵ_{xx} deformazio unitarioak hasieran x ardatzarekiko paraleloa den elementu lineal baten luzera-aldaketa unitarioa (edo erlatiboa) ematen digu, hots, horizontala den lerro baten luzapena beraren hasierako luzera unitatea balitz. Beste bi norabideetan gauza bera egingo bagenu, ondorio berberera iritsiko ginatke ϵ_{yy} eta ϵ_{zz} osagaien zat. Luzetarako deformazio unitario horiek, *deformazio unitario normal* izenarekin ere ezagutzen dira. Positiboak direnean, luzapen bat adierazten dute, eta negatiboak direnean, berriz, laburpen bat.

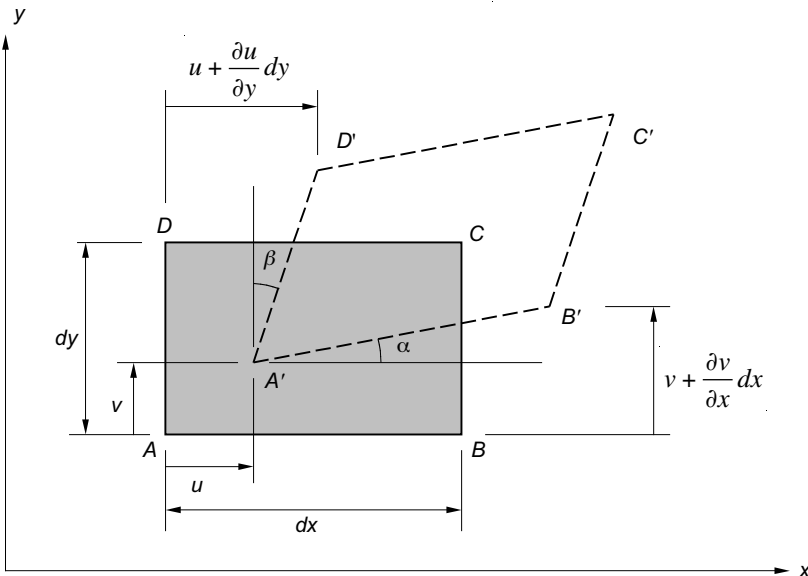
Luzetararako deformazio unitarioak ez dira aski, halere, paralelepipedoak jasaten dituen itxura-aldaketa guztiak adierazteko. Izan ere, luzera-aldaketez gain, angeluen aldaketak ere gerta daitezke deformazioaren ondorioz, deformazio unitario angeluarren bidez islatzen direnak. Deformazio unitario angeluarren esanahia ikusteko, 3.4. irudian oinarrituko gara. Kasu horretan, luzera-aldaketak egon ordez, angelu-aldaketak gertatu direla suposatuko dugu, hots, AB eta AD aldeek α eta β angeluak biratu dituztela, hurrenez hurren. Deformazioak txikiak direla kontuan hartuta eta bigarren mailako infinitesimoak arbuatuz, angelu horien balioak honelaxe kalkula daitezke:

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\beta \approx \tan\beta = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) - v}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y},$$
(3-16)

eta bi angeluak batuz gero:

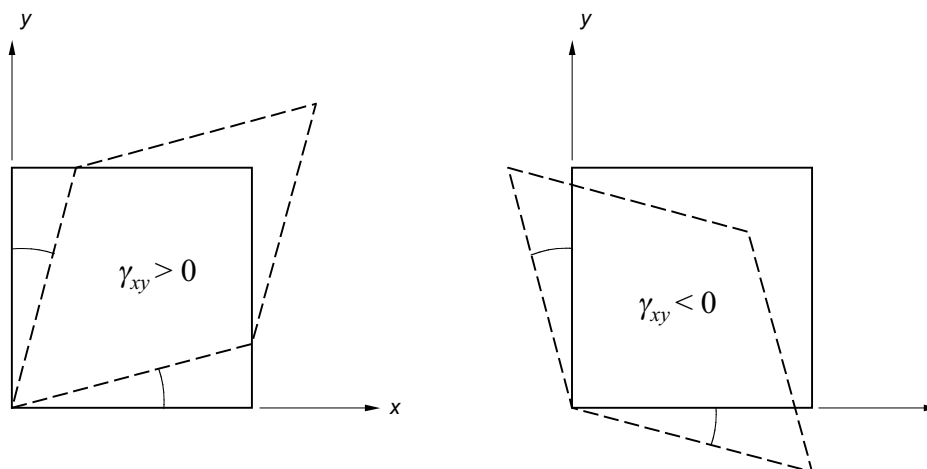
$$\alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}.$$
(3-17)



3.4. irudia.

Hortaz, γ_{xy} deformazioak —hots, ε_{xy} deformazio unitarioaren bikoitzak— xy planoan kokatutako angelu zuzen baten aldaketa adierazten du. Halaber, erraz froga daitekeen bezala, γ_{xz} eta γ_{yz} osagaiek xz eta yz planoetako angelu-aldaketak adierazten dituzte, hurrenez hurren. Ardatz positiboen arteko angelua txikiagotzen denean, deformazio angeluarra positiboa da, eta angelua handiagotzen denean, negatiboa (ikus 3.5. irudia).

Laburbilduz, ε_{xx} , ε_{yy} eta ε_{zz} osagaiek x , y eta z norabideetan zuzendutako lerroen luzera-aldaketak adierazten dituzte, eta ε_{xy} , ε_{xz} eta ε_{yz} osagaiek, xy , xz eta yz planoetako angelu zuzenen aldaketak, hurrenez hurren. Ondorioz, deformazio angeluarrak nuluak direnean, paralelepipedo baten aldeek elkarzutak izaten jarraituko dute deformatu eta gero, nahiz eta aldean luzerak aldatu. Alderantziz, deformazio angeluarrak soilik daudenean, paralelepipedoaren aldeek elkarzutak izateari utziko diote, baina luzerak aldatu gabe. Beste hitz batzuetan esanik, paralelepipedoaren tamainaren aldaketa osagai normalen ondorioz gertatzen da, eta osagai angeluarrak distortsioaren errudunak dira. Laster ikusiko dugun bezala, deformazio horiek guztiak ezagututa puntu bateko deformazio-egoera defini daiteke.



3.5. irudia.

3.4. DEFORMAZIO-MATRIZEA

Nabaria den bezala, deformazio-egoera definitzeko ezagutu behar diren magnitudeek antz handia dute aurreko gaian ikusi genituen tentsio-matrizeko osagaiekin. Orduan egin genuen bezala, sei deformazio unitarioak matrize batean kokatzen baditugu, *deformazio-matrizea* deitzen dena lortuko dugu:

$$\vec{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3-18)$$

Tentsio-egoerarekin gertatzen zen bezala, deformazio-egoera zehazteko, elkarrekiko perpendikularak diren hiru norabideri dagozkien deformazio unitarioak ezagutu behar dira. Deformazio-matrizea ezagutu ondoren, tentsio-matrizearekin egin genituen eragiketa berberak errepika ditzakegu.

Horrela, P puntuko deformazio-bektorea kalkula genezake \mathbf{n} norabidean zehar, Cauchy-ren formularen baliokidea den ondoko erlazioarekin:

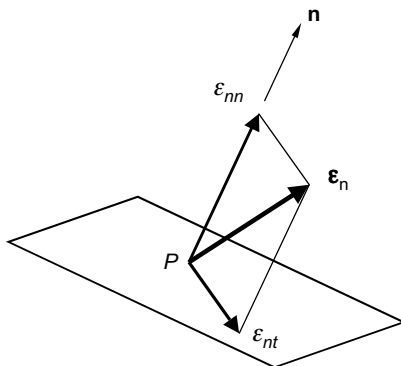
$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n}, \quad (3-19)$$

eta bere bi osagai intrintsekoak lortu:

$$\varepsilon_{nn} = \boldsymbol{\varepsilon}_n \cdot \mathbf{n}, \quad (3-20)$$

$$\varepsilon_{nt} = \sqrt{\varepsilon_n^2 - \varepsilon_{nn}^2}, \quad (3-21)$$

non ε_{nn} osagaia *luzetarako deformazio unitarioa* edo *deformazio unitario normala* den, eta ε_{nt} *deformazio unitario angeluarra*. Deformazio normalak \mathbf{n} -ren norabide bera du, eta deformazio angeluarra planoaren gainean dago kokatuta (ikus 3.6. irudia).



3.6. irudia.

Luzetarako deformazio unitarioak (ε_{nn}) P puntuan \mathbf{n} norabidean dagoen elementu lineal batek edukiko duen luzera-aldaketa erlatiboa adierazten du. Bestetik, deformazio unitario angeluarraren bikoitzak ($\gamma_{nt} = 2\varepsilon_{nt}$) \mathbf{n} norabideak eta ε_{nt} -k osatzen duten angelu zuzenaren aldaketa zenbat den agertzen du.

Deformazioen matrizea erreferentzia-sistema batetik bestera aldatzeko, 2.6. atalean lortutako erlazioa erabil dezakegu:

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{N}}^T, \quad (3-22)$$

\mathbf{N} delakoa erreferentzia-sistemen aldaketari dagokion matrizea izanik. Tentsioekin egin genuen bezala, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ deformazio-bektoreak osagai angeluarra nulua zein norabidetan duen kalkula dezakegu; hau da, *deformazio nagusiak* eta *deformazio-norabide nagusiak* lor daitezke. Horretarako, autobalio eta autobektoreen problema hau askatu behar dugu:

$$(\vec{\mathbf{D}} - \varepsilon \vec{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3-23)$$

Ondoko determinantea nulua izatera behartuz, hirugarren mailako polinomio bat lortuko dugu, eta erroak kalkulatu, ε_1 , ε_2 eta ε_3 deformazio nagusiak:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0. \quad (3-24)$$

Deformazio nagusiak puntuko luzetarako deformazio maximo eta minimoak dira, hots, muturreko balioak. Deformazio unitario angeluar maximoak deformazioaren norabide nagusiekiko 45°-tara egongo dira, ondoko balioekin:

$$\varepsilon_{12} = \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{2}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_3|}{2}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{|\varepsilon_2 - \varepsilon_3|}{2}. \quad (3-25)$$

Tentsio nagusiekin gertatzen zen bezala, deformazio nagusien balioak independenteak dira erreferentzia-sistemarekiko. Ondorioz, (3-24) ekuaziotik lortzen den polinomioaren koefizienteak konstanteak izan behar dira. Koefiziente horiei *deformazioko aldaezinak* deituko diegu:

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0 \quad (3-26)$$

Hain zuzen, (3-27) espresioetan jasotzen den bezala, aldaezinek aurreko gaian lortutakoan itxura berbera dute, baina tentsioaren osagaiak agertu ordez, deformazioaren osagaiak agertzen dira hauetan:

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ J_2 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3, \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (3-27)$$

Deformazio txikien kasuan J_1 aldaezinak esanahi geometriko garrantzitsua dauka, segituan frogatuko dugun bezala. Demagun puntu baten inguruan paralelepipedo infinitesimal bat, bere aldeak deformazio-norabide nagusiekiko paraleloak izanik. Hasierako egoeran alde horien luzerak dx , dy eta dz direla suposatuko dugu. Norabide nagusietan luzetarako deformazioak soilik egotean, paralelepipedoaren aldeek elkarzutak izaten jarraituko dute deformatu eta gero. Deformazio unitario normalen definizioaren arabera, aldeen luzera berriak $dx(1 + \varepsilon_1)$, $dy(1 + \varepsilon_2)$ eta $dz(1 + \varepsilon_3)$ izango dira. Beraz, puntu horretako bolumen-aldaketa unitarioa (e), goi-mailako infinitesimoak arbuatuz, hauxe izango litzateke:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{dx(1 + \varepsilon_1) \cdot dy(1 + \varepsilon_2) \cdot dz(1 + \varepsilon_3) - dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = J_1. \quad (3-28)$$

Ikusten den bezala, bolumen-aldaketa unitarioa J_1 aldaezinaren berdina da. Gainera, aldaezina denez, ez dago deformazio-egoera adierazteko erabiltzen den erreferentzia-sistemaren menpe, eta edozein deformazio-matrizeren azterna topatuz kalkula daiteke.

Ez da harritzekoa (3-28) espresioan luzetarako deformazioak soilik agertzea, zeren deformazio angeluarrek paralelepipedoaren angeluen distorsioa sortzen baitute, baina bolumen-aldaketarik gabe.

Tentsioentzat egin genuen bezala, batez besteko deformazioa honelaxe defini dezakegu:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, \quad (3-29)$$

eta deformazio-matrizea, matrize esferikoaren eta desbiderapen-matrizearen batura modura idatz dezakegu:

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{D}}_e + \vec{\mathbf{D}}_d, \quad (3-30)$$

non $\vec{\mathbf{D}}_e$ matrize esferikoa honako hau den:

$$\vec{\mathbf{D}}_e = \varepsilon_b \vec{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_b & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_b & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_b \end{bmatrix}, \quad (3-31)$$

eta non $\vec{\mathbf{D}}_d$ desbiderapen-matrizea, beste bien arteko kenketa eginuz lor daitekeen:

$$\vec{\mathbf{D}}_d = \vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{D}}_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_b & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_b & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_b \end{bmatrix}. \quad (3-32)$$

Osagai angeluarrak nuluak direnez, deformazio-matrize esferikoak bolumen-aldaketa sortzen du soilik. Desbiderapen-matrizeak, berriz, gorputzaren itxura-aldaketa hartzen du soilik kontuan, bolumen-aldaketarik sortu gabe, matrize honen aztarna nulua baita.

Azkenik, esan dezagun puntu bateko deformazio-egoera Mohr-en zirkuluen bidez adieraz daitekeela, abzisetan luzetarako deformazioak marraztuz, eta ordenatuetan deformazio angeluarrak.

3.5. BIRAKETA-MATRIZEA

Desplazamenduen eta deformazio angeluarren artean dagoen erlazioa hobeto ulertzeko, atal honetan *biraketa-matrizea* definituko dugu. Hain justu, 3.3. irudian ikus daitekeen bezala, luzetarako deformazio unitarioen ondorioz, luzera-aldaketak gertatzen dira, baina ez dago angelu-aldaketarik. Deformazio angeluarren ondorioz, aldiz, paralelepipedoaren angelu zuzenak galdu egiten dira, eta aldeek biraketa bat jasaten dute (ikus 3.4. irudia). Askotan, biraketa horiek bi osagai edukitzen dituzte: alde batetik, deformazioaren ondorioz biratutako angelua, eta, beste alde batetik, solido zurrun gisa biratutakoa. Biraketa horren izaera agerian uzteko, (3-7) ekuazioiko desplazamendu-gradienteen matrizea hartuko dugu, eta bi matrizeren batura modura idatziko dugu, (3-33) ekuazioan ageri den bezala:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3-33)$$

Ikusten denez, lehenengo matrizea jadanik ezaguna zaigun $\bar{\mathbf{D}}$ deformazio-matrizea da. Bigarren matrizeari biraketa-matrizea deritzo eta honelaxe adieraziko dugu:

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix}; \quad (3-34)$$

beraz,

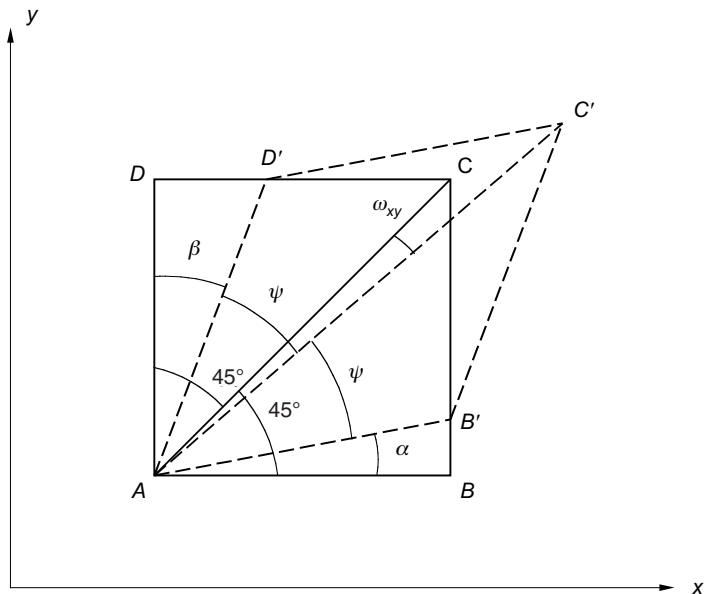
$$\begin{aligned} \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \omega_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \omega_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \omega_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \omega_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \omega_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3-35)$$

Deformazio-matrizea simetrikoa den arren, $\bar{\mathbf{B}}$ biraketa-matrizea antisimetrikoa da. Matrize horrek biraketa bat adierazten duela argiago ikusteko, berregin dezagun 3.4. irudiko adierazpena 3.7. irudian, eta azter dezagun angelu zuzenaren erdikariak jasaten duen ω_{xy} biraketa. Marrazkitik erraz ikus daiteke honako erlazio hauek betetzen direla:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \alpha + \psi + \omega_{xy}, \\ \frac{\pi}{4} &= \beta + \psi - \omega_{xy}, \end{aligned} \quad (3-36)$$

eta bi ekuazioen arteko kenketa eginez:

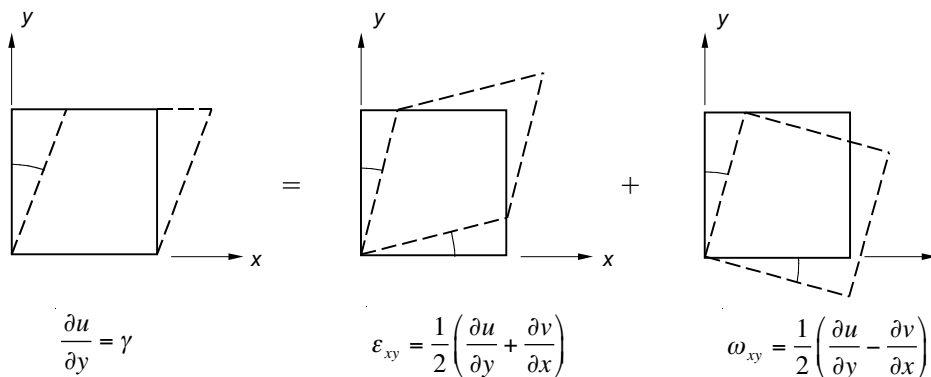
$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (3-37)$$



3.7. irudia.

Beraz, frogatuta gelditu den bezala, ω_{xy} gaiaren espresioak paralelepipedoaren solido zurrun erako biraketa bat adierazten du. Beste bi planoetan eragiketa berdinak egingo bagenu, eta lortutako balioak matrize batean bildu, (3-34)-ko $\vec{\mathbf{B}}$ biraketa-matrizea lortuko genuke.

Biraketaren analisi hori egin eta gero, deformazioari buruzko informazioa eta solido zurrun erako biraketa bereiz ditzakegu. Izan ere, deformazio angeluar berberarentzat desplazamendu-eremu desberdinak egon daitezke. Beste era batera esanda, distortsio berbera desplazamenduen konbinazio desberdinekin lor daiteke. Hain zuzen, 3.8. irudian konbinazio hori grafikoki adierazi da. Kasu horretan, lehenengo irudian daukagun deformazio angeluarrak γ balio du. Halere, $\partial u/\partial y$ gradientea (3-33)-ren arabera deskonposatzen badugu, desplazamendu horren atzean deformazio bat eta biraketa bat ezkutuzten direla ikus dezakegu. Bigarren irudian paralelepipedoak jasan duen deformazio angeluarra erakusten da, ϵ_{xy} -ren bidez adierazia, biraketarik gabe. Hirugarren irudian, berriz, biraketa bakarrik agertzen da, ω_{xy} osagaiaren bidez adierazia, deformazioa alde batera utzita. Bien baturak desplazamendu-gradientearen balioa emango luke. Bukatzeko, esan dezagun gradiente horiek ezagututa eta gorputzaren bolumen osoan integratuz desplazamendu-eremua lor daitekeela.



3.8. irudia.

3.6. BATERAGARRITASUN-EKUAZIOAK

Kanpoko indarren eraginaren ondorioz, gorputzak deformatu egiten dira, eta beren puntuen arteko posizio erlatiboa aldatu egiten da. Gai honetan ikusi dugun bezala, gorputz baten puntuetan sortzen den deformazio-egoera definitzeko, ϵ_{ij} deformazio unitarioak erabiltzen dira. Deformazio unitario horiek, lehenago aurreratu dugun bezala, puntuen x , y eta z koordinatuen funtzioak dira. Tentsio-matrizearen osagaiekin gertatzen zen bezala, deformazio unitarioek ere ezin dezakete edozein balio eduki gorputzeko puntuetan zehar; aitzitik, baldintza batzuk bete behar dituzte. Betebeharreko baldintza horiei deformazioen *bateragarritasun-ekuazioak* deituko diegu.

Era askotara froga daiteke baldintza horiek bete behar direla. Gainazaleko puntuak aztertuz, argi dago horietako batzuk ezingo dutela edozein deformazio eduki, mugako baldintzak bete beharko dituztelako. Egiturako berma-puntuetan, adibidez, desplazamenduen balioak finkatuta egongo dira, eta ezingo dute edozein balio eduki. Egiturako barneko puntuekin ere gauza bera gertatzen da. Hori ulertzeko, demagun gorputza kubo infinitesimal askotan zatituta daukagula. Kubo horietako bakoitzari deformazio-matrize bat dagokiola suposa dezakegu. Argi dago ingurunean zartadurarik ez agertzeko eta deformazioak jarraituak izan daitezen, kubo horiek ezin deforma daitezkeela edozein eratan. Hori horrela balitz, deformazioa eta gero kuboan aldeak ez lirakeke bata bestearen alboan ondo egokituko eta hutsuneak agertuko lirakeke. Ondorioz, argi dago ezen, deformazio-eremua jarraitua izateko, deformazio unitarioek erlazio batzuk bete beharko dituztela.

Hau guztia matematikoki ere froga daiteke, desplazamenduak eta deformazio unitarioak erlazionatzen dituzten (3-13) eta (3-14) ekuazioetan oinarrituz. Desplazamenduak ezagututa deformazioak kalkulatu nahiko bagenu, ez genuke inolako arazorik edukiko, zeren egin beharko genukeen gauza bakarra u , v eta w osagaiak deribatzea izango bailitzateke. Alderantziz, puntu bateko deformazio unitarioak ezagututa integrazioz desplazamendu-eremua kalkulatu nahiko bagenu, sei ekuazio edukiko genituzke, baina hiru ezezagun bakarrik. Erraz uler daiteke, beraz, deformazio unitarioen artean erlazioen bat egon behar dela. Erlazio hori lortzeko, nahikoa da aipatutako ekuazioetatik u , v eta w desplazamenduak desagerraraztea:

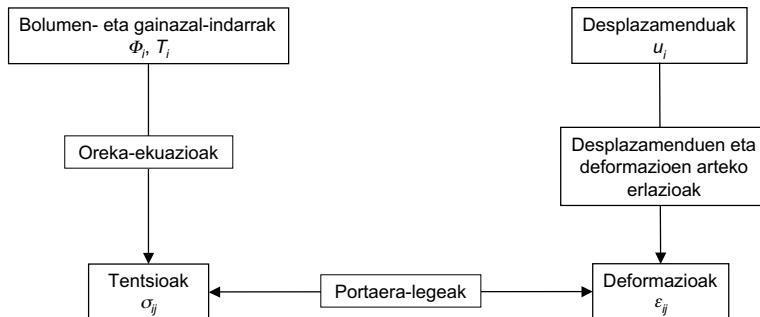
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right), \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right), \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{3-38}$$

Laburbilduz, tentsioaren osagaiek barneko eta gainazaleko oreka-ekuazioak bete behar dituzten bezala, deformazio unitarioek bateragarritasun-ekuazioak eta mugaldeko baldintza zinematikoak bete behar dituzte.

4. Solido elastikoen portaera-legeak

4.1. SARRERA

Aurreko bi kapituluetan puntu bateko tentsio-egoera eta deformazio-egoera deskribatu ditugu. Lehenengo kasuan parte hartzen duten magnitudeei zinetikoak deritze (tentsioak eta indarrak), eta ikusitako baldintza estatikoak bete behar dituzte. Deformazio-egoera aztertzeko orduan, aldiz, magnitude zinematikoekin egiten da lan, hots, deformazio unitarioekin eta desplazamenduekin. Tentsio-osagaiekin gertatzen den bezala, horiek ere baldintza zinematiko batzuk bete behar dituzte barneko eta gainazaleko puntuetan. Halere, magnitude eta ekuazio horiek guztiak egoera bakoitza bere aldetik hartuta garatu ditugu. Gai honetan, tentsio-egoeraren eta deformazio-egoeraren artean dauden erlazioak bilatuko ditugu. Tentsioen eta deformazioen arteko erlazio horiei, *portaera-legeak* edo *ekuazio konstitutiboak* deritze. Hori guztia 4.1. irudian laburtzen da, non gorputz deformagarrien kalkuluan parte hartzen duten magnitude eta ekuazio garrantzitsuenak agertzen baitira.



4.1. irudia.

Portaera-legeak indarren eta deformazioen arteko erlazioa matematikoki deskribatzen duten ekuazioak dira. Erraz uler daiteke portaera-lege horiek egituraren materialarekin zerikusia edukiko dutela. Izan ere, indarren eta desplazamenduen artean dagoen kausa-efektu erlazioa gorputzaren materialaren araberakoa izango da, ez baita gauza bera altzairuzko objektu bat edo plastikozko objektu bat deformatzea, denok dakigun bezala. Orain arte agertu diren ekuazioetan ez da materialari buruzko inolako aipamenik egin; beraz, materialen portaera deskribatzen duten propietateak gai honetan lortuko ditugun ekuazioetan agertuko dira. Dena den, kontuan hartu behar da ekuazio horiek benetako fenomeno fisikoaren hurbilketa bat baino ez direla, materialen portaera zehaztasun osoz adieraztea oso zaila baita.

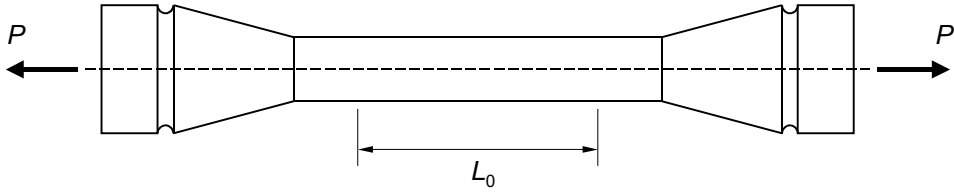
Ekuazio horien beharra ikuspuntu matematikoa erabiliz ere uler daiteke. Kanpoko indar batzuen eraginpean dagoen gorputz baten portaera auresateko, puntu bakoitzean, tentsio-matrizearen sei osagaiak, deformazio-matrizearen beste seiak, eta desplazamendubektorearen hiru osagaiak ezagutu behar ditugu; hamabost ezezagun beraz. Ezezagun horiek askatzeko erabil ditzakegun ekuazioei so egiten badiegu, orain arte, barne-orekako hiru ekuazio eta desplazamenduen eta deformazio unitarioen arteko sei erlazio dauzkagu. Beraz, oraindik sei ekuazio falta zaizkigu problema askatu ahal izateko. Materialaren portaera-legeak dira, hain zuzen, topatu beharreko sei ekuazio horiek.

Tentsioen eta deformazioen arteko erlazioa lortzeko, bi ikuspegi desberdin erabil daitezke. Alde batetik, deformazioaren izaera energetikoa har daiteke abiapuntu modura. Horrela, edozein materialentzat balio duen erlazio orokor bat lortuko dugu. Portaera-legeak lortzeko beste era bat material-puska batekin egindako saiakuntzan oinarritzea da (trakzio-saiakuntza). Ondoren, saiakuntza horretatik lortutako emaitzak orokortu egin daitezke egoera konplexuagoetan aplikatu ahal izateko. Gai honetan bi ikuspuntuak jorratuko ditugu, bietatik ondorio interesgarriak lor daitezkeelako. Lehenik eta behin, trakzio-saiakuntzaren nondik norakoak azalduko ditugu, esperimentu horretatik lortzen den informazioa zein den agertuz. Ondoren, deformazio-energia deritzon funtzioan oinarrituz, portaera-legeak lortuko ditugu eta material elastiko isotropoen kasuan nolakoak diren ikusiko dugu. Gaia bukatzeko, material horien portaera definitzen duten koefiziente elastikoak deskribatuko dira.

4.2. TRAKZIO-SAIKUNTZA

Esan dugun bezala, portaera-legeak lortzeko era bat bide esperimental jarraitzea da. Materialen propietate mekanikoak ezagutzeko saiakuntzarik garrantzitsuena *trakzio-saiakuntza* da, zeren, prestatzeko eta burutzeko erraza izateaz gain, lortzen diren emaitzak fidagarriak baitira. Beranduago ikusiko dugun bezala, saiakuntza horretatik lortzen den ondorioetako bat hauxe da: tentsioen eta deformazioen arteko erlazioa lineala da, tentsioaren balioak muga bat gainditzen ez duen bitartean. Indarren eta desplazamenduen arteko proportzionaltasuna Robert Hooke-k eman zuen aditzera lehen aldiz, erlojuen malgukiekin egindako saiakuntzetan oinarriturik. Malgukientzat lortu zituen ondorioak beste material askorentzat ere aplika daitezke, orain azalduko dugun bezala.

Trakzio-saiakuntzaren azalpena egiteko, adibide gisa, altzairu gozoa erabiliko dugu, ingeniarietan aplikazio ugari dituena. Saiakuntza honetan, trakziozko indar bat aplikatzen zaio normalizatutako probeta bati (ikus 4.2. irudia). Indar honen balioa handituz doa probeta apurtzen den arte. Trakzioa aplikatzen hasi baino lehen, probetaren erdialdean L_0 distantziara kokaturiko bi arrasto egiten dira, irudian adierazten den bezala, estentsometro baten laguntzaz luzera-aldaketak neurtu ahal izateko.



4.2. irudia.

Trakziozko indarra P bada eta zeharkako sekzioan uniformeki aplikatuta dagoela suposatzen badugu, edozein puntutan edukiko dugun tentsioaren modulua hauxe izango da:

$$\sigma = \frac{P}{A_0}, \quad (4-1)$$

non A_0 delako probetaren sekzioaren hasierako azalera den.

Tentsio horri *tentsio izendatua* deritzo. Dena den, kontuan hartu behar da ezen, probeta luzatuz doan heinean, zeharkako sekzioa txikituz doala. Beraz, benetako tentsioa kalkulatu nahiko bagenu, aldiuneko azalerarekin zatitu beharko genuke. Halere, deformazio txikien kasuan, bien arteko aldea txikia izaten da.

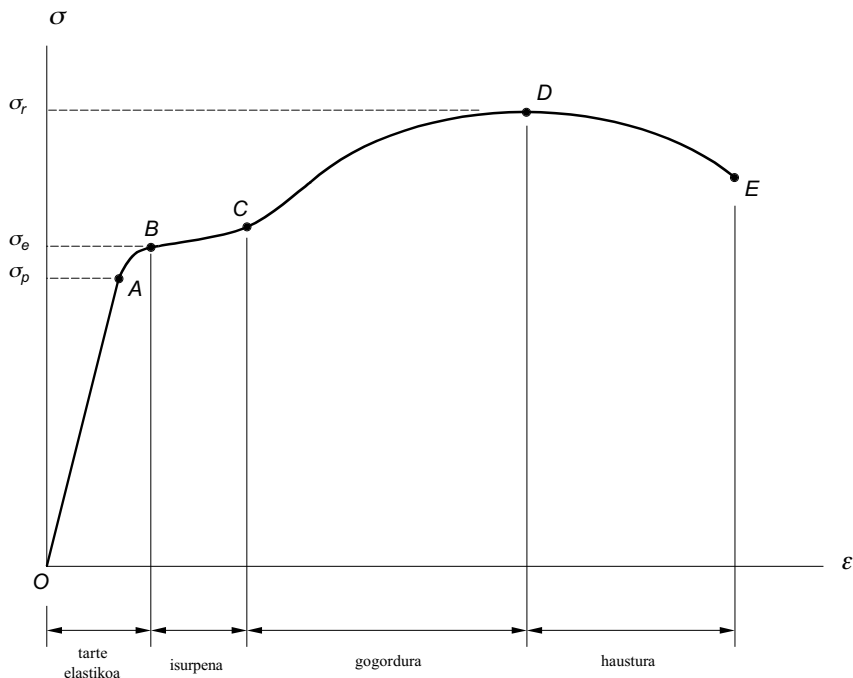
Trakziozko indarraren ondorioz, probeta luzatu egingo da. Luzera-aldaketa hori neurtzeko ondoko espresioa erabiliko dugu:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}, \quad (4-2)$$

non ΔL delakoa probetaren luzera-aldaketa totala baita. Honelatan, bada, (4-2) ekuazioko deformazioari *deformazio izendatua* deritzo, eta benetako deformazioaren batez besteko balio bat da. Izan ere, *deformazio erreala* kalkulatzeko, aldaketa infinitesimalak hartu beharko genituzke eta integratu:

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L d\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0}. \quad (4-3)$$

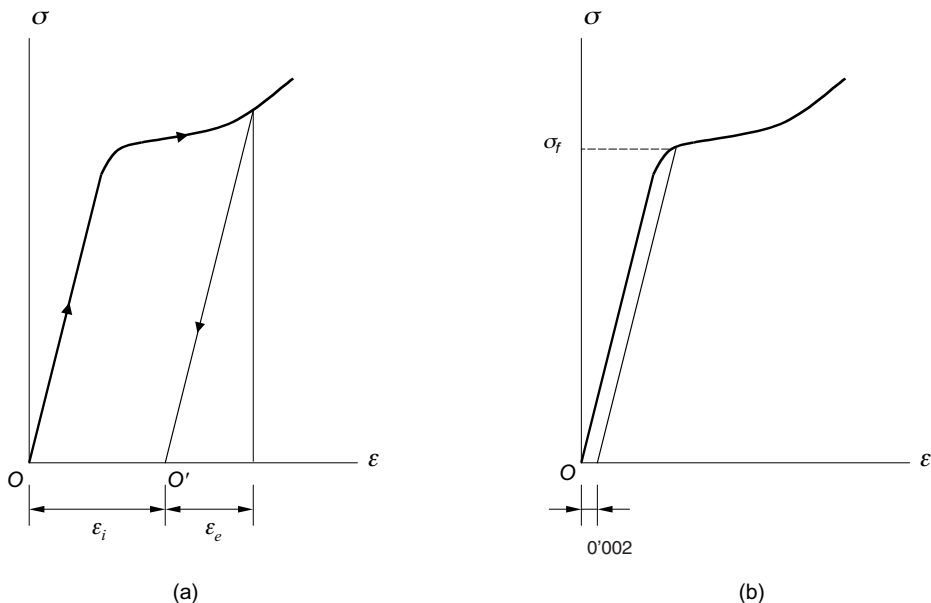
Hala eta guztiz, (4-1) eta (4-2) espresioetako erlazioak onargarriak direla esan daiteke, deformazio txikien kasuan ez dagoelako alde handirik magnitude errealean eta izendatuen artean. Trakziozko indarra handitu ahala era horretan kalkulaturako balioak grafikoki adieraziko bagenu, deformazioak abzisetan marraztuz eta tentsioak ordenatuetan, 4.3. irudiko *tentsio/deformazio* motako diagrama lortuko genuke. Irudi horretan agertzen den diagrama material harikorrean diagrama tipikoa da. Material hauskorrei dagokien diagramari buruz beranduago jardungo dugu. Oraingoz, azal ditzagun beheko diagraman agertzen diren parte desberdinen esanahiak, *OABCDE* kurbako puntuak aztertuz.



4.3. irudia.

Hasteko, 4.3. irudiko kurbaren lehenengo partean (OA), tentsioen eta deformazioen arteko erlazioa lineala da; beraz, bi magnitude horiek elkarren proportzionalak dira. Hain zuzen, A puntuari dagokion tentsioari *proportzionaltasun-muga* deritzo (σ_p). Gainera, tarte horretan materialaren portaera elastikoa da, hau da, indarra aplikatzeari utziko bagenio, jatorrirra itzuliko ginateke eta gorputzak hasierako forma eta neurriak berreskuratuko lituzke. Hortik aurrera, A puntua gainditu ondoren, AB tartean materialaren portaerak elastikoa izaten jarraitzen du, baina proportzionaltasuna galdu egiten da, tarte honetan ez baitauekagu lerro zuzen bat, aurreko kasuan bezala. Tarte elastikoaren bukaera definitzen duen B puntuaren tentsioari *elastikotasun-muga* deritzo (σ_e). Nolanahi den, normalean AB tarte oso laburra izaten da, eta ez da erraza izaten noiz hasten eta noiz bukatzen den bereiztea.

Elastikotasun-muga gainditu ondoren, deformazio nabarmenak agertzen dira, aplikatutako indarra gutxi handitu arren. Materialaren portaera horri *isurpena* edo *fluentzia* deritzo. Tarte horretan probetaren ardatzarekin 45° osatzen dituzten lerro batzuk ikus daitezke gainazalean, *Lüders-en lerro* izenez ezagutzen direnak. Lerro horiek molekula-sare kristalinoen labaintetaren ondorioz agertzen dira. Gero, B puntua igaro ondoren, materialak bere portaera elastikoa galtzen du, eta aplikatutako indarra desagertu arren, ez da hasierako itxura berreskuratuzeko gai. Portaera berri honi *portaera plastikoa* deritzo, eta deformazio iraunkorrak sortzen ditu. Hain zuzen, 4.4.a. irudian adierazten den bezala, diagramaren parte horretan sartu ondoren probetari karga kenduko bagenio, deskarga-prozesua OArekiko lerro paralelo batean zehar gertatuko litzateke. Orduan, lortutako deformazioaren zati bat berreskuratuko litzateke soilik, ϵ_e , eta gainerakoa gorputzean geldituko litzateke deformazio iraunkor modura, ϵ_p .



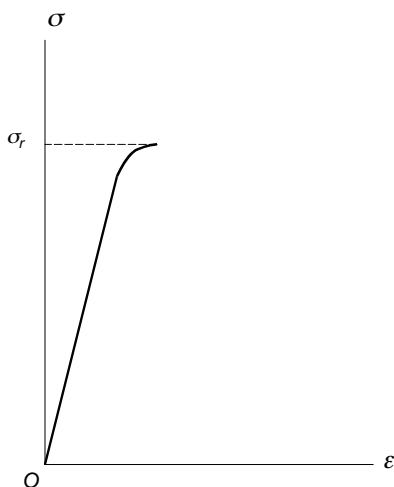
4.4. irudia.

Isurpen-eremua noiz hasten den zehaztea ez da lan erraza izaten, zeren, lehenago aipatu dugun bezala, A eta B puntuak —hots, proportzionaltasun-muga eta elastikotasun-muga— bata bestetik oso gertu egoten baitira. Ondorioz, balio horiek esperimentalki zehaztasunez neurtzea zaila izaten da. Hori dela-eta, ohitura dago deformazio iraunkorraren balioa % 0,2 baino handiago denean isurpena hasi dela onartzeko (ikus 4.4.b. irudia). Deformazio horri dagokion tentsioari *isurpen-tentsioa* edo *isurpen-muga* deritzo (σ_f), eta materialaren portaera plastikoa noiz hasten den definitzen du.

Isurpen-eremua gainditu ondoren C puntura iristen garenean, deformazioak handitzen jarrai dezan beharrezkoa da tentsioaren balioa ere handitzea, diagramaren kurbak gora egiten baitu berriro. Erresistentziaren igoera hori materialaren barne-egituraren berrantolaketa-ondorioa da, eta deformaziozko *gogordura* bat gertatu dela esaten da. Tarte horretan diagrama ez da lineala, eta aurreko zatian gertatzen zen bezala, materialaren portaera plastikoa da. Beraz, CD tartean probeta askatuz gero, ez gara O jatorririra iritsiko, O' puntura baizik (ikus 4.4.a. irudia). O' puntura iritsi ondoren indarra berriro aplikatuko bagenu, elastikotasun-muga berria hasierakoa baino gorago egongo litzateke. Beraz, altzairu baten elastikotasun-muga handitzea nahi badugu, hauxe egin dezakegu: isurpena agertu arte luzatu eta segidan askatu. Honela lortutako altzairuei *hotzean tenkatutako altzairuak* deritze.

Bestalde, D puntura iritsiz goazen neurrian, kurbaren malda gutxituz doa, eta puntu horretan maximora iristen gara. Puntu horri dagokion tentsioari *haustura-tentsioa* deritzo (σ_r), nahiz eta benetako haustura E puntuan gertatzen den. Saiakuntzaren azken parte horretan, probetaren zeharkako sekzioa asko murrizten da, eta lepo mehe bat sortzen da. Fenomeno horri *estrikzioa* deritzo, eta materialak akats gehien dituen inguruan gertatzen da. Horrez gain, DE tartean, diagramak behera egiten du, probetak deformazioari aurre egiteko

duen ahalmena txikiagotu egiten baita. Ondorioz, probeta luzatzeko behar den indarra gero eta txikiagoa da. Halere, horrek ez du esan nahi tentsioa jaitsi egiten denik, nahiz eta 4.3. irudiak hori aditzera eman. Izan ere, diagramaren parte horretan probetaren zeharkako sekzioa hasierakoa baino askoz txikiagoa da. Beraz, tentsio/deformazio motako diagrama marrazteko erabiltzen ari garen tentsio izendatua txikiagoa da, hasierako A_0 azalera erabiltzen baitu. Alderantziz, benetako tentsioa kalkulatu bagenu, indarra aldiuneko A azalera-rekin zatituz, tentsioak handitzen jarraitzen duela ikusiko genuke. Dena den, haustura E puntuan gertatu arren, onargarria da haustura-tentsioaren balioztat D puntuari dagokiona hartzea. Gainera, benetako tentsioaren eta tentsio izendatuaren arteko aldea arbuiagarria da guri interesatzen zaigun eremuan —hots, karga-prozesuaren hasierako tarte elastikoan—, deformazioak txikiak baitira.

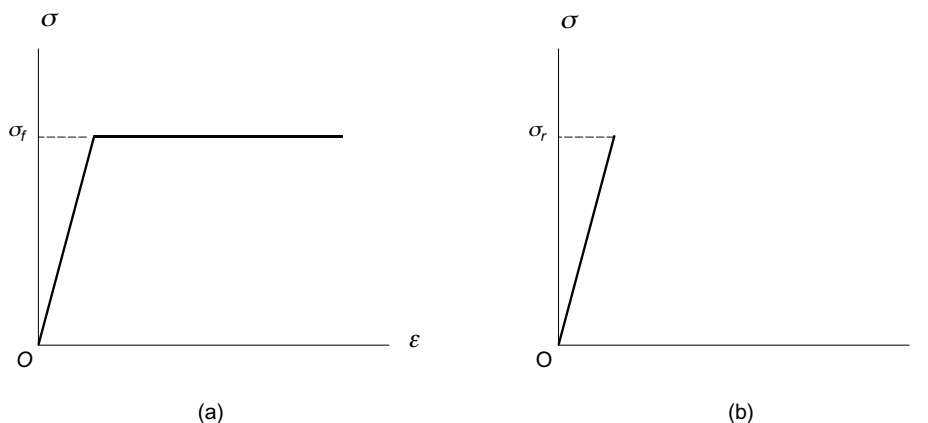


4.5. irudia.

Nolanahi den, 4.3. irudiko diagrama altzairu gozoa bezalako material harikorrei dagokiena da. Harikortasuna materialek hautsi baino lehen deformazio handiak jasateko duten gaitasuna da. Propietate hori material metalikoen ezaugarria izaten da. Material harikorren artean altzairua, letoia, kobrea, aluminioa eta abar aipa ditzakegu. Bestalde, material hauskorak deformazio handirik jasan gabe hausten diren materialak dira. Hori dela-eta, portaera elastikoa dute ia haustura-uneraino, 4.5. irudiko diagraman bezala. Adibidez, burdinurtua, beira, harria eta hormigoia material hauskorak dira. Altzairuen kasuan, karbono-edukia handituz doan neurrian, gero eta hauskorrago bihurtzen da. Material harikorraren trakziozko eta konpresiozko haustura-tentsioak antzekoak izaten dira, baina material hauskorretan diferentzia handiak egon daitezke bien artean. Gehienetan, konpresiopean trakziopean baino erresistentzia handiagoa izaten dute.

Material askoren portaera erreala 4.3. eta 4.5. irudietan agertzen dena izan arren, azterketa matematikoa sinplifikatu ahal izateko, tentsio-deformazio motako kurba idealak erabiliko ditugu. Material harikorren kasuan 4.6.a. irudiko portaera suposatuko dugu. Portaera hori duten materialei *elastoplastiko perfektuak* deritze. Horien diagrama bi zati zuzenez osatua dago: lehenengoa portaera elastiko linealari dagokio, jatorritik hasi eta σ_f isurpen-tentsiora iritsi arte; bigarren zatia horizontala da, eta materialaren isurpena

adierazten du, hausturara iritsi arte. Material hauskorrentzat, aldiz, 4.6.b. irudiko erlazioa onartuko dugu. Material hauskorrek deformazio plastikorik jasaten ez dutenez, portaera elastiko-lineala dute, σ_f haustura-tentsiora heldu arte.



4.6. irudia.

Portaera elastiko lineala duten materialetan, trakzio-saiakuntzaren bidez bi propietate garrantzitsu neur daitezke. Lehenengoa *elastikotasun-modulua* edo *Young-en modulua* da (E):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{4-4}$$

Hots, (4-4) ekuaziotik ondoriozta daitekeen bezala, elastikotasun-moduluak tarte linealaren maldak zenbat balio duen adierazten du. Beste era batean esanda, tentsio normalaren eta luzetarako deformazio unitarioaren arteko erlazioa da, eta tentsioaren dimentsioak ditu. Beraz, *Eren* balioak materialaren zurruntasuna neurtzeko balio du, eta erresistentziarekin nahastu behar ez den magnitude bat da. Material baten elastikotasun-modulua beste batena baino handiagoa bada, orduan, lehenengoa bigarrena baino gutxiago deformatuko da tentsio beraren eraginpean. Altzairuaren Young-en modulua 210 GPa inguruan egoten da.

Trakzio-saiakuntzatik lor daitekeen bigarren propietatea *Poisson-en koefizientea* da (ν). Aipatu dugun bezala, probetaren luzapenarekin batera, zeharkako sekzioa mehetu egiten da. Uzkurketaren eta luzapenaren arteko erlazioari Poisson-en koefizientea deritzen. Koefiziente horrek, beraz, luzetarako eta zeharkako deformazioen arteko erlazioa neurtzen du:

$$\nu = - \frac{\epsilon_{\text{zeharkakoa}}}{\epsilon_{\text{luzetarakoa}}} \tag{4-5}$$

Poisson-en koefizienteak, Young-en modulua bezala, materialaren zurruntasuna neurtzen du, baina zeharkako norabidean. Altzairuaren kasuan ν -ren balioak 0,25 eta 0,33 tartean egoten dira. Aurrerago, berriro hitz egingo dugu bi koefiziente elastiko horiei buruz.

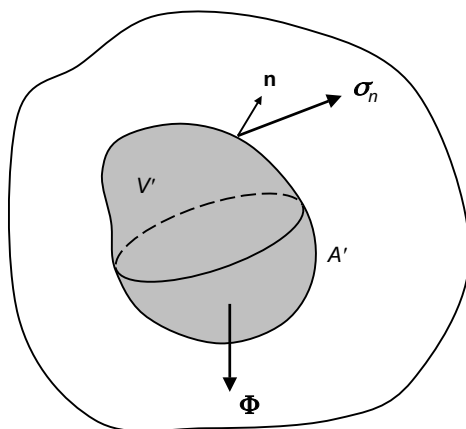
Atal hau bukatzeko esan dezagun material harikorren eta hauskorren arteko bereizketa egitea askotan ez dela erraza izaten. Izan ere, materialen portaera asko alda daiteke inguruko baldintzen arabera. Esate baterako, tenperatura baxuek, talkek, pitzadurek,

ziklikoki aplikatutako indarrek eta abarrek material harikorra hauskor bihur dezakete. Beraz, material bat aukeratu eta erabili baino lehen, beraren portaera alda dezaketen baldintza guztiak hartu behar dira kontuan.

4.3. DEFORMAZIO-ENERGIA ELASTIKOA

Portaera-legeak edo ekuazio konstitutiboak lortzeko, lehendabizi, *deformazio-energia elastikoa* deritzon funtzioa azalduko dugu. Izan ere, tentsioaren eta deformazioen arteko erlazioa matematikoki lor daiteke termodinamikaren lehenengo printzipioan oinarrituz, jarraian ikusiko dugun bezala.

Izan bedi kanpoko indar batzuen eraginpean dagoen solido deformagarri bat. Esan dugun bezala, aplikatutako indarrak kendu ondoren gorputzak hasierako forma berreskuratzen badu, materialak portaera elastikoa duela esaten da. Kasu horretan, tentsioaren eta deformazioaren arteko erlazioa bana-banakoa edo biunibokoa da; beraz, tentsioa ezagututa, deformazioa kalkula daiteke, eta baita alderantziz ere. Horrela, posiblea da bi magnitude horiek erlazionatuko dituzten funtzio batzuk topatzea, ekuazio konstitutiboak, hain zuzen. Gainera, gorputzaren portaera elastikoa bada, karga-deskargako prozesua itzulgarria da, edozein momentutan kargak aplikatzeari utziz gero hasierako egoerara itzul baikaitezke. Era berean, aurkitzen garen tentsio-egoerara eta deformazio-egoerara iristeko jarraitutako bideak ez du garrantzirik, bukaerako egoerak baizik. Erraz uler daiteke hori guztia ez dela egia portaera plastikoa duten gorputzen kasuan.



4.7. irudia.

Gogora dezagun orain termodinamikaren lehenengo legea, azken finean energiaren kontserbazioaren legea dena: *Sistema mekaniko batean, kanpoko indarrek egindako lanaren eta ingurunearekin trukaturako beroaren batura energia zinetikoaren eta barne-energiaren aldaketaren baturaren berdina da.* Lege hori ekuazio honen bidez adieraz dezakegu;

$$\delta W + \delta Q = \delta U + \delta E_z, \quad (4-6)$$

non δW balioa sisteman eragiten duten kanpo-indarrek egindako lana den, δQ delakoa trukaturako beroa, δE_z delakoa energia zinetiko aldaketa eta δU balioa barne-energiaren

aldaketa. Gorputz deformagarrien kasuan, (4-6) ekuazioko barne-energiari *deformazio-energia elastikoa* deritzo. Deformazio-energia hori deformatzen direnean gorputzek gordetzen duten energia da. Izan ere, gorputz bat deformatzen denean, beraren puntuak desplazatu egiten dira eta, ondorioz, aplikatutako indarrek lan bat egiten dute. Lan hori da, hain zuzen, gorputzaren barnean energia potentzial eran gordetzen dena. Deformazioaren ondorioz, deformatutako elementuaren barnean indar batzuk agertzen dira. Barne-indar horiek gordetako energia potentziala ingurunera itzul dezakete, lan bat egiteko gaitasuna baitute. Dena den, kontuan hartu behar da energia-aldaketak neur daitezkeela soilik, termodinamikaren lehenengo legean ez baitira balio absolutuak agertzen, magnitude desberdinen aldaketak baizik. Gorputz deformagarrien kasuan, energia hori hasierako egoerarekiko neurtzen da, eta tentsiorik eta deformaziorik ez dagoenean energiari balio nulua ematen zaio.

Aplika diezaiogun orain termodinamikaren printzipio hori kanpo-indar batzuen eraginpean orekan dagoen gorputz elastiko bati. Ohiko idazkera erabiliz, bolumen-indarren bektoreari Φ deituko diogu eta gainazal-indarrei T . Aplikatutako indarren ondorioz, gorputzean tentsio-egoera bat eta deformazio-egoera bat agertuko dira. Tentsio-egoera tentsio-matrizearen σ_{ij} osagaien bidez egongo da definituta, eta deformazio-egoera ε_{ij} deformazio unitarioen bidez. Horrez gain, desplazamendu-eremu bat ere egongo da (u, v, w) , gorputzeko puntuak mugitu egingo baitira. Demagun orain gorputzaren egoera deformatu hori abiapuntu modura hartuta, puntuei δu desplazamendu birtual bat aplikatzen diegula:

$$\delta \mathbf{u} = \delta u \mathbf{e}_1 + \delta v \mathbf{e}_2 + \delta w \mathbf{e}_3, \quad (4-7)$$

hau da, baldintza zinematikoeekin bateragarria den desplazamendu infinitesimal irudikari bat. Desplazamendu hori aplikatzen den bitartean, tentsio-egoerak aldaketarik gabe jarraitzen duela suposatuko dugu. Aldiz, desplazamendu birtual horren ondorioz, deformazio unitarioek aldaketa jasango dute:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}, & \delta \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \right], \\ \delta \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial(\delta v)}{\partial y}, & \delta \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right], \\ \delta \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial(\delta w)}{\partial z}, & \delta \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta v)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (4-8)$$

Jarraian, orekan dagoen gorputzaren barneko V' bolumen bat bereiziko dugu, bere gainazaleko azalera A' izanik (ikus 4.7. irudia). Bolumen hori ere orekan egongo da kanpo-indarren ondorioz, noski. Gorputza orekan dagoenez, ez da energia zinetikoaren aldaketarik egongo ($\delta E_z = 0$), eta gainera, deformazioa bero-trukaketarik gabe gertatzen dela suposatuko dugu ($\delta Q = 0$), gehienetan tenperatura-aldaketa nabarmenik izaten ez delako. Beraz, (4-6) ekuazioaren arabera,

$$\delta W = \delta U. \quad (4-9)$$

Definizioz, lana indarraren eta horren aplikazio-puntuaren desplazamenduaren arteko biderkadura eskalarra da. Beraz, honelaxe kalkula dezakegu V' bolumenean eragiten duten kanpo-indarrek desplazamendu birtualaren ondorioz egindako lana:

$$\delta W = \int_{A'} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{V'} \boldsymbol{\Phi} \cdot \delta \mathbf{u} dV, \quad (4-10)$$

eta bigarren gaian ikusitako Cauchy-ren formula ordeztuz (2-24):

$$\delta W = \int_{A'} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{V'} \boldsymbol{\Phi} \cdot \delta \mathbf{u} dV = \int_{A'} (\boldsymbol{\sigma}_x n_x + \boldsymbol{\sigma}_y n_y + \boldsymbol{\sigma}_z n_z) \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{V'} \boldsymbol{\Phi} \cdot \delta \mathbf{u} dV, \quad (4-11)$$

eta dibergentziaren teoremaren bidez:

$$\delta W = \int_{V'} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\boldsymbol{\sigma}_x \cdot \delta \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\boldsymbol{\sigma}_y \cdot \delta \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\boldsymbol{\sigma}_z \cdot \delta \mathbf{u}) + \boldsymbol{\Phi} \cdot \delta \mathbf{u} \right] dV, \quad (4-12)$$

non n_x , n_y eta n_z direlakoak gainazalarekiko bektore elkarzutaren osagaiak baitira. (4-12) espresioa idazteko orduan, osagai guztiak eta horien lehenengo deribatuak jarraituak direla onartu da, azalera-integrala bolumen-integral bihurtu ahal izateko. Gauzak horrela, (4-12) berdintzan eragiketak egin ondoren, hauxe lortzen da:

$$\delta W = \int_{V'} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_z}{\partial z} + \boldsymbol{\Phi} \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{V'} \left(\boldsymbol{\sigma}_x \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \boldsymbol{\sigma}_y \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \boldsymbol{\sigma}_z \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) dV. \quad (4-13)$$

Goiko ekuazioan lehenengo integrala nulua da, (2-35) espresioiko barne-orekako ekuazioen arabera. Bestalde, bigarren integrala (2-25) erlazioen arabera osagai osagai garatuz eta (4-7) eta (4-8) ekuazioez baliatuz, ondoko espresioa lortuko genuke:

$$\delta W = \int_{V'} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + 2\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + 2\tau_{yz} \delta \varepsilon_{yz}) dV = \delta U, \quad (4-14)$$

zeren, (4-9) ekuazioaren arabera, kanpo-indarren lana eta gorputzak gordetako deformazio-energia berdinak baitira. Ez da ahaztu behar, halere, lortutako espresioa deformazio txi-kientzat soilik dela egia.

Kalkuluak egiteko orduan, sarritan, deformazio-energia totala erabili orde, ohikoa izaten da bolumen-unitateko energia erabiltzea. Funtzio horri *deformazio-energiaren dentsitatea* deritzo, eta U_0 deituko diogu:

$$U = \int_{V'} U_0 dV. \quad (4-15)$$

Beraz, deformazio-energiaren aldaketa honelaxe idatziko litzateke:

$$\delta U = \int_{V'} \delta U_0 dV. \quad (4-16)$$

Espresio hori (4-14) ekuazioarekin konparatuz gero, hauxe lortzen da:

$$\delta U_0 = \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + 2\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + 2\tau_{yz} \delta \varepsilon_{yz}. \quad (4-17)$$

Gainera, tentsioen eta deformazioen artean dagoen erlazio biunibokoaren arabera, deformazio-energiaren dentsitatea deformazio unitarioen funtzioan idatz dezakegu:

$$U_0 = U_0 (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}). \quad (4-18)$$

Ondorioz, desplazamendu-eremuan aldaketa bat sortzen denean (δu , δv , δw), U_0 funtzioaren aldaketa honako hau izango da:

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xx}} \delta \varepsilon_{xx} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yy}} \delta \varepsilon_{yy} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{zz}} \delta \varepsilon_{zz} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xy}} \delta \varepsilon_{xy} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xz}} \delta \varepsilon_{xz} + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yz}} \delta \varepsilon_{yz}. \quad (4-19)$$

Azkenik, (4-19) espresioa (4-17)-rekin berdinduz, honako sei erlazio hauetara iritsiko gara:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xx}}, & \tau_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xy}} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yy}}, & \tau_{xz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xz}} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xz}}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{zz}}, & \tau_{yz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yz}} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}}. \end{aligned} \quad (4-20)$$

Termodinamikaren lehengo legea bete dadin, beraz, (4-20) ekuazioko sei erlazioak bete behar dira. Ikus daitekeen bezala, espresio horiek tentsioaren eta deformazioaren osagaiak lotzen dituzte. Segidan ikusiko den bezala, ekuazio horietan oinarrituko gara solido elastikoaren portaera-lege orokor bat lortzeko. Bukatzeko, esan dezagun erlazio horiek prozesu adiabatiko eta isotermikoentzat aplika daitezkeela. Prozesu perfekturik ez dagoen arren, azkar aplikatutako kargen kasuan baldintza adiabatikoak daudela suposa daitezke, eta poliki aplikatutako kargen kasuan, isotermoak. Izan ere, indarren aplikazioa kuasiestatikoa denean, hots, poliki aplikatzen direnean, ez da temperatura-aldaketa nabarmenik izaten, eta aldaketa hori nulua dela suposa daiteke.

4.4. HOOKE-REN LEGE OROKORRA

Atal honetan tentsioen eta deformazioen arteko erlazio orokor bat bilatzen saiatuko gara, edozein materialentzat aplika daitekeena. Ondoren, ingeniarietan ohikoak diren material arruntentzat espresio hori nola sinplifikatzen den ikusiko dugu, material isotropoen kasura iritsi arte. Garapenaren bukaeran ikusiko dugun bezala, material isotropoen portaera-legeak definitzeko, nahikoa da bi koefiziente elastikoren balioak ezagutzea.

Trakzio-saiakuntza deskribatu zenean ikusi genuen bezala, tentsio normalaren eta luzetarako deformazioaren arteko erlazioa lineala dela onar daiteke tentsioaren balioa isurpen-mugaren azpitik dagoenean. Ekuazio horri Hooke-ren legea deritzo eta proportzionaltasun-konstanteari Young-en modulua:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (4-21)$$

(4-21) ekuazioak ardatzeko tentsio eta deformazioa bakarrik hartzen ditu kontuan, baina erlazio horrek puntu bateko tentsioaren eta deformazioaren gainerako osagaiak ere balio duela onar daiteke, oker handirik egin gabe. Beraz, tentsio-matrizeko eta deformazio-matrizeko osagaien artean ondoko erlazio hauek betetzen direla suposa dezakegu:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{14}\varepsilon_{xy} + C_{15}\delta\varepsilon_{xz} + C_{16}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{yy} &= C_{21}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{23}\varepsilon_{zz} + C_{24}\varepsilon_{xy} + C_{25}\delta\varepsilon_{xz} + C_{26}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{zz} &= C_{31}\varepsilon_{xx} + C_{32}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} + C_{34}\varepsilon_{xy} + C_{35}\delta\varepsilon_{xz} + C_{36}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{xy} &= C_{41}\varepsilon_{xx} + C_{42}\varepsilon_{yy} + C_{43}\varepsilon_{zz} + C_{44}\varepsilon_{xy} + C_{45}\delta\varepsilon_{xz} + C_{46}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{xz} &= C_{51}\varepsilon_{xx} + C_{52}\varepsilon_{yy} + C_{53}\varepsilon_{zz} + C_{54}\varepsilon_{xy} + C_{55}\delta\varepsilon_{xz} + C_{56}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{yz} &= C_{61}\varepsilon_{xx} + C_{62}\varepsilon_{yy} + C_{63}\varepsilon_{zz} + C_{64}\varepsilon_{xy} + C_{65}\delta\varepsilon_{xz} + C_{66}\varepsilon_{yz},
\end{aligned} \tag{4-22}$$

edo matrizialki,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}, \tag{4-23}$$

eta laburrago,

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{4-24}$$

Hain justu, (4-24) erlazioari *Hooke-ren lege orokortua* deritzo eta $\tilde{\mathbf{C}}$ -ri *koefiziente elastikoen matrizea*. Koefiziente horiek posizioaren eta tenperaturaren funtzioak izaten dira.

Beraz, tentsioak eta deformazioak erlazionatzen dituzten sei portaera-legeak zehazteko, hasiera batean behintzat, C_{ij} erako 36 koefiziente behar dira. Halere, 36 koefiziente elastiko horietatik 21 bakarrik dira independenteak, $\tilde{\mathbf{C}}$ matrizea simetrikoa baita. Froga dezagun baieztapen hori. Preseski, (4-20) espresioetako lehenengo biak hartzen baditugu, Hooke-ren legearen arabera, hauxe idatz dezakegu:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xx}} = C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{14}\varepsilon_{xy} + C_{15}\varepsilon_{xz} + C_{16}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{yy} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yy}} = C_{21}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{23}\varepsilon_{zz} + C_{24}\varepsilon_{xy} + C_{25}\varepsilon_{xz} + C_{26}\varepsilon_{yz},
\end{aligned} \tag{4-25}$$

eta σ_{xx} eta σ_{yy} osagaiak, ε_{yy} eta ε_{xx} deformazio unitarioekiko deribatuz,

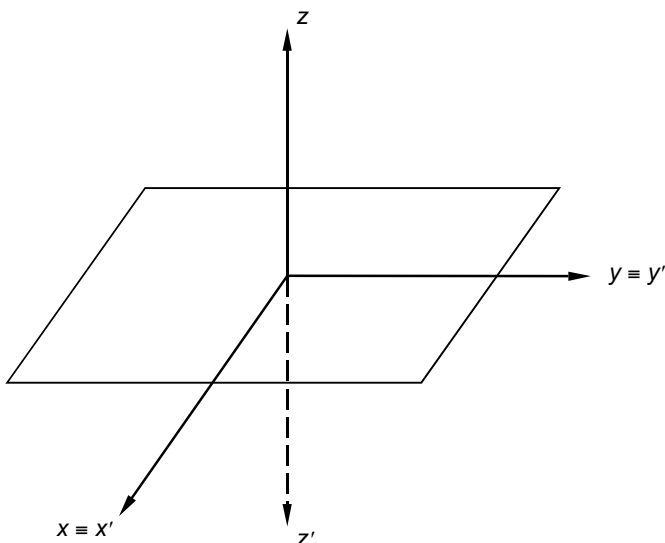
$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{xx} \partial \varepsilon_{yy}} = C_{12} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{yy} \partial \varepsilon_{xx}} = C_{21}, \tag{4-26}$$

zeren deribatu gurutzatuak berdinak baitira. Bestalde, erraz froga daiteke $\tilde{\mathbf{C}}$ matrizearen diagonal nagusian ez dauden beste koefiziente guztientzat erlazio bera betetzen dela, hots, koefiziente elastikoen matrizea simetrikoa dela. Beraz, portaera lineala duen material anisotropo baten portaera-legeak definitzeko, hogeita bat koefiziente independente behar dira. Koefiziente horien balioak aukeratutako erreferentzia-sistemaren arabekoak dira, noski, eta ardatz-sistema aldatuz gero, koefizienteen balioak ere aldatzen dira. Ikus dezagun

orain koefiziente elastiko independenteen kopurua nola gutxitzen den materialak simetria elastikoaren propietateak aurkezten dituenean.

Material anisotropoek propietate elastiko desberdinak dituzte norabide guztietan. Halere, zenbait kasutan, plano batzuekiko simetria-propietate batzuk betetzen direla onar daiteke. Ondorioz, plano horiekiko elkarzutak diren bi norabideetan propietate elastikoak berdinak izaten dira. Adibidez, norabide batean zuntzekin zurrundutako material konposatu batek zuntzekiko elkarzutak diren hiru simetria-plano edukiko ditu.

Hasteko, demagun materialaren barne-egiturak plano batekiko simetria elastikoa dagoela suposatzeko aukera ematen duela (material monoklinikoa). Adibide gisa, plano hori xy plano balitz, ez litzateke inolako alderik egongo 4.8. irudiko xyz eta $x'y'z'$ erreferentzia-sistemen artean, eta koefiziente elastikoak berdinak izango liriateke bi kasuetan.



4.8. irudia.

Lehenengo xyz erreferentzia-sisteman, erlazio hau beteko litzateke:

$$\sigma = \bar{C} \epsilon, \tag{4-27}$$

eta $x'y'z'$ sisteman beste hau:

$$\sigma' = \bar{C}' \epsilon', \tag{4-28}$$

baina xy planoarekiko simetriaren ondorioz, bi matrize elastikoak berdinak izango liriateke, hau da,

$$\bar{C} = \bar{C}'. \tag{4-29}$$

Alabaina, badakigu bi erreferentzia-sistemen arteko tentsio-egoeren artean erlazio hau betetzen dela (ikus 2-50 eta 2-51 ekuazioak):

$$\bar{T}' = \bar{N} \cdot \bar{T} \cdot \bar{N}^T, \tag{4-30}$$

non, gure kasuan, oinarri-aldaketaren matrizea ondokoa baita:

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4-31)$$

Hortaz, (4-31) matrizea (4-30) ekuazioan ordeztuz:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx}, \quad \sigma'_{yy} = \sigma_{yy}, \quad \sigma'_{zz} = \sigma_{zz}, \quad \tau'_{xy} = \tau_{xy}, \quad \tau'_{xz} = -\tau_{xz}, \quad \tau'_{yz} = -\tau_{yz}, \quad (4-32)$$

eta deformazio-matrizearekin gauza bera eginez,

$$\varepsilon'_{xx} = \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon'_{yy} = \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon'_{zz} = \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon'_{xy} = \varepsilon_{xy}, \quad \varepsilon'_{xz} = -\varepsilon_{xz}, \quad \varepsilon'_{yz} = -\varepsilon_{yz}. \quad (4-33)$$

Bestetik, (4-27) eta (4-28) ekuazioak garatuz, σ'_{xx} -entzat adibidez:

$$\sigma_{xx} = C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{14}\varepsilon_{xy} + C_{15}\delta\varepsilon_{xz} + C_{16}\varepsilon_{yz}, \quad (4-34)$$

$$\sigma'_{xx} = C_{11}\varepsilon'_{xx} + C_{12}\varepsilon'_{yy} + C_{13}\varepsilon'_{zz} + C_{14}\varepsilon'_{xy} + C_{15}\varepsilon'_{xz} + C_{16}\varepsilon'_{yz}, \quad (4-35)$$

eta σ'_{xx} -en espresioan (4-32) eta (4-33) ordeztuz,

$$\sigma_{xx} = C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{14}\varepsilon_{xy} - C_{15}\delta\varepsilon_{xz} - C_{16}\varepsilon_{yz}. \quad (4-36)$$

Beraz, (4-34) eta (4-36) ekuazioak bete behar direnez, hauxe ondoriozta daiteke:

$$C_{15} = C_{16} = 0. \quad (4-37)$$

Era berean, σ_{yy} eta σ'_{yy} -rentzat garapena errepikatuz,

$$C_{25} = C_{26} = 0, \quad (4-38)$$

σ_{zz} eta σ'_{zz} -rentzat,

$$C_{35} = C_{36} = 0, \quad (4-39)$$

eta, azkenik, σ_{xy} eta σ'_{xy} -rentzat,

$$C_{45} = C_{46} = 0. \quad (4-40)$$

Eragiketa horiek σ_{xz} eta σ_{yz} osagaiarentzat errepikatuko bagenitu, ez genuke baldintza berririk lortuko. Beraz, simetria elastikoaren plano bakarra duten materialentzat, honako matrize honek adieraziko luke portaera-legea:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (4-41)$$

Beraz, 13 konstante ezagutu beharko genituzke honelako material baten portaera definitu ahal izateko.

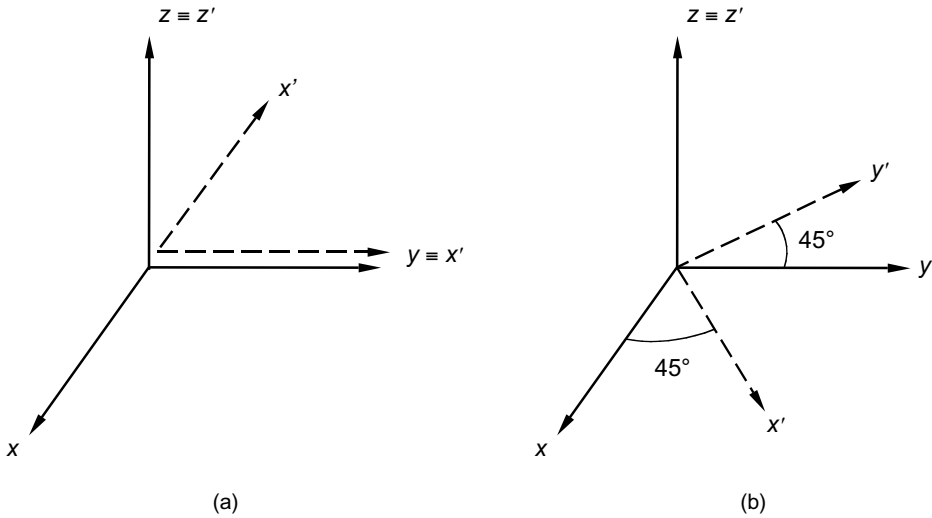
Materialak hiru simetria-plano dituenean, *ortotropoa* dela esaten da. Goian egindako frogapena xz eta yz planoekin errepikatuko bagenu, erraz uler daiteke ondoko baldintza berri hauek lortuko genituzkeela:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{56} = 0, \tag{4-42}$$

eta matrize elastikoa honelaxe geldituko litzateke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix}. \tag{4-43}$$

Honelatan, bada, material ortotropoen portaera-legea zehazteko, bederatzi koefiziente elastiko ezagutu behar dira. Aipagarria da osagai normalen eta osagai ebakitzaileen artean dagoen bereizketa, bakoitzaren eragina besteenarekiko independentea baita. Beste era batera esanda, luzetarako eta zeharkako portaerak desakoplaturik daude.



4.9. irudia.

Berezitasun horietaz gain, plano batean kokatutako norabide guztietan propietateak berdinak badira, materialaren portaera *zeharka isotropoa* dela esaten da. Material horiei dagokien portaera-legea lortzeko, xy planoan kokatutako bi erreferentzia-sistemaren konbinazioa erabiliko ditugu. Lehenengoa 4.9.a. irudian agertzen dena da. Kasu horretan, ardatz-sistema aldatzeko matrizea honako hau da:

$$\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4-44)$$

Arestian egin genuen bezala (4-44) matrizea (4-30) ekuazioan ordeztuz:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{yy}, \quad \sigma'_{yy} = \sigma_{xx}, \quad \sigma'_{zz} = \sigma_{zz}, \quad \tau'_{xy} = -\tau_{xy}, \quad \tau'_{xz} = \tau_{yz}, \quad \tau'_{yz} = -\tau_{xz}, \quad (4-45)$$

eta deformazioentzat,

$$\varepsilon'_{xx} = \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon'_{yy} = \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon'_{zz} = \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon'_{xy} = -\varepsilon_{xy}, \quad \varepsilon'_{xz} = \varepsilon_{yz}, \quad \varepsilon'_{yz} = -\varepsilon_{xz}. \quad (4-46)$$

Hortaz, (4-29) ekuazioaren arabera xyz eta $x'y'z'$ ardatz-sistemetan matrize elastikoek berdinak izan behar dutenez, (4-43) portaera-legearen arabera hauxe idatz dezakegu σ'_{xx} osagaiarentzat:

$$\sigma'_{xx} = C_{11}\varepsilon'_{xx} + C_{12}\varepsilon'_{yy} + C_{13}\varepsilon'_{zz}, \quad (4-47)$$

eta (4-45) ekuazioko erlazioak ordeztuz:

$$\sigma_{yy} = C_{11}\varepsilon_{yy} + C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{13}\varepsilon_{zz}. \quad (4-48)$$

Gauzak horrela, σ_{yy} -ren espresioa zuzenean xyz ardatz-sisteman idatziko bagenu, hauxe edukiko genuke:

$$\sigma_{yy} = C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{23}\varepsilon_{zz}. \quad (4-49)$$

Beraz, (4-48) eta (4-49) ekuazioak erkatuz, honako hau ondorioztatzen da:

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{23}. \quad (4-50)$$

Eragiketa bera τ_{xz} -rekin errepikatuz gero:

$$\tau'_{xz} = C_{55}\varepsilon'_{xz}, \quad (4-51)$$

eta $x'y'z'$ erreferentzia-sistemara aldatuz:

$$\tau_{yz} = C_{55}\varepsilon_{yz}. \quad (4-52)$$

Lehen bezala τ_{yz} zuzenean xyz ardatz-sisteman idatiz:

$$\tau_{yz} = C_{66}\varepsilon_{yz}, \quad (4-53)$$

eta ondorioz,

$$C_{55} = C_{66}. \quad (4-54)$$

Gainerako osagaietatik ez dira garrantzizko erlazio gehiago lortzen. Ikus dezagun orain 4.9.b. irudian adierazitako oinarri-aldaketa. $\vec{\mathbf{N}}$ matrizea ondoko hau izango litzateke:

$$\vec{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4-55)$$

Matrize hori (4-30) ekuazioan ordeztuz, erlazio hauek lortzen dira τ_{xy} eta ε_{xy} osagaientzat:

$$\begin{aligned}\tau'_{xy} &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1), \\ \varepsilon'_{xy} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1).\end{aligned}\tag{4-56}$$

Orain τ_{xy} osagaia $x'y'z'$ sistemarekiko adieraziko bagenu,

$$\tau'_{xy} = C_{44}\varepsilon'_{xy},\tag{4-57}$$

eta (4-56) espresioa hemen ordeztuz,

$$\sigma_2 - \sigma_1 = C_{44}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1).\tag{4-58}$$

Baina (4-43)-ren arabera,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3, \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{11}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3,\end{aligned}\tag{4-59}$$

eta azkenik, bi ekuazio horiek (4-58) ekuazioan ordeztuz, eta sinplifikatu ondoren:

$$C_{44} = C_{11} - C_{12}.\tag{4-60}$$

Beraz, (4-60) eta (4-54) berdintzak matrize elastikoan ordeztuz, hauxe dugu:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}.\tag{4-61}$$

Hain zuzen, (4-61) espresioa zeharka isotropoak diren materialen portaera-legea da, non bost konstante behar diren tentsioen eta deformazioen arteko erlazioa zehazteko. Bukatzeko, ikus dezagun zein den material isotropoen portaera-legea. Material isotropoak norabide guztietan propietate berdinak dituzten materialak dira, beraz, matrize elastikoa lortzeko, nahikoa izango litzateke aurreko garapena beste bi aldir errepikatzea xz eta yz planoentzat. Horrela eginez, honako erlazio hau lortuko genuke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}.\tag{4-62}$$

Ikusten den bezala, material isotropoen kasuan nahikoa da bi koefiziente elastiko neurtzea materialaren portaera ezagutzeko. Material ortotropoen kasuan bezala, tentsio normalen eta ebakitzaileen efektuak bananduta daude. Beraz, material isotropoetan tentsioen eta deformazioen norabide nagusiak berdinak dira, eta deformazio angeluarrak nuluak badira, tentsio ebakitzaileak ere nuluak dira. Ondorioz, tentsio normalek luzetarako deformazioak sortuko dituzte soilik, eta tentsio ebakitzaileek, berriz, deformazio angeluarrak soilik. Hurrengo atalean, material isotropoak deskribatzen dituzten bi koefiziente horien eta trakzio-saiakuntzatik lor daitezkeen propietateen arteko erlazioa agertuko dugu.

4.5. MATERIAL ELASTIKO ISOTROPOEN PORTAERA-LEGEAK. LAME-REN EKUAZIOAK

Material isotropoentzat tentsioak eta deformazioak erlazionatzen dituen (4-62) ekuazioko C_{11} eta C_{12} koefizienteak beste era honetan idatziko ditugu:

$$\begin{aligned} C_{12} &= \lambda, \\ C_{11} - C_{12} &= 2G, \end{aligned} \quad (4-63)$$

non λ eta G koefizientei *Lame-ren koefiziente elastikoak* deritzen. Balio horiek matrize elastikoan ordeztuz gero, sei ekuazio hauek lortzen dira:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{xx}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{zz}, \\ \tau_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy}, \\ \tau_{xz} &= 2G\varepsilon_{xy}, \\ \tau_{yz} &= 2G\varepsilon_{xy}. \end{aligned} \quad (4-64)$$

Ekuazio horiek Hooke-ren legea idazteko beste era bat dira. Ikusten den bezala, tentsioak deformazioen funtzioan adierazten dituzte: *Lame-ren ekuazioak* deritze. Espresio horien alderantzizkoak ere erraz lor ditzakegu. Lehenengo hirurak batuz gero:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = (3\lambda + 2G)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \Rightarrow I_1 = (3\lambda + 2G)J_1, \quad (4-65)$$

non I_1 eta J_1 direlakoak tentsioen eta deformazioen lehenengo aldaezinak baitira, hurrenez hurren. Lehenengo ekuaziotik ε_{xx} askatuz, (4-65) erlazioaren arabera:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_{xx} - \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{xx} - \lambda \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3\lambda + 2G} \right) = \\ &= \frac{\sigma_{xx}(3\lambda + 2G) - \lambda(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{2G(3\lambda + 2G)} = \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \left[\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right], \end{aligned} \quad (4-66)$$

eta hortik,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right], \quad (4-67)$$

non

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}. \quad (4-68)$$

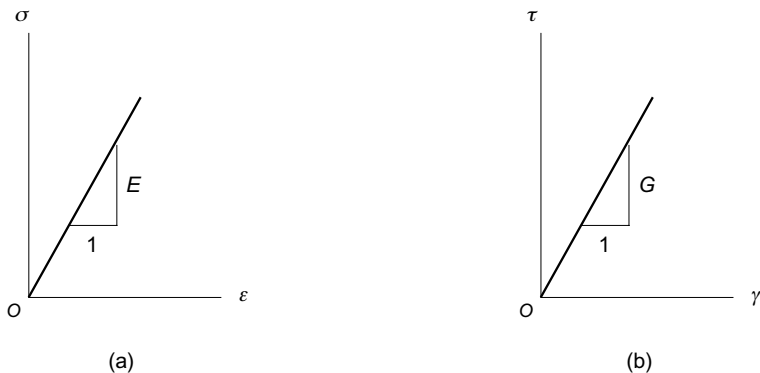
Aurretik aipatu dugun bezala, E eta ν balioak trakzio-saiakuntzatik ondoriozta daitezkeen bi propietate elastiko dira, Young-en modulua eta Poisson-en koefizientea, hurrenez hurren. Preseski, (4-68) ekuaziotik, λ eta G balioak E eta ν -ren funtzioan idatz daitezke:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (4-69)$$

Era berean, (4-64) ekuaziotik ε_{yy} , ε_{zz} eta hiru deformazio angeluarrak askatuz, azkenik, beste sei erlazio hauek lortuko genituzke:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right], \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right], \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right], \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (4-70)$$

Hooke-ren lege orokorraren adierazpen berri honetan, deformazioak tentsioen funtzioan datoz emanda. Izan ere, hauxe da elastikotasunaren teoria gehienetan erabiltzen den idazkera, eta gorputz bateko puntuetan tentsio-egoerak sortutako deformazioak kalkulatzeko balio du. Agerikoa denez, (4-70) ekuazioan materialaren funtzioak diren honako hiru konstante hauek azaldu dira: E , ν eta G . Ikusi dugun bezala, koefiziente horiek ez dira independenteak, zeren, material isotropoen portaera zehazteko, nahikoa baitira bi koefiziente elastiko. Hurrengo atalean sakonkiago aztertuko ditugu koefiziente horien gut-tien arteko erlazioa eta esanahi fisikoa.



4.10. irudia.

Atal hau bukatzeko, (4-64) ekuazioko Lamé-ren legeak aurrean ditugula, deformazio-energiaren zenbait espresio ondorioztatuko ditugu, hurrengo gaitan oso baliagarriak izango zaizkigunak. Espresio horiek lortzeko Lamé-ren legea erabiliko dugunez, metodo hau portaera lineala duten material elastikoentzat soilik aplikatu ahal izango dugu.

Preseski, (4-19) espresioa integratuz gero, puntu bateko deformazio-energia elastikoaren dentsitatea honelaxe idatz dezakegu:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \int \delta U_0 = \\
 &= \int_0^{\varepsilon_{xx}} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xx}} \delta \varepsilon_{xx} + \int_0^{\varepsilon_{yy}} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yy}} \delta \varepsilon_{yy} + \int_0^{\varepsilon_{zz}} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{zz}} \delta \varepsilon_{zz} + \int_0^{\varepsilon_{xy}} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xy}} \delta \varepsilon_{xy} + \int_0^{\varepsilon_{xz}} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{xz}} \delta \varepsilon_{xz} + \int_0^{\varepsilon_{yz}} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{yz}} \delta \varepsilon_{yz}, \quad (4-71)
 \end{aligned}$$

eta (4-20) erlazioak ordeztuz,

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{xx}} \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \int_0^{\varepsilon_{yy}} \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \int_0^{\varepsilon_{zz}} \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \int_0^{\varepsilon_{xy}} 2\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \int_0^{\varepsilon_{xz}} 2\tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \int_0^{\varepsilon_{yz}} 2\tau_{yz} \delta \varepsilon_{yz}. \quad (4-72)$$

Portaera lineala duten materialen kasuan, Lamé-ren legeak eskaintzen dizkigun erlazioak erabil ditzakegu integral horiek kalkulatzeko. Horrela, (4-64) ekuazioko erlazioak ordeztuz, hauxe edukiko genuke:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \int_0^{\varepsilon_{xx}} \left[\lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{xx} \right] \delta \varepsilon_{xx} + \int_0^{\varepsilon_{yy}} \left[\lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{yy} \right] \delta \varepsilon_{yy} + \\
 &+ \int_0^{\varepsilon_{zz}} \left[\lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{zz} \right] \delta \varepsilon_{zz} + \int_0^{\varepsilon_{xy}} 4G\varepsilon_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \int_0^{\varepsilon_{xz}} 4G\varepsilon_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \int_0^{\varepsilon_{yz}} 4G\varepsilon_{yz} \delta \varepsilon_{yz}. \quad (4-73)
 \end{aligned}$$

Eta (4-73) ekuazioko integralak kalkulatu eta gero, honako espresio hau lortuko genuke deformazio-energia elastikoarentzat:

$$U_0 = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2). \quad (4-74)$$

(4-74) espresioa tentsioen funtzioan idatzi nahi izanez gero, nahiko da (4-70) espresioetan agertzen diren Hooke-ren legeak ordezteak; horrela, (4-69) erlazioen bidez, beste espresio honetara iritsiko ginateke:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]. \quad (4-75)$$

Azkenik, deformazio-energiaren dentsitatea tentsio eta deformazioen funtzioan idatz dezakegu:

$$U_0 = \frac{1}{2} \left[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\tau_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz}\varepsilon_{xz} + 2\tau_{yz}\varepsilon_{yz} \right]. \quad (4-76)$$

Deformazio-energiaren dentsitatearentzat lortutako (4-74), (4-75) eta (4-76) erlazioak balio-kideak dira. Hamahirugarren gaian teorema energetikoak ikusten ditugunean, azken espresio hori beste bide bati jarraituz ondorioztatzeko aukera izango dugu. Izan ere, (4-76) adierazpena da deformazio-energiaren dentsitatea kalkulatzeko sarrien erabiltzen den espresioa.

4.6. KONSTANTE ELASTIKOAK

Ikusi dugun bezala, trakzio-saiakuntzatik lor daitekeen materialaren ezaugarri bat *Young-en modulua* edo *elastikotasun-modulua* da (E). Koefiziente horrek materialaren zurruntasuna adierazten du eta portaera elastiko lineala duten solidoetan norabide bereko tentsio normala eta luzetarako deformazioa erlazionatzen ditu elkarrekin (ikus 4.10.a. irudia). Era berean, kargarekiko elkarzutak diren norabideetan laburpen bat gertatzen dela ikusi dugu. Luzetarako deformazioaren eta deformazio elkarzutaren arteko erlazioa Poisson-en koefizienteak ematen digu (ν). Norabide horiek guztiak norabide nagusiak dira, osagai normalak baitituzte soilik. Luzetarako norabideari 1 deituz gero eta bi norabide elkarzutei 2 eta 3, hauxe idatz dezakegu:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad (4-77)$$

eta

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1 = -\nu\frac{\sigma_1}{E}. \quad (4-78)$$

Dena den, erlazio horiek ardatz bakarreko egoerarentzat soilik aplikatu daitezke. Hiru dimentsioko kasu batera orokortu ahal izateko, (4-77) eta (4-78) ekuazioak norabide nagusi bakoitzarentzat idatzi eta lortutako deformazioen gainezarpenera aplikatu beharko genuke. Demagun, beraz, solido deformagarri bateko puntu bat, tentsio-egoera orokor baten eraginpean dagoena. Norabide nagusietan, σ_1 , σ_2 eta σ_3 tentsioak edukiko ditugu, dakigun bezala.

Ikus dezagun zein den tentsio horien guztien eragina luzetarako deformazio nagusietan. Adibide gisa, ε_1 deformazioa kalkulatu dugu. Trakzio-saiakuntza azaldu genuenean ikusitakoaren arabera, σ_1 tentsioaren ondorioz, luzetarako deformazio bat agertuko da 1 norabidean:

$$\varepsilon_1(\sigma_1) = \frac{\sigma_1}{E}. \quad (4-79)$$

Bestalde, σ_2 tentsioaren ondorioz luzapen bat gertatuko da 2 norabidean, baina era berean, 1 eta 3 norabideetan laburpen bat gertatuko da, Poisson-en koefizientearen bidez kalkula daitekeena:

$$\varepsilon_1(\sigma_2) = -\nu \frac{\sigma_2}{E}, \quad (4-80)$$

$$\varepsilon_1(\sigma_3) = -\nu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Deformazio guztiak batuz:

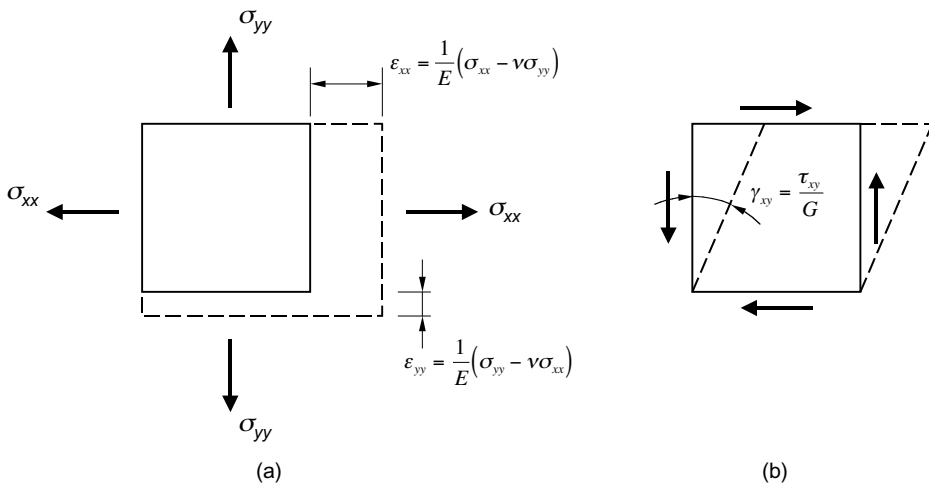
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (4-81)$$

Beste bi norabidetan gauza bera eginez:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)], \quad (4-82)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Espresso horiek Hooke-ren legearen kasu berezia dira, erreferentzia-sistema nagusi bat aukeratzen denean aplika daitezkeenak. Ikusten den bezala, (4-70) adierazpeneko lehen hiru ekuazioen parekoak dira, eta azpindizeetan bakarrik desberdintzen dira. Gainera, osagai normalen artean elkarrekintza bat dagoela nabari daiteke, hau da, norabide bateko tentsio normalak horrekiko elkarzutak diren luzetarako deformazioetan eragiten du. Hain zuzen, 4.11.a. irudian elkarrekintza hori marraztu da tentsio-egoera lau batentzat.



4.11. irudia.

Beste hiru ekuazioek tentsio ebakitzailak eta deformazio angeluarrak erlazioztatzen dituzte. Hain justu, G koefiziente elastikoari *zeharkako elastikotasun-modulua* deritzo, eta E -ren baliokidea da, baina tentsioaren eta deformazioaren zeharkako osagaiei dagokienez, 4.10.b. irudian agertzen den bezala:

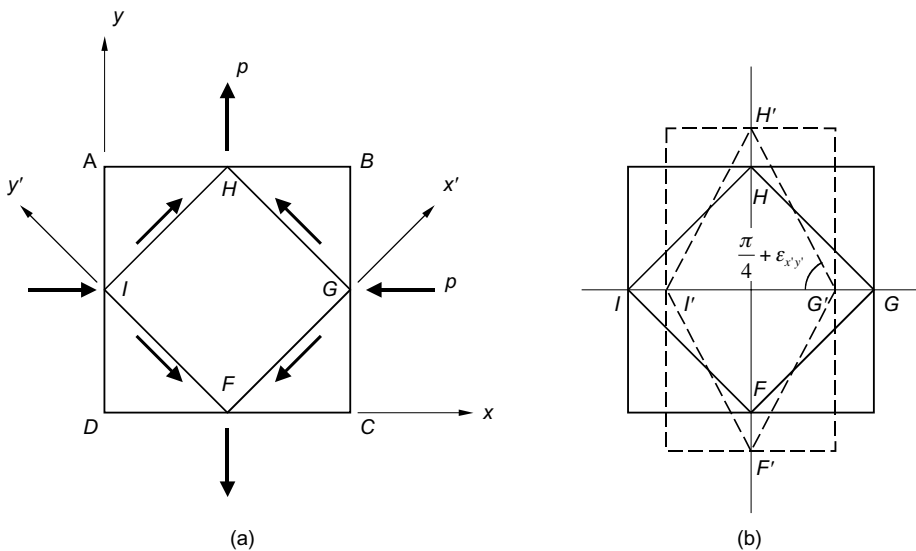
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \quad (4-83)$$

Kasu horretan, tentsio ebakitzailen eraginak bereizita daudela ikus daiteke; hau da, plano bateko tentsio ebakitzailak ez dute eraginik beste planoetako deformazio angeluarretan (ikus 4.11.b. irudia). Erlazio horiek (4-81) eta (4-82) ekuazioak abiapuntu gisa erabilia ere lor daitezke. Hiru ekuazio horiek erreferentzia-sistema nagusi batekiko daude adierazirik eta, ondorioz, ez da tentsio ebakitzailen espresiorik agertzen. Halere, xyz ardatz-sistema orokorrago batean adieraziko bagenitu, erreferentzia-sistemen aldaketa baten bidez, tentsio ebakitzailak agerian utziko genituzke, (4-83) espresioak lortuz. Dena den, badago horiek lortzeko beste era bat, esanahi fisiko argiagoa duena. Horretarako, demagun, adibidez, 4.12.a. irudiko $ABCD$ elementu karratu infinitesimala, tentsio-kompresio motako egoera baten eraginpean dagoena. Kalkuluak errazteko, aldean neurria unitatea dela suposatuko dugu. Kasu honetan, gainera, x eta y norabideak nagusiak dira, osagai normalak baitituzte soilik:

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 = -p, \quad \sigma_{yy} = \sigma_2 = p, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (4-84)$$

Tentsio-egoera horren ondorioz, x norabidean luzapen bat edukiko dugu, eta y norabidean laburpen bat, 4.12.b. irudian adierazten den bezala. Suposa dezagun orain 45° -ko inklinazioa duen $FGHI$ karratua, eta kalkula ditzagun karratu horren aldeetan dauden tentsioen osagaiak. Karratu horrekiko elkarzutak diren norabideei x' eta y' deituko diegu. Adibidez, x' norabideko tentsio-bektorea hauxe izango da:

$$\sigma_n = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p/\sqrt{2} \\ p/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4-85)$$



4.12. irudia.

eta osagai normala eta ebakitzailea, honako hauek:

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \left\{ -p/\sqrt{2}, p/\sqrt{2}, 0 \right\} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \\ \tau_{nt} &= \left\{ -p/\sqrt{2}, p/\sqrt{2}, 0 \right\} \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = p.\end{aligned}\quad (4-86)$$

Beraz, GH aurpegiko tentsioaren osagaiak hauexek izango dira:

$$\sigma_{x'x'} = 0, \quad \sigma_{x'y'} = p. \quad (4-87)$$

Antzeko kalkuluak HI planoarentzat eginez:

$$\sigma_{y'y'} = 0, \quad \sigma_{y'x'} = p. \quad (4-88)$$

Bistakoa denez, $FGHI$ karratuaren beste bi aldeetan kalkulu bera egin dezakegu. Horrela, erraz ikus daiteke ezen elementu horren aldeetan tentsio ebakitzaileak bakarrik egongo direla. Tentsio-egoera horri *ebakidura hutsa* deritzo eta deformazio angeluarrak sortzen ditu soilik. Bestetik, 4.12.b. irudian $FGHI$ elementuaren deformazioa ageri da. GF eta GH aldeen arteko angelu-aldaketa honelaxe kalkula genezake geometrikoki:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon_{x'y'}\right) = \frac{1 + HH'}{1 - GG'} = \frac{1 + \frac{p}{E}(1 + \nu)}{1 - \frac{p}{E}(1 + \nu)}. \quad (4-89)$$

Ekuazio horren ezkeralderako gaia era honetan berriidatz daiteke, deformazioak txikiak direla kontuan hartuz:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon_{x'y'}\right) = \frac{\tan \pi/4 + \tan \varepsilon_{x'y'}}{1 - \tan \pi/4 \tan \varepsilon_{x'y'}} = \frac{1 + \varepsilon_{x'y'}}{1 - \varepsilon_{x'y'}}. \quad (4-90)$$

Azkenik, (4-87), (4-88) eta (4-90) erlazioak (4-89) ekuazioan ordeztuz:

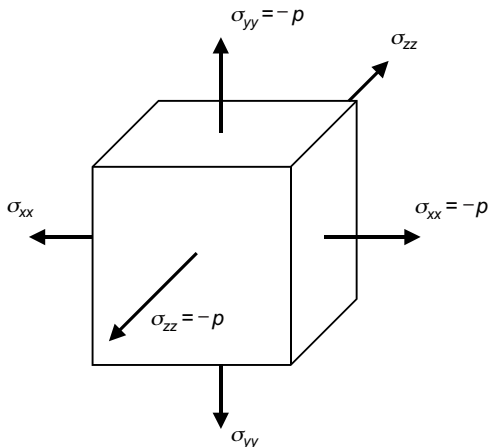
$$\frac{1 + \varepsilon_{x'y'}}{1 - \varepsilon_{x'y'}} = \frac{1 + \frac{\sigma_{x'y'}}{E}(1 + \nu)}{1 - \frac{\sigma_{x'y'}}{E}(1 + \nu)}, \quad (4-91)$$

eta hortik,

$$\varepsilon_{x'y'} = \frac{\sigma_{x'y'}}{E}(1 + \nu). \quad (4-92)$$

Ekuazio horrek $x'y'$ erreferentzia-sisteman tentsio ebakitzaien eta deformazio angeluarren portaera-legea adierazten du. Ikusten den bezala, (4-70) ekuazioko espresioaren berdina da.

Trakzio-saiakuntzaren bidez E eta ν neur daitezkeen bezala, G esperimentalki ere neur daiteke, ebakidura hutsa sortzen duen saiakuntza bat eginez eta tentsioen eta deformazioen arteko erlazioa neurtuz. Tentsio-egoera hori lortzeko, normalean, sekzio hutsa eta horma mehea duten hodiak erabiltzen dira, bihurtura-momentu bat aplikatuz. Dena den, saiakuntza horiek zailtasun bat baino gehiago izaten dituzte, eta gehienetan G koefiziente elastikoa zeharka kalkulaten da, E eta ν trakzio-saiakuntzatik lortu ondoren.



4.13. irudia.

Bigarren gaian azaldu zen bezala, tentsio-matrizea bi matrizeren batura modura idatz daiteke. Horietakoa matrize bati matrize esferikoa deritzo, $\vec{\vec{T}}_e$, eta besteari matrize desbideratzailea, $\vec{\vec{T}}_d$. Matrize esferikoa diagonal da; beraz, ez du osagai ebakitzailerik. Hori dela-eta, matrize horrek ez du distortsiorik sortzen, bolumen-aldaketa bat baizik. Koefiziente elastikoei buruzko atal hau bukatzeko, ikus dezagun gorputz batek bolumena aldatzeko duen joera edo erraztasuna adierazten duen propietate elastiko bat. Horretarako, 4.13. irudian agertzen den bezalako tentsio-egoera bat suposatuko dugu, hots, p balioko konpresio hidrostatikoa bat. Kasu horretan, luzetarako deformazio unitarioen balioak hauekex lirategu:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \frac{1}{E}[-p - \nu(-p - p)] = -\frac{(1 - 2\nu)}{E} p, \tag{4-93}$$

eta hirurak batuz,

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = e = J_1 = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E} p. \tag{4-94}$$

Hemen, e balioa bolumen-aldaketa unitarioa da. Honelaxe idatz dezakegu ekuazio hori:

$$e = -\frac{p}{K}, \tag{4-95}$$

non K delakoa *konprimagarritasun-modulua* baita:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (4-96)$$

Konpresio-egoeran bolumena handitzea fisikoki ezinezkoa denez, nahitaez $K > 0$ da; eta $E > 0$ denez, hauxe ondorioztatzen da:

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (4-97)$$

Alegia, Poisson-en koefizientea zero baino handiagoa izan behar da, trakzio-saiakuntzan indarra aplikatutako norabidean luzapena dagoenean, zeharkakoan laburpena egon behar delako nahitaez. Bukatzeko, 4.1. taulan E , G , ν eta K -ren arteko erlazioak agertzen dira laburbildurik.

	E	ν	G	K
E, ν	E	ν	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
E, G	E	$\frac{E-2G}{2G}$	G	$\frac{GE}{3(3G-E)}$
E, K	E	$\frac{3K-E}{6K}$	$\frac{3EK}{9K-E}$	K
G, ν	$2G(1+\nu)$	ν	G	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$
K, ν	$3K(1-2\nu)$	ν	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	K
G, K	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{1}{2} \frac{3K-2G}{3K+G}$	G	K

4.1. taula.

4.7. TENTSIO ETA DEFORMAZIO TERMIKOAK

Gai hau bukatzeko, ikus dezagun nola kalkula daitezkeen tenperatura-aldaketen ondorioz sortutako deformazioak. Demagun hasieran deformaziorik gabe dagoen gorputz bat dugula, eta gorputz horrek ΔT tenperatura-aldaketa uniformea jasaten duela. Tenperatura-aldaketaren eragina kontuan hartzeko, (4-70) espresioetan emandako ekuazioetako batzuk osatu beharko ditugu. Guztiontzat ezaguna den bezala, gorputz bat berotzen denean, zabaldu edo dilatatu egiten da, eta prozesu hori itzulgarria da; hau da, hoztu eta gero gorputzak hasierako forma berreskuratzen du. Materiala isotropoa denean, puntu bateko elementu infinitesimal guztiek, edozein norabide dutela ere, luzapenak jasaten dituzte, eta hasierako norabidea gordetzen dute. Hau da, luzera-aldaketak gertatzen dira, baina angelu-aldaketarik gabe. Luzera-aldaketa tenperaturaren funtzio lineala dela frogatu daiteke esperimentalki, hots, luzapenak tenperatura-aldaketarekiko proportzionalak direla, hots:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T, \quad (4-98)$$

non α delakoa materialaren *zabalkuntza*- edo *dilatazio-koefizientea* baita. Beraz, (4-98) ekuaziotik, tenperatura-aldaketak elementu linealean sortutako deformazio unitarioa lor daiteke:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \Delta L = \alpha \Delta T. \quad (4-99)$$

Ardatz koordinatuen hiru norabideetan kalkulu berdina egingo bagenu, deformazioen matrizeak itxura hau hartuko luke:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \alpha \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \Delta T \end{bmatrix}. \quad (4-100)$$

eta ondorioz, tentsioek eta tenperatura-aldaketak sortutako deformazioak batuz, Hooke-ren legeak honelaxe berridatziko genituzke:

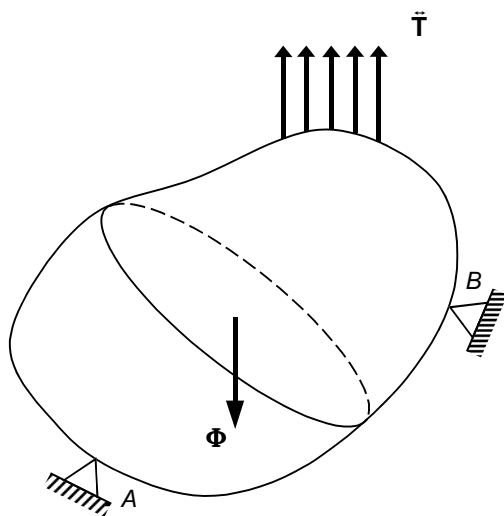
$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] + \alpha \Delta T, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right] + \alpha \Delta T, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] + \alpha \Delta T, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (4-101)$$

Ikusten den bezala, tenperatura-aldaketek luzetarako osagaietan soilik eragiten dute, distortsiorik ez baitute sortzen. Gorputzaren deformazioa oztopatuta ez badago, tenperatura-aldaketek ez dute tentsiorik sortuko, libreki deformatzeko aukera edukiko baitu. Alderantziz, gorputza bermaturik eta deformazioak nolabait oztopatuta badaude, tenperatura aldatzean tentsioak agertuko dira, elementua behartuta geldituko baita. Tentsio horiei *tentsio termikoak* deritze.

5. Problema elastikoaren ebazpena

5.1. SARRERA

Gai honetan aurreko hiru gaietan agertutako ekuazioak laburbilduko ditugu, eta osatzen duten ekuazio-sistema nola aska daitekeen aztertuko dugu. Gogora dezagun elastikotasunaren teoriaren helburua kanpoko indar batzuen eraginpean dauden gorputz elastikoen portaera ezagutzea dela. Dakigun bezala, indar horiek gainazalekoak edo bolumenekoak izan daitezke (ikus 5.1. irudia). Orain arte ikusitakoaren arabera, problema hori ebazteko, gorputzeko puntu guztietan $\bar{\mathbf{T}}$ tentsio matrizea, $\bar{\mathbf{D}}$ deformazio-matrizea eta desplazamendubektorea lortu behar ditugu. Kanpoko indarrei eta puntuen desplazamenduei *kanpoko aldagaiak* deritze, eta tentsio eta deformazioei, berriz, *barneko aldagaiak*. Horrez gain, kanpoko indarrak eta tentsioak *magnitude estatikoak* direla esaten da, eta desplazamenduak eta deformazioak, aldiz, *zinematikoak*.



5.1. irudia.

Ikus dezagun zein izan diren orain arte agertu zaizkigun ekuazio desberdinak. Tentsio kontzeptua definitu eta tentsioen matrizea aurkeztu ondoren, lehendabizi tentsioen barne-orekako ekuazioak lortu genituen. Ekuazio horiek hiru ziren eta ondoko era honetan idatz daitezke laburki:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \Phi_x &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \Phi_y &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \Phi_z &= 0,
\end{aligned} \tag{5-1}$$

non Φ_i direlakoak bolumen-indarrak baitira. Desplazamenduak eta deformazioak, beste ekuazio hauen bidez erlazionatzen ziren,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} = u_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\
\varepsilon_{yy} = v_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\varepsilon_{zz} = w_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_y + v_x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \\
\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(u_z + w_x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xz}, \\
\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(v_z + w_y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{yz}.
\end{aligned} \tag{5-2}$$

Tentsio eta deformazio horien arteko erlazioa portaera-legeen bidez adierazten da. Material isotropoen kasuan, ekuazio horiek Hooke-ren legean oinarritzen dira,

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{xx}, \\
\sigma_{yy} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{yy}, \\
\sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{zz}, \\
\tau_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy}, \\
\tau_{xz} &= 2G\varepsilon_{xz}, \\
\tau_{yz} &= 2G\varepsilon_{yz},
\end{aligned} \tag{5-3}$$

non λ eta G balioak Lamé-ren konstanteak baitira, eta e delakoa bolumen-aldaketa unitarioa. Ekuazio horiez gain, deformazioaren osagaiek bateragarritasun-ekuazioak bete behar dituzte gorputzeko puntu guztietan, hots:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}, \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right), \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right), \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right).
 \end{aligned}
 \tag{5-4}$$

Azkenik, gainazaleko puntuetan tentsioek mugaldeko oreka-ekuazioak bete behar dituzte, hots,

$$\begin{aligned}
 T_x &= \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z, \\
 T_y &= \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z, \\
 T_z &= \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z,
 \end{aligned}
 \tag{5-5}$$

non n_j direlakoak gainazalarekiko bektore elkarzutaren kosinu zuzentzaileak diren.

Beraz, (5-1), (5-2) eta (5-3) espresioek hamabost ekuazio eta hamabost ezezaguneko sistema bat osatzen dute. Ekuazio-sistema hori askatzeko (integratzeko) orduan, zenbait integrazio-konstante agertzen dira. Konstante horiek kalkulatzeko, tentsioek eta deformazioek mugaldean bete behar dituzten ekuazioak erabiliko ditugu, hots, (5-4) eta (5-5) ekuazioak, segidan azalduko dugun bezala. Gainera, ekuazio-sistema horrek soluzio bakarra daukala ziurta daiteke, Kirchhoff-en bakartasun-teoremak agertzen duen bezala.

Goian esandakoaren arabera, gorputz bateko puntu guztien desplazamenduak ezagutuko bagenitu, orduan, deformazio-matrizea zuzenean kalkulatu ahal izango genuke, (5-2) ekuazioko espresioak aplikatuz. Tentsioen matrizea (5-3) espresioeko Lamé-ren ekuazioen bidez lortuko genuke. Gorputzeko puntuetan datu modura deformazioen matrizea emango baligute, (5-5) bateragarritasun-ekuazioak betetzen dituela egiaztatu ondoren, desplazamenduak (5-2) ekuazioak integratuz lortuko genituzke, eta tentsioen matrizea Lamé-ren ekuazioak aplikatuz. Aldiz, tentsioen matrizea ezaguna balitz, deformazioen matrizea Hooke-ren lege orokorraren bidez kalkulatu genuke, eta desplazamenduak integrazioaren bidez. Halere, gehienetan, ezagunak direla suposatu ditugun magnitude horiek guztiak ezezagunak izaten dira. Izan ere, normalean ezagutzen diren datu bakarrak gorputzaren gainazalean aplikatutako indarrak edo zenbait punturen desplazamenduak izaten dira. Ondorioz, ezagunak diren datuen arabera, problema elastikoaren ebazpena desberdina izaten da.

Bolumen-indarrak eta gorputzaren gainazal-indarrak ezagunak direnean, problema elastikoari *lehen mailakoa* edo *Neumann-en problema* deritzen, eta ezezagunak desplazamenduak izango dira. Mugaldean desplazamenduak ezagutzen direnean, *bigarren mailakoa* edo *Dirichlet-en problema* deitzen da, eta ezezagunak tentsioak dira. Halere, ez dira horiek sarrien agertzen diren kasuak. Gehienetan, gainazaleko zati batzuetan aplikatutako indarrak izaten dira ezezagunak, eta beste zati batzuetan, aldiz, desplazamenduak. Kasu honi *problema nahasia* edo *mistoa* deritzen. Ikus dezagun, bada, nola ebatz daitekeen problema elastikoa definitzen duen ekuazio-sistema.

5.2. DESPLAZAMENDUEN FORMULAZIOA. NAVIER-EN EKUAZIOAK.

Problema elastikoa ebazteko era bat ekuazioak desplazamenduen funtzioan idaztea da. Horretarako, lehenik eta behin tentsioak u, v, w desplazamenduen funtzioan idatziko ditugu, Lamé-ren ekuazioak abiapuntu gisa hartuta. Adibidez, σ_{xx} osagaiarentzat (4-64)-ko lehenengo ekuazioa hartuta, honelaxe idatz dezakegu:

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{xx} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5-6)$$

eta τ_{xy} eta τ_{xz} osagaiak,

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right). \quad (5-7)$$

Espresio horiek (5-1)-eko lehenengo ekuazioan ordeztuko bagenu, hauxe lortuko genuke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \Phi_x &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &+ G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \Phi_x = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ &+ G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \Phi_x = \\ &= (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \cdot \nabla^2 u + \Phi_x = 0. \end{aligned} \quad (5-8)$$

Eragiketa berdinak σ_{yy} eta σ_{zz} -rekin egin ondoren, Navier-en hiru ekuazio hauetara iritsiko ginateke:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \cdot \nabla^2 u + \Phi_x &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \cdot \nabla^2 v + \Phi_y &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \cdot \nabla^2 w + \Phi_z &= 0, \end{aligned} \quad (5-9)$$

non ∇^2 delakoa Laplace-ren eragilea den, hots:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (5-10)$$

eta e delakoa bolumen-aldaketa unitarioa, hots:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (5-11)$$

Hain zuzen, (5-9) ekuazioko espresioek hiru ezezagun eta hiru ekuazio partzialeko sistema bat osatzen dute. Ekuazio horiek desplazamendu-eremu batek problema elastikoaren soluzio izateko bete behar dituen baldintza beharrezko eta nahikoak adierazten dituzte. Ekuazio horiek integratzeko orduan, mugako baldintzak inposatuz kalkulatu behar diren integrazio-konstante batzuk agertzen dira. Baldintza horiek desplazamenduetan ezagutuko balira, konstanteen kalkulua berehalakoa izango litzateke. Beraz, problema elastikoa kalkulatzeko bide hau bigarren mailakoak deitu ditugun problemetan komeni da aplikatzea, mugako baldintzak gainazaleko puntuen desplazamenduak baitira. Halere, mugako baldintzak tentsioen funtzioan ezagutuko bagenitu, mugaldeko oreka-ekuazioak eta Lame-ren ekuazioak erabili beharko genituzke, (5-3) erlazioak (5-4) ekuazioan ordeztuz. Azkenik, deformazioen bateragarritasun-ekuazioak zuzenean beteko direla ziurta dezakegu, zeren desplazamenduen deribazioz lortzen baitira.

Honelatan bada, (5-9)-ko hiru ekuazioak hurrenez hurren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 eta \mathbf{e}_3 bektore unitarioez biderkatuz gero eta batu ondoren, hauxe lortzen da:

$$(\lambda + G) \cdot \nabla e + G \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + \Phi = 0, \quad (5-12)$$

non ∇ delakoa gradiente deritzon eragilea baita, hots:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3, \quad (5-13)$$

eta \mathbf{u} delakoa desplazamendu-bektorea, hots:

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3. \quad (5-14)$$

Preseski, (5-12) ekuazioari *elastikotasunaren oinarrizko ekuazioa* deritzo, eta bektorialki adierazita dagoenez, edozein erreferentzia-sistemarekiko independentea da. Bolumen-unitateko indarrak konstanteak direnean, Navier-en ekuazioetatik zenbait ondorio interesgarri lor daitezke berehala, segidan ikusiko dugun bezala. Hain zuzen, (5-9) ekuazioko lehen espresioa x -ekiko deribatuz, bigarrena y -rekiko eta hirugarrena z -rekiko, eta hirurak batuz, honako hau lortzen da:

$$(\lambda + G) \cdot \nabla^2 e + G \cdot \nabla^2 e = 0, \quad (5-15)$$

eta beraz,

$$\nabla^2 e = 0. \quad (5-16)$$

Ondorioz, bolumen-unitateko indarrak konstanteak direnean, bolumen-aldaketa unitarioa funtzio harmoniko bat da gorputzeko puntu guztietan.

Bestalde, Navier-en ekuazioei Laplace-ren eragilea aplikatuz gero, honako hiru espresio hauetara iristen gara:

$$\begin{aligned}(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 e + G \cdot \nabla^4 u &= 0, \\(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 e + G \cdot \nabla^4 v &= 0, \\(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 e + G \cdot \nabla^4 w &= 0,\end{aligned}\tag{5-17}$$

non ∇^4 delakoa bilaplacetar eragilea den. (5-16) ekuazioaren arabera, e delakoa funtzio harmonikoa denez,

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0, \quad \nabla^2 w = 0.\tag{5-18}$$

Alegia, desplazamendu-bektorearen osagaiak funtzio biharmonikoak izango lirateke gorputzeko puntuetan.

5.3. TENTSIOEN FORMULAZIOA. MICHELL-EN ETA BELTRAMI-REN EKUAZIOAK

Problema elastikoa tentsioen funtzioan ere adieraz daiteke, hau da, tentsio-matrizeko osagaiak ezezagun modura aukeraturata. Formulazio hori mugaldekoko puntuetan indarrak edo tentsioak ezagutzen direnean aplikatzea komeni da. Has gaitezten lehenik eta behin deformazioen bateragarritasun-ekuazioak tentsioen funtzioan adierazten. Horretarako, (5-4)-ko hirugarren espresioa hartuko dugu abiapuntu gisa, hots:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2}.\tag{5-19}$$

Lame-ren ekuazioetatik, deformazioak honelaxe adieraz daitezke tentsioen funtzioan:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz} - \lambda e}{2G}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy} - \lambda e}{2G},\tag{5-20}$$

eta e eta λ , honelaxe:

$$e = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1-2\nu}{E} J_1, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\tag{5-21}$$

non J_1 balioa tentsioen lehenengo aldaezina den. Erlazio horiek guztiak (5-19) ekuazioan ordeztuz:

$$\begin{aligned}\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2G} \left[\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} - \lambda \frac{1-2\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} \right) \right] \Rightarrow \\&\Rightarrow 2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} \right).\end{aligned}\tag{5-22}$$

Bestalde, (5-1)-eko bigarren eta hirugarren oreka-ekuazioak y eta z -rekiko deribatuz, hurrenez hurren, eta osagaiz osagai batuz gero:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}. \quad (5-23)$$

Eta lehenengo oreka-ekuaziotik honako hau betetzen dela kontuan harturik:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\Phi_x - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \quad (5-24)$$

eta (5-23) erlazioa (5-22) ekuazioan ordeztuz:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (5-25)$$

Goiko espresioan $\partial^2 \sigma_{yy} / \partial x^2$, $\partial^2 \sigma_{zz} / \partial x^2$ eta $\partial \Phi_x / \partial x$ gaiak batuz eta kenduz:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \\ & - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial \Phi_y}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial \Phi_x}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5-26)$$

hau da,

$$\begin{aligned} & \nabla^2 (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} \right) = \\ & = -\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \nabla^2 (J_1 - \sigma_{xx}) - \frac{\partial^2 J_1}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\nabla^2 J_1 - \frac{\partial^2 J_1}{\partial x^2} \right) = \\ & = -\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \nabla^2 J_1 - (1+\nu) \nabla^2 \sigma_{xx} - \frac{\partial^2 J_1}{\partial x^2} = -(1+\nu) \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) + 2(1+\nu) \frac{\partial \Phi_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5-27)$$

Eragiketa berdinak eginez, honako beste bi ekuazio hauek ere lortuko genituzke:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 J_1 - (1+\nu) \nabla^2 \sigma_{yy} - \frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} = -(1+\nu) \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) + 2(1+\nu) \frac{\partial \Phi_y}{\partial y}, \\ & \nabla^2 J_1 - (1+\nu) \nabla^2 \sigma_{zz} - \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} = -(1+\nu) \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) + 2(1+\nu) \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5-28)$$

Hiru ekuazio horiek osagaiz osagai batuz gero, $\nabla^2 J_1$ aska dezakegu:

$$\nabla^2 J_1 = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right), \quad (5-29)$$

eta (5-27) eta (5-28) ekuazioetan ordeztuz:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial \Phi_x}{\partial x}, \\ \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial \Phi_y}{\partial y}, \\ \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5-30)$$

Azter ditzagun orain (5-4)-ko azken hiru bateragarritasun-ekuazioak. Laugarrenak hauxe dio:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right). \quad (5-31)$$

Lame-ren ekuazioetatik deformazioak tentsioen funtzioan idatziz gero, (5-20) ekuazioan egin genuen bezala, eta goian ordeztuz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y \partial z} - \lambda \frac{1-2\nu}{E} \frac{\partial^2 J_1}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial y \partial z} &= -\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (5-32)$$

Oraingoa bigarren oreka-ekuazioa z -rekiko eta hirugarrena y -rekiko deribatuz, biak batu ondoren honako hau irtetzen da:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial y}. \quad (5-33)$$

Eta (5-32) ekuazioan ordeztuz,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial y \partial z} &= -\nabla^2 \tau_{yz} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5-34)$$

Lehen bezala, eragiketa berdinak beste bi bateragarritasun-ekuazioekin errepikatuz, beste bi ekuazio lortuko genituzke. Kalkulu guztiak egin eta gero, (5-30) eta (5-34) ekuazioetan agertzen diren sei erlazioetara iritsiko ginateke. Ekuazio horiei *Michell-en ekuazioak* deritze:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial \Phi_x}{\partial x}, \\
 \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial \Phi_y}{\partial y}, \\
 \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}, \\
 \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} \right), \\
 \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial x \partial z} &= -\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial x} \right), \\
 \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 J_1}{\partial x \partial y} &= -\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{5-35}$$

Bolumen-unitateko indarren bektorea konstantea denean, sarritan gertatzen den bezala, goiko ekuazioak honelaxe laburbiltzen dira:

$$\begin{aligned}
 (1+\nu)\nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial x^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial y \partial z} &= 0, \\
 (1+\nu)\nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial y^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial x \partial z} &= 0, \\
 (1+\nu)\nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 J_1}{\partial x \partial y} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5-36}$$

Espresio horiei *Beltrami-ren ekuazioak* deritze. Ikusten den bezala, tentsioak koordinatuen funtzio linealak badira, bateragarritasun-ekuazioak automatikoki betetzen dira. Beraz, (5-35) eta (5-36) ekuazioek tentsio-eremu bat problema elastikoaren soluzio izan daitekeen ala ez jakiteko erabil daitezke. Tentsio-egoera kalkulatzeko ekuazio-sistema horiek ebatzi beharko dira, eta mugaldeko oreka-baldintzak aplikatu integrazio-konstanteak askatu ahal izateko. Tentsioak kalkulatu ondoren, deformazioak Hooke-ren legeen bidez kalkulatuko genituzke; eta (5-2) ekuazioen integrazioaren bidez, desplazamenduak.

5.4. EKUAZIO-SISTEMAREN EBAZPENA

Aurreko ataletan agertu diren ekuazio-sistemen ebazpena ez da batere erraza izaten gehienetan. Ikusi dugun bezala, problema elastikoaren soluzioa lortzeko, hamabost ekuazio eta hamabost ezezaguneko sistema bat ebatzi behar da, eta mugako baldintza guztiak bete behar dira. Sistema horretako zenbait aldagai desagerraraziz gero, ekuazioen kopurua murriztea lor daiteke, desplazamenduen funtzioan (Navier-en ekuazioak) edo tentsioen funtzioan (Beltrami eta Michell-en ekuazioak) adieraziz. Problema elastikoa ekuazio-sistema horien bidez ebazten denean, *metodo lokal* bat erabiltzen ari garela esaten da. Segidan ikusiko dugun bezala, problema elastikoa baldintza batzuk betetzen dituenan zenbait hurbilketa egin daitezke, eta arestian aurkeztutako ekuazio-sistema sinplifikatu. Era horretan,

hiru dimentsioko problema batetik bi dimentsioko beste batera pasa gaitzke, kalkulua sinplifikatuz.

Badago, halere, problema elastikoa planteatzeko beste era bat. Hain zuzen, *metodo globalak* deritzenetan, problema elastikoa era bariasionalean idazten da ebatzi baino lehen. Orain dela gutxi arte, problema elastikoaren adierazpen bariasionalean oinarritutako metodoak ez ziren erabiltzen, Gaur egun, ordea, garrantzia handia duten metodoak dira. Rayleigh-Ritz-en teknikak, mugako integralak edo elementu finituen metodoa, adibidez, adierazpen bariasionalean daude oinarrituta. Metodo global horien eraginkortasuna areagotu egin da azken hamarkadetan zehar ordenagailuek ezagutu duten garapenarekin eta, batez ere, elementu finituen metodoaren agertzearekin.

Hurrengo ataletan, problema elastikoa adierazpen lokalean nahiz globalean ebazten lagun dezaketen zenbait metodo aurkeztuko ditugu, laburki bada ere. Azpimarratu behar da, halere, hemen aipatuko diren metodoak ez direla existitzen diren bakarrak. Nahi izanez gero, metodo horien azalpen sakonagoa bibliografiako erreferentzietan aipatzen diren lanetan barna aurki daiteke.

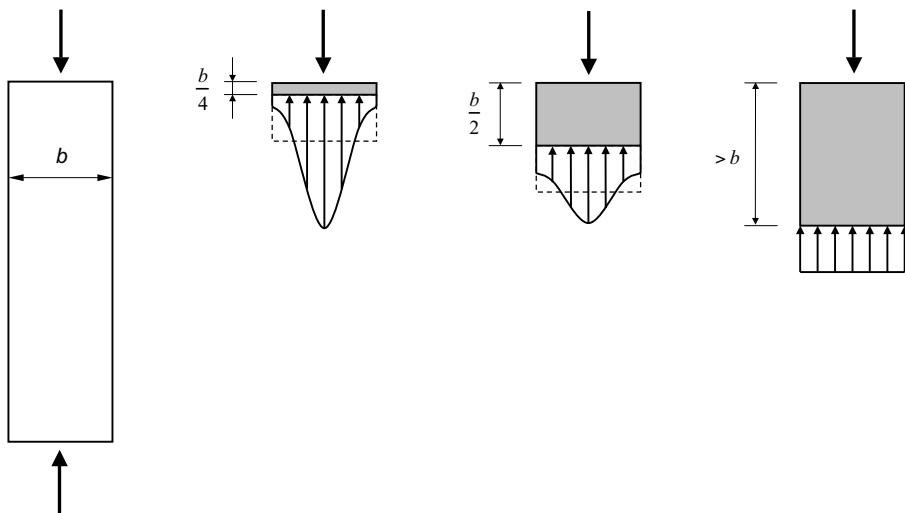
5.5. SAINT VENANT-EN PRINTZIPIOA

Problema elastikoaren ebazpena ikusi eta gero, erraz uler daiteke gorputzaren geometriaren eta aplikaturiko indarren banaketaren arabera, soluzio analitiko baten kalkulua oso zaila izan daitekeela. Lortutako emaitzaren zehaztasuna, gainera, erabilitako mugaldekoko baldintzen menpe dago. Izan ere, problema ebazteko aukeratzen diren mugaldekoko baldintzak baldintza errealeatik oso desberdinak badira, lortutako emaitzak ez dira fidagarriak izango. Dena dela, sarritan posiblea izaten da soluzio onargarri bat lortzea, mugaldekoko baldintzak zertxobait aldatu arren. Adibidez, gorputzaren gainazaleko puntu batean indar puntual bat badugu, azalera batean hedaturiko indar batekin ordeztu beharko genuke, tentsioaren balioa infinitua izan ez dadin. Ordezpen hori egiteko, indar hedatua eta hasieran geneukan indarra estatikoki baliokideak izan beharko dira, noski. Hurbilketa hori egin ondoren, indarra aplikatuta zegoen puntuaren inguruko tentsio-banaketa ere aldatu egingo da; baina, zer gertatzen zaio gorputzaren gainerako puntuen tentsio-egoerari? Saint Venant-en printzipioa galdera horiek guztiak argitzen saiatzen da eta hauxe dio:

“Gainazaleko puntu batean eragiten duen indar bat, estatikoki baliokidea den beste indar batez ordeztzen bada, tentsio-banaketaren aldaketa indarraren aplikazio-puntutik gertu dauden puntuetan bakarrik nabaritu da, eta urrun dauden gainerako puntuetan egoerak ia aldaketarik gabe iraungo du”.

Printzipio hori oso baliagarria da, problema elastikoak sinplifikatzeko aukera ematen baitu, horiek ebazteko orduan. Hain zuzen, 5.2. irudian Saint Venant-en printzipioaren aplikazio bat agertzen da. Irudian agertzen den elementua konpresiopean dago muturretan eragiten duten indarren ondorioz. Indar puntuala aplikatuta dagoen sekzioan tentsio-egoerak duen itxura kalkulatzeko ez da erraza, baina aldenduago dauden sekzioetan tentsio-banaketa uniforme dela suposa daiteke, orain arte egin dugun bezala. Indar hori erdia balio duten bi indarrekin ordeztuko bagenu, adibidez, tentsio-egoera aldatu egingo litzateke aplikazio-puntutik gertu dauden puntuetan, baina urrun dauden beste sekzioetan tentsio-

banaketak uniforme izaten jarraitzen duela suposa dezakegu, Saint Venant-en printzipioaren arabera. Are gehiago, indar kontzentratua erresultante berdineko indar hedatu uniforme batez aldatu ahal izango genuke, akats handirik egin gabe kalkuluetan.



5.2. irudia.

Bukatzeko, esan dezagun Saint Venant-en printzipioa zenbait kasutan ezin daitekeela aplikatu. Dena den, liburu honetan zehar Saint Venant-en printzipioa beti aplikagarria dela suposatuko dugu.

5.6. GAINEZARPEN-PRINTZIPIOA

Elastikotasunaren teoria linealean agertzen diren ekuazioak, ikusi dugun bezala, ekuazio linealak dira; hau da, lehen mailako gaiak agertzen dira soilik espresio guztietan. Horri esker, gorputz elastikoen portaera aztertzeke orduan, gainezarpen-printzipioa aplikatu dezakegu.

Printzipio honen arabera, aplikatuta dauzkan indarren aurrean gorputz batek edukiko duen erantzuna, indar bakoitzaren eragina bere aldetik kalkulatu lortzen diren erantzun guztien batura izango da. Printzipio honek aurreko gaitan ikusitako magnitude guztientzat balio du, nahiz eta frogapena egiteko tentsioak erabiliko ditugun adibide gisa.

Izan bedi gorputz elastiko bat, $\Phi(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$ bolumen-indarren eta $\mathbf{T}(T_x, T_y, T_z)$ gainazal-indarren eraginpean dagoena, eta $\bar{\mathbf{T}}$ delakoa puntu bateko tentsio-matrizea. Demagun orain beste indar-egoera desberdin bat, non bolumen-indarrak eta gainazal-indarrak $\Phi'(\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z)$ eta $\mathbf{T}'(T'_x, T'_y, T'_z)$ diren, hurrenez hurren. Bigarren egoera horretako tentsio matrizea $\bar{\mathbf{T}}'$ izango litzateke. Gainezarpen-printzipioaren arabera, bi indar-egoerak gorputzean batera aplikatuko balira, tentsio-matrizea kasu bakoitzeko matrizeen batura izango litzateke, hots, $\bar{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{T}}'$. Baieztapen hori egia izan dadin, tentsioek mugaldekoko eta barneko oreka-ekuazioak eta deformazioen bateragarritasun-ekuazioak bete beharko dituzte. Froga dezagun, adibide gisa, barneko oreka-ekuazioetako lehenengo baldintzak bete

egiten direla. Karga-egoerak bananduta hartuko bagenitu, bakoitzak ekuazio hauek bete beharko lituzke:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \Phi_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + \Phi'_x &= 0.\end{aligned}\tag{5-37}$$

Osagaiz osagai batuz gero,

$$\frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma'_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} + \tau'_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz} + \tau'_{xz})}{\partial z} + (\Phi_x + \Phi'_x) = 0.\tag{5-38}$$

Ikusten den bezala, bi egoeretako tentsio-matrizeak batuz gero lortzen den matrize baliokideak (5-38) ekuazioa beteko luke, gainezarpena aplikatu daitekeela frogatuz. Era berean, beste ekuazioak ere betetzen direla ikusiko genuke. Beraz, bi indar-egoeren baturaren soluzioa kalkulatzeko, egoera bakoitzari dagozkion soluzioak batu beharko genituzke. Erraz uler daiteke, baita ere, indarrak aplikatzeko orduan jarraitutako ordenak ez duela eraginik bukaerako emaitzan. Berehala lor daitekeen beste ondorio bat eraginen eta erantzunaren arteko proportzionaltasuna da: indarrak faktore batez biderkatuz gero, soluzioko magnitude guztiak faktore berberaz biderkatuta geratuko lirateke.

Dena den, ez da ahaztu behar gainezarpen-printzipioaren aplikagarritasuna ekuazioen izaera linealean oinarritzen dela, eta ez dela teoria ez-lineal batean beteko. Adibidez, deformazioak txikiak direla suposatuko ez bagenu, gorputzaren portaera deskribatzen duten ekuazioak ez lirateke linealak izango eta ezingo genuke printzipio hau aplikatu. Marruskaduraren ondorioz energia-galerak dauden kasuetan ere, indarrak aplikatzean jarraitutako ordenak eragina dauka, eta gainezarpen-printzipioa ez da baliokoa izango.

5.7. ELASTIKOTASUN LAUA

Ingeniaritzako problema askotan, gorputzaren geometriak eta aplikatutako indarrek baldintza batzuk betetzen dituztenean, zilegia izaten da tentsio-matrizeko zenbait osagai nuluak direla suposatzea. Hurbilketa horrekin, hiru dimentsioko problema konplexu bat errazago bihur daiteke, bi dimentsiokoa izango balitz bezala kalkulatu. Era honetako problemek problema lauak deritze eta garrantzi handia dute, kasu askotan problemak bi dimentsiokoak direla onar daitekeelako, Materialen Erresistentziarekin hasten garenean ikusiko dugun bezala. Egoera lauak bi motatakoak izan daitezke: tentsio-egoera lauak eta deformazio-egoera lauak. Atal honetan bi egoera horiek aztertuko ditugu, eta hiru dimentsioko kasuentzat arestian lortu ditugun ekuazio orokorrak nola sinplifikatzen diren ikusiko dugu.

5.7.1. Deformazio-egoera laua

Deformazio-egoera lauaren hipotesia norabide batean luzera oso handia duten egiturei aplikatu daiteke. Norabide horretan geometria eta aplikatutako kargak gutxi aldatzen badira, problema errazten duten zenbait hipotesi egina daitezke. Egoera horren adibide ezagun bat

urtegietan erabiltzen diren hormena da, aipatutako baldintzak nahiko zehazki betetzen baititu. Kasu horretan, luzera handiko norabideari z deitzen badiogu, w desplazamendua nulua dela suposa daiteke, eta beste biak —hots, u eta v — x eta y -ren menpe daudela soilik. Hortaz, z ardatzarekiko elkarzutak diren plano guztien deformazioa berdina dela suposa daiteke:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \\ w &= 0. \end{aligned} \tag{5-39}$$

Beraz, desplazamendu eta deformazio unitarioen arteko erlazioen arabera, hauxe beteko da:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{5-40}$$

Deformazio-egoera lauari dagokion matrizea honako hau da:

$$\vec{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5-41}$$

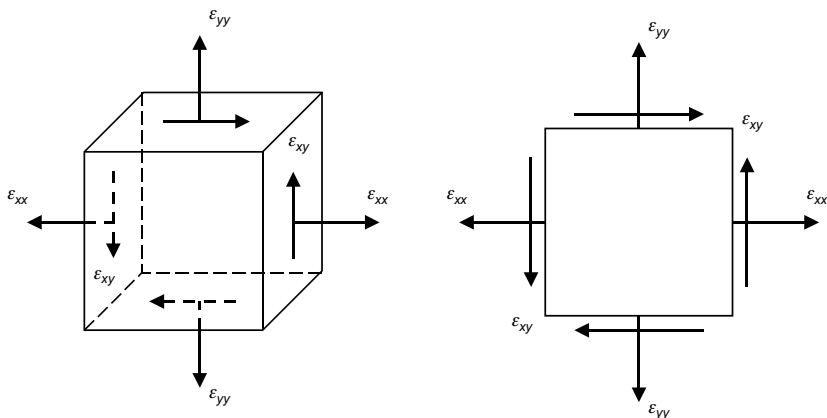
Hain zuzen, 5.3. irudian horren adierazpen grafikoa agertzen da.

Kalkula ditzagun orain (5-41) egoerako deformazio-matrizeari dagozkion tentsio nagusiak. Hirugarren gaian ikusitakoa gogoratuz (ikus (3-24) ekuazioa), ondoko hirugarren mailako polinomioa lortuko genuke:

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{D}} - \varepsilon \vec{\mathbf{I}}| &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon \end{vmatrix} = \\ &= \varepsilon \left[\varepsilon^2 - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\varepsilon + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy}^2 \right] = 0, \end{aligned} \tag{5-42}$$

eta erroak kalkulatzuz:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}, \\ \varepsilon_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5-43}$$



5.3. irudia.

Deformazio-egoera lauaren kasuan, laugarren gaian ikusitako Lamere-ekuazioak honelaxe idatziko dira:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{xx}, \\
 \sigma_{yy} &= \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{yy}, \\
 \sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \\
 \tau_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy}, \\
 \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{5-44}$$

eta beraz, tentsio-matrizeak itxura hau edukiko luke:

$$\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{bmatrix}.
 \tag{5-45}$$

Puntu batean daukagun deformazio-egoera lau denean, (5-1) espresioaren barneko oreka-ekuazioak honelaxe sinplifikatu daitezke:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \Phi_x &= 0, \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \Phi_y &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5-46}$$

Hooke-ren legeak aplikatuz, deformazioak honako hauek izango dira:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}], \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}], \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}.
 \end{aligned}
 \tag{5-47}$$

Bateragarritasun-ekuazioetatik honako hau geratuko litzateke bakarrik:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5-48)$$

Ekuazio horiek betetzen dituen soluzio bat lortzeko, (5-46) ekuazioko lehenengo espresioa x aldagaiarekiko deribatuko dugu, eta bigarrena y -rekiko. Biak batuz, hauxe lortzen da:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial y}. \quad (5-49)$$

Bestalde, (5-48) ekuazioan (5-47)-ko deformazioen deribatuak ordeztuz:

$$(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5-50)$$

Azkenik, (5-49) eta (5-50) berdinduz, honako hau lortzen da

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = - \frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \right), \quad (5-51)$$

non lehenengo parentesia Laplace-ren ∇^2 eragilea den, hots:

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = - \frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \right). \quad (5-52)$$

Bolumen-indarrak konstanteak direnean, sarritan gertatzen den bezala, (5-52)-ko bigarren parentesia nulua da, eta beraz,

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (5-53)$$

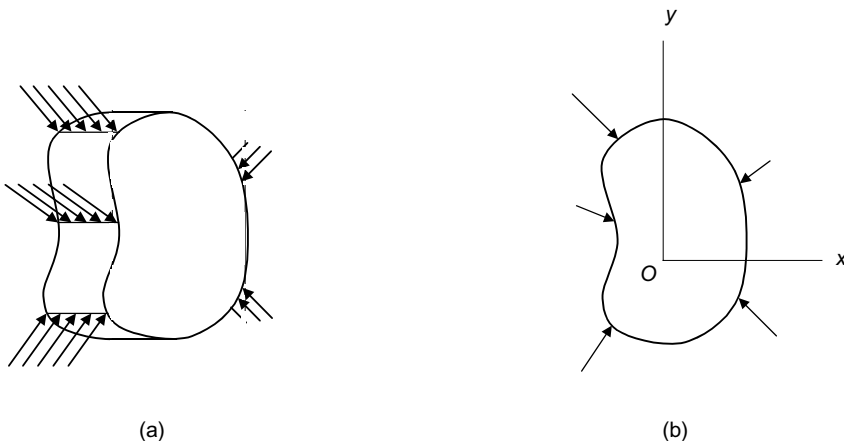
Ekuazio horretatik lortzen den soluzioak oreka-ekuazioak eta bateragarritasun-ekuazioak betetzen ditu. Problemaaren soluzioa lortzeko, (5-53) integratu eta mugako baldintzak inposatu beharko genituzke.

5.7.2. Tentsio-egoera laua

Tentsio-egoera lauaren adibide tipikoak bi dira. Alde batetik, lodiera txikia duten xaflen kasua daukagu. Xafla horiek erdiko planoan kargatuta daudenean, tentsio-egoera lau baten aurrean gaudela suposa daiteke (ikus 5.4.a. irudia). Hurbilketa hori zeharkako sekzioa simetrikoa duten habeetan ere egin daiteke, indarrak simetria-planoan aplikatuta daudenean. Bi kasu horietan, z norabidea duten osagai guztiak nuluak direla suposa daiteke, oker handirik egin gabe, hots:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad (5-54)$$

eta xy planoan egoera laua dugula onar daiteke, 5.4.b. irudian adierazten den bezala.



5.4. irudia.

Tentsio-egoera horren matrizea honako hau izango litzateke (ikus 5.5. irudia):

$$\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5-55)$$

eta tentsio nagusiak, hauexek:

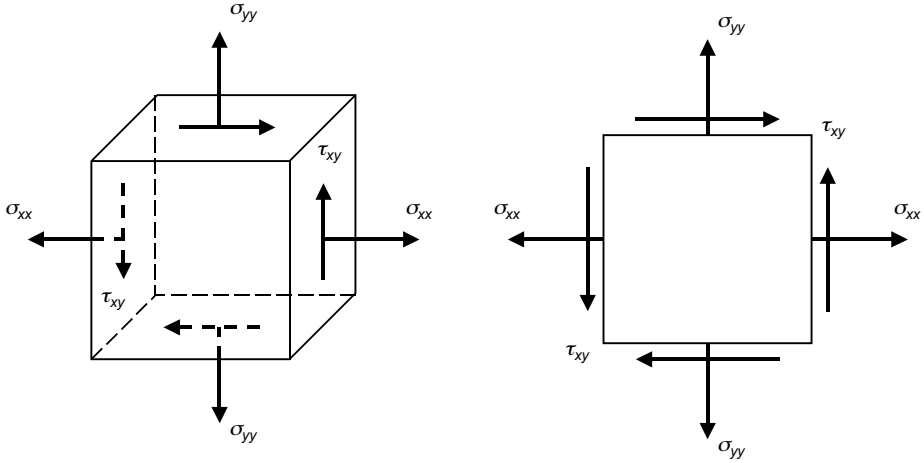
$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{T}} - \sigma \vec{\mathbf{I}}| &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma \end{vmatrix} = \\ &= \sigma \left[\sigma^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\sigma + \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (5-56)$$

Honelatan, bada, erroak kalkulatuz:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5-57)$$

Ikus dezagun orain, deformazio lauaren kasuan egin genuen bezala, problema elastikoaren ekuazioak nola geratzen diren tentsio-egoera laua dugunean. Oraingoan, barne-orekako ekuazioak honelaxe geldituko lirateke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \Phi_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \Phi_y &= 0. \end{aligned} \quad (5-58)$$



5.5. irudia.

Bestalde, σ_{zz} osagaia nulua dela kontuan hartuz, deformazio unitarioak honelaxe idatz ditzakegu tentsioaren osagaien funtzioan:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), & \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}), & \epsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}, & \epsilon_{xz} &= \epsilon_{yz} = 0. \end{aligned} \tag{5-59}$$

Bateragarritasun-ekuazioetatik hauxe geratzen da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \tag{5-60}$$

Lehen bezala, (5-58)-ko lehen ekuazioa x -ekiko eta bigarrena y -rekiko deribatuz, eta biak batu ondoren:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial y}. \tag{5-61}$$

Bestalde, Hooke-ren legeko espresioak deribatu eta (5-60) ekuaziora eramaten baditugu, hauxe lortzen da:

$$2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right). \tag{5-62}$$

Azkenik, (5-61) eta (5-62) berdinduz:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -1 - \nu \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \right). \tag{5-63}$$

Berriro ere bolumen-indarrak konstanteak direla onartuz:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (5-64)$$

Ikusten den bezala, bolumen-indarrak konstanteak (edo nuluak) direnean, deformazio-egoerarentzat eta tentsio-egoerarentzat ekuazio diferentzial berberak lortzen dira. Gainera, ekuazio horietan ez dira materialaren propietateak agertzen eta, beraz, soluzioa materialarekiko independentea da. Propietate hori oso baliagarria da egituren deformazio eta tentsioak saiakuntza esperimentalen bidez lortu nahi direnean. Halere, badago deformazio-egoera lauen eta tentsio-egoera lauen artean desberdintasun garrantzitsu bat. Tentsio-egoera laua denean, erabili gabe utzi ditugun (5-60)-ko ekuazio hauek bete behar dira:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5-65)$$

Baina tentsio lauaren kasuan ε_{zz} osagaiaren balioa honako hau denez,

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad (5-66)$$

oro har, (5-65) espresioiko berdintzak ez dira beteko, zeren horretarako σ_{xx} eta σ_{yy} linealak izan beharko bailirateke, beti egia ez dena. Ondorioz, deformazio lauaren kasuan soluzio zehatza lor daitekeen arren, tentsio laua daukagunean ez da horrela gertatzen. Dena den, gorputzaren lodiera txikia bada, lortutako emaitza onargarria dela suposatuko dugu, nahiz eta bateragarritasun-ekuazio guztiak ez bete.

Atal hau bukatzeko, azter dezagun Mohr-en zirkuluen diagrama tentsio-egoera lauaren kasuarentzat, ondorio interesgarriak lortzen baitira. Demagun 5.6. irudian ageri den \mathbf{n} norabideari dagokion tentsio-bektorea kalkulatu nahi dugula. Norabide hori 1 eta 2 norabide nagusiek osatzen duten planoarekiko elkarzuta da, beraren osagaiak $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ izanik. Bestalde, θ angelua \mathbf{n} norabideak 1 norabide nagusiarekin osatzen duena da. Beraz, norabide nagusiak dituen erreferentzia-sistema bat erabiliz gero:

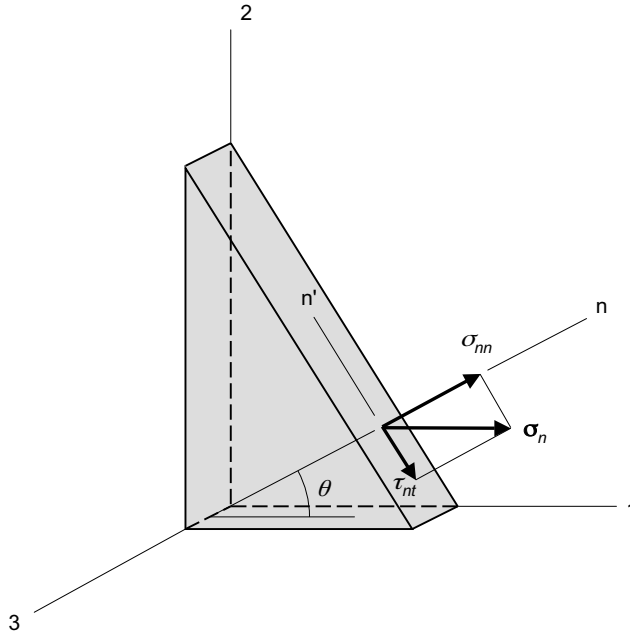
$$\boldsymbol{\sigma}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos\theta \\ \sigma_2 \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5-67)$$

Bigarren gaian ikusitakoa gogoratu, tentsio normala honako hau izango da:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n} = \left\{ \sigma_1 \cos\theta, \sigma_2 \sin\theta, 0 \right\} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta \end{aligned} \quad (5-68)$$

eta angelu bikoitzaren funtzioan:

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad (5-69)$$



5.6. irudia.

hauxe geratuko litzateke:

$$\sigma_{nn} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta. \tag{5-70}$$

Osagai ebakitzailea lortzeko, tentsio-bektorea plano elkarzutean kokatutako \mathbf{n}' norabidean proiektatu beharko genuke. Biderkaketa eskalarraren bidez:

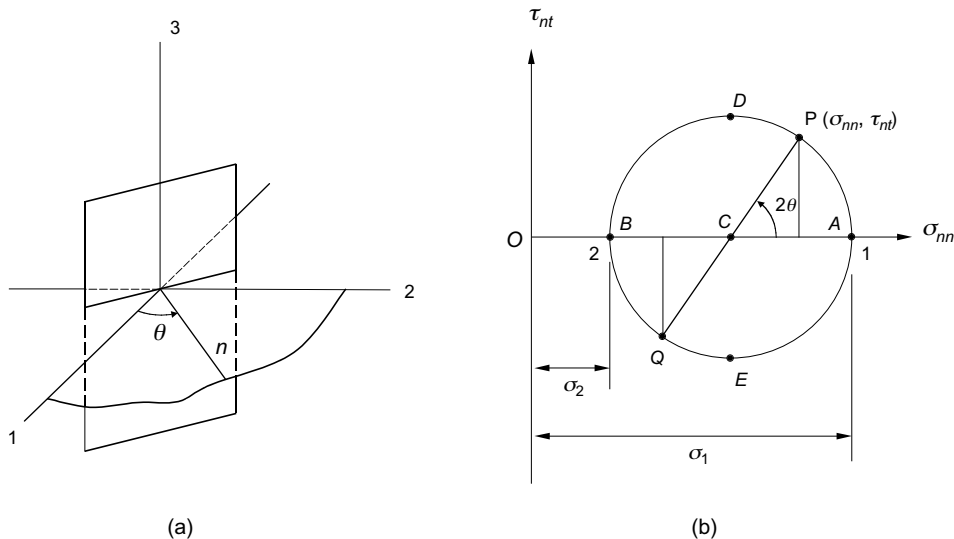
$$\begin{aligned} \tau_{nt} &= \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n}' = \left\{ \sigma_1 \cos \theta, \sigma_2 \sin \theta, 0 \right\} \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \sigma_1 \cos \theta \sin \theta - \sigma_2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \\ \tau_{nt} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta. \end{aligned} \tag{5-71}$$

Bigarren gaian ikusitakoaren arabera, 1-2 plano nagusian kokatutako \mathbf{n} norabide batentzat, 1 ardatz nagusiarekin osatzen duen angelua θ bada, σ_{nn} eta τ_{nt} osagai intrintsekoen balioak (2-104) eta (2-106) ekuazioetan agertzen direnak izango dira.

Ikusten den bezala, orduan ondorioztatu genituen espresioak eta hemen lortu ditugunak berdinak dira. Orduan esan genuen bezala, erlazio horiek zirkunferentzia baten ekuazio polarrak dira, $\sigma_{nn} - \tau_{nt}$ ardatz-sistema batetik adierazten direnean. Espresio horien karratuak hartu eta atalez atal batuko bagenitu, honako hau edukiko genuke:

$$\left(\sigma_m - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{nt}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2, \quad (5-72)$$

hau da, (5.7.b.) irudian azaltzen den zirkulua.

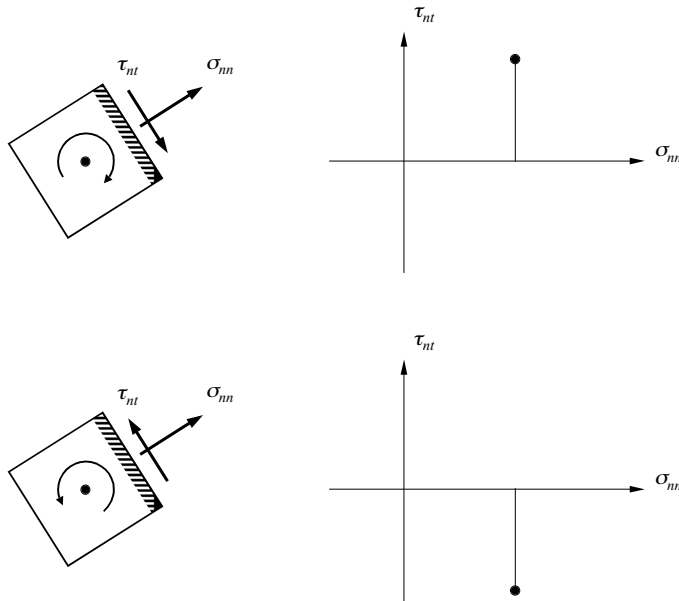


5.7. irudia.

Zirkulu horretan \mathbf{n} norabideari dagokion P puntua non dagoen aurkitzeko, nahikoa da 1 norabidearekin osatzen duen angeluaren bikoitza biratzea. Puntu horren koordinatuak izango dira, hain zuzen, tentsio-bektorearen osagai intrintsekoak (ikus 5.7.b. irudia). $\theta = 0^\circ$ eta $\theta = 90^\circ$ direnean, 1 eta 2 norabide nagusiak lortuko genituzke, hurrenez hurren. Bestalde, 45° -ra dauden tentsioak kalkulatzeko, 90° biratu beharko genituzke Mohr-en zirkuluan, eta D puntura iritsiko ginateke. Irudian egiazta daitekeen bezala, puntu hori da zirkuluko ordenatu handiena duena eta, beraz, 1-2 planoan dauden norabideetan aurkituko dugun tentsio ebakitzaille maximoa. Emaitza hori ez da harrizkoa, tentsio ebakitzaille maximoak norabide nagusiekiko 45° -tara baitaude, 2.8. atalean frogatu genuen bezala.

Azpimarragarria da, baita ere, P puntutik hasita 180° biratuz gero, osagai normal desberdina baina osagai ebakitzaille berdina duen Q puntura iristen gara. Izan ere, Q puntuak adierazten duen norabidea, \mathbf{n} norabidetik 90° -tara dago kokatuta, hau da, bi norabidetzat elkarzutak dira. Dakigun bezala, tentsio ebakitzaillearen modulua berdina da elkarzutak diren bi planotan (elkarrekikotasun-teorema); beraz, zentzuzkoa dirudi emaitza hori lortzea. Dena den, arreta berezia jarri behar da ebakitzaillearen zeinuetan, Mohr-en diagramak erabiltzen direnean. Tentsio ebakitzaillearen noranzkoa ezagutzeko, ondoko irizpide hau erabiliko dugu: norabidearen puntu adierazgarriak ordenatu positiboa duenean, tentsio ebakitzailleak erloju-orratzen noranzko berean biratzeko joera edukiko du, eta negatiboa denean, erloju-orratzen aurkako noranzkoan (ikus 5.8. irudia). Irizpide hori erabiltzeko, beharrezkoa da hirugarren ardatz nagusia kanporantz zuzenduta egotea. Tentsio normalei dagokienez, irizpidea arruntagoa da: koordinatu horizontala positiboa denean, osagai normala trakziozkoa da, eta negatiboa denean, konpresiozkoa.

Bukatzeko, aipa dezagun ezen, Mohr-en zirkulua hemen deskribatu dugun bezala erabili ahal izateko, ez dela nahitaezko baldintza tentsio-egoera laua izatea, hau da, hirugarren tentsio nagusia nulua izatea. Erabiltzen dugun \mathbf{n} norabidea plano nagusi batean dagoen bitartean —hau da, kosinu zuzentzaileetakoren bat nulua bada—, dagokion puntua beti egongo da Mohr-en zirkulu baten gainean, eta hemen esandako guztia baliokoa izango da.



5.8. irudia.

5.8. AIRY-REN FUNTZIOA

Bolumen-indarrak konstanteak direnean, deformazio- edo tentsio-egoera lauen kalkulua asko sinplifika daiteke *tentsio-funtzioa* edo *Airy-ren funtzioa* (ϕ) deritzonaren bidez. Hain zuzen, (5-58) espresioeko ekuazioak x eta y -rekiko deribatuz gero, eta bolumen-indarrak konstanteak direla onartuz, hauxe lortzen da:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{5-73}$$

Espresio horiek Φ funtzio baten laugarren deribatuarekin berdinduz gero —hots, $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}$ balioarekin—, tentsioak honelaxe lortuko genituzke:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \Phi_x y - \Phi_y x. \tag{5-74}$$

Erraz froga daitekeen bezala, (5-74) ekuazioetako espresioek barne-orekako ekuazioak betetzen dituzte. Deformazio eta tentsio lauaren ekuazio diferentzialak ere bete daitezten, ϕ funtzioak erlazio hau bete beharko du:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0, \quad (5-75)$$

hau da, Airy-ren funtzioa biharmonikoa izan behar da.

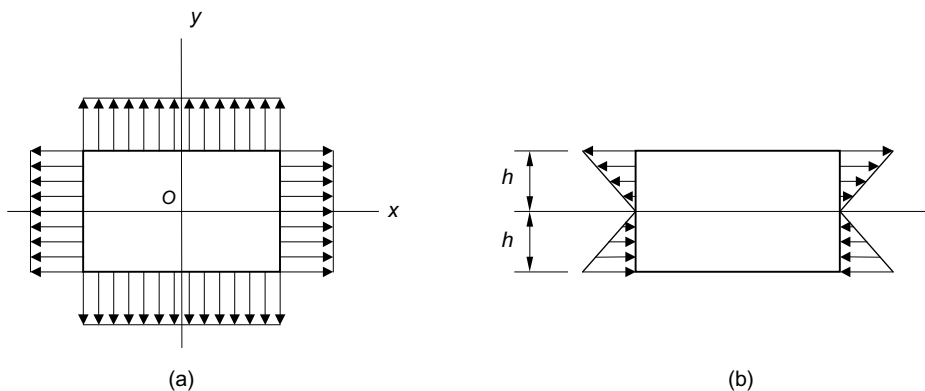
Beraz, bolumen-indarrak konstanteak dituzten problema lauen soluzioa kalkulatzeko, nahikoa da funtzio biharmoniko bat topatzea, horretatik ondorioztatzen diren tentsioek mugako baldintzak betetzen baitituzte. Mugaldeko tentsioen banaketa definitzen duen ekuazioa n mailako polinomio bat bada, Airy-en funtzioa x -ren eta y -ren menpeko polinomio bat izango da, eta beraren maila, $n + 2$. Adibidez, Airy-ren funtzioa bigarren mailako polinomio bat denean,

$$\phi(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{c}{2}y^2. \quad (5-76)$$

Hortaz, (5-74) ekuazioaren arabera, tentsioek balio hau daukate:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = a, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -b. \quad (5-77)$$

Kasu horretan, beraz, tentsio normalak eta tentsio ebakitzaileak uniformeki banatuko lirateke. Tentsio horiek irudikatzen xafra lau bat erabiltzen badugu, tentsio normalek 5.9.a. irudiko itxura edukiko dute.



5.9. irudia.

Demagun orain Airy-ren funtzioa hirugarren mailako polinomio bat dela, hots:

$$\phi(x, y) = \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2y + bxy + \frac{c}{2}xy^2 + \frac{d}{6}y^3. \quad (5-78)$$

(5-78) ekuazioko funtzioa ere biharmonikoa da, eta (5-75) baldintza betetzen du koefizienteen edozein balioentzat. Hortaz, kasu horretan, (5-74)-ren arabera, tentsioek itxura hau daukate:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = cx + dy, \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = ax + by, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -bx - cy,\end{aligned}\tag{5-79}$$

hau da, funtzio linealak izango dira. Koefiziente guztiak d izan ezik nuluak direnean,

$$\phi(x, y) = \frac{d}{6} y^3\tag{5-80}$$

da, eta tentsioek balio hauek dituzte:

$$\sigma_{xx} = dy, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0.\tag{5-81}$$

Hain zuzen, 5.9.b. irudian tentsio-egoera horren adierazpen grafikoa dator, eta bertan tentsio normalen banaketa lineala ikus daiteke. Piezaren aldeetan eragiten duen M momentua ezagutuko bagenu, d koefizientearen balioa kalkulatu genuke baliokidetasun estati-koan oinarrituz, honelaxe:

$$M = \int_{-h}^h \sigma_{xx} y dy = 2 \int_{-h}^h dy^2 dy = \frac{2d}{3} h^3,\tag{5-82}$$

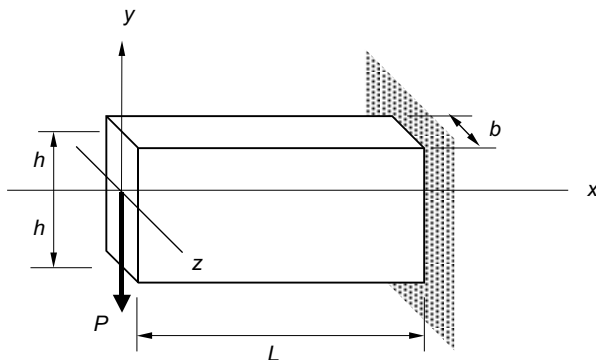
eta d askatuz,

$$d = \frac{3M}{2h^3}.\tag{5-83}$$

Beraz, tentsio normalaren balioa hauxe izango litzateke:

$$\sigma_{xx} = \frac{3M}{2h^3} y, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0.\tag{5-84}$$

Adibide gisa eta Airy-ren funtzioa problema elastikoaren ebazpenean nola erabil daitekeen ikusteko, kalkula dezagun 5.10. irudiko habearen tentsio-banaketa. Habea landaturik dago eskuineko sekzioan, eta ezkerrekoan P indar bertikal baten eragina jasaten du. Sekzioen metodoa eta oreka-ekuazioak aplikatuz gero, erraz ikus daiteke piezaren edozein sekziotan momentu bat eta indar bertikal bat agertuko zaizkigula. Materialen erresistentziari eskainitako kapituluetan ikusiko dugun bezala, egoera horri *makurdura bakuna* deritzen. Makurdura bakuna hurrengo gaietan sakonki aztertuko dugun arren, ikus dezagun Elastikotasunaren Teoriaren bidez problema hori nola analiza daitekeen. Habearen lodiera luzera baino askoz txikiagoa bada, gorputz horren puntuetan tentsio-egoera laua egongo dela onar dezakegu.



5.10. irudia.

Egitura horren muga-baldintzak honako hauek dira:

- a. Habearen goiko eta beheko aurpegietan ez dago tentsio normalik, ezta tentsio ebakitailerik ere. Beraz, $y = \pm h$ denean,

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (5-85)$$

- b. Ezker muturreko sekzioan ez dago tentsio normalik:

$$\sigma_{xx} = 0. \quad (5-86)$$

- c. Ezker muturreko sekzioan tentsio-banaketaren erresultantea aplikatutako P kargaren berdina izan behar da:

$$P = \int_{-h}^h \tau_{xy} b dy. \quad (5-87)$$

Bestetik, (5-84) espresioaren arabera, momentuaren ondorioz σ_{xx} tentsio normalak agertuko zaizkigu. Irudiko habearen momentua x koordenatuarekiko lineala denez, tentsio normalak $\sigma_{xx} = c_1 xy$ itxura edukiko du, c_1 konstantea izanik. Hortaz, (5-74) ekuazioko lehenengo espresioa integratuz, Airy-ren funtzioa lor dezakegu:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{6} c_1 xy^3 + y f_1(x) + f_2(x), \quad (5-88)$$

zeren $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c_1 xy$ baita. Hain justu, (5-88)-ko $f_1(x)$ eta $f_2(x)$ funtzioak bi funtzio arbitrario dira, ϕ funtzioak biharmonikoa izan behar duela inposatuz kalkulatu ditugunak:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \Rightarrow y \frac{\partial^4 f_1(x)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f_2(x)}{\partial x^4} = 0, \quad (5-89)$$

eta berdintza hori y -ren edozein balioentzat bete behar denez:

$$\frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} = 0 \Rightarrow f_1 = c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5, \quad (5-90)$$

$$\frac{\partial^4 f_2}{\partial x^4} = 0 \Rightarrow f_2 = c_6 x^3 + c_7 x^2 + c_8 x + c_9. \quad (5-91)$$

Funtzio horiek (5-88) ekuazioan ordeztuz, Airy-ren funtzio hau lortuko dugu:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{6} c_1 x y^3 + y(c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5) + c_6 x^3 + c_7 x^2 + c_8 x + c_9. \quad (5-92)$$

Airy-ren funtzioa deribatuz, tentsio normalen eta tentsio ebakitzaileren ekuazioak lor ditzakegu:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c_1 x y, \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6c_2 x y + 2c_3 y + 6c_6 x + 2c_7, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} c_1 y^2 - 3c_2 x^2 - 2c_3 x - c_4. \end{aligned} \quad (5-93)$$

Konstanteak kalkulatzeko (5-85)-eko muga-baldintzak inposatuko ditugu. Tentsio normalak $y = \pm h$ denean nulua izan behar duela kontuan hartuz,

$$\begin{aligned} 6c_2 h x + 2c_3 h + 6c_6 x + 2c_7 &= 0, \\ -6c_2 h x - 2c_3 h + 6c_6 x + 2c_7 &= 0 \Rightarrow \\ c_2 = c_3 = c_6 = c_7 &= 0, \end{aligned} \quad (5-94)$$

eta tentsio ebakitzaileren baldintzatik,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} c_1 h^2 - 3c_2 x^2 - 2c_3 x - c_4 &= 0, \\ c_4 &= -\frac{1}{2} c_1 h^2. \end{aligned} \quad (5-95)$$

Bestalde, Airy-en termino linealek tentsioen balioan eraginik ez dutenez, dagozkien koefizienteak nulua direla onar dezakegu:

$$c_5 = c_8 = c_9 = 0, \quad (5-96)$$

eta koefizienteen balioak ordeztuz,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{6} c_1 x y^3 - \frac{1}{2} c_1 h^2 x y. \quad (5-97)$$

Beraz, tentsioen soluzioak itxura hau edukiko du:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_1 x y, \\ \sigma_{yy} &= 0, \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2} c_1 (y^2 - h^2). \end{aligned} \quad (5-98)$$

Kalkulatzea falta zaigun konstante bakarra c_1 da. Beraren balioa lortzeko, (5-87) ekuazioko baldintza erabiliko dugu:

$$P = \int_{-h}^h \tau_{xy} b dy = -\frac{1}{2} \int_{-h}^h c_1 (y^2 - h^2) b dy = P, \quad (5-99)$$

hots,

$$c_1 = \frac{3P}{2bh^3}, \quad (5-100)$$

eta zeharkako sekzioaren inertzia-momentua z ardatzarekiko $I_z = 2/3bh^3$ denez, tentsioak honelaxe idatz ditzakegu:

$$\sigma_{xx} = \frac{Px}{I_z} y, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{P}{2I_z} (h^2 - y^2). \quad (5-101)$$

Beraz, z ardatzeko puntuetan σ_{xx} tentsio normala nulua da, eta gainerakoetan z ardatzeraino dagoen distantziarekiko proportzionala. Tentsio ebakitzaileren banaketa, aldiz, parabolikoa da, eta beraren balio maximoa z ardatzean agertzen da. Bederatzigarren gaian makurduraren teoria orokorra ikusten dugunean, espresio horiek lortzeko beste era bat ikusiko dugu.

5.9. PROBLEMA ELASTIKOAREN EBAZPENA PRINTZPIO BARIAZIONALEN BIDEZ

Orain arte ikusi ditugun kapituluetan, tentsioek eta deformazioek bete behar dituzten erlazioak aurkeztu dira. Erlazio horietara iristeko oreka-ekuazioetan eta deformazioen bateragarritasunean oinarritu gara. Ondoren, gorputz elastikoen portaera-legeen bidez tentsioen eta deformazioen artean dauden erlazioak ondorioztatu ditugu. Horrela, problema elastikoa ebazteko behar diren ekuazioak definiturik utzi ditugu. Gehienetan ekuazio horiek ebaztea oso zaila den arren, gorputzaren geometria eta muga-baldintzak errazak direnean, ekuazio-sistema askatzea lor dezakegu, aurreko atalean azaldu den bezala.

Badira, halere, problema elastikoa ebazteko erabil daitezkeen zeharkako beste metodo batzuk, lan kontzeptuan eta energiaren oinarritzko printzipioetan oinarritzen direnak. Esan dugun bezala, gorputzeko puntuetan indarrek eta desplazamenduek zenbait baldintza bete behar dituzte. Arrazoizkoa da, beraz, indarra eta desplazamendua erlazionatzen dituen magnitude bat erabiltzea, egituraren erantzuna kalkulatu ahal izateko. Laugarren gaian ikusi genuen bezala, kanpoko indarrek egiten duten lana eta gorputzaren deformazio-energia elastikoa berdina dira, energia-galerarik ez dagoenean. Gai horretan, lanaren eta energiaren arteko baliokidetasuna material elastikoen portaera-legeak ondorioztatzeko erabili genuen. Oraingoan, kontzeptu horiek egituren erantzuna kalkulatzeko nola aplikatu daitezkeen ikusiko dugu.

Egituren analisirako erabil daitezkeen printzipioak *lan birtualen printzipioa* izenez ezagutzen dira, eta bi taldetan bana daitezke: *desplazamendu birtualen teorema* eta *indar birtualen teorema*. Printzipio horien izenburuek adierazten duten bezala, lehenengoan

desplazamendu birtualak aplikatuko ditugu gorputzeko puntuetan eta bigarreanean, aldiz, indar birtualak erabiliko ditugu.

5.9.1. Desplazamendu birtualen printzipioa

Oinarrizko fisikatik dakigun bezala, indar batzuen eraginpean dagoen puntu bat orekan badago, indar horiek loturekin bateragarri den edozein higidura birtualentzat egiten duten guztizko lana nulua da. Printzipio horretan oinarrituz, ingurune jarraituen problema elastikoa ebazteko balioko digun espresio batera iritsi gaitzke.

Izan bedi orekan dagoen gorputz elastiko bat, $\Phi(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$ bolumen-indarren eta $\mathbf{T}(T_x, T_y, T_z)$ gainazal-indarren eraginpean dagoena. Demagun muga-baldintzekin bateragarria den $\Psi(\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ desplazamendu birtual bat aplikatzen dugula gorputzeko puntuetan, benetako $\mathbf{u}(u, v, w)$ desplazamenduen desberdina izan daitekeena. Desplazamendu horiek onargarriak izan daitezten, deformazio-matrizearen osagaiek bateragarritasun-ekuazioak bete beharko dituzte. Kasu horretan, deformazioak (3-13) eta (3-14) ekuazioetako deribatuen bidez lortzen direnez, badakigu bateragarritasun-ekuazioak zuzenean beteko direla.

Hortaz, (2-35) adierazpenetako oreka-ekuazioak ψ_x , ψ_y eta ψ_z osagaiekin biderkatuz gero, eta lortutako espresioa gorputzaren bolumen guztian integratuz, hauxe lortuko genuke:

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \psi_x + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \psi_y + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \psi_z \right] dV + \int_V (\Phi_x \psi_x + \Phi_y \psi_y + \Phi_z \psi_z) dV = 0. \quad (5-102)$$

Integral horretako gai bakoitza —adibidez $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \psi_x$ gaia— honelaxe idatz daiteke:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \psi_x = \frac{\partial (\tau_{xy} \psi_x)}{\partial y} - \tau_{xy} \frac{\partial \psi_x}{\partial y}. \quad (5-103)$$

Hori eginez, (5-102) integrala era honetan geratuko da:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} \psi_x + \tau_{xy} \psi_y + \tau_{xz} \psi_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \psi_x + \sigma_{yy} \psi_y + \tau_{yz} \psi_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} \psi_x + \tau_{yz} \psi_y + \sigma_{zz} \psi_z) \right] dV - \int_V \left[\sigma_{xx} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial \psi_z}{\partial z} + \tau_{xy} \gamma_{xy}^\psi + \tau_{xz} \gamma_{xz}^\psi + \tau_{yz} \gamma_{yz}^\psi \right] dV, \quad (5-104)$$

non

$$\gamma_{xy}^\psi = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}^\psi = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^\psi = \frac{\partial \psi_y}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y}. \quad (5-105)$$

Aurreko gaitetan behin baino gehiagotan egin dugun bezala, (5-104) espresioa lehenengo bolumen-integrala gainazal-integral bihurtzeko Gauss-en dibergentzia-teoremaren bidez. Ingurunearen mugaldearekiko norabide-bektoreak, (n_x, n_y, n_z) , elkarzutak badira:

$$\begin{aligned} & \int_A \left[(\sigma_{xx} \psi_x + \tau_{xy} \psi_y + \tau_{xz} \psi_z) n_x + (\tau_{xy} \psi_x + \sigma_{yy} \psi_y + \tau_{yz} \psi_z) n_y + \right. \\ & \left. (\tau_{xz} \psi_x + \tau_{yz} \psi_y + \sigma_{zz} \psi_z) n_z \right] dA = \int_A \left[(\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) \psi_x + \right. \\ & \left. + (\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z) \psi_y + (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z) \psi_z \right] dA = \\ & = \int_A (T_x \psi_x + T_y \psi_y + T_z \psi_z) dA = \int_A \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\psi} dA. \end{aligned} \quad (5-106)$$

Azkenik, luzapeneko deformazio unitarioen definizioak gogoratzuz,

$$\varepsilon_{xx}^{\psi} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy}^{\psi} = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz}^{\psi} = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}, \quad (5-107)$$

eta (5-102) ekuazioa honelaxe geldituko litzaziguke:

$$(5-108) \quad \int_V \left[\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}^{\psi} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy}^{\psi} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}^{\psi} + \tau_{xy} \gamma_{xy}^{\psi} + \tau_{xz} \gamma_{xz}^{\psi} + \tau_{yz} \gamma_{yz}^{\psi} \right] dV = \int_V \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\psi} dV + \int_A \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\psi} dA.$$

Preseski, (5-108) espresioari *desplazamendu birtualen printzipioa* deritzo. Ikus dezagun zein den ekuazio horretako integral bakoitzaren esanahia. Lehenengo ataleko integrala, hots,

$$\int_V \left[\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}^{\psi} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy}^{\psi} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}^{\psi} + \tau_{xy} \gamma_{xy}^{\psi} + \tau_{xz} \gamma_{xz}^{\psi} + \tau_{yz} \gamma_{yz}^{\psi} \right] dV, \quad (5-109)$$

barneko indarrek egindako lan birtuala da. Bigarrenak, hots,

$$\int_V \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\psi} dV \quad (5-110)$$

integralak, kanpoko bolumen-indarrek desplazamendu birtualean egindako lana adierazten du, eta hirugarrenak, hots,

$$\int_A \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\psi} dA \quad (5-111)$$

integralak, gainazal-indarrei dagokien lan birtuala. Beraz, desplazamendu birtualen printzipioaren enuntziatua honako hau izango litzateke: solido elastiko batean aplikatutako edozein desplazamendu birtualetan, kanpoko indarrek egindako lan birtuala eta barneko indarrek egindakoa elkarren berdinak dira.

Demagun orain aplikatutako $\Psi(\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ desplazamendu birtualen eremua eta benetako $\mathbf{u}(u, v, w)$ desplazamenduena berdinak direla, hots,

$$\psi_x = u, \quad \psi_y = v, \quad \psi_z = w. \quad (5-112)$$

Beraz, deformazio unitarioen balioak hauek izango lirateke:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^\psi &= \delta\varepsilon_x, & \varepsilon_y^\psi &= \delta\varepsilon_y, & \varepsilon_z^\psi &= \delta\varepsilon_z, \\ \gamma_{xy}^\psi &= \delta\gamma_{xy}, & \gamma_{xz}^\psi &= \delta\gamma_{xz}, & \gamma_{yz}^\psi &= \delta\gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (5-113)$$

Gainera, bolumen-indarrak konstanteak badira —sarritan gertatzen den bezala—, (5-113) erlazioak (5-108) espresioan ordeztuz, hauxe lortuko genuke:

$$\begin{aligned} & \int_V [\sigma_{xx} \delta\varepsilon_x + \sigma_{yy} \delta\varepsilon_y + \sigma_{zz} \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz}] dV - \\ & - \int_V (\Phi_x \delta u + \Phi_y \delta v + \Phi_z \delta w) dV - \int_A (T_x \delta u + T_y \delta v + T_z \delta w) dA = 0. \end{aligned} \quad (5-114)$$

Bukatzeko, δ eragilea integraletik kanpo atera daitekeela kontuan hartuz gero:

$$\delta \left[\int_V U_0 dV - \int_V (\Phi_x u + \Phi_y v + \Phi_z w) dV - \int_A (T_x u + T_y v + T_z w) dA \right] = 0 \quad (5-115)$$

da, non lehenengo integralak gorputzaren deformazio-energia elastikoa adierazten baitu, eta beste biek kanpoko indarrek egindako lana (*kanpoko indarren energia potentziala* deritzona):

$$\delta(U - W_{\text{kanp}}) = 0. \quad (5-116)$$

Deformazio-energiaren eta kanpoko indarren energia potentzialaren arteko diferentziari *energia potentzial totala* edo *gutzizko energia potentziala* (Π) deituz gero, honelaxe berridatz dezakegu aurreko adierazpena:

$$\delta\Pi = 0. \quad (5-117)$$

Beraz, kanpoko indarren eraginpean dagoen gorputz elastiko bat orekan egongo da energia potentzial totala edozein desplazamendu birtual bateragarrientzat minimoa denean. Beste hitz batzuetan esanda, sistemaren gutzizko energia potentziala maximoa edo minimoa da. Mekanikatik dakigun bezala, oreka egonkorra denean muturreko balio hori minimoa da. Bestetik, (5-117) espresioa ondorioztatzeko Hooke-ren legea erabili beharrik izan ez dugunez, desplazamendu birtualen printzipioa linealak nahiz ez-linealak diren gorputz elastikoentzat aplika daiteke.

5.9.2. Indar birtualen printzipioa

Izan bedi orekan dagoen gorputz elastiko bat, $\Phi(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$ bolumen-indarren eta $\mathbf{T}(T_x, T_y, T_z)$ gainazal-indarren eraginpean dagoena. Tentsio-matrizeko osagaiei aldaketa

birtual bat egiten badiegu, egoera berri horretako oreka-ekuazioek baldintza hauek beteko dituzte (bateragarritasun-ekuazioak ez dira jadanik beteko):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma_{xx} + \delta\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz} + \delta\tau_{xz})}{\partial z} + (\Phi_x + \delta\Phi_x) &= 0, \\ \frac{\partial(\tau_{yx} + \delta\tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy} + \delta\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz} + \delta\tau_{yz})}{\partial z} + (\Phi_y + \delta\Phi_y) &= 0, \\ \frac{\partial(\tau_{xz} + \delta\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yz} + \delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{zz} + \delta\sigma_{zz})}{\partial z} + (\Phi_z + \delta\Phi_z) &= 0. \end{aligned} \quad (5-118)$$

Ekuazio horiei hasierako oreka-ekuazioak atalez atal kenduz gero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\delta\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial z} + \delta\Phi_x &= 0, \\ \frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial z} + \delta\Phi_y &= 0, \\ \frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\sigma_{zz}}{\partial z} + \delta\Phi_z &= 0, \end{aligned} \quad (5-119)$$

Horrez gain, mugako oreka-ekuazioak ere bete beharko dira tentsio-egoera birtual berrian, hots:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} + \delta\sigma_{xx})n_x + (\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})n_y + (\tau_{xz} + \delta\tau_{xz})n_z &= T_x + \delta T_x, \\ (\tau_{yx} + \delta\tau_{yx})n_x + (\sigma_{yy} + \delta\sigma_{yy})n_y + (\tau_{yz} + \delta\tau_{yz})n_z &= T_y + \delta T_y, \\ (\tau_{xz} + \delta\tau_{xz})n_x + (\tau_{yz} + \delta\tau_{yz})n_y + (\sigma_{zz} + \delta\sigma_{zz})n_z &= T_z + \delta T_z, \end{aligned} \quad (5-120)$$

non n_x , n_y eta n_z mugaldearekiko norabide-bektore elkarzutaren osagaiak baitira. Hasierako egoeran betetzen ziren mugaldeko oreka-ekuazioak kenduz, honako espresio hauek lortzen dira:

$$\begin{aligned} n_x\delta\sigma_{xx} + n_y\delta\tau_{xy} + n_z\delta\tau_{xz} &= \delta T_x, \\ n_x\delta\tau_{yx} + n_y\delta\sigma_{yy} + n_z\delta\tau_{yz} &= \delta T_y, \\ n_x\delta\tau_{xz} + n_y\delta\tau_{yz} + n_z\delta\sigma_{zz} &= \delta T_z. \end{aligned} \quad (5-121)$$

Bestalde, (5-17) ekuazioak u , v eta w desplazamenduez biderkatuz gero eta mugaldeko azaleran integratuz:

$$\begin{aligned} \int_V \left[\left(\frac{\partial\delta\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial z} + \Phi_x \right) u + \left(\frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial z} + \Phi_y \right) v + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\sigma_{zz}}{\partial z} + \Phi_z \right) w \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (5-122)$$

Lehen bezala, Gauss-en teoremaren bidez, (5-122) ekuazioa honelaxe berridatz daiteke:

$$\begin{aligned} & \int_V (\delta\Phi_x u + \delta\Phi_y v + \delta\Phi_z w) dV + \int_A [(\delta\sigma_{xx} n_x + \delta\tau_{xy} n_y + \delta\tau_{xz} n_z) u + \\ & + (\delta\tau_{xy} n_x + \delta\sigma_{yy} n_y + \delta\tau_{yz} n_z) v + (\delta\tau_{xz} n_x + \delta\tau_{yz} n_y + \delta\sigma_{zz} n_z) w] dA - \\ & - \int_V \left[\delta\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \delta\sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \delta\sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + \delta\tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \delta\tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \delta\tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (5-123)$$

Deformazio unitarioen definizioak gogoratzu eta bolumen-indarren eta gainazal-indarren funtzioan, (5-123) ekuazioa honelaxe geldituko litzateke:

$$\begin{aligned} & \int_V [\delta\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \delta\sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \delta\sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \delta\tau_{xy} \varepsilon_{xy} + \delta\tau_{xz} \varepsilon_{xz} + \delta\tau_{yz} \varepsilon_{yz}] dV - \\ & - \int_V (\delta\Phi_x u + \delta\Phi_y v + \delta\Phi_z w) dV - \int_A (\delta T_x u + \delta T_y v + \delta T_z w) dA = 0. \end{aligned} \quad (5-124)$$

Lehenengo integralak *deformazio-energia osagarriaren* aldaketa adierazten du (U^*), eta beste biak kanpoko indarrek egindako *lan birtual osagarria* (W^*_{kanp}). Beraz, honako hau beteko da:

$$\delta U^* - \delta W^*_{\text{kanp}} = 0, \quad (5-125)$$

eta δ eragilea integraletik kanpora ateraz gero,

$$\delta(U^* - W^*_{\text{kanp}}) = 0, \quad (5-126)$$

non parentesiko kendurari *energia potentzial osagarria* (Π^*) deritzon. Alegia:

$$\delta(\Pi^*) = 0. \quad (5-127)$$

Ondorioz, gorputz baten deformazioak eta desplazamenduak bateragarriak izateko, energia potentzial osagarria nulua izan behar da oreka-ekuazioak betetzen dituen edozein indar birtualentzat. Honelatan, bada, (5-117) eta (5-127) ekuazioek laguntza handia eskain dezakete problema elastikoak ebazteko orduan, esate baterako, Rayleigh-Ritz-en metodoa-ekin batera erabiltzen direnean.

6. Hutsegite-teoriak

6.1. SARRERA

Edozein elementuren diseinuari ekiteko orduan, funtsezkoa da egituraren hutsegitea noiz eta nola gertatuko den aurrerako balioko digun tresna bat edukitzea. Egitura edo elementu mekaniko batek bere funtzioa edo helburua betetzeari uzten dionean, huts egin duela esango dugu. Egitura batek era desberdin askotan egin dezake huts, eta hainbat aldagai desberdinek eragin dezakete hutsegite horretan. Faktore horien artean, materialaren portaera, indarren banaketa eta aplikazio-abiadura, tenperatura edo egituraren geometria aipa ditzakegu. Gai honetan hutsegite estatikoak azalduko ditugu soilik, hots, poliki aplikatutako indarren ondorioz agertzen direnak. Ez ditugu aztertuko, adibidez, indar dinamikoen ondorioz ager daitezkeen hutsegiteak —nekearen kasua, esaterako, indar errepikatua jasaten dituzten elementuetan sarritan azaltzen dena—. Alde batera utziko dugu baita ere *creep* izenarekin ezagutzen den fenomeno, tenperatura altuen eraginpean gertatzen dena. Bestalde, gilbordura deritzon hutsegiteari, duen garrantziagatik, gai oso bat eskainiko diogu, eta aurrerago aztertuko da. Gai honetan aztertuko ditugun hutsegite estatikoen artean, bi motatakoak bereiz ditzakegu: deformazio plastikoen ondorioz sortutakoak eta elementuaren haustura sortzen dutenak. Ikus dezagun laburki zein diren hutsegite horien ezaugarri eta berezitasun garrantzitsuenak.

Dakigun bezala, gorputz baten kanpoko indarrek eragiten dutenean, tentsio- eta deformazio-egoera bat agertzen da gorputzeko puntuetan. Egoera hori, dudarik gabe, hasierakoa baino ezegonkorragoa izango da, atomoak energia gutxieneko posiziotik higiarazi ditugulako. Aplikatuko indarrak desagertzen direnean gorputzak hasierako itxura berreskuratzen badu, deformazioa *elastikoa* izan dela esaten dugu. Halere, aplikatutako indarrak handiegiak badira, hots, isurpen-tentsioa gaitzen bada, atomoen arteko loturak hautsi egin daitezke. Indarrak aplikatzeari utzi ondoren atomoak hasierako tokira bueltatzeko gai ez badira, deformazio iraunkorrak agertuko zaizkigu, eta *deformazio plastikoak* gertatu direla esaten da. Deformazio plastiko horiek portaera harikorra duten materialetan agertzen dira, eta atomo-planoen arteko labainketaren ondorio izaten dira. Beraz, erraz uler daiteke hutsegite-mota hori tentsio ebakitzailleekin egongo dela erlazionatuta, tentsio horiek baitira planoen labainketa sortzen dutenak. Adibidez, trakzio-saiakuntzan, estrikzio-lepoa agertzen den inguruan, haustura 45°-tara gertatzen dela ikus daiteke, gutxi gorabehera. Tentsio ebakitzaille maximoak norabide nagusiekiko 45°-tara kokaturik daudenez, material harikorren isurpenaren errudunak tentsioaren osagai horiek direla ondoriozta daiteke. Maila mikroskopikoan deformazio plastikoak nola gertatzen diren azaltzen duen teoriari *dislokazioen teoria* deritzo. Teoria horren arabera, metalen kristal-sareetan akatsak eta hutsuneak egoten dira, tentsioen ondorioz higitu egin daitezkeenak. Akats horiei *dislokazioak* deritze.

Dislokazioak tokiz aldatzen direnean, sarearen beste hutsune batzuetan geldi daitezke harrapaturik, atzera ezin itzulirik. Ondorioz, iraunkorrak diren deformazio plastikoak agertzen dira.

Material hauskorren kasuan, hutsegitea deformazio plastikorik agertu gabe eta luzapen oso txikiekin gertatzen da, eta elementua bi zati edo gehiagotan bananduta geratzen da. Hutsegite-mota hori material harikorrena baino arriskutsuagoa izaten da, bat-batean gertatzen baita, aurrez ohartarazi gabe. Gainera, elementua haustean eztanda antzeko bat gertatzen da, energia ugari askatuz. Materialaren haustura, tentsioa handia den puntuetan hasten da, pitzadura bat agertzen denean. Pitzadura horren ondorioz elementuaren sekzioa murriztu egiten da, tentsioaren balioa handiagotuz eta, ondorioz, zartadura are gehiago handiagotuz. Era horretan, zartadura sekzioan zehar hedatuz doa, gehienetan abiadura handiarekin, elementuaren hausturara iritsi arte. Esandakoaren arabera, materialen hausturaren errudunak tentsio normalak izango direla ikus daiteke, horiexek baitira atomo-planoen bananketa sortzen dutenak.

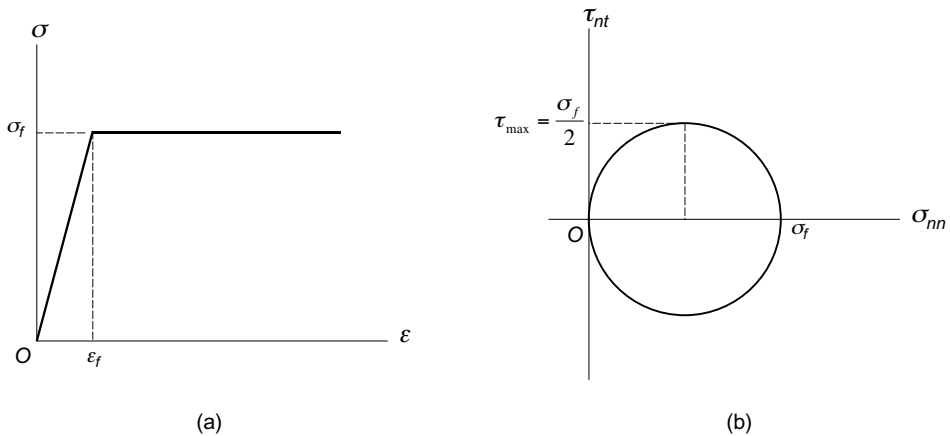
Hutsegite-teorien sarrera honekin bukatu baino lehen, gogora dezagun ez dela guztiz zehatza material harikor eta hauskorrei buruz besterik gabe hitz egitea, inguruko baldintzen arabera materialen portaera arras alda daitekeelako. Aurreko gai batean esan genuen bezala, tenperaturak edo indarren aplikazio-abiadurak hauskor bihur dezakete baldintza arruntetan portaera harikorra duen materiala. Hain zuzen, material harikorren portaera berezi hori aztertzen eta ulertzen saiatzen den zientziari *hausturaren mekanika* deritzo, eta azken urteotan garapen garrantzitsua ezagutu du.

6.2. HUTSEGITE-TEORIEN OINARRIAK

Aurreko gaian ikusi genuen bezala, puntu batean dagoen tentsio-egoera ardatz bakarrekoa denean, hutsegitea noiz gertatuko den auresatea lan nahiko erraza da, materialaren trakzio-saiakuntza egin eta gero. Materiala harikorra bada, aplikatutako tentsioa isurpen-muga (σ_f) baino handiagoa bada, materialak huts egingo duela onartuko dugu, hortik aurrera deformazio plastikoak agertuko direlako. Aldiz, materiala hauskorra bada, haustura-tentsioa (σ_r) da onar daitekeen baliorik handiena. Dena den, ardatz bakarreko egoera, puntu batean egon daitezkeen infinitu egoeretako bat baino ez da. Gainera, sarritan puntu bateko tentsio-egoera trakzio-saiakuntzan daukaguna baino konplexuagoa izaten da, hots, bi edo hiru ardatzekoa. Hutsegite-teorien bidez, segituan ikusiko dugun bezala, tentsio-egoera orokor bat onargarria den ala ez auresan daiteke, materialaren trakzio-saiakuntzako emaitzetan oinarrituz. Beraz, askatu beharreko problema honako hau da: trakzio-saiakuntzan materialak huts noiz egiten duen ezagututa, nola jakin daiteke bi edo hiru ardatzeko egoera orokorrago bat onargarria den ala ez? Argi dago erantzuna ezin dezakegula espermentalki lortu, tentsio-egoera desberdin bakoitzarentzat saiakuntza bat egin beharko genukeelako. Hori egin beharrean, beste bide bat hartuko dugu, eta lehenik eta behin, trakzio-saiakuntzako probetak huts zergatik egiten duen asmatzen saiatuko gara. Galdera hori ez da erantzuten erraza, materialek huts egiteko hainbat arrazoi egon daitezkeelako, batez ere batzuk harikorrak eta beste batzuk hauskorrek direla kontuan hartzen badugu.

Hasteko eta abiapuntu modura, hauxe suposatuko dugu: trakzio-saiakuntzan agertzen diren magnitudeetako bat handiegia bada, materialak huts egingo du. Beste era batera

esanda, magnitude horien balioa materialak jasan dezakeena baino handiagoa bada, isurpena edo haustura gertatuko dira. Izan ere, trakzio-saiakuntzan, aplikatutako indarra handituz doan neurrian, gorputzaren egoera islatzen duten magnitudeak ere (tentsioak, deformazioak...) handituz doaz. Hutsegitearen errua magnitudearen bati leporatzeko orduan, aukera bat baino gehiago daukagu. Adibidez, hutsegitearen errudunak tentsio normalak direla suposa dezakegu. Ondorioz, trakzio-saiakuntzako hutsegitea tentsio normalak handiegiak direnean gertatzen dela pentsa daiteke. Beste aukera bat, hutsegitearen errua tentsio ebakitzaileri leporatzea da. Orduan, tentsio ebakitzaileren balioa materialak jasan dezakeena baino handiagoa denean, hutsegitea gertatzen dela suposatuko genuke. Hortaz, ikus ditzagun zein diren hutsegiteari azalpen bat emateko erabil daitezkeen magnitudeak. Adibide gisa, material harikor bat daukagula suposatuko dugu. Horrela, bada, 6.1.a. irudian material harikorrentzat erabiliko dugun tentsio-deformazio motako diagrama ageri da, eta 6.1.b. irudian ardatz bakarreko trakzioari dagokion Mohr-en zirkulua. Dakigun bezala, tentsioaren balioa isurpen-tentsiora iristen denean, materialaren isurpena gertatzen da. Deformazio plastikoak onartezinak direla erabakiz gero, hots, diseinurako portaera elastikoa bakarrik ematen badugu ontzat, σ_f izango da materialak huts egin gabe onar dezakegun tentsiorik handiena.



6.1. irudia.

Hutsegiteko aldiunean, ondoko sei magnitude hauen balioak lor ditzakegu trakzio saiakuntzako probetaren puntuetan:

- a. *Tentsio normal* maximoa —hots, tentsio nagusi handiena— ardatzaren norabidea duena da, beste biak nuluak baitira. Huts egiteko unean tentsio normal horrek isurpen-tentsioa (σ_f) balio du:

$$\sigma_{\max} = \sigma_f \quad (6-1)$$

- b. *Tentsio ebakitzaileri* maximoa, bigarren gaian ikusitakoaren arabera eta 5.2.b. irudian ikus daitezkeen bezala, isurpen-tentsioaren erdia da:

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|}{2} = \frac{\sigma_f}{2} \quad (6-2)$$

c. *Luzetarako deformazio unitario* maximoa, Hooke-ren legea aplikatuz, ondokoa izango litzateke huts egiteko aldiunean:

$$\varepsilon_f = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{\sigma_f}{E}. \quad (6-3)$$

d. Gorputzeko puntuetan huts egiteko momentuan dagoen *deformazio-energiaren dentsitatea* energiaren espresioa ardatz bakarreko egoera honentzat aplikatuz:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \frac{1}{2} \sigma_f \varepsilon_f = \frac{\sigma_f^2}{2E}. \quad (6-4)$$

e. *Distorsio-energiaren dentsitatea* deituriko magnitudearen balioa, berriz, beheko ekuazioan agertzen dena da. Magnitude horren esanahia eta kalkulatzeko era gai honetan zehar ikusiko ditugu.

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_f^2. \quad (6-5)$$

f. Azkenik, *tentsio oktaedrikoaren* balioa hauxe da:

$$\tau_{\text{okt}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f. \quad (6-6)$$

Trakzio-saiakuntzaren kasuan, magnitude horiek guztiak batera iristen dira goian adierazitako balioetara. Alderantziz, bi edo hiru ardatzeko egoera batean, balio horiek ez dira aldi berean ematen. Ondorioz, goiko magnitudeetako bat aukeratu beharra dago puntu bateko tentsio-egoera onargarria den ala ez erabakitzeko orduan. Irizpide gisa erabil daitezkeen sei magnitude horiek beste horrenbeste hutsegite-teoria iradokitzen dituzte. Argi dago irizpide horietako batzuk gainerakoak baino egokiagoak izango direla zenbait materialen portaera auresateko orduan, baina ez dira hain zehatzak izango beste material batzuen hutsegitea aztertzerakoan. Beste era batera esanda, ez dago material elastiko guztientzat balio duen irizpiderik.

Hutsegitearen errua leporatuko diogun magnitudea aukeratu eta gero, hurrengo pausoa aztertzen ari garen tentsio-egoera onargarria den ala ez erabakitzea da. Erabaki hori hartzeko, hauxe onartuko dugu: aukeratutako magnitudea trakzio-saiakuntzan huts egiteko aldiunean daukaguna baino txikiagoa bada, tentsio-egoera onargarria da, eta ez da materialaren hutsik gertatuko. Esate baterako, irizpide modura tentsio normala aukeratuko bagenu, gure egoerako tentsio normal maximoa trakzio-saiakuntzan huts egiteko momentuan daukaguna baino handiagoa balitz, materialak huts egingo duela suposatuko genuke.

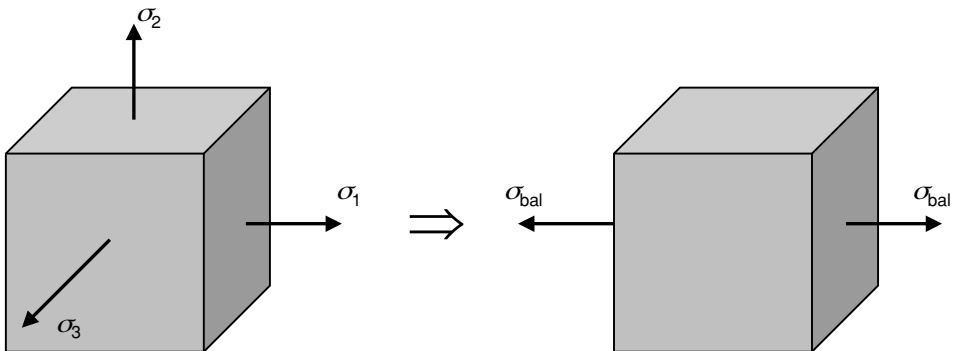
Beraz, laburbilduz, trakzio-saiakuntzan isurpena edo haustura sorrarazten duen magnitudeak beste edozein tentsio-egoeratan ere materialaren isurpena edo haustura sorraraziko duela suposatuko dugu. Hain zuzen, 6.1. taulan (6-1)-(6-6) ekuazioetan emandako irizpideen balioak laburbildu dira. Materiala hauskorra balitz, σ_f isurpen-tentsioa σ_r haustura-tentsioarekin ordeztuko genuke.

Tentsio normala	$\sigma_{\max} = \sigma_f$
Tentsio ebakitzailea	$\tau_{\max} = \frac{\sigma_f}{2}$
Luzetarako deformazio unitarioa	$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E}$
Deformazio-energiaren dentsitatea	$U_0 = \frac{\sigma_f^2}{2E}$
Distortsio-energiaren dentsitatea	$U_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_f^2$
Tentsio oktaedrikoa	$\tau_{okt} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f$

6.1. taula.

Ikusi dugun bezala, puntu bateko tentsio-egoera ardatz bakarrekoa denean, ardatzeko tentsioa zuzenean konpara dezakegu trakzio-saiakuntzako balioekin. Materiala harikorra denean, materialak hutsik ez egiteko, tentsio hori isurpen-tentsioaren azpitik egon behar da, eta hauskorra denean, haustura-tentsioaren azpitik. Tentsio-egoera orokorragoa denean, hots, bi edo hiru ardatzekoa, konparazio hori egiten jarraitu ahal izateko, *tentsio baliokidea* (σ_{bal}) deritzon kontzeptua erabiliko dugu. Tentsio baliokidea, aztertzen ari garen tentsio-egoeraren erresistentzia berbera duen ardatz bakarreko egoeraren tentsioa da. Tentsio horren bidez, edozein tentsio-egoera orokorrenzat ardatz bakarreko egoera baliokide bat topa dezakegu, 6.2. irudian adierazten den bezala. Tentsio baliokide hori hiru tentsio nagusien funtzio modura adieraziko dugu, hots:

$$\sigma_{\text{bal}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (6-7)$$



6.2. irudia.

Beraz, aukeratutako irizpidearen arabera, tentsio baliokidea kalkulatu eta gero, hutsegiterik ez egoteko honako hau bete beharko da:

$$\sigma_{\text{bal}} \leq \begin{cases} \sigma_f, & \text{material harikorra,} \\ \sigma_r, & \text{material hauskorra.} \end{cases} \quad (6-8)$$

Tentsio baliokidearekin zuzenean erlazionatutako bete kontzeptu bat *segurtasun-koefizientea* da. Edozein egitura diseinatzeke orduan, kalkuluen zehaztasunean eragin dezaketen zenbait faktore hartu behar dira kontuan. Ez dira ahaztu behar, adibidez, egituraren ager daitezkeen ezusteko indarrak (gainkargak, haizea, elurra, lurrikarak eta abar). Gainera, kalkuluak egiteko orduan, hurbilketa asko egiten dira. Esate baterako, solidoak ez dira zeharo homogeenok eta isotropoak izaten. Gainera, materialak akatsak eduki ditzake, zartadurak edo herdoildutako guneak, adibidez. Egituraren kalkulurako erabiltzen diren formulak ere, laster ikusiko dugun bezala, ez dira zehatzak izaten. Izan ere, gorputz deformagarri baten erantzuna aztertzeke orduan, makina bat aldagaik hartzen dute parte, eta denak kontuan hartzea ezinezkoa da. Arrazoi horiek guztiak direla eta, kalkulaturako tentsio maximoa eta egituraren benetako tentsio handiena desberdinak izan daitezke. Arrisku horretatik babestu eta segurtasun-tarte bat gorde ahal izateke, segurtasun-koefizientea (n) erabiltzen da. Koefiziente horrek materialak teorikoki onar dezakeen mugako tentsioa murrizten du (hots, isurpen-tentsioa materiala harikorra bada, eta haustura-tentsioa hauskorra bada):

$$\sigma_{\text{onar}} = \frac{\sigma_f}{n}, \quad \sigma_{\text{onar}} = \frac{\sigma_r}{n}, \quad (6-9)$$

non σ_{onar} delakoari *tentsio onargarria* deritzon.

Segurtasun-koefizientearen balioa ≥ 1 izan behar da beti. Beraren balioa zehaztea ez da erraza, ager daitezkeen hainbat ezusteko hartu behar baitira kontuan. Beraz, n -ren balioa aukeratzeko orduan, ondoko faktoreak kontuan hartzea komeni da: aplikaturako indarren inguruko ezjakintasan-maila, karga-mota (estatikoa, dinamikoa,...), eraikuntza-akatsak, hutsegiteak ekar ditzakeen ondorioak, elementuen narria, etab. Hurrengo ataletan hutsegite-teoria ezagunenak azalduko ditugu, eta irizpide bakoitzari dagokion tentsio baliokidea bilatuko dugu.

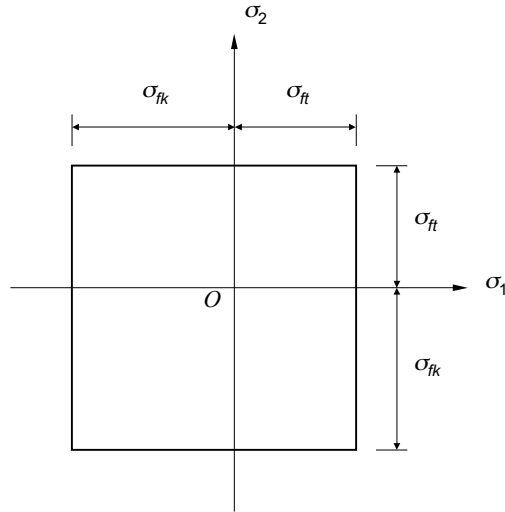
6.3. TENTSIO NORMAL MAXIMOAREN TEORIA

Teoria hau *Rankine-ren irizpidea* izenez ere ezagutzen da, eta hutsegite-teoria guztien artean sinpleena dela esan daiteke. Irizpide honen arabera, tentsio-egoera orokorra duen puntu bateko tentsio normal maximoa tentsio onargarria baino handiagoa bada, hutsegitea gertatuko da. Dakigun bezala, tentsio normalaren maximoak tentsio nagusiak dira. Beraz, adibide gisa materiala harikorra balitz, hutsegiterik ez egoteko honako erlazio hauek bete beharko liriateke:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq \sigma_{ft}, & \sigma_2 &\leq \sigma_{ft}, & \sigma_3 &\leq \sigma_{ft}, \\ \sigma_1 &\leq -\sigma_{kt}, & \sigma_2 &\leq -\sigma_{fk}, & \sigma_3 &\leq -\sigma_{fk}, \end{aligned} \quad (6-10)$$

non σ_{ft} eta σ_{fk} direlakoak trakzioko eta konpresioko isurpen-tentsioak diren, hurrenez hurren. Materiala hauskorra balitz, erlazio berdinak erabiliko genituzke, baina σ_f isurpen tentsioa σ_r haustura-tentsioarekin ordeztuz. Hain zuzen, 6.3. irudian teoria honen

adierazpen grafikoa agertzen da, bi ardatzeko egoera baten kasuan. Preseski, (6-10) espresio-ekuazioak $\sigma_3 = 0$ dela suposatuz marraztuz gero, jatorritik deszentratutako karratu bat lortuko genuke. Hiru ardatzeko egoeraren kasuan, berriz, irudia kubo bat izango litzateke. Hutsegiterik ez egoteko, hots, (6-10) inekuazioak bete daitezten, tentsio nagusiek definitzen duten puntua karratuaren edo kuboaren barruan egon beharko litzateke. Kanpoan eroriko balitz, tentsio-egoera ez litzateke onargarria izango.



6.3. irudia.

Trakzioko eta konpresio-egoera berdina balira, karratu edo kubo zentratu egongo lirateke jatorriarekiko. Kasu horretan, (6-10) ekuazioak beste espresio laburrago honetan bil daitezke:

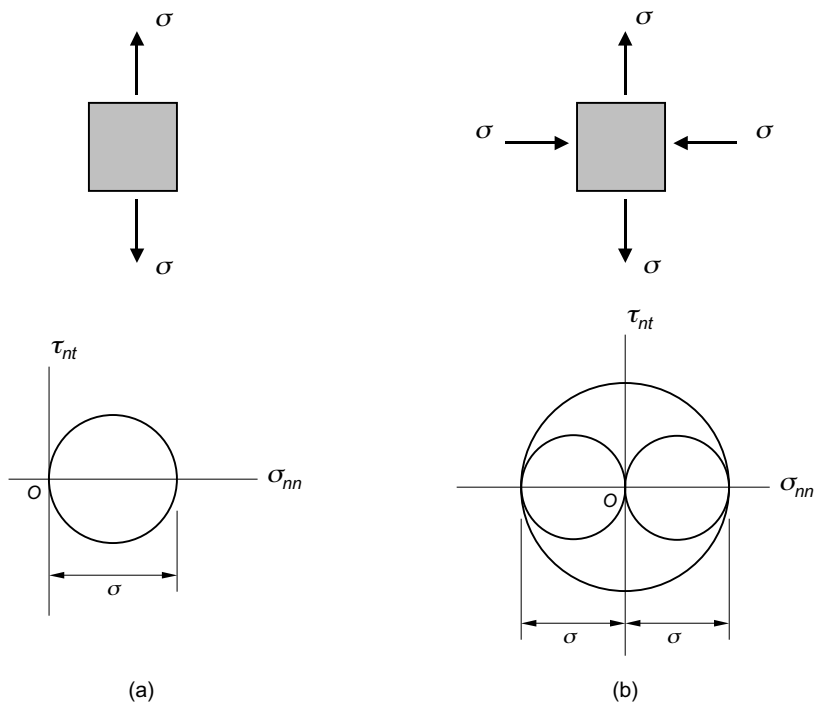
$$|\sigma_{\max}| \leq \sigma_f. \quad (6-11)$$

Beraz, hutsegite-teoria honi dagokion tentsio baliokidea tentsio nagusi handiena izango litzateke besterik gabe. Izan ere, (6-11) ekuazioaren arabera, tentsio normal maximoa da irizpide honek erabiltzen duen balioa isurpen-tentsioarekin konparatu eta egoera onargarria den ala ez erabakitzeko. Beraz, aztertzen ari garen tentsio-egoera, σ_{\max} balio duen ardatz bakarrek tentsio-egoera batez ordezkatu daiteke hutsegitea aurreratzeko orduan.

$$\sigma_{\text{bal}} = |\sigma_{\max}|. \quad (6-12)$$

Ikusten den bezala, *Rankine-ren irizpideak* tentsio nagusi bakar bat erabiltzen du materialaren erresistentzia kalkulatzeko orduan, eta beste bi tentsio nagusiekiko independentea da. Esate baterako, material harikorra batean 6.4. irudiko tentsio-egoerak edukiko bagenitu, Rankine-ren irizpidearen arabera bi kasuak berdina izango lirateke. Izan ere, tentsio normal maximoa bietan berdina denez, isurpena $\sigma = \sigma_f$ denean gertatuko litzateke bi kasuetan. Preseski, 6.4.b. irudiko egoera, 4. gaian ikusi genuen bezala, ebakidura hutsaren baliokidea da. Ardatz bakarrek egoerarentzat irizpide honek hutsegitea zehazki aurreratu du, noski. Halere, esperimentalki frogatu daiteke ezen 6.4.b. irudiko egoeran isurpena askoz

lehenago gertatzen dela, $\sigma = 0,57\sigma_r$ denean, hain zuzen. Argi dago, beraz, material hari-korren isurpena aurreratzeko orduan Rankine-ren irizpidea ez dela egokia. Dena den, teoria hori egokia da material hauskorren haustura noiz gertatuko den ezagutzeko (hormigoia edo burdinurtuarena, kasu). Hori guztia nahiko erraz uler daiteke material horien hutsegiteko era nolakoa den gogoratzen badugu. Gai honen sarreran aurreratu zen bezala, material hari-korren isurpena tentsio ebakitzaileen ondorioz gertatzen da, eta haustura, berriz, tentsio normalen ondorioz. Irizpide horrek tentsio normala bakarrik erabiltzen duenez, hutsegitea aztertzeke, ulergarria da material hauskorrentzat egokia izatea, baina ez, aldiz, material hari-korrentzat.



6.4. irudia.

Irizpide horrekin bukatzeko, azter dezagun zer gertatzen den egoera hidrostatikoa dugunean. Egoera horretan, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ denez, Rankine-ren teoriaren arabera onar daitekeen tentsio handiena, materiala hauskorra denean, $\sigma = \sigma_r$ da. Alabaina, kasu horretan ere esperimentalki frogatu da tentsio hidrostatikoa balioa σ_r denean ez dela hausturarik gertatzen, eta balio hori baino tentsio askoz altuagoak aplika daitezkeela hutsegitea gertatu baino lehen. Ondorioz, egoera hidrostatikoa irizpide hori ez da egokia. Beraz, laburbilduz, tentsio nagusi maximoaren teoria material hauskorrentzat aplika daiteke, egoera hidrostatikoa dugunean izan ezik.

6.4. LUZETARAKO DEFORMAZIO UNITARIO MAXIMOAREN TEORIA

Teoria hau Saint-Venant-ek proposatu zuen, eta hutsegitea gehiegizko luzetarako deformazioaren ondorio dela suposatzen du. Beraz, irizpide honen arabera, tentsio-egoera orokorra duen puntu bateko luzetarako deformazio unitario maximoa trakzio-saiakuntzan hutsegiteko aldiunean dugun luzetarako deformazio unitarioa baino handiagoa bada, hutsegitea gertatuko da. Matematikoki adieraziz, hutsegiterik ez egoteko, hauxe bete behar da:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\leq \varepsilon_{ft}, & \varepsilon_2 &\leq \varepsilon_{ft}, & \varepsilon_3 &\leq \varepsilon_{ft}, \\ \varepsilon_1 &\leq -\varepsilon_{fk}, & \varepsilon_2 &\leq -\varepsilon_{fk}, & \varepsilon_3 &\leq -\varepsilon_{fk}, \end{aligned} \quad (6-13)$$

non ε_{ft} eta ε_{fk} direlakoak trakzioko eta konpresioko isurpen-deformazioak diren, hurrenez hurren. Materiala harikorra izan beharrean hauskorra balitz, erlazio berdinak erabiliko genituzke, baina ε_f isurpen-deformazioa ε_r haustura-deformazioarekin ordeztuz. Aurreko irizpidearen kasuan bezala, $\sigma_3 = 0$ eginez eta materialaren deformazioak konpresiopean eta trakziopean berdinak direla suposatuz, Hooke-ren legearen bidez, ekuazio hauek lortuko genituzke:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \nu\sigma_2 &\leq \sigma_f, \\ \sigma_2 - \nu\sigma_1 &\leq \sigma_f, \\ \sigma_1 - \nu\sigma_2 &\geq -\sigma_f, \\ \sigma_2 - \nu\sigma_1 &\geq -\sigma_f, \end{aligned} \quad (6-14)$$

non izendatzaileko elastikotasun-modulua desberdintzako bi aldeetatik kendu dugun.

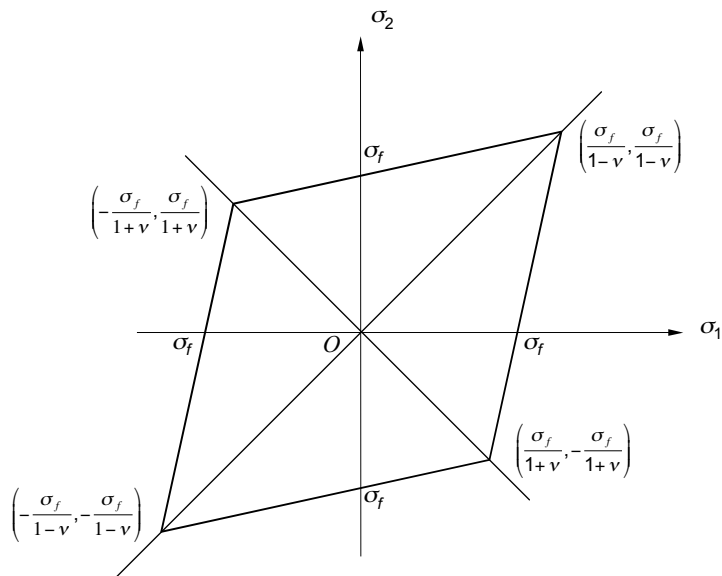
Hain zuzen, (6-14) espresioiko erlazioak grafikoki adieraziz gero, 6.5. irudiko lau zuzenak lortuko genituzke. Inekuazioak bete daitezten, hots, egoera onargarria izan dadin, tentsio nagusien balioak irudiko poligonoaren barruan erori beharko liriateke. Hiru ardatzeko egoera baten kasuan, egoera onargarriak eta egoera onartezinak bereizten dituen eremua zortzi azalera triangeluarrez osatutako bolumen itxi bat da. Bolumen horren eta plano koodenatuen arteko ebakidura, 6.5. irudiko erronbo itxurako azalera izango litzateke. Goiko ekuazioak honako era honetan laburbil ditzakegu:

$$\left| \sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k) \right|_{\max} \leq \sigma_f. \quad (6-15)$$

Ondorioz, irizpide honen tentsio baliokidea (6-14) espresioiko ezkerreko atala izango litzateke, hau da,

$$\sigma_{\text{bal}} = E\varepsilon_{\max} = \left| \sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k) \right|_{\max}. \quad (6-16)$$

Rankine-ren teoriak ez bezala, Saint-Venant-en teoriak hiru tentsio nagusi erabiltzen ditu tentsio baliokidea kalkulatzeko orduan, bakarra erabili orde. Halere, tentsio normal maximoaren teoriarekin gertatzen zen bezala, irizpide honek ez du ongi aurreratu material harikarren isurpena, ezta egoera hidrostatiokoaren hutsegitea ere. Gaur egun teoria hau ez da ia inoiz ere erabiltzen, nahiz eta zenbait material hauskor eta konposatuentzat aplikatu daitekeen.



6.5. irudia.

6.5. TENSIO EBAKITZAILE MAXIMOAREN TEORIA

Puntu bateko tentsio-egoera onargarria den ala ez jakiteko erabil daitekeen beste irizpide bat tentsio ebakitzailearena da. Hasiara batean Coulomb-ek proposatu eta gero, Tresca-k 1865. urtean formulatu zuen, eta ziur aski, teoria guztien arteko zaharrena da. Gehienetan *Tresca-ren irizpidea* izenaz ezagutzen da. Teoria honen arabera, tentsio-egoera orokorra duen puntu bateko tentsio ebakitzaile maximoa trakzio-saiakuntzan hutsegiteko aldiunean dugun tentsio ebakitzailea baino handiagoa bada, hutsegitea gertatuko da. Dakigun bezala, plano nagusi bakoitzean kokatutako norabideen artean, tentsio ebakitzaile maximoa norabide nagusiekiko 45° -tara dago, eta bigarren gaian ikusitako espresioen bidez kalkula daiteke. Trakzio-saiakuntzan hutsegiteko momentuan dagoen tentsio ebakitzaile handiena $\sigma_f/2$ denez, irizpide hau honelaxe formula dezakegu matematikoki:

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \leq \frac{\sigma_f}{2}, \\ \tau_{13} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \leq \frac{\sigma_f}{2}, \\ \tau_{23} &= \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \leq \frac{\sigma_f}{2}.\end{aligned}\tag{6-17}$$

Hiruretatik handiena den tentsioak, hots, aztertzen ari garen puntuko tentsio ebakitzaile maximoak $\sigma_f/2$ baino txikiagoa izan beharko luke:

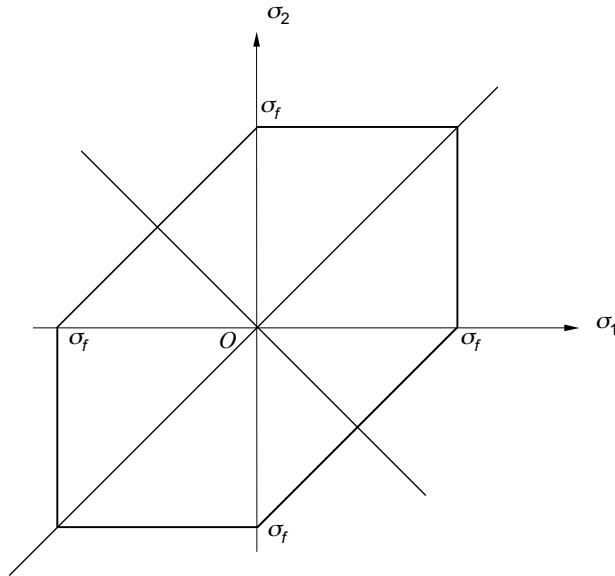
$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|}{2} \leq \frac{\sigma_f}{2},\tag{6-18}$$

eta beraz, izendatzaileak sinplifikatuz, tentsio baliokide hau lortzen da:

$$\sigma_{\text{bal}} = |\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}|. \quad (6-19)$$

Adierazpen grafiko laua egiteko, $\sigma_3 = 0$ suposatuko genuke, eta (6-17) espresiotik ondorioztatzen diren sei ekuazioak marraztuko genituzke, 6.6. irudian agertzen den eremua lortuz. Aurreko kasuetan bezala, eremuaren barnean gelditzen diren tentsio-egoerak onargarriak dira, eta kanpokoak onartezinak dira. Zuzenen ekuazioak hauexek izango lirateke:

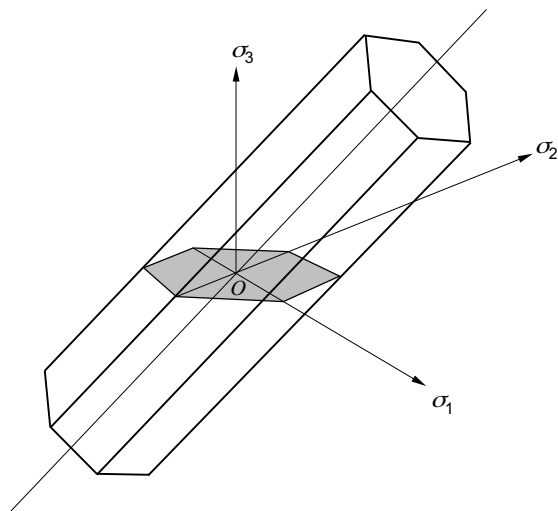
$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &\leq \sigma_f & \sigma_1 - \sigma_2 &\leq -\sigma_f \\ \sigma_1 &\leq \sigma_f & \sigma_1 &\leq -\sigma_f \\ \sigma_2 &\leq \sigma_f & \sigma_2 &\leq -\sigma_f \end{aligned} \quad (6-20)$$



6.6. irudia.

Ikusten den bezala, hutsegite-irizpide honek tentsio ebakitzaille handiena hartzen du kontuan tentsio-egoera bat onargarria den ala ez erabakitzeko. Hortaz, irizpide honen bidez 6.4.b. irudiko tentsio-egoeraren hutsegitea noiz gertatzen den auresan nahiko bagenu, $\sigma \leq 0,5\sigma_f$ baino txikiagoa izan beharko zela ikusiko genuke. Tentsio hori saiakuntzen bidez lortzen den balio esperimentaletik oso gertu dago ($\sigma = 0,57\sigma_f$). Beraz, irizpide hau material harikarren isurpena noiz gertatzen den ezagutzeko egokia dela ondoriozta daiteke. Gainera, benetan onar daitekeen balioa teoria honek dioena baino zertxobait handiagoa da; beraz, segurtasun-tarte bat edukiko genuke. Dena den, irizpide honi buruz hauxe azpimarratu behar da: tentsio ebakitzaille handiena berdina duten egoeren artean ez du inolako bereizkuntzarik egiten. Halere, material harikarren isurpenean eragina dutenak tentsio ebakitzailleak direnez, irizpide honek tentsio-egoera horien hutsegitea egokiro auresango luke.

Tentsio-egoera hiru ardatzekoa denean, adierazpen grafikoa ez da, aurreko kasuetan bezala, bolumen itxi bat izango. Tresca-ren irizpidearen arabera, hiru dimentsioko adierazpena prisma hexagonal infinitu bat da, eta prismaren ardatzak angelu berdinak osatzen ditu norabide nagusiekin osatutako ardatzekin (ikus 6.7. irudia). Prisma horren eta plano koordenatuen arteko ebakidurak 6.6. irudiko poligonoa ematen dute. Irudi hori aztertuta, erraz ikus daiteke ezen irizpide honek ondo azal dezakeela egoera hidrostatisakoak duen portaera berezia. Ikusten den bezala, hiru tentsioak berdinak direnean, egoera horri dagokion puntua beti egongo da prismaren barruan, hots, eremu onargarrian. Emaitza horrek egoera hidrostatisakoaren erresistentzia altua adierazten du.



6.7. irudia.

6.6. DEFORMAZIO-ENERGIA MAXIMOAREN TEORIA

Teoria hau Beltrami-k eta Haigh-k proposatu zuten 1885. urte inguruan. Teoria honen arabera, tentsio-egoera orokorra duen puntu bateko deformazio-energia trakzio-saiakuntzan hutsegiteko aldiunean dugun deformazio-energia baino handiagoa bada, hutsegitea gertatuko da. Beraz, lehenago ikusi ditugun teoriak ez bezala, irizpide honek ez du erabiltzen, tentsioaren edo deformazioaren baliorik. Horren ordez, teoria honek magnitude eskalar bat erabiltzen du, bolumen-unitateko deformazio-energia elastikoa, hain zuzen.

Irizpide honen formulazio matematikoa lortzeko, deformazio-energiaren dentsitatearen espresioan oinarrituko gara. Erreferentzia-sistemaren ardatzak norabide nagusiekin bat datozenean, espresio hori honelaxe idatziko dugu:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3), \quad (6-21)$$

eta tentsioen funtzioan, honelaxe (ikus 4-75 ekuazioa):

$$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3). \quad (6-22)$$

Trakzio-saiakuntzan, isurpena hasten den aldiunean probetako puntuek duten deformazio-energia honako hau da:

$$U_0 = \frac{\sigma_f^2}{2E}; \quad (6-23)$$

beraz, hutsegiterik ez egoteko,

$$\frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \leq \frac{\sigma_f^2}{2E}. \quad (6-24)$$

Izendatzaileak sinplifikatzen baditugu:

$$\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} \leq \sigma_f. \quad (6-25)$$

Ondorioz, irizpide honi dagokion tentsio baliokidearen balioa hau izango da:

$$\sigma_{\text{bal}} = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}. \quad (6-26)$$

Irizpide honek material harikorretan duen aplikagarritasuna aztertzeko, ikus dezagun berriro 6.5.b. irudiko tentsio-egoerarentzat zein balio lortzen den. Preseski, (6-26) ekuazioan $\sigma_1 = -\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$ eta $\sigma_3 = 0$ balioak ordeztuz gero, hauxe lortzen da:

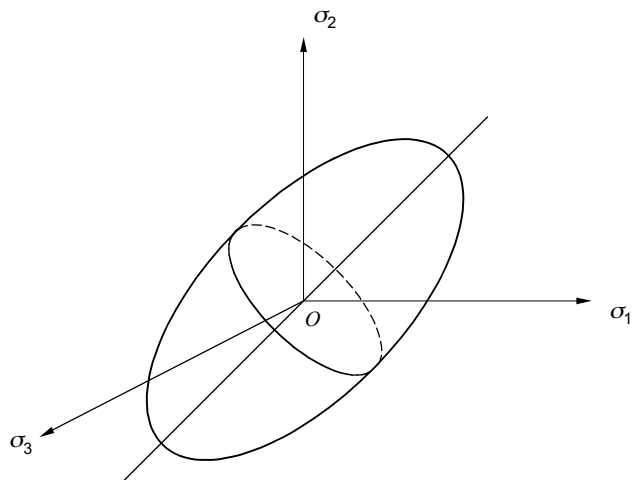
$$\sqrt{2\sigma^2(1+\nu)} \leq \sigma_f \Rightarrow \sigma \leq \frac{\sigma_f}{\sqrt{2(1+\nu)}}, \quad (6-27)$$

eta, adibidez, Poisson-en koefizientea $\nu = 0,25$ dela suposatuz,

$$\sigma_1 \leq 0,63 \sigma_f, \quad (6-28)$$

esperimentalki lortutako tentsioaren gainera dagoena. Balio horien artean dagoen aldearen arrazoia, isurpenaren erruduna deformazio-energia guztia dela suposatzean datza. Segidan ikusiko dugun bezala, guztizko deformazio-energia erabili ordez energia honen zati bat bakarrik hartzen denean, balio zehatzagoak lortzen dira material harikorretzat. Dena den, errealitatean irizpide hau ez da ia inoiz ere erabiltzen. Halere, interesgarria da irizpide hau hemen aipatzea, ikustera goazen hurrengo teoriaren aitzindaria delako.

Bukatzeko, (6-25) espresioa tentsio nagusien espazioan adieraziko bagenu, biraketa-elipsoide bat lortuko genuke, eta elipsoidearen ardatzak angelu berdinak osatuko lituzke hiru ardatz koordinatuekin (ikus 6.8. irudia).



6.8. irudia.

6.7. DISTORTSIO-ENERGIA MAXIMOAREN TEORIA

Teoria honen arabera, tentsio-egoera orokor bat duen puntu bateko distortsio-energia trakzio-saiakuntzan hutsegiteko aldiunean dugun distortsio-energia baino handiagoa bada, hutsegitea gertatuko da. Teoria honi Von Mises-en edo Von Mises eta Hencky-ren irizpidea ere deitzen zaio, teoria garatu zuten ikertzaileen ohoretan. Irizpide honek ere, aurrekoak bezala, energia erabiltzen du oinarri gisa, baina ez guztizko deformazio-energia, horren osagai bat baizik. Irizpide hau material harikarren isurpena zehazkien auresaten duena da.

Izan bedi 6.9. irudian agertzen den hiru ardatzeko tentsio-egoera, norabide nagusie-kiko paraleloa den kubo baten bidez adierazia. Bigarren gaian ikusi genuen bezala, edozein tentsio-matrize bi matrizeren batura modura idatz daiteke. Lehenengoari matrize esferikoa ($\vec{\mathbf{T}}_e$) deitzen genion, eta bigarrenari desbiderapen-matrizea ($\vec{\mathbf{T}}_d$):

$$\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{T}}_e + \vec{\mathbf{T}}_d. \quad (6-29)$$

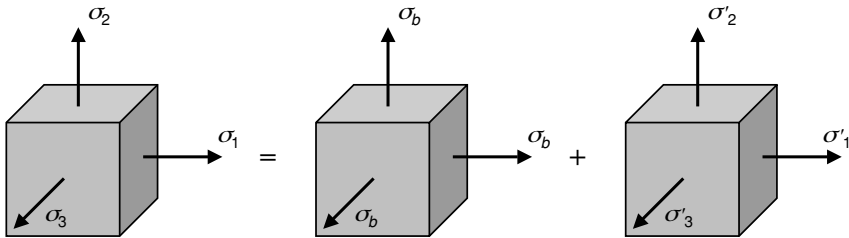
Matrize esferikoa batez besteko tentsioa (σ_b) eta matrize unitarioa elkarrekin biderkatuz lortzen da:

$$\vec{\mathbf{T}}_e = \sigma_b \vec{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \sigma_b & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_b \end{bmatrix}, \quad (6-30)$$

eta desbiderapen-matrizea, berriz, (6-29) ekuaziotik, kenketaren bidez:

$$\vec{\mathbf{T}}_d = \vec{\mathbf{T}} - \vec{\mathbf{T}}_e = \begin{bmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_b & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_b & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_b \end{bmatrix}. \quad (6-31)$$

Azter ditzagun deskonposatutako bi tentsio-egoera horien berezitasunak. Hain zuzen, 6.9. irudian ikusten den bezala, matrize esferikoari dagokion egoera tentsio-egoera hidrostatikoa da. Egoera horretan, norabide guztiak nagusiak dira; ondorioz, ez dago tentsio ebakitzailerik. Hori dela-eta, matrize esferikoak adierazten duen tentsio-egoerak bolumen-aldaketak sortzen ditu, baina ez du distortsiorik eragiten. Desbiderapen-matrizeari dagokion egoeran alderantzizkoa gertatzen da. Egoera hori hidrostatikoa ez denez, dudarik gabe tentsio ebakitzailerik egongo dira zenbait norabidetan, deformazio angeluarrak eta distortsioa sorraraziko dituztenak.



6.9. irudia.

Egoera horri dagokion bolumen-aldaketa kalkulatu bagenu, ostera, nulua dela ikusiko genuke. Hirugarren gaian ikusitakoaren arabera, bolumen-aldaketa deformazio-matrizearen lehenengo aldaezinaren berdina; beraz,

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3\sigma_b) = 0. \quad (6-32)$$

Laburtuz, matrize esferikoak bolumen-aldaketak sortzen ditu soilik, eta desbiderapen-matrizeak, aldiz, forma-aldaketak. Ondorioz, material harikorren isurpena tentsio ebakitzailerik lotuta dagoenez, hutsegite-irizpidearen formulaziorako desbiderapen-matrizeak adierazten duen egoera soilik hartuko dugu kontuan, horixe baita distortsioa sortzen duen osagai bakarra. Matrizeekin egin dugun bezala, guztizko deformazio-energia ere bi osagaien batura modura idatz daiteke:

$$U_0 = U_{0e} + U_{0d}, \quad (6-33)$$

non U_{0e} eta U_{0d} bolumen-aldaketari eta distortsioari dagozkien deformazio-energiak baitira, hurrenez hurren. Lehenengoari *dilatazio-energiaren deformazio-energia* deritzen, eta bigarrenari *distortsio-energia*. Hain zuzen, material harikorren hutsegitea bigarren energia-mota horrekin dago erlazionatuta. Dilatazio-energiak isurpenarekin zerikusirik ez duenez, ez dugu erabiliko, eta deformazio-energia totalari kenduko diogu. Deformazio-energia totala (6-22) ekuazioaren bidez kalkula dezakegu:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right]. \quad (6-34)$$

Kalkula dezagun orain bolumen-aldaketa soilik sortzen duen deformazio-energia. Horretarako 6.9. irudiko egoera esferikoaren osagaiak (6-34) espresio orokorrean ordeztuz:

$$U_{0e} = \frac{1}{2E} \left[3\sigma_b^2 - 2\nu(3\sigma_b^2) \right] = \frac{3\sigma_b^2}{2E} (1-2\nu), \quad (6-35)$$

eta σ_b batez besteko tentsioa,

$$\sigma_b = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (6-36)$$

(6-35) espresiora eramanez, hauxe lortuko dugu:

$$U_{ob} = \frac{1-2\nu}{6E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3]. \quad (6-37)$$

Azkenik, deformazio-energia totalari dilatazio-energia kenduz, distortsio-energia kalkulatzeko erabil dezakegun espresio hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned} U_{od} = U_0 - U_{ob} &= \frac{1}{2E} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] - \\ &- \frac{1-2\nu}{6E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3] = \\ &= \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]. \end{aligned} \quad (6-38)$$

Lehenago aurreratu dugun bezala, (6-38) espresiotik egoera hidrostatikoko baten distortsio-energia nulua dela egiazta dezakegu. Hain zuzen ere, traxzio-saiakuntzan huts egiteko momentuan distortsio-energiak duen balioa kalkulatzeko oso erraza da, $\sigma_1 = \sigma_f$ eta $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ eginez U_{od} -ren espresioan:

$$U_{od} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_f - 0)^2 + (\sigma_f - 0)^2 + (0 - 0)^2] = \frac{\sigma_f^2}{3E} (1 + \nu). \quad (6-39)$$

Hutsegiterik ez egoteko, hauxe bete beharko litzateke:

$$\frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \leq \frac{1+\nu}{3E} \sigma_f^2, \quad (6-40)$$

eta espresioa sinplifikatu ondoren:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq \sigma_f. \quad (6-41)$$

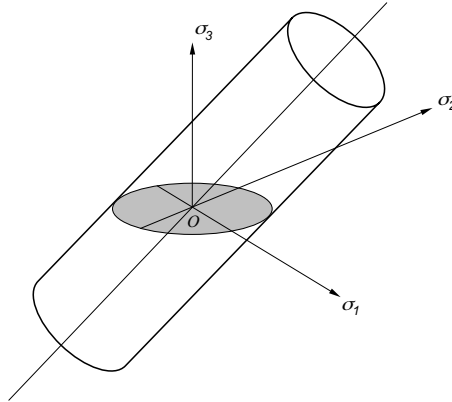
Beraz, irizpide honek isurpen-tentsioarekin parekatzen duen balioa —hots, tentsio baliokidea— honako hau da:

$$\sigma_{bal} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}. \quad (6-42)$$

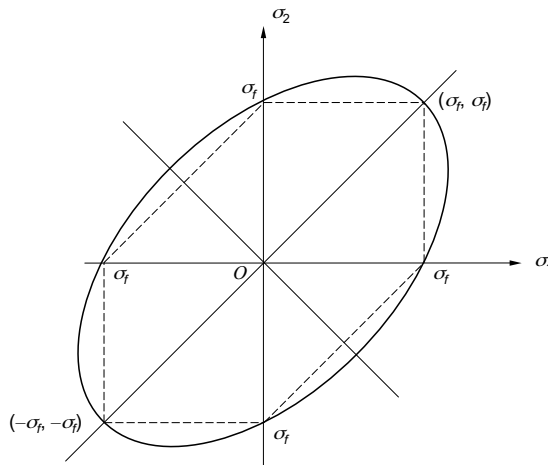
Aurreko teorietan egin dugun bezalaxe, (6-41) ekuazioa bi ardatzeko egoera batentzat marrartzuko bagenu, 6.10. irudia lortuko genuke, hots, elipse bat. Preseski, (6-41) espresioan $\sigma_3 = 0$ eginez lortuko genuke elipse horren ekuazioa:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_f^2. \quad (6-43)$$

Hiru ardatzeko egoera batentzat, tentsio onargarriak eta tentsio onartezinak bereizten dituen gainazala 6.10. irudiko zilindroa izango litzateke. Tresca-ren prisma hexagonalarekin gertatzen zen bezala, zilindro horren ardatzak angelu berdinak eratzen ditu norabide nagusiekin osatutako ardatzekin. Zilindro horren eta plano koordenatuen arteko ebakidura 6.11. irudiko elipsea izango litzateke.



6.10. irudia.



6.11. irudia.

Emaitza berera iritsi gaitezke tentsio oktaedrikoaren kontzeptua erabilita. Hain justu, bigarren gaian aipatu genuen bezala, matrize esferikoan plano oktaedrikoen dagokien tentsio ebakitzaila nulua da; eta osagai normala, batez besteko tentsioaren berdina. Matrize desbideratzailean aurkakoa gertatzen da: tentsio oktaedrikoaren osagai normala nulua da, baina ebakitzaila ez. Beraz, tentsio-matrizeari egoera hidrostatikoa kendu ondoren, plano oktaedrikoetan osagai ebakitzaila baino ez da geratzen. Beraz, material harikorraren isurpena tentsio ebakitzailen ondorioz gertatzen denez, zentzuzkoa dirudi tentsio oktaedriko ebakitzaila erabiltzea material horien hutsegitea auresateko. Tentsio horren balioa hauxe da:

$$\tau_{\text{okt}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (6-44)$$

Ardatz bakarreko egoeran isurpena hasten denean, tentsio ebakitzaileak balio hau du:

$$\tau_{\text{okt}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f. \quad (6-45)$$

Irizpide honen arabera, tentsio-egoera orokor bat duen puntu bateko tentsio oktaedriko ebakitzailea trakzio-saiakuntzan hutsegiteko aldiunean duguna baino handiagoa bada, hutsegitea gertatuko da. Beraz, hutsegiterik ez egoteko, hauxe bete beharko da:

$$\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f, \quad (6-46)$$

eta sinplifikatuz,

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq \sigma_f. \quad (6-47)$$

Ikusten den bezala, lortu berri dugun (6-47) ekuazioa eta distortsio-energian oinarrituz lortutakoa elkarren berdinak dira. Beraz, bi irizpideak baliokideak direla esan dezakegu.

Ikus dezagun zein den, irizpide honen arabera, 6.4.b. irudiko tentsio-egoeran onar daitekeen σ tentsioaren baliorik handiena. Horretarako, (6-41) ekuazioan $\sigma_1 = -\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$ eta $\sigma_3 = 0$ ordeztuz,

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(-\sigma - \sigma)^2 + (-\sigma - 0)^2 + (\sigma - 0)^2]} = \sqrt{3\sigma^2} \leq \sigma_f, \quad (6-48)$$

eta hortik,

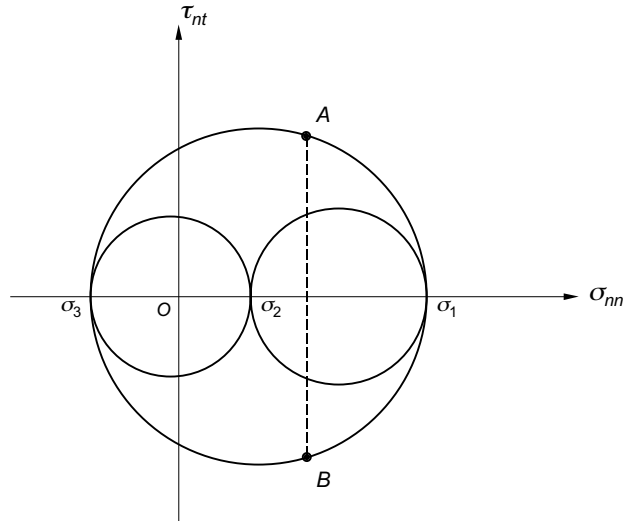
$$\sigma \leq \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} = 0,577 \sigma_f. \quad (6-49)$$

Balio hori guztiz bat dator material harikoren saiakuntzetatik lortutako emaitzekin. Gainera, Tresca-ren irizpidearekin gertatzen zen bezala, egoera hidrostatiakoan isurpenik ez dela gertatuko auresaten du, errealitatean gertatzen denarekin ados dagoena. Material harikor askorekin egindako saiakuntzek, Von Mises-en teoria isurpenaren hasiera zehazkien auresaten duen irizpidea dela frogatu dute, eta horregatik, gaur egun material horien hutsegitea kalkulatzeko gehien erabiltzen den teoria da.

6.8. MOHR-EN TEORIA

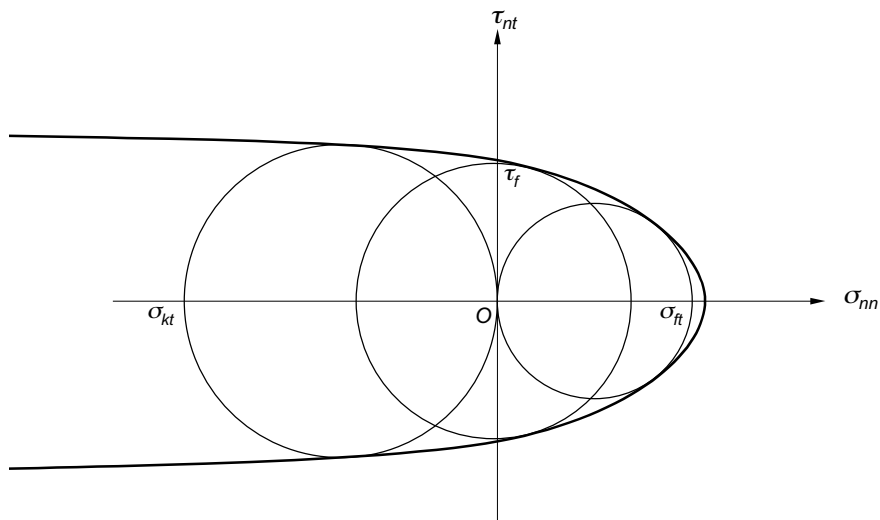
Ikustera goazen azken hutsegite-irizpidea, tentsio ebakitzaile maximoaren teorian dago oinarrituta, eta *Mohr-en egoera limiteen teoria* izenaz ezagutzen da. Orain arte ikusitako irizpide gehienetan, materialaren trakzio- eta konpresio-erresistentziak elkarren berdinak direla suposatu dugu. Halere, material askok —hauskorrek batez ere— erresistentzia desberdinak eduki ditzakete trakzio eta konpresiopean. Berezitasun hori duten materialen hutsegitea aztertzeko, Mohr-en egoera limiteen teoria hau nahiko onartuta dago gaur egun.

Teoria hau ulertzeko, demagun 6.12. irudian agertzen den hiru ardatzeko tentsio-egoera. Dakigun bezala, hiru zirkuluek mugatzen duten eremuko puntuen koordinatuak plano bati dagozkion tentsio normalaren eta tentsio ebakitzailearen balioak dira. Era berean, AB bezalako bertikal batean kokatutako puntuak osagai normal berdina baina osagai ebakitzaile desberdina duten planoak adierazten dituzte. Plano horien guztien artean, ahulena tentsio ebakitzaile handiena duena izango da. Gainerako lerro bertikalekin arrazonomendu berbera aplikatuz, plano zigortuenak zirkulu handienean kokatutakoak direla ondoriozta dezakegu. Beraz, hutsegitea sortzen duten tentsio-egoerak aztertzeke orduan, nahikoa izango da diametro handiena duen zirkulua bakarrik erabiltzea.



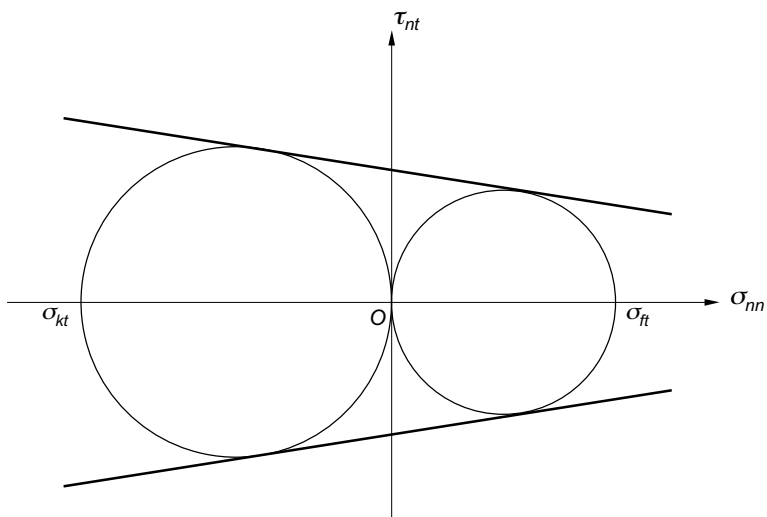
6.12. irudia.

Tentsio-egoera baten osagaiak handituz doan zenbaki batez biderkatzen baditugu, materialaren isurpena edo haustura gertatzen den momentu batera iritsiko gara. Hutsegiteko momentuari dagokion Mohr-en zirkulua, onar daitekeen zirkulurik handiena izango da, beraz. Demagun, orain, saiakuntza desberdinak egiten ditugula, tentsio-egoera desberdinak erabiliz, eta hutsegiteko aldiunean dauzkagun Mohr-en zirkulu handienak marrazten ditugula. Hain zuzen, 6.13. irudian, trakzio, konpresio eta ebakidura hutsari dagozkien Mohr-en muga-zirkuluak adierazi ditugu, adibide gisa. Zirkulu horiek guztiak inguratzen dituen kurbari kurba intrintsekoa deritzo, eta materialaren ezaugarri mekaniko bat da. Tentsio-egoera baten Mohr-en zirkulurik handienak kurba intrintsekoa ebakitzen bada, hots, kurbak definitzen duen eremutik irteten bada, hutsegitea gertatuko dela suposatuko dugu.



6.13. irudia.

Askotan, materialaren kurba intrintsekoa kalkulatzeko ez da erraza izaten. Hori dela-eta, sarritan hurbilketa bat egiten da, trakzioko eta konpresioko saiakuntzetako zirkuluen tangenteak bakarrik marraztuz (ikus 6.14. irudia). Era horretan, teoria hau Tresca-ren irizpidearen aldaguntza bat dela ikus daiteke. Trakzioko eta konpresioko erresistentziak berdinak direnean, tangenteak horizontalak dira eta bi teoriak bat datoz.



6.14. irudia.

Ikus dezagun zein den hutsegite-eremuaren adierazpen grafikoa bi ardatzeko tentsio-egoera baten kasuan. Preseski, 6.14. irudiko lerroen ekuazioa honelaxe idatz dezakegu:

$$\tau_{nt} = a\sigma_{nn} + b, \quad (6-50)$$

non a eta b materialaren bi konstante diren. Tentsio-egoera laua aztertzen ari garenez, σ_3 tentsioa nulua izango da. Bestalde, σ_1 trakziozkoa dela suposatuko dugu, eta σ_2 konpresiozkoa. Beraz, tentsio ebakitzaile maximoa eta horri dagokion osagai normala honako hauek izango dira:

$$\tau_{m1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \sigma_{m1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (6-51)$$

Balio horiek (6-50) espresioan ordeztuz, zuzenaren ekuazioa σ_1 eta σ_2 tentsioen funtzioan idatz dezakegu:

$$\sigma_1(1 - a) - \sigma_2(1 + a) = 2b. \quad (6-52)$$

Konstanteen balioak kalkulatzeko, mugako baldintza hauek aplikatuko ditugu:

$$\begin{aligned} \sigma_2 = 0 &\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_{f1}, \\ \sigma_1 = 0 &\Rightarrow \sigma_2 = -\sigma_{fk}. \end{aligned} \quad (6-53)$$

Eta (6-53) erlazioak (6-52) ekuazioan ordeztuz, hauxe lortzen da:

$$\begin{aligned} \sigma_{f1}(1 - a) &= 2b, \\ \sigma_{fk}(1 + a) &= 2b, \end{aligned} \quad (6-54)$$

eta hortik, a eta b konstanteen balioak aska daitezke:

$$a = \frac{\sigma_{f1} - \sigma_{fk}}{\sigma_{f1} + \sigma_{fk}}, \quad b = \frac{\sigma_{f1}\sigma_{fk}}{\sigma_{f1} + \sigma_{fk}}. \quad (6-55)$$

Azkenik, balio horiek (6-52) ekuazioan ordeztuz:

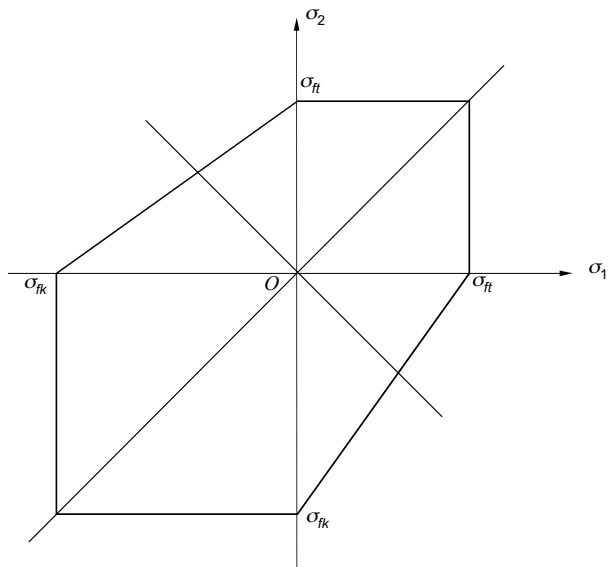
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{f1}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{fk}} = 1. \quad (6-56)$$

Espresio hau $\sigma_1 > 0$ eta $\sigma_2 < 0$ direnean aplika daiteke, eta 6.15. irudiko lerro inklinatua adierazten du. Era berean lortuko genuke $\sigma_1 > 0$ eta $\sigma_2 < 0$ tentsioei dagokien ekuazioa. Bi tentsio nagusiak positiboak edo negatiboak direnean, mugako balioen kalkulua zuzenean egin daiteke. Trakziozkoak badira:

$$\sigma_1 = \sigma_{f1}, \quad \sigma_2 = \sigma_{f1}, \quad (6-57)$$

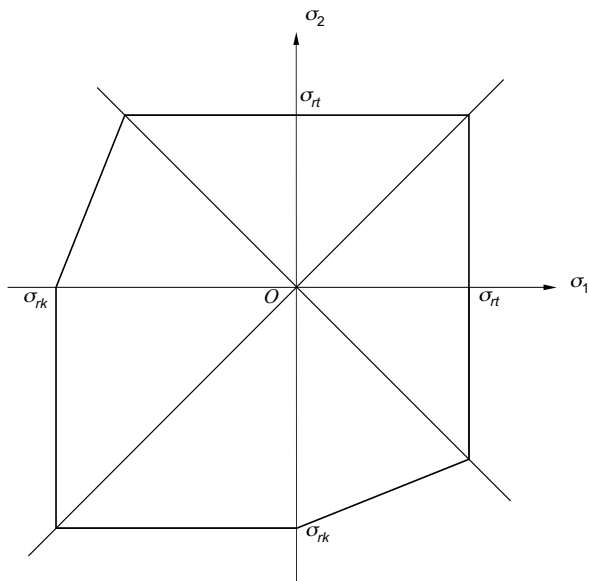
eta negatiboak badira,

$$\sigma_1 = -\sigma_{fk}, \quad \sigma_2 = -\sigma_{fk}. \quad (6-58)$$



6.15. irudia.

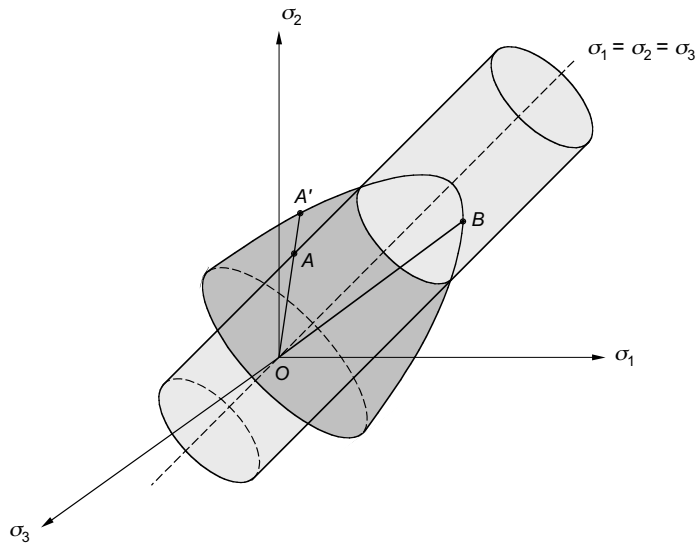
Tresca-ren irizpidearekin gertatzen zen bezala, Mohr-en teoriak ere egoera hidrostati-koaren portaera ongi azaltzen du, isurpenik agertuko ez dela iragartzeko gai baita. Materiala harikorra izan beharrean hauskorra bada, *Mohr-en teoria eraldatua* erabiltzen da. Azken teoria honek trakziozko eta konpresiozko muga bertikalak bigarren eta laugarren kuadranteetara luzatzen ditu, 6.16. irudian agertzen den bezala. Zuzenketa horien bidez lortzen diren balioak esperimentalki lortutako datuetatik gertuago daudela frogatu da.



6.16. irudia.

6.9. PORTAERA HARIKORRA ETA PORTAERA HAUSKORRA

Aurreko azpiataletan ikusi dugun bezala, Tresca-ren eta Von Mises-en irizpideak egokiak dira material harikorren hutsegitea iragartzeko. Hiru ardatzeko egoera batean, tentsio-egoera onargarriak eta onartezinak bereizten dituen eremua mugagabea da teoria hauentzat. Tresca-ren kasuan, gainazalak prisma hexagonal baten itxura du, eta Von Mises-en kasuan, berriz, zilindrikoa da. Gainazal horiei *plastifikazio-gainazalak* deritze, isurpenaren hasiera noiz gertatzen den adierazten baitute. Horrela, 6.7. eta 6.11. irudien arabera, hiru tentsio nagusiak oso antzekoak direnean, ez da isurpenik gertatzen. Halere, espermentalki froga daiteke ezen, tentsioen balioek muga bat gaindituz gero, materiala hautsi egiten dela, deformazio handirik ezagutu gabe bada ere. Hori dela-eta, aipatutako plastifikazio-gainazalari, haustura-gainazal bat gehituko diogu. Hain zuzen, 6.17. irudian haustura-gainazal hori marraztu da, Von Mises-en plastifikazio-gainazalarekin batera.



6.17. irudia.

Irudiko haustura-gainazalean bi zati desberdinu daitezke. Alde batetik, zilindroaren barnean dagoena, eta bestetik, kanpoan gelditzen dena. Beraz, haustura-gainazalera iristeko bi aukera edo ibilbide daude, irudian OA eta OB eran adierazten direnak. Tentsio nagusiak antzekoak direnean, tentsio-egoera zilindroaren barnean egongo da, eta horien balioak handitzen doazen neurrian, materialak OB ibilbidea jarraituko du. Haustura-gainazalera iristean, materiala hautsi egiten da, hauskorra balitz bezala eta deformazio plastikorik jasan gabe. Portaera hori sarritan agertzen da hiru soldadura-kordoi lotzen diren puntuetan, egoera arriskutsuak sorraraziz. Alderantziz, tentsioen balioak OA lerroan zehar mugitzen badira, A' puntura iristean isurpena agertuko da, plastifikazio-gainazala zeharkatzean. Ondoren, A puntura heltzean, haustura gertatuko da, baina oraingoan, deformazio handiak agertu ondoren. A' puntutik A puntura dagoen tartean deformaziozko gogordura adieraziko

luke. Beraz, azpimarra dezagun material harikorrek portaera hauskorra izan dezaketela zenbait baldintza betetzen direnean, aurrez abisatu gabe eta deformazio handirik agertu gabe huts eginez.

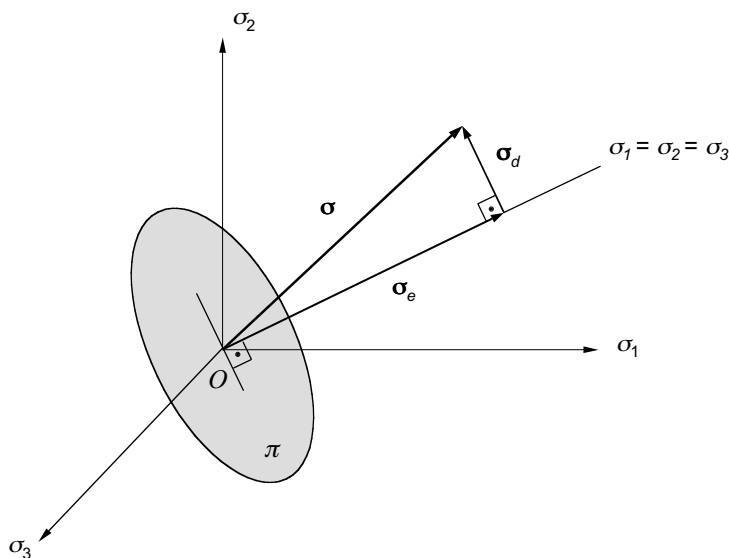
Gai hau bukatzeko, azter dezagun material harikorren zat erabiltzen den beste adierazpen grafiko bat, *Haig-Westergaard-en adierazpena* deitutakoa, hain zuzen. Frogatua gelditu den bezala, egoera hidrostatiakoak ez du eraginik material harikoren isurpenean. Beraz, adierazpen grafikoa egiteko orduan, zentzuzkoa dirudi (6-31) ekuazioko matrize desbideratzailearen osagaiak bakarrik erabiltzea. Von Mises-en irizpideari eskainitako atalean ikusi zen bezala, matrize desbideratzailearen azarnak zero balio du:

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0. \quad (6-59)$$

Tentsio nagusiekin osatutako ardatz-sistema bat erabiliz gero, (6-59) espresioa jatorritik pasatzen den plano baten ekuazioa da, eta beraren norabide-bektoreak angelu berdinak osatzen ditu hiru ardatz koordinatuekin. Plano horri π planoa deitzen zaio (ikus 6.18. irudia). Sistema horretan σ_1 , σ_2 eta σ_3 tentsioek σ bektorea definituko dute. Bektore hori bi bektoreren batura modura idatz dezakegu:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_d, \quad (6-60)$$

non σ_e eta σ_d tentsio esferikoa eta tentsio desbideratzailea diren, hurrenez hurren.



6.18. irudia.

Material harikoren hutsegiteak σ_e osagai hidrostatiakoarekin zerikusirik ez duenez, σ_d osagai desbideratzaileak muga bat gaindituz gero, hutsegitea gertatuko da, bestearen balioa edozein izanik ere. Arestian ikusitako plastifikazio-gainazalak osagai desbideratzaile horren moduluak har ditzakeen balio maximoen leku geometrikoak izango dira, hain zuzen. Ohi-koa izaten da plastifikazio-gainazal horien adierazpen laua egitea, *Haig-Westergaard-en adierazpena* deitutakoa (ikus 6.19. irudia). Eraikuntza geometriko hori egiteko, nahikoa da

plastifikazio-gainazalaren eta π planoaren arteko ebakidura marraztea. Irudian Tresca-ren eta Von Mises-en irizpideen adierazpenak agertzen dira, non Tresca-ri dagokion gainazalak itxura hexagonalak baitu, eta Von Mises-enak, berriz, zirkularra. Ikusten den bezala, hexagonoa zirkuluaren barnean dago inskribaturik, 6.19. irudian ageri bezala.

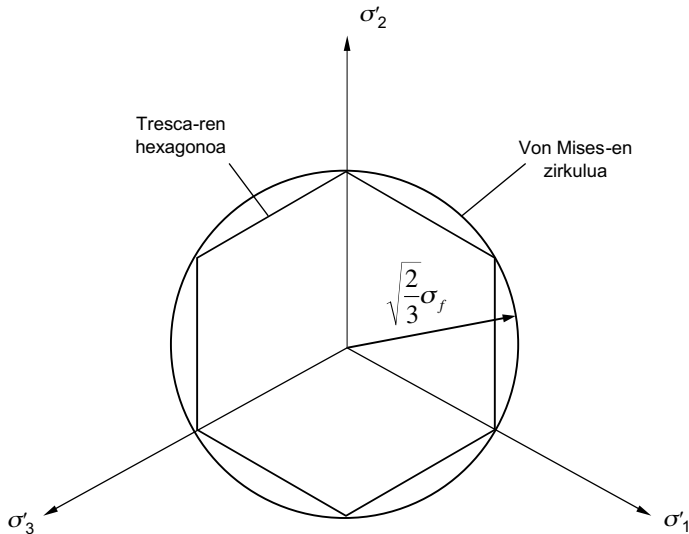
Bestetik, 6.19. irudiko zirkuluaren erradioa kalkulatzeko, nahikoa da ardatz bakarreko egoera bati dagokion tentsio desbideratzailearen modulua kalkulatzea. Desbiderapen-matritzea honako hau izango da:

$$\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma/3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma/3 \end{bmatrix}, \quad (6-61)$$

eta σ_d -ren modulua isurpena hasten den momentuan, hots, $\sigma_d = \sigma_f$ denean, honako hau:

$$|\sigma_d| = \sqrt{(2\sigma_f/3)^2 + (-\sigma_f/3)^2 + (-\sigma_f/3)^2} = \sqrt{4\sigma_f^2/9 + \sigma_f^2/9 + \sigma_f^2/9} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_f. \quad (6-62)$$

Material isotropoentzat, balio horrek berdina izan behar du ardatz bakarreko edozein egoerarentzat. Beste era batera esanda, ez dio axola σ tentsioa 1, 2 edo 3 ardatzean aplikatuta dagoen. Ondorioz, *Haig-Westergaard-en* eremuak simetrikoak izan behar dira beti 6.19. irudian agertzen diren hiru ardatzekiko.



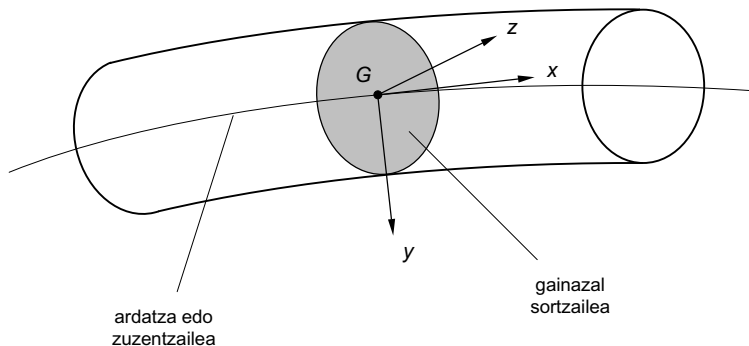
6.19. irudia.

7. Pieza prismatikoak

7.1. SARRERA

Elastikotasunaren Teoriaren oinarrizko kontzeptuak ikusi eta gero, gai honetan *Materialen Erresistentzia* izenarekin ezagutzen den jakintzagaia aztertzen hasiko gara. Liburu honen hasieran esan genuen bezala, Elastikotasunaren Teoriaz baliatuz, egitura baten analisirako behar diren magnitude eta ekuazioak planteatu daitezke. Halere, ekuazio horiek ia inoiz ere ezin daitezke analitikoki askatu, eta soluzio esplizituak oso gutxitan lor daitezke. Zorionez, egituretan erabiltzen diren elementu gehienak nahiko sinpleak izaten dira geometrikoki. Lehenengo gaian aurreratu genuen bezala, elementu horien dimentsioek erlazio jakin batzuk betetzen dituzte, eta zenbait hipotesi sinplifikatzaile egiteko aukera ematen dute. Hipotesi horiek oso komenigarriak dira, asko errazten baitute egituren kalkulua. Dena den, Elastikotasunaren Teoria ez dugu zeharo baztertuko, Materialen Erresistentziarekin lortutako emaitzen zehaztasuna egiaztatzeko baliagarria baita. Gainera, aplikatutako kargak eta mugako baldintzak oso bihurriak ez direnean, soluzio analitiko zehatzak lortzeko balio dezake.

Egiturretan eta makinetan ager daitezkeen elementuen izaera askotarikoa izan daitezkeen arren, gehienak honako hiru talde hauekoren baten barruan sailka daitezke: pieza prismatikoak, xaflak eta oskolak. Horietatik, ugarienak eta garrantzitsuenak *pieza prismatikoak* dira. Habeak, zutabeak, ardatzak eta abar pieza prismatikoak dira. Gai honetan elementu horien berezitasunak azalduko ditugu, eta hurrengo gaietan tentsioak eta deformazioak nola kalkula daitezkeen ikusiko dugu. Horiek ezagutu eta gero, elementuko punturik zigortuenak aurki ditzakegu eta diseinua egokia den ala ez erabaki, hutsegite-teoriak aplikatuz. Gelditzen diren atalak, beraz, pieza prismatikoari eskainiko dizkiogu. Lehenik eta behin, pieza prismatikoaren definituko dugu, zeharkako sekzioetan ager daitezkeen esfortzuak zeintzuk diren azalduz. Hurrengo ataletan, esfortzu horietako bakoitzak pieza prismatikoan eragiten dituen tentsioak nolakoak diren aztertuko dugu. Ondoren, pieza prismatikoekin osatutako egitura desberdinen sailkapen labur bat egingo dugu. Segidan, egituren finkaerak edo bermaguneak nolakoak izan daitezkeen ikusiko dugu, horietan agertzen diren erreakzioak azalduz. Erreakzioen kopuruaren arabera, egitura isostatikoak eta hiperestatikoak desberdinduko ditugu. Azkenik, pieza prismatikoaren ekuazio diferentzialak ikusi ondoren, gaia bukatzeko, esfortzuen diagramak nola eraikitzen diren ikasiko dugu.

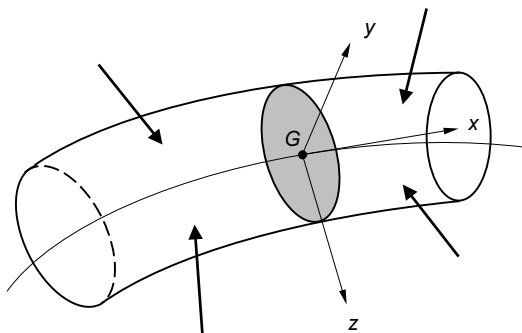


7.1. irudia.

7.2. SEKZIOKO ESFORTZUAK PIEZA PRISMATIKOETAN

Gainazal lau bat (gainazal sortzailea), ardatza edo zuzentzailea deituriko lerro batean zehar mugitzean sortzen den bolumenari, *pieza prismatikoa* deituko diogu. Gainazal sortzailea ardatzarekiko elkarzuta da, eta grabitate-zentroa ere bertan kokatuta dauka (ikus 7.1. irudia). Ardatzaren itxuraren arabera, pieza prismatikoa zuzena, planokidea edo alabeatua izan daiteke. Sekzio sortzailearen arabera, berriz, pieza baoak (edo hutsak) eta beteak bereiz daitezke. Gainera, pieza prismatikoetan ardatzaren luzera zeharkako sekzioa baino askoz handiagoa izaten da.

Kalkuluak egiteko, jatorria grabitate-zentroan kokatuta daukan erreferentzia-sistema bat erabiliko dugu, irudian agertzen den bezala. Ardatzarekiko ukitzaila den norabideari x deituko diogu, eta sekzioaren inertzia-ardatz nagusiak y eta z norabideak izango dira. Zeharkako sekzioa ardatzarekiko elkarzuta denez, x norabidea ere sekzioarekiko normala izango da, eta y eta z ardatzekiko elkarzuta. Ondorioz, norabide horiekin osatutako erreferentzia-sistema hiru angelu zuzeneko ardatz-sistema bat izango da. Grabitate-zentroaren posizioa kokatzeko, s koordenatu kurbilineoa erabiliko dugu, hots, x koordenatua ardatza zuzena denean. Grabitate-zentroa kokatu ondoren, sekzioaren barnean puntuen posizioa definitzeko, beste bi koordenatuez baliatuko gara.

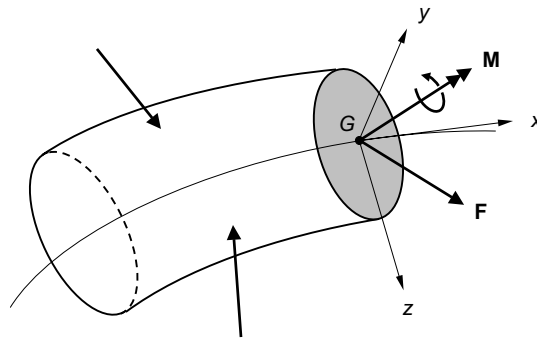


7.2. irudia.

Azter ditzagun orain pieza prismatikoaren sekzioetan ager daitezkeen barne-indarrak. Izan bedi kanpoko indar batzuen eraginpean orekan dagoen pieza prismatiko bat (ikus 7.2. irudia). Zeharkako sekzioetan dauden tentsioak kalkulatzeko, lehenik eta behin barneko indarrak ezagutu behar ditugu. Horretarako, ezaguna zaigun *sekzioen metodoa* erabiliko dugu, hau da, pieza prismatikoa ardatzarekiko elkarzuta den plano batekin ebakiko dugu, eta zatietako bati oreka-ekuazioak aplikatuko dizkiogu. Erraz uler daiteke, ebaketa egin eta gero zati bat isolatzen badugu, estatikaren legeak ez direla beteko, ebakitako sekzioan indar eta momentu bat agertu ezean. Bigarren gaian ikusi genuen bezala, indar eta momentu hori, eskuineko zatian aplikatutako indarrek ezkerrekoari eragiten dizkietenak dira. Transmittutako indar eta momentu horiei \mathbf{F} eta \mathbf{M} deituko diegu, hurrenez hurren, eta grabitatezentroan egongo dira aplikaturik, 7.3. irudian adierazten den bezala. Zeharkako sekzioan aplikatutako indar eta momentu horiek ardatzen norabidean deskonposatzen baditugu, 7.4. irudiko osagaiak lortuko ditugu. Osagai horiek izen jakin batzuek hartzen dituzte, ondoko ekuazioetan jasotzen den bezala:

$$\mathbf{F} = N_x \mathbf{e}_1 + V_y \mathbf{e}_2 + V_z \mathbf{e}_3, \quad (7-1)$$

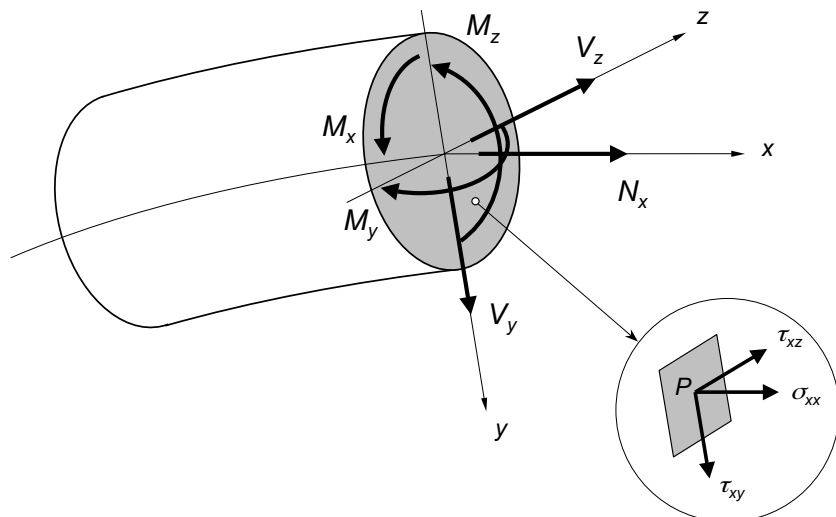
$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{e}_1 + M_y \mathbf{e}_2 + M_z \mathbf{e}_3. \quad (7-2)$$



7.3. irudia.

N_x osagaiari *indar normala* edo *ardatzeko indarra* deritzo, eta zeharkako sekzioarekiko elkarzuta da. Indar horrek pieza prismatikoaren bi zatiak banantzeko edo elkartzeko joera adierazten du, trakziozko edo konpresiozko esfortzuak sortuz, hurrenez hurren. Bestetik, V_y eta V_z direlakoei *indar ebakitzailerak* deritze, eta sekzioaren planoan daude aplikaturik. Indar horiek, zati bat bestearen gainean labainarazten dute, pieza prismatikoa ebakitzeko joera azalduz.

Momentu makurtzaileari dagokionez, beste hiru osagai bereiz ditzakegu. Dakigun bezala, momentuak biraketarekin daude erlaziozaturik. Sekzioarekiko elkarzuta den momentuari, *momentu bihurtzailea* deritzo (M_x) eta ardatzaren inguruan biraketa bat sortzen du, pieza bihurtuz. Gainerako M_y eta M_z , berriz, *momentu makurtzaileak* dira, eta pieza prismatikoa okertzen dute, XZ eta YZ planoetan kurbadurak sortuz, hurrenez hurren.



7.4. irudia.

Sekzioko esfortzuak ezagutu ondoren, hurrengo pausoa horiek sortzen dituzten tentsioak kalkulatzeko da. Esfortzuen eta tentsioen artean dagoen erlazioa erraz lor daiteke, baliokidetasun estatikoa aplikatuz. Sekzioko puntu batean egon daitezkeen tentsioak σ_{xx} , τ_{xy} eta τ_{xz} dira, hots, x ardatzarekiko elkarzuta den planoko tentsioaren osagaiak. Tentsio horiek aplikatutako esfortzuak sekzioan zehar nola banatzen diren adierazten dute. Beraz, tentsioek ardatz koordinatuen norabideetan sortzen dituzten indarrak eta momentuak aplikatutako esfortzuen berdinak izan beharko dira. Erlazio horiek lortzeko, har dezagun P puntu baten inguruan dA balioko azalera infinitesimal bat. Puntu honetako σ_{xx} osagai normala dA azalera biderkatuz gero, eta sekzioan zehar gauza bera eginez, eta biderkadurak batuz gero, hots, integratuz gero, N_x ardatzeko indarra lortuko dugu. Gauza bera τ_{xy} eta τ_{xz} osagaiekin errepikatuz, V_y eta V_z indar ebakitzailak lortuko ditugu. Hiru erlazio horiek (7-3) ekuazioan biltzen dira. Lehen kalkulatuak indarrak, ardatz koordinatuetaraino dauden distantziekin biderkatuz eta integratuz gero, sekzioko momentuak lortuko ditugu. Adibidez, $\sigma_{xx}dA$ biderkadura z ardatzeraino dagoen distantziaz biderkatuz —hots, P puntuaren y koordinatuaz—, M_z momentua lortuko genuke. Hain zuzen, (7-3) eta (7-4) ekuazioetan erlazio hauek guztiak adierazten dira:

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA, \quad V_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad V_z = \int_A \tau_{xz} dA, \quad (7-3)$$

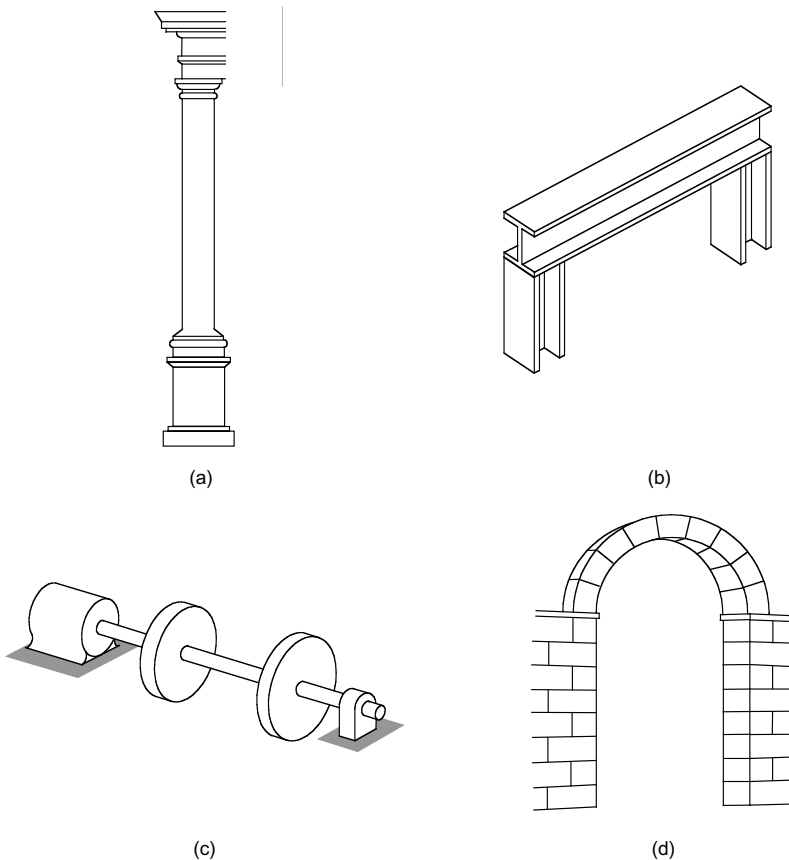
$$M_x = \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dA, \quad M_y = \int_A \sigma_{xx} \cdot z \cdot dA, \quad M_z = \int_A \sigma_{xx} \cdot y \cdot dA. \quad (7-4)$$

Pieza prismatikoaren sekzioak simetria-planoren bat duenean, indarrak plano honetan aplikaturik egonez gero, problema lau baten aurrean egongo ginateke, eta aurkitu beharreko esfortzuak hiru baino ez lirateke izango: N_x , V_y eta M_z . Tentsioak kalkulatzeko, (7-3) eta (7-4) ekuazioak integratu beharko genituzke. Halere, integrazio hori ezin daiteke zuzenean egin, tentsioaren osagaiak y eta z koordinatuen funtzioak baitira, eta erlazio hori ezezaguna

baitzaigu oraindik. Beste era batera esanda, ez dakigu tentsioak nola dauden banaturik zeharkako sekzioan zehar. Hurrengo gaitan ikusiko dugun bezala, hipotesi sinplifikatzaile bat erabiliko dugu ekuazio horiek ebatzi ahal izateko.

7.3. PIEZA PRISMATIKOEKIN OSATUTAKO EGITURAK

Atal honetan, pieza prismatikoekin osatutako hainbat egitura aurkeztuko ditugu. Lehen-dabizi, *zutabea* deituriko pieza prismatikoak dauzkagu (ikus 7.5.a. irudia). Zutabeak bertikalki kokatutako pieza prismatikoak dira eta konpresiopean egiten dute lan. Beraz, zutabeetan agertuko zaigun esfortzu garrantzitsuena ardatzeko indarra izango da. Konpresiozko indar hori zutabearen gainean dagoen solairuak sortutakoa izaten da gehienetan. Horrez gain, zutabeak bere pisu propioa ere jasan behar du, zutabe handientzat kontuan hartu behar izaten dena. Elementu horiek antzinatek dira ezagunak, eta gehienetan harrizkoak izaten ziren, Grezia edo Erromako hainbat eraikuntzatan ikus daitezkeen bezala. Gaur egun, material desberdin askorekin egon daitezke eraikita, eta harriaz gain hormigoia eta metalak erabiltzen dira. Hurrengo gai batean ikusiko dugun bezala, zutabeak oso lerdinak direnean, ezegonkortasun arazoak egon daitezke, gilbordura deituriko fenomeno arrisku-tsua agertzen baita.



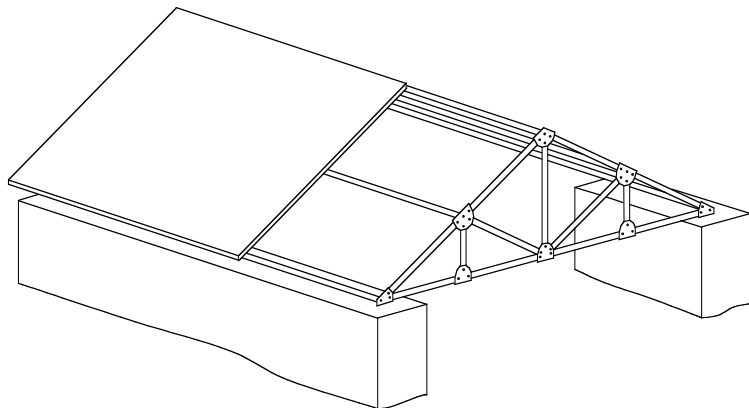
7.5. irudia.

Makurdurapean lan egiten duten elementuei, *habeak* deritze eta horietan gailentzen den esfortzua momentu makurtzailea da (ikus 7.5.b. irudia). Makurdura aztertzen dugunean ikusiko den bezala, habeetan trakziozko nahiz konpresiozko tentsioak ager daitezke. Ondorioz, trakzioari eusteko gai ez diren materialak erabiliz gero, beharrezkoa da habeen barnean altzairuzko barrak sartzea pieza zurruntzeko. Habeak eraikuntza askotan topa ditzakegu, adibidez, zubietan, etxebizitzetako solairuetan eta abarretan.

Pieza prismatikoa ardatzaren norabidea duen momentu baten eraginpean dagoenean *ardatza* deritzo. Elementu horietan esfortzurik garrantzitsuena momentu bihurtzailea da, nahiz eta askotan momentu makurtzailearen eragina ere kontuan hartu behar izaten den. Bihurdurapean lan egiten duten piezak oso ugariak dira ingeniartzako aplikazioetan, eta kasu gehienetan zeharkako sekzioa zirkularra izaten da. Esate baterako, potentzia transmititzen duten ardatzetan bihurtura-esfortzuak agertzen dira.

Azkenik, pieza prismatikoaren ardatza okertuta dagoenean, *arkua* deritzo. Arkuek, zeharka aplikatutako kargak konpresiozko indarren bidez transmititzen dituzte zimenduetaraino. Ardatzak duen kurbadurari esker, momentu makurtzaileen balioak murriztu egiten dira eta konpresiozko esfortzuak gailentzen. Hori dela-eta, arkuak egitura oso egokiak dira trakzioari eusteko gai ez diren materialak erabiltzen direnean, harria kasu. Berezitasun horri esker, gure arbasoek egitura itzelak eraiki zituzten arkuetan oinarrituz (elizak eta zubiak, adibidez), oraindik ere zutik dihardutenak.

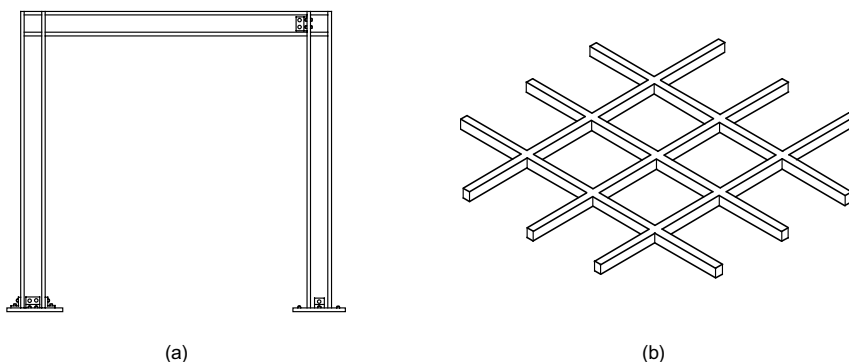
Pieza prismatikoak elkarri lotuz lortzen diren sistemei *egitura* deituko diegu. Egitura horiek kanpotik eragiten dieten indarrei eusteko eta indarrak transmititzeko gai izan behar dira. Geometriaren eta aplikatutako indarren arabera, zenbait motatako egiturak bereiz daitezke. Alde batetik *barra-sarea* edo *sareta* deituriko egiturak dauzkagu: muturretan artikulaturik dauden barrekin osatutako egiturak dira (ikus 7.6. irudia). Kanpoko indarrak mutur edo korapilo horietan aplikatzen direnean, pieza prismatikoetan ardatzeko indarrak agertzen dira soilik, eta beste esfortzu guztiak nuluak dira. Dena den, barren arteko loturak ez dira artikulazio perfektuak izaten, torlojuz edo soldaduraz eginda egoten baitira. Halere, loturak oso zurrunak ez direnean, biraketa ez dutela galarazten suposa daiteke, eta artikulazioen portaera berdina daukatela onartzen da. Barra-sareak, zubiak eta teilatuak sostengatzeko egitura gisa erabiltzen dira gehienbat.



7.6. irudia.

Barren arteko loturak zurrinak direnean, egiturari *portiko* deritzo (ikus 7.7.a. irudia). Portikoak ingeniartzita zibilean sarrien erabiltzen diren egiturak dira, eta eraikuntza askotan topa ditzakegu. Portikoaren barra guztiak plano berean kokaturik daudenean, portikoa lau dela esaten da. Kanpoko indarrak plano horretan aplikatzen direnean, pieza prismatikoetan agertzen den esfortzurik garrantzitsuen momentu makurtzailea da, eta ardatzeko indarra eta indar ebakitzaileak ere egon daitezke. Portikoetan, barrak lotzen diren muturretako biraketa galarazita dago, loturak zurrinak baitira. Ondorioz, barren arteko angelu erlatiboa konstante mantentzen da korapiloetan. Azkenik, *parrilladura* deituriko egiturak ere badaude, 7.7.b. irudikoa bezalakoak. Parrilladurek, portikoen antzeko itxura daukate, baina indarrak egituraren planotik kanpo aplikaturik egotean, momentu makurtzaileez gain momentu bihurtzaileak ere agertzen dira. Parrilladurak zimenduetako hormigoi-masaren barruan jartzen diren egituretan erabiltzen dira, adibidez, gaineko kargak uniformeki bana daitezzen.

Goian aipatutako egitura guztiak, hiru dimentsiokoak ere izan daitezke, lauak izan beharrean. Kasu horretan, aplikatutako indarrek edozein norabide edukitzen dute, eta 7.4. irudiko edozein esfortzu ager daiteke. Ez dago esan beharrik, hiru dimentsioko egituren kalkulua egitura lauena baino askoz konplikatuagoa dela.



7.7. irudia.

7.4. EUSKARRIAK ETA ERREAKZIOAK

Bigarren gaian ikusi genuen bezala, egitura batean izaera desberdineko indarrek eragin dezakete (bolumen-indarrak, indar kontzentratuak, indar hedatuak, etab.). Horrez gain, indarren beste hainbat sailkapen egin ditzakegu. Esate baterako, denborarekiko duten menpekotasunaren arabera, indarrak estatikoak edo dinamikoak izan daitezke. Egituran eragiten duten denboraren arabera, indar iraunkorrak eta ustekabeak bereiz ditzakegu. Bestalde, temperatura-aldaketek sortuak badira, indar termikoak deritze. Kanpoko eragin horiek guztiak barneko indar moduan transmititzen dira egituraren zehar, lurrera edo beste egitura bati lotzen duten euskarrietara iritsi arte. Euskarri horietan agertzen diren esfortzuei *erreakzioak* deritze.

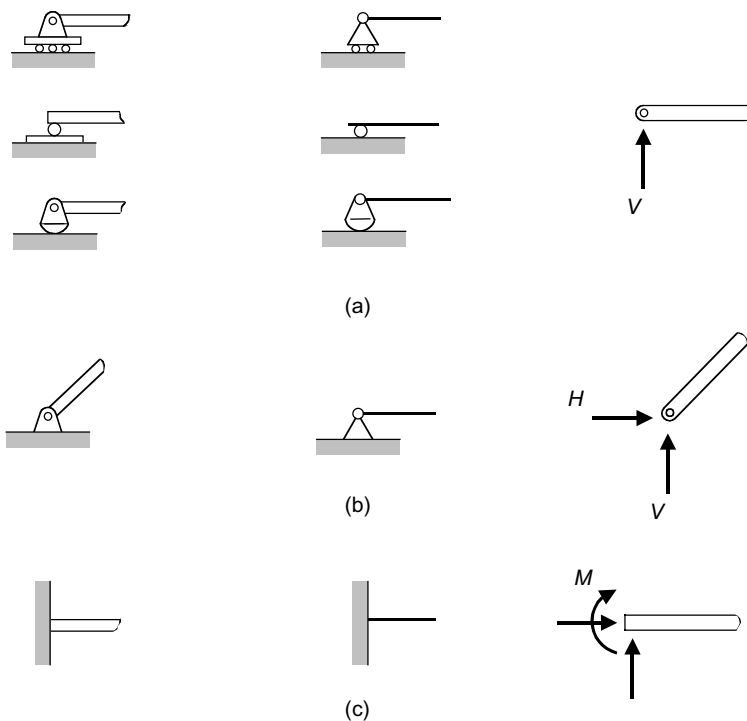
Euskarrien oinarrizko funtzioa puntu bateko desplazamendu edo biraketak anulatzea da, egituraren oreka eta egonkortasuna ziurtatuz. Mota askotako euskarriak topa daitezkeen arren, denek ezaugarri bera dute: bermatzen duten askatasun-maila bakoitzeko erreakzio bat agertzen da. Galarazitako askatasun-mailak desplazamenduak direnean (u_x, u_y, u_z), erreakzioak indarrak izango dira (F_x, F_y, F_z). Eta anulatutako askatasun-mailak biraketak direnean ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$), momentuak agertzen dira (M_x, M_y, M_z). Askatasun-mailen eta erreakzioen arteko erlazioak 7.1. taulan agertzen dira laburturik.

Askatasun-mailak		Erreakzioak	
Desplazamenduak	u_x	F_x	Indarrak
	u_y	F_y	
	u_z	F_z	
Biraketak	θ_x	M_x	Momentuak
	θ_y	M_y	
	θ_z	M_z	

7.1. taula.

Hain zuzen, 7.8. irudian bi dimentsioko egituren analisisan sarrien erabiltzen diren euskarri-motak ageri dira. Biraketa galarazten ez duten euskarriei *euskarri artikulatuak* edo *giltzatuak* deritze. Euskarri artikulatuak *higikorrek* edo *finkoak* izan daitezke. Euskarri higikorretan desplazamendua bermatuta dago norabide batean, baina norabide elkarzutean higitzeko askatasuna du, 7.8.a. irudian adierazten den bezala. Ezkerraldean euskarri higikorren modelo fisikoa ageri da, eta erdian kalkulu matematikoak egiteko erabiltzen den irudi sinplifikatua. Eskuineko irudian ikus daitezkeen bezala, euskarri artikulatuetan erreakzio bakar bat agertzen da, hots, indar bat. Bestetik, puntuaren desplazamendua guztiz anulatzen duen euskarriari *euskarri finkoa* deritza, eta agertzen diren erreakzioak bi indar elkarzut dira (ikus 7.8.b. irudia). Azkenik, bi desplazamenduak eta biraketa bermatzen dituen euskarriari *landapena* deritza, eta bertan bi indar eta momentu bat agertzen dira. Landapenaren adierazpen grafikoa 7.8.c. irudian jasotzen dena da.

Zer esanik ez, 7.8. irudian euskarri gutxi batzuk baino ez ditugu jaso, noski. Horiez gain, beste hainbat motatako euskarriak topa daitezke, bakoitzak bere geometria eta ezaugarriak dituena. Kontuan hartu behar da, gainera, bi dimentsioko euskarriak bakarrik aipatu ditugula. Erraz uler daiteke hiru dimentsioko egituren kasuan konbinazio ugari egin ditzakegula, eta euskarri desberdinen kopurua asko handitzen dela. Dena den, hemen aurkeztutako euskarrien portaera ongi ulertuz gero, edozein egituraren kalkulari arazorik gabe ekin diezaiogegu.



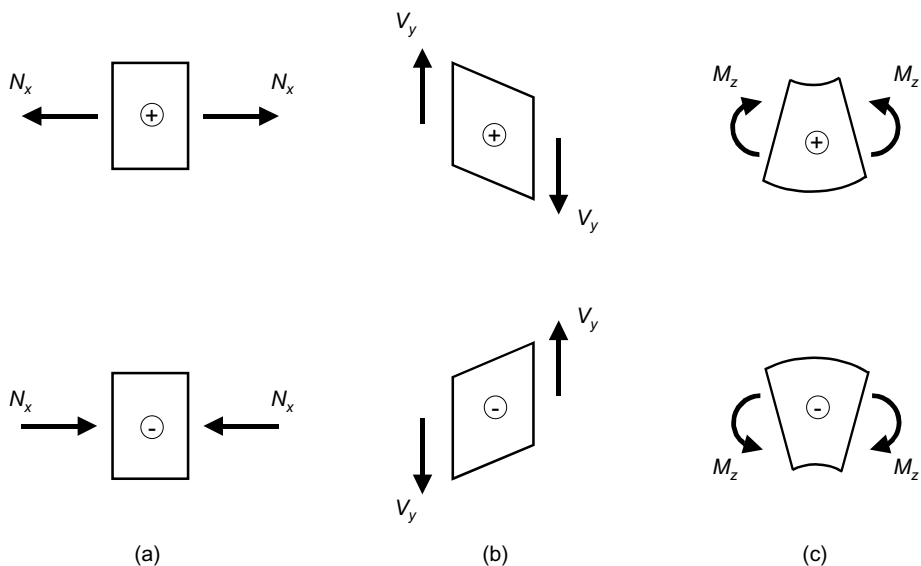
7.8. irudia.

Egituren analisia egiteko orduan, euskarrietako erreakzioak ezezagunak izaten dira gehienetan. Erreakzio horien balioak kalkulatzeko oinarritzkoa izaten da egiturako sekzioetan agertzen diren esfortzuak kalkulatu ahal izateko. Erreakzio horiek lortzeko lehen pausoa oreka-ekuazioak aplikatzea da. Halere, oreka-ekuazioak ez dira beti nahikoa izaten erreakzioak kalkulatu ahal izateko. Erraz uler daitezkeen bezala, egitura bateko euskarrien kopurua handituz gero, erreakzioen kopurua ere handitu egiten da. Ondorioz, erreakzioen kopuruak erabil ditzakegun oreka-ekuazioen kopurua gaintzen duenean, ezezagun baino ekuazio gehiago edukiko ditugu, eta ezingo dugu sistema askatu.

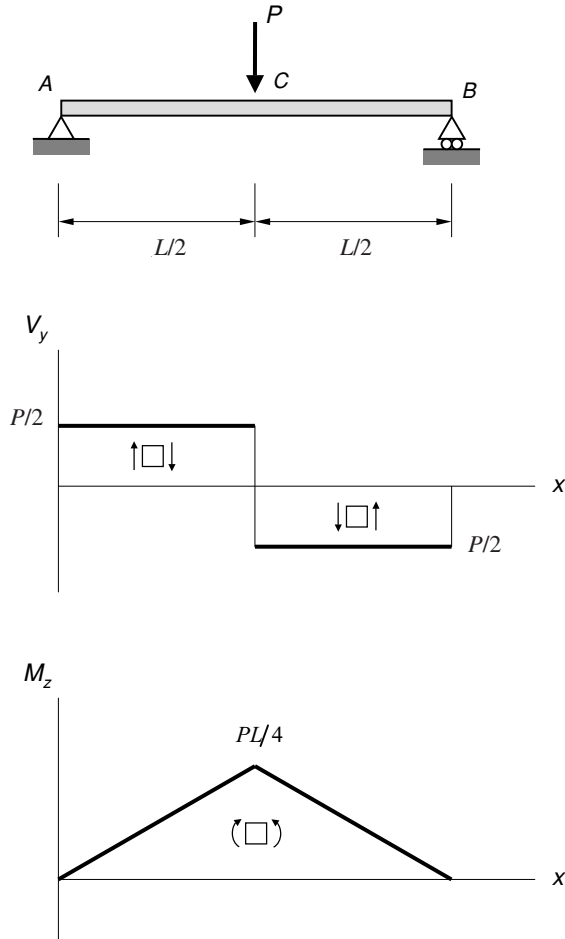
Oreka-ekuazioen bidez erreakzio guztiak kalkula daitezkeenean, egitura *isostatikoa* dela esango dugu. Alderantziz, oreka-ekuazioak erreakzioak kalkulatzeko nahikoa ez direnean, egiturari *hiperestatikoa* deritzo. Hurrengo gaitan ikusiko dugun bezala, egitura hiperestatikoa kalkulatu ahal izateko, bateragarritasun-ekuazioak gehitu beharko ditugu. Erreakzioen kopuruaren eta oreka-ekuazioen artean dagoen diferentziari *hiperestatikotasun-maila* deitzen zaio, eta h hizkiak izendatuko dugu. Hiperestatikotasun-mailak sobera dau den loturen kopurua adierazten du, beraz. Ondorioz, oreka-ekuazioez gain, hiperestatikotasun-mailak esaten duen adina bateragarritasun-ekuazio erabili beharko ditugu. Problema lauen kasuan, hiru oreka-ekuazio aplika ditzakegu; hots, indarren batura bi norabidetan nulua izan behar da, eta edozein punturekiko momentuen baturak nulua izan behar du. Hiru dimentsioko egituretan, ordea, sei oreka-ekuazio erabil daitezke. Hurrengo gaitan ikusiko dugu egitura hiperestatikoen kalkulua nola egiten den.

7.5. ESFORTZUEN DIAGRAMAK

Egitura bateko punturik zigortuenak zeintzuk diren jakiteko, zenbait sekzioetan eragiten duten esfortzuak lortu behar dira lehenengo, maximoak non agertzen diren ezagutzeko. Informazio hori *esfortzuen diagramen* bidez lor daiteke. Esfortzuen diagramek pieza prismatikoaren sekzioetan barne-indarrek dituzten balioak azaltzen dizkigute. Beste hitz batzuetan esanda, esfortzuak pieza prismatikoan zehar nola aldatzen diren jakiteko balio dute diagramek. Hain zuzen ere, 7.9. irudian ardatzeko indarrarentzat, indar ebakitzailerentzat eta momentu makurtzailearentzat erabiliko ditugun zeinu-irizpideak ageri dira.



7.9. irudia.

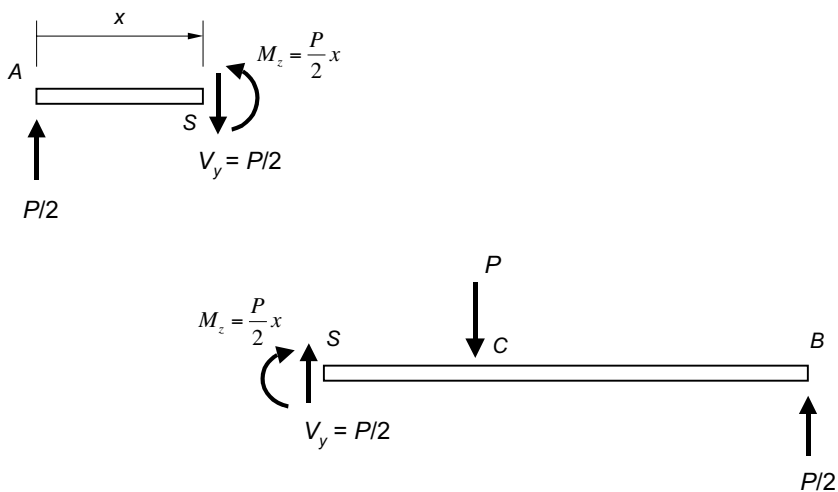


7.10. irudia.

Esfortuzen diagramak kalkulatzeko lehenengo pausoa erreakzioak kalkulatzea da. Aurreko atalean aipatu dugun bezala, egitura isostatikoen kasuan nahikoa da oreka-ekuazioak aplikatzea erreakzioak kalkulatzeko. Preseski, 7.10. irudiko adibidearen kasuan, A euskarrian erreakzio horizontala eta bertikala ager daitezke. B euskarria higikorra denez, erreakzio bertikala ager daiteke soilik. Beraz, hiru ezezagun edukiko ditugu. Problema lauetan hiru ekuazio aplika ditzakegunez, erreakzioak zuzenki kalkulatuko ditugu:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A = 0, \\
 \sum M_z = 0 &\Rightarrow V_A L - P \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{P}{2}, \\
 \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_B = -\frac{P}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{7-5}$$

Erreakzioen balioak lortu ondoren, hurrengo pausoa sekzioen metodoa erabiltzea da. Izan ere, sekzioko esfortzuen balioak kalkulatzeko, ebaki edo sekzionatu egin behar da pieza prismatikoa, eta horren barnean agertzen diren indarrak eta momentuak kalkulatu. Horretarako, oreka-ekuazioez baliatuko gara berriro ere. Eta C sekzioan indar kontzentratu bat dagoenez, bi ebaketa egin beharko ditugu pieza prismatikoaren diagramak kalkulatu ahal izateko: lehenengoa AC tarteko sekzioen batean, eta bigarrena CB tarteko sekzio batean.



7.11. irudia.

Hain justu, 7.11. irudian AC tartean dagoen S sekzioan egindako ebaketa ageri da. Pieza ebaki ondoren bi zati desberdin geratzen zaizkigu, hots, S sekzioaren ezkerreko eta eskuineko zatiak. Sekzioan dauden esfortzuak kalkulatzeko, bi zatietako edozein aukera dezakegu, hau da, AS edo SB zatia. Bi kasuetan balio berberak lortu beharko genituzke, baina aurkako noranzkoarekin, irudian ikus daitekeen bezala. AS zatian bestean baino indar gutxiago daudenez aplikaturik, zati hori aukeratuko dugu. Sekzioaren posizioa kokatzeko, x aldagaia erabiliko dugu, A muturreraino dagoen distantzia definitzen duena. AS pieza-zatian oreka-ekuazioak aplikatuta, sekzioko esfortzuak lor ditzakegu:

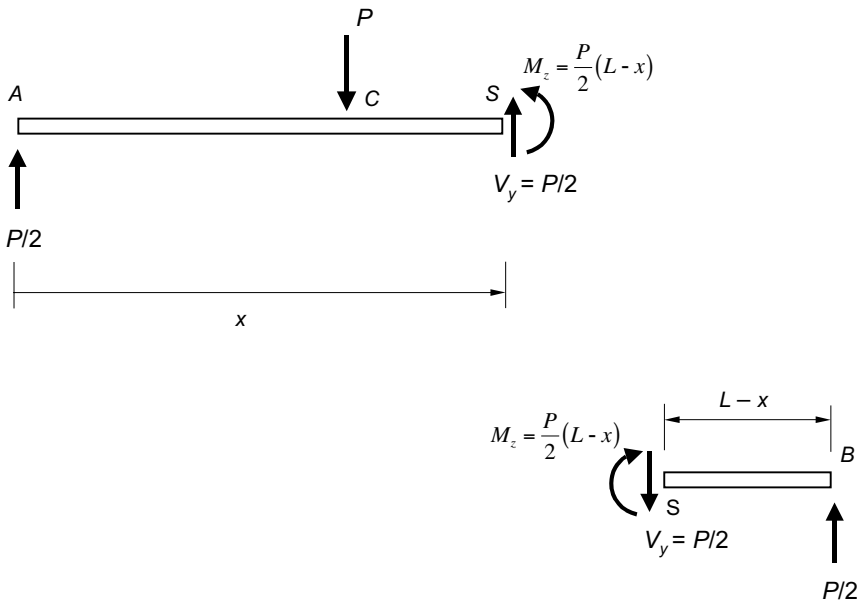
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \Rightarrow N_x = 0, \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow V_y - \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow V_y = \frac{P}{2}, \\ \sum M_z &= 0 \Rightarrow \frac{P}{2}x - M_z = 0 \Rightarrow M_z = \frac{P}{2}x. \end{aligned} \quad (7-6)$$

Era horretan, (7-6) ekuazioko funtzioak marraztuz, 7.10. irudiko adierazpenak lortuko genituzke (ardatzeko indarra nulua denez, ez da marraztu). Kontuan hartu behar da ekuazio horiek ez dutela CB tarterako balio, segituan egiaztatuko dugun bezala. Izan ere, indar kontzentratuaren ondorioz esfortzuen diagramak ez dira jarraituak, eta beharrezkoa da C sekzioaren alde banatan analisisia errepikatzea. Beraz, segidan CB tartean dagoen sekzio bat aukeratuko dugu eta ardatzarekiko elkarzuta den plano baten bidez ebakiko

dugu. Horrela eginez, 7.12. irudiko pieza-zatiak lortuko genituzke. Oraingoan, SB zatian aplikatuko ditugu oreka-ekuazioak, AS zatian aplikatzea baino errazagoa delako. Lehengo x aldagai berbera erabiliz, ondoko oreka-ekuazio hauek edukiko ditugu:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow N_x = 0, \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow V_y - \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow V_y = \frac{P}{2}, \\ \sum M_z &= 0 \Rightarrow \frac{P}{2}(L-x) - M_z = 0 \Rightarrow M_z = \frac{P}{2}(L-x).\end{aligned}\quad (7-7)$$

Lehen bezala ekuazio horiek grafikoki adieraziz, 7.10. irudiko esfortzuen diagramak lortzen dira.



7.12. irudia.

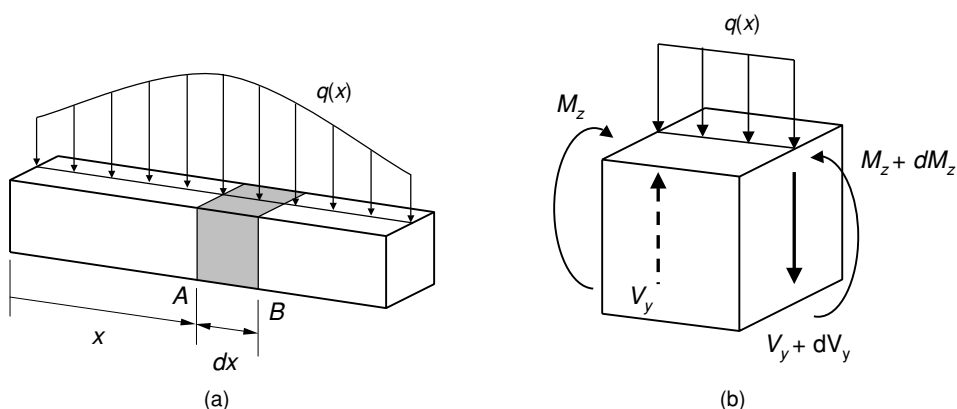
7.6. PIEZA PRISMATIKOEN OREKA-EKUAZIO DIFERENTZIALAK

Atal honetan, ardatz zuzeneko pieza prismatikoetan indar ebakitzaileren eta momentu makurtzailearen artean dauden erlazioak aztertuko ditugu. Erlazio horiei *pieza prismatikoaren oreka-ekuazio diferentzialak* deritze, eta oso baliagarriak izan daitezke esfortzuen diagramak marrazteko orduan. Ekuazioak lortzeko, demagun 7.13.a. irudiko pieza prismatikoa dugula, tarte batean banatutako indar bertikal baten eraginpean. Indar horren luzera unitateko balioa $q(x)$ dela suposatuko dugu. Lehenago aurreratu genuen bezala, kanpoko indarrak sekzioaren simetria-plano batean aplikatuta daudenean, V_y indar ebakitzailera eta M_z momentu makurtzailea agertuko dira soilik, ardatzeko indarrak gain. Piezaren sekzio batean bi esfortzu horien artean dagoen erlazioa topatzeko, bata bestetik oso gertu dauden A eta B sekzioak hartuko ditugu, bien arteko distantzia dx izanik, eta tartean geratzen den

pieza-zatia isolatuko dugu. Sekzio horien arteko distantzia oso txikia izatean, A eta B artean indar hedatuaren balioa konstantea dela onar dezakegu, 7.13.b. irudian adierazten den bezala. Beraz, zati horretan aplikatutako indarraren erresultantea $q(x)dx$ izango da, erdiko puntuan kokatua. Ebakitako sekzioetan agertzen diren indar ebakitzailak eta momentu makurtzailak desberdinak izango dira ezker eta eskuinaldean. Izan ere, A eta B sekzioak desberdinak direnez, esfortzuak ere aldatu egingo dira batetik bestera igarotzean, gutxi bada ere. Ezkerraldeko sekzioan, esfortzuek V_y eta M_z balio dutela suposatuko dugu, eta eskuinekoan, $V_y + dV_y$ eta $M_z + dM_z$. Pieza prismatikoa orekan dagoenez, isolatu dugun zatiak ere estatikaren legeak bete beharko ditu. Indarren baturak norabide bertikalean zero balio behar duela inposatuz, hauxe lortzen da:

$$V_y - (V_y + dV_y) - q(x) dx = 0 \Rightarrow dV_y + q(x) dx = 0, \quad (7-8)$$

$$\frac{dV_y}{dx} = -q(x). \quad (7-9)$$



7.13. irudia.

Era berean, B sekzioaren erdiko puntutarako momentuak hartuz,

$$M_z - (M_z + dM_z) + V_y dx - q(x) dx \frac{dx}{2} = 0 \Rightarrow \quad (7-10)$$

$$-dM_z + V_y dx - q(x) \frac{dx^2}{2},$$

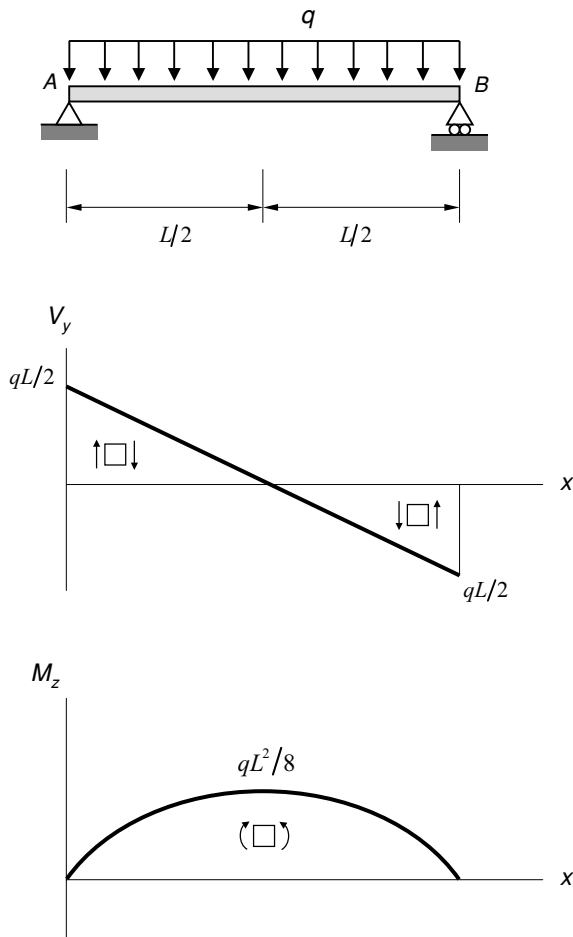
eta bigarren mailako infinitesimoak arbuaiatuz,

$$\frac{dM_z}{dx} = V_y. \quad (7-11)$$

Hain zuzen, (7-6) eta (7-8) ekuazioak, pieza prismatikoen oreka-ekuazio diferentzialak dira. Indar hedatua plano bertikalean egon beharrean horizontalean balego, erlazio berdinek topatuko genituzke V_z eta M_y esfortzuentzat. Ekuazio horien arabera, honako hau ondoriozta dezakegu: sekzio batean V_y indar ebakitzailen diagramak duen malda indar hedatuak sekzio horretan duen balioaren berdina da, zeinuz aldatua. Beraz, karga nulua den

sekzioetan, indar ebakitzaileak maximo edo minimo bat edukiko du. Era berean eta (7-8) ekuazioaren arabera, hauxe esan daiteke: momentu makurtzaileen diagramako malda, indar ebakitzailearen diagramako maldaren berdina da. Ondorioz, indar ebakitzaileak zero balio duen sekzioetan momentu makurtzailea maximoa edo minimoa izango da. Kontuan hartu behar da espresio horiek indar hedatuentzat soilik direla aplikagarriak. Sekzio batean indar kontzentratu bat edukiko bagenu, jauzi bat egongo litzateke indar ebakitzaileen diagraman. Momentu kontzentratu bat edukiko bagenu, aldiz, jauzia momentu makurtzaileen diagraman gertatuko litzateke.

Atal honekin bukatzeko, aipa ditzagun goiko ekuazioetatik ondoriozta daitezkeen zenbait kasu berezi. Aplikaturako karga hedatua konstantea denean —hots, $q = \text{ktea}$ —, V_y indar ebakitzaileen diagrama lineala izango da, eta M_z momentu makurtzaileena parabolikoa. Bestalde, pieza prismatikoaren zati batean karga hedatua nulua bada —hau da, $q = 0$ —, V_y -ren diagrama konstantea izango da, eta M_z -rena, aldiz, lineala. Hain zuzen, 7.10. irudiko adibideari so eginez gero, propietate horiek guztiak betetzen direla egiazta daiteke.



7.14. irudia.

Gainera, (7-9) eta (7-11) ekuazio diferentzialekin, pieza prismatikoetako sekzioetan esfortzuek zenbat balio duten kalkula daiteke. Adibide gisa, izan bedi q indar hedatu baten eraginpean dagoen 7.14. irudiko pieza prismatikoa. Indar hedatu horren balioa pieza prismatikoaren sekzio guztietan berdina denez, (7-9) ekuazioa integratuz hauxe lortuko genuke:

$$\frac{dV_y}{dx} = -q(x) = q, \quad (7-12)$$

eta integratuz,

$$V_y = -qx + K_1, \quad (7-13)$$

non K_1 integrazio-konstantea baita. Indar ebakitzailaren espresio hori (7-11) ekuazioan ordeztuz,

$$\frac{dM_z}{dx} = V_y = -qx + K_1, \quad (7-14)$$

eta berriro integratuz,

$$M_z = -q \frac{x^2}{2} + K_1 x + K_2. \quad (7-15)$$

K_1 eta K_2 konstanteak kalkulatzeko, bi muga-baldintza dauzkagu, zeren habearen muturretan momentu makurtzailea nulua baita:

$$\begin{aligned} M_z \Big|_{x=0} &= 0, \\ M_z \Big|_{x=L} &= 0. \end{aligned} \quad (7-16)$$

Horrela, (7-16)-ko lehenengo baldintzatik $K_2 = 0$ dela ondorioztatzen da, eta bigarren erlaziotik K_1 konstantearen balioa aska dezakegu: $K_1 = qL/2$. Ondorioz, indar ebakitzailarentzat eta momentu makurtzailearentzat espresio hauek geratuko dira:

$$V_y = q \left(\frac{L}{2} - x \right), \quad M_z = q \frac{x}{2} (L - x). \quad (7-17)$$

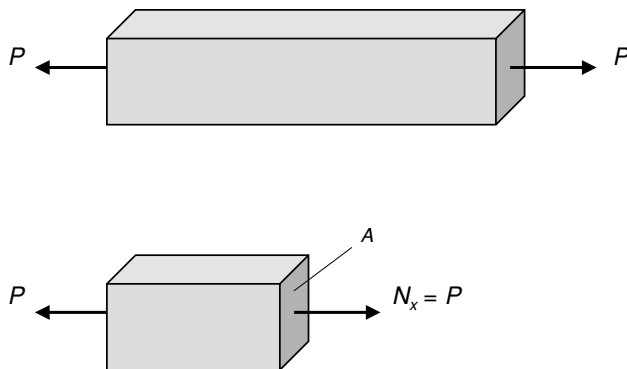
Preseski, 7.14. irudian ekuazio horien adierazpen grafikoa marraztu da. Espresio horiek pieza prismatikoaren diagramen ekuazioak dira, hain zuzen. Dena den, esfortzuen diagramak marrazteko bide hau jarrai daitekeen arren, gehienetan erosoagoa izaten da 7.5. atalean ikusitako sekzioen metodoa erabiltzea.

8. Ardatzeko indarra

8.1. SARRERA

Pieza prismetikoetan ager daitezkeen esfortzu desberdinak ikusi ondoren, hurrengo gaietan banaka-banaka bakoitzak sortzen dituen tentsioak aztertuko ditugu. Gai honetan, zeharkako sekzioan agertzen den esfortzu bakarra ardatzeko indarra denean pieza prismetikoan agertzen diren tentsioak eta deformazioak nola kalkula daitezkeen azalduko da. Dakigun bezala, elementu bat kalkulatzeko orduan, tentsioak ez ezik deformazioak ere mugako balio batzuen azpitik mantentzea komeni da. Horrez gain, estatikoki zehaztu gabeko egiturak —hots, egitura hiperestatikoak— analizatzeko orduan, beharrezkoa da deformazioak kalkulatzeko. Gai honetan zehar ikusiko den bezala, pieza prismetikoen ezaugarri geometrikoen baliatuz, kalkulua errazten duten zenbait hipotesi sinplifikatzaile egingo ditugu, eta tentsioak eta deformazioak kalkulatzeko balioko diguten espresio labur baina oso garrantzitsuak lortuko ditugu.

Pieza prismetikoaren sekzioetan N_x indar normala bakarrik dagoenean, piezan daukagun egoerari trakzio edo konpresio hutsa deritzo (ikus 8.1. irudia). Ardatzeko indarra sekzioaren kanpoaldera zuzenduta badago —hots, barra luzatzeko joera badu—, trakziopean dagoela esaten da, eta zeinu positiboa ipiniko diogu. Alderantziz, indarra sekzioaren barnealdera zuzenduta badago, luzera murriztu egingo da eta konpresiopean dagoela esango dugu, zeinu negatibo batekin adieraziz. Kanpoko indarra sekzioaren grabitate-zentroan eta piezaren ardatzaren norabide berean aplikatzen denean agertzen da egoera hori. Barra-sare edo saretetan topa ditzakegu era horretan lan egiten duten pieza prismetikoak. Aurreko gaietan ikusi zen bezala, egitura horiek osatzen dituzten barren arteko loturak artikulatuak dira. Ondorioz, kanpoko indarrak barra-sarearen korapiloetan aplikatzen badira, egitura horietan sarritan gertatzen den bezala, elementu guztiak trakzio edo konpresio hutsean egongo dira. Indarra grabitate-zentroan aplikatuta egongo ez balitz, ardatzeko indarrak gain momentu makurtzaile bat agertuko litzateke, eta trakzio edo konpresio hutsa baino egoera konplexuagoa edukiko genuke. Kasu hori hurrengo gai batean aztertuko dugu sakonkiago. Oraingoan, demagun 8.1. irudiko pieza prismetikoan trakziozko indar batek eragiten duela, grabitate-zentroan aplikaturik eta ardatzarekin lerrokatuta egonik. Kasu horretan agertzen diren barne-esfortzuak kalkulatzeko, sekzioen metodoa erabiliko dugu.



8.1. irudia.

Hasteko, 8.1. irudian adierazten den bezala, pieza prismatikoa ardatzarekiko elkarzuta den A sekziotik ebakiko dugu. Ezkerreko zatia isolatu ondoren, zati horrek orekan jarrai dezan, beharrezkoa eta nahikoa da A ebakidura-sekzioan indar horizontal bat agertzea, hau da, N_x indar normala. Oreka-ekuazioak aplikatzen baditugu, erraz ikus daiteke esfortzu guztiak nuluak direla, N_x izan ezik. Gainera, ardatzeko indar horrek piezen aplikatutako indarraren balio berdina edukiko du. Ardatzaren norabidean —hots, x ardatzean— indarren baturak zero eman behar duela inposatuz:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = P. \quad (8-1)$$

Zeharkako sekzioan aplikatuta dagoen ardatzeko indarra ezagutu ondoren, hurrengo pausoa tentsioen eta deformazioen kalkulua da, hurrengo ataletan jorratuko duguna.

8.2. TENTSIO-EGOERA TRAKZIO EDO KONPRESIO HUTSEAN

Izan bedi trakziopean dagoen 8.2.a. irudiko sekzioa. Aurreko gaian ikusitakoaren arabera, ardatzeko indarraren ondorioz tentsio normalak agertuko dira soilik. Ardatz bakarreko egoera edukiko dugu, beraz. Ardatzeko indarraren eta tentsio normalaren arteko erlazioa hauxe da:

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA. \quad (8-2)$$

Pieza prismatikoa aplikatutako indarra P bada, (8-1) ekuazioaren arabera honako hau edukiko genuke:

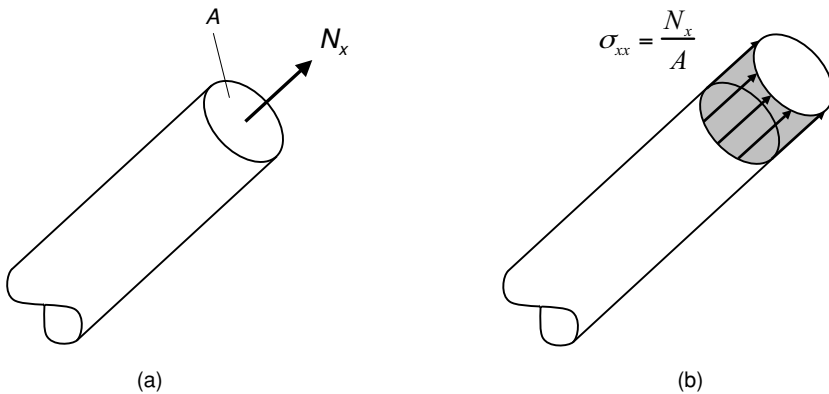
$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA = P. \quad (8-3)$$

Halere, estatikaren legeetan oinarrituz lortu dugun oreka-ekuazio hori ezagutzea ez da nahikoa σ_{xx} tentsioen balioa kalkulatzeko. Izan ere, oraindik ez dakigu tentsio normal horiek nola dauden banaturik zeharkako sekzioan zehar. Ezagutzen dugun bakarra hauxe da: σ_{xx} tentsio normalen baliokideak N_x ardatzeko indarraren berdina izan behar du. Mota

horretako problemak estatikoki zehaztugabeak direla esaten da, oreka-ekuazioak ez baitira aski tentsioak lortzeko. Ondorioz, deformazioen izaera nolakoa den aztertu beharra dago, tentsioen banaketa kalkulatu ahal izateko. Horretarako, *Navier-en hipotesia* erabiliko dugu. Hipotesi horrek hauxe dio: hasieran lauak eta ardatzarekiko elkarzutak diren sekzioek lauak eta ardatzarekiko elkarzutak izaten jarraitu behar dute pieza deformatu eta gero ere. Hipotesi hori berriro ere erabiliko dugu beste gai batzuetan zehar. Izan ere, Navier-en hipotesia beti zehazki betetzen ez den arren, hori erabiliz lortzen diren emaitzen errorea oso txikia dela frogatu daiteke kasu gehienetan.

Hipotesi hori gure kasura aplikatuz gero, deformazioa eta gero zeharkako sekzioa hasierako posizioarekiko paralelo geratuko litzateke, 8.2.b. irudian ikus daitekeen bezala. Azken finean, pieza prismatikoa luzetarako zuntz-sorta baten antzekoa dela suposa daiteke, zuntz horiek guztiek luzapen berdina jasaten dutelarik. Beste era batera esanda, ardatzeko esfortzuak indar berarekin tiratzen die sekzioko puntu guztiei. Beraz, hipotesi horren arabera, σ_{xx} tentsioaren banaketa uniforme izango da zeharkako sekzioan zehar; hots, puntu guztietako tentsio normalaren balioa berdina da. Balio hori konstantea denez, σ_{xx} balioa (8-3) ekuazioko integraletik kanpora atera daiteke:

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA = \sigma_{xx} \int_A dA = \sigma_{xx} \cdot A \Rightarrow \sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} \Rightarrow \sigma_{xx} = \frac{P}{A}. \quad (8-4)$$



8.2. irudia.

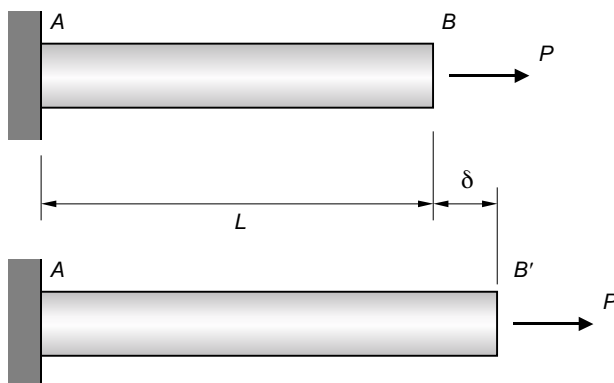
Horrela, (8-4) espresioaren arabera, trakzio edo konpresio hutsa daukagunean, σ_{xx} tentsio normala kalkulatzeko nahikoa da ardatzeko indarraren balioa zeharkako sekzioaz zatitzea. Tentsio horren balioa berdina izango da zeharkako sekzioaren puntu guztietan. Espresio hori bat dator trakzio-saiakuntzako probetaren tentsioa kalkulatzeko suposatu genuenarekin. Ez da ahaztu behar, halere, indarrak aplikatutako puntuetatik gertu dauden sekzioetan tentsio-banaketa ez dela uniforme izango. Dena den, Saint-Venant-en hipotesiaren arabera, urrundurik dauden sekzioetan tentsioen kontzentrazioak arbuiatu egin daitezke eta banaketa uniforme dela suposatu; hots, Navier-en hipotesia egia dela onar daiteke.

8.3. DEFORMAZIO-EGOERA TRAKZIO EDO KONPRESIO HUTSEAN

Pieza prismatikoaren sekzioetan trakzio edo konpresio hutsa dugunean, deformazioen kalkulua oso erraza da. Dakigun bezala, barra trakziopean badago, luzatu egingo da; eta konpresiopean badago, laburtu. Hori guztia, noski, temperatura-aldaketarik ez badago (temperatura-aldaketaren eragina gaiaren bukaeran aztertuko dugu). Beraz, deformazioak kalkulatzeko nahikoa izango da Hooke-ren legeak erabiltzea. Ardatz bakarreko tentsio egoera dugunez, nulua ez den osagai bakarra σ_{xx} izango da. Hortaz, (4-70) espresioiko lehen hiru ekuazioetan balioak ordeztuz, hauxe edukiko dugu:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E}, \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} &= -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}.\end{aligned}\tag{8-5}$$

Honelatan, bada, (8-5) espresioiko lehenengo ekuazioak x ardatzaren norabidean dugun deformazio unitarioa kalkulatzeko balio du. Beste bi erlazioek zeharkako norabidean agertzen diren deformazioak adierazten dituzte, hau da, barraren sekzioak jasaten duen deformazioa. Ikusten den bezala, ε_{yy} eta ε_{zz} -ren espresioek zeinu negatiboa daukate. Izan ere, trakzio baten eraginpean, barraren sekzioa txikiagotu egingo litzateke, eta konpresio baten aurrean, berriz, handiagotu. Beraz, luzetarako eta zeharkako deformazioek aurkako zeinua daukate. Dena den, hiruretatik garrantzitsuen den espresioa ε_{xx} deformazio unitarioarena da, erlazio honen bidez barraren luzera-aldaketa lor baitezakegu.



8.3. irudia.

Hori ulertzeko, demagun 8.3. irudian ageri den pieza prismatiko. Piezaren ezkerreko A muturra landatuta dagoela suposatuko dugu. Trakziozko indarraren ondorioz barra luzatu egingo da, eta eskuineko B muturra B' posizio berrira pasatuko da. Barraren luzera-aldaketa (δ) kalkulatu nahiko bagenu, ardatzaren norabidea duen deformazio unitarioa erabili beharko genuke, hots, ε_{xx} osagaia. Lehenago esan genuen bezala, deformazio unitarioak elementu lineal baten luzera-aldaketa erlatiboa adierazten du, hau da, luzera-aldaketaren eta hasierako luzeraren arteko erlazioa, hots:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta}{L}.\tag{8-6}$$

Hortaz, (8-6) ekuazioan ε_{xx} -en espresioa ordeztuz,

$$\frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{\delta}{L}, \quad (8-7)$$

eta (8-4) espresioaren arabera,

$$\delta = \frac{N_x L}{EA}, \quad (8-8)$$

hots,

$$\delta = \frac{PL}{EA}. \quad (8-9)$$

Beraz, barraren luzapena aplikatutako indarrarekiko zuzenki proportzionala da. Emaitza hori ez da harrigarria, materialaren portaera lineala dela suposatu baitugu. Ondorioz, indarra bikoiztuz gero, luzera-aldaketa ere bikoiztu egingo litzateke. Gauza bera gertatzen da barraren luzerarekin, espresioaren zenbatzailean baitago. Elastikotasun-modulu eta sekzioaren azalera, ordea, izendatzailean daude; ondorioz, deformazioa magnitude horiekiko alderantziz proportzionala da. Material zurrunagoa edo sekzio handiagoa aukeratzuz gero, barraren deformazioa txikiagoa izango da.

(8-9) espresioan sakonduz, EA/L erlazioari *zurruntasuna* deritzo, eta unitatea balio duen luzapen bat lortzeko aplikatu behar den indarra da. Zurruntasuna k letraz adierazten da:

$$k = \frac{EA}{L}. \quad (8-10)$$

Zurruntasunaren alderantzizkoari, berriz, *malgutasuna* deritzo, eta unitatea balio duen indar batek sortutako desplazamendua da. Malgutasuna f letraz izendatuko dugu:

$$f = \frac{1}{k} = \frac{L}{EA}. \quad (8-11)$$

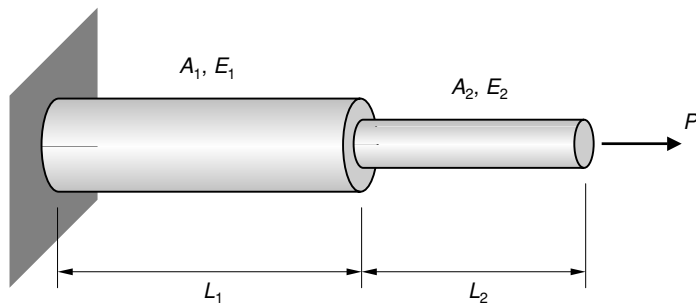
Pieza prismatikoaren sekzioa konstantea ez denean, luzapena integrazioaren bidez lortuko genuke. Lehendabizi, dx luzera eta $A(x)$ sekzioa duen elementu infinitesimal baten luzapena kalkulatu genuke. Luzapen hori barraren luzera guztian integratuz, pieza prismatikoaren luzera-aldaketa totala lortuko genuke, honelaxe:

$$\delta = \int d\delta = \int_0^L \varepsilon_{xx} dx = \int_0^L \frac{\sigma_{xx}}{E} dx = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(x)}. \quad (8-12)$$

Erraz frogatu daitezkeen bezala, sekzioa konstantea denean, (8-12)-ko integralak (8-9) ekuazioa ematen du, goiko espresio orokorraren kasu berezia baita. Pieza prismatikoaren sekzioa konstante ez bada baina A_i sekzioa duten zati desberdinez osatuta badago, luzera-aldaketa totala kalkulatzeko, zati bakoitzaren δ_i luzera-aldaketak batuko genituzke, hots,

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_{xi} L_i}{E_i A_i}, \quad (8-13)$$

non N_{xi} , L_i , E_i eta A_i direlakoak zati bakoitzaren ardatzeko indarra, luzera, elastikotasun-modulua eta azalera diren, hurrenez hurren.



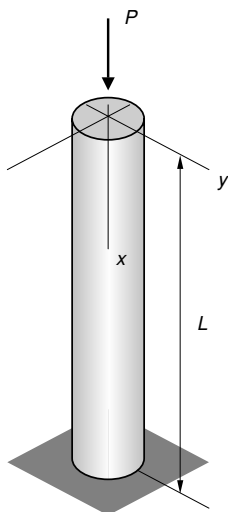
8.4. irudia.

Adibidez, 8.4. irudiko piezaren kasuan, zati bakoitzaren ardatzeko indarrak $N_{x1} = N_{x2} = P$ dira. Beraz, luzera-aldaketa honako hau izango litzateke:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{PL_1}{E_1A_1} + \frac{PL_2}{E_2A_2}. \quad (8-14)$$

8.4. PISU PROPIOAREN ERAGINA

Askotan egitura bateko elementuen pisua arbuaiatu egiten da, aplikatutako indarren eragina-rekin konparatuta txikia izaten delako. Halere, zenbait kasutan egituraren pisu propioa kontuan hartu behar izaten da. Pieza prismatikoetan pisuak duen eragina ulertzeko, izan bedi L luzera duen 8.5. irudiko zutabea. Zutabe hori konpresiopean dago goiko muturrean aplikatutako indarraren eta bere pisuaren ondorioz. Zutabeko materialaren pisu espezifikoa ρ dela suposatuko dugu, elastikotasun-modulua E eta sekzioaren azalera A .



8.5. irudia.

Goiko muturretik x distantziara kokatutako sekzio batean dagoen ardatzeko indarra honako hau izango litzateke:

$$N_x = P + \rho Ax, \quad (8-15)$$

non lehenengo batugaia P indarrak sortutako konpresioa adierazten duen, eta bigarrenak pisuaren ondorioz agertzen dena. Bigarren batugai hori, aukeratutako sekzioaren gainean dagoen pieza zatiaren bolumena eta materialaren pisu espezifikoaren elkarrekin biderkatuz lortzen da. Tentsio normalaren balioa ezagutzeko, nahikoa da ardatzeko indarra zeharkako sekzioaren azalera zatitzea:

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A} + \rho x. \quad (8-16)$$

Beraz, kasu horretan tentsioaren balioa ez da konstantea, eta x distantziarekin linealki handitzen da beheko muturrera gerturatzen garen neurrian.

Ikus dezagun orain zein den zutabe horrek jasango duen luzera-aldaketa. Aplikatutako P indarrak eta pisu propioak zutabea konpresiopean egotera behartzen dutenez, argi dago zutabearen luzera murriztu edo laburtu egingo dela. Esan bezala, zutabeetako sekzioetan dagoen tentsioa ez da konstantea; beraz, (8-12) ekuazioan egin genuen bezala, luzapen infinitesimalak kalkulatu eta zutabearen luzera osoan integratuko ditugu. Tentsioaren balioa ondoko espresioan ordeztuz:

$$\delta = \int d\delta = \int_0^L \varepsilon_{xx} dx = \int_0^L \frac{\sigma_{xx}}{E} dx = \int_0^L \left(\frac{P}{EA} + \frac{\rho}{E} x \right) dx, \quad (8-17)$$

eta integratuz, emaitza hau lortuko dugu:

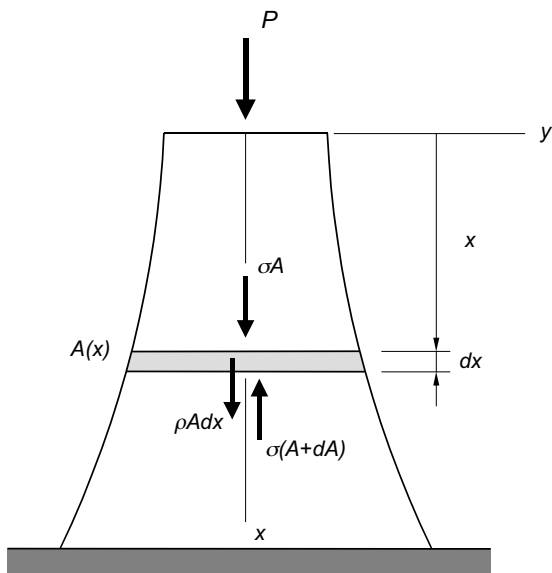
$$\delta = \frac{PL}{EA} + \frac{\rho L^2}{2E}. \quad (8-18)$$

Lortutako espresioaren lehenengo batugaia P indarrak sortzen duen laburpena da, eta bigarren batugaia, pisu propioarena. Ikusten den bezala, zutabearen portaera lineala izatean, gainezarpen-printzipioa aplika daiteke, hau da: luzera aldaketa totala, P indarrak eta pisuak bakoitzak bere aldetik sortzen dituzten laburpenen batura da.

Lortutako emaitzen arabera, argi dago zutabearen sekzio guztiek ez dutela egoera berean lan egiten. Beheko landapenetik gertu dauden sekzioak, goiko muturraren inguruan daudenak baino zigortuago daude. Ondorioz, zutabeak behar duen sekzio minimoa kalkulatzeko, sekziarik zigortuena erabili beharko genuke, hots, oinarrian dagoena, horrek baitu σ_{xx} tentsioaren baliorik handiena. Halere, zutabe osoa sekzio horrekin eraikiko bagenu, beste sekzio guztiek onar dezaketen mugaren azpitik lan egingo lukete. Izan ere, sekzio horietan ez da oinarrian adina material behar eta, beraz, materiala alferrik galduko genuke. Zentzuzkoa dirudi, beraz, oinarriarantz gerturatzen goazen neurrian zutabearen sekzioa handiagotzea. Mota horretako zutabeak anitz erabiliak izan ziren aintzinako jauregietan.

Zutabearen diseinua ahalik eta hoberena izateko, sekzio guztietan σ_{xx} tentsioa mugako tentsioaren berdina izatea lortu beharko genuke. Era horretan, sekzio bakoitzean

beharrezkoa den materiala bakarrik erabiliko litzateke, ezer alferrik galdu gabe. Lortutako gorputzari *erresistentzia bereko solidoa* deritzo, puntu guztietako tentsioa materialak onar dezakeen handiena delako.



8.6. irudia.

Zutabe horren espresio matematikoa lortzeko, elementu diferentzial baten oreka plan-teatuko dugu. Hain zuzen, 8.6. irudiko zutabearen, sekzio guztien tentsioa onar daitekeen tentsio handienaren berdina izatea nahi dugu, hots, σ_{onar} -ren berdina. Beraz, elementu diferentzialaren bi aurpegi-tako tentsioa σ_{onar} izango da. Ez dugu ahaztu behar, halere, bi sekzioen artean dagoen zutabe-zatiak pisu bat duela. Ondorioz, beheko sekzioaren azalera goikoarena baino handiagoa izan beharko da. Goiko aurpegiaren azalerrari A deituko diogu, eta behekoari $A + dA$. Hortaz, norabide bertikalean indarren oreka idatziz:

$$\sigma_{onar} (A + dA) = \sigma_{onar} A + \rho A dx, \quad (8-19)$$

eta terminoak sinplifikatuz,

$$\sigma_{onar} dA = \rho A dx. \quad (8-20)$$

Azkenik, berdintzaren bi aldeak integratuz, hauxe lortuko genuke:

$$\frac{dA}{A} = \frac{\rho}{\sigma_{onar}} dx \Rightarrow \int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = \int_0^x \frac{\rho}{\sigma_{onar}} dx \Rightarrow \ln \frac{A}{A_0} = \frac{\rho}{\sigma_{onar}} x \Rightarrow A = A_0 e^{\frac{\rho}{\sigma_{onar}} x}. \quad (8-21)$$

A_0 azalera zutabearen goiko muturrari dagokiona da. Sekzio horretan pisuaren eragina nulua denez, behar dugun sekzio txikiena $A_0 = P/\sigma_{onar}$ izango da. Balio hori (8-21) ekuazioan ordeztuz gero, hauxe lortuko genuke:

$$A = \frac{P}{\sigma_{onar}} e^{\frac{\rho}{\sigma_{onar}} x} \quad (8-22)$$

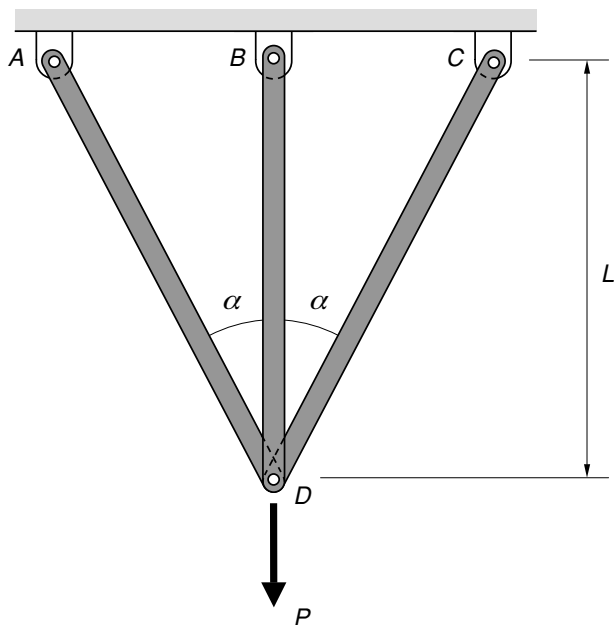
Beraz, erresistentzia bereko zutabearen itxura, funtzio esponentzial batez dator emana, 8.6. irudian agertzen den bezala.

8.5. EGITURA HIPERESTATIKOAK TRAKZIOPEAN ETA KONPRESIOPEAN

Lehenago aipatu genuen bezala, egitura isostatikoen kasuan, barne-indar guztiak kalkulatzeko, nahikoa da oreka-ekuazioak aplikatzea. Ondoren, barren luzapenak kalkulatzeko, (8-9), (8-12) edo (8-13) ekuazioetako espresioak erabil ditzakegu. Egitura hiperestatikoaren kasuan, ordea, ez da posible egituraren barne-indarrak kalkulatzeko estatikaren legeak soilik aplikatu. Egitura horiei egitura *hiperestatikoak* edo *estatikoki zehaztugabeak* deritze. Kasu horietan, oreka-ekuazioez gain, bateragarritasun-ekuazioak ere erabili behar izaten dira. Oro har, egitura hiperestatikoak kalkulatzeko honako pauso hauek ematea komeni da:

- a. Oreka-ekuazioak aplikatu. Indarren eta momentuen baturak zero izan behar duela inposatuko dugu. Halere, esan dugun bezala, egitura hiperestatikoaren kasuan ekuazio horiek ez dira nahikoa izango barne-indarrak kalkulatu ahal izateko.
- b. Deformazioen bateragarritasun-ekuazioak planteatu. Problema askatu ahal izateko, oreka-ekuazioei gehitu behar zaizkien ekuazioak dira. Ekuazio horiek egiturako puntuen desplazamenduek bete behar dituzten baldintzak adierazten dituzte. Bateragarritasun-ekuazioak geometrikoki lortzen dira, egituraren deformazio bateragarri bat suposatuz, hau da, mugako baldintza zinematikoak errespetatzen dituen deformazio bat suposatuz. Egitura deformatua marrazteko orduan, deformazio txikien hipotesia erabiliko dugu, arkuak lerro tangentez ordezkatzu. Barren kasuan, hipotesi honek muturrak barrarekiko norabide elkarzutean higituko direla adierazten du.
- c. Portaera-legeak aplikatu. Oreka-ekuazioak indarren funtzioan idazten dira, eta bateragarritasun-ekuazioak, aldiz, desplazamenduen funtzioan. Beraz, oraindik ez gaude problema askatzeko moduan. Bi ekuazio-sorta horiek erlazionatzeko, portaera-legeak erabiliko ditugu. Portaera-legeek ardatzeko indarren eta luzapenen artean dagoen erlazioa emango digute. Trakzio edo konpresiopean lan egiten duten piezen kasuan, legea (8-9) ekuazioan adierazten dena da. Erlazio horiek bateragarritasun-ekuazioetan ordeztu ondoren, sistema askatzeko prest gaude.

Beraz, arestian esandakoaren arabera, argi dago egitura hiperestatikoak ezingo direla askatu bateragarritasun-ekuazioak planteatzen ez diren bitartean. Hori dela-eta, mota honetako egituretan, barne-indarren balioak (barra-sareen kasuan, ardatzeko indarrak) geometriaren eta materialaren menpe daude. Egitura isostatikoen kasuan, aldiz, barne-indarrak geometriaren menpe daude, baina ez materialaren menpe.

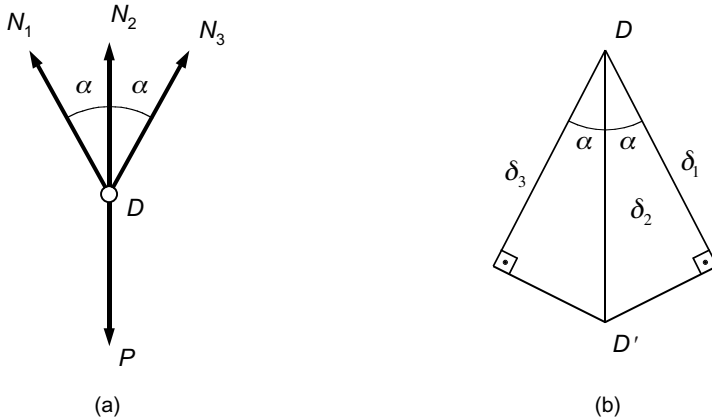


8.7. irudia.

Egitura hiperestatikoko kalkulatzeko eman beharreko pausoak argitzeko, 8.7. irudiko adibidea erabiliko dugu. Egitura hori muturretan artikulatutako hiru barren bidez dago osatuta; bertako D korapiloan P karga bertikal bat aplikatzen da. Barra inklinatuak elastikotasun-modulua eta sekzioa E_1 eta A_1 dira, hurrenez hurren. Erdiko barra bertikala, aldiz, desberdina da, beraren azalera A_2 izanik, eta elastikotasun-modulua, E_2 . Helburua barra bakoitzaren ardatzeko indarra kalkulatzeko da, hots, P karga nola banatzen den aztertzea. Lehenik eta behin, D korapiloa isolatuko dugu, 8.8.a. irudian agertzen den bezala, eta oreka-ekuazioak aplikatuko ditugu. Horizontalean eta bertikalean indarren baturek nulua izan behar dutela inposatuz, hauxe lortzen da:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_1 = N_3, \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow (N_1 + N_3)\cos\alpha + N_2 = P, \end{aligned} \quad (8-23)$$

non hiru indarrak traktiozkoak direla suposatu baitugu. Momentuen batura nulua dela inposatuko bagenu, ez genuke baliozko ekuaziorik lortuko. Ikusten den bezala, ezezagunak hiru dira (N_1 , N_2 eta N_3 ardatzeko indarrak), baina bi ekuazio baino ez ditugu. Beraz, falta zaigun ekuazioa deformazioen bateragarritasuna aztertuz lortu beharko dugu.



8.8. irudia.

Bateragarritasun-ekuazioak lortzeko, mugako baldintzak betetzen dituen edozein deformazio aukera dezakegu. Preseski, 8.8.b. irudiko kasuan, barra inklinatuak luzatu egiten direla suposatu dugu. Bi barra horiek berdinak direnez (luzera, sekzio eta elastikotasun-modulu berdinak dituzte) eta ardatzeko indarrek ere balio berdina dutenez, (8-23) oreka-ekuazioetatik ondoriozta daitekeen bezala ($N_1 = N_3$), luzapen horiek berdinak direla suposa dezakegu ($\delta_1 = \delta_3$). Bestetik, barra horien luzerak aldatu eta gero, muturrek lotuta jarraitu behar dute, hiru barrak D korapiloan elkartzen baitira. Beraz, alboetako barrek A eta C muturren inguruan biratuko dute, eta ebaki-puntuak D -ren posizio berria emango dugu. Arestian aipatu bezala, deformazioak txikiak direla onartzen dugu. Hori dela-eta, biraketen arkuak marraztu beharrean, barrekiko elkarzutak erabiliko ditugu, 8.8.b. irudian ikusten den bezala, D' puntua lortuz. Hain zuzen ere, bi barren luzapenak berdinak direnez, irudi simetrikoko bat lortzen da. Barra bertikalaren beheko muturrak ere D' puntuan bukatu behar duenez, D -tik D' -ra dagoen distantzia barra horren luzapena izango da, δ_2 hain justu. Iru-diko triangeluan oinarrituz, besterik gabe, ondoko bateragarritasun-ekuazioa lortuko dugu:

$$\delta_1 = \delta_2 \cos \alpha. \tag{8-24}$$

Honelatan, bada, (8-23) eta (8-24) espresioekin, problema askatzeko aski ekuazio dauzkagu. Halere, oreka-ekuazioak indarren funtzioan daude, eta bateragarritasun-ekuazioa luzapenen menpe dago. Azken hori indarren menpe adierazteko, portaera-legeak erabiliko ditugu, hots:

$$\delta_1 = \frac{N_1 L / \cos \alpha}{E_1 A_1},$$

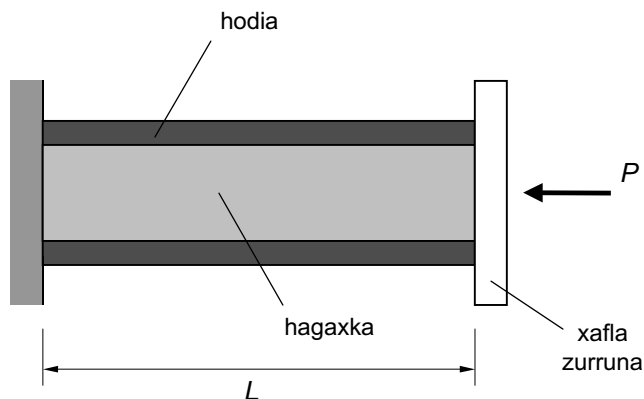
$$\delta_2 = \frac{N_2 L}{E_2 A_2}. \tag{8-25}$$

Trakziozko indarrak eta luzapenak suposatu ditugunez, (8-25)-eko ekuazioetan ez dugu zeinurik aldatu. Aurkako indarrak eta desplazamenduak suposatu izan bagenitu (konpresioa eta laburpena, alegia), portaera-legeetan ikur negatiboa gehitu beharko genuke. Hortaz, (8-25) espresioak (8-24) ekuazioan ordeztuz eta sistema askatu ondoren, barren ardatzeko indarrak lortuko genituzke:

$$N_1 = N_3 = N_2 \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \cos^2 \alpha, \quad (8-26)$$

$$N_2 = \frac{P}{1 + 2 \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \cos^3 \alpha}.$$

Demagun orain 8.9. irudiko muntaia. Elementu mekaniko hori bi gorputz desberdinez dago osatuta. Alde batetik A_1 sekzioa eta E_1 elastikotasun-modulua duen hagaxka bat dago. Hagaxka hori hodi baten barnean sartu dugu, hodiaren sekzioa eta elastikotasun-modulua A_2 eta E_2 izanik, hurrenez hurren. Bi elementuen luzera L da, eta ezkerreko muturra landatuta dago. Eskuineko xafla zurrunean konpresiozko P indar horizontal bat aplikatuz gero, muntaiaren luzera-aldaketa kalkulatu nahi dugu.



8.9. irudia.

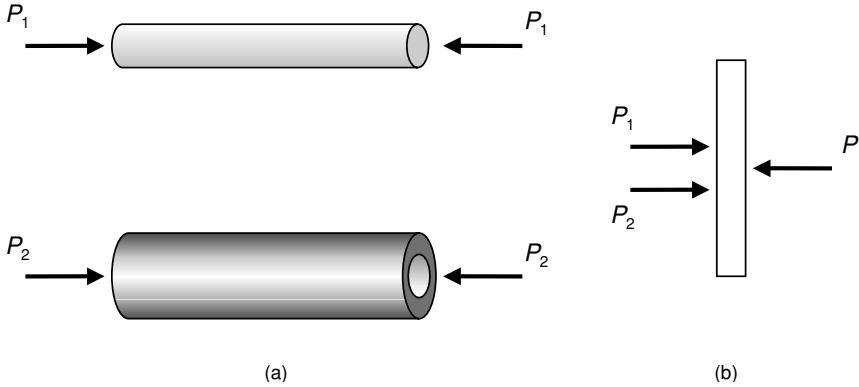
Hagaxkak eta hodiak jasaten duten konpresio-indarra sekzioaren grabitate-zentroan kokatuta dago, eta ardatzarekin lerrotatuta. Ondorioz, bi elementu horietan ardatzeko indarrak bakarrik agertuko zaizkigu. Hagaxkaren eta hodiaren indar normal horiei P_1 eta P_2 deituko diegu, 8.10. irudian adierazten den bezala. Konpresiozko bi indar horiek, modulu berarekin baina aurkako noranzkoarekin eragingo dute eskuineko muturrean kokatuta dagoen xafla zurrunean. Beraz, norabide horizontalean oreka-ekuazioak aplikatuz, honako erlazio honetara iritsiko gara:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 = P. \quad (8-27)$$

Berriro ere, ekuazio hori ez da nahikoa problema askatzeko, bi ezezagun dauzkagulako: P_1 eta P_2 ardatzeko indarrak. Problema hiperstatikoa edo zehaztugabea da, beraz. Bigarren ekuazioa lortzeko, bateragarritasun-erlazioetan oinarrituko gara. Eskuineko xafla deformaiezina dela suposatzen denez, eta ezkerreko landapena finkoa, hagaxkaren eta hodiaren luzera-aldaketak elkarren berdinak izan behar dira, hau da,

$$\delta_1 = \delta_2. \quad (8-28)$$

Deformazioak suposatzeko orduan, nahi dugun hipotesia egin dezakegu, bateragarria den bitartean, noski. Kasu honetan, bi deformazio horiek laburpenak direla suposatuko dugu, baina zuzena izango litzateke baita ere, bi elementuen “luzapena” berdina dela esatea, nahiz eta benetan gertatuko dena ez izan.



8.10. irudia.

(8-28) ekuazioko desplazamenduak ardatzeko indarren funtzioan idazteko, portaera-legeak erabiliko ditugu, aurreko adibidean bezala:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{E_1 A_1}, \tag{8-29}$$

$$\delta_2 = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}.$$

Bestetik, (8-29) ekuazioko desplazamenduak (8-28)-ko bateragarritasun-ekuazioan ordeztzen baditugu, hauxe lortuko dugu:

$$\frac{P_2}{E_2 A_2} = \frac{P_1}{E_1 A_1}. \tag{8-30}$$

Bukatzeko, (8-27) eta (8-30) ekuazioek osatzen duten sistema askatuz, balio hauek lortzen dira P_1 eta P_2 ezezagunentzat:

$$P_1 = \frac{E_1 A_1 P}{E_1 A_1 + E_2 A_2}, \tag{8-31}$$

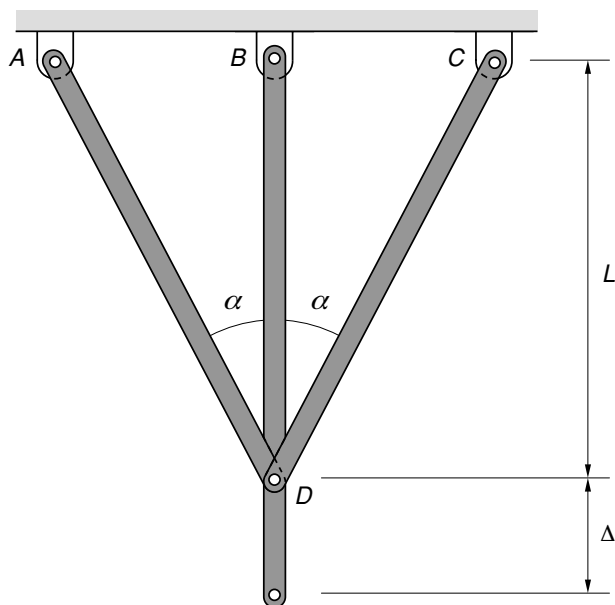
$$P_2 = \frac{E_2 A_2 P}{E_1 A_1 + E_2 A_2}.$$

Azkenik, barren laburpenak kalkulatzeko, (8-29) espresioetako edozein erabili dezakegu, bi elementuek luzera-aldaketa bera jasaten baitute:

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{PL}{E_1 A_1 + E_2 A_2}. \tag{8-32}$$

8.6. HASIERAKO TENTSIOAK

Kanpoko indarrak aplikatu aurretik egituraren agertzen diren tentsioei *hasierako tentsioak* deritze. Tentsio horiek arrazoi desberdin askoren ondorioz gerta daitezke. Batzuetan, hutsegiteen erruz agertzen dira: muntatzeko orduan egindako errakuntzak, fabrikazio-akatsak, etab. Beste batzuetan, ordea, hasierako tentsioak apropos bilatzen dira, egituraren portaera hobetu nahian, hormigoi armatuaren kasuan adibidez. Hasierako tentsio horiek ustekabean agertzen direnean, egiturarentzat oso arriskutsuak izan daitezke, kanpoko indarrek sortutako koei batu daitezkeelako, espero baino tentsio askoz handiagoak agertuz.



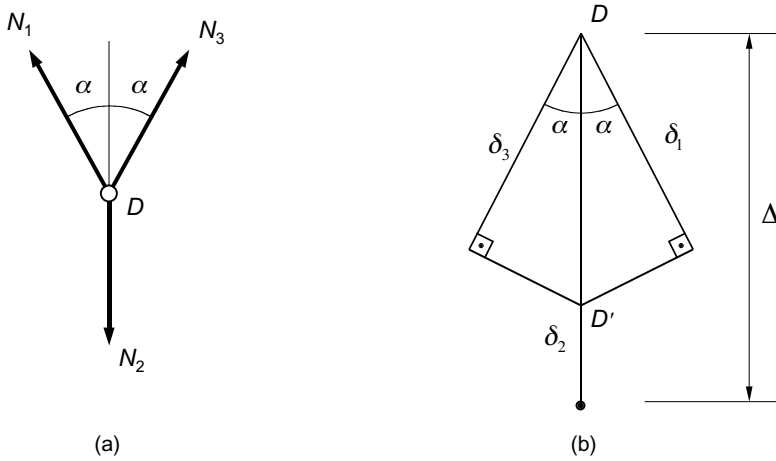
8.11. irudia.

Adibide gisa, har dezagun berriro ere 8.7. irudiko egitura, baina demagun oraingoan erdiko barraren luzera behar baino luzeagoa dela, hots, $L + \Delta$ dela (ikus 8.11. irudia). Egitura hiperestatikoa denez, hiru barren muturrak D korapiloan lotzea nahiko bagenu, barrak behartu egin beharko genituzke, eta hasierako tentsioak agertuko lirateke kanpoko indarrak aplikatu baino lehen. Ikus dezagun nola kalkula daitezkeen hasierako tentsio horiek.

Aurreko adibidean bezala, lehenengo pausoa oreka-ekuazioak aplikatzea da. Kasu honetan, alboetako barra inklinatuak trakziopean daudela suposatuko dugu, eta erdiko barra bertikala, berriz, konpresiopean. Erraz ikus daiteke horiek izango direla muntaia egin eta gero barretan agertuko zaizkigun ardatzeko indarren zeinuak. Izan ere, erdiko barra luzeegia denez, hiru barren muturrak lotu ahal izateko egin dezakeguna honako hau da: alboetako barrei tira egin eta barra bertikalaren beheko muturreraino eraman. Hiru piezak lotu ondoren, barra inklinatuak hasierako luzera berreskuratzen saiatuko dira, erdikoari gorantz bultza eginez. Ondorioz, barra bertikalak konpresio bat sentituko du. Dena den, azpimarra dezagun, berriro ere, edozein noranzko suposa dezakegula ardatzeko indarrak marrazteko orduan. Emaitza positiboa bada, aukeratutako noranzkoa zuzena izango da.

Alderantziz, negatiboa irtenez gero, benetako noranzkoa suposatutakoaren aurkakoa dela jakingo dugu. Beraz, 8.12.a. irudian oinarrituz, honako ekuazio hauek idatz ditzakegu:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_1 = N_3, \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow (N_1 + N_3) \cos \alpha - N_2 = 0. \end{aligned} \tag{8-33}$$



8.12. irudia.

Azter dezagun orain bateragarritasun-ekuazioa. Hain zuzen, 8.12.b. irudian ikusten den bezala, oraingoan hauxe marraztu dugu: erdiko barra laburtu egiten da, alboetakoak luzatu egiten diren bitartean. Hortaz, 8.5. ataleko adibidean egin genuen bezala, bi barra horiek A eta C giltzaduren inguruan biratzen utzi ondoren, irudiko eraikuntza lortuko genuke. Orduan bezala, biraketa-arkuak barrekiko lerro elkarzutez ordezkatu ditugu, deformazio txikien kasuan hurbilketa hori onargarria baita. Irudiko hirukietatik ekuazio hau lor dezakegu:

$$\Delta = \frac{\delta_1}{\cos \alpha} + \delta_2. \tag{8-34}$$

Bateragarritasun-ekuazioak hauek izango dira:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{N_1 L / \cos \alpha}{E_1 A_1}, \\ \delta_2 &= \frac{N_2 L}{E_2 A_2}. \end{aligned} \tag{8-35}$$

non barra bertikalaren luzera L dela suposatu baitugu, gehienetan Δ txikia izaten delako barraren luzerarekin konparatuz gero ($\Delta \ll L$). Horrela, bada, (8-35) erlazioak (8-34) ekuazioan ordeztuz eta sistema askatu ondoren, ardatzeko indarren balioak lortuko ditugu:

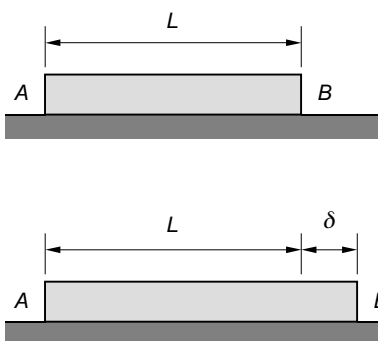
$$N_1 = N_3 = \frac{E_2 A_2 \Delta / L}{2 \cos^3 \alpha + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} \cos^2 \alpha, \tag{8-36}$$

$$N_2 = 2 N_1 \cos \alpha.$$

Azkenik, ardatzeko indar horiek A_1 eta A_2 azalerez zatituz, hasierako tentsio normalen balioak kalkula daitezke.

8.7. TENTSIO TERMIKOAK

Orain arte aurkeztutako adibideetan, ez dugu temperaturaren eragina kontuan hartu. Ikus dezagun orain zer gertatzen den trakziopean edo konpresiopean dagoen elementu batean temperatura-aldaketak agertzen direnean. Egitura batean deformazioak berriz badaude eta egitura horrek temperatura-aldaketa bat jasaten badu, *tentsio termikoak* deritzen tentsio batzuk agertzen dira gorputzean. Ez dira agertuko, beraz, egitura isostatikoetan, kasu horretan elementuak libreki deforma daitezkeelako, egoera berrira tentsiorik agertu gabe moldatuz. Hasierako tentsioekin gertatzen zen bezalaxe, tentsio horiek oso arriskutsuak izan daitezke.



8.13. irudia.

Esate baterako, 8.13. irudiko piezaren deformazioa galarazita ez dagoenez, temperatura igoera uniforme baten eraginpean, elementua luzatu egingo litzateke, eta ez litzateke inolako tentsiorik agertuko. Luzapen horren balioa kalkulatzeko, nahikoa da fisikako oinarritzko erlazio hau erabiltzea:

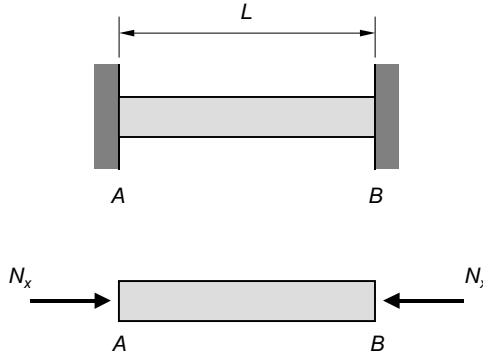
$$\delta = \alpha \Delta T L, \quad (8-37)$$

non α delakoa materialaren dilatazio-koefizientea den, ΔT delakoa temperatura-aldaketa, eta L delakoa barraren hasierako luzera. Kasu horretan, beraz, deformazio termikoak gertatzen diren arren, ez da tentsio termikorik agertuko.

Azter dezagun orain 8.14. irudiko habea. Elementu hori muturretan landatuta dago, eta temperatura-aldaketa uniformea jasaten duela suposatuko dugu. Kasu horretan, piezaren deformazioa galarazita dago eta, ondorioz, temperatura-igoeraren aurrean luzatzen saiatuko den arren, piezaren luzera ez da aldatuko. Alboetako landapenek A eta B muturren desplazamendua oztopatzen dutenez, piezak konpresio-indar bat sentituko du, eta konpresiozko tentsioak agertuko dira. Berrito ere, N_x indarra kalkulatzeko, oreka-ekuazioak ez dira aski izango, eta bateragarritasun-ekuazio baten beharra izango dugu problema askatu ahal izateko. Izan ere, indarren baturak ardatzaren norabidean zero eman behar duela inposatuz gero, A eta B muturretako erreakzio horizontalek berdinak izan behar dutela jakitea lortuko

genuke soilik. Bateragarritasun-ekuazioa lortzeko, demagun piezaren muturretako bat askatzen dugula. Kasu horretan, habeak oztoporik gabe deformatzeko aukera edukiko luke. Barraren luzapena kalkulatzeko, tenperatura-aldaketaren eta konpresio-indarraren eraginak hartu beharko genituzke kontuan. Halere, benetako egituran bi muturrak landatuta daudenez, luzapen honek zero balio behar du nahitaez. Beraz,

$$\delta = 0. \tag{8-38}$$



8.14. irudia.

Hurrengo pausoa, (8-38) ekuazioko luzapena ardatzeko indarraren funtzioan idaztea da. Preseski, (8-37) espresioa erabiliz, tenperaturaren ondorioz agertuko litzatekeen luzapena kalkula dezakegu, hots,

$$\delta^T = \alpha\Delta TL, \tag{8-39}$$

eta (8-8) formula gogoraturaz, konpresiopean dagoen pieza baten luzera-murrizketa:

$$\delta^{N_x} = -\frac{N_x L}{EA}. \tag{8-40}$$

Bi eraginak batuz, deformazio totala edukiko genuke:

$$\delta = \delta^T + \delta^{N_x} = \alpha\Delta TL - \frac{N_x L}{EA}. \tag{8-41}$$

Ikusten den bezala, guztizko luzera-aldaketa nulua izateko, tenperaturak sortzen duen luzapena eta konpresio-indarraren laburpena berdinak izan behar dira. Beste era batera esanda, batak bestea anulatu behar du. Azkenik, (8-41) ekuazioa (8-38) bateragarritasun-ekuazioan ordeztuz eta ardatzeko indarra askatuz:

$$N_x = \alpha\Delta TEA, \tag{8-42}$$

eta ardatzeko tentsioa:

$$\sigma = \frac{N_x}{A} = \alpha\Delta TE. \tag{8-43}$$

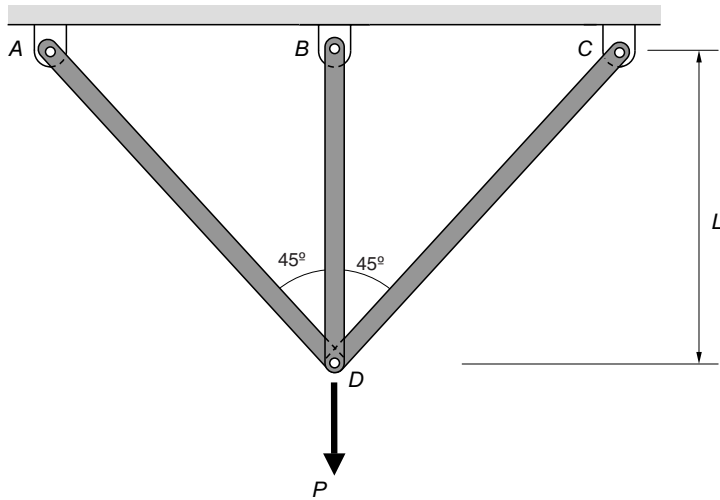
Bukatzeko, azpimarra dezagun ezen emaitza hori temperatura-aldaketa uniformeen kasuan bakarrik erabil daitekeela. Temperatura-aldaketa gorputzeko puntu guztietan berdina ez bada, habearen makurdura gerta daiteke, eta kalkulua zailagoa egiten da. Halere, hemen jarraitutako pauso berberak erabil daitezke, hots, tenperaturaren eta esfortzuen eraginak gainezar ditzakegu guztizko deformazio kalkulatzeko.

8.8. DEFORMAZIO PLASTIKOAK TRAKZIOPEAN ETA KONPRESIOPEAN

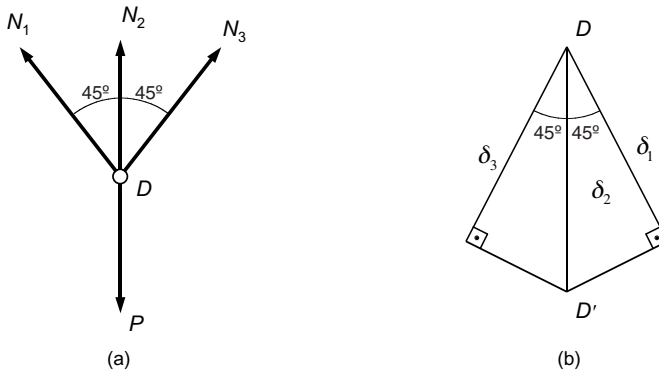
Arestian ikusitako kasu guztietan, materialaren portaera elastikoa zela suposatu dugu, eta isurpen-tentsioa edo haustura-tentsioa gainditzea debekatuta zegoela. Egiturak diseinatzeko era horri *metodo elastikoa* deritzo, eta horixe da orain arte erabili duguna. Metodo horren arabera, sekzioen batean isurpena agertzen denean egiturak huts egiten duela suposatzen da, eta egoera horretara iristeko aplikatu den karga onar daitekeen maximoa dela. Beraz, metodo horrek ez du isurpen-tentsioa gainditu ondoren zer gertatzen den aztertzen. Halere, material harikorrekin egindako egituretan tentsioek isurpen-muga gaindi dezakete batzuetan; esate baterako, ustekabeko indarrak agertzen direnean. Horrek ez du esan nahi, dena den, puntu edo sekzio batzuetan isurpen-tentsiora iritsiagatik egitura guztiaren hondamena gertatuko denik. Beste era batera esanda, egiturako punturen batean materialaren portaerak elastikoa izateari utzi arren, egitura horrek kanpoko eraginei aurre egiten jarrai dezake, oraindik erresistentzia-erreserba bat duelako. Diseinua egiteko orduan indar-erreserba hori kontuan hartzea nahi badugu, *metodo plastikoa* deritzona erabili beharko dugu.

Isurpen-tentsiora iritsi ondoren egituraren eragiten duten indarrak handiagotzen jarraituz gero, isurpen-tentsioa gainditzen duten puntuen kopurua gero eta handiagoa izango da. Bistakoa den bezala, isurpenean dauden sekzioen kopurua handiegia bada, egiturak ezingo du aplikatutako indarrei eusten jarraitu, eta behera etorriko da. Egituraren hondamena dakarren kargari *azken karga* edo *ahitze-karga* deritzo. Segidan ikusiko dugun bezala, kalkulua plastikoaren bidez, karga horren balioa lor dezakegu. Gaur egun, metodo plastikoa oso hedatuta dago eta sarritan erabiltzen da altzairuzko edo hormigoi armaturazko egituren diseinuan.

Atal honetan, beraz, material harikorrekin egindako egituren diseinu plastikoaren oinarriak aurkeztuko ditugu, pieza prismatikoak trakziopean edo konpresiopean daudenean. Horretarako, materialaren portaera elastoplastiko perfektua dela onartuko dugu (ikus 4.6.a. irudia), hau da, elastikoa eta lineala σ_f tentsiora iritsi arte, eta plastikoa haustura-une-raino. Trakziozko eta konpresiozko isurpen-tentsioak berdina direla onartuko dugu, material harikor gehienetan gertatzen den bezala. Deformazioek ere txikiak izaten jarraitzen dutela suposatuko da. Izan ere, egituraren zati batzuetan isurpen-tentsiora iritsi arren, hondamena gertatu baino lehen, beti egongo dira portaera elastikoa gordetzen duten gunek, deformazioak muga batzuen azpitik mantenduko dituztenak.



8.15. irudia.



8.16. irudia.

Portaera plastikoa ulertzeko, adibide gisa, izan bedi 8.15. irudiko barra-sarea. Egitura hori hiru pieza prismatikok osatzen dute, eta D korapiloan P indar bertikal bat aplikatzen da. Hiru barrak berdinak dira, hau da, balio bereko sekzioa (A), elastikotasun-modulua (E) eta isurpen-tentsioa (σ_f) daukate. Lehendabizi, metodo elastikoak aurreratu den karga maximoa kalkulatu dugu, hots, sekzioren baten isurpena sortzen duena.

Hain zuzen, 8.7. irudiko adibidearekin egin genuen bezala, norabide horizontalean eta bertikalean indarren oreka-ekuazioak erabiliz (ikus 8.16.a. irudia):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_1 = N_3, \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow (N_1 + N_3) \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 = P. \end{aligned} \tag{8-44}$$

eta lehen erlazioa bigarreanean ordeztuz:

$$\sqrt{2}N_1 + N_2 = P. \quad (8-45)$$

Ekuazio hori ez da nahikoa barren ardatzeko indarrak kalkulatzeko, egitura hiperestatikoa baita. Baina 8.16.b. irudiko eraikuntza geometrikoan oinarrituz, bateragarritasun-ekuazio hau lortuko dugu:

$$\delta_2 = \sqrt{2}\delta_1. \quad (8-46)$$

Azkenik, portaera lege hauek,

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{N_1\sqrt{2}L}{EA}, \\ \delta_2 &= \frac{N_2L}{EA}, \end{aligned} \quad (8-47)$$

(8-46) bateragarritasun ekuazioan ordeztuz eta (8-45) oreka-ekuazioa erabiliz, ardatzeko indarren balioak lor ditzakegu:

$$\begin{aligned} N_1 = N_3 &= 0,293P, \\ N_2 &= 0,585P. \end{aligned} \quad (8-48)$$

Bistakoaenez, P indarra handiagotuz goazen neurrian, isurpen-tentsiora iritsiko den lehena erdian dagoen barra bertikala da, N_2 baita hiruren artean ardatzeko indarrak handiena. Aldiune horretan P indarrak duen balioari *isurpen-karga* deritzo (P_f). Beraz, egiturako sekzioaren batean isurpen-tentsioak agerrarazten dituen indarra da isurpen-karga. Bere balioa kalkulatzeko, nahikoa da barra horren tentsioa eta σ_f elkarrekin berdintzea:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \sigma_f = \frac{0,585P_f}{A} \Rightarrow P_f = 1,709\sigma_f A. \quad (8-49)$$

Bestalde, $P = P_f$ denean, σ_1 eta σ_3 tentsioek balio hau dute:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{A} = \frac{0,293P_f}{A} = \frac{0,293P_f}{A} = 0,5\sigma_f, \quad (8-50)$$

eta D puntuaren desplazamendu bertikalak (δ_f) honako balio hau du:

$$\delta_f = \sigma_2 = \frac{N_2L}{EA} = \frac{\sigma_f L}{E}. \quad (8-51)$$

Diseinu elastikoa hemen bukatuko litzateke, (8-49) ekuazioko P_f indarra izanik onartuko genukeen kargarik handiena. Halere, P indarra handiagotzen jarraituko bagenu eta P_f balioa gaitutuko bagenu, oraindik ez litzateke egituraren hutsegitea gertatuko. Beste hitz batzuetan esanda, barra bat isurpenean sartu arren, oraindik portaera elastikoa duten beste bi barra dauzkagu, P indarrari aurre egin diezaioketenak. Izan ere, egitura hiperestatikoaenez, elementuren bat isurpena iristean isostatikoa bihurtzen da eta karga handiagotzen jarrai dezakegu. Erraz uler daiteke ezen, hiru barra eduki ordez bi barra soilik edukiko

bagenitu, nahikoa izango litzatekeela horietakoren bat isurpenean sartzea egitura guztiaren hondamena gertatzeko.

Ikus dezagun diseinu plastikoa aplikatuz noraino irits gaitzekeen. P indarra handiagotzen jarraituz gero, hau da, $P > P_f$ bada, erdiko barraren tentsioa ezin da gehiago hazi, $\sigma_2 = \sigma_f$ izango baita beti. Beraz, isurpen-tentsioa gainditu ondoren, ezezagun bakarra geldituko litzaziguke, hots, N_1 (edo N_3) ardatzeko indarra. Ondorioz, (8-45) ekuazioa hone-laxe geldituko litzateke:

$$\sqrt{2}N_1 + \sigma_f A = P, \quad (8-52)$$

eta beraz,

$$N_1 = 0,707(P - \sigma_f A). \quad (8-53)$$

Ikusten den bezala, N_1 ardatzeko indarra lortzeko, nahikoa da oreka-ekuazioak aplikatzea, bateragarritasun-ekuazioak erabili beharrik gabe. Gainerako bi barra inklinatuak isurpenera iristen direnean hauxe betetzen da:

$$N_1 = N_3 = \sigma_f A. \quad (8-54)$$

(8-53) ekuazioa (8-54) erlazioan ordeztuz, barra guztiak isurpenean sartzeko —hau da, egituraren hondamena gertatzeko— aplikatu behar den indarra kalkula dezakegu:

$$0,707(P_p - \sigma_f A) = \sigma_f A \Rightarrow P_p = 2,414\sigma_f A. \quad (8-55)$$

P_p karga horri *azken karga* edo *ahitze-karga* deritzo, eta onar daitekeen karga maximoa da. $P = P_p$ denean, barra guztiak isurpenean sartzen dira eta D puntua etengabe jaisten hasiko da. Karga hori diseinu elastikoak aurrezaten duen (8-49) ekuazioko P_f isurpen-karga baino handiagoa dela ikus daiteke. Egitura guztiak huts egitekoaldiunean D sekzioaren desplazamendua ezagutzeko (δ_p), nahikoa da barra inklinatuen luzapena erabiltzea, zeren horien portaera elastikoa lineala baita bukaera arte. Hortaz, (8-47) ekuazioan $N_1 = A\sigma_f$ eginez gero eta (8-46) erlazioan ordeztuz:

$$\delta_p = \frac{2\sigma_f L}{E}. \quad (8-56)$$

Bestetik, (8-49) eta (8-55) ekuazioak elkarren artean zatituz, isurpen-indarraren eta ahitze-indarraren arteko erlazioa lor dezakegu:

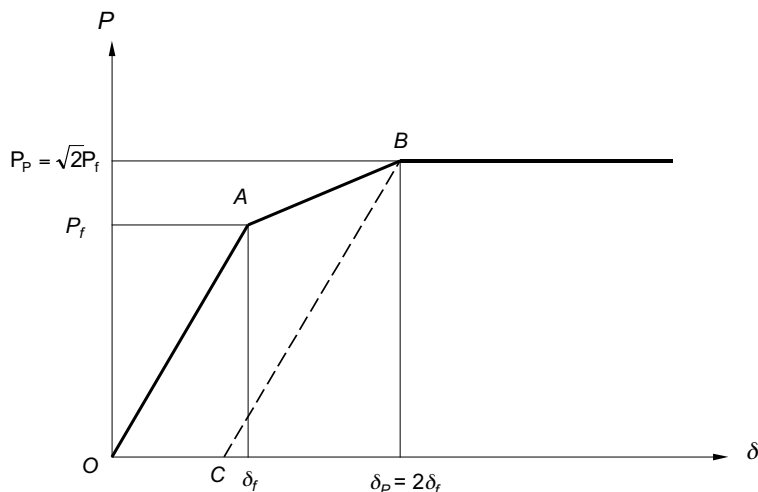
$$\frac{P_p}{P_f} = \frac{2,414\sigma_f A}{1,709\sigma_f A} = \sqrt{2}, \quad (8-57)$$

eta (8-51) eta (8-56)-ren bidez, desplazamenduen arteko erlazioa lor dezakegu:

$$\frac{\delta_p}{\delta_f} = \frac{2\sigma_f L/E}{\sigma_f L/E} = 2. \quad (8-58)$$

Esandakoak laburbilduz, 8.17. irudian karga-prozesu guztiaren adierazpen grafikoa ageri da, non (8-57) eta (8-58) ekuazioetako balioak kokatu diren. Grafiko hori hiru lerro zuzenez osatzen da, egituraren zurruntasun-aldaketa islatzen dutenak. OA tartean egiturako

elementu guztiek portaera elastikoa aurkezten dute. Preseski P_f isurpen-kargara iristean, barra bat isurpenean sartzen da, egitura hori isostatiko bihurtuz. Horrekin batera, egituraren zurruntasuna ahuldu egiten da, AB tarteko maldak islatzen duen bezala. Ondoren, P_p ahitze-kargara iristen garenean (B puntua), barra guztietako tentsioa σ_f da, eta indarra handiagotzen jarraituz gero, egituraren hondamena gertatzen da. Izan ere, B puntutik aurrera dagoen lerroa horizontala da, zurruntasuna nulua baita. Puntu hori igaro ondoren, barra guztiek portaera plastikoa dute eta egitura etengabe deformatuko litzateke, eta azkenik haustura gertatuko litzateke.



8.17. irudia.

Bukatzeko, ikus dezagun zer gertatzen den B puntuan gaudela —hau da, egitura behera etorri baino zertxobait lehenago— aplikatutako indarra kentzen badugu. Laugarren gaian azaldu genuen bezala, deformazio plastikoak agertu direnez, indarra kendu ondoren ez gara atzera jatorriko O puntura itzuliko. Horren orde, OA -rekiko paraleloa den lerro batean zehar mugituko gara, 8.17. irudian C letraz izendatu dugun punturaino. Beraz, deformazio iraunkorrek agertuko dira, eta egiturako D puntua ez da hasierako posiziora itzuliko.

Egoera horretan agertzen diren ardatzeko indarrak eta desplazamenduak kalkulatzeko era bat, $P = -P_p$ balioa duen indar bat aplikatzea da. Era horretan, aplikatutako indarraren azken balioa nulua izango da. Gainera, deskarga-prozesua elastikoa eta lineala da, BC leerroan zehar gertatuko delako. Beraz, indar berri horrek sortzen dituen esfortzuak kalkulatzeko, jatorrizko espresioak erabil ditzakegu, hots, (8-48) espresioiko bi ekuazioak:

$$\begin{aligned} N_1 = N_3 &= -0,293P, \\ N_2 &= -0,585P_p. \end{aligned} \quad (8-59)$$

Gainezarpen-printzipioa aplikatuz, hiru barretan geldituko diren esfortzuak kalkulatu daitezke:

$$\begin{aligned} N_{1h} = N_{3h} &= \sigma_f A - 0,293 \cdot 2,414 \sigma_f A = 0,293 \sigma_f A, \\ N_{2h} &= \sigma_f A - 0,585 \cdot 2,414 \sigma_f A = -0,414 \sigma_f A. \end{aligned} \quad (8-60)$$

Aurreratu genuen bezala, indarra kendu ondoren, barretako esfortzuak ez dira nuluak izango. Indar horiei *hondar-esfortzuak* deritze, eta deformazio plastikoak gertatu ondoren agertzen dira. Desplazamenduekin prozedura berbera jarraituz, D puntuaren desplazamenduak kalkula dezakegu:

$$\delta_p = \frac{2\sigma_f L}{E} - \frac{0,585 \cdot 2,414\sigma_f AL}{AE} = \frac{0,588\sigma_f L}{E}. \quad (8-61)$$

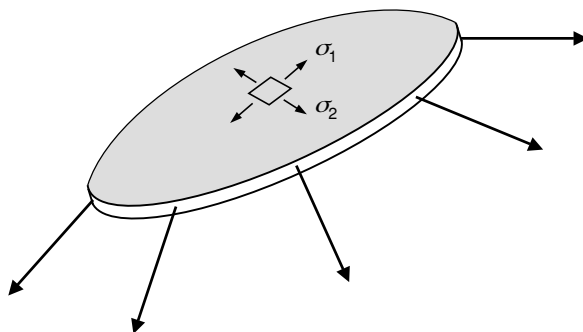
Hain zuzen, (8-61) ekuazioko desplazamendua 8.17. irudian C puntuak duen abzisa izango litzateke. Deskarga-prozesua B puntuan hasi ordez beste edozein puntutan hasiko bagenu, hemen erabilitako pauso berberak eman ditzakegu hondar-tentsio eta hondar-deformazioak kalkulatzeko.

Aipagarria da akatsak dauzkaten egitura hiperestatikoaren kalkulua plastikoa. Barra baten neurriak egokiak ez direnean —hau da, behar dena baino laburragoa edo luzeagoa denean—, muntaia egiteko elementuak behartu egin behar izaten dira, eta ondorioz, hasierako tentsioak eta deformazioak agertzen dira. Demagun, adibidez, 8.11. irudiko egitura. Muntaia egin ondoren D korapiloan indar bat aplikatuko bagenu, indar hori P_p baliora iristean, egituraren hondamena gertatuko litzateke. Halere, azken karga horren balioa kalkulatzeko, ez dago barrek dauzkaten akatsak kontuan hartu beharrik. Izan ere, P_p indarra kalkulatzeko nahikoa da oreka aplikatzea, barra guztietako tentsioa ezaguna baita hutsegiteko momentuan. Hau da, $P = P_p$ denean, badakigu $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_f$ betetzen dela. Beraz, azken karga kalkulatzeko nahikoa da oreka-ekuazioak aplikatzea 8.16.a. irudian oinarrituz:

$$P_p = (N_1 + N_3) \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 = 2\sigma_f A \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_f A = 2,414\sigma_f A. \quad (8-62)$$

8.9. HORMA MEHEKO PRESIO-ONTZIEN KALKULUA

Presio-ontziak gasak eta likidoak biltzeko erabiltzen diren egitura itxiak dira. Presio-ontzien adibide batzuk honako hauek dira: ura gordetzen duten biltegi esferikoak, haize konprimatuzko zilindroak, globoak, etab. Egitura horien guztien paretak kurboak izaten dira, hau da, *oskol* edo *lamina* deituriko egituren taldekoak. Liburu honetan nagusiki pieza prismatikoei buruz hitz egingo dugun arren, gai hau bukatu baino lehen, horma meheko presio-ontziei buruzko aipamen labur bat egitea merezi du. Orain arte, kapitulu honetan ardatz bakarreko egoera aztertu dugu. Segidan ikusiko dugun bezala, presiopean dauden horma meheko ontzietan bi ardatzeko egoera bat agertuko zaigu (ikus 8.18. irudia). Zentzuzkoa dirudi, beraz, tentsio-egoera hori hemen aztertzea, makurdura ikustera pasa baino lehen.



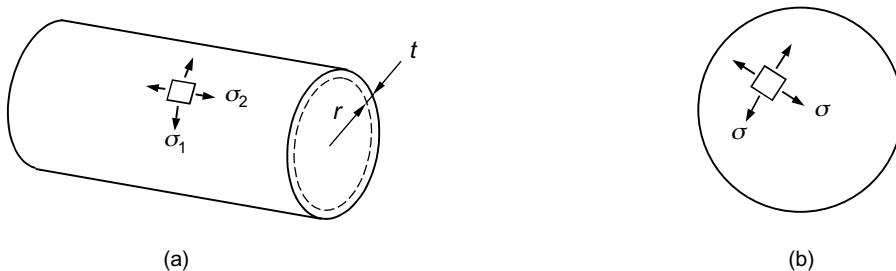
8.18. irudia.

Atal honetan forma zilindrikoa edo esferikoa duten ontzien analisia egingo dugu, horiek direlako sarrien erabiltzen diren presio-ontzien geometriak. Lortuko ditugun espresioek, pareta mehea duten hainbat egitura kalkulatzeko ahalbidetuko digute. Formula horiek aplikatu ahal izateko, ontziaren r erradioaren eta paretako t lodieraren arteko erlazioa 10 baino handiagoa izan behar da. Horrez gain, ontziaren barneko presioa kanpokoa baino handiagoa izan behar da, konpresio-indarrak saihesteko eta paretak tolestu edo zimurtu ez daitezen.

8.9.1. Presio-ontzi zilindrikoak

Izan bedi p barne-presioaren eraginpean dagoen 8.19.a. irudiko ontzi zilindrikoa. Ontziaren lodierari t deituko diogu. Irudian bertan, elementu infinitesimal batean eragiten duten tentsioak adierazi dira. Ikusten den bezala, tentsioak elementuaren aldeekiko elkarzutak dira. Tentsio horiei *mintz-tentsioak* deritze, paretarekiko ukitzailak direlako. Ontziaren simetria dela-eta, elementu horretan ez da tentsio ebakitzailerik agertuko; ondorioz, σ_1 eta σ_2 tentsio nagusiak dira. Lehenengoari tentsio *zirkunferentziala* edo *ukitzaillea* deritzo, eta bigarrenari *luzetarako* edo *ardatzeko* tentsioa.

Tentsioen balioak kalkulatzeko, nahikoa da sekzioen metodoa eta oreka-ekuazioak aplikatzea. Tentsio zirkunferentziala kalkulatzeko, zilindroa luzetarako ardatzetik pasatzen den plano batez ebakiko dugu. Luzetarako tentsioa lortzeko, aldiz, ardatzarekiko elkarzuta den plano bat erabiliko dugu ebaketa egiteko. Ebaketa horien bidez, kasu bakoitzean tentsio ezezagunetako bat bakarrik agertuko da eta bakoitza bere aldetik askatu ahal izango dugu.



8.19. irudia.

Kalkula dezagun σ_1 tentsio zirkunferentziala. Lehendabizi zilindroa ardatzarekiko elkarzutak diren bi planoren bidez ebakiko dugu eta, ondoren, ardatzetik pasatzen den beste baten bidez, 8.20.a. irudiko zilindro-zatia lortuz. Ikusten den bezala, σ_2 luzetarako tentsioak marraztu gabe utzi ditugu, erabiliko dugun oreka-ekuazioan eraginik ez dutelako. Elementu horren oreka-ekuazioak idazteko orduan, bi indar hartu behar dira kontuan. Alde batetik, paretaren lodieran eragiten duten σ_1 tentsioek sortzen dutena, hots,

$$\sigma_1(2bt), \tag{8-63}$$

non b delako ardatzarekiko elkarzutak diren planoen arteko distantzia baita. Beste indarra ontziaren paretetan eragiten duen presioak sortutakoa da. Indar horren baliokide horizontala kalkulatzeko, nahikoa da presioa ontziaren azaleraren proiektzio bertikalaz biderkatzea:

$$p(2br). \tag{8-64}$$

Azkenik, plano bertikalarekiko norabide elkarzutean indarren arteko oreka aplikatuz gero, hauxe lortzen da:

$$\sigma_1(2bt) - p(2br) = 0, \tag{8-65}$$

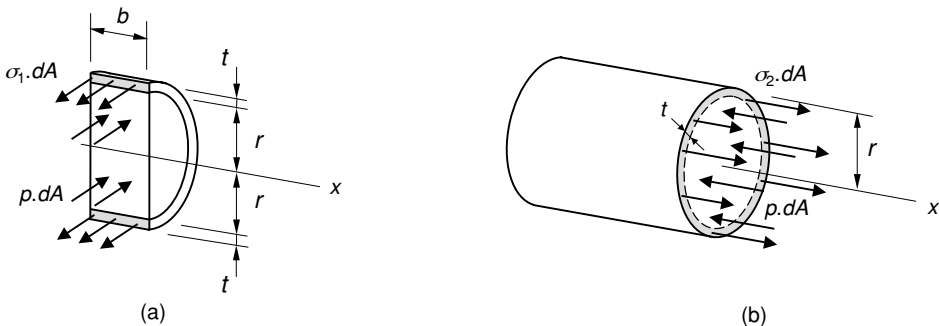
eta tentsioa askatuz,

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}. \tag{8-66}$$

Luzetarako tentsioa kalkulatzeko (σ_2), 8.20.b. irudian oinarrituko gara. Oraingoan ardatzarekiko elkarzuta den plano bakar bat erabili dugu zilindroa ebakitzeko. Paretaren lodieran zehar eragiten duen luzetarako tentsioaren indar baliokidea honelaxe kalkula daiteke:

$$\sigma_2(2\pi rt), \tag{8-67}$$

eta x ardatzaren norabidea du. Espresio horretan, azaleraren balioa lortzeko hormaren lodiera txikia hartu dugu kontuan; horrela eginez, $2\pi rt$ hurbilketa onargarria da.



8.20. irudia.

Zilindroaren alboak itxita daudenez, barneko presioak ere indar erresultante bat emango du ardatzaren norabidean. Lehen bezala, indar horren balioa presioa zeharkako sekzioaren azalera biderkatuz lortuko dugu:

$$p(\pi r^2). \quad (8-68)$$

Indarren baturak nulua izan behar duenez, hauxe idatz dezakegu:

$$\sigma_2(2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0. \quad (8-69)$$

Beraz,

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}. \quad (8-70)$$

8.9.2. Presio-ontzi esferikoak

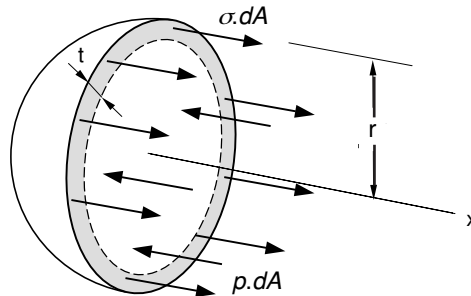
Barneko presioak jasateko geometria egokiena esferikoa da, xaboiak sortzen dituen burbuilak edo punpuilak aztertuz erraz ondoriozta daitekeen bezala. Presio-ontzi esferikoen simetria perfektua dela-eta, norabide ukitzaila guztiak baliokideak dira. Hortaz, kasu honetan, tentsio bakarra egongo da norabide guztietan, σ deituko duguna (ikus 8.19.b. irudia).

Ontzi horietan agertzen diren tentsioak kalkulatzeko, esferaren zentrotik pasatzen den plano bat erabiliko dugu eta ontzia bi zatitan bananduko dugu, 8.21. irudian ageri den bezala. Paretako lodieran hedaturiko tentsioek sortzen duten indar baliokidea honako hau izango litzateke:

$$\sigma(2\pi r t). \quad (8-71)$$

Bestalde, horman eragiten duen p presioak sortzen duen indar baliokidea, ontzi zilindrikoarentzat erabili dugun arrazonomendu bera erabiliz, hauxe da:

$$p(\pi r^2). \quad (8-72)$$



8.21. irudia.

Honelatan, bada, (8-71) eta (8-72) ekuazioetako indarrak gutzira hartuz anulatu egin behar direnez:

$$\sigma(2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0. \quad (8-73)$$

Azkenik, σ_2 tentsioa askatuz, hauxe lortuko genuke:

$$\sigma = \frac{pr}{2t}. \quad (8-74)$$

9. Makurduraren teoria orokorra

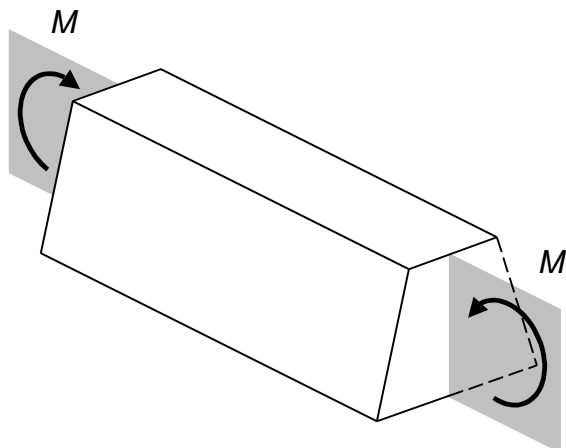
9.1. SARRERA

Ardatzeko indarra aztertu ondoren, kapitulu honetan makurdurapean dauden habeen analisia deskribatuko dugu. Trakzio-konpresiopean pieza prismatikoak luzatu edo laburtu egiten diren modura, makurdurapean dauden barrak okertu egiten dira, hots, kurbadura-aldaketa jasaten dute. Gehienetan, makurdura-esfortzuak pieza prismatikoarekiko zeharka aplikatuta dauden indarren ondorioz agertzen dira. Indar horiek, makurduraz gain, beste esfortzu batzuk ere sortzen dituzte, indar ebakitzaila eta ardatzeko indarra, esate baterako. Sekzio batean dagoen esfortzu bakarra momentu makurtzailea denean, sekzioko egoerari *makurdura hutsa* deritzo. Indar makurtzaileaz gain, indar ebakitzaila bat agertzen denean, *makurdura bakuna* daukagula esaten da. Azkenik, aurreko biez gain ardatzeko indarra ere agertzen denean, makurdurari *konposatua* deituko diogu. Gaia kasu errazenezkin hasiko dugu, hots, makurdura hutsarekin. Ondoren, beste bi motetako makurdurak aztertuko dira. Makurduraren oinarriak aurkeztu ondoren, esfortzu-mota horren zenbait kasu bereziren azterketa egingo dugu, esaterako, horma meheko habeen analisia, makurdura desbideratua edo habe heterogeneoen kalkulua.

9.2. MAKURDURA HUTSA

9.2.1. Hasierako hipotesiak

Goian aipatu dugun bezala, makurdura hutsaren kasuan momentu makurtzailea da sekzioan dagoen esfortzu bakarra. Sarrera gisa, zeharkako sekzioan simetria-planoren bat duten habeeekin hasiko gara, eta ondoren, lortutako emaitzak edozein itxura duten sekzioentzat orokortuko ditugu. Bestalde, momentu makurtzailea simetria-plano horretan kokatzen dela suposatuko dugu, hau da, egoera laua dela (ikus 9.1. irudia). Horrez gain, ondoko beste hipotesi hauek ere egingo ditugu: materiala homogenea, isotropoa eta elastiko lineala dela onartuko dugu, eta habearen deformazioak txikiak direla. Izatez, makurdura hutsa errealitatean gutxitan gertatzen den kasua da, gehienetan esfortzu gehiago agertzen baitira pieza prismatikoetan. Halere, kasu berezi hau oso garrantzitsua da, hemen lortutako emaitzak makurduraren kasu bihurriagoetan ere erabil daitezkeelako.



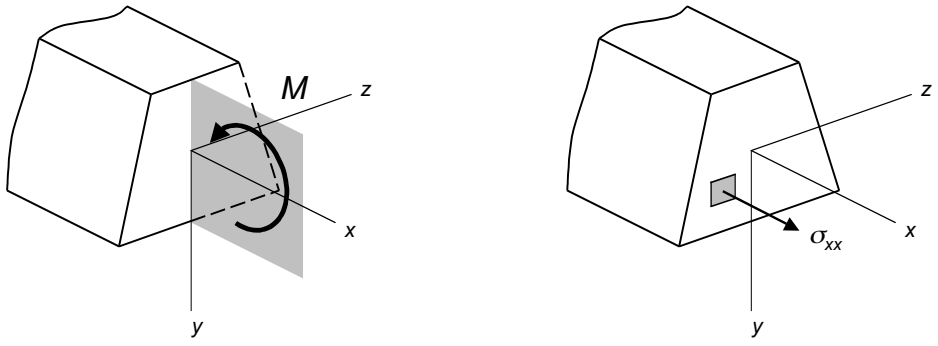
9.1. irudia.

9.2.2. Deformazioak sekzio simetrikodun habeetan

Makurdurapean dagoen sekzio bateko tentsioak kalkulatzeko, lehendabizi oreka-ekuazioetan oinarrituko gara. Zazpigarren gaian ikusi genuen bezala, sekzioko esfortzuen eta tentsioen artean baliokidetasun bat existitu behar da. Orduan lortutako sei ekuazioetatik, hiru dira gai honetan erabili beharrekoak, hauexek:

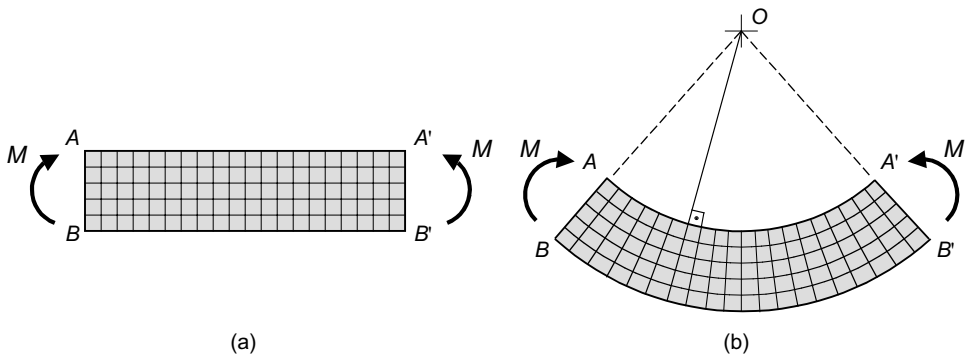
$$\begin{aligned} N_x &= \int_A \sigma_{xx} dA, \\ M_y &= \int_A \sigma_{xx} z dA, \\ M_z &= \int_A \sigma_{xx} y dA. \end{aligned} \quad (9-1)$$

Hain zuzen ere, (9-1) espresioetan ageri den bezala, momentu makurtzaileak tentsio normalekin erlazionaturik daude. Makurdura hutsean zeroren desberdina den esfortzu bakarria esfortzu makurtzailea denez, kasu horretan tentsio normalak agertuko zaizkigu soilik, hau da, σ_{xx} tentsioak, 9.2. irudian ageri den bezala. Gainera, indar ebakitzailea nulua denez, (7-8) ekuazioaren arabera, momentua konstantea da sekzio guztietan. Ardatz bakaurreko egoera bat edukiko dugu, beraz, sekzioko puntuetan. Tentsio normal horien banaketaren erresultanteak sekzioan aplikatutako momentu makurtzailearen baliokidea izan behar du, estatikaren legeak bete daitezzen. Halere, (9-1) ekuazioak ez dira aski tentsio normal horien balioak kalkulatzeko. Ardatzeko indarraren kasuan gertatzen zen bezala, estatikoki zehaztu gabeko kasu baten aurrean gaude. Ondorioz, makurduran agertzen diren deformazioen izaera nolako den aztertu beharko dugu.



9.2. irudia.

Deformazioen azterketa egiteko, suposa dezagun 9.3.a. irudiko habe-zatia, muturretan bi momentu makurtzaile aplikatuta dituenena. Erraz uler daiteke, 9.3.b. irudian agertzen den bezala, habearen ardatza okertu egingo dela momentu makurtzaile horien ondorioz. Esperimentalki froga daiteke zeharkako sekzio guztiak O kurbadura-zentrorantz zuzenduta daudela eta deformatu ondoren lauak izaten jarraitzen dutela. Gainera, habe deformatuaren ardatza zirkunferentzia-arku bat da. Beraz, makurdura hutsaren kasuan, Navier-ren hipotesia zehatz-mehatz betetzen da. Deformazioaren ondorioz, habearen AA' zuntza laburtu egin da, eta BB' zuntza, aldiz, luzatu. Ondorioz, beharrezkoa da goiko eta beheko zuntzen artean luzera-aldaketarik jasaten ez duen zuntz bat existitzea. Zuntz horri *zuntz neutroa* deritzen, eta, momentuz, beraren posizioa ezezaguna da. Aztertzen ari garen problema laua denez, irudiarekiko paraleloak diren plano guztien portaera berdina izango da, eta zuntz neutroaren altuera berean kokatutako zuntz guztiak zuntz neutroak izango dira. Zuntz horiek osatzen duten planoari *gainazal neutroa* deituko diogu, eta plano horren eta zeharkako sekzioaren arteko ebakidura-lerroari, *ardatz neutroa*.



9.3. irudia.

Ardatz neutroaren posizio zehatza oraindik ezezaguna den arren, gure erreferentzia-sistemaren jatorria zuntz neutroen altuera berean kokatuko dugu. Beti bezala, beste bi ardatzak sekzioaren inertzia-ardatz nagusiak izango dira. Beraz, edozein zuntzen kokapena y koordinatuarekin finkatuko dugu, hau da, zuntz neutroraino dagoen distantziaren bidez. Demagun bata bestetik dx distantzia infinitesimalera dauden bi sekzio hartzen ditugula, eta

tartean geratzen den habe-zatia isolatzen dugula. 9.4. irudian pieza-zati horren irudi deformatua ageri da, non NN' lerroa zuntz neutroa den. Jarraian, zuntz neutro horretatik y distantziara dagoen SS' zuntzaren deformazioa aztertuko dugu. Arestian esan bezala, Navier-en hipotesia erabiliko dugu; hots, hasieran lauak eta ardatzarekiko elkarzutak diren sekzioek lauak eta ardatzarekiko elkarzutak izaten jarraituko dute deformazioa eta gero. Makurdura hutsaren kasuan, hipotesi hori zehazki betetzen da. Ardatz neutroaren kurbadura-erradioari ρ deituko diogu. Kurbadura-erradio hori sekzio guztientzat berdina da, M momentu makurtzaile beraren eraginpean baitaude. Deformatu ondoren, NN' zuntzaren luzerak dx izaten jarraituko du, zuntz neutroak ez baitu luzera aldaketarik jasaten.

Lehendabizi, N' puntutik hasita AB sekzioarekiko lerro paralelo bat marraztuko dugu. Lerro horrek S'' puntuan ebakitzen du azertzen ari garen SS' zuntza. Beraz, NN' eta SS'' distantziak berdinak dira eta dx balio dute:

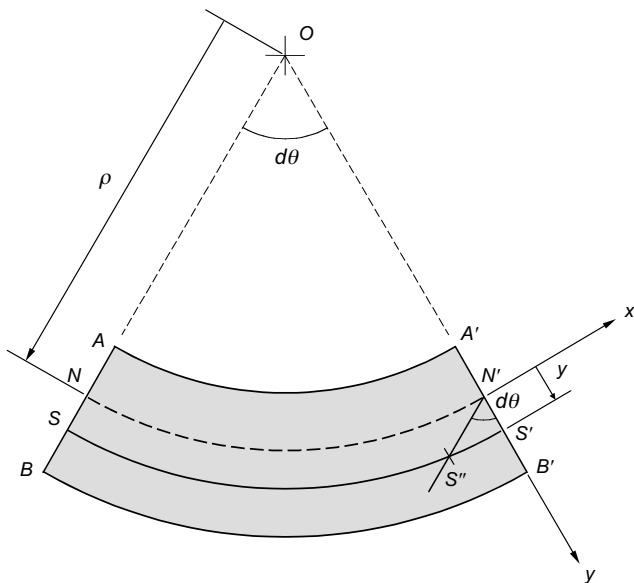
$$NN' = SS'' = dx \quad (9-2)$$

Bestalde, 9.4. irudiko eraikuntza geometrikoan oinarrituz, honako beste bi erlazio hauek ere lor ditzakegu:

$$\begin{aligned} NN' &= dx = \rho d\theta, \\ S'S'' &= y d\theta, \end{aligned} \quad (9-3)$$

non $d\theta$ delakoa muturretako sekzioen erradioek osatzen duten angelua den. Beraz, (9-3)-ko bi espresioetatik hauxe lortzen da:

$$\begin{aligned} NN' &= dx = \rho d\theta, \\ S'S'' &= \frac{y}{\rho} dx. \end{aligned} \quad (9-4)$$



9.4. irudia.

Kalkula dezagun orain SS' zuntzaren deformazio unitarioa. Hori lortzeko, zuntz horren luzera-aldaketa hasierako luzerarekin zatitu beharko dugu, hau da, dx balioaz, hasieran zuntz guztiek luzera berdina baitute (ikus 9.3.a. irudia). Aztertzen ari garen zuntzaren luzera-aldaketa $S'S''$ segmentuaren balioa da, hain zuzen. Izan ere, NN' zuntzaren luzera aldatzen ez denez, badakigu kurba-zati horrek dx neurrikoa izaten jarraitzen duela eta, ondorioz, SS'' zatia ere dx neurrikoa izango dela. Beraz, hasierako zuntzaren eta zuntz deformatuaren artean dagoen aldea $S'S''$ izango da. Deformazio unitarioaren definizioa gogoratu, x ardatzaren norabidean daukagun deformazio unitarioa hauxe da:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{S'S''}{dx}, \quad (9-5)$$

eta (9-4) ekuaziotik $S'S''$ distantzia ordeztuz,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{y}{\rho} \quad (9-6)$$

edo

$$\varepsilon_{xx} = ky, \quad (9-7)$$

non $k = 1/\rho$ delakoa *kurbadura* baita (kurbadura-erradioaren alderantzizkoa). Eraitza horren arabera, zeharkako sekzioan zehar deformazio unitarioa linealki aldatzen dela ikus dezakegu. Gainera, deformazio horren balioa, zuntz neutroraino dagoen distantziarekiko zuzenki proportzionala da. Beraz, espero zitekeen bezala, deformazio unitarioa nulua da zuntz neutroan. Balio maximoa zuntz neutrotik urrunen dagoen zuntzean agertuko da, hots, y koordinatu handiena duen zuntzean.

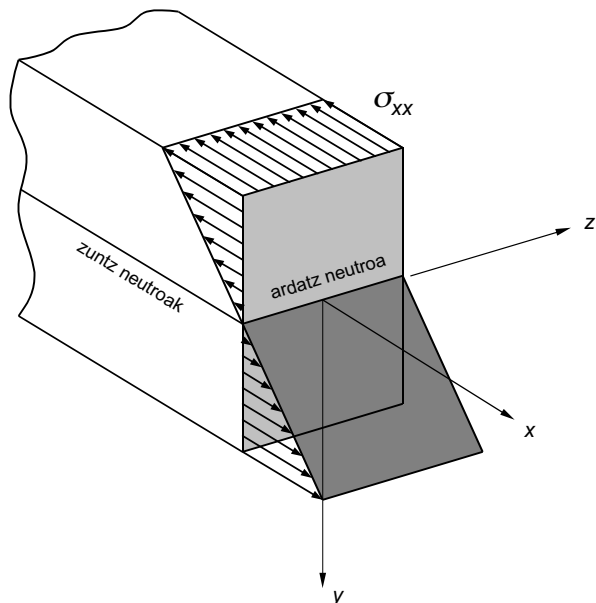
Azpiatal hau bukatzeko, azpimarra dezagun oraindik ez garelako sekzioan agertzen diren tentsioak kalkulatzeko gai. Izan ere, zuntz neutroaren kokapena ezezaguna da. Zuntz neutroa non dagoen topatu eta tentsio normalak kalkulatzeko balioko digun espresio bat lortzeko, (9-1) oreka-ekuazioetara itzuliko gara.

9.2.3. Tentsioak sekzio simetrikodun habeetan

Tentsioak kalkulatzeko, Hooke-ren legean oinarrituko gara. Esan genuen bezala, makurdura hutsean ardatz bakarreko egoera dugu sekzioko puntu guztietan. Beraz, tentsio normala kalkulatzeko, nahikoa da ε_{xx} deformazio unitarioa eta E elastikotasun-modulua elkarrekin biderkatzea:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E \frac{y}{\rho} = Eky. \quad (9-8)$$

Hain justu, 9.5. irudian tentsio normalen banaketaren adierazpen grafikoa ageri da. Ikusten den bezala, tentsioak aldatuz doaz norabide bertikalean (9-8)-ren arabera, y aldagaiaren menpe baitaude. Halere, z norabidean tentsio normalak ez dira aldatzen, indarrak sekzioaren simetria-ardatzean aplikatzen ditugun bitartean. Ardatz neutroko puntuetan, tentsio normala nulua da. Koordinatu positiboa duten puntuetan, trakzioa agertuko da, eta negatiβοetan aldiz, konpresioa. Hori guztia deformazioei buruz esandakoarekin bat dator, ardatz neutroaren azpitik dauden zuntzak luzatu egiten baitira, eta gainean daudenak, laburtu.



9.5. irudia.

Ikus dezagun orain non dagoen kokatuta ardatz neutroa, (9-1) ekuazioko lehenengo espresioa erabiliz. Sarritan errepikatu dugun bezala, tentsio normalen erresultantea eta sekzioan aplikatutako esfortzuak baliokideak izan behar dira. Makurdura hutsaren kasuan, ardatzeko indarra nulua da eta, beraz,

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA = 0. \quad (9-9)$$

Ekuazio horretan (9-8)-ko tentsio normalaren espresioa ordeztuko dugu:

$$N_x = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = 0. \quad (9-10)$$

Elastikotasun-modulua eta ardatzaren kurbadura integraletik kanpora atera daitezke, berdinak baitira sekzio bateko puntu guztientzat. Horrela eginez,

$$N_x = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \Rightarrow \int_A y dA = 0 \Rightarrow y_G = 0. \quad (9-11)$$

(9-11) ekuazioko integrala sekzioaren momentu estatikoa da, z ardatzarekiko neurtua. Beraz, momentu estatiko hori nulua denez, z ardatza sekzioaren grabitate-puntutik pasatu behar da. Beste era batera esanda, aukeratu dugun erreferentzia-sistemaren jatorria grabitate-zentroan dago kokatuta. Ondorioz, zuntz neutroa ere grabitate-zentrotik pasatuko da.

Tentsio normalen banaketa nolakoa den ezagutzea lortu dugun arren, halere, (9-8) espresioa ez da nahikoa tentsio normalen balio numerikoa lortzeko. Izan ere, espresio

horretan kurbaduraren balioa ezezaguna da oraindik. Gainera, tentsioak kalkulatzeko orduan, momentu makurtzaileen funtzioan idatzitako espresioen bat erabiltzea komeni da, horixe baita esfortzuen diagrametatik lortuko dugun lehenengo datua. Kurbadura-erradioaren balioa topatzeko, estatikaren beste baldintza hau aplikatuko dugu:

$$M_z = \int_A \sigma_{xx} y dA = M, \quad (9-12)$$

non M delakoa habearen aplikatutako momentua baita. Berrirori ere (9-8) ekuazioa (9-12) adierazpenean ordeztuz, hauxe lortzen da:

$$M_z = \int_A E \frac{y}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M. \quad (9-13)$$

Goiko ekuazioko integrala, sekzioaren inertzia-momentua da, z ardatzarekiko neurtua (I_z). Beraz, (9-13) adierazpenetik kurbaduraren balioa aska dezakegu:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (9-14)$$

Espresio horretako EI_z biderkadurari *makurdura-zurruntasuna* deituko diogu. Horren balioa altua denean, kurbadura txikiagoa da, eta, beraz, deformazioa ere bai. Gainera, sekzio guztien momentua berdina denez, ardatzaren kurbadura ere berdina izango da puntu guztietan; hots, zirkunferentzia-arku bat edukiko dugu.

Kurbaduraren balioa lortu ondoren, azkenik, (9-14) ekuazioa (9-8) espresioan ordeztatuz, *Navier-en legea* deituriko formula honetara iristen gara:

$$\sigma_{xx} = \frac{My}{I_z}. \quad (9-15)$$

Ikusten denez, (9-15) espresioaren arabera, tentsio normala zuntz neutroraino dagoen distantziarekiko eta aplikatutako momentuarekiko proportzionala da, baina inertzia-momentuarekiko alderantziz proportzionala. Ez dezagun ahaztu, frogapen hori pieza deformatuaren geometriaz baliatuz egin dugula, eta Navier-en hipotesian oinarrituta dagoela (sekzioek lauak eta ardatzarekiko elkarzutak izaten jarraitzen dute deformazioaren ondoren, eta ardatza zirkunferentzia-arku bat da). Hurrengo atal batean, garapen analitiko bat erabiliko dugu Navier-en legearen espresio orokorrako bat lortzeko.

Atal hau bukatzeko, azter ditzagun, laburki bada ere, aipatu gabe gelditu diren tentsioaren osagai batzuk. Preseski, 9.3. irudian, habea lauki itxura duten zenbait pusketatant dago zatituta. Irudi horren arabera, laukien aurpegiek elkarzutak izaten jarraitzen dute deformatu eta gero ere. Zeharkako planoan ere gauza bera gertatzen denez, xy eta xz planoetan ez dago deformazio angeluarrik. Beraz, τ_{xy} eta τ_{xz} tentsioak nuluak direla ondoriozta dezakegu. Beste hiru osagaiei dagokienez —hau da, σ_{yy} , σ_{zz} eta τ_{yz} —, badakigu gainazaleko puntuetan zero balio behar dutela, ez baitago zeharkako indarririk habearen gainean. Bestalde, marraztutako deformazioan, ez dago inolako interakzioen beharrik sekzio bateko kubotxoaren artean. Ondorioz, hiru osagai horiek ere nuluak direla suposa dezakegu. Hipotesi

horiek guztiak ardatz zuzeneko pieza prismatikoentzat onargarriak direla froga daiteke elastikotasunaren teoria erabiliz edota saiakuntza esperimentalen bidez, habeak lerdinak direnean eta deformazioak txikiak. Makurdura hutsaren kasuan, beraz, ardatz bakarreko egoera daukagula suposatuko dugu.

9.2.4. Tentsio normal maximoa eta erresistentzia-modulua

Lehenago aipatu dugun bezala, tentsio normal maximoa zuntz neutrotik urrunen da goen zuntzean egongo da, hots, y koordenatu handiena duen zuntzean. Sekzioa z ardatzarekiko simetriakoa denean, goiko eta beheko zuntzen tentsio normalak berdinak izango dira. Beraz, M momentuko sekzio baten tentsio normal maximoa honelaxe kalkula dezakegu:

$$\sigma_{xx}^{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} \quad (9-16)$$

Dena den, beste era honetan berriaz kalkula dezakegu (9-16) ekuazioa:

$$\sigma_{xx}^{\max} = \frac{M}{I_z/y_{\max}} = \frac{M}{W_z} \quad (9-17)$$

non W_z balioa sekzioaren *erresistentzia-modulua* baita. Erresistentzia-modulua sekzioaren geometriaren menpe dago, eta aplikatutako indarrekiko independentea da. Beraz, nahikoa da sekzioaren itxura eta neurriak ezagutzea beraren balioa kalkulatu ahal izateko. Hain zuzen, (9-17) ekuaziotik ondoriozta daitekeenez, erresistentzia-modulua handia denean, tentsio normal maximoaren balioa txikia da, eta sekzioak momentu handiagoak onar ditzake. Tentsio normala erresistentzia-moduluarekiko alderantziz proportzionala denez, habeak ahalik eta modulu handienarekin diseinatzea komeni da.

Adibide gisa, kalkula ditzagun sekzio errektangeluar eta zirkular baten erresistentzia-moduluak. Demagun sekzio errektangeluarraren oina eta altuera b eta h direla, hurrenez hurren. Grabitate-zentrotik pasatzen den z ardatzarekiko sekzioak duen inertzia-momentua honako hau da:

$$I_z = \frac{1}{12}bh^3, \quad (9-18)$$

eta zuntz neutrotik urrunen dauden zuntzen y koordenatua honako hau:

$$y_{\max} = \frac{h}{2}. \quad (9-19)$$

Beraz, sekzio errektangeluarraren erresistentzia-modulua hau da:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6}. \quad (9-20)$$

Kalkula dezagun orain d diametroko sekzio zirkular baten erresistentzia-modulua. Diametroarekiko inertzia-momentuak balio hau du:

$$I_z = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{64} \pi d^4, \quad (9-21)$$

eta y -ren baliorik handienak:

$$y_{\max} = r = \frac{d}{2}. \quad (9-22)$$

Sekzio zirkularren erresistentzia-modulua, beraz, honako hau izango da:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{1}{64} \pi d^4}{\frac{d}{2}} = \frac{1}{32} \pi d^3 = \frac{Ad}{8}. \quad (9-23)$$

Hortaz, (9-20) eta (9-23)-ko balioak konparatuz, hauxe egiazta dezakegu: azalera eta altuera berdineko bi sekzio badauzkagu, bata errektangeluarra eta bestea zirkularra, lehenengoak erresistentzia handiagoa edukiko du makurdurari aurre egiteko orduan. Ikus dezagun orain zein izango den erresistentzia-modulu handiena duen sekzioa. Sekzioa simetrikoa izatea nahi dugula suposatuz, h altuera eta A azalerarekin, y_{\max} -ren balioa hau izango litzateke:

$$y_{\max} = \frac{h}{2}. \quad (9-24)$$

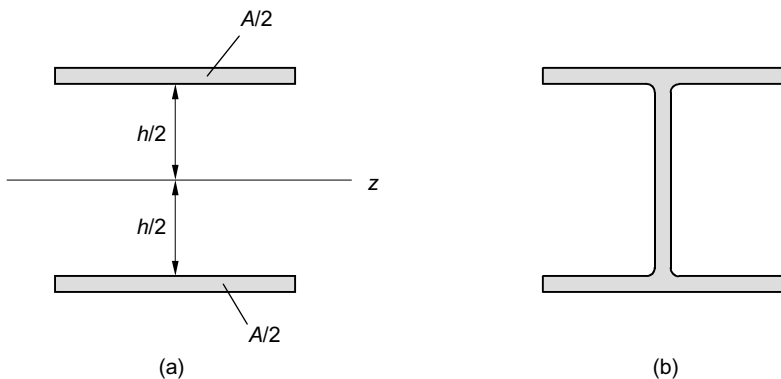
Inertzia-momentu altua lortzeko, materiala ardatz neutrotik ahalik eta urrunen kokatu beharko genuke. Sekzioa simetrikoa denez, azaleraren erdia (hau da, $A/2$) $h/2$ distantziara ipiniko genuke, ardatz neutroaren alde batean, eta beste erdia, beste aldean (ikus 9.6.a. irudia). Sekzio ideal horren inertzia-momentua hauxe izango litzateke:

$$I_z = 2 \frac{A}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Ah^2}{4}, \quad (9-25)$$

eta (9-24)-ko balioaz zatituz gero,

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{A}{4} h^2}{\frac{h}{2}} = \frac{Ah}{2}. \quad (9-26)$$

Ikusten den bezala, sekzio horren erresistentzia-modulua sekzio errektangeluarrena eta sekzio zirkularrena baino askoz handiagoa da. Sekzio ideal horretara asko hurbiltzen diren sekzioak, T bikoitz itxura dutenak dira. Sekzio-mota horiek sarritan erabiltzen dira eraikuntzetan, duten erresistentzia-modulu altua dela-eta. Preseski, 9.6.b. irudian, era hone-tako sekzio bat ageri da.



9.6. irudia.

Sekzio horiek maiz erabiltzen direnez, beren itxura eta neurriak normalizaturik egoten dira. Gainera, sekzio horien propietate geometrikoak eskuragarriak izaten dira, fabrikatzaileak berak prestatu ohi dituen taula batzuen bidez. Taula horietan sekzioen erresistentzia-moduluak datoz, beste propietate askoren artean. Beraz, makurduraren ondorioz agertzen den tentsio normal maximoa kalkulatzeko, nahikoa da tauletan W_c -ren balioa topatzea eta (9-17) ekuazioa erabiltzea.

9.2.5. Zeharkako deformazioak: antiklastika

Luzetarako deformazioez gain, zeharkako norabidean ere deformazioak agertzen dira momentu makurtzaileen eraginpean dauden habeetan. Izan ere, deformatu ondoren sekzioek lauak eta ardatzarekiko elkarzutak izaten jarraitzen dutela onartzea ez da oztopoa zeharkako norabidean deformazioak ager daitezen. Hori guztia oso erraz uler daiteke Poisson-en koefizientearen eragina gogoratzen badugu. Dakigun bezala, ardatzaren norabidean sortzen diren deformazioekin batera, zeharkako deformazioak ere agertzen dira:

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx}, \quad (9-27)$$

eta (9-6) erlazioa ordeztuz,

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{y}{\rho}, \quad \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{y}{\rho}. \quad (9-28)$$

Beraz, luzetarako deformazioez gain, zeharkako sekzioaren planoan ere deformazioak gertatuko dira. Esaterako 9.3. irudiko noranzkoa duen momentu baten eraginpean, badakigu goialdeko zuntzak laburtu egiten direla, eta behealdekoak luzatu. Ondorioz, (9-27) ekuazioko zeinu negatiboaren ondorioz, ardatz neutroaren gainetik dauden zuntzak laburtu egingo dira zeharkako norabidean, eta azpitik daudenak, aldiz, luzatu. Hain zuzen, 9.7. irudian ikusten den bezala, AB aldea luzatu egiten da, eta CD aldea laburtu egiten da. Dakigun bezala, bien artean, grabitate-zentrotik pasatuz, ardatz neutroa edukiko dugu. Norabide bertikalari dagokionez, sekzio errektangeluar baten kasuan, adibidez, goialdean kokatutako elementuen luzapena eta behealdean daudenen laburpena konpentsatu egingo liriteke. Ondorioz, norabide bertikalean ez genuke aldaketarik nabaritutuko.

Esan genuen bezala, makurdura hutsaren kasuan ez dago distortsiorik ($\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) eta hasieran zuzenak ziren angeluek, horrela jarraituko dute. Beraz, luzetarako norabidean gertatzen zen bezala, zeharkakoan ere zirkunferentzia-arkuak agertuko zaizkigu. Hau da, AB arkua eta AC bezalako lerroak elkarzutak izango dira. Zeharkako norabidean agertzen den kurbadura horri *antiklastika* deritzo.

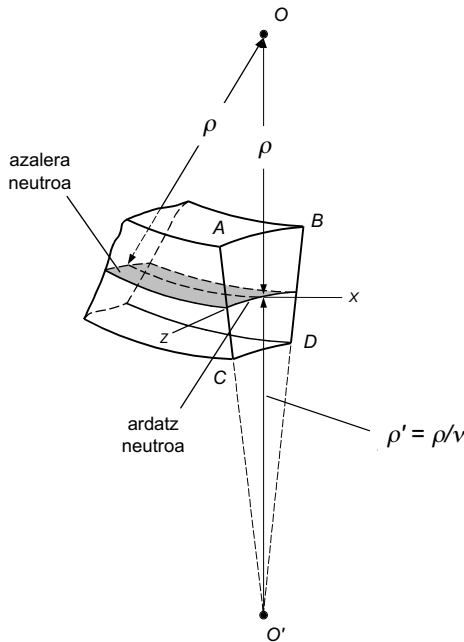
Ikus dezagun orain zein den ardatz neutroaren ρ' kurbadura-erradioa yz zeharkako planoan. Hain zuzen, 9.4. irudiko eraikitza yz planoan marraztuko bagenu, honako erlazio hau lortuko genuke:

$$\epsilon_{xx} = -\frac{y}{\rho'}, \tag{9-29}$$

zeren, kasu honetan, y positiboa duten zuntzak laburtu egiten baitira. Espresio hori (9-28) ekuazioarekin erkatuz, hauxe lotzen da:

$$\rho' = \frac{\rho}{\nu}. \tag{9-30}$$

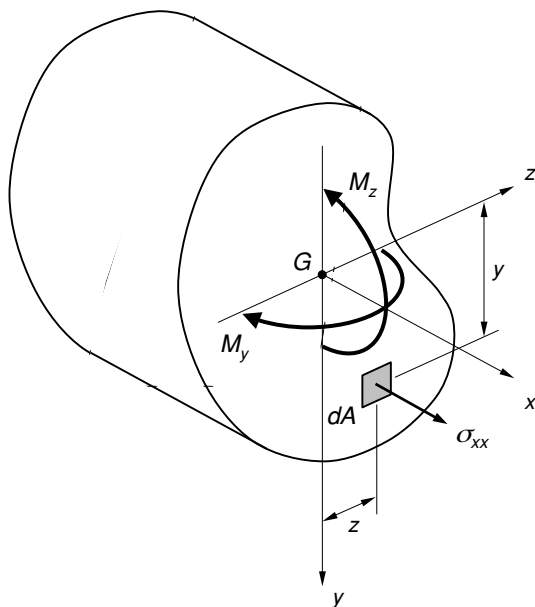
Beraz, zeharkako planoan dagoen kurbadura-erradioa handiagoa denez, kurbadura (hots, $1/\rho'$ balioa) txikiagoa izango da. Preseski, (9-30) ekuazioaren itxurak Poisson-en koefizientea kalkulatzeko era bat iradokitzen digu. Teorikoki bada ere, luzetarako eta zeharkako lerro deformatuen kurbadak neurtuz, posiblea izango litzateke Poisson-en koefizientearen balioa kalkulatzea. Zeharkako deformazio horiek sortzen dituzten desplazamenduak arbuia egiten dira gehienetan, habearen neurriak askoz handiagoak izaten baitira ardatzaren norabidean. Gainera, ikusi dugun bezala kurbadura txikiagoa da yz planoan, eta baita deformazioak ere, zeren Poisson-en koefizienteak $\nu < 1/2$ erlazioa betetzen baitu.



9.7. irudia.

9.2.6. Navier-en legearen espresio orokorra

Atal honetan, arestian lortutako Navier-en legea orokortuko dugu. Izan bedi edozein geometria duen sekzio bat, M_y eta M_z momentuen eraginpean dagoena (ikus 9.8. irudia). Sekzio horrek ez du inolako simetriarik, eta aukeratutako y eta z ardatzak ere arbitrarioak dira.



9.8. irudia.

Lehen bezala, oraingoan ere Navier-en hipotesiaz baliatuko gara. Hipotesi horren arabera, sekzioek deformatu eta gero lauak izaten jarraitzen dute. Beraz, desplazatu ondoren sekzioko puntu guztiak plano batean egongo dira kokaturik. Ondorioz, puntuen desplazamendu normalak, hots, desplazamenduaren u osagaiak, plano baten ekuazioa bete beharko du:

$$u = a + by + cz, \quad (9-31)$$

non a , b eta c konstanteak x -ren funtzioak baitira. Zuntz desberdinen ϵ_{xx} deformazio unitarioa kalkulatzeko, nahikoa da desplazamenduen eta deformazio unitarioen arteko erlazioak aplikatzea:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (9-32)$$

eta (9-31) ekuazioa ordeztuz,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} y + \frac{\partial c}{\partial x} z = a_1 + b_1 y + c_1 z, \quad (9-33)$$

non

$$a_1 = \frac{\partial a}{\partial x}, \quad b_1 = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad c_1 = \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (9-34)$$

Pieza prismatikoaren ardatza zuzena denez, zuntz guztien hasierako luzera berdina da. Hori dela-eta, ε_{xx} deformazio unitarioak ere plano baten ekuazioa betetzen du. Bestalde, makurdura hutsean tentsio-egoera ardatz bakarrekoa denez, deformazio unitarioa eta elastikotasun-modulua elkarrekin biderkatuz tentsio normalak lor ditzakegu:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E(a_1 + b_1y + c_1z). \quad (9-35)$$

Jarraian, (9-35) ekuazioko tentsio normala (9-1) oreka-ekuazioetan ordeztuko dugu, honelaxe:

$$N_x = 0 = \int_A \sigma_{xx} dA = \int_A E(a_1 + b_1y + c_1z) dA = Ea_1 \int_A dA + Eb_1 \int_A y dA + Ec_1 \int_A z dA, \quad (9-36)$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dA = \int_A E(a_1 + b_1y + c_1z) z dA = Ea_1 \int_A z dA + Eb_1 \int_A yz dA + Ec_1 \int_A z^2 dA, \quad (9-37)$$

$$M_z = \int_A \sigma_{xx} y dA = \int_A E(a_1 + b_1y + c_1z) y dA = Ea_1 \int_A y dA + Eb_1 \int_A y^2 dA + Ec_1 \int_A yz dA. \quad (9-38)$$

Ardatzak sekzioaren grabitate-zentrotik pasatzen direnez, momentu estatikoak nuluak dira:

$$\begin{aligned} \int_A y dA &= 0, \\ \int_A z dA &= 0, \end{aligned} \quad (9-39)$$

eta sekzioen beste propietate geometriko hauek gogoratzuz,

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA, \\ I_y &= \int_A z^2 dA, \\ I_{yz} &= \int_A yz dA, \end{aligned} \quad (9-40)$$

honako ekuazio-sistema hau lortuko genuke:

$$\begin{aligned} 0 &= Ea_1 A, \\ M_y &= Eb_1 I_{yz} + Ec_1 I_{yz}, \\ M_z &= Eb_1 I_z + Ec_1 I_{yz}, \end{aligned} \quad (9-41)$$

non A delakoa sekzioaren azalera den, I_{yz} delakoa inertzia-biderkadura, eta I_y eta I_z direlakoak sekzioaren inertzia-momentuak y eta z ardatzekiko, hurrenez hurren. Honelatan, bada, (9-41) ekuazioetatik hiru konstanteen balioak lor ditzakegu:

$$\begin{aligned} Ea_1 &= 0, \\ Eb_1 &= \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \\ Ec_1 &= \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}. \end{aligned} \quad (9-42)$$

Azkenik, a_1 , b_1 eta c_1 konstanteak (9-35) ekuazioan ordeztuz, tentsio normalak kalkulatzeko espresio orokorra lortuko genuke:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z. \quad (9-43)$$

Espresio horretan, momentuek 9.8. irudiko noranzkoa badute, positiboak dira, eta aurkakoa badute, negatiboak. Ikusten den bezala, koordenatu positiboa duten puntuetan trakziozko tentsioak sortzen dituzten momentuak aukeratu ditugu positibotzat. Horrela, (9-43) ekuazioko espresioa asko sinplifikatzen da baldintza batzuk betetzen direnean, sarritan gertatzen den bezala. Adibidez, y eta z ardatzak inertzia-ardatz nagusiak badira, I_{yz} inertzia-biderkadura nulua da, eta ondoko espresio laburtu hau lortzen da:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (9-44)$$

Horrez gain, aplikatutako momentu makurtzailea inertzia-plano nagusi batean egongo balitz, hots, M_y momentua nulua balitz, (9-15) ekuazioko espresio ezaguna lortuko genuke:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (9-45)$$

Beraz, lehenago lortu genuen (9-15) espresioko Navier-en legea, momentua plano nagusi batean aplikatuta dagoenean erabil daiteke, eta ez da mugatzen momentua sekzioaren simetria-plano batean aplikatuta dagoen kasuetara bakarrik. Izan ere, Navier-en legea frogatzeko erabili genuen hasierako hipotesia —hots, indarrak sekzioaren simetria-plano batean aplikatuta egon behar zirela—, (9-44) espresioko kasu berezi bat baino ez da, simetria-planoak inertzia-plano nagusiak direlako beti. Inertzia-plano nagusi horiei *makurdura-plano nagusi* ere deitzen zaie.

9.3. MAKURDURA BAKUNA

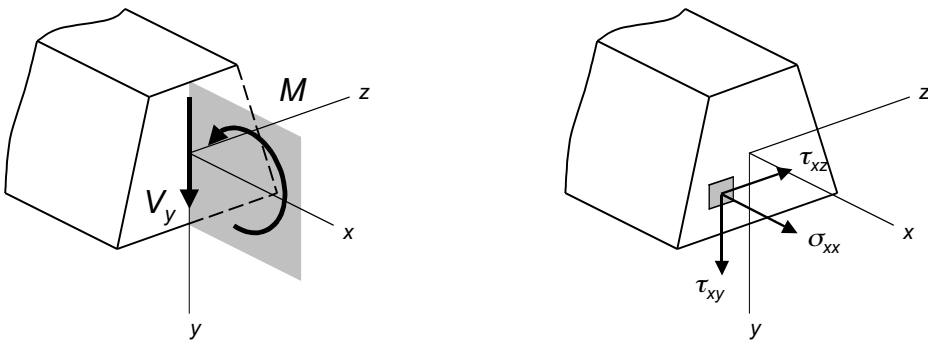
9.3.1. Zeharka zamatutako habeak

Atal honetan makurdura bakunaren kasua aztertuko dugu. Gaiaren sarreran aurreratu genuen bezala, tentsio normalez gain tentsio ebakitzzaileak ere existitzen direnean, sekzioko

egoerari makurdura bakuna deritzo. Preseski, zeharka aplikatutako indarren eraginpean dauden habeetan agertzen da egoera hori. Indar horiek ardatzarekiko elkarzutak direnean, N_x indar normala nulua da, eta M_z momentu makurtzailea eta V_y indar ebakitzzailea bakarrik edukiko ditugu sekzioan. Beti bezala, sekzioko puntuetan agertzen den tentsio-egoera aplikatutako esfortzuekiko baliokidea izan beharko da, estatikaren legeak bete daitezten. Ikusi dugun bezala, momentu makurtzailearen ondorioz, tentsio normalak agertzen dira. Indar ebakitzzailearen ondorioz, berriz, tentsio ebakitzzaileak agertuko zaizkigu, zazpigarren gaian lortutako oreka-ekuazio hauetatik ondoriozta daitekeen bezala:

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA,$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA.$$
(9-46)



9.9. irudia.

Tentsio ebakitzzaile horien ondorioz, distortsio bat agertzen da habearen puntuetan, eta sekzioak kopatu egiten dira. Beraz, sekzioek lauak izateari uzten diote deformatu eta gero. Hori dela-eta, Navier-en hipotesia ez da betetzen makurdura bakunaren kasuan. Halere, deformazio horiek eragin txikia dute tentsio normalen kalkuluan, eta makurdura bakunaren kasuan ere (9-43) ekuazioko Navier-en legea erabiltzen jarrai dezakegula onartuko dugu. Atal honetan tentsio ebakitzzaileak nola kalkulatu diren ikusi ondoren, puntu bateko tentsio-egoera gainezarpen-printzipioa erabiliz kalkula daiteke, hots, makurdurak eta ebakidurak bakoitzak bere aldetik sortutako tentsioak batuz.

Tentsio ebakitzzaileak kalkulatzeko balioko digun espresio bat lortzeko, abiapuntu modura indar ebakitzzaile bakar bat aplikatzen dela suposatuko dugu, esate baterako, V_y indar ebakitzzailea. Horrez gain, oraingoz, sekzio beta eta simetrikoa duten sekzioetara mugatuko gara. Horma meheko habeen analisia aurkezten dugunean, tentsio ebakitzzaileen kalkuluan gehiago sakontzeko aukera izango dugu.

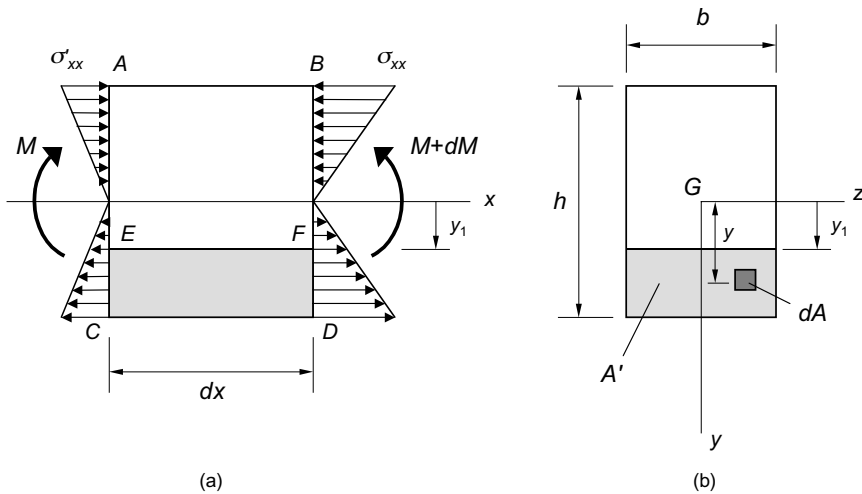
9.3.2. Tentsio ebakitzzaileen kalkulua: Colignon-en formula

Goian aurreratu dugun bezala, kalkulua errazteko, sekzioan V_y indar ebakitzzailea bakarrik aplikatzen dela suposatuko dugu (ikus 9.9. irudia). Indar ebakitzzaile horren

ez da konstantea eta sekzio batetik bestera aldatuz doa. Beraz, ezkerreko aurpegiko momentua M bada, eskuinekoa $M + dM$ dela suposatuko dugu, zeren, sekzioen arteko distantzia txikia izanik, momentu makurtzailearen aldaketa ere txikia izango baita. Momentu makurtzailearen balioak desberdinak direnez, tentsio normalak ere aldatu egingo dira sekzio batetik bestera, 9.11.a. irudian ikus daitekeen bezala. Ezkerreko eta eskuineko sekzioen tentsio normalei σ'_{xx} eta σ_{xx} deituko diegu, hurrenez hurren.

Demagun orain habe-zati hori plano horizontal baten bidez ebakitzen dugula eta azpitik dagoen zatia isolatzen dugula, 9.12.a. irudian agertzen den bezala. Horren helburua ardatz neutrotik y_1 distantziara dagoen lerro bateko tentsio ebakitzailak kalkulatzeko da. Sekzio guztian dauden tentsio normalen indar baliokidea nulua den arren, isolatutako zatian eragiten duten tentsio normalak ez dira anulatzen, eta erresultante horizontal bat ematen dute. Ezkerreko sekzioan tentsio normalek ematen duten erresultanteari N' deituko diegu, eta eskuinaldekoari N . Isolatutako elementuaren oreka horizontala aztertuz, indarren desoreka bat dagoela ikus daiteke, N eta N' desberdinak baitira. Beharrezkoa da, beraz, beste indar horizontal bat agertzea oreka berrezartzeko. Indar hori isolatutako elementuaren goiko aurpegian egon daiteke soilik, hots, habearen barneko luzetarako plano batean. Indar horri *urradura-indarra* deritzo eta H hizkia izendatuko dugu. Indar hori 9.12.a. irudian agertzen da marraztuta. Ardatzaren norabidean indarren oreka adieraziz:

$$H + N' = N. \tag{9-48}$$



9.11. irudia.

Kalkula ditzagun orain N eta N' indarren balioak. Horretarako, nahikoa da tentsio normala dA azalera-elementu infinitesimalaz biderkatzea eta isolatutako elementuaren zeharkako sekzioan integratzea (ikus 9.11.b. irudia). Sekzio horri A' deituz gero, indarrak honelaxe lortuko liriateke:

$$N = \int_{A'} \sigma_{xx} dA, \tag{9-49}$$

$$N' = \int_{A'} \sigma'_{xx} dA.$$

Tentsio normala (9-15) ekuazioko Navier-en legearen bidez kalkulatu:

$$N = \int_{A'} \sigma_{xx} dA = \int_{A'} \frac{(M + dM)y}{I_z} dA = \frac{(M + dM)}{I_z} \int_{A'} y dA = \frac{(M + dM)}{I_z} Q_z,$$

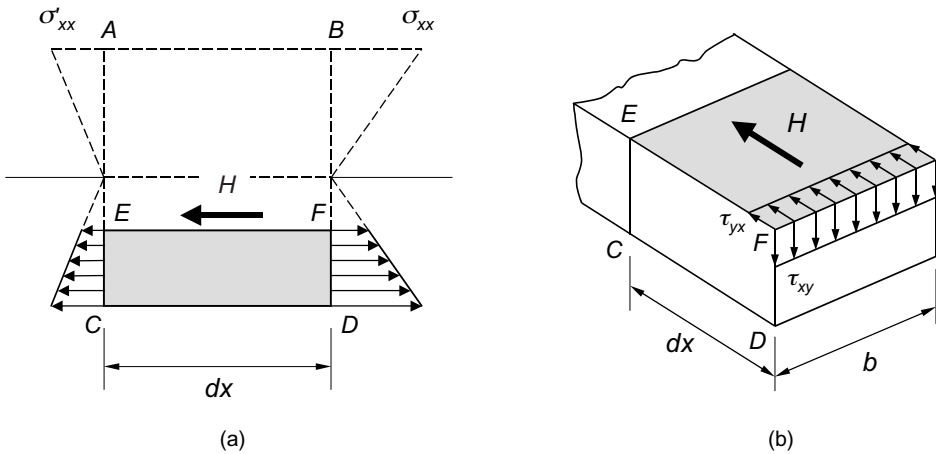
$$N' = \int_{A'} \sigma'_{xx} dA = \int_{A'} \frac{My}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} \int_{A'} y dA = \frac{M}{I_z} Q_z,$$
(9-50)

non Q_z delakoa A' azaleraren momentu estatikoa den, ardatz neutroarekiko neurtua. Hortaz, (9-50) espresioak (9-48) oreka-ekuazioan ordeztzen baditugu:

$$H = N - N' = \frac{(M + dM)}{I_z} Q_z - \frac{M}{I_z} Q_z = \frac{dM}{I_z} Q_z.$$
(9-51)

H indarra luzetarako plano horizontalean uniformeki banatzen dela suposa dezakegu, sekzioen arteko distantzia txikia delako. Beraz, azalera horretan τ_{xy} konstantea dela suposatuz, H indarra honelaxe idatz daiteke:

$$H = \tau_{xy} b dx,$$
(9-52)



9.12. irudia.

non b luzera sekzioaren zabalera den (ikus 9.12.b. irudia). Beraz, (9-51) eta (9-52) espresioak berdinduz:

$$\frac{dM}{I_z} Q_z = \tau_{xy} b dx \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{(dM/dx) Q_z}{b I_z}.$$
(9-53)

Azkenik, momentu makurtzailea eta indar ebakitzzailea erlazionatzen dituen (7-8) oreka-ekuazio diferentziala aplikatuz:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{b I_z}.$$
(9-54)

Hain zuzen, (9-54) ekuazioak luzetarako planoan dauden tentsio ebakitzaileen balioa ematen digu, hau da, 9.12.b. irudian τ_{yx} deitu ditugunena. Ez da hori, halere, guri interesatzen zitzaikeen tentsioa, zeharkako sekzioan dagoen τ_{xy} osagaia baizik. Baina dakigun bezala, tentsio ebakitzaileen elkarrekikotasuna dela-eta, bi osagai horiek berdinak dira. Beraz, zuzenean τ_{xy} tentsioa kalkulatu beharrean, H urradura-indarrak sortzen duena kalkulatu dugu, zeharka bada ere gure helburua lortzeko balio duelako. Tentsio ebakitzaileen kalkulurako erabiltzen den formula horri *Colignon-en formula* deritzo (Zhurawski-ren formula izenez ere ezagutzen da). Espresio horren bidez, τ_{xy} tentsioaren balioa lor dezakegu sekzio-ko edozein lerrotan, lerro horren azpitik edo gainetik gelditzen den gainazal-zatiaren Q_z momentua ordezkatuz.

Formula orokorra lortu ondoren, adibide gisa, kalkula dezagun nola aldatzen diren tentsio ebakitzaileak 9.10. irudiko sekzio errektangeluarrean. Horretarako, ardatz neutrotik y_1 distantziara dauden tentsio ebakitzaileak kalkulatu ditugu. Hain zuzen, 9.11.b. irudian marraztutako A' gainazaleko momentu estatikoa ondokoa da:

$$Q_z = \int_{A'} y dA = \int_{y_1}^{h/2} y b dy = \frac{y^2}{2} b \Big|_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (9-55)$$

Sekzio errektangeluarraren I_z inertzia-momentuaren balioa hauxe da:

$$I_z = \frac{1}{12} b h^3. \quad (9-56)$$

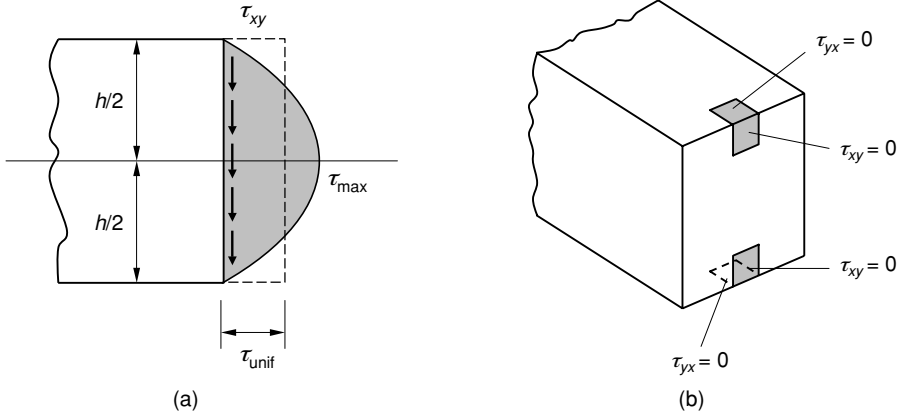
Azkenik, (9-55) eta (9-56) ekuazioak (9-54) formularen ordezkatuz eta terminoak berrantolatuz, honako hau lortuko genuke:

$$\tau_{xy} = \frac{3V_y}{2bh} \left[1 - \left(\frac{y_1}{h/2} \right)^2 \right]. \quad (9-57)$$

Beraz, tentsio ebakitzaileak parabola baten arabera banatzen dira sekzioan zehar (ikus 9.13.a. irudia). Ikusten den bezala, balio maximoa ardatz neutroari dagokio, hau da, $y_1 = 0$ koordenatuari. Balio hori goiko espresioaren ordezkatuz, tentsio ebakitzaile maximoa lor dezakegu:

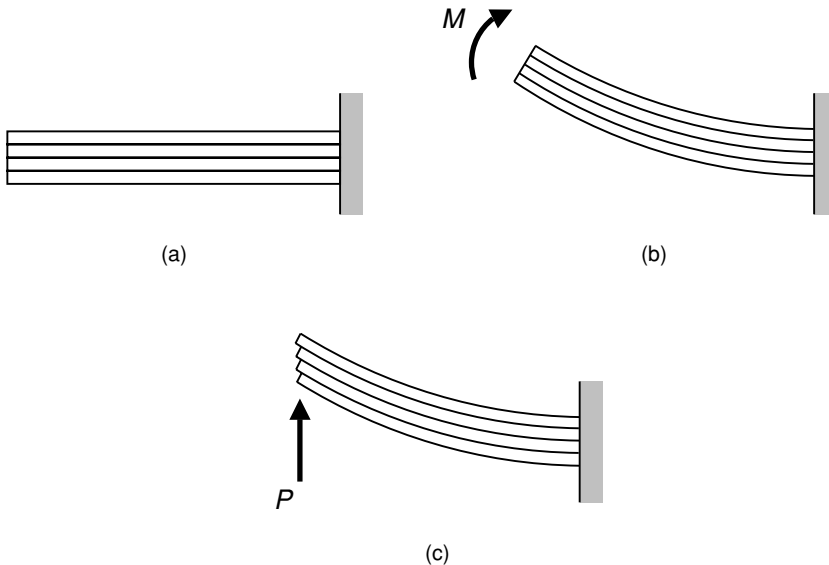
$$\tau_{xy} = \frac{3V_y}{2bh}. \quad (9-58)$$

Balio hori tentsioak uniformeki banatuta baleude lortuko genukeena baino 1,5 aldiz handiagoa da. Balio minimoak, aldiz, $y_1 = -h/2$ edo $y_1 = h/2$ direnean gertatzen dira, hots, goiko eta beheko zuntzetan, non zero balio baitute. Bestetik, 9.13.b. irudiaren laguntzaz, erraz ondoriozta daiteke balio horiek nuluak izan behar dutela. Izan ere, badakigu gaineko eta azpiko aurpegiatan tentsioek zero balio dutela, agerian dauden aldeak baitira. Ondorioz, elkarrekikotasun-teoreman oinarrituz, irudiko elementuen lau aldeetan ez da tentsio ebakitzailearik egongo.



9.13. irudia.

Aurreko orrialdean planteaturiko galdera bukatzeko, aipa ditzagun makurdura bakanen agertzen diren deformazioaren zenbait berezitasun. Ikusi dugun bezala, segidan dauden bi sekzioren momentu makurtzaileak ez dira berdinak, eta, ondorioz, tentsio normalen desoreka bat agertzen da. Desoreka horren ondorioz, urradura-indarrak sortzen dira habearen luzetarako planoetan. Makurdura hutsaren kasuan ez da horrelakorik gertatzen, zeren, ebakitzaila nulua izanik, sekzio guztietako momentu makurtzaileak berdinak baitira. Urradura-indar horren eragina ulertzeko, demagun 9.14.a. irudian agertzen den habe. Habe hori eskuinean landatuta dauden xafla desberdinez osatzen da. Xafla horien arteko desplazamendu erlatiboak urradura-indarraren izaera ulertzen lagunduko digu.

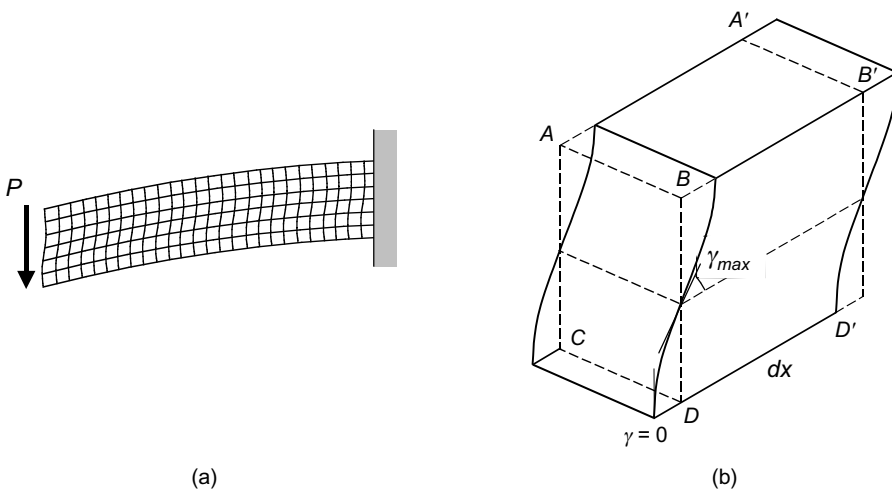


9.14. irudia.

Hain zuzen, 9.14.b. irudian, habea M momentu makurtzailearen eraginpean dago. Beraz, kasu horretan makurdura hutsa edukiko genuke, eta ez dago xafla desberdinen artean inolako desplazamendu erlatiborik. Ikusten den bezala, sekzioek lauak eta ardatzarekiko elkarzutak izaten jarraituko lukete, eta xafla deformatuak zirkunferentzia-arquak izango lirarteke. Bestetik, 9.14.c. irudian, aldiz, momentu bat aplikatu beharrean, indar bertikal bat aplikatu dugu habearen muturrean. Kasu horretan, sekzioetan agertuko den egoera makurdura bakuna da. Oraintxe ikusi dugun bezala, makurdura bakunean indar ebakitzaille bat agertzen da, momentu makurtzailea aldakor bihurtzen duena. Irudian ageri den bezala, makurdura-mota horretan xaflen arteko labainketa bat gertatzen da. Erraz uler daiteke, beraz, habearen luzetarako planoetan indar bat agertuko dela, urradura-indarra deitu duguna, hain justu.

Xaflak beren artean erantsiko bagenitu, labainketa oztopatuko lukeen indar bat agertuko litzatekeela ikus daiteke. Habea xafla desberdinen bidez osatuta egon beharrean material bakar batekin eginda balego, labainketa hori ez litzateke hain nabaria izango, baina labainketarako joera ez litzateke desagertuko. Ondorioz, zeharkako sekzioek lauak izateari utziko liokete, 9.15.a. irudian adierazten den bezala. Sekzioak kopatu egin direla esaten da orduan. Preseski, 9.15.b. irudia aztertuz, sekzioen distorsio horren errudunak tentsio ebakitzailleak direla ikus daiteke. Dakigun bezala, tentsio ebakitzailleek deformazio angeluarrak sortzen dituzte. Tentsio horiek konstanteak ez direnez, deformazio angeluarrak ere aldatuz doaz sekzioaren ertzerantz joan ahala. Goiko eta beheko zuntzetan τ_{xy} -ren balioa nulua denez, elementu horiek ez dute deformazio angeluarrik jasaten, 9.15.b. irudian ikus daitezkeen bezala. Tentsio ebakitzaille maximoa zuntz neutroan dagoenez, deformazio angeluar handiena ere puntu horietan egongo da.

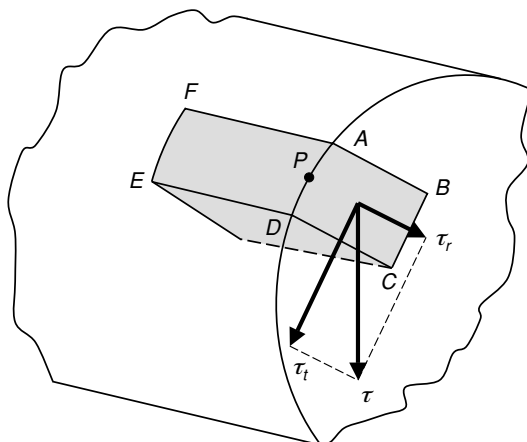
Deformazio angeluar horien ondorioz, hasieran lauak ziren sekzioak okertu egiten dira. Sekzioen kopadurak badu eraginik tentsio normalen balioan, noski. Halere, tentsio normalak kalkulatzeko makurdura hutsean lortutako Navier-en legea erabiliz gero, oker oso txikia egiten dela frogatu daiteke. Gainera, habearen lerdentasuna handiagoa den heinean, akatsaren balioa ere txikiagoa da.



9.15. irudia.

9.3.3. Tentsio ebakitzailak sekzio zirkularreko habeetan

Sekzio zirkularreko habeetako tentsio ebakitzailen kalkulua nahiko berezia dela esan dezakegu. Izan ere, kasu horretan ezin daiteke onar tentsioak indar ebakitzailaren paraleloak izango direnik. Hori frogatzeko, azter dezagun sekzioaren gainazaleko puntu baten tentsio-egoera. Preseski, 9.16. irudian, P puntuko tentsio ebakitzailaren norabidea bertikala dela suposatu dugu, sekzio errektangeluarrarekin egin genuen bezala. Tentsio hori bi norabidetan deskonposa dezakegu: erradioaren norabidean (τ_r) eta horrekiko norabide elkarzutean (τ_t). Tentsio ebakitzailen elkarrekotasun-teoremaren arabera, τ_r tentsioari laguntzen, balio bereko beste tentsio ebakitzail bat agertu beharko litzateke habearen gainazalean. Halere, ezaguna da gainazal horretan tentsio ebakitzailerik ez dagoela, agerian dagoen gainazala delako. Beraz, τ_r osagaiak ere nulua izan behar du. Hortik hauxe ondoriozta dezakegu: sekzio zirkularren gainazaleko puntuetan, tentsio ebakitzailak ukitzailaren norabidea eduki behar du.

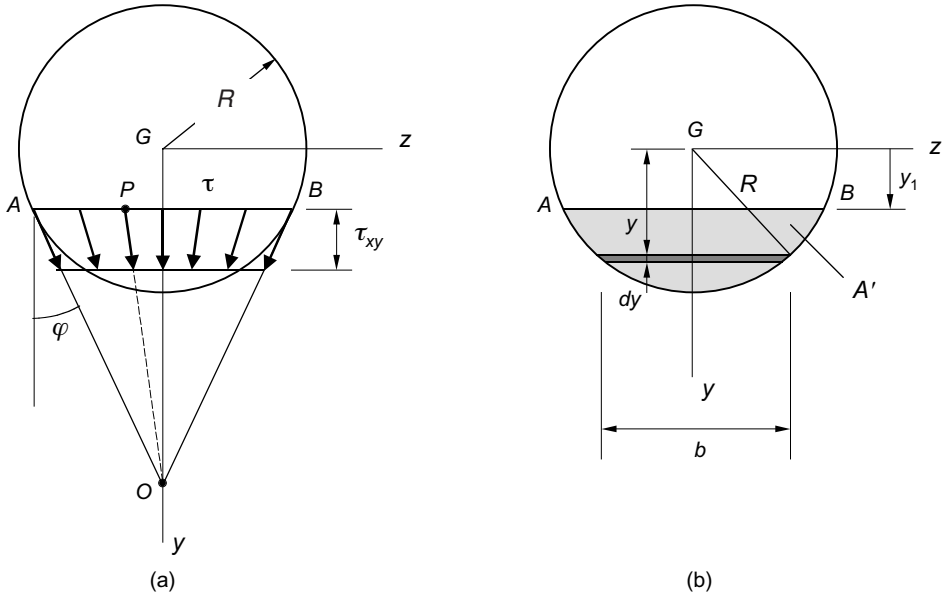


9.16. irudia.

Horrez gain, sekzio zirkularrak badu beste berezitasun bat. Tentsio ebakitzailaren norabidea bertikala denean, y ardatzak zirkunferentzia ebakitzen duen puntuetan, tentsio ebakitzaila nulua izan behar da. Puntu horietan, sekzioaren eta indarren simetria dela-eta, tentsio ebakitzailak norabide bertikala eduki beharko luke, baina norabide hori erradioarena izango litzateke, eta oraintxe frogatu dugun bezala, osagai hori ezin existi daiteke. Beraz, aukera bakarra tentsioa nulua izatea da.

Demagun ardatz neutroarekiko paraleloa den AB lerroko P puntuaren tentsio ebakitzaila aztertu nahi dugula (ikus 9.17.a. irudia). Tentsio horren kalkulurako honako hipotesi hauek onartuko ditugu:

Tentsioaren norabidea lortzeko, P puntua O puntuarekin lotuko dugu, non O delakoa A eta B muturretatik marraztutako ukitzailen ebaki-puntua baita.



9.17. irudia.

Tentsio ebakitzaileen osagai bertikalak —hots, τ_{xy} osagaiak— konstanteak dira AB lerroan zehar, eta Colignon-en formularen bidez lor daitezke. Osagai horiek lortu eta gero, tentsio ebakitzailearen modulua kalkulatzeko, ondoko erlazioa erabiliko genuke:

$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{\cos\varphi}, \tag{9-59}$$

non φ delakoa PO zuzenak eta y ardatzak osatzen duten angelua baita.

Beraz, lehendabizi tentsioaren τ_{xy} osagai ebakitzailea kalkulatu dugu. Hain justu, 9.17.b. irudian marraztutako A' azaleraren momentu estatikoa hauxe izango litzateke:

$$Q_z = \int_{A'} y dA = \int_{y_1}^R 2y\sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{2}{3}(R^2 - y_1^2)^{3/2}. \tag{9-60}$$

Tentsioa kalkulatzeko ari garen puntuan, sekzioaren b zabalerak hauxe balio du:

$$b = 2\sqrt{R^2 - y_1^2}. \tag{9-61}$$

Hortaz, Q_z momentu estatikoaren eta b zabaleraren balioak (9-54) espresioan ordeztuz:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y \frac{2}{3}(R^2 - y_1^2)^{3/2}}{2\sqrt{R^2 - y_1^2} I_z} = \frac{V_y (R^2 - y_1^2)}{3I_z}. \tag{9-62}$$

Ondorioz, sekzioko edozein punturen tentsio ebakitzaille totala hauxe izango da:

$$\tau = \frac{V_y(R^2 - y_1^2)}{3I_z \cos \varphi}. \quad (9-63)$$

AB lerroko puntu guztien artean, tentsio ebakitzaille handiena muturreko puntuetan agertuko da, hau da, A eta B puntuetan, φ angeluaren balio maximoa dutelako. Puntu horietan angeluaren kosinuak balio hau du:

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{R^2 - y_1^2}}{R}, \quad (9-64)$$

eta (9-63) espresioan ordeztuz:

$$\tau_A = \tau_B = \frac{V_y R \sqrt{R^2 - y_1^2}}{3I_z}. \quad (9-65)$$

Lerro horretako tentsio minimoa erdiko puntuan egongo da, noski, non τ tentsio totala eta τ_{xy} osagai bertikala berdinak diren. Bestalde, (9-65) ekuazioaren bidez, sekzio zirkularraren edozein altueratan kokatutako tentsio ebakitzaille handienak topa ditzakegu, y_1 koordenatuaren funtzioan. Tentsio hauetatik guztietatik, $y_1 = 0$ duten puntuetan agertuko da maximo absolutua, hau da, ardatz neutroko puntuetan. Puntu horietan, gainera, tentsio ebakitzailleak norabide bertikala du. Hortaz, (9-65) espresioan $y_1 = 0$ eginez, hauxe lortzen da:

$$\tau_{\max} = \frac{V_y R^2}{3I_z}. \quad (9-66)$$

Sekzio zirkularraren inertzia-momentua edozein diametrorekiko hauxe da:

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (9-67)$$

Balio hau τ_{\max} -ren ekuazioa eramanez gero, tentsio ebakitzaille maximoaren balioa kalkulatu dugu:

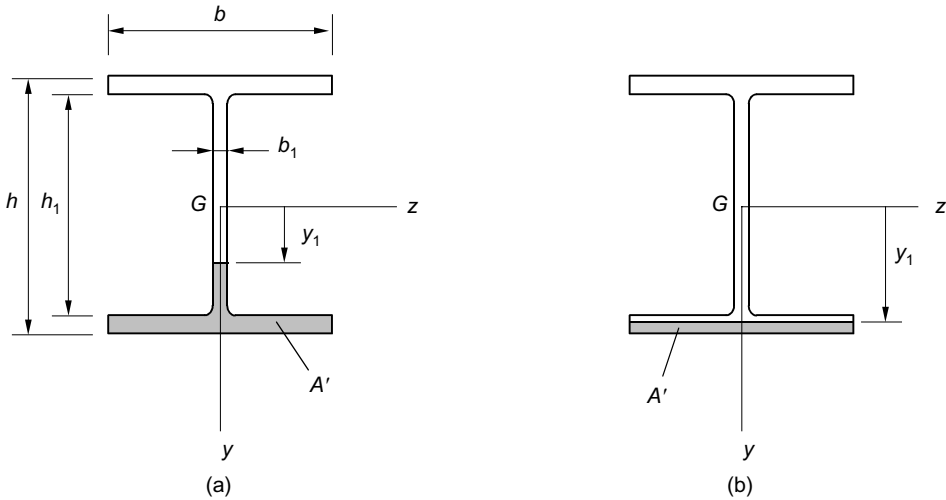
$$\tau_{\max} = \frac{V_y R^2}{3I_z} = \frac{4V_y}{3\pi R^2} \approx 1,33 \frac{V_y}{\pi R^2}. \quad (9-68)$$

Beraz, (9-68) ekuazioaren arabera, sekzio zirkularreko tentsio ebakitzaille maximoa banaketa uniforme suposatuz gero lortzen dena baino 1,33 aldiz handiagoa da. Balio minimoa, aldiz, zero da, eta $y_1 = \pm R$ koordenatuko puntuetan agertuko da, lehenago aurreratu dugun bezala.

9.3.4. T bikoitz itxurako sekzioen tentsio ebakitzailleak

Aurreko atal batean azaldu den bezala, T bikoitz itxura duten sekzioak sarritan erabiltzen dira. Duten garrantziagatik, sekzio horietan tentsio ebakitzaillearen banaketa nolakoa den aztertuko dugu segidan. Izan bedi, adibide gisa, h altuera duen 9.18. irudiko sekzioa.

Hegalen lodiera b da, eta arimarena b_1 . Sekzio errektangeluarraren kasuan bezala, hemen ere honako hipotesi hauek erabiliko dira: puntu guztietako tentsio ebakitzailea eta V_y indarra elkarren paraleloak direla suposatuko dugu, eta tentsioak konstante mantentzen direla z norabidean.



9.18. irudia.

Sekzioaren arimako eta hegaletako lodierak desberdinak direnez, τ_{xy} -ren kalkulua bi aldiz egin beharko dugu. Ariman dagoen puntu batentzat, Q_z momentu estatikoaren balioa honako hau izango da (ikus 9.18.a. irudia):

$$Q_z = \int_{A'} y dA = \int_{y_1}^{h_1/2} b_1 y dy + \int_{h_1/2}^{h/2} b y dy = \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) + \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right). \quad (9-69)$$

Tentsio ebakitzailearen espresioan ordeztuz:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{b I_z} = \frac{V_y}{b I_z} \left[\frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) + \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) \right]. \quad (9-70)$$

Beraz, arimako tentsio ebakitzaileen banaketa parabolikoa da. Balio maximoa $y_1 = 0$ koordenatuko puntuetan egongo da, eta minimoa $y_1 = \pm h_1/2$ koordenatuko puntuetan. Hegaletako puntuetan, berriz, momentu estatikoak beste balio hau edukiko du (ikus 9.18.b. irudia):

$$Q_z = \int_{A'} y dA = \int_{y_1}^{h/2} b y dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right); \quad (9-71)$$

beraz,

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{b I_z} = \frac{V_y}{2 I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (9-72)$$

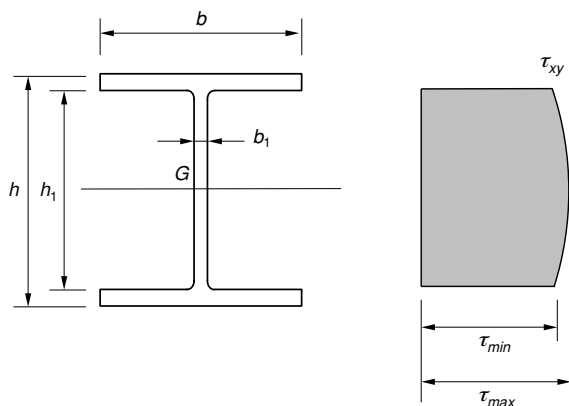
Arimako banaketa ere parabolikoa da, tentsioa nulua izanik $y_1 = \pm h/2$ denean, eta maximoa $y_1 = \pm h_1/2$ denean. Ondoko taulan muturreko balio hauek laburbildu dira:

	Minimoa	Maximoa
Hegalak	$\tau_{xy} = 0$	$\tau_{xy} = \frac{V_y}{8I_z} (h^2 - h_1^2)$
Arima	$\tau_{xy} = \frac{V_y}{8I_z} \frac{b}{b_1} (h^2 - h_1^2)$	$\tau_{xy} = \frac{V_y}{8I_z} \left[\frac{b}{b_1} (h^2 - h_1^2) + h_1^2 \right]$

9.1. taula.

Aurreko 9.1. taulan ikusten den bezala, hegaletatik arimara igarotzean tentsio ebakitzailen jauzi bat gertatzen da. Bi balioen arteko erlazioa b/b_1 da, arimaren eta hegalaren lodieren arteko erlazioa, hain zuzen. Hegaletako tentsio ebakitzailen balioa txikia da arimako tentsioekin konparatuz gero. Ondorioz, $b_1 \ll b$ denean, maiz gertatzen den bezala, indar ebakitzaila guztiari arimak eusten diola onar daiteke, eta hegaletako tentsioak arbuia egin daitezke. Gainera, arimako balio minimoaren eta maximoaren artean dagoen aldea txikia da, eta tentsio ebakitzaila uniformeki banatzen dela suposatuko dugu. Beraz, T bikoitz itxura duten sekzioen arimako tentsio ebakitzailak kalkulatzeko, nahikoa da zatiketa hau egitea:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y}{b_1 h_1} \quad (9-73)$$



9.19. irudia.

Hain zuzen, 9.19. irudian tentsio ebakitzailen adierazpen grafikoa ageri da, hegaletako tentsioak mespretxatu ondoren. Preseski, (9-73) ekuazioa sekzio hauetako tentsio ebakitzaila maximoa kalkulatzeko hurbilketa egokia da. Dena den, hegaletako tentsio-banaketa mespretxatuko ez bagenu eta nolakoa den sakonkiago aztertuko bagenu, lehen egindako hipotesietako batzuk onartezinak izango lirartekeela ikusiko genuke. Izan ere, hegaletako puntuetan ezinezkoa da tentsio ebakitzaila bertikala izatea, horretarako hegalaren

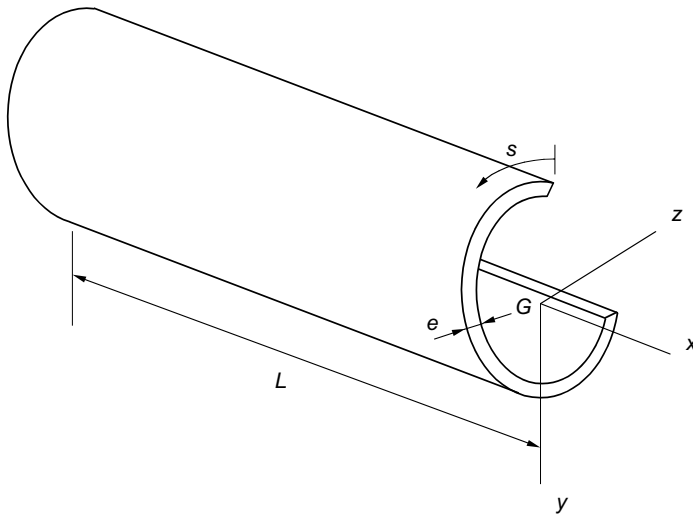
azpialdeko aurpegian ere tentsio ebakitzailea egon beharko litzatekeelako. Horrez gain, hegaletan kontuan hartu ez dugun τ_{xz} osagaia ere existitzen da, segidan frogatuko dugun bezala. Hori guztia datorren azpiatalean azalduko dugu argiago, horma meheko sekzioen ebakidura aurkezten dugunean.

Sekzio beteen kasuan (errektangeluarra edo zirkularra, adibidez), sekzioko punturik arriskutsuena kalkulatzeko orduan, nahikoa izaten da tentsio normal handiena duten puntuak aukeratzea, tentsio ebakitzaileen balioa askoz txikiagoa izaten baita. Halere, horma meheko sekzioen kasuan —adibidez, T bikoitz itxura duten sekzioetan—, arimako tentsio ebakitzailea tentsio normal maximoaren parekoa izan daiteke. Ondorioz, kasu horietan komenigarria izaten da bi punturen egoera egiaztatzea: tentsio normal handiena duen puntuarena, eta arimaren barruan hegaletik gertuen dagoen puntuarena.

9.4. HORMA MEHEKO SEKZIOEN MAKURDURA

9.4.1. Kontzeptu orokorrak

Makinen eta egituren eraikuntzan horma meheko elementuak erabiltzen dira sarritan. Elementu horiek arinak izaten dira, eta gainera erresistentzia eta zurruntasun handia eskaintzen dute. Atal honetan elementu horien berezitasunak eta kalkulatzeko prozedura aurkeztuko ditugu, labur bada ere. Horma meheko piezen oinarrizko ezaugarria dimentsio desberdinen artean dagoen erlazioa da. Pieza horietan, hormen lodiera sekzioaren mugaldearen luzera baino askoz txikiagoa izaten da. Sekzioaren mugaldeko geometria definitzen duen lerroari *erdiko lerroa* deituko diogu. Erdiko lerro horretan sekzioko puntu desberdinak kokatzeko, s deituko dugun koordinatu kurbilineoa erabiliko dugu, 9.20. irudian adierazten den bezala. Horma meheko sekzioak bi motatakoak izan daitezke: itxiak eta irekiak. Sekzioaren mugaldea definitzen duen kurba irekia bada, sekzioa irekia dela esaten da. Mugaldea itxita dagoenean, aldiz, horma meheko sekzioari itxia deituko diogu. Sekzio itxiak, gainera, zelula bakarrekoak edo zelula anitzekoak izan daitezke, osatzen duten gelaxken kopuruaren arabera.

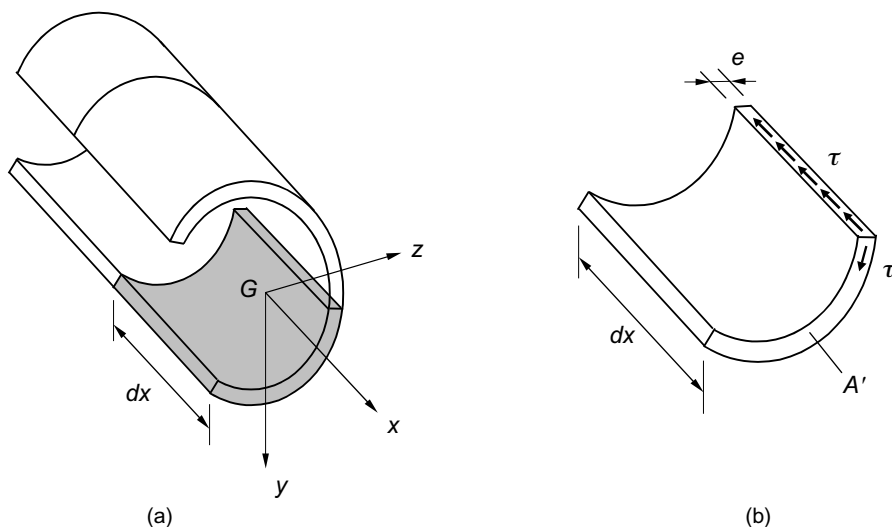


9.20. irudia.

Pieza prismatiko beteentzat lortutako espresio asko horma meheko piezetan ere erabil daitezke. Adibidez, ardatzeko indarraren eraginpean eta makurduapean dauden pieza prismatikoetako tentsio normalak kalkulatzeko aurkeztu ditugun formulak aplikagarriak dira hemen ere. Dena den, sekzio beteetan diseinua mugatzen zutenak tentsio normalak ziren bitartean, horma meheko piezetan tentsio ebakitzaileak dira gailentzen direnak. Izan ere, hormen lodiera txikia denez, tentsio ebakitzaileen balioa oso handia izan daiteke. Hori dela-eta, hurrengo atalak horma meheko sekzioetan agertzen diren tentsio ebakitzaileei eskainiko dizkiegu.

9.4.2. Tentsio ebakitzaileen banaketa horma meheko sekzioetan.

Horma meheko sekzioetan agertzen diren tentsio ebakitzaileak kalkulatzeko, sekzio beteentzat jarraitu genituen pauso berdinak erabil daitezke. Orduan egin genuena errepikatuz, bata bestetik dx distantzia infinitesimalera dauden bi sekzio aukeratuko ditugu, eta tartean gelditzen den habe-zatia isolatuko dugu, 9.21.a. irudian ageri den bezala. Indar ebakitzaileen ondorioz, alde bateko eta besteko momentu makurtzaileak desberdinak izango dira, eta, ondorioz, tentsio normalak ere bai. Segidan, erdiko lerroarekiko elkarzuta den plano baten bidez ebakiko dugu habea, luzetarako norabidean, 9.21.b. irudiko habe-zatia lortuz. Sekzio errektangeluarraren kasuan gertatzen zen bezala, ardatzaren norabidean indarren desoreka bat agertuko da, tentsio normalen erresultanteak desberdinak izango baitira. Oreka-egoera berreskuratzeko, ebakidura-sekzioan ardatzaren norabidea duen indar bat agertu beharko da, urradura-indarra deritzona, hain zuzen. Sekzioko hormaren lodiera txikia denez, lodieran zehar tentsio ebakitzaileak konstante mantentzen direla suposatuko dugu. Gainera, jadanik badakigu hormaren barruko eta kanpoko aurpegietan tentsioak norabide ukitzzailea eduki behar duela. Lodiera txikia denez, barruko puntuetako tentsioak ere erdiko lerroarekiko ukitzzaileak direla suposatuko dugu. Ikus dezagun nola lor daitezkeen tentsio horien balioak.



9.21. irudia.

Hasteko, (7-7) ekuazioan ikusi genuen bezala, tentsio normalen erresultantea kalkulatzeko, nahikoa da tentsioen banaketa 9.21.b. irudiko A' azalera integratzea. Urradura-indarra kalkulatzeko kenketa eginez hauxe lortuko dugu:

$$H = N - N' = \int_{A'} \sigma_{xx} dA - \int_{A'} \sigma'_{xx} dA = \int_{A'} (\sigma'_{xx} + d\sigma'_{xx}) dA - \int_{A'} \sigma'_{xx} dA = \int_{A'} d\sigma'_{xx} dA. \quad (9-74)$$

Ahalik eta ekuaziorik orokorra lortzeko, (9-43) adierazpeneko tentsio normalaren espresioa ordeztuko dugu:

$$H = \int_{A'} d\sigma'_{xx} dA = \frac{dM_z I_y - dM_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_{A'} y dA + \frac{dM_y I_z - dM_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_{A'} z dA. \quad (9-75)$$

Urradura-indarra uniformeki banatzen dela suposatuz, hauxe idatz dezakegu (ikus 9.21.b. irudia):

$$H = \tau e dx. \quad (9-76)$$

Hortaz, (9-75) eta (9-76) berdinduz, eta momentu estatikoak ordeztu ondoren:

$$\tau e = \frac{(dM_z/dx) I_y - (dM_y/dx) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} Q_z + \frac{(dM_y/dx) I_z - (dM_z/dx) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} Q_y, \quad (9-77)$$

eta ondoko erlazioak gogoratuz:

$$V_y = \frac{dM_z}{dx}, \quad V_z = \frac{dM_y}{dx}. \quad (9-78)$$

Honelatan, bada, azkenik, horma meheko sekzioetan tentsio ebakitzaileak kalkulatzeko balio duen honako espresio hau lortuko dugu:

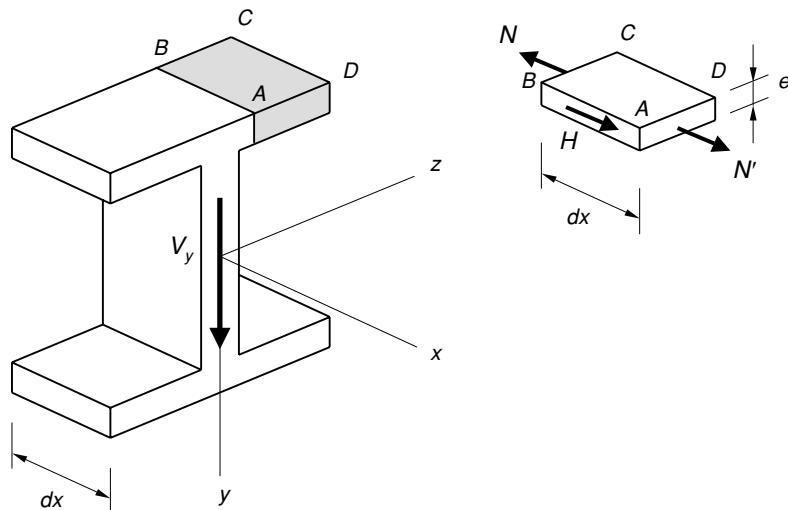
$$\tau e = \frac{V_y I_y - V_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} Q_z + \frac{V_z I_z - V_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} Q_y. \quad (9-79)$$

Hain zuzen, (9-79) ekuazioaren ezkerreko atalean agertzen den biderkadurari *ebakidura-fluxua* deritzo. Fluxu hori hormaren lodieraz zatituz, tentsio ebakitzailearen balioa lortuko dugu. Aukeratutako ardatz koordenatuak sekzioaren inertzia-ardatz nagusiak direnean, I_{yz} inertzia-biderkadurak zero balio du, eta (9-79) ekuazioa laburrago idatz daiteke:

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{e I_z} + \frac{V_z Q_y}{e I_y}. \quad (9-80)$$

Indar ebakitzaile bakarria edukiko bagenu (adibidez y ardatzarekiko paraleloa dena), (9-80) espresioa honelaxe geldituko litzateke:

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{e I_z}. \quad (9-81)$$

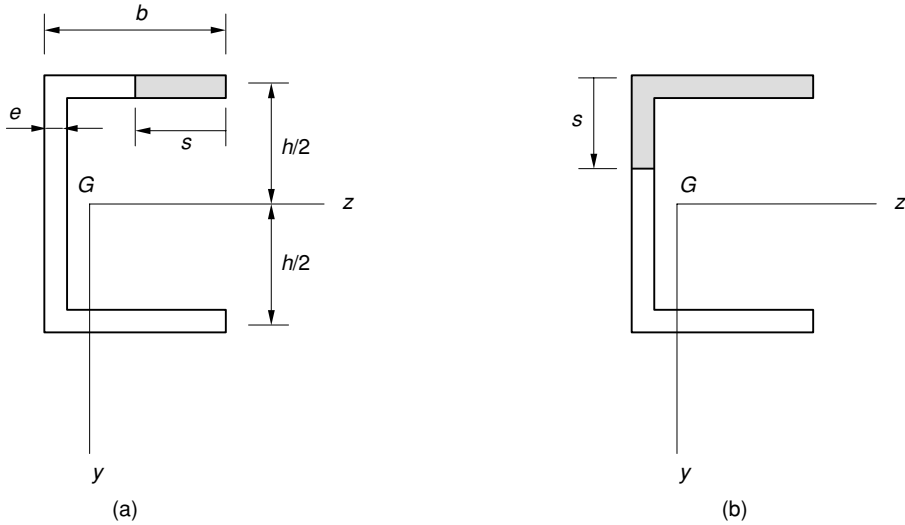


9.22. irudia.

Ikus dezagun laburki nola lor daitekeen tentsio ebakitzailerikaren noranzkoa. Demagun, adibidez, 9.22. irudiko sekzioaren tentsio ebakitzailerikaren banaketa kalkulatu nahi dugula. Irudian ikusten den bezala, hegoaldeko elementu bat isolatuz gero, beharrezkoa da H urradura-indarra agertzea, ardatzaren norabidean indarren batura nulua izan dadin. Aplikaturako indar ebakitzailerik urrunduz goazen neurrian, momentuaren balioa gero eta handiagoa izango da. Ondorioz, aurreko aurpegiak atzekoak baino trazio-tentsio txikiagoak edukiko ditu. Beraz, urradura-indarraren eta tentsio ebakitzailerikaren noranzkoa irudian agertzen den bezalakoa izan beharko da. Tentsio ebakitzailerikaren elkarrekotasun-teoremaren bidez, zeharkako sekzioan tentsioek duten noranzkoa lor dezakegu. Bestalde, argi dago arimako tentsioen noranzkoa beherantz izan behar dela, aplikaturako indar ebakitzailerik ere beherantz doalako. Ikusten denez, T bikoitz itxurako sekzioetan, hegoaldeko tentsio ebakitzailerikaren norabidea ez da bertikala, hasieran suposatu genuen bezala, horizontala baizik. Halere, hegoaldeko tentsioa txikia denez, kalkuluak egiteko, nahikoa da arimako bakarrik kontuan hartzea 9.19. irudian egin dugun bezala.

9.4.3. Ebakidura-zentroa

9.22. irudiko adibidean, sekzioak simetria-plano bertikal bat zuen. Indarrak plano horretan aplikaturik zeudenez, habean makurdura-deformazioak bakarrik agertzen ziren. Ikus dezagun orain zer gertatzen den sekzioak simetria-plano bertikalik ez duenean. Izan bedi 9.23. irudian ageri den horma meheko sekzioa, eta demagun V_y indar ebakitzailerik baten eraginpean dagoela. Sekzio horretan agertzen diren tentsio ebakitzailerikaren kalkulua bi zatitan banatuko dugu. Lehenik, hegoaldeko tentsioak lortuko ditugu, eta ondoren, arimakoak.



9.23. irudia.

Hegaletako tentsioak kalkulatzeko, 9.23.a. irudian marraztutako azaleraren momentu estatikoa lortuko dugu lehendabizi:

$$Q_{z1} = \int_{A'} y dA = \int_0^s \frac{h}{2} e ds = \frac{h}{2} es. \tag{9-82}$$

Ondoren, (9-81) ekuazioan momentu estatiko hori ordeztuz:

$$\tau_1 = \frac{V_y hs}{2I_z} \tag{9-83}$$

dugu, inertzia-momentua honako hau izanik (hormaren lodiera txikia dela kontuan hartuz):

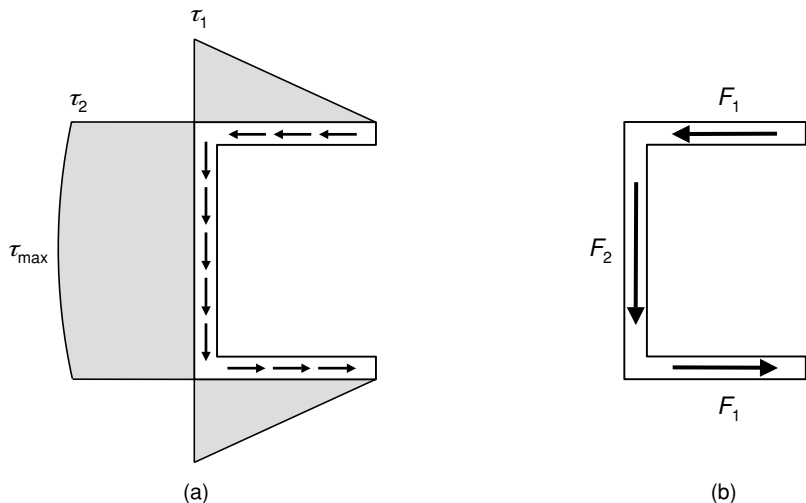
$$I_z = \frac{1}{12} eh^3 + 2be \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{eh^2(h + 6b)}{12}. \tag{9-84}$$

Hortaz, 9.23.b. irudian agertzen den azalerak arimako tentsio ebakitzailak kalkulatzeko balioko digu. Momentua estatikoa hauxe da:

$$Q_{z2} = \int_{A'} y dA = eb \frac{h}{2} + \int_0^s \left(\frac{h}{2} - s\right) eds = eb \frac{h}{2} + \frac{h}{2} es - \frac{s^2}{2} e. \tag{9-85}$$

Beraz, tentsio ebakitzailak balio hau du:

$$\tau_2 = \frac{V_y (bh + hs - s^2)}{2I_z}. \tag{9-86}$$



9.24. irudia.

Ikusten den bezala, hegaletako tentsio-banaketa lineala da, arimakoa parabolikoa den bitartean. Tentsio-banaketa horiek 9.24.a. irudian adierazi dira. Hegaletako tentsio ebakitzaila minimoa nulua da. Bestalde, balio maximoa kalkulatzeko, nahikoa da 9-83 espresioan $s = h/2$ ordez-katzea:

$$\begin{aligned}\tau_1^{\min} &= 0, \\ \tau_1^{\max} &= \tau_1(s = b) = \frac{V_y h b}{2I_z}.\end{aligned}\quad (9-87)$$

Arimako balio minimoa (9-86) ekuazioa $s = 0$ puntuan kalkulatu dezakegu:

$$\tau_2^{\min} = \frac{V_y b h}{2I_z}.\quad (9-88)$$

Balio hori hegaleen muturretako tentsioaren berdina da, noski, lodiera berdina edukitzean tentsioek ere berdinak izan behar dutelako arima eta hegalak lotzen diren puntuetan. Arimako tentsio ebakitzaila handiena, berriz, erdiko puntuan gertatzen da, hots, $s = h/2$ puntuan:

$$\tau_2^{\max} = \frac{V_y(4bh + h^2)}{8I_z}.\quad (9-89)$$

Kalkula ditzagun orain hegaletan eta ariman agertzen diren indarrak (ikus 9.24. irudia). Hegaletako tentsioen erresultantea hauxe da:

$$F_1 = \int_{A'} \tau_1 dA = \int_{A'} \tau_1 eds = \int_0^b \frac{V_y hs}{2I_z} eds = \frac{V_y e h b^2}{4I_z},\quad (9-90)$$

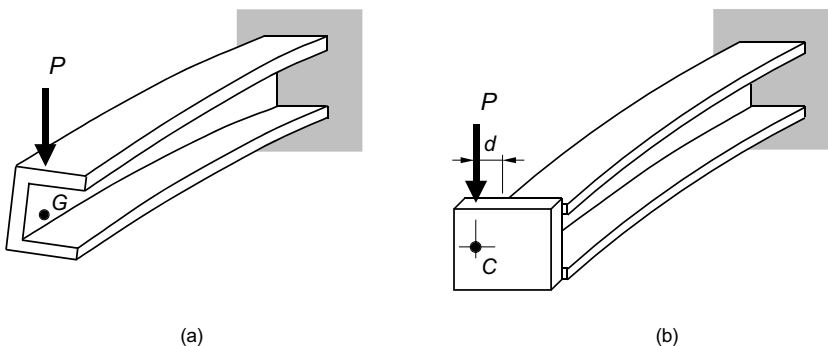
eta arimakoa, beste hau:

$$F_2 = \int_{A'} \tau_2 dA = \int_{A'} \tau_2 eds = 2 \int_0^{h/2} \frac{V_y (bh + hs - s^2)}{2I_z} eds = \frac{V_y eh^2 (6b + h)}{2I_z}. \quad (9-91)$$

Arimako erresultantean I_z inertzia-momentua ordeztuz gero, hauxe lortzen da:

$$F_2 = \frac{V_y eh^2 (6b + h)}{12 \frac{eh^2}{12} (6b + h)} = V_y. \quad (9-92)$$

Espero zitekeen bezala, arimako tentsio ebakitzailen erresultanteak aplikatutako indar ebakitzailaren balio bera du. Izan ere, sekzioan aplikatutako esfortzuak eta tentsio ebakitzailak ematen dituzten indarrak eta momentuak baliokideak izan behar dira, estatikaren legeak bete daitezten. Arrazoi beragatik, hegaletako tentsioen erresultanteak anulatu egiten dira, sekzioan indar horizontalik aplikatu ez dugulako. Halere, segidan ikusiko dugun bezala, 9.23. irudiko itxura duen habe batean makurdura-deformazioak bakarrik ager daitezten, indarra ezin daiteke edozein puntutan aplikatuta egon. Adibidez, indarra grabitate-zentroan aplikatuko bagenu, makurduraz gain bihurtura ere agertuko litzateke habean, 9.25.a. irudian adierazten den bezala. Gainera, lehen topatutako tentsio-banaketa ez litzateke zuzena izango kasu horretan. Bestalde, 9.24.b. iruditik ondoriozta daitezkeen bezala, F_1 eta F_2 indarrek momentu bat sortzen dute grabitate-zentroaren inguruan. Alabaina, indar ebakitzaila grabitate-zentroan aplikatuta balego, ez luke momenturik emango puntu horren inguruan. Beraz, tentsioen erresultanteak eta aplikatutako indarra ez lirateke zeharo baliokideak izango, ez litzukeelako momentu berdinak sortzen ardatzaren inguruan. Ondorioz, lehen topatutako tentsio-banaketa erratuta egongo litzateke. Tentsio ebakitzaila horiek lortzeko erabili dugun (9-81) espresioa, habea makurdurapean bakarrik zegoela suposatuz lortu dugu. Hori dela-eta, formula hori ez da nahikoa 9.25.a. irudiko habearen portaera analizatzeko, makurduraz gain bihurtura ere sortzen delako. Beraz, hurrengo pausoa ondoko galderari erantzuna aurkitzea izango da: sekzioaren zein puntutan aplikatu behar da indarra, habeari makurdura-deformazioak bakarrik jasan ditzan? Sekzioko puntu horri *ebakidura-zentroa* deritzo, eta garrantzi ikaragarria du horma meheko sekzioen kalkuluan. Indarra puntu horretan aplikatuz gero, makurdura bakarrik agertzen da (ikus 9.25.b. irudia) eta (9-81) ekuazioa erabil daiteke tentsioen banaketa lortzeko.



9.25. irudia.

Sekzioaren ebakidura-zentroa kokatzeko, arimaraino dagoen d distantzia erabiliko dugu erreferentzia-modura, 9.25.b. irudian agertzen den eran. Distantzia horren kalkulurako, esfortzuen eta tentsioen arteko baliokidetasunean oinarrituko gara berriro. Horretarako, P indarrak arimaren erdiko puntuarekiko sortzen duen momentua tentsio ebakitzzaileek sortzen dutenarekin berdinduko dugu. Arimako tentsioek puntu horrekiko momenturik ematen ez dutenez, nahikoa izango da hegaletako tentsioen momentua kalkulatzeko (ikus 9.24.b. irudia). Hortaz, (9-90) ekuazioan inertzia-momentua ordeztuz, hegaletako F_1 indarraren momentua honako hau izango da:

$$M = F_1 h = \frac{V_y e h b^2}{4 I_z} h = \frac{V_y e h^2 b^2}{4 e h^2 (h + 6b)} = \frac{3 V_y b^2}{h + 6b}. \quad (9-93)$$

Aplikaturako indarrak sortzen duena, berriz, beste hau:

$$M = V_y d. \quad (9-94)$$

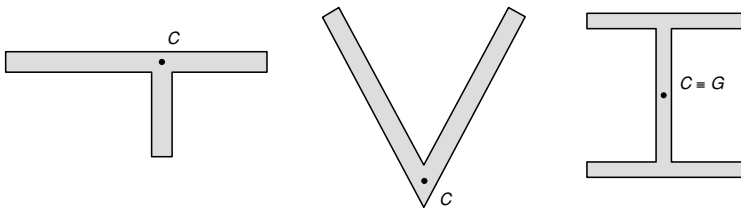
Bi momentuak berdinak izan behar direnez, (9-93) eta (9-94) ekuazioak berdinduz, d distantzia aska dezakegu:

$$\frac{3 V_y b^2}{h + 6b} = V_y d \Rightarrow d = \frac{3 b^2}{h + 6b}. \quad (9-95)$$

Ikusten den bezala, distantzia horren balioa aplikaturako indarraren independentea da, eta sekzioaren itxuraren menpe dago soilik. Indarra puntu horretatik kanpo aplikatuko bagenu —grabitata-zentroan, adibidez—, momentu makurtzazileari $V_y d$ balioko momentu bat gehitu beharko genioke, eta bakoitzak sortzen dituen tentsio ebakitzzaileak batu beharko genituzke. Tentsio ebakitzzaile horien kalkulua hurrengo gai batean ikusiko dugu.

Bukatzeko, ikus ditzagun ebakidura-zentroaren kokapena aurkitzen lagun dezaketen zenbait arau edo propietate (ikus 9.26. irudia):

- Sekzioa zati zuzen desberdinez osatuta badago, eta zati horien erdiko lerroak puntu bakar batean ebakitzen badira, puntu hori ebakidura-zentroa izango da. Propietate horren azalpena oso sinplea da: tentsio ebakitzzaileek erdiko lerroaren norabide bera dutenez, lerro horiek ez dute momenturik emango ebakitzen diren puntuarekiko. Beraz, indarra ebakidura-puntu horretan aplikatuz gero, baliokidetasun estatikoa egiaztatuko litzateke.
- Simetria-ardatzen bat duten sekzioek ardatz horretan edukiko dute kokatuta ebakidura-zentroa.
- Bi simetria-ardatz dauden kasuan, grabitate-zentroa sekzioaren ebakidura-zentro ere izango da.



9.26. irudia.

9.5. MAKURDURA ASIMETRIKOA

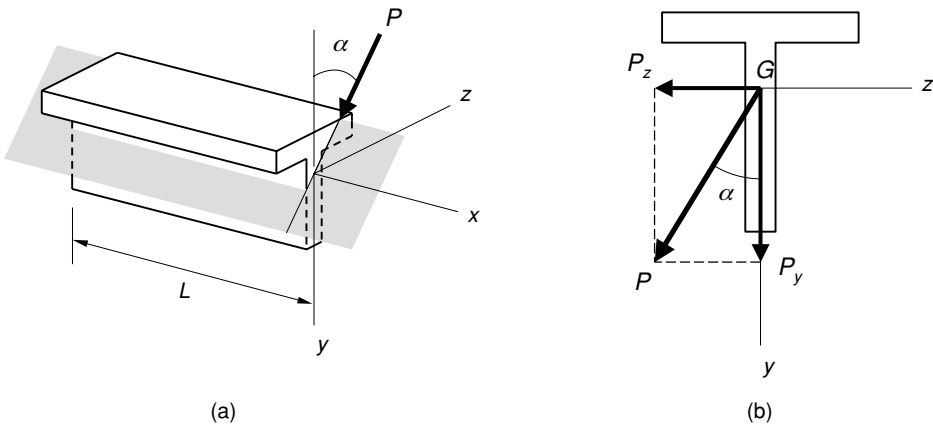
Makurdura asimetrikoa (edo desbideratua) kanpoko indarrak sekzioaren simetria-ardatzean aplikatuta ez daudenean gertatzen da, 9.27.a. ikus daitekeen bezala. Kasu horretan, makurdura bi planotan agertuko da, XY planoan soilik agertu beharrean. Tentsioen analisia egiteko, halere, indarrak sekzioaren grabitate-zentrotik pasatzen direla suposatuko dugu, bihurtura-efekturik ager ez dadin. Makurdura asimetrikoan agertzen diren tentsio normal eta ebakitzailak kalkulatzeko, (9-43) eta (9-79) ekuazioetako espresioak erabil ditzakegu, hurrenez hurren. Dena den, kalkuluak egiteko, gehienetan erosoagoa izaten da indarra sekzioaren inertzia-ardatz nagusien norabidean deskonposatzea. Ondoren, makurdura-kasu bakoitza bere aldetik aztertzen da, eta lortutako emaitzak batuz, bukaerako emaitza lortzen da.

Adibide gisa, 9.27.a. irudiko habea erabiliko dugu, α angeluaz inklinatutako indar baten eraginpean dagoena. Indar hori y eta z norabideetan deskonposatzen badugu, bi kasuko makurdura simetrikoak lortuko genituzke: bata P_y indarrak sortzen duena, eta bestea P_z indarrarena. Indar horien balioak honakoak dira:

$$\begin{aligned} P_y &= P \cos \alpha, \\ P_z &= P \sin \alpha. \end{aligned} \quad (9-96)$$

Indarraren aplikazio-puntutik L distantziara kokatutako sekzio generiko baten momentu makurtzaileak hauexek izango lirarteke:

$$\begin{aligned} M_z &= P_y L = PL \cos \alpha, \\ M_y &= P_z L = PL \sin \alpha. \end{aligned} \quad (9-97)$$



9.27. irudia.

Indar horiek sekzioaren inertzia-ardatz nagusien norabidea dutenez, bakoitzak agerazten dituen tentsio normalak kalkulatzeko, (9-15) ekuazioko Navier-en legea erabil dezakegu. Preseski, (9-97) ekuazioko momentuak ordeztuz:

$$\sigma_{xx}^P = \frac{M_z \cdot y}{I_z} = \frac{PL \cos \alpha}{I_z} y, \quad (9-98)$$

$$\sigma_{xx}^P = \frac{M_y \cdot z}{I_y} = \frac{PL \sin \alpha}{I_z} z.$$

Gaiezarpen-printzipioaren arabera bi tentsioak batuz:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^P + \sigma_{xx}^P = -\frac{PL \cos \alpha}{I_z} y + \frac{PL \sin \alpha}{I_z} z. \quad (9-99)$$

Adierazpen horretan, (9-99) ekuazioko lehenengo batugaiari zeinu negatiboa ipini behar zaio, P_y indarraren ondorioz konpresiozko tentsioak agertzen direlako y koordinatua positiboa duten puntuetan (ikus 9.27.b. irudia). Aldiz, P_z indarrak z positiboa duten puntuetan trakziozko tentsioak sortzen dituenek, bigarren batugaiak zeinu positiboa darama. Ebakiduraren ondorioz agertzen diren tentsio ebakitzaileak, kalkulatzeko, (9-54) adierazpeneko Colignon-en ekuazioa erabiliko genuke.

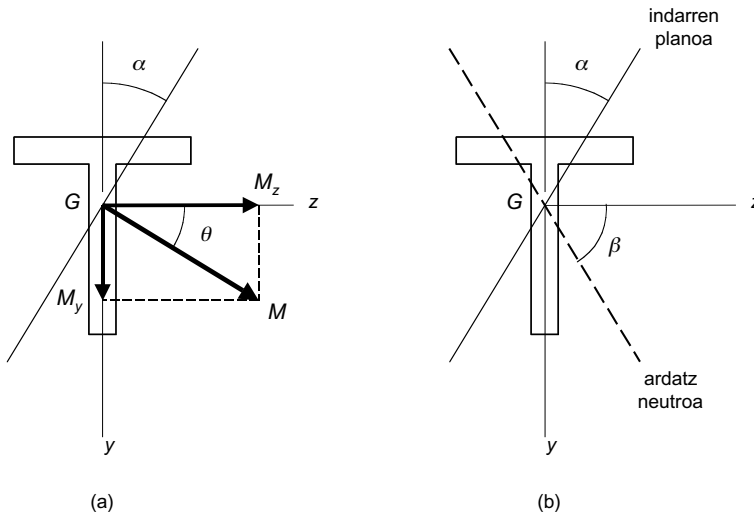
Ikus dezagun orain zein den sekzioan agertzen diren momentu makurtzaileen balioak. Pitagoras-en teoreman oinarrituz, M_y eta M_z momentuek erresultante hau dute:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad (9-100)$$

eta (9-97)-ko balioak ordeztuz:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(PL \sin \alpha)^2 + (PL \cos \alpha)^2} = PL. \quad (9-101)$$

Espero genuen bezala, indarrak L distantziara dagoen sekzio batean sortzen duen momentua kalkulatzeko, nahikoa da indarra distantziaz biderkatzea.



9.28. irudia.

Momentu baliokidearen norabidea kalkulatzeko, 9.29. irudiko θ angelua kalkulatu dugu:

$$\tan\theta = \frac{M_y}{M_z} = \frac{PL\sin\alpha}{PL\cos\alpha} = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \theta. \quad (9-102)$$

Hots, (9-102) ekuazioaren arabera, α eta θ angeluak berdinak dira. Ondorioz, 9.29. irudian ikusten den bezala, momentu baliokidearen norabidea indarren planoarekiko elkarzuta da. Beste era batera esanda, momentu makurtzailea indarren planoan dago kokatuta.

Bestalde, (9-99) ekuazioaren bidez, ardatz neutroaren kokapena ere lor dezakegu. Dakigun bezala, ardatz neutroa tentsioa normal nulua duten puntuen leku geometrikoa da. Beraz, ekuazio hori zero balioarekin berdinduz, ardatz neutroaren ekuazioa lortuko dugu:

$$\sigma_{xx} = -\frac{PL\cos\alpha}{I_z}y + \frac{PL\sin\alpha}{I_z}z = 0 \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_z} \tan\alpha. \quad (9-103)$$

Ekuazio hori grabitate-zentrotik pasatzen den zuzen bati dagokio, 9.28.b. irudian agertzen den bezala. Zuzen horren malda β angeluaren bidez emanda dator, eta ondoko balioa du:

$$\tan\beta = \frac{I_z}{I_z} \tan\alpha. \quad (9-104)$$

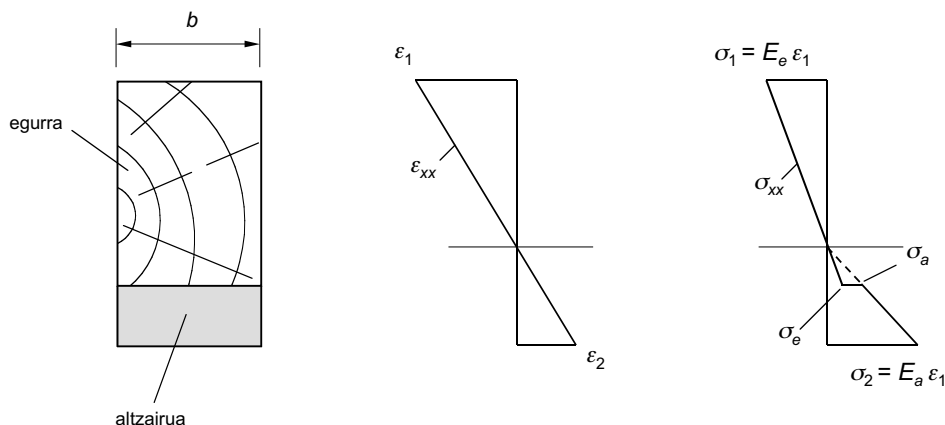
Halaber, (9-104) ekuaziotik ondorio garrantzitsu hau lortzen da: normalean ardatz neutroa eta indarren planoak ez dira elkarzutak izango, α eta β angeluak desberdinak baitira. Indarren planoak daukan inklinazioaren arabera, bi kasu berezi gerta daitezke:

- $\alpha = 0^\circ$. Kasu honetan $\tan\alpha = 0$ da (indar bertikala), eta ondorioz, $\beta = 0^\circ$. Beraz, ardatz neutroa horizontala izango da eta makurdura eta deformazioa XY planoan gertatuko dira.
- $\alpha = 90^\circ$. Indarra horizontala da kasu honetan, eta $\tan\alpha = \infty$ denez, $\beta = 90^\circ$ izango da. Ardatz neutroa bertikala izango da orduan, eta makurdura XZ planoan gertatuko da.
- I_z eta I_y inertzia-momentuak berdinak badira, α eta β angeluak ere berdinak dira. Beraz, kasu berezi honetan indarren planoak eta ardatz neutroa elkarzutak dira.

Makurdura asimetrikoari buruzko atal hau bukatzeko, aipa dezagun inertzia-momentu oso desberdinak dituzten sekzioak oso arriskutsuak izan daitezkeela, zeren $I_z \gg I_y$ bada, $\beta \gg \alpha$ izango baita. Hori dela-eta, indarraren inklinazioa txikia izanda ere, ardatz neutroa posizio bertikaletik oso gertu geldituko da. Beti ere, deformazioa ardatz neutroarekiko norabide elkarzutean gertatzen denez, desplazamenduek norabide horizontala eduki dezakete. Dena den, gehienetan, desplazamendu horizontala ez da indar bertikal bat aplikatu ondoren espero izaten den erantzuna; horregatik ezusteko ondorioak gerta daitezke.

9.6. HABE HETEROGENEOAK

Orain arte pieza prismatikoen zeharkako sekzioa material bakar batez osatuta zegoela suposatu dugu, hots, homogenea zela. Halere, kasu askotan material bat baino gehiagoz osatutako habeak erabiltzen dira eraikuntzan. Habe horiei *habe konposatuak* edo *habe heterogeneoak* deritze. Mota horretako haben adibideak dira, esate baterako, habe bimetalikoak, *sandwich* motako panelak edo hormigoi armatuzko habeak. Habe horien analisirako, materialen arteko lotura perfektua dela suposatuko dugu, hau da, sekzioa osatzen duten material desberdinen artean labaintetarik (desplazamendu erlatiborik) ez dagoela suposatuko dugu. Hipotesi hori onartuz, sekzioak laua izaten jarraituko du deformazioaren ondoren, eta ondorioz, deformazioen diagrama lineala izango da.



9.29. irudia.

Sekzioko materialaren jarraitutasunik eza dela-eta, deformazioen diagrama lineala den arren, tentsioena ez da lineala izango, eta jauzi bat aurkeztuko du materialak elkarrekin lotzen diren puntuetan. Gainera, oro har, ardatz neutroaren posizioa ez da aurrez ezagutzen, sekzioak simetria bikoitza ez badu behintzat. Demagun, adibide gisa, 9.29. irudian ageri den sekzio heterogeneoa. Sekzioa errektangeluarra da eta bi materialez dago osatuta. Goiko zatia egurrezkoa da eta behekoa altzairuzko xafla batekin zurrunduta dago. Tentsioen diagramako jauzia agerian uzteko, materialak banatzen dituen lerroan oinarrituko gara, eta lerro horretatik distantzia infinitesimal batera dauden bi punturen deformazioa aztertuko dugu, bata egurrezko zatiaren aldean dagoena eta bestea altzairuzko zatian.

Hain justu, 9.29. irudian ikusten den bezala, deformazioen diagrama lineala da. Ondorioz, bi puntu horien deformazioa berdina dela suposa dezakegu, bata bestetik oso gertu baitaude. Halere, altzairuaren eta egurraren elastikotasun-moduluak desberdinak direnez, tentsioek ez dute balio bera edukiko puntu horietan. Matematikoki:

$$\begin{aligned}\sigma_e &= E_e \varepsilon, \\ \sigma_a &= E_a \varepsilon,\end{aligned}\tag{9-105}$$

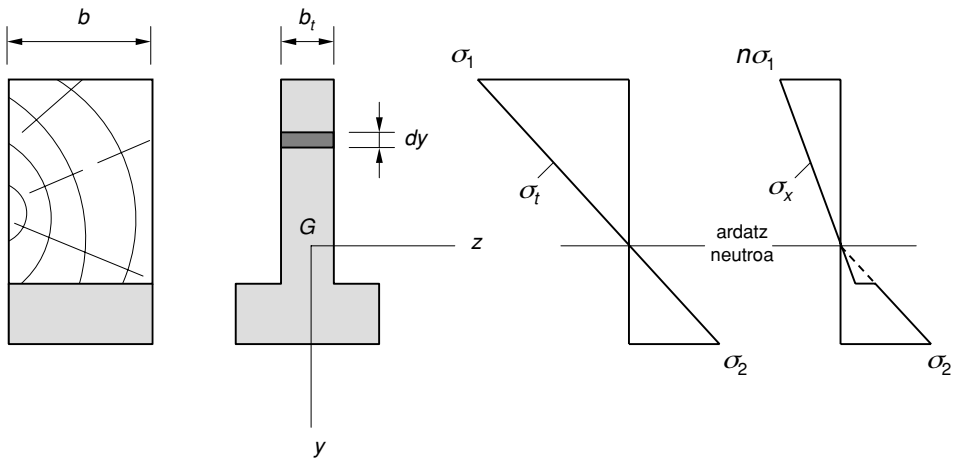
eta $E_a > E_e$ denez, $\sigma_a > \sigma_e$ izango da. Ondorioz, materialak elkarrekin lotzen diren puntuetan, tentsioen jauzi bat gertatuko da.

Habe heterogeneoen tentsio-banaketa hori kalkulatzeko, *sekzio transformatuaren metodoa* erabiliko dugu. Metodo horretan, sekzio heterogeneoa material bakar batez osatutako sekzio baliokide bihurtuko dugu lehenik. Kalkuluak habe homogeneo berri horretan egin eta gero, jatorrizko habe heterogeneoaren tentsio-banaketa kalkulatzeko gai izango gara. Habe berria hasierakoarekiko baliokidea izan dadin, bi baldintza bete behar ditu: alde bate-tik, jatorrizko sekzioaren esfortzu berdinak transmititu behar ditu, eta bestetik, deformazio berdina jasan behar du. Beste era batera esanda, erresistentzia eta zurruntasun berdinak eduki behar dituzte. Baliokidetasun-baldintza bikoitza da, beraz. Ikus dezagun zer erlazio bete behar diren bi sekzioen artean baldintza horiek egiazta daitezzen. Demagun, adibidez, oinarritzko material modura altzairua aukeratzen dugula. Beraz, sekzio baliokidea altzairuzkoa izango da oso-osorik. Eraldatu beharreko zati bakarra, orduan, egurrezkoa izango da, beheko xafla altzairuzkoa delako. Aplikaturako momentua plano bertikalean aplikatuta dagoela suposatuko dugu, kalkuluak errazteko. Kasu horretan tentsio normalak norabide horizontalean konstanteak direnez, b zabalera eta dy altuera duen azalera infinitesimal bat aukeratuko dugu. Bi sekzioen erresistentzia berdina izan dadin, honako erlazio hau bete beharko da:

$$\begin{aligned} dF &= dF_t, \\ bdy\sigma &= b_t dy\sigma_t, \end{aligned} \tag{9-106}$$

non t azpindizea duten terminoek sekzio transformatuaren propietateak adierazten dituzten. Ikusten den bezala, egurrezkoa zen zatiaren lodiera desberdina izango da altzairuzko habe transformatuan, eta b izatetik b_t izatera pasatzen da. Beraz,

$$b\sigma = b_t\sigma_t. \tag{9-107}$$



9.30. irudia.

Bigarren baldintzaren arabera, sekzioen zurruntasuna ere berdina izan behar da. Beraz, deformazioak berdinduz:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_t, \\ \frac{\sigma}{E_e} &= \frac{\sigma_t}{E_a}. \end{aligned} \tag{9-108}$$

Honelatan, bada, (9-107) eta (9-108) ekuazioetatik lodieren eta tentsio normalen arteko erlazio hauek lortzen dira:

$$\begin{aligned} b_i &= b \frac{E_e}{E_a}, \\ \sigma &= \sigma_i \frac{E_e}{E_a}. \end{aligned} \quad (9-109)$$

Hortaz, (9-109) adierazpenetako lehen erlazioaren arabera, sekzio transformatuan b lodierak edukiko duen balio berria, b_p hasierakoa baino txikiago izango da, eta 9.30. irudi-ko T itxurako sekzioa geratzen da. Sekzio horretan momentu makurtzaileak sortzen dituen tentsio normalak kalkula ditzakegu. Tentsio horiek sekzio transformatuari dagozkionak direnez, σ_i deituko diegu. Gainera, sekzio baliokidearen analisisian oinarrituz, ardatz neutroaren posizioa ere lor dezakegu. Problema hori askatu ondoren, benetako sekzioaren tentsioak lortu behar ditugu; hots, atzera egin behar dugu berriro, jatorrizko egoerara iristeko. Altzairuzko zatian ez da inolako zuzenketarik egin behar, jatorrizko sekzioan eta sekzio baliokidean zati hori aldatu gabe utzi dugulako. Halere, egurrezko zatian dauden benetako tentsioak ez dira habe transformatuan lortu ditugunak. Benetako balioak lortzeko, (9-109) ekuazioko bigarren espresioa erabiliko dugu. Ikusten denez, egurrezko zatiari dagozkion σ_i tentsio guztiak elastikotasun-moduluaren arteko erlazioaz biderkatu behar dira. Erlazio horren arabera, benetako tentsioak sekzio baliokidean lortutakoak baino txikiagoak izango dira. Ondorioz, tentsio normalen jauzi bat agertzen da, 9.30. irudian erakusten den bezala. Elastikotasun-moduluek definitzen duten baliokidetasun-erlazioari n deituko diogu:

$$n = \frac{E_e}{E_a}. \quad (9-110)$$

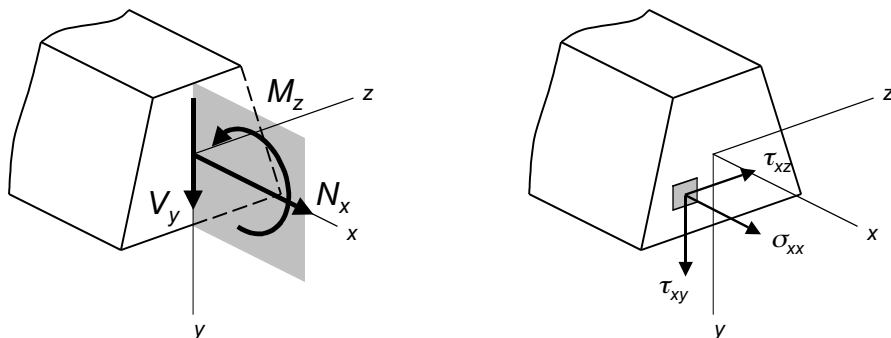
Baliokidetasun-erlazio hori kalkulatu ondoren, habe heterogeneoen analisia material homogeen batekin egindako habe baliokide baten kalkulura murrizten da. Momentua plano bertikalean aplikatuta egon beharrean plano horizontalean egongo balitz, sekzioaren lodiera z norabidean aldatu beharrean, y norabidean aldatu beharko genuke. Beste era batera esanda, zabalera aldatu beharrean, altuera aldatuko genuke.

Galdera hau bukatzeko, aipa dezagun laburki zer gertatuko litzatekeen material desberdinak norabide horizontalean banatuko balira, norabide bertikalean banatu ordez. Kasu horretan, tentsioak kalkulatzeko prozesua goian aurkeztutakoaren berdina izango litzateke. Halere, tentsioen jauzia ez litzateke norabide bertikalean agertuko, norabide horizontalean baizik. Beraz, sekzioan dauden tentsioak agerian uzteko, tentsio-banaketa bat marraztu beharko genuke material bakoitzeko. Nolanahi den, deformazioei dagokienez ere, sekzio baliokidea erabil dezakegu. Adibidez, sekzio bateko kurbadura-erradioa kalkulatu nahiko bagenu, (9-14) ekuazioa erabil dezakegu, sekzio transformatuaren inertzia-momentua eta elastikotasun-modulua ordezkatuz.

9.7. MAKURDURA KONPOSATUA ETA KONPRESIO ESZENTRIKOA

Gaiaren sarreran esan genuen bezala, hiru makurdura-mota bereiz daitezke: makurdura hutsa, makurdura bakuna eta makurdura konposatua. Atal honetan, azken makurdura-motari

buruz hitz egingo dugu. Makurdura konposatuan momentu makurtzaileaz eta indar ebakitzailaz gain, ardatzeko indarra ere agertzen da zeharkako sekzioan (ikus 9.31. irudia). Egoera hori habean zeharka aplikatutako indarrak ardatzarekiko elkarzutak ez direnean sortzen da.



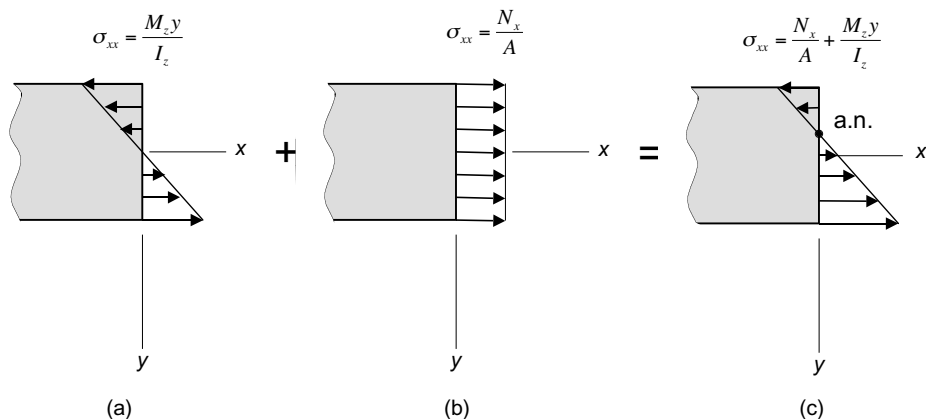
9.31. irudia.

Tentsioak kalkulatzeko, nahikoa da esfortzu bakoitzak sortzen dituenak kalkulatzeko eta, ondoren, gainezarpenerintzipioa aplikatzeko. Halere, tentsio normalen kalkulak berezitasun garrantzitsuak ditu makurdura konposatuaren kasuan. Hori dela-eta, atal hau tentsio normalen azterketan sakontzeko erabiliko dugu. Tentsio normalen kalkulurako, nahikoa da momentu makurtzaileak eta ardatzeko indarrak sortzen dituzten tentsio normalak kalkulatzeko, era honetan:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z y}{I_z} \quad (9-111)$$

Dakigun bezala, makurdura hutsaren kasuan ardatz neutroa sekzioaren grabitate-zentrotik pasatzen da. Makurdura konposatuan, ostera, ardatz neutroaren kokapena aldatu egiten da, (9-111) ekuaziotik erraz ondoriozta daitekeen bezala. Hain zuzen, 9.32. irudian ikus daitekeen bezala, M_z momentu makurtzaileak sortzen duen tentsio-banaketa lineala da, eta tentsio normalek zero balio dute y koordinatua nulua duten puntuetan (ikus 9.32.a. irudia). Alabaina, N_x ardatzeko indarrak sortzen dituen tentsioak uniformeki banatzen dira zeharkako sekzioan, eta balio bera dute puntu guztietan, 9.32.b. irudian agertzen den bezala. Ondorioz, bi tentsio-banaketa horiek batzean, makurdura hutsean ardatz neutroan zeuden puntuetako tentsioak aldatu egiten dira, eta nuluak izateari uzten diote. Beraz, ardatz neutroa posizio berri batera pasatuko da, eta 9.32.c. irudiko tentsio-banaketa lortzen da.

Ardatz neutroaren posizio-aldaketa hori aztertzea oso garrantzitsua da zenbait kasutan, esate baterako, trakzioa jasateko gai ez diren materialetan. Ardatz neutroak sekzioan trakziopean eta konpresiopean dauden eremuak desberdintzen dituzenez, ardatz neutroaren posizioa nola aldatzen den ezagutzeko oinarritzkoa da, materialak huts egingo duen ala ez aurrean ahal izateko. Horrela, makurdura konposatuaz hitz egitean, aparteko garrantzia duen kasu bat azpimarratu behar da, hots, *konpresio eszentrikoa* deritzona.



9.32. irudia.

Sekzioan konpresiozko indar bat grabitate-zentrotik kanpo aplikatuz gero, *konpresio eszentrikoa* dugula esaten da. Indar ebakitzailek gabeko makurdura konposatua da, beraz. Konpresio eszentrikoa aztertzeko, bi kasu desberdin bereiziko ditugu, indarraren aplikazio-puntuaren arabera: bata, indarra inertzia-ardatz nagusi batean aplikatuta dagoenean, eta bestea, sekzioko edozein puntutan aplikatzen denean.

Honelatan, bada, 9.33.a. irudiko sekzioan, P konpresio-indarra y ardatz nagusiko puntu batean dago aplikatuta, grabitate-zentrotik kanpo eta y_p distantziara. Tentsioen kalkuluari ekiteko, indar-sistema baliokide bat topatuko dugu lehenik. Horretarako, nahikoa da konpresio indarra grabitate-zentrorra eramatea, eta puntu horrekiko sortzen duen momentua gehitzea, 9.33.b. irudian adierazten den bezala. Beraz, (9-111) ekuazioa aplikatuz, tentsio normala honelaxe kalkula dezakegu:

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{A} - \frac{P y_p y}{I_z} \quad (9-112)$$

(9-112) espresioa zero balioarekin berdinduz, ardatz neutroaren ekuazioa lor dezakegu:

$$y = -\frac{I_z}{A y_p} \quad (9-113)$$

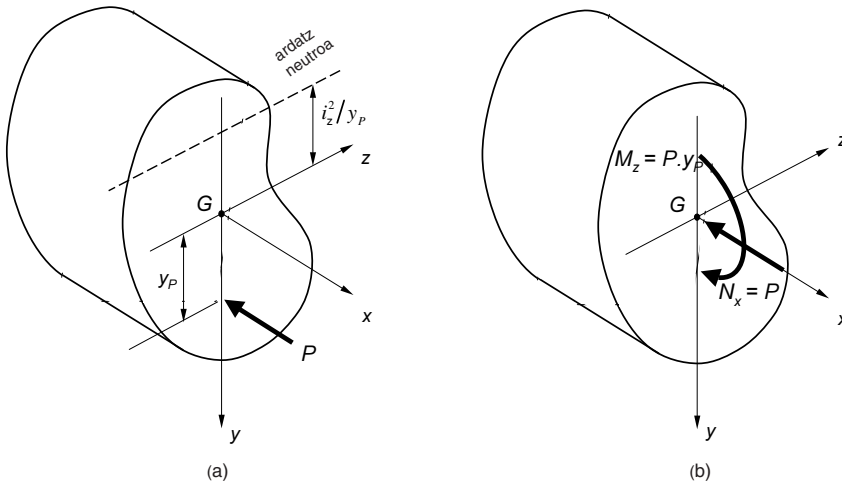
Bestalde, z ardatzarekiko i_z biraketa-erradioa honelaxe definituz,

$$I_z = A i_z^2 \quad (9-114)$$

(9-113) ekuazioa beste era honetan idatz dezakegu:

$$y = -\frac{i_z^2}{y_p}, \quad (9-115)$$

non y_p balioak konpresio-indarraren eszentrikotasuna adierazten baitu.



9.33. irudia.

Hortaz, (9-115) ekuaziotik ondoriozta daitekeen bezala, konpresio-indarra inertzia-ardatz nagusi batean aplikatzen denean, ardatz neutroaren ekuazioa ardatz horrekiko zuzen elkarzuta da. Horrez gain, zuzen hori indarraren aplikazio-puntuaren aurkako aldean dago, espresioaren zeinu negatiboa dela-eta (ikus 9.33.a. irudia). Hau da, $y_p > 0$ bada, ardatz neutroa alde negatiboan kokatuko da, eta $y_p < 0$ bada, berriz, alde positiboan. Ardatz neutroaren posizioa aplikatutako indarrarekiko independentea da, eta eszentrikotasunaren eta sekzioaren propietate geometrikoen menpe dago.

Eszentrikotasuna handituz doan neurrian, hots, indarra grabitate-zentrotik urrunduz doan neurrian, ardatz neutroa grabitate-zentrorra hurbiltzen da. Alderantziz, indarra G-ra gerturatuz gero, ardatz neutroa urrundu egingo litzateke, infiniturantz joaz. Beraz, indarra grabitate-zentrotik urrun aplikatuz gero, ardatz neutroa sekzioaren barrura etorriko litzateke, eta trakzioa nahiz konpresioa edukiko genuke sekzioko puntuetan. Aldiz, indarra sekzioaren erdialdean aplikatuz gero, grabitate-zentrotik gertu, sekzioak trakziopean egingo luke lan oso-osorik.

Ikus dezagun orain, zer gertatzen den konpresio-indarra sekzioko (y_p, z_p) puntu arbitrarioan aplikatzen denean (ikus 9.34.a. irudia). Preseski, 9.34.b. irudian konpresio eszentrikoaren baliokidea den indar- eta momentu-sistema ageri da. Kasu horretan, N_x indar ebakitzailaz gain, M_y eta M_z momentu makurtzailak ere agertzen dira. Bakoitzak sortzen dituen tentsio normalak hauek dira:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{P}{A}, \\ \sigma_{xx} &= -\frac{Pz_p z}{I_y}, \\ \sigma_{xx} &= -\frac{Py_p y}{I_z}, \end{aligned} \tag{9-116}$$

eta gainezarpen-printzipioa aplikatuz:

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{A} - \frac{Pz_P z}{I_y} - \frac{Py_P y}{I_z} \quad (9-117)$$

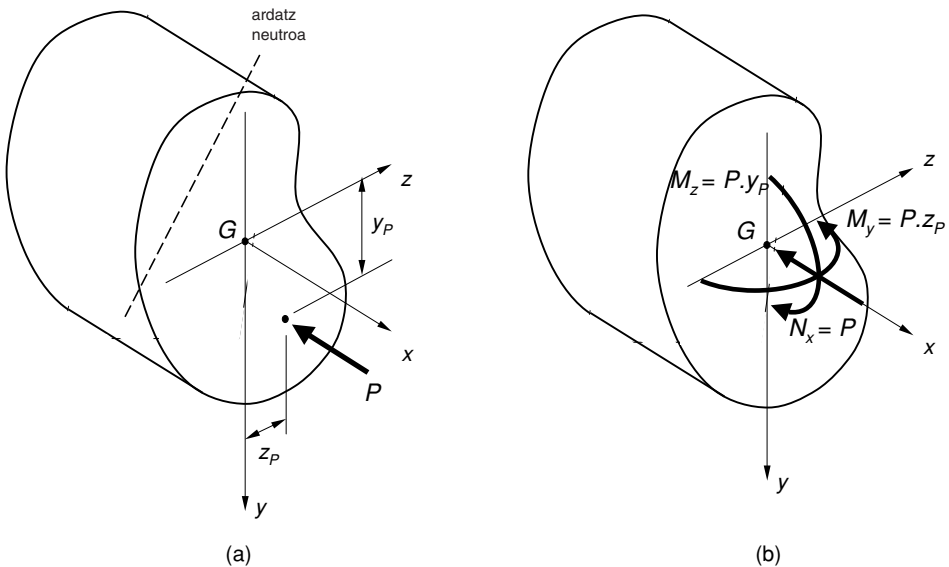
Ardatz neutroaren ekuazioa lortzeko, (9-117) ekuazioa zero balioarekin berdinduko dugu:

$$\frac{1}{A} + \frac{z_P z}{I_y} + \frac{y_P y}{I_z} = 0 \quad (9-118)$$

Ekuazio hori beste era honetan ere idatz daiteke:

$$1 + \frac{z_P z}{i_y^2} + \frac{y_P y}{i_z^2} = 0, \quad (9-119)$$

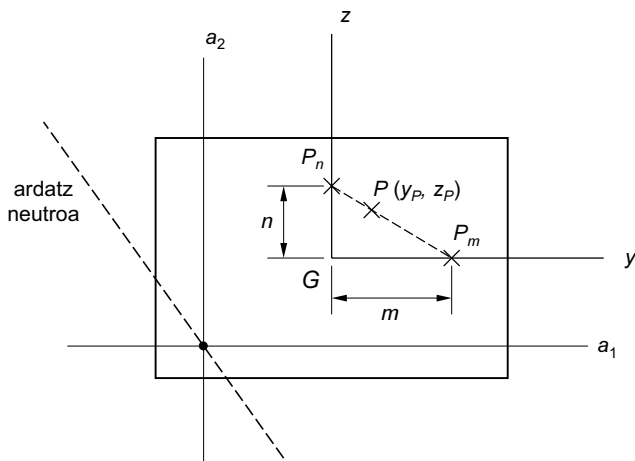
non $i_z^2 = I_z/A$ eta $i_y^2 = I_y/A$ direlakoak z eta y ardatzekiko biraketa-erradioak diren, hurrenez hurren.



9.34. irudia.

Lortutako ekuazioa, 9.34.a. irudian ikusten den bezala, y eta z ardatzak ebakitzen dituen zuzen batena da. Ebaki-puntuak $(0, -i_y^2/z_P)$ eta $(0, -i_z^2/y_P)$ dira, hain zuzen. Aztertu dugun lehen kasuan bezala, ardatz neutroaren posizioa aplikatutako indarraren independentea da, eta sekzioaren geometriaren eta aplikazio-puntuaren menpe dago. Ardatz neutroa, berriro ere, grabitate-zentroarekiko aurkako aldean kokatuko da, ebaki-puntuen zeinu negatiboak aurreratu den bezala. Indarra G -rantz gerturatu gero, ardatz neutroa grabitate-zentrotik aldentuko da, eta konpresiopean dagoen zatia handitu egingo da. Indarra G -tik urrundu gero, alderantzizkoa gertatuko litzateke.

Froga dezagun, segidan, ardatz neutroak duen propietate garrantzitsu hau: aplikazio-puntua lerro batean zehar mugituz gero, ardatz neutroaren posizioa aldatu egiten da, baina beti puntu baten inguruan biratuz.



9.35. irudia.

Propietate hori frogatzeko, 9.35. irudiko sekzio errektangeluarra erabiliko dugu. Izan bedi y eta z ardatzak $(m, 0)$ eta $(0, n)$ puntuetan ebakitzen dituen zuzena. Zuzen horren gainean konpresio-indarra mugitzen denean ardatz neutroaren posizioa nola aldatzen den aztertzea da gure helburua. Argi dago ezen, indarra $(m, 0)$ puntuan aplikatuz gero, a_1 ardatz neutroa lortuko dugula; eta $(0, n)$ puntuan aplikatuz gero, a_2 izango da ardatza. Tartean kokatutako (y_p, z_p) puntuarentzat edukiko dugun ardatz neutroa kalkulatzeko, P indarra bi osagaitan deskonposatuko dugu. Osagai horiei P_m eta P_n deituko diegu, eta $(m, 0)$ eta $(0, n)$ puntuetan egongo dira aplikaturik, hurrenez hurren. Bi indar horiek osatzen duten sistema eta hasierako P indarra baliokideak izan daitezten, honako erlazio hauek bete beharko dira:

$$\begin{aligned} P &= P_m + P_n, \\ P_m m &= P y_p, \\ P_n n &= P z_p, \end{aligned} \quad (9-120)$$

hau da, ardatzeko indarra eta momentu makurtzaileak berdinak izan beharko dira bi kasuetan. Preseski, (9-120) ekuazioko azken bi espresioetatik P_n eta P_m askatuz eta lehenengoan ordeztuz, honako proportzionaltasun-erlazio hau lortzen da:

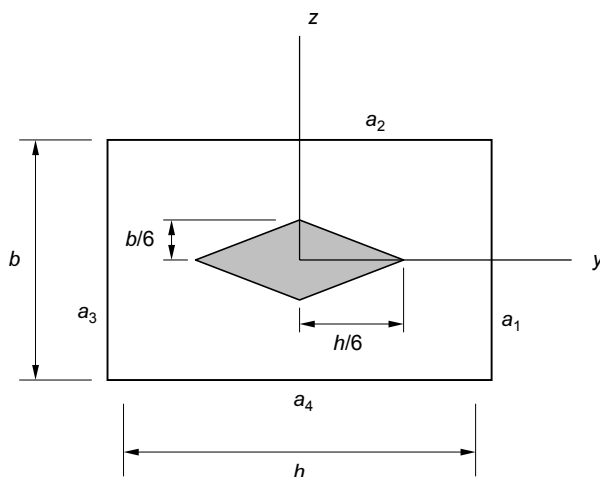
$$\frac{y_p}{m} + \frac{z_p}{n} = 1. \quad (9-121)$$

Beraz, P indarra P_n eta P_m indarrekin ordeztu ahal izateko, (9-121) ekuazioa bete behar da. Erraz frogatu daiteke ekuazio hori betetzen dela, 9.35. irudiko hirukian oinarrituz. Deskonposaketa egitea posible dela ikusi ondoren, horretatik lor daitekeen ondorioa aztertuko dugu. Arestian aipatu genuen bezala, ardatz neutroaren posizioa indarraren balioarekiko independentea da. Hori dela-eta, P indarra 9.35. irudiko lerroaren gainean mugitu eta P_n eta P_m indarren balioak aldatu arren, a_1 eta a_2 ardatz neutroak ez dira

mugituko. Ondorioz, lerro horiek ebakitzen diren puntuan, tentsio normalak beti zero balioko du. Beraz, konpresio-indarrari dagokion ardatz neutroa beti pasatuko da puntu horretatik. Hau da, norabidez aldatzen denean, puntu horren inguruan biratuz egingo du beti.

Ardatz neutroak sekzioa ebakitzen duenean, bi zati desberdin bereiz ditzakegu: trakziopean dagoen aldea eta konpresiopean dagoena. Esan bezala, konpresio-indarra grabitate-zentrorra hurbiltzen den neurrian, ardatz neutroa urrundu egiten da. Beraz, indarra sekzioaren erdialdean aplikatuz gero, sekzioa oso-osorik konpresiopean egotea lor daiteke. Sekzio guztia konpresiopean egoteko indarrak aplikatu behar diren puntuen leku geometrikoari sekzioaren *erdiko nukleoa* deritzo. Erdiko nukleoa ezagutzea oso baliagarria izan daiteke trakzioa jasateko gai ez diren materialak dauzkagunean, esaterako, harria, hormigoia, zeramika, etab. Beraz, erdiko nukleoa azalera bat da, eta beraren itxura sekzioaren geometriaren menpe dago (konpresio-indarrarekiko independentea da). Erdiko nukleoa kalkulatzeko, ondoko hiru pauso hauek eman behar dira:

- Sekzioa ahalik eta alde gutxien dituen poligono batean inskribatzen da. Sekzioa ebakitzen duen edozein lerrok poligonoa ere ebaki behar du, eta alderantziz.
- Poligonoaren aldeak ardatz neutroak direla suposatzen da, eta bakoitzari dagokion aplikazio-puntua topatzen da, (9-115) eta (9-119) espresioak erabiliz. Hau da, poligonoaren aldea eta ardatz neutroa bat etortzeko indarra aplikatu beharko genukeen puntua kalkulatzeko. Simetriak kontuan hartzea lagungarria izan daiteke pauso honetan.
- Azkenik, lortutako puntuak zuzenen bidez lotzen dira, eta horiek mugatutako azalera sekzioaren barneko nukleoa izango da.



9.36. irudia.

Adibide gisa, 9.36. irudiko sekzio errektangeluarraren erdiko nukleoa kalkulatu dugu. Errektangeluaren altuera h da, eta zabalera, b . Sekzio hori inskribatzeko, errektangelu itxurako poligono bat erabiliko dugu. Ondoren, banaka-banaka hartuko ditugu lau aldeak, eta bakoitzari dagokion aplikazio-puntua topatuko dugu. Adibidez, a_1 ardatz neutroa

y ardatzarekiko elkarzuta da. Beraz, indarra y ardatzean aplikatu beharko genuke. Puntu horren posizio zehatza topatzeko, nahikoa da (9-115) ekuazioa aplikatzea. Kasu honetan, ardatz neutroaren posizio ezaguna da, $y = h/2$, eta beraz,

$$y = -\frac{i_z^2}{y_p} = \frac{h}{2} \Rightarrow y_p = -\frac{2i_z^2}{h}. \quad (9-122)$$

Sekzio errektangeluaren i_z^2 biraketa-erradioa honako hau da:

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{bh} = \frac{h^2}{12}, \quad (9-123)$$

eta (9-122) espresioan ordeztuz:

$$y_p = -\frac{h}{6}. \quad (9-124)$$

Ondoren, a_2 ardatz neutroari dagokiona kalkula daiteke. Zuzen hori z ardatzarekiko elkarzuta denez, beste erlazio hau erabiliko dugu:

$$z = -\frac{i_y^2}{z_p} = \frac{b}{2} \Rightarrow z_p = -\frac{2i_y^2}{b}. \quad (9-125)$$

Bestetik, y ardatzarekiko biraketa-erradioa hauxe izango da:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{12}hb^3}{bh} = \frac{b^2}{12}, \quad (9-126)$$

eta aplikazio-puntua:

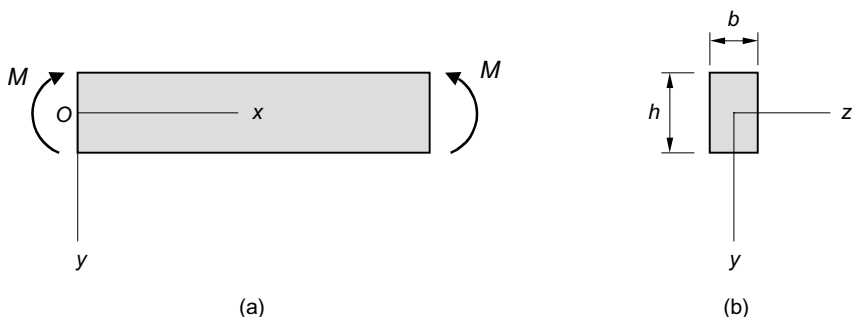
$$z_p = -\frac{b}{6}. \quad (9-127)$$

Beste bi aldeei dagozkien puntuak kalkulatzeko, nahikoa da simetria-propietateak erabiltzea. Ondoren, lau puntuak lotuz, irudian agertzen den erronbo itxurako nukleoa lortuko genuke. Bukatzeko, azal dezagun laburki puntuak lerro zuzenen bidez lotzeko arrazoia. Gorago esan genuen bezala, konpresio-indarra lerro batean zehar mugituz gero, ardatz neutroa aldatu egiten da, baina puntu baten inguruan biratuz. Ondorioz, $(y_p, 0)$ puntutik $(0, z_p)$ puntura pasatzean, indarrak errektangeluaren erpinaren inguruan biratuko du, eta sekzioa trakziozko tentsioetatik babesturik geratuko da. Beste hitz batzuetan esanda, ziur jakin dezakegu ezen, konpresio-indarra lerro honen gainean dagoen bitartean, ardatz neutroa sekzioaren eremutik kanpo egongo dela, eta konpresioa edukiko dugula puntu guztietan.

9.8. MAKURDURA PLASTIKOA

Ardatzeko indarrari eskainitako gaian ikusi genuen bezala, sekzio batzuk isurpenean sartzeak ez du esan nahi egituraren hondamena gertatuko denik nahitaez. Makurdurapean dauden egiturei buruz gauza bera esan dezakegu. Izan ere, material harikor baten sekzioetan punturen batek isurpen-tentsioa gainditu arren, oraindik portaera elastikoa duen sekziozatiak momentu makurtzaileari aurre egiten jarraitu dezake. Gauzak horrela, kalkulu plastikoaren bidez, diseinu elastikoarekin lortutakoak baino egitura arinagoak lor ditzakegu, aplikatutako indarrentzat balio handiagoak onar ditzakegulako.

Zortzigarren gaian egin genuen bezala, makurdurapean dauden habeen portaera plastikoa aztertzeko, deformazioak txikiak direla onartuko dugu, eta baita materialaren trakziozko eta konpresiozko mugak berdinak direla ere. Gainera, Navier-en hipotesiaz baliatuko gara; hau da, deformazioaren ondoren sekzioek lauak eta ardatzarekiko elkarzutak izaten jarraitzen dutela suposatuko dugu.



9.37. irudia.

Makurdura plastikoa aztertzeko, demagun 9.37.a. irudian ageri den habea. Pieza prismatikoko horren muturretan M_z momentu makurtzaileak eragiten du. Analisiarekin hasteko, zeharkako sekzioak simetria bikoitza duela suposatuko dugu, sekzio erretangularraren kasuan gertatzen den bezala (ikus 9.37.b. irudia). M_z momentu makurtzailearen balioa handituz doan neurrian, sekzioko tentsio normalen banaketa nola aldatzen den ikusiko dugu. Hasiera batean, tentsio guztiak σ_f baino txikiagoak direnean, sekzio guztiaren portaera elastikoa da. Ondorioz, tentsio normalen banaketa lineala da eta Navier-en lege ezaguna jarraitzen du (ikus 9.38.a. irudia):

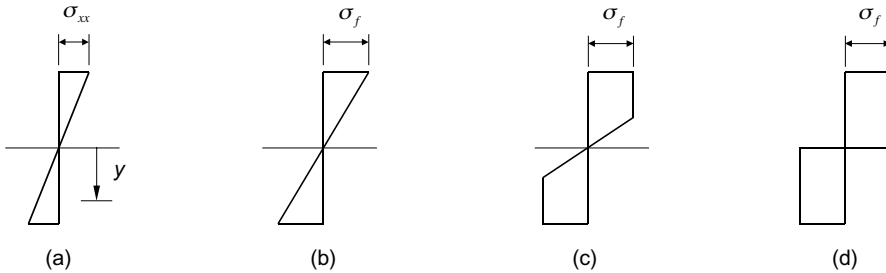
$$\sigma_z = \frac{M_z y}{I_z} \quad (9-128)$$

Hortaz, M_z momentuaren balioa handitu ahala, grabitate-zentrotik urrunen dauden zuntzen tentsioa isurpen-tentsioaren baliora hurbilduko da. Zuntz horietako tentsioa isurpen-tentsioaren berdina denean (ikus 9.38.b. irudia), aplikatutako momentuari *isurpen-momentua* deritzo (M_f) eta honako erlazio hau beteko da:

$$\sigma_f = \frac{M_f y^{\max}}{I_z} = \frac{M_f}{W_z} \quad (9-129)$$

non W_z delakoa makurduraren aurkako erresistentzia-modulua baita. Aldiune hori da Navier-en legea aplika dezakegun azken unea, hortik aurrera materialaren portaera ez baita lineala izango. Sekzio errektangeluarraren kasuan, makurduraren aurkako erresistentzia-moduluak hauxe balio du.

$$W_z = \frac{I_z}{y^{\max}} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}. \quad (9-130)$$



9.38. irudia.

Hortaz, (9-129) ekuazioan ordeztuz, sekzio errektangeluarraren isurpen-momentua kalkula dezakegu:

$$M_f = \sigma_f \frac{bh^2}{6}. \quad (9-131)$$

Aplikatutako momentua M_f isurpen-momentua baino handiagoa denean, tentsio-banaketak 9.38.c. irudiko itxura edukiko luke. Materiala elastoplastiko perfektua dela onartu dugunez, isurpen-tentsiora iritsi diren zuntzen tentsioa ezin daiteke gehiago handitu. Ondorioz, sekzioko beste zuntzak isurpenean sartzen hasiko dira, z ardatzetik urrunen daudenetatik hasita. Irudian ikusten den bezala, sekzioaren zati bateko tentsioek isurpen-tentsioa baino txikiagoak izaten jarraituko dute; hau da, sekzioaren barnealdean materialaren portaera elastikoa izango da oraindik. Portaera elastikoa duen eremu horri *nukleo elastikoa* deritzo. Gainera, sekzioa z ardatzarekiko simetrikoa denez, ardatz neutroa grabitate-zentrotik pasatuko da. Nukleo elastikoa bukatzen den zuntzetako deformazioari ϵ_f deituko diogu. Deformazio hori kalkulatzeko, Hooke-ren legeaz balia gaitzeko, puntu horretako materialaren portaerak lineala izaten jarraitzen duelako. Deformazioaren ondoren sekzioak laua izaten jarraitzen duenez, zuntz horretako deformazio unitarioa ezagutuz gero, beste edozein puntutakoa kalkula dezakegu.

Momentu makurtzailea handitzen jarraituz gero, 9.38.d. irudiko egoerara iritsiko ginateke, puntu guztietako tentsioa isurpen-tentsioa izanik. Egoera horri dagokion momentu makurtzaileari *momentu plastikoa* edo *azken momentua* deritzo, eta M_p letraz izendatuko dugu. Momentu hori sekzioak onar dezakeen handiena da. Azpimarratu behar da, halere, sekzioaren hutsegitea M_p baliora iritsi baino zertxobait lehenago gertatzen dela, *nukleo elastikoa* oso txiki bihurtzen denean. Momentu plastiko horren balioa kalkulatzeko Navier-en legea erabil ezin daitekeenez, estatikaren legeetan oinarritu behar dugu. Hau da,

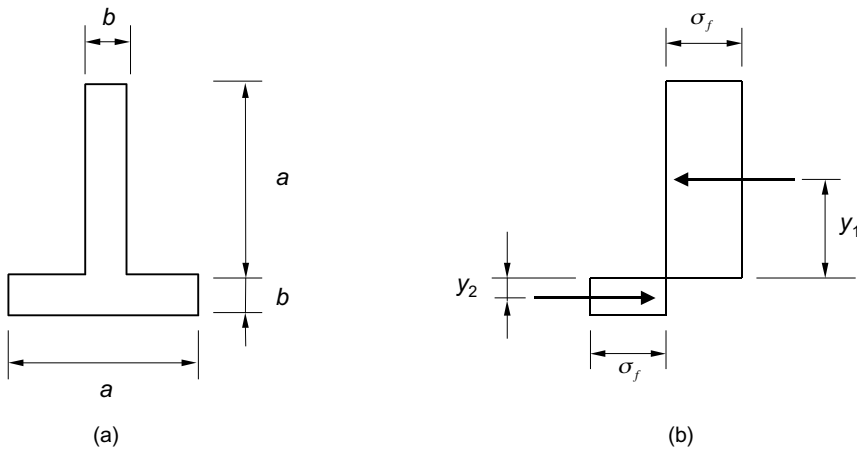
tentsio normalen banaketak z ardatzaren inguruan ematen duen momentua eta M_p momentu plastikoa berdinak izan behar dira. Zuntz neutroaren alde batean eta bestean dauzkagun tentsioen erresultanteak d distantziara kokatuta badaude, momentua honako hau izango da:

$$M_f = F \cdot d = \sigma_f \frac{A}{2} d, \quad (9-132)$$

hemen A delakoa zeharkako sekzioaren azalera izanik. Sekzioa errektangeluarra denean $d = h/2$ denez, momentu plastikoak hauxe balio du:

$$M_f = \sigma_f \frac{bh^2}{4}. \quad (9-133)$$

Honelatan, bada, M_p momentu plastikoaren balioa kalkulatzeko oinarritzkoa da makurdupean dauden egituren kalkulu plastikoa egin ahal izateko. Gutxi barru frogatuko dugun bezala, sekzio bat zeharo plastifikatzen denean, errotula edo artikulazio plastiko bat agertzen da, biraketari inolako oztoporik jartzen ez diona. Hain zuzen, egitura batean agertzen diren errotula plastikoak ezagutzuz gero, hutsegitea noiz gertatuko den aurrean daiteke.



9.39. irudia.

Sekzioa z ardatzarekiko simetrikoa ez denean, ardatz neutroaren posizioa aldatu egiten da. Hori ulertzeko, azter dezagun T itxura duen 9.39.a. irudiko sekzioa. Sekzioaren portaera elastikoa den bitartean, ardatz neutroa sekzioaren grabitate-zentrotik pasatuko da. Zuntzak plastifikatuz doazen neurrian, ordea, ardatz neutroaren posizioa aldatuz doa, indarren baturak nulua izaten jarrai dezan. Sekzioa guztiz plastifikatzen denean, ardatz neutroaren posizioa hasierakoaren desberdina da. Ikus dezagun zein den bukaerako koka-pena. Ardatzaren norabidean indarren batura nulua izan dadin, 9.39.b. irudian ageri diren bi indarrek berdinak izan beharko dute. Beraz:

$$\sigma_f A_1 = \sigma_f A_2 \quad (9-134)$$

izango da, A_1 eta A_2 direlakoak ardatz neutroaren gainetik eta azpitik gelditzen diren azalera izanik. Honelatan, bada, (9-134) ekuaziotik, azalera horiek berdinak izan behar dutela ondoriozta daiteke. Bien batura sekzio totala denez, hauxe lortzen da:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2}, \quad (9-135)$$

non A delakoa sekzioaren azalera baita. Ardatz neutroaren azken posizioa topatzeko, beraz, nahikoa da sekzioa azalera berdina duten bi zatitan banatzea. Dagokion momentu plastikoa kalkulatzeko, honako espresio hau erabiliko genuke:

$$M_p = \sigma_f A_1 y_1 + \sigma_f A_2 y_2 = \frac{\sigma_f A}{2} (y_1 + y_2). \quad (9-136)$$

Momentu plastikoaren eta isurpen-momentuaren arteko erlazioari *forma-faktorea* deritzo, eta honelaxe adierazten da:

$$f = \frac{M_p}{M_f} > 1. \quad (9-137)$$

Koefiziente hori ez dago materialaren isurpen-tentsioaren menpe, sekzioaren geometriaren menpe baizik. Sekzio errektangeluarrentzat, $f = 1,5$ da, zirkularrentzat $f = 1,7$ eta T bikoitz erako sekzioentzat 1,15 eta 1,20 tartean egoten da. Forma-faktoreak portaera elastikoaren bukaera eta sekzioaren ahitzea banatzen dituen tartea nolako den adierazten du. Tarte hori ahalik eta txikiena izatea komeni da, portaera elastikoak ahalik eta denbora gehien iraun dezan hondamenera iritsi baino lehen.

Azter dezagun orain kurbaduraren eta momentu makurtzailearen artean dagoen erlazioa. Gai honetan ikusi dugun bezala, portaera elastikoa denean, sekzio baten kurbadura eta momentu makurtzailea erlazionatzen dituen espresioa honako hau da (ikus 9-14 ekuazioa):

$$k = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (9-138)$$

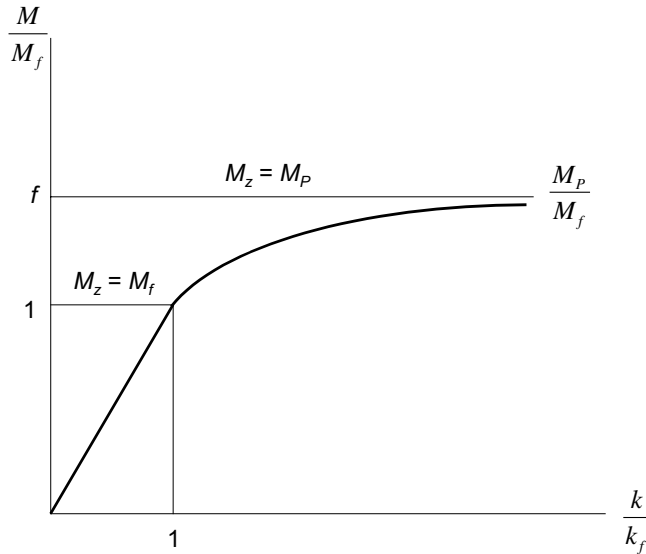
Sekzioko momentua isurpen-momentua denean, kurbadurari k_f deituko diogu eta beraren balioa honako hau izango da:

$$k_f = \frac{M_f}{EI_z}. \quad (9-139)$$

Beraz, (9-138) eta (9-139) ekuazioak atalez atal zatituz,

$$\frac{k}{k_f} = \frac{M}{M_f}, \quad (9-140)$$

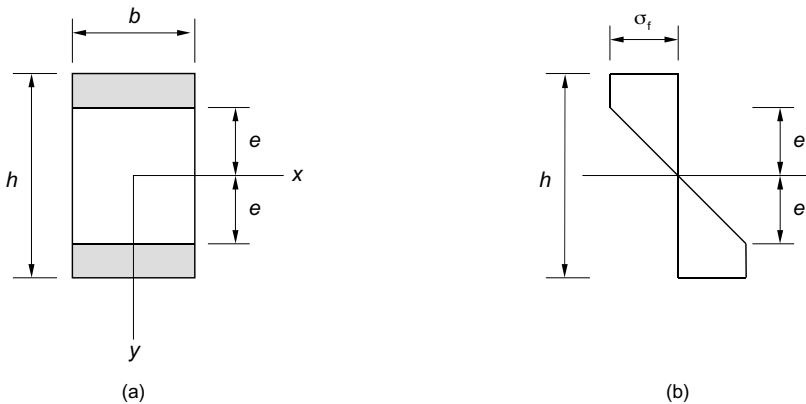
hau da, kurbaduraren eta momentu makurtzailearen arteko erlazioa lineala da. Aplikaturako momentua M_f baino handiago bada, linealtasun hori galdu egiten da, eta malda gero eta txikiago bihurtzen da. Bestalde, M_p baliora gerturazten garen neurrian, kurbadurak infinitura jotzen du. Hain zuzen, 9.40. irudian ikusten den bezala, asintota horren balioa f forma-faktore da.



9.40. irudia.

Kalkula dezagun kurba horren ekuazioa b altuera eta h zabalera dituen sekzio errektangeluar batentzat. Preseski, 9.41. irudian oinarrituz, lehendabizi momentu makurtzailearen espresioa idatziko dugu. Nukleo elastikoaren altuera definitzen duen neurriari e deituko diogu. Estatikaren legeak aplikatuz:

$$M_z = \sigma_f \frac{2}{3} b e^2 + \sigma_f b (h - 2e) \left(\frac{h/2 + e}{2} \right) = \sigma_f \frac{b h^2}{6} \left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right). \quad (9-141)$$



9.41. irudia.

Bestetik, (9-7) ekuazioa gogoratu, sekzioaren kurbadura beste era honetan ere idatz dezakegu:

$$k = \frac{\epsilon}{y} = \frac{\epsilon_f}{e}. \quad (9-142)$$

Hain zuzen, $M = M_f$ denean, $e = h/2$ da. Hortaz, (9-142) ekuazioan ordeztuz,

$$k_f = \frac{2\varepsilon_f}{h}, \quad (9-143)$$

eta beraz,

$$\varepsilon_f = \frac{h}{2} k_f. \quad (9-144)$$

Halaber, (9-144) eta (9-142) ekuazioetatik, erlazio honetara iritsiko ginateke:

$$e = \frac{h}{2} \frac{k_f}{k}. \quad (9-145)$$

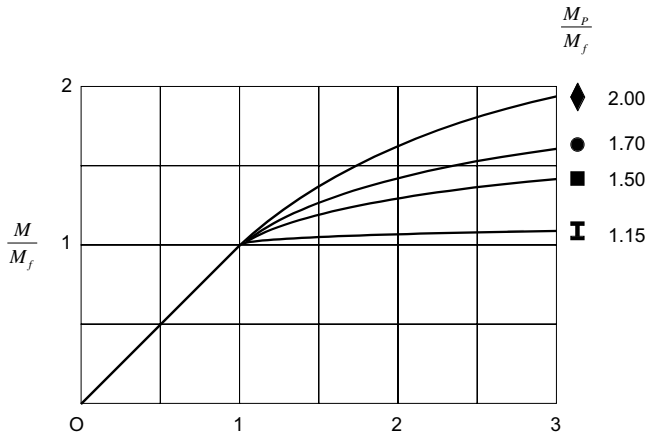
Azkenik, (9-145) ekuazioa (9-141) espresioan ordeztuz gero, hauxe dugu:

$$M_z = M_f \left[1,5 - 0,5 \left(\frac{k_f}{k} \right)^2 \right]. \quad (9-146)$$

Beraz, momentu makurtzailearen eta isurpen-momentuaren arteko erlazioa honelaxe geldituko da:

$$\frac{M_z}{M_f} = 1,5 - 0,5 \left(\frac{k_f}{k} \right)^2. \quad (9-147)$$

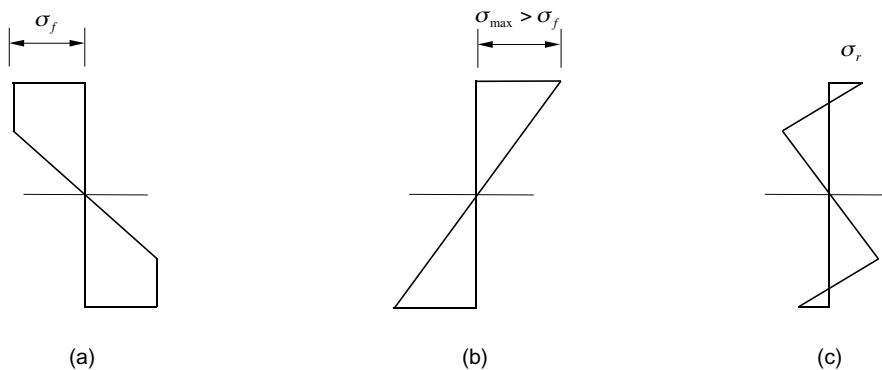
Lorturiko (9-147) ekuaziotik zenbait ondoriotara iritsi gaitzke. Kurbadura handituz doan neurrian, M_z momentuak $1,5M_f$ baliora jotzen du (sezio errektangeluarraren forma-faktorea $f = 1,5$ da, hain zuzen). Momentu makurtzailearen balioa ahitze-momentuaren berdina denean ($M_z = M_p$), kurbadura infinitua egiten da, eta $e = 0$ da. Hau da, nukleo elastikoa desagertu egiten da, eta sekzioko puntu guztietan isurpen-tentsiora iristen gara. Kurbadura infinituak sekzio horretan maldaren aldaketa finitu bat agertzen dela adierazten digu, hots, errotula plastiko bat sortu dela, mekanismo baten antzeko artikulazio bat agertuz. Preseski, 9.42. irudian sekzio desberdinen momentu-kurbadurari dagozkion diagramak jasotzen dira.



9.42. irudia.

Pieza prismatikoekin osatutako egituren kalkulu plastikoa aztertzerako pasatu baino lehen, atal hau bukatzeko, hondar-tentsioei buruz hitz egingo dugu, laburki bada ere. Demagun momentu plastikoa baino handiagoa den momentu makurtzailea aplikatu ondoren 9.43.a. irudiko egoerara iristen garela. Aplikatutako momentuaren noranzkoa 9.37.a. irudikoa da. Ikusten den bezala, sekzioa plastifikatzen hasia da jadanik, zenbait punturen tentsioa isurpen-tentsioaren berdina baita.

Egoera horretan gaudela, demagun momentua aplikatzeari uzten diogula. Sekzioko zati batzuetan isurpena gertatu denez, indarra desagertzean hondar-tentsioak geratuko dira. Hondar-tentsio horiek kalkulatzeko, hasierako momentu makurtzaile berdina aplikatuko dugu, baina aurkako noranzkoarekin, aurreko gaian egin genuen antzera. Era horretan, aplikatutako momentu totala nulua izango da. Ez da ahaztu behar, halere, deskarga-prozesua lineala izango dela. Beraz, aurkako noranzkoa duen momentu horrek sortzen duen tentsio-banaketa lineala izango da, tentsio maximoak isurpen-tentsioa gaingituko duen arren (ikus 9.43.b. irudia). Bi tentsio-banaketa horiek batuz gero, bukaeran gelditzen diren hondar-tentsioak (hots, σ_r) lortuko genituzke, 9.43.c. irudian agertzen den bezala.



9.43. irudia.

Arestian egin dugun garapenean, eragiten zuen esfortzu bakarra momentu makurtzailea zela onartu dugu, hots, sekzioan makurdura hutsa geneukala. Errealitatean egoera hori sarritan gertatzen ez den arren, makurdura bakuna edo konposatua dauzkagunean lehen lortutako emaitzak aplikatzen segi dezakegula onartuko dugu, zeren indar ebakitzai-learen eta ardatzeko indarraren eragina txikia dela froga baitaiteke.

Arestian ikusi dugun bezala, sekzio bat guztiz plastifikatzen denean, errotula plastikoa agertzen da. Egituren kalkulu plastikoan errotula plastiko horietaz baliatuko gara ahitzekarga —hots, onar daitekeen kargarik handiena— kalkulatzeko. Egitura isostatikoa bada, errotula plastiko bat agertzea nahikoa izango da egituraren hondamena gertatzeko, mekanismo higikor bihurtuko baita. Azken kargaren edo karga plastikoaren balioa kalkulatzeko, errotula plastikoa agertzen den sekzioan momentu makurtzailea M_p izan behar dela inosatuko dugu. Hori ulertzeko, 9.44. irudiko habea erabiliko dugu adibide gisa. 9.44.a. irudian ikusten den bezala, momentu makurtzailea M_f isurpen-momentua baino handiagoa den sekzioetan, plastifikatutako zatiak ageri dira. Momentua handiagoa duten sekzioetan, isurpenean sartutako zatien hedadura ere handiagoa izango da. Irudiko habean momentu

makurtzaile handiena duen sekzioa erdiko denez, horixe izango da M_P momentu plastikora iritsiko den lehena. Hori gertatzean, sekzioan errotula plastikoa agertuko da, eta habeak ezin izango du P indar bertikalari eusten jarraitu (ikus 9.44.b. irudia). Erdiko sekzioaren momentu makurtzailea hauxe da:

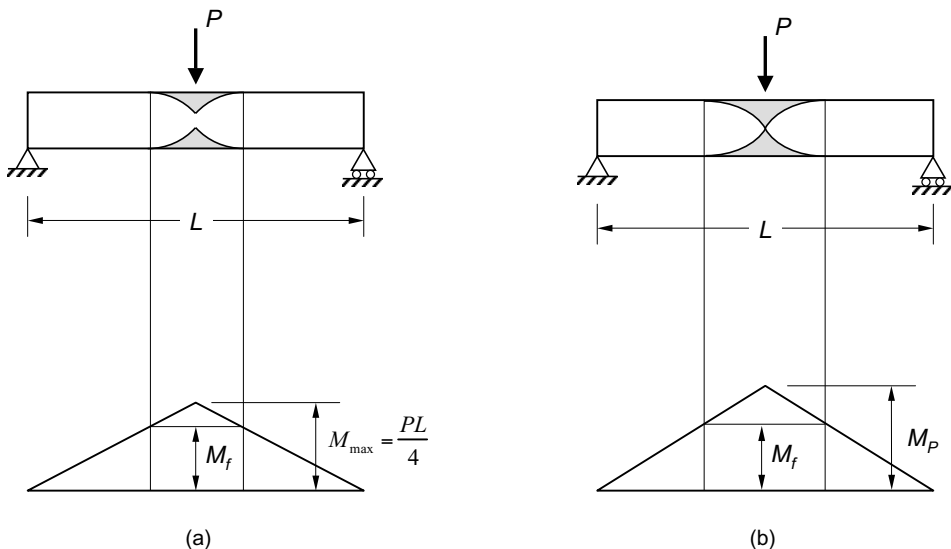
$$M_z = \frac{PL}{4}. \quad (9-148)$$

Beraz, P_P deituko dugun karga plastikoa topatzeko, nahikoa da (9-148) ekuazioko momentua eta M_P momentu plastikoa berdintzea, hots:

$$M_z = \frac{P_P L}{4} = M_P. \quad (9-149)$$

Beraz,

$$P_P = \frac{4M_P}{L}. \quad (9-150)$$



9.44. irudia.

Egitura hiperestatikoa denean, errotula plastiko bat baino gehiago sortu beharko da egituraren hondamena gertatzeko. Errotulen kopuru hori $h + 1$ da, hain zuzen, h delakoa egituraren hiperestatikotasun-maila izanik. Errotulak ager daitezkeen tokiak zehaztu ondoren (momentu makurtzaile handienak dituztenak), konbinazio bakoitzari dagokion P_P karga plastikoa kalkulatu beharko dugu eta, azkenik, txikienarekin gelditu. Karga plastiko hori topatzeko, bi bide jarrai ditzakegu. Aukera bat oreka-ekuazioetan oinarritzea da, eta bestea lan birtualen printzipioa erabiltzea. Adibide gisa, kalkula dezagun 9.45.a. irudian ageri den egituraren karga plastikoa edo ahitze-karga. Egituraren hiperestatikotasun-maila $h = 1$ denez, bi errotula agertu beharko dira egituraren hondamena gertatzeko. Diagramatik erraz

ondoriozta daitekeen bezala (ikus 9.45.b. irudia), errotula horiek landapenean eta P indarra aplikatuta dagoen sekzioan ager daitezke. Bestalde, C sekzioan errotula plastiko bat bada, sekzio horretako momentua M_p dela dakigu. Beraz, oreka-ekuazioak aplikatuz, B muturreko erreazio bertikala (V_B) kalkula dezakegu. Egitura C sekzioan ebaki eta eskuineko alde isolatu ondoren, momentuen batura eginez gero, hauxe lortzen da:

$$V_B \frac{L}{2} = M_p \Rightarrow V_B = \frac{2M_p}{L}. \quad (9-151)$$

Bestetik, A sekzioko errotula plastikoan ere momentuak M_p balio behar duela jakinik, sekzio horrekiko momentuak hartuz gero, hauxe dugu:

$$P_p \frac{L}{2} - V_B L = M_p \Rightarrow P_p = \frac{2}{L}(M_p + V_B L). \quad (9-152)$$

Bukatzeko, (9-151)-ko V_B erreazioaren balioa (9-151) ekuazioan ordeztuz, P_p kargaren balioa lortuko genuke:

$$P_p = \frac{6M_p}{L}. \quad (9-153)$$

Karga plastikoa kalkulatzeko bigarren metodoa lan birtualen printzipioan oinarritzen da. Hauxe dio printzipio horrek: "gorputz bat indar-multzo baten eraginpean orekan bada, eta desplazamendu birtual bat aplikatu ondoren orekan jarraitzen badu, kanpoko indarrek eta barneko indarrek egindako lana berdina da". Aplikatu diezaiogun printzipio hori 9.45. irudiko adibideari. Desplazamendu birtuala aplikatzeko, A muturreko artikulazio plastikoak θ angelua biratzen duela suposatuko dugu. Ondorioz, C sekzioa $\theta L/2$ distantzia jaitsiko da eta C euskarriko artikulazioak θ angelua biratuko du, 9.45.c. irudian ikusten den bezala. Lan birtualen printzipioren arabera, hauxe idatz dezakegu:

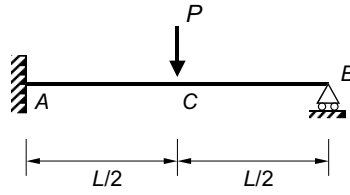
$$P_p \frac{\theta L}{2} = M_p \theta + 2M_p \theta, \quad (9-154)$$

eta beraz,

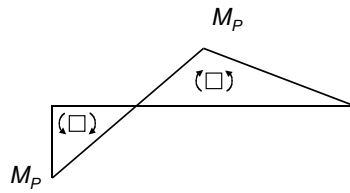
$$P_p = \frac{6M_p}{L}, \quad (9-155)$$

eta hori bat dator (9-153) ekuazioan lortutako emaitzarekin. Azkenik, karga plastiko hori n ziurtasun-koefizientearekin zatituz, karga onargarria (P_{onarg}) lortuko genuke:

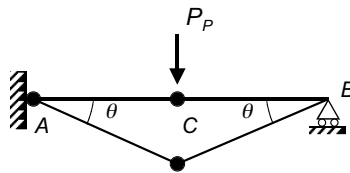
$$P_{\text{onarg}} = \frac{P_p}{n}. \quad (9-156)$$



(a)



(b)



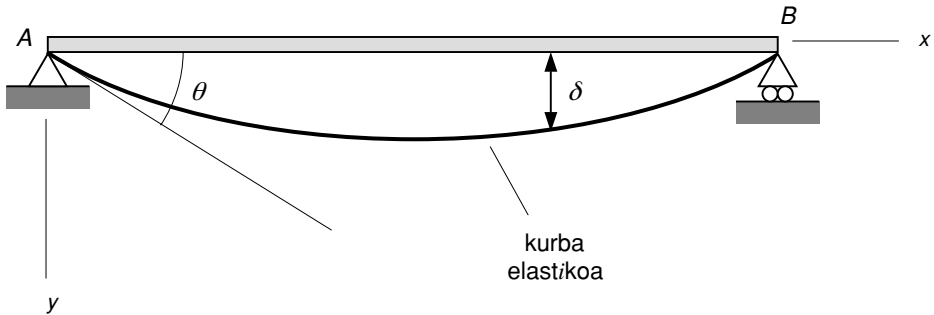
(c)

9.45. irudia.

10. Deformazioak makurdupean

10.1. SARRERA

Gai honetan makurdupean dauden pieza prismaticoen deformazioak kalkulatzeko erabil daitezkeen zenbait metodo ikasiko ditugu. Orain arte, makurdura aztertze orduan sekzioko tentsio eta deformazioetan sakondu dugu, baina ez dugu habeak bere osotasunean aurkezten duen portaera azaldu. Egia esan, piezak eduki ditzakeen mugako baldintzak, —hots, loturak— ez ditugu ezertarako erabili. Halere, pieza prismaticoen deformazioa oinarriko ezaugarri bat da egiturak analizatzeko orduan. Izan ere, gehienetan ez da nahikoa izaten tentsioak muga baten azpitik daudela egiaztatzea. Horrez gain, beharrezkoa da deformazioak gehiegizkoak izango ez direla ziurtatzea, osterantzean arazo ugari ager baitaitezke egituretan. Esate baterako, onartezina da etxebizitza baten solairuetan begi-bistako deformazioak agertzea. Bestalde, zenbait kasutan oreka-ekuazioak ez dira nahikoa izaten egituraren esfortzu eta tentsioak kalkulatzeko. Aipatu genuen bezala, kasu horiei hiperestatikokoak edo zehaztugabeak deritze, eta problema askatu ahal izateko, beharrezkoa da deformazioak ere aztertzea. Arrazoi horiengatik guztiengatik, gai honetan makurdura jasaten duten ardatz zuzeneko pieza prismaticoen deformazioa aztertuko dugu.



10.1. irudia.

Deformazioen kalkuluan murgildu baino lehen, baliagarriak izango zaizkigun zenbait termino definituko ditugu. Pieza prismaticoaren ardatzak deformatu eta gero hartzen duen itxurari *kurba elastikoa* deritzo (ikus 10.1. irudia). Kurba elastiko hori $y = y(x)$ erako funtzio bat izango da, deformazioa plano batean kokatuta dagoenean. Sekzio batek jasaten duen zeharkako desplazamenduari, —hots, y norabidean mugitzen denari— *gezia* deituko diogu (δ). Azkenik, sekzio bateko zuzen ukitzaileak hasierako ardatzarekin (x norabidearekin) osatzen duen angeluari sekzioaren *biraketa* deitzen zaio (θ). Argi dago ezen kurba elastikoaren ekuazio esplizitua ezagutuz gero, sekzio guztien biraketak eta geziak ezagut

ditzakegula. Halere, sarritan ez da beharrezkoa izaten pieza prismatikoaren sekzio guztien desplazamenduak eta biraketak ezagutzea. Gehienetan, nahikoa izaten da sekzio gutxi batzuenak ezagutzea, egituraren portaera nolakoa izango den ezagutzeko.

Deformazioak kalkulatzeko erabil daitezkeen metodoen artean, gai honetan hiru ikusiko ditugu: kurba elastikoaren metodoa (integrazio-metodoa), Mohr-en teoremetan oinarritutakoa eta habe konjokatuarena. Horrez gain, temperaturaren ondorioz sortutako deformazioak ere aztertuko dira. Gaia bukatzeko, laburki bada ere, tentsio ebakitzaleek habeen deformazioan daukaten eraginari buruz hitz egingo dugu.

10.2. KURBA ELASTIKOAREN METODOA

Izan bedi XY planoan kokatutako pieza prismatiko zuzen bat. Kanpoko indarrak zeharka aplikatuta daudela eta ardatzarekiko elkarzutak direla suposatuko dugu. Egoera horretan, piezaren sekzioetan momentu makurtzailea eta indar ebakitzzailea agertuko zaizkigu. Indar ebakitzzaileek habeen deformazioan daukaten eragina mespretxatuz gero, sekzio desberdinen kurbadura kalkulatzeko aurreko gaian ikusi genuen (9-14) erlazioa erabil dezakegu:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (10-1)$$

Bestalde, $y = y(x)$ erako kurba batek puntu batean aurkezten duen kurbadura honako espresio matematiko honen bidez lor daiteke:

$$k = - \frac{d^2 y / dx^2}{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}, \quad (10-2)$$

non zeinu negatiboa 10.1. irudian y ardatzarentzat aukeratu dugun noranzkoaren ondorio den. Ez dezagun ahaztu, halere, orain arte erabili dugun deformazio txikien hipotesia. Horren arabera, dy/dx espresioaren balioa txikia izango da, eta ondorioz, horren karratua beldurrik gabe arbuia dezakegu (10-2) espresioan. Beraz, ekuazioa era honetan laburtzen da:

$$k = - \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (10-3)$$

Bestalde, (10-3) ekuazioa 10.2. irudian oinarrituz lor dezakegu. Izan bitez A eta B direlakoak bata bestetik oso gertu dauden bi sekzio, bien artean kurbaren luzera ds izanik. Irudiko geometria aztertuz, erlazio hau idatz dezakegu:

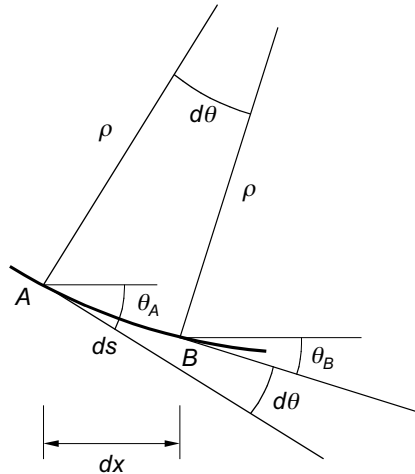
$$ds = \rho d\theta \Rightarrow k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (10-4)$$

Eta (10-4) espresioiko ds segmentua honelaxe kalkula daiteke:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2}, \quad (10-5)$$

eta deformazioak txikiak direla suposatuz:

$$ds = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} \approx dx. \quad (10-6)$$



10.2. irudia.

Hortaz, 10.2. irudian ikusten den bezala, deformazioak txikiak badira, biraketen balioa ere txikia izango da; hau da, lerro ukitzailak ia horizontalak izango dira. Ondorioz, ds segmentua eta bere dx proiektzio horizontala berdinak direla onar daiteke, (10-6) ekuazioan islatzen den bezala. Bestalde, dakigun bezala, funtzioaren deribatua eta ukitzailaren malda elkarren berdinak dira. Berrito ere deformazioak txikiak direla gogoratuz, arku eta ukitzaila berdinak direla suposatuko dugu, era honetan:

$$\theta \approx \tan\theta = -\frac{dy}{dx}, \quad (10-7)$$

non zeinu negatiboa y ardatza beherantz hartzeagatik agertzen baita. Azkenik, kurbadura kalkulatzeko, nahikoa da biraketa deribatzea, eta horrela, lehengo (10-3) ekuazio bera lortuko dugu:

$$k = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{d^2y}{dx^2}. \quad (10-8)$$

Azkenik, (10-1) eta (10-3) ekuazioak berdinduz,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z}. \quad (10-9)$$

Beraz, makurdupean dagoen pieza prismatiko baten kurba elastikoa lortzeko, nahikoa da habearen momentu makurtzaileen diagrama kalkulatu ondoren (10-9) ekuazioa aplikatzea. Behin puntu desberdinen maldak integratu ondoren, biraketak kalkulatu genituzke. Makurdura-zurruntasuna konstantea denean, hauxe idatziko genuke:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \approx \theta = \frac{1}{EI_z} \int_0^x M_z(x) dx + K_1. \quad (10-10)$$

K_1 integrazio-konstantearen balioa kalkulatzeko, landapenean biraketaren balioa nulua dela inposatuko dugu:

$$\theta(x=0) = 0 \Rightarrow K_1 = 0; \quad (10-14)$$

beraz,

$$\theta = \frac{P}{EI_z} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right). \quad (10-15)$$

Eta (10-15) ekuazioa berriro integratuz, kurba elastikoaren ekuazioa lortuko genuke, era honetan:

$$y = \int \frac{P}{EI_z} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{P}{EI_z} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + K_2. \quad (10-16)$$

Bestalde, landapeneko sekzioaren gezia ere nulua denez,

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow K_2 = 0, \quad (10-17)$$

hots,

$$y = \frac{P}{EI_z} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (10-18)$$

Adibidea bukatzeko, ikus dezagun zeintzuk diren B sekzioaren gezia eta biraketa. Biraketa lortzeko, (10-15) ekuazio erabiliko genuke, $x = L$ koordenatua ordeztuz, hots:

$$\theta_B = \theta(x=L) = \frac{PL^2}{2EI_z}, \quad (10-19)$$

eta (10-18) ekuazioaren bidez, gezia lortuko genuke, hau da, sekzioaren desplazamendu bertikala:

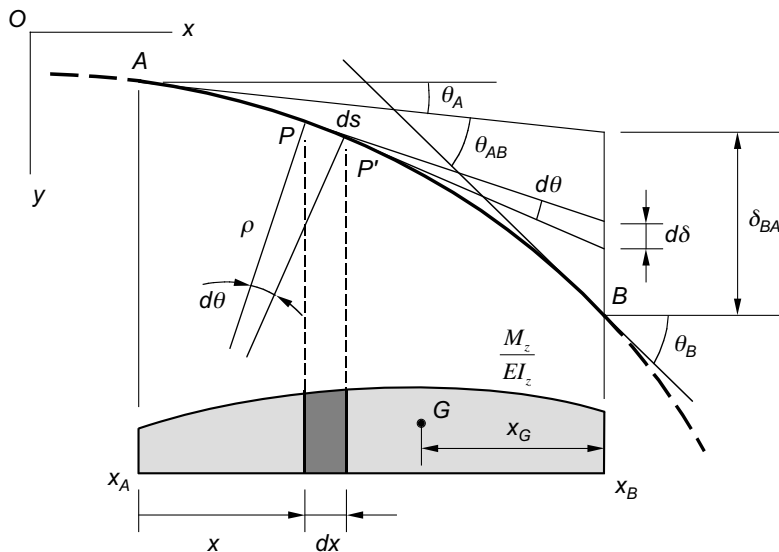
$$y_B = y(x=L) = \frac{PL^3}{3EI_z}. \quad (10-20)$$

Biraketa positiboa denez, orratzen noranzko berdina edukiko du, 10.3. irudian egiazta daitekeen bezala. Geziaren zeinua ere positiboa da, eta, espero zitekeen bezala, B sekzioa beherantz mugituko da. Gainera, iruditik erraz ondoriozta daitekeen bezala, horiexek izango dira habeko biraketa eta gezirik handienak. Beste edozein sekzioren deformazioak kalkulatu nahiko bagenitu, nahikoa litzateke sekzioari dagokion x koordenatua (10-15) eta (10-18) ekuazioetan ordeztea.

10.3. MOMENTUEN AZALAREN METODOA: MOHR-EN TEOREMAK

Atal honetan, makurdupean dauden pieza prismatikoaren deformazioak kalkulatzeko erabil daitekeen beste metodo bat aurkeztuko dugu, *momentuen azalaren metodoa* deitutakoa. Metodo honen bidez, habearen sekzioetako biraketak eta geziak kalkulatu ditzakegu, baina horretarako ez gara, aurreko metodoan bezala, kurba elastikoaren ekuazioan oinarrituko.

Izan ere, erabiliko dugun metodoak ez digu sekzio guztien deformazioa batera eskainiko, guk aukeratutako sekzio bakar batzuenaz baizik. Halere, gehienetan informazio hori nahikoa izaten da, gutxitan interesatzen baita sekzio guztien portaera aztertzea.



10.4. irudia.

Metodo hau kurba elastikoaren propietateetan dago oinarrituta, eta bi teorematan laburtzen da. Ikusiko dugun bezala, momentu makurtzaileen diagramako azalera erabiltzen ditu habearen deformazioa kalkulatu ahal izateko.

Izan bedi A eta B sekzioen artean kokatutako habe-zati bat, 10.4. irudian ikusten den bezala. Zati horri dagokion momentu makurtzaileen diagrama habearen azpian marraztuta ageri dena da, EI_z makurdura-zurruntasunaz zatitu ondoren. Diagrama hori ezaguna dela suposatuko dugu.

Irudian oinarrituz, P sekzio batentzat honako erlazio hau betetzen dela ikus dezakegu:

$$d\theta = \frac{1}{\rho} ds = \frac{M_z}{EI_z} ds. \quad (10-21)$$

Aurreko atalean ikusi genuen bezala, deformazioak txikiak direnean $ds \approx dx$ egin dezakegu, eta beraz, (10-21) ekuazioa honelaxe idatz dezakegu:

$$d\theta = \frac{M_z}{EI_z} dx. \quad (10-22)$$

Lortu dugun espresioak honako hau adierazten digu: bata bestetik oso gertu dauden P eta P' sekzioetan marraztutako ukitzailen arteko angelua, sekzio horien artean kokatutako momentu makurtzaileen diagramak duen azalaren berdina da, azken hori EI_z balioaz zatituta egonik. A sekzioan hasi eta B sekziara iritsi arte P eta P' bezalako sekzioak hartuko bagenitu eta ukitzailerek sortzen dituzten angeluak batuko bagenitu —hots, (10-22) ekuazioa A eta B sekzioen artean integratuko bagenu—, θ_{AB} angelua lortuko genuke:

$$\theta_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_z}{EI_z} dx . \quad (10-23)$$

Preseski, (10-23) espresioari *Mohr-en lehenengo teorema* deritzo, eta kurba elastikoaren sekzioetan marraztutako ukitzailen arteko angelua kalkulatzeko erabil daiteke. Kontuan hartu behar da ezen goiko espresioak ukitzailen arteko angelu erlatiboak baino ez dizkigula ematen, hots, angelu-aldaketak. Beraz, biraketen balio absolutuak kalkulatzeko, beharrezkoa da kurba elastikoaren punturen batean biraketaren balioa ezagutzea, edo segidan ikusiko dugun bigarren teorema erabiltzea.

Hain zuzen, (10.4.) irudira bueltatuz, P eta P' sekzioetako ukitzailak $d\delta$ segmentua definitzen dute B sekziotik marraztutako bertikalaren parean. Deformazioak txikiak direla gogoratuz, segmentu horren balioa honelaxe idatz daiteke:

$$d\delta = (x_B - x)d\theta, \quad (10-24)$$

eta (10-22) erlazioa ordeztuz:

$$d\delta = (x_B - x) \frac{M_z}{EI_z} dx . \quad (10-25)$$

Beraz, B sekzioaren bertikalean P eta P' puntuetako ukitzailak mugatzen duten segmentuaren balioa kalkulatzeko, sekzio horien artean momentu makurtzaileen diagramaren momentu estatikoa kalkulatu behar da, B sekzioarekiko neurtua. Arestian egin dugun bezala, (10-25) espresioa A eta B sekzioen artean integratuz gero, δ_{BA} segmentuaren balioa lortuko genuke, hau da, bi ukitzailen artean dagoen distantzia bertikala B sekzioan neurtua:

$$\delta_{BA} = \int_{\delta_A}^{\delta_B} d\delta = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \frac{M_z}{EI_z} dx . \quad (10-26)$$

Preseski, (10-26) espresioa *Mohr-en bigarren teoremaren* formulazio matematikoa da. Aurreko teoremak bezala, horrek ere balio erlatiboak baino ez ditu ematen. Ondorioz, sekzioen geziak kalkulatzeko, kurba elastikoaren punturen batean desplazamenduak zenbat balio duen jakin beharko dugu. Horrela ez bada, ikusitako bi teoremekin oinarritu beharko dugu, komeni zaigun desplazamendua kalkulatu ahal izateko.

Erabilitako idazkerari ere arreta berezia eskaintzea komeni da. Lehenengo azpindi-zeak ukitzailen arteko distantzia zein sekziotan neurtzen den adierazten digu, eta bigarrenak, aldiz, beste ukitzailaren jatorria. Ondorioz, δ_{BA} eta δ_{AB} ez dira eskuarki berdinak izango; bigarrenak ukitzailak A sekzioan mugatzen duten segmentua adieraziko luke.

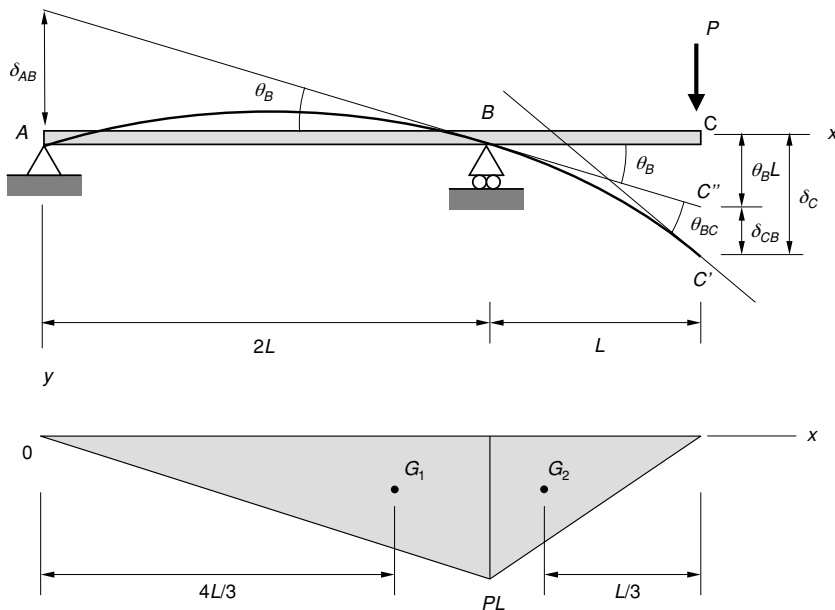
Kalkula ditzagun berriro, adibide gisa, 10.3. irudiko habearen eskuineko muturraren biraketa eta gezia *Mohr-en teoremen* bidez. Ikusten den bezala, B sekzioaren biraketa kalkulatzeko, nahikoa da A eta B sekziotako ukitzailen arteko angelua kalkulatzeko. A muturra landatuta dagoenez, badakigu sekzio horretako biraketa nulua dela, eta erreferentzia gisa erabil daiteke B -ren biraketa lortzeko. *Mohr-en lehenengo teoremaren* arabera, biraketa hori A eta B sekzioen artean dagoen diagramaren azalera izango da, EI_z balioaz zatitua:

$$\theta_B = \theta_{AB} = \frac{1}{EI_z} \frac{(PL)L}{2} = \frac{PL^2}{2EI_z}. \quad (10-27)$$

Ikusten den bezala, kurba elastikoaren ekuazioa integratuz lortutako balio berera iritsi gara. Hortaz, B sekzioaren gezia kalkulatzeko, lehengo bi ukitzaileen artean dagoen distantzia bertikala erabil dezakegu. Izan ere, landapeneko ukitzailea horizontala denez, B sekzioan A -tik eta B -tik marraztutako ukitzaileen artean dagoen distantzia lortu nahi dugun desplazamenduaren berdina da. Beraz, momentu makurtzaileen azaleraren momentu estatikoa kalkulatu beharko genuke B sekzioarekiko. Horretarako, nahikoa da azaleraren balioa bere grabitate-zentrotik B -raino dagoen distantziaz biderkatzea:

$$\delta_B = \delta_{BA} = \frac{1}{EI_z} \frac{(PL)L}{2} \frac{2}{3} L = \frac{PL^3}{3EI_z}. \quad (10-28)$$

Mohr-en teoremekin bukatzeko, azter dezagun 10.5. irudiko adibidea. Kasu horretan, bi euskarriren gainean kokatutako habe bat daukagu, eskuineko C muturrean P indar bertikala jasaten duena. Helburua C sekzioaren biraketa eta desplazamendua kalkulatzeko da. Balio horiek lortzeko, B sekzioan habe deformatuarekiko ukitzailea den zuzen bat marraztuko dugu, irudian ageri den bezala. Sekzio horren biraketa kalkulatzeko, lehendabizi δ_{AB} distantzia lortuko dugu, θ_B biraketa kalkulatzeko balioko diguna.



10.5. irudia.

Hasteko, beraz, δ_{AB} distantzia kalkulatu dugu. Balio hori lortzeko, nahikoa da A sekzioan ukitzailea marraztea eta B -tik datorren ukitzaile-raino dagoen segmentua topatzea, Mohr-en bigarren teoremaz baliatuz. Teorema hori aplikatzeko, ezkerretik hirukiaren

momentu estatikoa kalkulatu behar dugu A sekzioarekiko. Triangeluaren azalera G_1 grabitate-zentrotik A -raino dagoen distantziaz biderkatuz, hauxe lortzen da:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{EI_z} \frac{(PL)(2L)}{2} \frac{2}{3}(2L) = \frac{4PL^3}{3EI_z}. \quad (10-29)$$

Hortik, θ_B biraketaren balioa honako hau izango da:

$$\theta_B = \frac{\delta_{AB}}{2L} = \frac{2PL^2}{3EI_z}. \quad (10-30)$$

B sekzioaren biraketa kalkulatzeko, θ_{BC} biraketa lortzea falta zaigu bakarrik. Angelu hori, 10.5. iruditik ondoriozta daitekeen bezala, B eta C sekzioetako ukitzailen arteko angelua da. Beraz, sekzio horien artean momentu makurtzailen diagramak duen azalera kalkulatu,

$$\theta_{BC} = \frac{1}{EI_z} \frac{(PL)L}{2} = \frac{PL^2}{2EI_z}. \quad (10-31)$$

Azkenik, (10-30) eta (10-31) batuz, C sekzioaren biraketa lor dezakegu:

$$\theta_C = \theta_B + \theta_{BC} = \frac{7PL^2}{6EI_z}. \quad (10-32)$$

C sekzioaren desplazamendua bi zatitan banatuko dugu:

$$\delta_C = CC'' + C''C' \quad (10-33)$$

Lehenengo batugaia kalkulatzeko, (10-30) ekuazioko biraketa erabiliko dugu:

$$CC'' = \theta_B L = \frac{2PL^3}{3EI_z}. \quad (10-34)$$

Bigarren batugaia —hau da, $C''C'$ segmentua— C eta B sekzioetan marraztutako ukitzailen arteko distantzia bertikala da, C sekzioan neurtua. Beraz, Mohr-en bigarren teorema aplikatuko genuke. Eskuineko triangeluaren azalera bere G_2 grabitate-zentrotik C sekziara dagoen distantziaz biderkatuz, hauxe lortzen da:

$$C''C' = \delta_{CB} = \frac{1}{EI_z} \frac{(PL)L}{2} \frac{2}{3} L = \frac{PL^3}{3EI_z}. \quad (10-35)$$

Bukatzeko, (10-34) eta (10-35) ekuazioak batuz, C sekzioaren desplazamendua lortuko genuke:

$$C = CC'' + C''C' = \frac{PL^3}{EI_z}. \quad (10-36)$$

10.4. HABE KONJOKATUAREN METODOA

Ikus dezagun habeen makurdura-deformazioak kalkulatzeko erabil daitekeen beste metodo bat. Metodo horri *habe konjokatuaren metodoa* deritzo, eta zazpigarren gaian ikusitako oreka-ekuazio diferentzialetan oinarritzen da. Suposa dezagun habe irudikari bat, q^* indar banandu baten eraginpean dagoena, indar horren balioa M_z/EI_z izanik. Kurba elastikoaren ekuazio diferentziala hartuz, hauxe idatz dezakegu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = -q^*. \quad (10-37)$$

Bestalde, irudimenezko habean (7-6) eta (7-8) oreka-ekuazio diferentzialak aplikatuz,

$$\begin{aligned} \frac{dM_z^*}{dx} &= V_y, \\ \frac{d^2M_z^*}{dx^2} &= -q^*, \end{aligned} \quad (10-38)$$

non $*$ ikurrak irudimenezko habearen magnitudeak adierazten baititu. (10-37) eta (10-38) ekuazioen artean dagoen berdintasunean oinarrituz, y geziaren balioa M_z^* momentu makurtzailearen parekoa dela ikus daiteke:

$$y = M_z^*. \quad (10-39)$$

Gainera, bi funtzio horiek deribatuz gero, beste paralelotasun hau ere topa dezakegu:

$$y = M_z^* \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dM_z^*}{dx}, \quad (10-40)$$

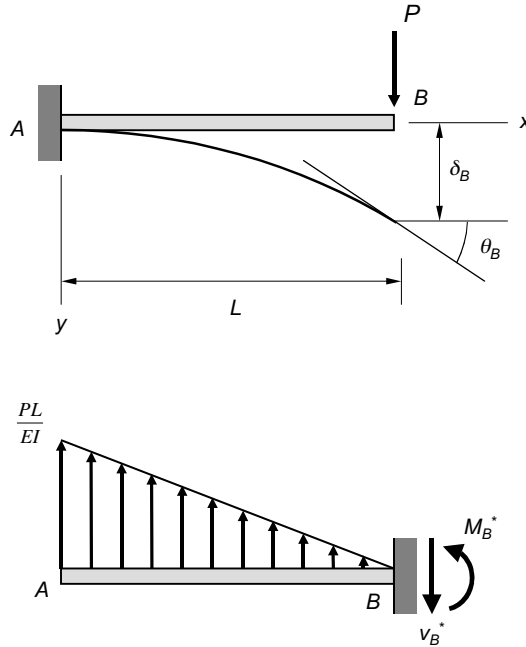
eta beraz,

$$\theta = V_y. \quad (10-41)$$

Hau da, irudimenezko habearen indar ebakitzailea eta benetako habearen biraketak berdina dira. Berezitasun hori duen habeari *habe konjokatu* deritzo. Metodo hau aplikatu ahal izateko, nahikoa da benetako habea habe konjokatu batez ordezte, (10-39) eta (10-41) baldintzak betetzen direla ziurtatuz. Baldintza horiek bete daitezen, beharrezkoa da habe errearen mugako baldintzak aldatzea, hurrengo adibidean ikusiko dugun bezala.

Har dezagun berriro 10.3. irudiko habea eta ikus dezagun nola kalkulatu genituzkeen B sekzioaren biraketa eta desplazamendua habe konjokatuaren metodoa erabiliz. Izatez, A landapenean, biraketa eta gezia nuluak dira. Ondorioz, (10-39) eta (10-41) ekuazioen arabera, irudimenezko habearen muturra askaturik egon behar da, momentu makurtzailea eta indar ebakitzailea nuluak izan daitezen. Alderantziz, habe errearen B muturrean biraketa eta desplazamendua ez dira nuluak. Beraz, habe konjokatuaren landapen bat ipini beharko dugu, momentu makurtzailea eta indar ebakitzailea ager daitezen. Metodo hau aplikatzeko erabili beharko genukeen habe konjokatu 10.6. irudian ikus daiteke.

Habe konjokatu lortu ondoren, B sekzioko biraketa eta gezia lortzeko, nahikoa da oreka-ekuazioen bidez habe konjokatuaren landapenean agertzen diren erreakzioak topatzea. Landapeneko indar ebakitzaileak biraketaren balioa emango digu, eta momentu makurtzaileak geziaren balioa.



10.6. irudia.

Indarren oreka norabide bertikalean aplikatuz, balio hau lortuko genuke landapeneko erreakzio bertikalarentzat:

$$\theta_B = V_B^* = \frac{1}{2} \frac{PL}{EI_z} L = \frac{PL^2}{2EI_z}. \quad (10-42)$$

Bestalde, B sekzioaren gezia kalkulatzeko, momentu makurtzaileen oreka idatziz,

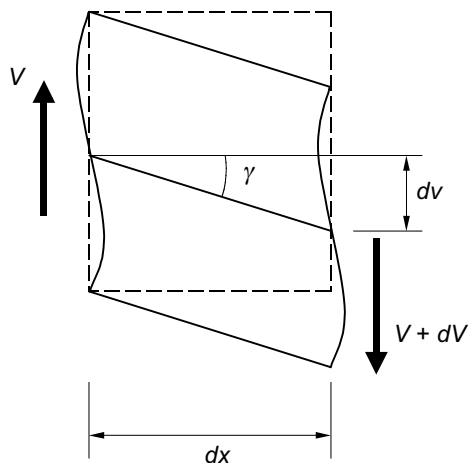
$$y_B = M_B^* = \frac{PL^2}{2EI_z} \frac{2L}{3} = \frac{PL^3}{3EI_z}. \quad (10-43)$$

Ikusten den bezala, metodo honen bidez, habe konjokatua kalkulatu ondoren, nahikoa da habearen barne-esfortzuak kalkulatzeko sekzio guztien biraketak eta geziak ezagutzeko. Hori abantaila garrantzitsua den arren, zenbait kasutan metodo hau oso neketsua bihur daiteke, bi haberekin lan egin behar dugulako, benetakoa eta irudimenezkoa. Gainera, zenbait kasutan habe konjokatua lortzea nahiko bihurria gerta daiteke.

10.5. INDAR EBAKITZAILEAREN ERAGINA

Orain arte habearen deformazioa momentu makurtzailearen eraginez bakarrik agertzen zela suposatu dugu, indar ebakitzai-leak sortutakoa kontuan hartu gabe. Hau da, indar ebakitzai-leak sortzen duen distortsioa arbuigarria dela suposatu dugu. Gehienetan, deformazio hori momentu makurtzaileek sortutakoa baino askoz txikiagoa izaten da, eta mespretxatu egin daiteke. Halere, tentsio ebakitzai-leen ondorioz agertzen diren deformazio angeluarrak

direla eta, orain arte ikusi ez dugun gezi berri bat agertzen da. Atal honetan barne-esfortzu horiek sortzen duten deformazioari buruz hitz egingo dugu.



10.7. irudia.

Hain zuzen, 10.7. irudian dx luzerako elementu baten distortsioa ageri da, indar ebakitzaileen ondorioz sortua. Distortsio horrek sortutako geziak gehienetan txikiak izaten diren arren, zenbait kasutan kontuan hartu behar izaten dira; esate baterako, altuera/luzera erlazio handia duten sekzioetan edo horma meheko pieza prismatikoetan.

Indar ebakitzaileek sortzen duten deformazioa neurtzeko, demagun sekzio simetrikoa duen pieza prismatiko bat, simetria-planoan zamatua. Deformazio angeluarra aurreko gaian ikusitako Colignon-en formularen bidez kalkula daiteke. Ez da ahaztu behar, halere, ekuazio hori Navier-en hipotesian eta oreka-ekuazioetan oinarrituz lortutako espresio bat dela, eta lortzen diren balioak hurbilketak baino ez direla. Deformazio angeluarra, beraz, honako hau izango da:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{V_y Q_z}{G b I_z}, \quad (10-44)$$

eta elastikotasunaren teorian ikusitakoa aplikatuz (ikus 3-14 ekuazioa):

$$\gamma_{xy} = \frac{V_y Q_z}{G b I_z} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (10-45)$$

Bestalde, 9.4. irudian oinarrituz, makurduraren ondorioz sekzioko puntuek x norabidean jasaten duten desplazamendua —hots, u osagaia— honelaxe lor daiteke:

$$u = y\theta \quad (10-46)$$

non θ delakoa sekzioak makurduraren ondorioz biratzen duen angelua den. Makurdura dela-eta norabide bertikalean agertzen den desplazamenduari v_f deituz gero, (10-46) ekuazioa beste era honetan ere idatz dezakegu:

$$u = -y \frac{dv_f}{dx}; \quad (10-47)$$

bertan, zeinu negatiboa y ardatza beherantz zuzenduta dagoelako agertzen da.

Hortaz, (10-45) ekuazioan ordeztuz, hauxe dugu:

$$\frac{V_y Q_z}{G b I_z} = -y \frac{\partial^2 v_f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v_f}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (10-48)$$

non eskuineko ataleko lehen terminoak indar ebakitzailak sortutako kopadura adierazten baitu. Kopadura horren efektua arbuia garria dela suposatuko dugu, hau da, deformatu eta gero sekzioak laua izaten jarraitzen duela onartuko dugu. Ondorioz, deformazioa x -ren funtzioa bakarrik izango da. Alabaina, (10-48) ekuazioko lehenengo atala x -ren nahiz y -ren funtzioa da, eta hori ez dator bat lehen egin dugun hipotesiarekin. Kontraesan hori gainditzeko, τ_{xy} tentsioa sekzioan zehar uniformeki banatzen dela suposatuko dugu, eta egiten den okerra zuzentzeko, κ faktore batez biderkatuko dugu. Beraz, (10-48) espresioa beste era honetan geratuko da:

$$\frac{\kappa V_y}{GA} = -\frac{dv_f}{dx} + \frac{dv}{dx}, \quad (10-49)$$

non A delakoa zeharkako sekzioaren azalera den. Ikus daitekeen bezala, tentsio ebakitzaila kalkulatzeko, Colignon-en ekuazioa erabili beharrean, besterik gabe, indar ebakitzaila sekzioaren azalera zatitu dugu. Balio hori G konstanteaz zatitu ondoren, deformazio angeluarraren balioa lortuko genuke. Batez besteko deformazio hori eta benetako tentsio ebakitzaila aldakorrarekin lortzen dena baliokideak izan daitezten, nahikoa da balio hori κ faktore zuzentzailez biderkatzea. Faktore horren balioak sekzio desberdinentzat kalkula daitezke. Adibidez, sekzio errektangeluarraren kasuan 1,2 balio du. Bestalde, (10-49) ekuazioa beste era honetan ere idatz dezakegu:

$$\frac{\kappa V_y}{GA} = \frac{dv_c}{dx} = -\theta_c, \quad (10-50)$$

non $v_c = v - v_f$ eta θ_c direlakoak indar ebakitzailak sortutako zeharkako deformazioa eta biraketa diren, hurrenez hurren. Bestetik, (10-49) ekuazioa deribatuz, hauxe lortzen da:

$$\frac{\kappa}{GA} \frac{dV_y}{dx} = \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d^2 v_f}{dx^2}. \quad (10-51)$$

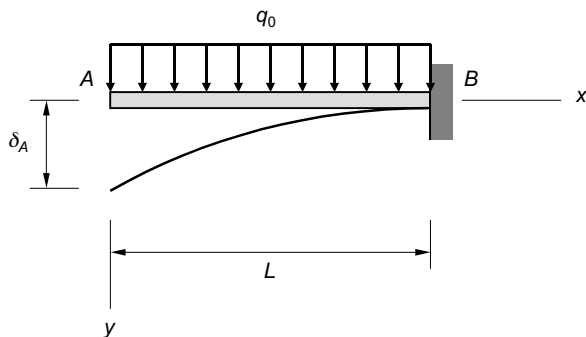
Azkenik, (7-6) espresioiko ekuazio diferentziala gogoratu, eta (10-9) ekuazioan momentu makurtzailearen eta v_f desplazamendu bertikalaren arteko erlazioa erabiliz, honako hau lortuko dugu:

$$-\left(\frac{q\kappa}{GA} + \frac{M_z}{EI_z}\right) = \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (10-52)$$

Espresio horretan, (10-9) ekuazioarekin konparatuz gero agertzen den termino berriak indar ebakitzailak desplazamendu bertikalean duen eragina adierazten du (ikus 10.7. irudia). Honelatan, bada, (10-52) ekuazio diferentzialaren integrazio bikoitzak kurba elas-

tikoaren ekuazioa lortzeko aukera ematen digu. Integrazio hori burutzeko, arestian egin dugun bezala, habearen mugako baldintzak hartu beharko dira kontuan integrazio-konstanteen balioa kalkulatu ahal izateko.

Bukatzeko, esan dezagun ezen, habe laburren kasuan, indar ebakitzailak sortutako deformazioa momentu makurtzaileak sortutakoaren % 5 izan daitekeela, gutxi gorabehera. Ondorioz, gehienetan tentsio ebakitzailen eragina ez da kontuan hartzen deformazioak kalkulatzeko orduan. Adibide gisa, azter dezagun 10.8. irudiko habearen deformazioa. Habea eskuineko muturrean landatuta dago eta $q = q_0$ balio duen indar uniforme baten eraginpean dago.



10.8. irudia.

Landapenean v_c eta v_f -rentzat idatzi behar ditugun mugako baldintzak desberdinak direnez, integrazioa bi zatitan banatuko dugu. Makurdurari dagokionez, sekzio desberdinetan agertuko den momentu makurtzaileak balio du (momentu hau negatiboa izango litzateke zarpigarren gaian onartutako zeinu-irizpidearen arabera):

$$M_z = \frac{qx^2}{2}. \quad (10-53)$$

Beraz, (10-52) ekuazioko makurdura-terminoan ordeztuz, ekuazio diferentzial hau lortuko genuke:

$$\frac{qx^2}{2EI_z} = \frac{d^2v_f}{dx^2}, \quad (10-54)$$

eta bi aldiz integratuz,

$$\begin{aligned} \frac{dv_f}{dx} &= \frac{q_0x^3}{6EI_z} + k_1, \\ v_f &= \frac{q_0x^4}{24EI_z} + k_1x + k_2. \end{aligned} \quad (10-55)$$

Ondoko baldintzak (10-55) ekuazioetan inposatuz, honako hauek ditugu:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv_f}{dx} \right|_{(x=L)} &= 0, \\ v_f \Big|_{(x=L)} &= 0, \end{aligned} \quad (10-56)$$

eta horietatik k_1 eta k_2 konstanteen balioak askatuko genituzke:

$$v_f = \frac{q_0}{24EI_z} (x^4 - 4L^3x + 3L^4). \quad (10-57)$$

Osagai ebakitzailari dagokionez, honako ekuazio hau integratu beharko genuke:

$$-\frac{q\kappa}{GA} = \frac{d^2v_c}{dx^2}. \quad (10-58)$$

Ezkerraldeko atala konstantea denez, lehen eta bigarren integralek hauxe balio dute:

$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{dx} &= -\frac{q_0\kappa}{GA}x + k_1, \\ v_c &= -\frac{q_0\kappa}{GA}\frac{x^2}{2} + k_1x + k_2, \end{aligned} \quad (10-59)$$

eta aplikatu beharreko baldintzak, berriz, hauexek lirategi:

$$\begin{aligned} v_c|_{(x=L)} &= 0, \\ v'_c|_{(x=L)} &= \frac{\kappa V_y}{AG} = -\frac{\kappa q_0 L}{AG}. \end{aligned} \quad (10-60)$$

Bestalde, (10-59) ekuazioan ordeztuz, tentsio ebakitzailak sortutako habe deformatuaren ekuazioa edukiko genuke:

$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{dx} &= -\frac{q_0\kappa}{GA}x + k_1, \\ v_c &= \frac{q_0\kappa}{2GA}(x^2 - L^2). \end{aligned} \quad (10-61)$$

Azkenik, (10-57) eta (10-61) ekuazioak batuz, habearen deformazio totala lor daiteke:

$$v = \frac{q_0}{24EI_z} (x^4 - 4L^3x + 3L^4) + \frac{q_0\kappa}{2GA} (x^2 - L^2). \quad (10-62)$$

Habearen zeharkako sekzioa errektangeluarra dela suposatuz, A mutur askearen desplazamendua hanako hau izango litzateke:

$$\delta_A = v(x=0) = \frac{q_0L^4}{8EI_z} \left[1 + \frac{4}{5} \left(\frac{h}{L} \right)^2 (1 + \nu) \right] \nu, \quad (10-63)$$

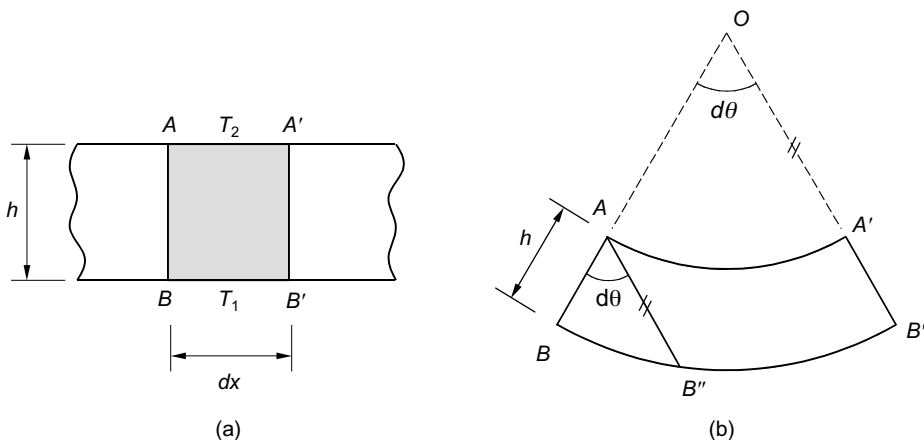
eta hemendik,

$$\delta_A = \frac{q_0L^4}{8EI_z} + \frac{q_0L^2h^2(1+\nu)}{10EI_z}, \quad (10-64)$$

non lehenengo batugaia makurduak sortutako gezia izango litzatekeen, eta bigarrena, indar ebakitzailak sortutakoa. Adibide gisa, sekzioaren altueraren eta luzeraren arteko erlazioa $h/L = 1/5$ dela suposatuz eta $\nu = 0,25$ hartuz, ebakidura-terminoa makurduaren % 4 dela froga daiteke.

10.6. TENPERATURAREN ALDAKETAK SORTUTAKO MAKURDURA

Egitura isostatiko batean tenperatura-aldaketa uniformea agertzen denean, ez da makurdura-tentsiorik agertzen, ezta deformaziorik ere. Izan ere, tenperatura-aldaketa puntu guztietan berdina izanik, egiturako elementu guztiek luzapen-deformazio berbera jasaten dute. Aldiz, tenperatura-aldaketa uniformea ez denean, egoera nahiko desberdina da. Kasu horretan, habearen zuntz guztiek ez dute luzapen berbera jasango eta, ondorioz, ardatza okertu egingo da, makurdura agertuz. Atal honetan tenperatura-aldaketa simple bat aztertuko dugu: sekzioaren ertzean zehar —hau da, norabide bertikalean— tenperatura-aldaketa lineala dugula suposatuko dugu kalkuluak egiteko. Tenperatura txikiena azpiko zuntzei dagokiena dela onartuko dugu (T_1), eta handiena sekzioaren goialdean gertatzen dela (T_2). Beraz, $T_1 < T_2$ izango da. Era horretan, Navier-en hipotesia aplikatzen jarraitzeko aukera edukiko dugu.



10.9. irudia.

Izan bedi 10.9.a. irudiko habe-zatia. Sarritan egin dugun bezala, bata bestetik dx distantzia infinitesimalera dauden bi sekzio hartuko ditugu. Hasierako tenperatura uniformea T_0 izango da. Tenperatura-aldaketa lineala dela onartu dugunez, sekzioaren altueraren erdian balio hau izango du:

$$T_e = \frac{T_1 + T_2}{2}. \quad (10-65)$$

Temperatura-gradiente horren ondorioz, zuntz guztiak luzatu egingo dira. Halere, behealdeko tenperatura goialdekoa baino handiagoa denez, azpiko zuntzak gainekoak baino gehiago luzatuko dira eta habeak okertu egingo da, kurbadura agertuz. Preseski, 10.9.b. irudiko eraikuntza geometrikoan oinarrituz, tenperatura-aldaketak sortutako luzera-aldaketa kalkula dezakegu. Goiko zuntzaren luzapena honako hau izango da:

$$AA' = \alpha(T_2 - T_0)dx, \quad (10-66)$$

zuntzaren hasierako luzera dx baita. Behekoarena, berriz, honako hau:

$$BB' = \alpha(T_1 - T_0)dx. \quad (10-67)$$

Hortik, 10.9.b. irudiko BB'' segmentuaren luzera honako hau izango da:

$$BB'' = BB' - AA' = \alpha(T_1 - T_2)dx. \quad (10-68)$$

Bestalde, berriro irudi berean oinarrituz, BB'' segmentua beste era honetan ere idatz dezakegu:

$$BB'' = hd\theta, \quad (10-69)$$

eta (10-68) eta (10-69) ekuazioak berdinduz:

$$\alpha(T_1 - T_2)dx = hd\theta. \quad (10-70)$$

Beraz, (10-70) espresiotik:

$$\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h} = h \frac{d\theta}{dx}, \quad (10-71)$$

hau da:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h}. \quad (10-72)$$

Ekuazio horrek habearen kurbadura kalkulatzeko balioko digu. Hain zuzen, (10-9) ekuazioa gogoratu, tenperatura-aldaketa uniformearen eragina momentu baliokide baten bidez ere adieraz daiteke:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M_z^{\text{bal}}}{EI_z}, \quad (10-73)$$

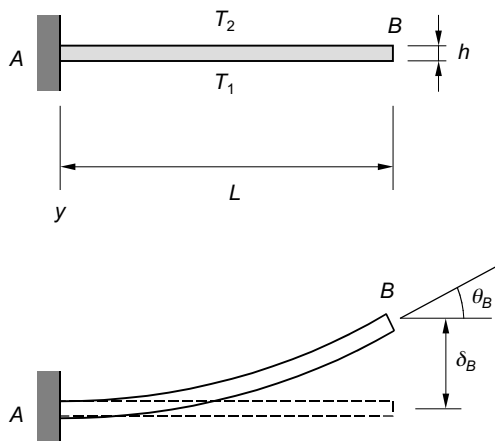
non M_z^{bal} momentu baliokidea honako hau baita:

$$M_z^{\text{bal}} = - \frac{\alpha EI_z (T_1 - T_2)}{h}. \quad (10-74)$$

Ikus dezagun nola aplikatzen diren ekuazio horiek 10.10. irudiko habearen deformazioa kalkulatzeko orduan. Habea landatuta dago ezkerreko muturrean, eta lehen bezala, beheko eta goiko aurpegietako tenperaturak T_1 eta T_2 dira, hurrenez hurren, eta tartean tenperatura-aldaketa lineala da.

Habea landatuta dagoenez, (10-72) ekuazioa integratzeko erabili behar diren mugako baldintzak hauek dira:

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= 0, \\ \frac{dy}{dx}|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \quad (10-75)$$



10.10. irudia.

Honelatan, bada, (10-72) ekuazioaren integraziotik espresio hauek lortzen dira:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h}x + k_1, \quad (10-76)$$

$$y = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{2h}x^2 + k_1x + k_2,$$

eta (10-75) ekuazioetako mugako baldintzak aplikatuta, $k_1 = k_2 = 0$ direnez, azkenik, tenperatura-aldaketak sortutako elastikaren eta biraketaren ekuazioak hauek izango da:

$$\theta = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h}x, \quad (10-77)$$

$$y = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{2h}x^2.$$

Beraz, $x = L$ ordeztuz, B muturraren biraketa eta gezia honako hauek izango dira:

$$\theta_B = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h}L, \quad (10-78)$$

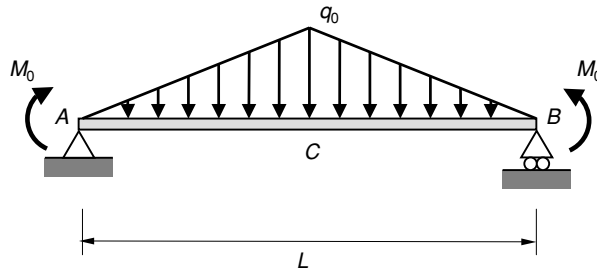
$$y_B = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{2h}L^2.$$

Emaitza berberera iritsiko ginatke, habea (10-74) ekuazioko momentu baliokide konstante baten eraginpean dagoela suposatu izan bagenu. Kontuan hartu behar da, halere, baliokidetasun horrek deformazioak bakarrik kalkulatzeko balio duela. Izan ere, 10.10. irudian ageri den bezalako egitura isostatiko batentzat, ardatza okertu arren, ez da tentsiorik agertuko. Egitura hiperestatiko baten kasuan, aldiz, tentsioak ager daitezke.

10.7. GAINEZARPEN-PRINTZPIOA DEFORMAZIOEN KALKULUAN

Gai honetan zehar makurdupean dauden habeetan agertzen diren deformazioak kalkulatzeko balio duten zenbait metodo ikusi ditugu. Gaia amaitutzat jo aurretik, liburuaren hasieran aipatu genuen gainezarpren-printzipioari buruzko hitz batzuk esatea komeni da. Orduan esan genuen bezala, printzipio hori materialaren portaera elastikoa eta deformazioak txikiak direnean bakarrik da baliozkoa. Baldintza horiek betetzen direnean, gainezarpren-printzipioa oso baliagarria izan daiteke pieza prismatikoen deformazioak kalkulatzeko orduan. Gaian zehar ikusi dugun bezala, deformazioak kalkulatzeko erabili ditugun ekuazioak linealak dira aplikatutako indarrekiko; beraz, karga desberdinekin lortutako desplazamenduak eta biraketak gainezarri egin daitezke azken deformazio totala lortzeko.

Printzipio honen baliagarritasuna indar-egoerak konplikatuak direnean ipintzen da agerian. Izan ere, aplikatutako kargen izaera bihurria denean, habearen agertzen den momentu makurtzaileen diagrama nahiko berezia izan daiteke eta horrekin lan egitea oso neketsua. Alderantziz, gainezarpren-printzipioa aplikatuz gero, indar bakoitza bere aldetik azter daiteke, egoera sinpleagoak lortuz. Gainera, egoera gehientsuenen deformazioak tauletan topa ditzakegu, lana asko erraztuz.



10.11. irudia.

Kalkula dezagun, adibide gisa, 10.11. irudiko habearen erdiko C puntuaren gezia. Habearen muturretako euskarriak artikulatuak dira, eta hiru zama desberdin daude aplikaturik: bi momentu eta triangelu formako karga hedatu bat. Gezi totala kalkulatzeko, lehen-dabizi muturretako momentuek sortzen dutena lortu beharko genuke. Gai honetan ikusitakoa aplikatuz edota taulak erabiliz, geziaren balioa honako hau izango da:

$$\delta_{C1} = \frac{M_0 L^2}{8EI_z} \quad (10-79)$$

Era berean, triangelu formako banaketari dagokion gezia honako hau da:

$$\delta_{C2} = \frac{q_0 L^4}{120EI_z} \quad (10-80)$$

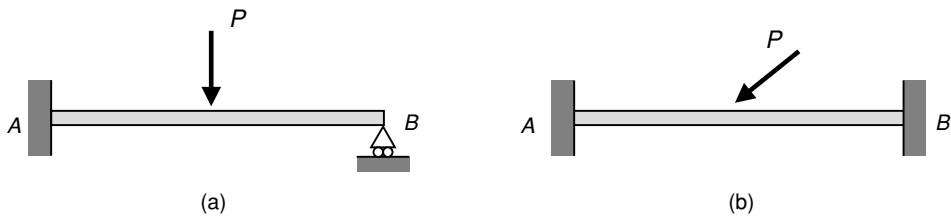
Beraz, gainezarpren-printzipioa aplikatuz, goiko bi geziak batuko genituzke gezi totala kalkulatzeko. Honelaxe:

$$\delta_{C1} + \delta_{C2} = \frac{q_0 L^4}{120EI_z} + \frac{M_0 L^2}{8EI_z} \quad (10-81)$$

11. Egitura hiperestatikoaren kalkulua

11.1. SARRERA

Gai honetan makurdupean dauden habe hiperestatikoaren kalkulua aurkeztuko dugu. Aurreko gai batean aurreratu genuen bezala, egitura hiperestatikoetako erreakzioen kopurua oreka-ekuazioak bakarrik erabiliz kalkula daitekeena baino handiagoa da. Egitura horiek estatikoki zehaztugabeak direla ere esaten da. Orain arte agertu diren adibideetan, egitura guztiak isostatikoak ziren eta nahikoa zen oreka-ekuazioak erabiltzea euskarrietako erreakzioak kalkulatzeko. Erreakzioak lortu ondoren, elementu guztietako barne-indarrak —hots, ardatzekoak, ebakitzaileak eta makurtzaileak— kalkula genitzakeen. Habea hiperestatikoa denean, ordea, oreka-ekuazioez gain, deformazioak ere hartu behar izaten dira kontuan problema askatu ahal izateko. Esaten ari garen hori guztia ezaguna da jadanik, zortzigarren gaian barra-sare hiperestatikoak kalkulatzeko aplikatu baikeuden. Nolanahi den, oraingoan, makurdupean dauden egitura hiperestatikoaren analisia aztertuko dugu, erabil daitezkeen metodoetan sakonduz.



11.1. irudia.

Problema askatzeko falta zaigun ekuazio-kopuruaren arabera, egituraren *hiperestatikotasun-maila* definitzen da. Hiperestatikotasun-maila, h , erreakzio-kopuruaren eta aplikatu daitezkeen oreka-ekuazioen arteko aldea da. Dakigun bezala, problema lauetan hiru oreka-ekuazio erabil ditzakegu, eta hiru dimentsiokoetan, berriz, sei ekuazio. Hain zuzen ere, 11.1. irudian habe hiperestatikoaren bi kasu ageri dira. Adibidez, 11.1.a. irudiko egituraren hiperestatikotasun-maila $h = 1$ da, egitura lau erreakzio agertzen direlako. Aldiz, 11.1.b. irudiko habearen sei erreakzio daude. Beraz, beraren hiperestatikotasun-maila $h = 3$ izango da.

Honelatan, bada, 11.1. irudian ageri diren bezalako egiturak *kanpotik hiperestatikoak* direla esaten da. Hau da, egituraren hiperestatikotasuna sobera dauden euskarrien ondorioa da. Mota horretako egituretan, erreakzioak ezagutu ondoren, egiturako barne-indar guztiak kalkula daitezke. Halere, badaude bestelako egitura hiperestatikoak, *barnetik hiperestatikoak* deitutakoak, hain zuzen. Egitura horietan hiperestatikotasuna egiturako elementuen artean dauden barneko loturen ondorioa da. Egitura horietan, kanpoko erreakzioak oreka-

ekuazioen bidez kalkulatzeko moldatu arren, ez da posiblea izaten barne-indarrak kalkulatzeko jarraitzea deformazioen izaera kontuan hartu gabe. Segidan azalduko dugun bezala, egitura hiperestatikoak kalkulatzeko metodoak bi talde handitan sailka ditzakegu: indarren metodoak eta desplazamenduen metodoak. Gai honetako adibide gehienak indarren metodoan egongo dira oinarriturik. Metodo horiek aurkeztu ondoren, habe jarraituak kalkulatzeko erabiltzen den *hiru momentuen ekuazioa* ondorioztatuko dugu. Gero, makurdurapean dauden habeetako desplazamendu horizontalei buruz hitz egin ondoren, gaia bukatzeko, portiko hiperestatikoaren kalkulua aztertuko dugu.

11.2. EGITURA HIPERESTATIKOEN KALKULURAKO METODOAK

Esan dugun bezala, egitura hiperestatikoak kalkulatzeko erabil daitezkeen metodoak bi taldetan bana daitezke: indarren metodoak eta desplazamenduen metodoak. Kalkulatu beharreko egituraren arabera, bata ala bestea komeni da erabiltzea. Egitura txikien analisirako indarren metodoa eroso eta didaktikoa denez, horixe da gai honetan zehar gehien erabiliko duguna. Halere, egitura handien kasuan gehienetan ezinbestekoa gertatzen da desplazamenduen metodoa erabiltzea, indarren metodoa oso neketsua gerta baitaiteke.

11.2.1. Indarren metodoa

Metodo hau *malgutasun-* edo *bateragarritasun-metodoa* izenaz ere ezagutzen da. Kasu honetan indarrak dira ezezagun modura aukeratzeko direnak. Ezezagunen kopurua hiperestatikotasun-mailaren berdina izango da. “Indar” hitza erabiltzen dugunean, momentuak ere barnean sartuko ditugu. Ezezagun horiei *ezezagun hiperestatikoak* deritze eta kanpoko nahiz barneko indarrak izan daitezke. Hau da, ezezagun modura euskarri bateko erreakzioa erabil dezakegu, edo sekzio baten barneko momentu makurtzailea. Hiperestatikotasun-mailak adierazten duen adina ezezagun aukeratu ondoren, lehenengo pausoa oreka-ekuazioak planteatzea da, solido askearen diagraman oinarrituz. Egitura hiperestatikoa denez, oreka-ekuazioak ez dira nahikoa izango problema askatzeko, eta horregatik, bateragarritasun-ekuazioak gehituko ditugu. Ondoren, bateragarritasun-ekuazio horiek ezezagun hiperestatikoaren funtzioan adierazi behar dira, portaera-legeez baliatuz. Horretarako, indar ezezagunak sortzen dituzten loturak askatuko ditugu, *egitura askatua* deitzen dena lortuz. Beharrezko ekuazio guztiak lortu ondoren, ebatzi egin daiteke sistema, indar ezezagunak kalkulatu. Ezezagun hiperestatikoaren balioak lortu eta gero, barneko esfortzuak, tentsioak eta deformazioak kalkulatzeko gai izango gara.

Adibide gisa, indarren metodoa erabiliz 11.2.a. irudiko zutabea kalkulatu dugu. Irudian ikus daitezkeen bezala, zutabea goiko eta beheko muturretan landatuta dago, eta C sekzioan P indar bertikal batek eragiten du. Indar horren ondorioz, lurrean eta sabaian ardatzaren norabidea edukiko duten bi erreakzio agertuko dira, R_A eta R_B . Ikus dezagun nola kalkula ditzakegun erreakzio horien balioak. Erreakzioen kopurua $r = 2$ da, baina oreka-ekuazio bakarria erabil dezakegu, hain justu ere, indarren batura ardatzaren norabidean nulua dela adierazten duena:

$$R_A + R_B = P. \quad (11-1)$$

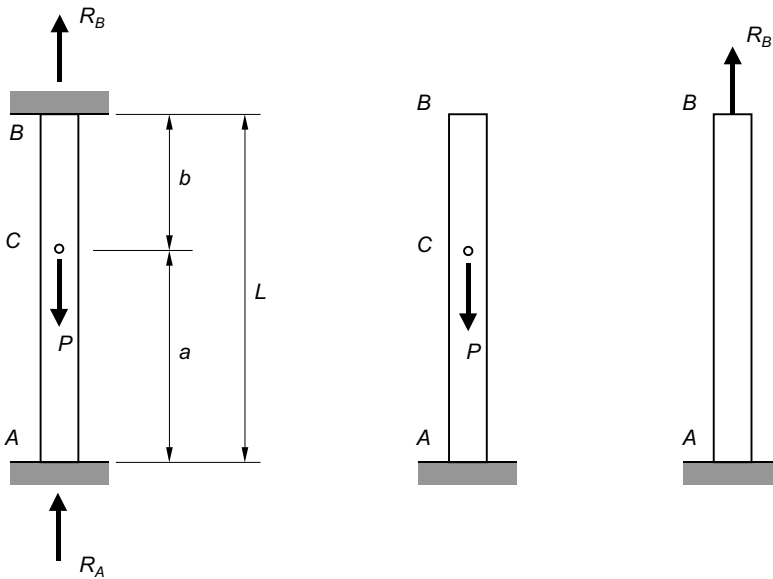
Ikusten den bezala, baldintza estatikoak ez dira nahikoa problema askatzeko, eta bateragarritasun-ekuazioetara jo beharko dugu. Lehendabizi, egituraren hiperestatikotasun-

maila $h = 1$ denez, erreakzioetako bat ezezagun modura aukeratuko dugu; adibidez, sabaian eragiten duen R_B indarra. Ondoren, erreakzio hori sorrarazten duen lotura askatuko dugu, zutabe isostatiko bat lortuz. Deformazioen kalkulua errazteko, aplikatutako P indarra eta R_B erreakzioa bakoitza bere aldetik aztertuko ditugu. Lehenengoaren ondorioz, zutabea laburtu egingo da (ikus 11.2.b. irudia):

$$\delta^P = \frac{Pa}{EA}; \quad (11-2)$$

aldiz, erreakzioak sorturiko luzapena beste hau izango da (ikus 11.2.c. irudia):

$$\delta^{R_B} = \frac{R_B L}{EA}. \quad (11-3)$$



11.2. irudia.

Beraz, gainezarpen-printzipioa aplikatuz, deformazio totala honako hau izango da:

$$\delta = \delta^P - \delta^{R_B}. \quad (11-4)$$

Halere, zutabearen benetako luzera-aldaketa nulua da. Horixe izango da, hain zuzen, aplikatu beharko dugun bateragarritasun-ekuazioa, hots:

$$\delta = 0. \quad (11-5)$$

Alegia, 11-4 ekuazioaren arabera, P indarrak sortutako laburpena eta R_B erreakzioaren luzapena berdinak izan beharko dira:

$$\delta^P = \delta^{R_B}, \quad (11-6)$$

hau da,

$$\frac{R_B L}{EA} = \frac{Pa}{EA}, \quad (11-7)$$

eta hortik:

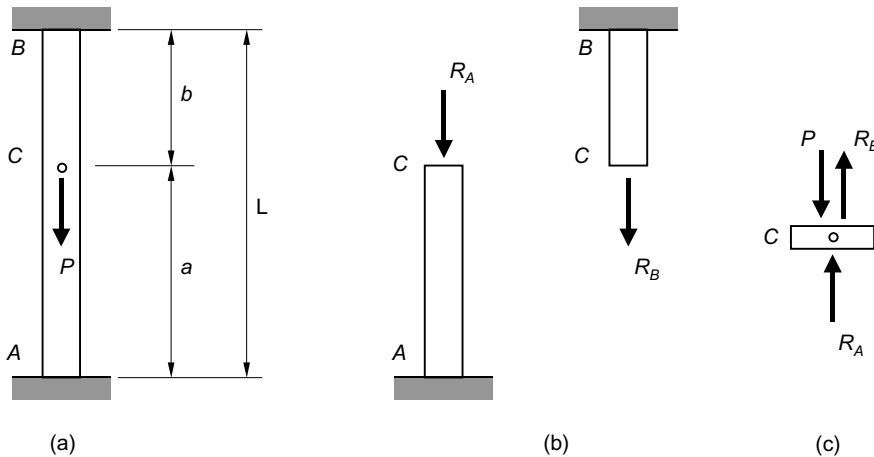
$$R_B = \frac{Pa}{L}. \quad (11-8)$$

Azkenik, (11-8) espresioa (11-1) oreka-ekuazioan ordeztuz, R_A erreakzioaren balioa lortuko dugu:

$$R_A = \frac{Pb}{L}. \quad (11-9)$$

11.2.2. Desplazamenduen metodoa

Metodo honetan ezezagunak desplazamenduak dira, indarrak izan ordeiz. Metodo honi *zurruntasunaren* edo *orekaren metodoa* ere baderitzo. Lehen bezala, hiperstatikotasun-mailak adierazten duen adina desplazamendu ezezagun aukeratu beharko dira. Kasu honetan, abiapuntua bateragarritasun-ekuazioak dira. Ekuazio horiek bakarrik nahikoa izango ez direnez, oreka-ekuazioak gehitu beharko ditugu, portaera-legeen bidez desplazamenduen funtzioan idatzi eta gero. Desplazamenduak askatu ondoren, erreakzioak eta egiturako sekzio guztietan dauden esfortzuak kalkulatu ahal izango ditugu.



11.3. irudia.

Aurreko atalean indarren metodoa azaltzeko erabili dugun adibidea hartuz, oraingoan C sekzioaren desplazamendua erabiliko dugu ezezagun modura. Zutabea sekzio horretatik ebakiz bi zatitan banatuko bagenu, erraz uler daiteke C sekzioaren desplazamenduak berdina izan beharko lukeela biezat, hau da,

$$\delta_C^1 = \delta_C^2 = \delta_C. \quad (11-10)$$

Zati bakoitzak jasaten duen ardatzeko indarra desplazamendu horren funtzioan idatz dezakegu. Adibidez, R_A erreakzioak balio hau edukiko du (ikus 11.3.b. irudia):

$$R_A = \frac{EA}{a} \delta_C, \quad (11-11)$$

eta beste erreakzioak:

$$R_B = \frac{EA}{b} \delta_C. \quad (11-12)$$

Jarraian, 11.3. irudiko elementuan estatikaren legeak aplikatuz:

$$R_A + R_B = P. \quad (11-13)$$

Beraz, (11-11) eta (11-12) ekuazioak (11-13) espresioan ordeztuz, C sekzioaren desplazamendua aska dezakegu:

$$\frac{EA}{a} \delta_C + \frac{EA}{b} \delta_C = P, \quad (11-14)$$

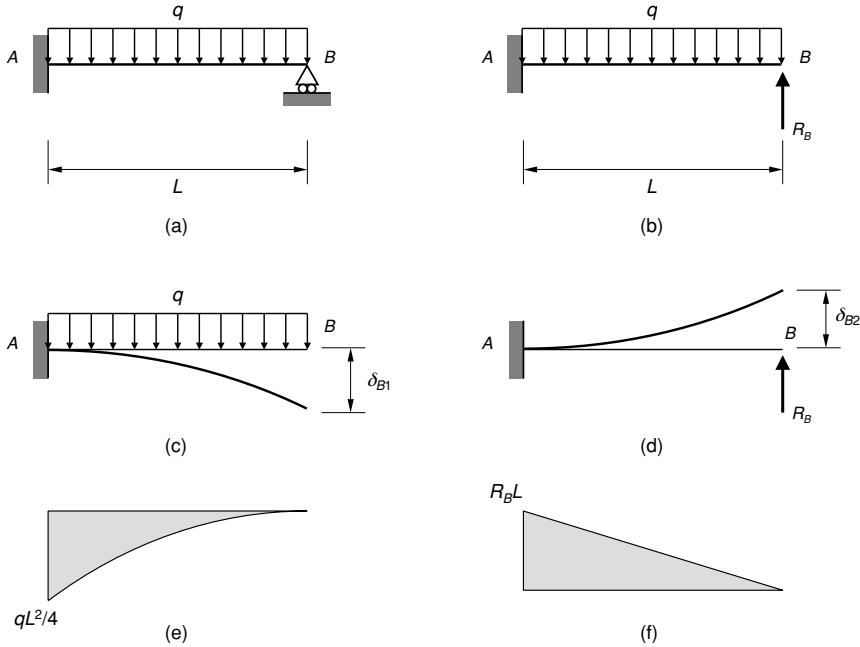
eta $a + b = L$ dela kontuan hartuz,

$$\delta_C = \frac{Pab}{EAL}. \quad (11-15)$$

Desplazamendua lortu eta gero, (11-11) eta (11-12) ekuazioen bidez erreakzioen balioak topa ditzakegu, hots:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{Pb}{L}, \\ R_B &= \frac{Pa}{L}. \end{aligned} \quad (11-16)$$

Ikusten den bezala, aztertu dugun egitura pieza prismatiko bakar batez osatuta dagoenez, ez dago alde handirik indarren eta desplazamenduen metodoaren artean, kalkuluen zailtasunari dagokionez, behintzat. Argi dago, halere, bi metodoek erabiltzen dituzten ikuspuntuak oso desberdinak direla. Dena den, egitura konplexuagoen kasuan, alde handia egon daiteke bi metodo horien artean, eta egitura kalkulatzeko behar den ariketen kopurua oso desberdina izan daiteke batetik bestera. Demagun, adibidez, 11.4. irudian ageri den barra-sarea. Kasu horretan, askoz zuzenagoa da desplazamenduen metodoa erabiltzea egitura kalkulatzeko, ekuazio bakarra askatu beharko genukeelako. Indarren metodoa erabiliz gero, ostera, hiru ekuazioz osatutako sistema bat askatu beharko genuke. Bestalde, indarren metodoa erabiltzen denean, ezezagun hiperestatiko desberdinak erabiltzeko aukera dago. Desplazamenduen metodoan, aldiz, ezezagunak aukeratzeko posibilitate bakarra daukagu, hots, korapiloen desplazamenduak. Berezitasun horrek, beste batzuekin batera, desplazamenduen metodoa oso interesgarria egiten du konputagailuetan programatzeko orduan. Dena den, makurdurapean dauden egiturak kalkulatzeko orduan, liburu honetan indarren metodoa erabiliko dugu, hurrengo ataletan ikusiko den bezala.



11.5. irudia.

Desplazamendua kalkulatzeko, habean eragiten duten indarrak bakoitza bere aldetik aztertuko ditugu. Hau da, lehendabizi indar hedatuak B muturrean sortzen duen desplazamendu bertikala kalkulatu dugu, eta ondoren, erreakzioak sortzen duena. Gainezarpentzipioa aplikatuz B -ren desplazamendu totala lortuko dugu. Esaterako, 11.5.c. irudiko δ_{B1} gezia lortzeko, Mohr-en bigarren teorema oinarrituko gara. Desplazamendu hori lortzeko, nahikoa da 11.5.e. irudiko diagramaren azaleraren momentu estatikoa B -tik pasatzen den bertikalarekiko kalkulatzeko. Erreferentzia-sistemaren jatorria B puntuan hartuz, momentuen diagramaren ekuazioa hauxe izango litzateke:

$$M_z = \frac{qx^2}{2}, \quad (11-18)$$

eta desplazamendua (10-26) ekuazioan oinarrituz lortuko genuke:

$$\delta_{B1} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L \frac{qx^2}{2} x dx = \frac{qx^4}{8EI_z} \Big|_0^L = \frac{qL^4}{8EI_z}. \quad (11-19)$$

Ezezagun hiperestatikoari dagokion δ_{B2} desplazamendua kalkulatzeko, momentuen diagramako triangeluaren momentu estatikoa kalkulatu behar dugu, B -tik pasatzen den bertikalarekiko:

$$\delta_{B2} = \frac{1}{EI_z} \frac{(R_B L)L}{2} \frac{2}{3} L = \frac{R_B L^3}{3EI_z}. \quad (11-20)$$

Bestetik, (11-17) ekuazioko bateragarritasun-ekuazioa inposatuz, R_B ezezaguna kalkulatu dezakegu:

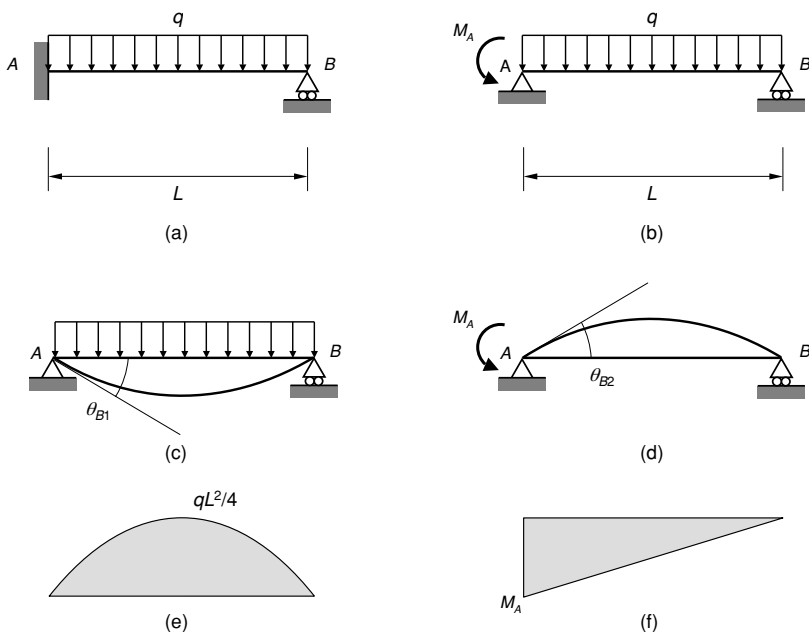
$$\frac{R_B L^3}{3EI_z} = \frac{qL^4}{8EI_z} \Rightarrow R_B = \frac{3qL}{8} \quad (11-21)$$

Ezezagun hiperestatikoaren balioa kalkulatu ondoren, habeko beste esfortzu eta erreakzio guztiak kalkulatu ditzakegu (ardatzeko indarrak, indar ebakitzaileak eta momentu makurtzaileak). Horiek lortzeko, nahikoa da oreka-ekuazioak aplikatzea. Adibide gisa, A muturreko momentua kalkulatzeko nahiko bagenu, momentuen baturak z ardatzaren inguruan zero balio behar duela inposatuko genuke:

$$M_A = qL \frac{L}{2} - R_B L = \frac{qL^2}{2} - \frac{3qL^2}{8} = \frac{qL^2}{8} \quad (11-22)$$

Dena den, 11.6.a. irudiko habea aztertzeko R_B erreakzioa hartu dugun bezala, beste edozein indar edo momentu aukera dezakegu ezezagun hiperestatiko modura. Berregin dezagun lehenengo adibidea, baina oraingoan A landapeneko momentua hartuko dugu ezezagun hiperestatiko gisa. Beraz, A muturreko biraketa libre utzi beharko genuke eta bere tokian landapenak sortzen duen momentu makurtzailea gehitu (ikus 11.6.b. irudia). Irudian ikus daitezkeen bezala, A muturreko biraketa askatzean, 11.6.b. irudiko habea isostatikoak libreki bira dezake ezkerreko sekzioan. Halere, benetako habea landatuta dagoenez, sekzio horren biraketak nulua izan behar du. Ondorioz, erabili behar dugun bateragarritasun-ekuazioa honako hau da:

$$\theta_A = 0. \quad (11-23)$$



11.6. irudia.

Biraketa hori kalkulatzeko, aurreko kasuko pauso berak emango genituzke, hau da, lehenik indar hedatuak eta momentu makurtzaileak sortzen dituzten θ_{B1} eta θ_{B2} biraketak kalkulatu, eta ondoren, gainezarpen-printzipioa aplikatu, biraketa totala kalkulatzeko. Kasu horretan, 11.6.e. irudiko diagraman agertzen den ekuazioa honako hau da (x ardatzaren jatorria A muturrean hartuko dugu):

$$M_z = \frac{q}{2}x(L-x). \quad (11-24)$$

Biraketa kalkulatzeko, erdiko sekzioan malda nulua dela hartuko dugu kontuan, eta Mohr-en lehenengo teoremaz baliatuko gara. A sekzioaren eta erdiko sekzioaren ukitzailak osatzen duten angelua —hots, lortzea nahi dugun θ_{B1} biraketa— hauxe izango litzateke:

$$\theta_{B1} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L \frac{q}{2}x(L-x)dx = \frac{q}{2} \left(\frac{x^2}{2}L - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^{L/2} = \frac{qL^3}{24EI_z}. \quad (11-25)$$

Bestalde, ezezagun hiperestatikoak sortzen duen biraketa kalkulatzeko, A puntuan ukitzaila den lerrotik B sekziora dagoen distantzia lortuko dugu, hau da, δ_{BA} deitzen duguna:

$$\delta_{BA} = \frac{1}{EI_z} \frac{M_A L}{2} \frac{2}{3} L = \frac{M_A L^2}{3EI_z}, \quad (11-26)$$

eta beraz, θ_{B2} biraketak balio hau izango du:

$$\theta_{B2} = \frac{\delta_{BA}}{L} = \frac{M_A L}{3EI_z}. \quad (11-27)$$

Azkenik, (11-23) ekuazioko bateragarritasun-ekuazioa erabiliz:

$$\theta_B = \theta_{B1} - \theta_{B2} = \frac{qL^3}{24EI_z} - \frac{M_A L}{3EI_z} = 0. \quad (11-28)$$

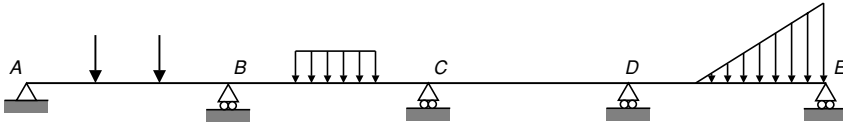
Beraz,

$$M_A = \frac{qL^2}{8} \quad (11-29)$$

da, (11-22) ekuazioan lortutakoarekin bat datorrena.

11.4. HIRU MOMENTUEN EKUAZIOA

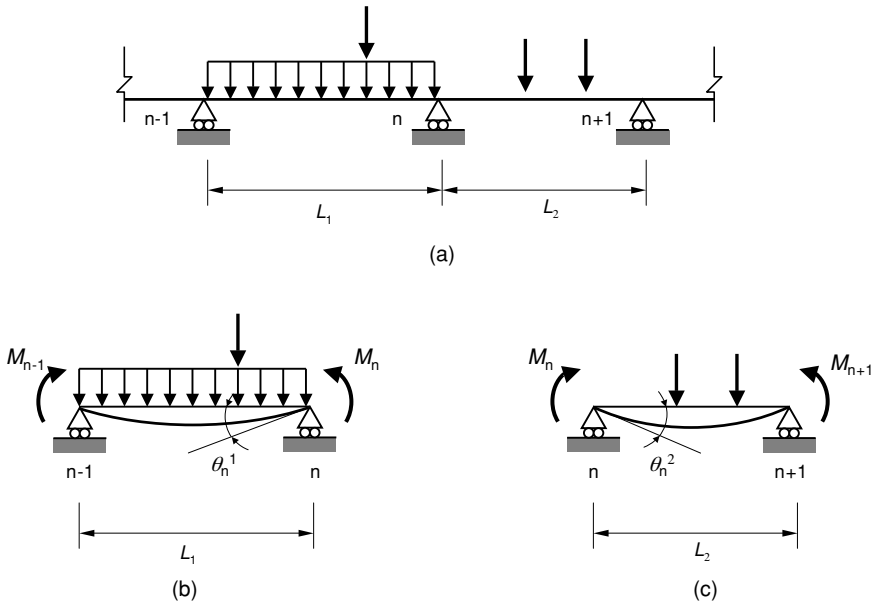
Euskarri artikulatu askoren gainean ezarrita dauden habeei *habe jarraituak* deritze. Mota horretako habek hoditerietan, zubietan eta beste hainbat eraikuntzatan topa daitezke. Habe horietan aplikatutako indarrak bertikalak izaten dira gehienetan; ondorioz, euskarrietan agertzen diren erreakzioak ere bertikalak izango dira, eta ez da ardatzeko deformaziorik agertzen. Egitura horien portaera eskematikoki adierazteko, euskarri artikulatuetakoa bat finkoa dela suposatuko dugu, eta beste guztiak mugikorak, 11.7. irudian azaltzen den bezala.



11.7. irudia.

Habe jarraituen erreakzioen kopurua eta euskarrien kopurua elkarren berdinak dira. Beraz, hiperestatikotasun-maila $h = n - 2$ izango da, n delakoa euskarri kopurua izanik. Adibidez, 11.7. irudiko habe jarraituarentzat hiperestatikotasun-maila hiru baliokoa izango litzateke. Habe jarraituen analisirako, goian ikusitako gainezarpen-printzipioa erabil dezakegu. Ezezagun hiperestatikoak hautatzerako orduan, posibilitate bat erdiko erreakzioak hartzea da, egitura isostatikoa muturretan lotutako habe bat izanik. Aukera hori, halere, ez da oso egokia habeak hiru bao baino gehiago dituenean. Euskarri askoko habeetan, ero-soagoa da ezezagun hiperestatiko modura tarteko euskarrietan dauden momentu makurtzailak aukeratzea. Era horretan, askatu beharreko sistemaren ekuazio bakoitzean ez dira hiru ezezagun baino gehiago agertuko, ezezagun hiperestatikoaren kopurua edozein izanik ere.

Momentu makurtzailak ezezagun hiperestatiko modura erabili ahal izateko, hautsi egin behar da habearen jarraitutasuna, euskarriak dauden sekzioetan habeak ebakiz. Beraz, lortzen den habe berria muturretan artikulatutako zatiez egongo da osatuta. Argiago ikusteko, har ditzagun elkarren ondoan dauden hiru euskarri, 11.8.a. irudian ageri den bezala. Euskarri horiei $n - 1$, n eta $n + 1$ deituko diegu. Euskarrien artean dauden habe-zatiek luzera, sekzio eta material desberdinak eduki ditzakete.



11.8. irudia.

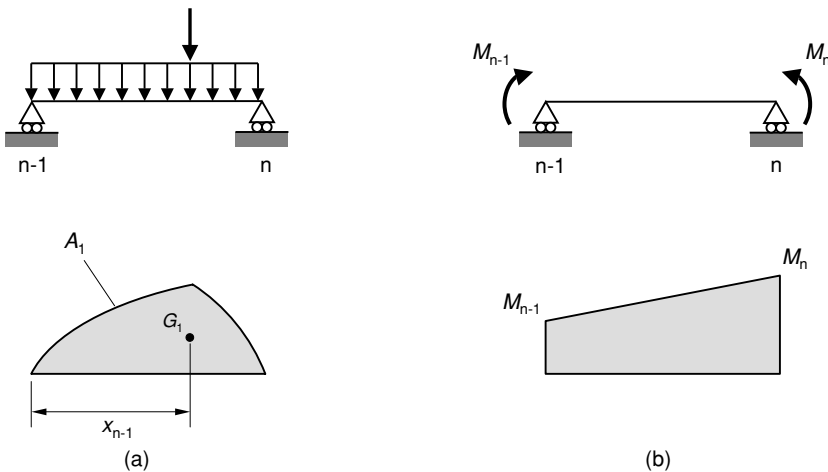
Esan bezala, habea euskarri horiek dauden sekzioetan ebakiko dugu, eta horrela 11.8.b. eta 11.8.c. irudietako habe-zatiak lortuko ditugu. Euskarri-hirukote horientzat agertzen zaizkigun ezezagun hiperestatikoak M_{n-1} , M_n eta M_{n+1} momentu makurtzaileak izango dira. Aplikaturako kanpoko indarren ondorioz, habe horien muturrek biraketa batzuk jasango dituzte. 11.8.b. eta 11.8.c. irudietako biraketa desberdina izango da n deitu dugun sekzioan. Halere, benetako habea jarraitua denez, biraketa erreala berdina izan beharko da bi sekzioetan. Biraketa horien noranzkoa ere berdina izan behar dela kontuan hartuz, aplikatu beharreko bateragarritasun-ekuazioa honako hau izango da:

$$\theta_n^1 = -\theta_n^2 \tag{11-30}$$

Irudian ikus daitekeen bezala, momentu ezezagunen noranzkoak positiboak direla suposatu dugu, eta aplikaturako indarrek ere y ardatzaren noranzko positiboan dutela, hau da, beherantz zuzendurik daudela. Biraketa horiek kalkulatzeko, berriro ere gainezarpen-printzipioa aplikatuko dugu. Has gaitezen lehenik 11.8.b. irudiko habe-zatiarekin. Preseski, 11.9. irudian habe-zati horretan eragiten duten indarrak agertzen dira. Hain justu, 11.9.a. irudian kanpoko indarrak sortzen duen momentu-diagrama marraztu dugu, eta 11.9.b. irudian, berriz, momentu makurtzaileek sortzen dutena. Kanpoko indarrei dagokien biraketa kalkulatzeko, Mohr-en bigarren teorema erabiliko dugu berriro, 11.6. irudiko ariketan egin genuen bezala. Biraketaren balioa hau da:

$$\frac{A_1 x_{n-1}}{E_1 I_1 L_1} \tag{11-31}$$

non E_1 , I_1 eta L_1 direlakoak ezkerreko zatiaren elastikotasun-modulua, inertzia-momentua eta luzera baitira, hurrenez hurren. Bestalde, A_1 delakoa kanpoko indarrei dagokien diagramako azalera da, eta x_{n-1} delakoa grabitate-zentrotik $n - 1$ euskarriaraino dagoen distantzia.



11.9. irudia.

M_n eta M_{n-1} momentu makurtzaileek n muturrean sortzen duten biraketaren balioa hauxe izango da:

$$\frac{M_{n-1}L_1}{6E_1I_1} + \frac{M_nL_1}{3E_1I_1}. \quad (11-32)$$

Beraz, θ_n^1 biraketaren balioa honako hau da:

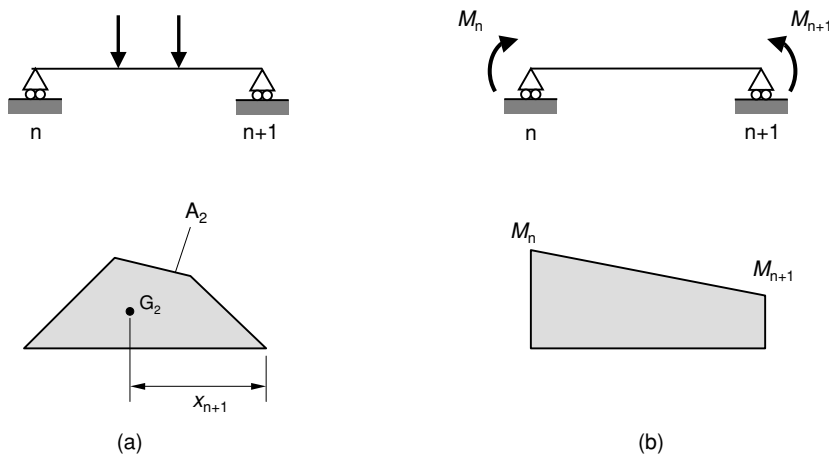
$$\theta_n^1 = \frac{A_1x_{n-1}}{E_1I_1L_1} + \frac{M_{n-1}L_1}{6E_1I_1} + \frac{M_nL_1}{3E_1I_1}. \quad (11-33)$$

Bestalde, θ_n^2 biraketa kalkulatzeko, pauso berberak emango ditugu, baina oraingoan 11.10. irudiko diagrametan oinarrituko gara. Eskuineko zatiaren elastikotasun-modulua, inertzia-momentua eta luzera E_2 , I_2 eta L_2 badira, hurrenez hurren, kanpoko indarrek biraketa hau sortuko dute n korapiloan:

$$\frac{A_2x_{n+1}}{E_2I_2L_2}, \quad (11-34)$$

non A_2 delakoa momentu makurtzaileen diagramako azalera den, eta x_{n+1} delakoa grabitate-zentrotik $n + 1$ euskarriraino dagoen distantzia. Lehen bezala, M_n eta M_{n+1} momentu makurtzaileek sortzen duten biraketa honelaxe lor dezakegu:

$$\frac{M_{n+1}L_2}{6E_2I_2} + \frac{M_nL_2}{3E_2I_2}. \quad (11-35)$$



11.10. irudia.

Beraz, eskuineko habean agertzen den biraketa (11-34) eta (11-35) espresioen batura izango da, hau da:

$$\theta_n^2 = \frac{A_2x_{n+1}}{E_2I_2L_2} + \frac{M_{n+1}L_2}{6E_2I_2} + \frac{M_nL_2}{3E_2I_2}. \quad (11-36)$$

Ikusten den bezala, sekzio baten biraketa (kasu honetan n deitu dugunarena) sekzio horretako eta bere alboan dauden bi sekzioetako momentu hiperestatikoaren funtzioan idatz daiteke. Hain zuzen, (11-33) eta (11-36) ekuazioetako biraketak berdinuz, hiru momentu horiek erlazionatzen dituen ekuazio bat lortuko dugu:

$$\frac{A_1 x_{n-1}}{E_1 I_1 L_1} + \frac{M_{n-1} L_1}{6 E_1 I_1} + \frac{M_n L_1}{3 E_1 I_1} = - \left(\frac{A_2 x_{n+1}}{E_2 I_2 L_2} + \frac{M_{n+1} L_2}{6 E_2 I_2} + \frac{M_n L_2}{3 E_2 I_2} \right), \quad (11-37)$$

eta terminoak berrantolatuz:

$$\frac{M_{n-1} L_1}{E_1 I_1} + 2 M_n \left(\frac{L_1}{E_1 I_1} + \frac{L_2}{E_2 I_2} \right) + \frac{M_{n+1} L_2}{E_2 I_2} = -6 \left(\frac{A_1 x_{n-1}}{E_1 I_1 L_1} + \frac{A_2 x_{n+1}}{E_2 I_2 L_2} \right). \quad (11-38)$$

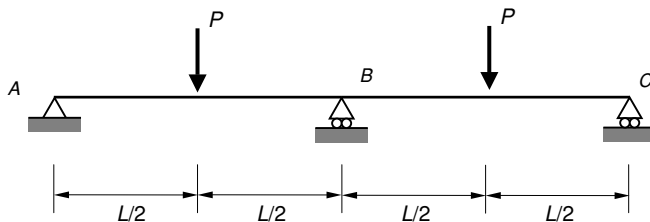
Preseski, (11-38) ekuazioari *hiru momentuen ekuazioa* deritzo. Ekuazio hori habe jarraituan zehar euskarri-hirukoteak hartutik aplikatuz gero, $n - 2$ ekuazioko sistema bat lortuko dugu, momentu ezezagunak kalkulatzeko balioko diguna. Habeko bao guztien materiala eta inertzia-momentuak berdinak direnean, (11-38) ekuazioa honelaxe sinplifika daiteke:

$$M_{n-1} L_1 + 2 M_n (L_1 + L_2) + M_{n+1} L_2 = -6 \left(\frac{A_1 x_{n-1}}{L_1} + \frac{A_2 x_{n+1}}{L_2} \right), \quad (11-39)$$

eta zati guztien luzerak ere berdinak direnean, honelaxe:

$$M_{n-1} + 4 M_n + M_{n+1} = - \frac{6}{L^2} (A_1 x_{n-1} + A_2 x_{n+1}). \quad (11-40)$$

Ezezagun hiperestatikoak lortu ondoren, momentu makurtzaileen diagramak lortzeko, nahikoa da gainezarpen-printzipioa aplikatzea eta kanpoko indarrei eta momentu hiperestatikoei dagozkienak batzea. Euskarrietako erreakzioak kalkulatzeko, gauza bera egin dezakegu edo, nahi izanez gero, habean zehar oreka-ekuazioak aplikatu ditzakegu, euskarrietako sekzioetan momentuak ezagunak izango direlako.



11.11. irudia.

Azter dezagun, adibide moduan, 11.11. irudiko habe jarraitua. Habe horrek hiru euskarri artikulatu eta bi bao ditu. Bi bao horien artean P balioko bi indar bertikalek eragiten dute, erdiko sekzioetan aplikaturik. Euskarrien artean dauden habe zatiek luzera berdinak dituztenez, (11-40) ekuazioa erabiliko dugu ariketa ebazteko. Euskarrien kopurua hiru denez, egituraren hiperestatikotasun maila $h = n - 2 = 1$ izango da. Beraz, ezezagun hiperestatiko bakarra edukiko dugu, hots, B sekzioko momentu makurtzailea. Bestalde, A eta C sekzioetako momentuak nuluak dira. Ezezagun hori kalkulatzeko, nahikoa da kanpoko

indarrek habe-zati bakoitzean sortzen dituzten momentu makurtzaileen diagramak marraztea. Preseski, 11.12.a. eta 11.12.b. irudietan ikus daitekeen bezala, diagrama horiek berdinak dira. Beraz, A_1 eta A_2 deitu ditugun azalerak ere berdinak izango dira, hots:

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2} \frac{PL}{4} L = \frac{PL^2}{8}, \quad (11-41)$$

eta grabitate-zentrotik alboko euskarrietara dauden distantziek balio berdinak edukiko dituzte, irudian ageri den bezala, hau da:

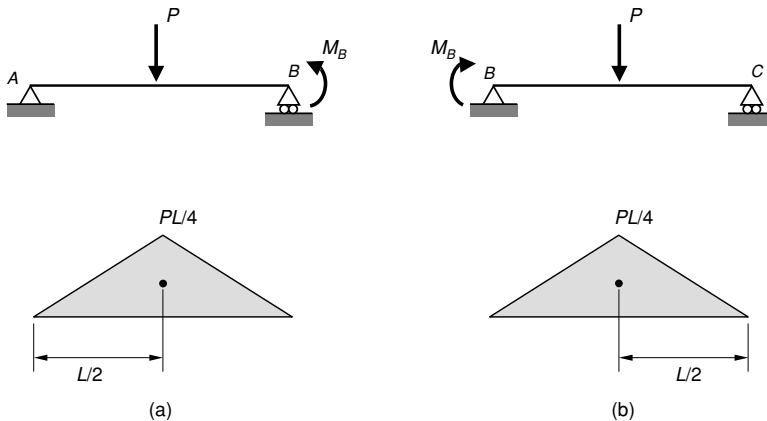
$$x_{n-1} = x_{n+1} = \frac{L}{2}. \quad (11-42)$$

Balio horiek (11-40) espresioan ordeztuz hauxe lortuko genuke:

$$0 + 4M_B + 0 = -\frac{6}{L^2} \left(\frac{PL^2}{8} \frac{L}{2} + \frac{PL^2}{8} \frac{L}{2} \right), \quad (11-43)$$

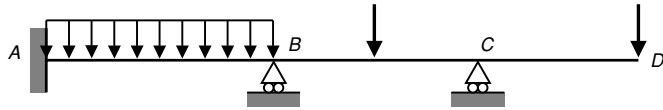
eta M_B momentua askatuz:

$$M_B = \frac{3PL}{16}. \quad (11-44)$$

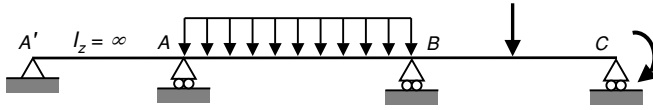


11.12. irudia.

Habe jarraituaren euskarri guztiak artikulatuak ez diren kasuetan ere, (11-38) espresioiko hiru momentuen ekuazioa erabiltzen jarrai dezakegu. Horretarako nahikoa da habearen loturretan aldaketa txiki batzuk egitea, ekuazioa aplikatu ahal izan dadin. Kasurako, izan bedi 11.13.a. irudiko habea. Habe horren ezkerreko muturra landatuta dago, eta eskuinekoan, berriz, ez dago euskarrik. Eskuinaldeko indarra gertuen dagoen euskarriera eraman dezakegu, horrekiko sortzen duen momentua gehituz. Landapenari dagokionez, lotura hori beste habe-zati batez ordezkatu dezakegu. Landapenean biraketa galarazita dagoenez, habe-zati berriaren inertzia-momentua infinitua izan behar da ($I_z = \infty$). Portaera bera lor daiteke, baita ere, luzera nulua dela suposatuz gero ($L = 0$). Habe baliokide horretan kalkulaturako momentuak, benetako habean agertzen direnen berdinak dira. Beraz, ezezagun hiperestatikoak kalkulatu ondoren gehitutako habe-zatiaz ahaztu, eta habe errearen diagramak eta erreakzioak kalkulatu ditzakegu.



(a)



(b)

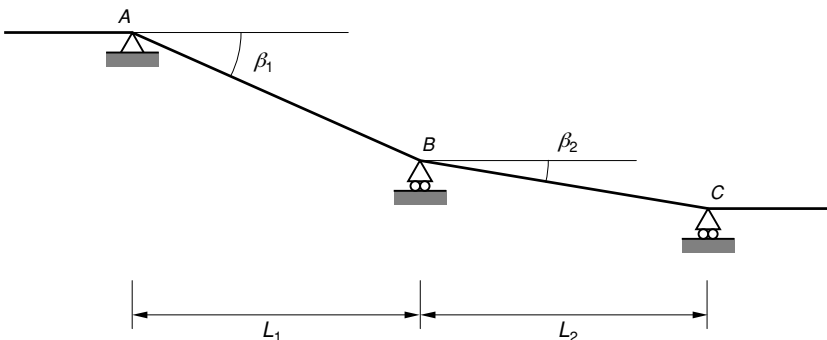
11.13. irudia.

Hiru momentuen ekuazioa are gehiago orokor daiteke, euskarriek jasan ditzaketen beharpen edo asentamenduak ere kontuan hartu ahal izateko. Demagun 11.14. irudiko ha-bearen euskarri guztiek desplazamendu bertikal bat jasaten dutela. Nola isla dezakegu desplazamendu horien eragina (11-38) ekuazioko espresioan? Hiru momentuen ekuazioa lortzeko ebakitako sekzioetan biraketak berdinak izan behar direla inposatu dugu lehenago. Oraingoan ere gauza bera egingo dugu, baina euskarrien beharpenen ondorioz agertzen diren biraketa berriak kontuan hartuz. Erraz kalkula ditzakegu biraketa horien balioak:

$$\beta_1 = \frac{h_n - h_{n-1}}{L_1}, \quad \beta_2 = \frac{h_{n+1} - h_n}{L_2}, \quad (11-45)$$

non h_{n-1} , h_n eta h_{n+1} balioak euskarriek jasaten dituzten beharpenak diren. Beraz, ezkerreko zatian gertatzen den n sekzioaren biraketa berria honako hau izango da (ikus 11.8.b. irudia eta (11-33) ekuazioa):

$$\theta_n^{1'} = \frac{A_1 x_{n-1}}{E_1 I_1 L_1} + \frac{M_{n-1} L_1}{6 E_1 I_1} + \frac{M_n L_1}{3 E_1 I_1} - \beta_1. \quad (11-46)$$



11.14. irudia.

Arrazonomendu bera eginez, eskuineko zatiko biraketa berria beste hau izango litza-teke:

$$\theta_n'^2 = \frac{A_2 x_{n+1}}{E_2 I_2 L_2} + \frac{M_{n+1} L_2}{6 E_2 I_2} + \frac{M_n L_2}{3 E_2 I_2} + \beta_2. \quad (11-47)$$

Beraz, (11-46) eta (11-47) ekuazioak berdinduz, hiru momentuen ekuazio berri hau lortuko genuke:

$$\frac{M_{n-1} L_1}{E_1 I_1} + 2 M_n \left(\frac{L_1}{E_1 I_1} + \frac{L_2}{E_2 I_2} \right) + \frac{M_{n+1} L_2}{E_2 I_2} = -6 \left(\frac{A_1 x_{n-1}}{E_1 I_1 L_1} + \frac{A_2 x_{n+1}}{E_2 I_2 L_2} + \beta_2 - \beta_1 \right). \quad (11-48)$$

Habe jarraituei buruzko azpiatal hau bukatzeko, aipa ditzagun habe horien abantaila eta desabantaila batzuk. Habe jarraituetan ez da tentsiorik agertzen temperatura-aldaketak gertatzen direnean, egitura hiperestatiko bat izan arren. Habe artikulatuekin konparatuz gero, habe jarraituetan momentu makurtzaileen balio maximoak txikiagoak dira, eta deformazio eta tentsioen balioak ere txikiagoak dira. Halere, desabantaila garrantzitsu bat dute: euskarriren batek beherapen bat jasaten badu, horren eragina habe guztian zehar transmititzen da, eta horrek asko zigor dezake egitura. Arazo hori ez da agertzen habe bakar bat erabili beharrean bata bestetik independenteak diren habe-zati artikulatuak erabiltzen baditugu.

11.5. HABEEN DESPLAZAMENDU HORIZONTALAK

Izan bedi 11.15.a. irudiko habea, zeharka aplikatutako indar batzuen eraginpean dagoena. Bertan, A muturreko euskarri artikulatua finkoa da, eta B muturrekoa, mugikorra. Aplikatutako indarren ondorioz habea makurtzen denean, B muturrak λ desplazamendu horizontal bat jasango du, B' posizio berrira pasatuz. Desplazamendu horren balioa lortzeko, kurbatua gelditu den sokaren luzeraren eta horren proiektzio horizontalaren artean dagoen diferentzia kalkulatu dugu. Irudian ds elementu infinitesimal bat eta beraren proiektzio horizontala marraztu dira. Bien artean dagoen aldea honako hau izango da:

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} - dx, \quad (11-49)$$

non y delakoa habeko sekzioen desplazamendu bertikala baita.

(11-49) ekuazioko espresioa ebazteko, serie honetan oinarrituko gara:

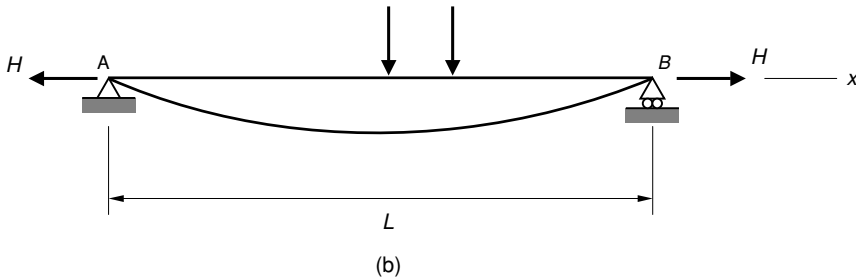
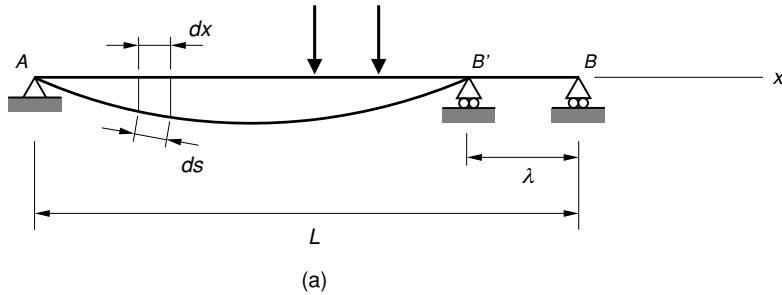
$$(1+a)^{1/2} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} - \dots \quad (11-50)$$

Hain zuzen, a parametroa txikia denean serie hori konbergentea dela frogatu daiteke. Parametro hori unitatea baino askoz txikiagoa bada, goi-mailako terminoak arbuia ditzakegu, eta orduan:

$$(1+a)^{1/2} \approx 1 + \frac{a}{2}. \quad (11-51)$$

Bestalde, (11-49) ekuazioko dy/dx gaia oso txikia denez, (11-51) berdintza erabil dezakegu, era honetan:

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (11-52)$$



11.15. irudia.

Elementu infinitesimal horien artean dagoen diferentzia habe gutzian zehar kalkulatu eta balio guztiak batuz —hau da, (11-52) espresioa habearen luzera gutzian integratuz—, B muturraren desplazamendu horizontala lortuko genuke:

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (11-53)$$

Beraz, habe deformatuaren ekuazioa ezagutuz gero, (11-53) ekuazioa erabil dezakegu habearen desplazamendu horizontalak kalkulatzeko. Suposa dezagun orain habearen muturren desplazamendua bermatzen dugula, 11.15.b. irudian adierazten den bezala. Kasu horretan, euskarri finkoetan H balio duen erreakzio horizontal bat agertuko da. Erreakzio honek habearen luzapena sortuko du, noski. Saia gaitezen, gutxi gorabehera bada ere, indar horizontal horren balioa kalkulatu. Horretarako, ardatz deformatuaren ekuazioa parabola baten bidez hurbilduko dugu:

$$y = \frac{4\delta x(L-x)}{L^2}, \quad (11-54)$$

non δ balioa erdiko sekzioaren gezia baita.

Honelatan, bada, (11-54) ekuazioa (11-53) espresioan ordeztuz eta integratu ondoren, habearen λ luzapena kalkula dezakegu:

$$\lambda = \frac{8\delta^2}{3L} \quad (11-55)$$

Habeen λ luzapena sortzeko behar den H ardatzeko indarra hauxe izango litzateke:

$$H = \frac{EA\lambda}{L} = \frac{8EA\delta^2}{3L^2}, \quad (11-56)$$

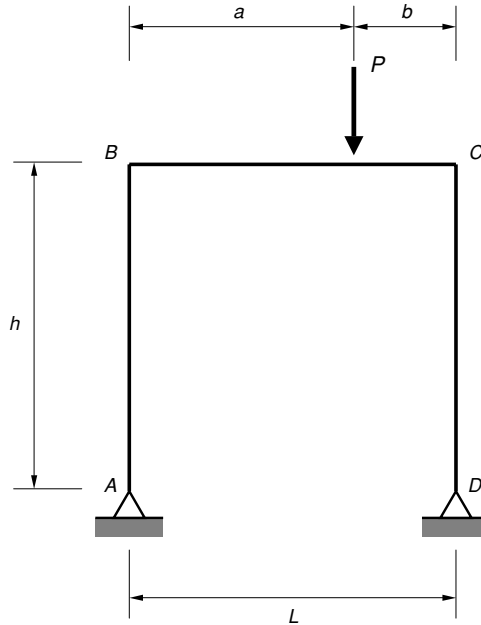
eta ardatzeko indar horrek sortuko zukeen tentsio normala, honako hau:

$$\sigma_{xx} = \frac{H}{A} = \frac{8E\delta^2}{3L^2} \quad (11-57)$$

Dakigun bezala, δ geziaren balioa habearen luzera baino askoz txikiagoa da (δ/L erlazioa 1/500 izan daiteke). Balio hori erabiliz eta materiala $E = 210$ GPa balioko elastikotasun-modulua duen altzairu bat dela suposatuz gero, tentsio normalaren balioa $\sigma_{xx} = 2,24$ MPa izango litzateke. Beraz, ardatzeko indarraren ondorioz agertzen den tentsio normala arbuia-garria da momentu makurtzaileak sortzen duenarekin konparatuz gero. Gainera, errealitatean muturrak gutxitan egoten dira guztiz finkaturik eta gehienetan mugimendu horizontal txiki bat onartzen dute. Beraz, zeharkako indarren ondorioz sor daitezkeen ardatzeko indarrak eta deformazioak mespretxatu egiten dira, kalkuluetan eragin oso txikia baitute.

11.6. LOTURA ZURRUNAK DITUZTEN EGITURAK: PORTIKOAK

Orain arte habe bakar batez osatutako egiturak bakarrik aztertu ditugu. Zazpigarren gaian ikusi genuen bezala, pieza prismatiko bat baino gehiagorekin osatutako egituren artean, makurdurapean lan egiten dutenei *portikoak* deritze. Portikoak osatzen dituzten pieza prismatikoen loturak zurrunka izaten dira. Ondorioz, korapiloak lotzen dituen barren arteko angelua konstante mantentzen da deformazioaren ondoren. Portikoa osatzen duten elementu bertikalei *zutabeak* deritze, eta horizontalei *dintel* edo *ateburu*. Esate baterako, 11.16. irudian portiko baten irudia ikus daiteke. Habeekin gertatzen den bezalaxe, portikoak isostatikoak edo hiperestatikoak izan daitezke. Portiko isostatikoen kasuan nahikoa da oreka-ekuazioak aplikatzea erreakzioak kalkulatu eta barne-indar guztiak lortzeko. Portiko hiperestatikoen kasuan, aldiz, bateragarritasun-ekuazioak erabili behar dira problema askatu ahal izateko. Kasurako, erraz ikus daitezkeen bezala, 11.16. irudiko portikoaren hiperestatikotasun-maila $h = 1$ da.



11.16. irudia.

Portiko hiperestatikoak kalkulatzeko, lehenago habeentzat ikusi dugun indarren metodoa erabil dezakegu. Halere, portikoen kasuan arreta berezia ipintzea komeni da ezezagun hiperestatikoak aukeratzeko orduan, problemaren ebazpena asko alda daitekeelako egiten den aukeraren arabera. Ikus dezagun nola kalkula daitekeen goiko portikoa indarren metodoa erabiliz. Lehendabizi, ezezagun hiperestatiko bat aukeratu beharko genuke. Har dezagun, adibidez, D euskarrian agertzen den H erreakzio horizontala. Egitura isostatikoa lortzeko, erreakzio hori sortzen duen lotura horizontala askatu beharko genuke. Norabide horizontalean indarren oreka bete behar dela inposatuz, A euskarriko erreakzio horizontalak ere H balio behar duela ikus daiteke:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = H_D = H. \quad (11-58)$$

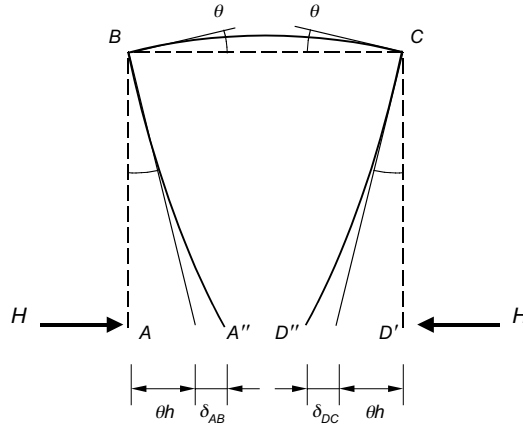
Momentuen batura A muturrekiko kalkulatu, D muturreko erreakzio bertikala lortuko genuke:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_D L = Pa \Rightarrow V_D = \frac{Pa}{L}, \quad (11-59)$$

eta oreka bertikalaren bidez, A euskarriko erreakzio bertikala:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_D + V_A = P \Rightarrow V_A = \frac{Pb}{L}. \quad (11-60)$$

Oreka-ekuazio horien bidez, halere, ezin dezakegu H erreakzio horizontalaren balioa kalkula, egitura hiperestatikoa baita. Bateragarritasun-ekuazioa idatzi ahal izateko, gainezarmen-printzipioan oinarrituko gara berriro. Gainera, kalkulua errazteko, bi euskarrietan



11.18. irudia.

Preseski, goiko 11.18. irudiko habearen muturren biraketa honako hau da:

$$\theta = \frac{HhL}{2EI_z}, \tag{11-64}$$

eta δ_{AB} distantzia, beste hau:

$$\delta_{AB} = \frac{Hh^3}{3EI_z}. \tag{11-65}$$

Beraz, (11-63) ekuazioan ordeztuz, A eta D muturrak distantzia honetan hurbilduko dira:

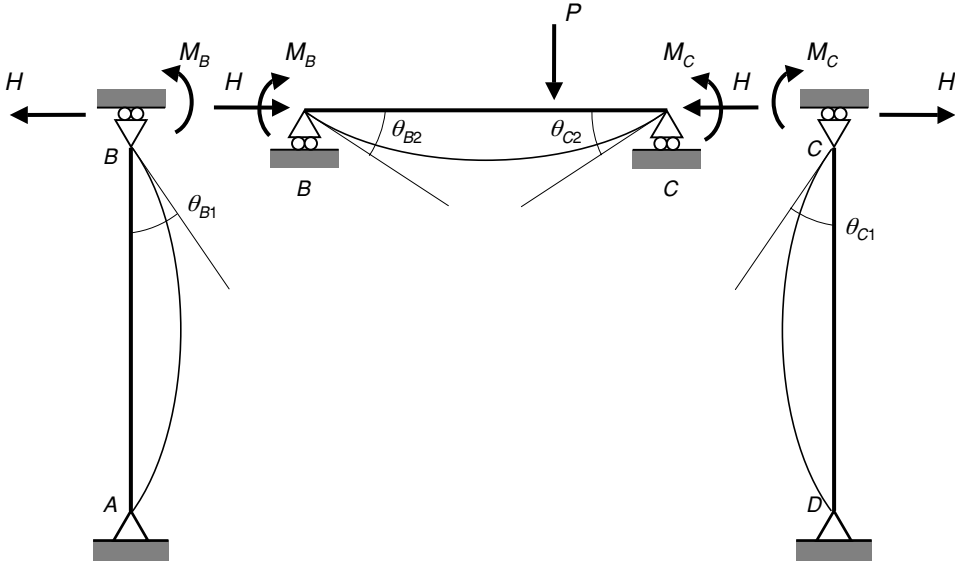
$$2(\theta h + \delta_{AB}) = 2\left(\frac{Hh^2L}{2EI_z} + \frac{Hh^3}{3EI_z}\right). \tag{11-66}$$

Benetako egitura hiperestatikoan A eta D euskarriak finkoak direnez, beren arteko distantzia erlatiboa ezin daiteke alda. Hau da, P indarrak A eta D sekzioen artean sortzen duen desplazamendu erlatiboa eta H erreakzioak sortzen duena berdinak izan behar dira:

$$\frac{Pab}{2EI_z} h = 2\left(\frac{Hh^2L}{2EI_z} + \frac{Hh^3}{3EI_z}\right), \tag{11-67}$$

eta hortik H erreakzioaren balioa aska daiteke:

$$H = \frac{3Pab}{2h(3L + 2h)}. \tag{11-68}$$



11.19. irudia.

Kalkula dezagun 11.6. irudiko portikoa beste era batean. Oraingoan ezezagun gisa korapiloetako momentu makurtzaileak erabiliko ditugu, habe jarraituekin egin genuen bezala. Horretarako, askatu egingo ditugu zutabeak eta habeak, B eta C korapiloetan artikulazio mugikorrek kokatuz, 11.19. irudian agertzen den eran. Ebakidurak egin ditugun sekzioetan, barneko esfortzuak agerian ipini beharko ditugu, hots, M_B eta M_C momentu makurtzaileak eta H indar horizontala. Horrez gain, kontuan hartu behar da B eta C puntuek desplazamendu horizontalak jasan ditzaketela. Desplazamendu horiek berdinak izan behar dute, zeren, 11.5. atalean ikusi genuen bezala, habe horizontalaren luzapena arbuia garria baita. Beraz, $\delta_B = \delta_C = \delta$. Bestalde, ardatzaren norabidean indarren oreka aplikatuz gero, erraz ondoriozta daiteke habearen muturretako bi erreakzio horizontalek ere berdinak izan behar dutela, hau da, $H_B = H_C = H$. Ezezagun horien balioak kalkulatzeko, lehenik, oreka-ekuazioak aplikatuko ditugu bi zutabeetan. Horrela, A eta D puntuen momentuen baturak zero eman behar duela inposatuz gero:

$$\begin{aligned} M_B + Hh &= 0, \\ M_C + Hh &= 0. \end{aligned} \quad (11-69)$$

H indar horizontala momentu makurtzaile ezezagunen funtzioan ipini ondoren, bi bateragarritasun-ekuazio aplikatu beharko ditugu, hots, kontuan izanik B eta C sekzioetako biraketek berdinak izan behar dutela zutabeetan eta habeetan. Habea ezkererantz mugitzen dela suposatuz eta Mohr-en teoremen bidez, biraketa horiek lortuko genituzke. Biraketa positiboak orratzen noranzkoan direla onartuz gero, B muturrean:

$$\begin{aligned} \theta_{B1} &= -\left(\frac{M_B h}{3EI_z} + \frac{\delta}{h}\right), \\ \theta_{B2} &= \frac{M_B L}{3EI_z} + \frac{M_C L}{6EI_z} + \frac{Pab(L+b)}{h}, \end{aligned} \quad (11-70)$$

eta C muturrean,

$$\theta_{C1} = \frac{M_B h}{3EI_z} - \frac{\delta}{h},$$

$$\theta_{C2} = -\left(\frac{M_B L}{3EI_z} + \frac{M_C L}{6EI_z} + \frac{Pab(L+b)}{h}\right).$$
(11-71)

Hortaz, (11-70) ekuazioetako espresioak berdinduz, lehenengo bateragarritasun-ekuazioa lortuko genuke:

$$\frac{M_B h}{3EI_z} + \frac{\delta}{h} + \frac{M_B L}{3EI_z} + \frac{M_C L}{6EI_z} + \frac{Pab(L+b)}{h} = 0,$$
(11-72)

eta (11-71)-ko ekuazioekin gauza bera eginez, bigarren bateragarritasun-ekuazioa:

$$\frac{M_B h}{3EI_z} - \frac{\delta}{h} + \frac{M_B L}{3EI_z} + \frac{M_C L}{6EI_z} + \frac{Pab(L+b)}{h} = 0.$$
(11-73)

(11-72) eta (11-73) ekuazioak batuz, (11-69) erlazioen bidez, δ desplazamendu ezezaguna desagerraraz daiteke, eta momentu makurtzaile ezezagunak nahiz H indar horizontala aska ditzakegu:

$$H = \frac{3Pab}{2h(3L+2h)}.$$
(11-74)

Eta (11-69) ekuazioetan ordeztuz:

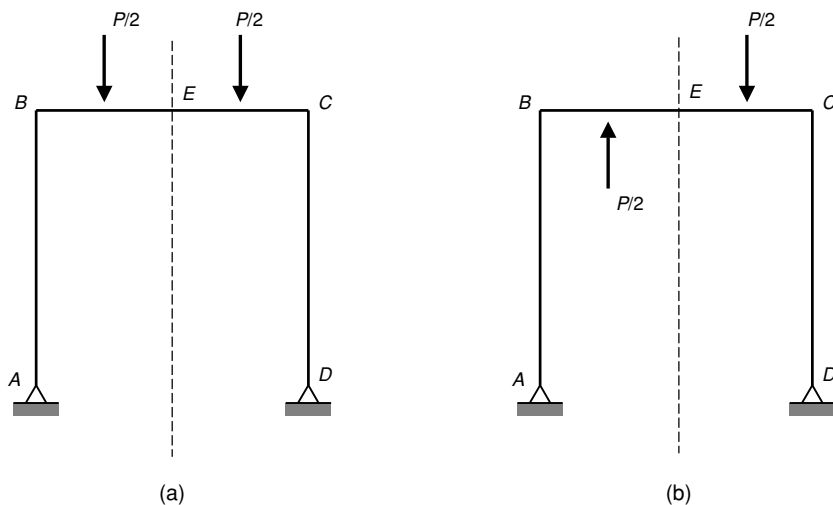
$$M_B = M_C = -\frac{3Pab}{2(3L+2h)}.$$
(11-75)

Momentuen zeinu negatiboak benetako noranzkoa 11.19. irudian suposatutakoaren aurkakoa dela adierazi nahi du. Ikusten den bezala, hemen lortu dugun H indarraren balioa eta aurreko metodoarekin lortutakoa bat datoz.

11.7. SIMETRIA- ETA ANTISIMETRIA-PROPIETATEAK

Simetria-plano baten bi aldeetan portiko baten itxura, materiala, sekzioak eta lotura-baldintzak berdinak direnean, portikoa simetrikoa dela esaten da. Berdintasun horietakoren bat betetzen ez bada, portikoa asimetrikoa da. Horrez gain, portikoan eragiten duten indarren banaketa simetrikoa edo antisimetrikoa izan daiteke. Forma simetrikoa duten portikoak, aplikatutako indarrak edozein izanik ere, portiko simetriko baten eta portiko antisimetriko baten batura modura adieraz daitezke beti. Esate baterako, aztertzen ari garen 11.16. irudiko portikoa, 11.20. irudiko bi portikoen batura modura idatz dezakegu. Hain zuzen, 11.20.a. irudikoa simetrikoa da eta 11.20.b. irudikoa, aldiz, antisimetrikoa. Argi dago baliokidetasun horretara iristeko beharrezkoa dela indarren moduluak aldatzea, balio erdiak erabiliz. Preseski, 11.20. irudiko bi egiturak batuz gero, jatorrizko portikoa lortuko genuke berriro. Zenbait kasutan, komenigarria izan daiteke deskonposizio hori egitea portikoaren

analisia egiten hasi aurretik. Izan ere, portiko simetrikoaren eta antisimetrikoaren hiperestatikotasun-mailak hasierako portikoarena baino txikiagoak izaten dira. Ondorioz, batzuetan erosoagoa gerta liteke bi portiko horien analisia egitea, jatorrizko portikoarena baino.



11.20. irudia.

Ikus ditzagun portiko simetrikoen eta portiko antisimetrikoen berezitasunak. Portiko simetrikoetan esfortzu eta deformazio guztiak ere simetrikoak izan behar dira. Ondorioz, simetria-planoan kokatutako sekzioek zenbait baldintza bete beharko dituzte. Adibidez, 11.20.a. irudiko E sekzioan, esfortzuak berdinak izan behar dira alde batean eta bestean. Propietate hori betetzen duten esfortzu bakarrak momentu makurtzailea eta ardatzeko indarra dira. Ondorioz, E sekzioan ez da indar ebakitzailerik agertuko. Bestetik, 11.20.b. irudiko portiko antisimetrikoari dagokionez, sekzio bateko bi aurpegietan antisimetrikoa den barne-esfortzu bakarra indar ebakitzzailea da. Beraz, kasu horretan momentu makurtzailea eta ardatzeko indarra nuluak izango dira erdiko sekzioetan. Portiko simetrikoen deformazioak simetrikoak direnez, egitura horiek ez dira alboetara mugitzen, eta translaziorik gabeak direla esango dugu. Portiko antisimetrikoak, aldiz, alboetara higi daitezke eta, beraz, translaziodunak izango dira.

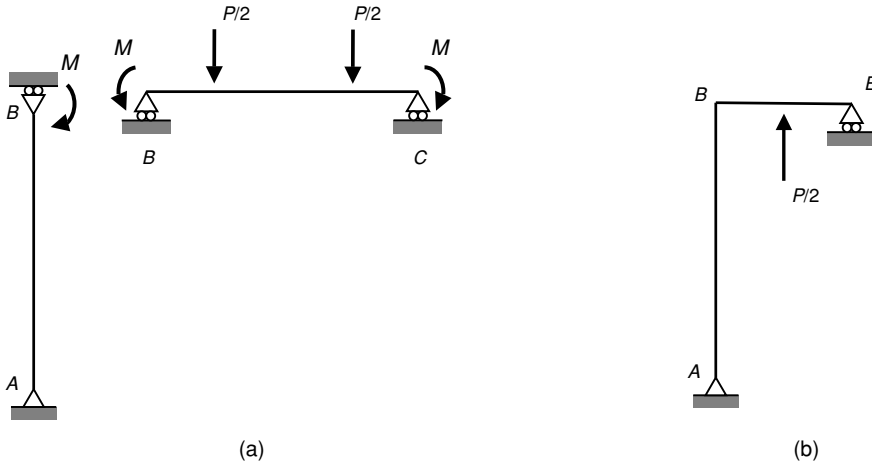
Aurreko adibideetan egin dugun bezala, kalkula dezagun 11.16. irudiko portikoko euskarrietan agertzen den erreakzio horizontala simetria- eta antisimetria-propietateez baliatuz. Preseski, 11.20. irudiko portiko simetrikoan eta portiko antisimetrikoan agertzen diren erreakzio horizontalak lortu ondoren, gainezarpen-printzipioa aplikatuko dugu. Portiko simetrikoa kalkulatzeko, translaziorik gabeko egitura dela gogoratuko dugu. Ezezagun hiperestatiko modura korapiloetako momentu makurtzaileak erabiliko ditugu, 11.21.a. irudian agertzen den bezala. Beraz, bateragarritasun-ekuazioa hauxe izango da:

$$\theta_{B1} = \theta_{B2}, \quad (11-76)$$

non θ_{B1} delakoa zutabeko goiko muturraren biraketa baita, eta θ_{B2} delakoa habearen ezkerreko muturrarena. Portikoaren simetria dela-eta, nahikoa da bi zutabeetako bat bakarrik aztertzea. Biraketa positiboak orratzen noranzkoan gertatzen direla onartuz gero:

$$\theta_{B1} = \frac{Mh}{3EI_z}, \quad (11-77)$$

$$\theta_{B2} = \frac{Pab}{4EI_z} - \frac{ML}{2EI_z}.$$



11.21. irudia.

Hortaz, (11-77) ekuazioetako biraketak berdinduz:

$$\frac{Mh}{3EI_z} = \frac{Pab}{4EI_z} - \frac{ML}{2EI_z}, \quad (11-78)$$

eta M momentu ezezaguna askatuz:

$$M = \frac{3Pab}{2(3L + 2h)}. \quad (11-79)$$

Espero zitekeen bezala, momentu horren balioa (11-75) ekuazioan lortutakoaren berdina da. Momentua lortu ondoren, momentuen oreka-ekuazioan oinarrituz, H erreakzioa kalkula dezakegu:

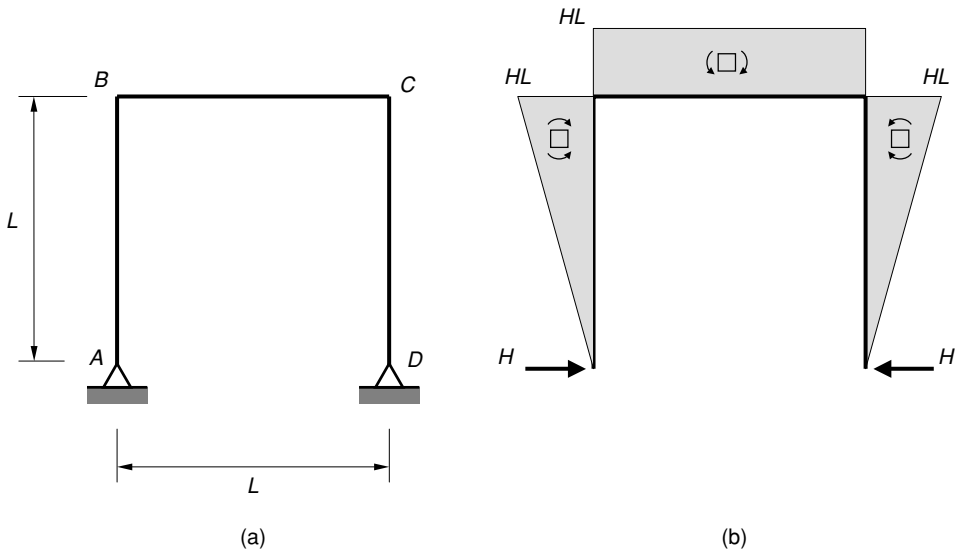
$$H = \frac{M}{h} \Rightarrow H = \frac{3Pab}{2h(3L + 2h)}. \quad (11-80)$$

Portiko simetrikoari dagokion erreakzioa lortu ondoren, portiko antisimetrikoarena kalkulatu beharko genuke. Arestian esan dugun bezala, portiko antisimetrikoaren erdiko sekzioan ez dago momentu makurtzailerik, ezta ardatzeko indarririk ere. Beraz, portiko hori aztertzeko egituraren erdiarekin gera gaitezke, eta E sekzioan indar ebakitzalea bakarrik sortuko duen artikulazio mugikor bat kokatu (ikus 11.21.b. irudia). Lortutako egitura berria isostatikoa da, eta bistakoa den bezala, A euskarrian ez da erreakzio horizontalik agertzen. Beraz, bigarren kasu horri dagokion erreakzioa nulua denez, azken emaitza (11-80) ekuazioa izango da, orain arte lortutako emaitzekin bat datorrena.

Bukatzeko, aipa dezagun simetria- eta antisimetria-propietateen aplikazioa ez dela portikoetara bakarrik mugatzen. Hau da, atal honetan ikusitako deskonposizioa beste edozein egitura kalkulatzeko ere aplika daiteke, eta horretarako bete beharreko baldintza bakarra egituraren forma simetrikoa izatea da.

11.8. TENPERATURAREN ERAGINA SISTEMA HIPERESTATIKOETAN

Ardatzeko indarra aztertu genuenean ikusi zen bezala, temperatura-aldaketek ondorioz tentsioak ager daitezke egitura hiperestatikoetan. Makurdupean dauden egituren kasuan ere, gauza bera gertatzen da. Temperatura aldatuz gero, deformazioa galarazten duten euskarrietan erreakzioak agertzen dira, tentsioak sortuz. Ez da ahaztu behar, halere, zenbait egitura hiperestatiko bereziren kasuan, temperatura-aldaketak egon arren ez dela tentsiorik agertzen, habe jarraituetan gertatzen den bezala, adibidez. Temperatura-aldaketak uniformeak edo ez-uniformeak izan daitezke. Dena den, aurreko adibideetan erabilitako indarren metodoa aplika daiteke. Adibide gisa, izan bedi 11.22.a. irudiko portikoa, non pieza prismatikoko guztiek $\Delta T > 0$ temperatura-aldaketa jasaten baitute. Zabalkuntza termikoa dela-eta, egiturako barrek luzatzeko joera edukiko dute. Halere, egituraren hiperestatikotasun-maila $h = 1$ denez, deformazio librea galarazita dago eta tentsio termikoak agertuko dira. Problema askatzeko, ezezagun hiperestatiko bat aukeratuko dugu, adibidez, euskarrietako H erreakzio horizontala. Momentu makurtzaileen diagramak ezezagun horren funtzioan idatz ditzakegu, 11.22.b. irudian ageri den bezala. Diagrama horretan oinarrituz, 11.23. irudiko deformazioa marraztuko dugu.



11.22. irudia.

Hain zuzen, 11.23. irudia aztertuz, honako bateragarritasun-ekuazio hau bete behar dela ondorioztatzen da:

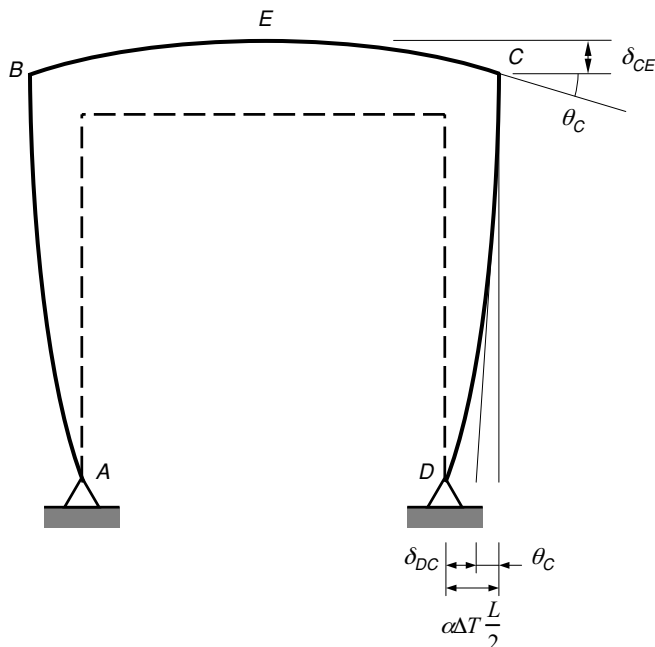
$$\alpha \Delta T \frac{L}{2} = \theta_c L + \delta_{DC} \quad (11-81)$$

Biraketaren balioa Mohr-en lehenengo teoreman oinarrituz lor dezakegu:

$$\theta_C = \theta_{EC} = \frac{HL^2}{2EI_z}, \quad (11-82)$$

eta bigarren teoremaren bidez:

$$\delta_{DC} = \frac{HL^3}{3EI_z}. \quad (11-83)$$



11.23. irudia.

Balio horiek (11-81) bateragarritasun-ekuazioan ordeztuz, H -ren balioa kalkula daiteke:

$$H = \frac{3\alpha\Delta TEI_z}{5L^2}. \quad (11-84)$$

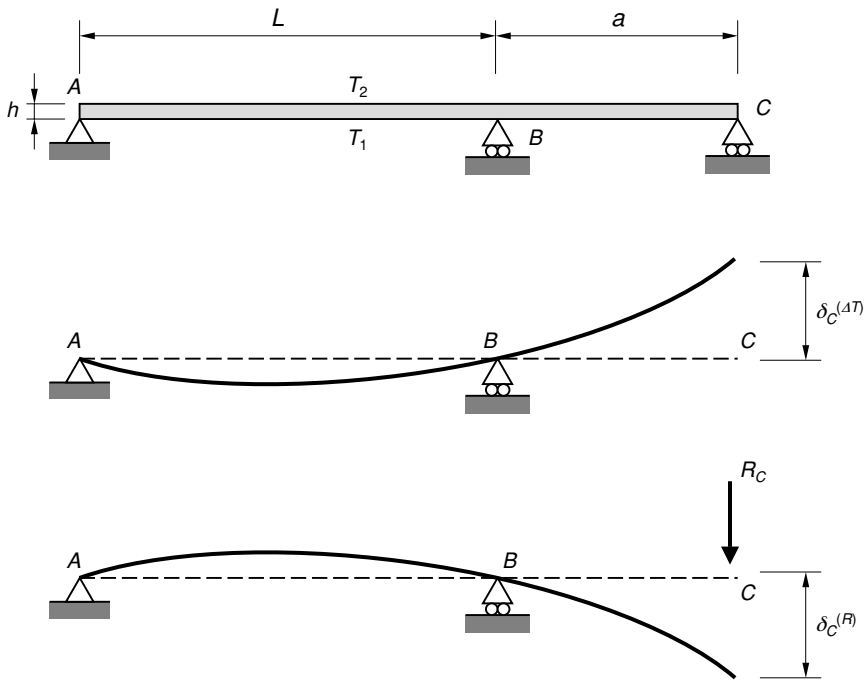
Tenperatura-aldaketa uniformea ez denean, prozedura berdina erabiltzen jarrai dezakegu, baina deformazioak kalkulatzeko orduan 10.6. atalean ikusitakoa aplikatu beharko dugu. Adibide gisa, 11.24. irudiko habea kalkulatu dugu. Haba hori tenperatura-aldaketa lineal baten eraginpean dago, azpialdeko zuntzen tenperatura T_1 izanik, eta goialdeko zuntzena, T_2 . Gainera, $T_1 > T_2$ dela suposatuko dugu. Egitura horren hiperestatikotasun-maila $h = 1$ da, eta, beraz, ezezagun hiperestatiko bat aukeratu beharko dugu indarren metodoa aplikatu ahal izateko. Kasu honetan C euskarriko R erreakzio bertikala erabiliko dugu. Ondorioz, bateragarritasun-ekuazioa honako hau izango da:

$$\delta_C = 0; \quad (11-85)$$

hau da, C muturraren desplazamendu bertikala nulua izan behar da. Desplazamendu hori kalkulatzeko, gainezarpen-printzipioaz baliatuko gara, temperatura-aldaketak eta R erreakzioak sortzen dituzten deformazioak bakoitza bere aldetik aztertuz.

Kalkula dezagun lehendabizi temperatura-aldaketak sortutako deformazioa. Horretarako, kurba elastikoaren ekuazio diferentziala integratu behar da (ikus 10-72 ekuazioa):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h}. \quad (11-86)$$



11.24. irudia.

Horrela, (11-86) espresioa bi aldiz integratu ondoren, hauxe lortuko dugu:

$$y = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{2h}x^2 + k_1x + k_2. \quad (11-87)$$

Aurreko adierazpeneko integrazio-konstanteak kalkulatzeko, mugako baldintza hauek inposatu behar ditugu:

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= 0, \\ y|_{x=L} &= 0, \end{aligned} \quad (11-88)$$

hots, A eta B sekzioen desplazamendu bertikalak nuluak direla kontsideratu behar dugu. Konstanteak kalkulatu ondoren, kurba elastikoaren ekuazioa lor daiteke:

$$y = -\frac{\alpha\Delta T}{2h}x(x-L). \quad (11-89)$$

Ondoren, (10-89) ekuaziotik, C sekzioaren gezia kalkulatu dugu:

$$\delta_C^{\Delta T} = y|_{x=L+a} = -\frac{\alpha\Delta T}{2h}a(L+a). \quad (11-90)$$

Bestalde, Mohr-en teoremen bidez, R erreakzioak sortzen duen gezia honako hau da:

$$\delta_C^R = \frac{Ra^2L}{3EI_z} + \frac{Ra^3}{3EI_z} = \frac{Ra^2(L+a)}{3EI_z}. \quad (11-91)$$

Azkenik, (11-85) bateragarritasun-ekuazioa erabiliz, ezezagun hiperestatikoaren balioa askatuko dugu:

$$\delta_C = \delta_C^{\Delta T} + \delta_C^R = -\frac{\alpha\Delta T}{2h}a(L+a) + \frac{Ra^2(L+a)}{3EI_z} = 0, \quad (11-92)$$

eta beraz:

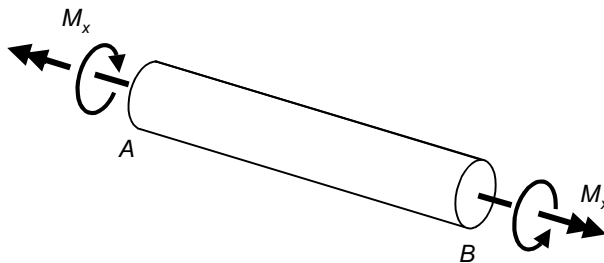
$$R = \frac{3\alpha EI_z \Delta T}{2ha}. \quad (11-93)$$

R ezezaguna kalkulatu ondoren, beste erreakzio guztiak eta esfortzuen diagramak kalkulatu daitezke.

12. Bihurduraren teoria orokorra

12.1. SARRERA

Ardatzeko indarra, indar ebakitzaila eta momentu makurtzaila aztertu ondoren, hamabigarren gai honetan pieza pramatikoen bihurtura aztertuko dugu. Hau da, momentu bihurtzailaren eraginpean dauden pieza pramatikoetako tentsioak eta deformazioak kalkulatu ditugu. Momentu bihurtzaila ingeniartzako hainbat aplikaziotan aurki daiteke. Zazpigarren gaian aipatu genuen bezala, esfortzu-mota hori ohikoa da puntu batetik bestera potentzia transmititzen duten ardatzetan (esate baterako, makina-tresnetako motorretan edo beribiletako ardatzetan). Aipatu beharra dago ezen hemen ikusiko dugun bihurturari *bihurtura libre* deitzen zaiola, deformazioak galarazi gabe daudenean agertzen dena baita. Piezako sekzioren baten deformazioa galarazita dagoenean agertzen den bihurturari *bihurtura bermatua* deritza, eta ez da liburu honetan deskribatuko. Segidan ikusiko dugun bezala, bihurtura librearen kasuan tentsio ebakitzailak bakarrik agertzen dira zeharkako sekzioetan, eta sekzio horiek ardatzaren inguruan biratzen dute. Bihurtura libre askotan agertzen ez den arren, beraren ikasketatik ondorio garrantzitsuak lortzen dira.



12.1. irudia.

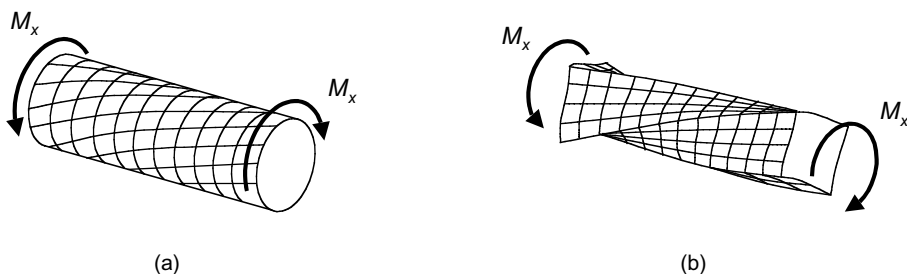
Adibidez, 12.1. irudian sekzio zirkularreko pieza baten bihurtura libre adierazten da. Ikus daitezkeen bezala, muturretan aplikatutako momentu bihurtzaileek berdinak izan behar dute, estatikaren legeak bete daitezzen. Momentuak adierazteko zirkunferentzia-arkuen itxura duen kurba bat erabil dezakegu edo, bestela, bihurturaren noranzkoan zuzendutako gezi bikoitz bat. Geziaren noranzkoa lortzeko, nahikoa da eskuin-eskuaren arauaz baliatzea.

Gaia hasteko, lehendabizi sekzio zirkularreko pieza pramatikoak aztertuko ditugu, ingeniartzan gehien erabiltzen direnak baitira. Sekzio zirkularreko piezekin batera, hodi erako ardatzen deskribapena ere egingo dugu. Ikusiko dugun bezala, pieza horiek aurkezten duten simetria perfektua denez, kasu horren garapen teorikoa oso sinplea da, eta momentu bihurtzailaren, tentsio ebakitzailen eta biraketa-angeluen arteko erlazioak erraz topatuko

ditugu. Adibide batzuk aurkeztu ondoren, transmisio-ardatzen oinarritzko kalkulu bat nola egin daitekeen azalduko dugu. Segidan, makurdura eta bihurtura konbinatuena kasua jorratuko dugu, oso lagungarriak diren espresio batzuk lortuz. Sekzio zirkularrak aztertu ondoren, edozein forma daukaten sekzioei buruz hitz egingo dugu, *mintzaren antzekotasuna* deiturikoa deskribatuz. Azkenik, gaiaren bukaeran horma meheko piezen bihurtura azalduko dugu.

12.2. SEKZIO ZIRKULARREKO PIEZEN BIHURDURA

Sekzio zirkularra duten pieza prismatikoetan, sekzioek lauak eta ardatzarekiko elkarzutak izaten jarraitzen dute deformazioaren ondoren, inolako distorsiorik ezagutu gabe. Portaera hau erraz uler daiteke sekzio zirkularrak aurkezten duen simetria perfektua dela-eta. Beraz, sekzioko puntuek ardatzaren inguruan biratzen dute, solido zurrinak balira bezala. Era berean, erradioek zuzenak izaten jarraitzen dute biraketaren ondoren, eta hasieran beren artean osatzen zuten angelua ere konstante mantentzen da. Portaera hori 12.2.a. irudian adierazten da. Sekzioa zirkularra ez denean, goian esandakoak ez dira betetzen eta sekzioen planoan distorsio bat agertzen da, eta sekzioek lauak izateari uzten diote. Beste era batera esanda, sekzioa zirkularra ez denean, kopatu egiten da (ikus 12.2.b. irudia).



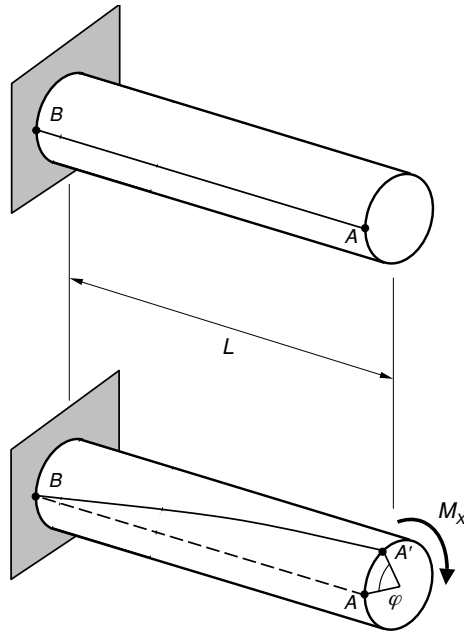
12.2. irudia.

Pieza prismatikoen bihurturan agertzen diren tentsioak zein diren jakiteko, nahikoa da (7-4) ekuazioei begirada bat ematea. Momentu bihurtzaileari dagokiona honako hau da:

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dA. \quad (12-1)$$

Beraz, bihurtura librearen kasuan tentsio ebakitzailak agertzen dira soilik. Ondorio berera iritsi gaitzke 12.2.a. irudiko deformatuari so eginez. Ikusten denez, hasiera batean errektangeluarrak ziren elementuek errobo itxura hartzen dute bihurturaren ondorioz. Hots, distorsio bat jasaten dute. Portaera horrek tentsio ebakitzailak tartean daudela agerian uzten du. Halere, (12-1) ekuazioa ez da nahikoa tentsio horiek kalkulatzeko, ez baitakigu nola banatzen den momentu bihurtzailea zeharkako sekzioan zehar. Ardatzeko indarraren edo momentu makurtzailearen kasuan gertatzen zen bezala, problema estatikoki zehaztugabea edo hiperestatikoa da. Ondorioz, tentsio ebakitzailak kalkulatzeko bateragarritasun-ekuazioetara jo beharko dugu berriro ere. Esate baterako, ezin dezakegu suposa, besterik gabe, tentsioen banaketa uniformea izango dela.

Deformazioak aztertzeko, bihurturapean dagoen 12.3. irudiko pieza prismatikoa erabiliko dugu. Ardatz hori landatuta dago B muturrean eta momentu makurtzaile baten eragina jasaten du A sekzioan. Aplikatutako momentu makurtzaileari erantzunez, landapenean ere modulu bera baina aurkako noranzkoa duen beste momentu bihurtzaile bat agertuko da. Momentu bihurtzaileak bakarrik dauden egoera horri *bihurdura hutsa* deritzo. Aplikatutako momentuaren ondorioz, sekzioek biratu egiten dute ardatzaren inguruan. Landapeneko sekzioan biraketa nulua da, eta puntu horretatik urruntzen garen heinean biraketak gero eta handiagoak dira, eta biraketa maximoa A muturrean azaltzen da.



12.3. irudia.

Irudian ikusten den bezala, ardatzaren deformazioaren ondorioz, AB lerroak zuzena izateari uzten dio, eta $A'B$ kurbaren itxura hartzen du. Kurba hori helize bat dela frogatu daiteke. Era berean, A sekzioko φ biraketa luzerarekiko eta aplikatutako momentu makurtzailearekiko proportzionala dela ikusiko dugu segituan. Deformazio horiek matematikoki ebatzi ahal izateko, bata bestetik dx distantzia infinitesimalera dauden bi sekzio hartuko ditugu, 12.4.a. irudian agertzen den bezala. Irudi horretako elementu infinitesimalaren inguruan distorsioa sortzen duten tentsio ebakitzzaileak ere ikus daitezke. Bi sekzio horien arteko biraketa erlatiboa aztertzeko, bietako bat finkatuta dagoela suposatuko dugu. Hain zuzen, 12.4.b. irudian handiturik ageri da isolatu dugun pieza-zatia. Atal honen sarreran aipatu dugun bezala, $ABCD$ elementu errektangeluarra deformatu egiten da, erronbo itxura hartuz. Sekzioen arteko distantzia oso txikia denez, BD' eta AC' lerroak zuzenak direla suposa dezakegu. Are gehiago, segmentu horien luzerak hasierakoan berdinak direla onartuko dugu, hau da, dx luzerakoak izaten jarraitzen dutela. Izan ere, kasu honetan interesatzen zaigun bakarra γ deformazio angeluarra aztertzea da. Dakigun bezala, deformazio angeluarra tentsio ebakitzzaileen ondorioa da.

12.4.b. iruditik γ deformazio angeluarraren balioa honako hau dela ikus daiteke:

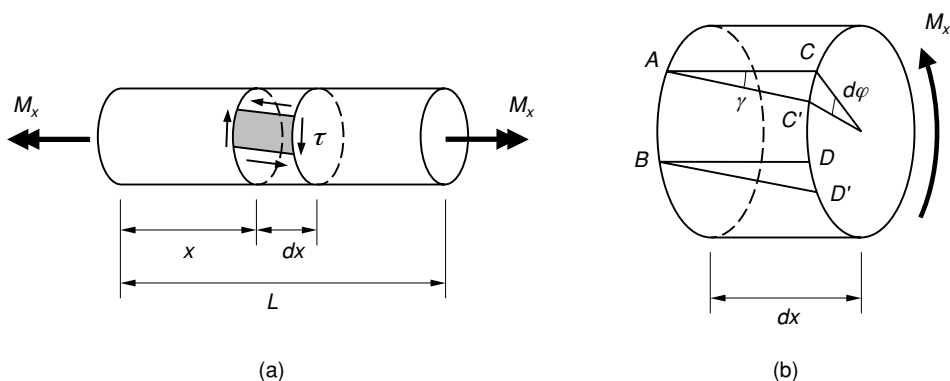
$$\gamma = \frac{CC'}{AC} \quad (12-2)$$

Esan bezala, AC segmentuak hasierako luzera bera du, hau da, dx . Aldiz, CC' arkuaren balioa honelaxe kalkulatu dugu:

$$CC' = R d\varphi, \quad (12-3)$$

non R delakoa sekzioaren erradioa baita, eta $d\varphi$ delakoa bi sekzioen arteko biraketa erlatiboa. Beraz,

$$\gamma = \frac{R d\varphi}{dx} \quad (12-4)$$



12.4. irudia.

Hain zuzen, (12-4) espresioan erradioa biderkatzen duen zatikiak luzera-unitateko biraketa adierazten du, hau da, sekzioen arteko biraketa erlatiboa. Sekzio guztiak momentu bihurtzaile beraren eraginpean daudenez, luzera-unitateko biraketa hori konstantea izango da pieza prismatiko guztian zehar, hau da,

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \text{ktea.} \quad (12-5)$$

Beraz, (12-4) adierazpeneko deformazio angeluarra honelaxe idatz dezakegu:

$$\gamma = R\theta. \quad (12-6)$$

Hooke-ren legea aplikatuz, tentsio ebakitzaileek balio hau dute:

$$\tau = G\gamma = GR\theta. \quad (12-7)$$

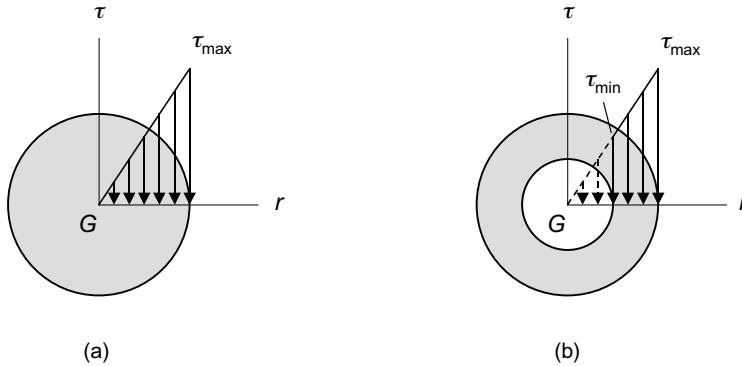
Eta (12-7) espresioaren bidez, sekzioaren mugaldean dauden puntuen tentsio ebakitzaileak kalkula ditzakegu. Pauso berdinak emanez, sekzioaren barnealdeko puntuen tentsioa lor daiteke. Sekzioek disko zurrinak balira bezala biratzen dutenez, sekzioko puntu baten deformazio angeluarra kalkulatzeko, nahikoa da R -ren ordean r idaztea, non r delakoa sekzioaren zentrotik puntura dagoen distantzia baita:

$$\gamma(r) = r\theta. \quad (12-8)$$

Hortik, tentsio ebakitzaila honelaxe idatziko dugu:

$$\tau(r) = Gr\theta. \quad (12-9)$$

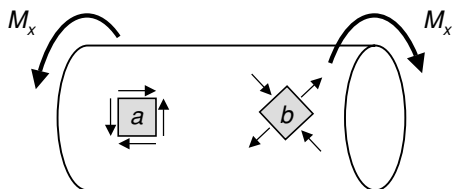
Tentsio ebakitzailen banaketa lineala dela ondorioztatzen da (12-9) espresiotik. Sekzioaren zentroan nulua da, eta handituz doa mugalderako puntuetaraino, eta hor maximoa da. Banaketa lineal hori 12.5.a. irudian ikus daiteke. Barrualdetik hutsik dauden sekzioen edo hodien kasuan ere, sekzioak ardatzarekiko simetrikoa izaten jarraitzen duenez, (12-9) espresioa erabil daiteke tentsio ebakitzailak kalkulatzeko (ikus 12.5.b. irudia).



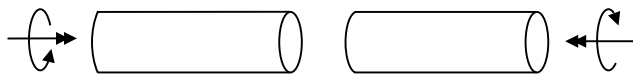
12.5. irudia.

Tentsio maximoa piezaren gainazaleko puntuetan gertatzen dela ikusi dugu. Dakigun bezala, material harikorren hutsegitea tentsio ebakitzailen ondorioz gertatzen da. Beraz, material horien kasuan, deformazio plastikoa piezaren gainazalean hasiko da. Tentsio ebakitzaila maximoek dituzten norabideak 12.6. irudiko *a* elementuan agertzen direnak dira. Horrela, material harikorrek ardatzarekiko elkarzuta den plano batean zehar huts egiten dute, 12.7.a. irudian agertzen den moduan.

Material hauskorren kasua desberdina da. Izan ere, material hauskorren hutsegitearen errudunak tentsio normal maximoak dira. Beraz, material horien haustura nolakoa izango den auresateko, tentsio normal maximoak zein norabidetan agertzen diren jakin beharko dugu. Bihurdurapean dauden sekzio zirkularreko pieza prismatikoetan agertzen den tentsio-egoerari ebakidura hutsa deritzo, 12.6. irudiko *a* elementuan tentsio ebakitzailak bakarrik daudelako. Mohr-en zirkuluek baliatuz, erraz kalkula daitezke tentsio nagusien moduluak eta norabideak. Tentsio nagusiak ardatzarekiko 45° -tara agertzen dira, 12.6. irudiko *b* elementuan adierazten den bezala. Ikusten denez, tentsio nagusietako bat trakziozkoa da eta bestea konpresiozkoa. Materialak konpresioaren aurrean duen erresistentzia trakziopean duena baino handiagoa dela suposatuz gero (gehienetan gertatzen den bezala), haustura trakziozko tentsioek agertzen duten norabidean gertatuko da. Beraz, haustura-planoa 45° -tara agertuko litzateke, 12.7.b. irudiko itxura duen haustura sortuz. Hutsegite hori piezaren barneko puntuetara heda daitekeen arren, lehenengo, gainazaleko puntuetan agertzen da, horiek jasaten baitute tentsio ebakitzaila handiena. Material hauskorren hutsegitea 45° -tara gertatzen dela frogatzeko, nahikoa da sekzio zirkularra duen klarion puska bat apurtu arte bihurritzea.



12.6. irudia.



(a)



12.7. irudia.

Dena den, (12-9) espresioan θ biraketa unitarioa ezezaguna da oraindik. Tentsio ebakitzailak lortzeko, ekuazio hori sekzioko momentu bihurtzailearen funtzioan adierazi behar dugu. Erlazioa lortzeko, tentsio-banaketaren erresultantearen eta momentu bihurtzailearen arteko baliokidetasunean oinarrituko gara. Hau da, tentsio ebakitzailak ardatzaren inguruan duten momentua eta zeharkako sekzioan aplikatutako momentu bihurtzailea elkarren berdinak izan behar dira. Garapen horretarako 12.8. irudian marraztutako sekzioan oinarrituko gara. Preseski, (12-9) espresioaren arabera, tentsio ebakitzailak sekzioaren zentroraino dagoen distantziarekiko proportzionalak dira. Beraz, irudian ageri den koroa zirkularreko tentsio ebakitzailak balio bera edukiko dute. Koroa horren azalera dA bada, tentsio ebakitzailak zentroarekiko ematen duten momentua honako hau izango da:

$$dM_x = \tau dA r = Gr^2 \theta dA. \quad (12-10)$$

Momentu horren balioa infinitesimala da, noski, azalera ere infinitesimala delako. Sekzioaren zentrotik hasita 12.8. irudian agertzen den bezalako koroak hartu eta tentsio ebakitzailak ematen dituzten momentuak batuko bagenitu, hots, (12-10) espresioa zeharkako sekzioan integratuko bagenu, momentu bihurtzailearen balioa lortuko genuke:

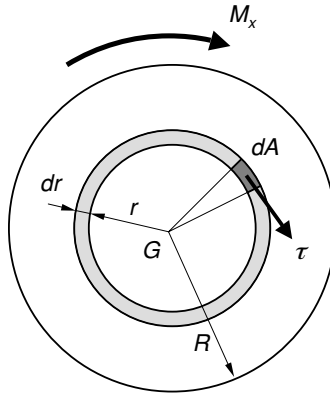
$$M_x = \int_A Gr^2 \theta dA. \quad (12-13)$$

Adierazpen horretako G ebakidura-modulua eta θ biraketa unitarioa sekzioan konstanteak direnez, integraletik kanpora atera ditzakegu:

$$M_x = G\theta \int_A r^2 dA = G\theta I_p, \quad (12-12)$$

non I_p delakoa sekzioaren inertzia-momentu polarra baita, hots:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}. \tag{12-13}$$



12.8. irudia.

Beraz, sekzioaren biraketa unitarioa honelaxe kalkula dezakegu:

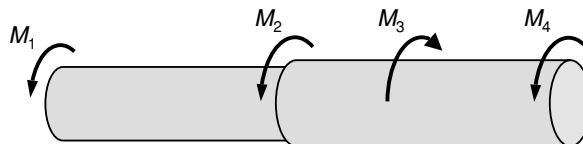
$$\theta = \frac{M_x}{GI_p}, \tag{12-14}$$

non GI_p izendatzaileari *bihurdura-zurruntasuna* deritzon. Espresio horren bidez, bi sekzioaren arteko biraketa erlatiboa lor daiteke. Sekzioak x_1 eta x_2 abzisetan badaude, (12-5) ekuazioko biraketa unitarioaren espresioa integratuko dugu:

$$\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_x}{GI_p} dx = \frac{M_x(x_2 - x_1)}{GI_p}. \tag{12-15}$$

Hain zuzen, (12-15) ekuazioaren azken zatia momentu makurtzailea eta GI_p bihurtura-zurruntasuna elkarren berdinak direnean soilik aplika daiteke. Piezaren ardatzean zehar momentu makurtzaileak edo sekzioaren propietateak berdinak ez balira, 12.9. irudiko ardatzean bezala, (12-15) espresioa zati bakoitzari aplikatu beharko genioke eta biraketa erlatiboak batu, ardatzeko indarraren kasuan gertatzen zen bezala, honelaxe preseski:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{xi} L_i}{G_i I_{pi}}. \tag{12-16}$$



12.9. irudia.

Gauzak horrela, (12-14) adierazpeneko biraketa unitarioaren espresioa lortu eta gero, erraz lor daiteke tentsio ebakitzailak kalkulatzeko behar dugun formula. Horretarako, nahikoa da (12-14) erlazioa (12-9) ekuazioan ordeztea:

$$\tau = \frac{M_x r}{I_p}. \quad (12-17)$$

Tentsio ebakitzaila maximoa piezaren gainazaleko puntuetan egongo da, eta beraren balioa honako hau izango da:

$$\tau_{max} = \tau|_{r=R} = \frac{M_x R}{I_p}. \quad (12-18)$$

Makurduraren kasuan egin genuen bezala, inertzia-momentu polarraren eta erradioaren arteko erlazioari *bihurduraren aurreko erresistentzia-modulua* deituko diogu (W_x). Beraz, tentsio ebakitzaila maximoa honelaxe idatziko dugu:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_x}. \quad (12-19)$$

12.5. irudian ikusten den bezala, sekzioaren zentrotik gertu dauden puntuetako tentsioa txikia da, gainazaleko tentsio maximoarekin konparatuz. Ondorioz, sekzioaren erdialdeari etekin txikia ateratzen zaio, eta materiala alferrik galtzen dugu. Hori dela-eta, hodi erako pieza prismatikoak egokiagoak dira bihurtura-momentuak jasateko. Materiala aurrezteaz gain arinagoak direnez, pisuak garrantzi berezia duen diseinuetan erabiltzen dira (hegazkintan, adibidez). Hodietako tentsio ebakitzailak kalkulatzeko, (12-17) ekuazioko espresio orokorra aplika daiteke, honako inertzia-momentu polarra erabiliz:

$$I_p = \frac{\pi(R_2 - R_1)^4}{2}, \quad (12-20)$$

non R_1 eta R_2 direlakoak sekzioaren barruko eta kanpoko erradioak diren, hurrenez hurren. Bestalde, 12.5.b. irudian adierazten den bezala, tentsioak materiala dagoen zatian bakarrik agertuko dira. Hodiaren horma erradioa baino askoz txikiagoa denean, inertzia-momentu polarra beste espresio honen bidez hurbil daiteke:

$$I_p \approx 2\pi R^3 t, \quad (12-21)$$

non t balioa hormaren lodiera baita. Horrela, (12-20) eta (12-21) espresioetatik ondorio garrantzitsu bat lor daiteke: azalera berdina duten bi sekzio konparatzen baditugu, bata betea eta bestea hutsa, bigarrenak inertzia-momentu polar handiagoa edukiko du, materiala sekzioaren zentrotik urrunago baitago banaturik. Ondorioz, sekzio hutsean agertzen diren tentsioak txikiagoak izango dira, eta sekzio beteak baino erresistentzia handiagoa izango du.

Azpiatal hau bukatzeko, makurdura bakunaren eta pieza zirkularren bihurturaren artean dauden antzekotasunak ikusiko ditugu. Bederatzigarren gaiko espresioak eta gai honetan ikusitakoak konparatuz gero, antz handia dutela nabaritzen da. Hain zuzen, 12.1. taulan makurduraren eta bihurturaren adierazgarriak diren magnitudeak daude laburturik.

Makurdura	Bihurdura
M_x	M_x
E	G
σ	τ
EI_z	GI_P
k	θ
$K = M_x/EI_z$	$\theta = M_x/EI_P$
$\sigma = M_x y/I_z$	$\tau = M_x r/I_P$

12.1. taula.

Nolanahi den, 12.1. taulako antzekotasunez gain, sekzioen arteko biraketa erlatiboa kalkulatzeko (12-15) espresioak Mohr-en lehenengo teorema gogoratzen du:

$$\varphi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_x}{GI_P} dx, \quad \theta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_z}{EI_z} dx. \quad (12-22)$$

12.3. BIHURDURA ISOSTATIKOA ETA BIHURDURA HIPERESTATIKOA

Atal honetan bihurturaren bi adibide analizatuko ditugu. Lehenengoa bihurtura isostatikoa da, 12.10.a. irudian adierazten dena. Pieza prismatikokoaren sekzioa zirkularra da, eta ezkerreko muturrean landatuta dago. Erdiko B sekzioan $3M_0$ balioko momentu bihurtzaile bat aplikatzen da, eta C muturrean M_0 balio duen beste bat, aurrekoaren aurkako noranzkoa duena. Momentu bihurtzaile kontzentratuak daudenez, momentu bihurtzaileen diagraman jauziak egongo dira, eta ardatzaren bi zatia aztertu beharko ditugu. Kalkula dezagun lehenengo A landapeneko erreakzioa. Lotura horretan agertzen den momentu makurtzailea kalkulatzeko, nahikoa da ondoko oreka-ekuazioa aplikatzea:

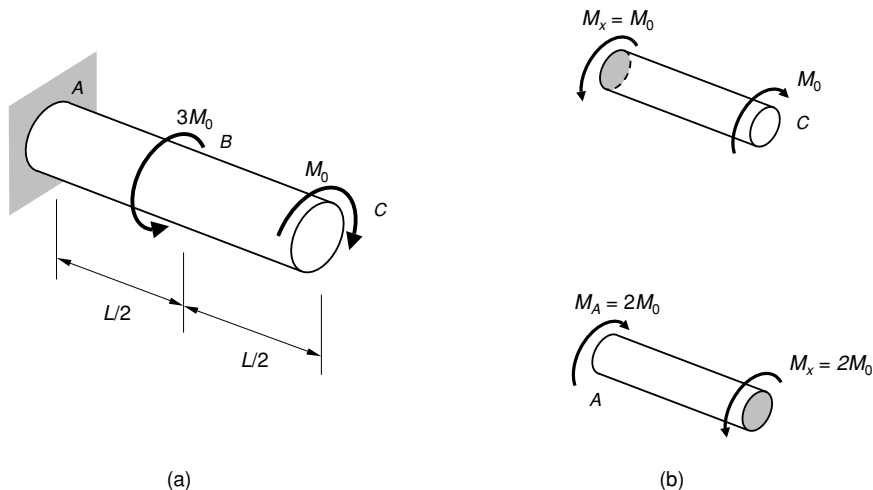
$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_A - 3M_0 + M_0 = 0, \quad (12-23)$$

hau da,

$$M_A = 2M_0, \quad (12-24)$$

non orratzen noranzko positiboa suposatzen den.

Pieza prismatikoa BC tartean ebakiko bagenu, ardatzaren inguruan momentuen baturak nulua izan behar duenez, tarte horretako momentu bihurtzaileak ere M_0 balio duela ikusiko genuke, 12.10.b. irudian agertzen den bezala. Ondoren, landapeneko erreakzioa ezaguna denez, AB tarteko bihurtura ere kalkula dezakegu. Sekzioen metodoa aplikatuz ardatza A eta B puntuen artean ebakiko bagenu eta ezkerreko aldea isolatuko bagenu, 12.10.b. irudiko pieza-zatia edukiko genuke. Berrirori ere momentuen oreka-ekuazioan oinarrituz, tarte horretan dagoen momentu bihurtzaileak $2M_0$ balio duela ikusiko genuke, irudian agertzen den noranzkoarekin. Ikusten denez, egitura isostatikoa denean, oreka-ekuazioak aski dira erreakzioak eta barneko esfortzuak kalkulatzeko. Bestalde, ardatz guztiko sekzioen momentu bihurtzaileak ezagututa, edozein puntuko tentsio ebakitzzaileak kalkula ditzakegu, (12-17) ekuazioaren bidez.



12.10. irudia.

Kalkula dezagun C muturreko sekzioaren biraketa. Ikusi genuen bezala, (12-15) ekuazioaren bidez biraketa erlatiboak kalkula ditzakegu soilik. Halere, badakigu A sekzioko biraketa nulua dela, mutur hori landatuta baitago. Beraz, C muturraren biraketa absolutua lortzeko, nahikoa da sekzio horren biraketa erlatiboa A sekzioarekiko kalkulatzeko. Gainera, AB eta BC tarteetako bihurtzaileak desberdinak direnez, (12-15) ekuazioa zati horietako bakoitzean kalkulatu beharko dugu. Beste era batera esanda, C sekzioak B -rekiko duen biraketa eta B -k A -rekiko duena batu beharko ditugu:

$$\theta_C = \theta_{CA} = \theta_{CB} + \theta_{BA}. \quad (12-25)$$

Noranzko positibo modura orratzena aukeratu dugula gogoraturaz,

$$\theta_C = -\frac{2M_0 L/2}{GI_P} + \frac{M_0 L/2}{GI_P} = -\frac{M_0 L}{2GI_P}, \quad (12-26)$$

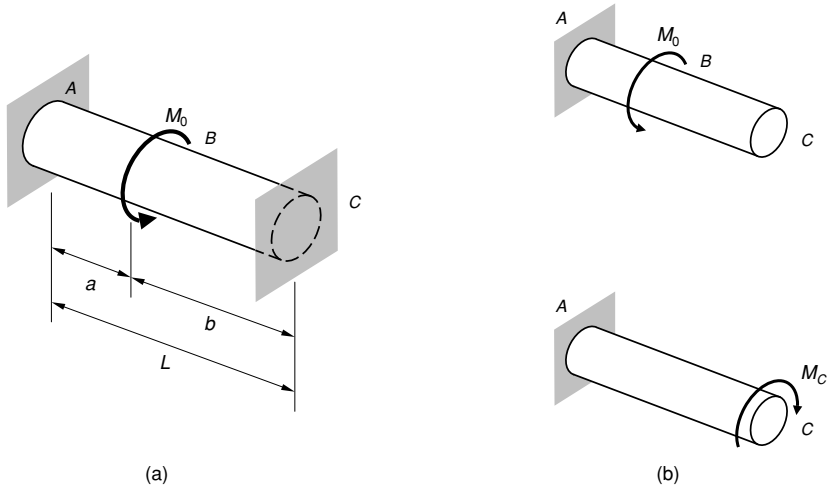
hots, C sekzioak orratzen aurkako noranzkoan biratzen du.

Azter dezagun orain 12.11. irudiko ardatz hiperestatikoa. Kasu horretan estatikaren ekuazioak ez dira aski izango problema ebatzi ahal izateko, egitura estatikoki zehaztugabea baita. Beraz, hiperestatikotasun-maila $h = 1$ denez, ezezagun hiperestatiko bat aukeratu dugu, esate baterako, C landapeneko momentu bihurtzailea, eta indarren metodoa aplikatu dugu. Ondoren, lotura hori askatuko dugu, eta lortutako egitura isostatikoan biraketak nulua izan behar duela aplikatu. Beraz, bateragarritasun-ekuazioa honako hau izango da:

$$\theta_C = 0. \quad (12-27)$$

Biraketa hori kalkulatzeko, 11.2. irudiko adibidean egin genuen bezala, gainezarpentziaz baliatuko gara. Aplikaturako M_0 momentuak eta M_C erreakzioak sortzen dituzten biraketak bakoitza bere aldetik kalkulatu ondoren, biak batuko ditugu biraketa totala lortzeko:

$$\theta_C = \theta_C^{M_0} + \theta_C^{M_C}. \quad (12-28)$$



12.11. irudia.

Momentu makurtzailearen ondorioz C sekzioan agertzen den biraketa, B sekzioko biraketaren berdina izango da. Beraz, AB tartean momentu makurtzaileak M_0 balio duenez, (12-15) ekuazioa aplikatuz gero, hauxe lortzen da:

$$\theta_C^{M_0} = -\frac{M_0 a}{GI_P}. \quad (12-29)$$

Aldiz, M_C erreakzioak sortzen duen momentua beste hau da:

$$\theta_C^{M_C} = \frac{M_C L}{GI_P}. \quad (12-30)$$

Bestalde, (12-27) bateragarritasun-ekuazioaren arabera biraketa totalak nulua izan behar duenez:

$$\theta_C = -\frac{M_0 a}{GI_P} + \frac{M_C L}{GI_P} = 0, \quad (12-31)$$

eta ezezagun hiperstatikoa askatuz:

$$M_C = \frac{M_0 a}{L}. \quad (12-32)$$

Azkenik, oreka-ekuazioaren bidez, beste muturreko momentu makurtzailea lor daiteke, hau da, M_A erreakzioaren balioa:

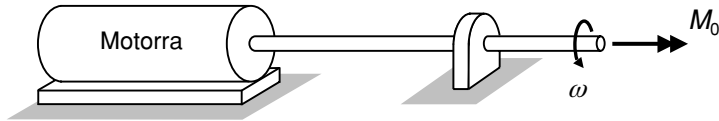
$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_A + M_C = M_0. \quad (12-33)$$

Beraz,

$$M_A = M_0 - M_C = M_0 - \frac{M_0 a}{L} = \frac{M_0 b}{L}. \quad (12-34)$$

12.4. TRANSMISIO-ARDATZEN KALKULUA

Ardatzen aplikazio garrantzitsu bat mekanismo batetik beste mekanismo batera potentzia transmititzea da. Potentzia ardatzaren biraketari esker transmititzen da, eta transmititutako potentzia aplikatutako momentuaren eta biraketa-abiaduraren menpe dago. Bihurdurapean dauden ardatz horien diseinuan sarritan izango dugun problema bat honako hau da: zein da ardatzak eduki behar duen sekzioa, n bira minutuko abiadurarekin biratzen duen ardatz batek Q potentzia transmiti dezan?



12.12. irudia.

Problema hori ebazteko, demagun 12.12. irudiko motorraren ardatza, ω (rad/s) abiadurarekin biratzen duena. Ardatzaren momentu bihurtzailea M_0 bada, momentu horrek egiten duen lana honelaxe idatz daiteke:

$$W = M_0 \varphi, \quad (12-35)$$

non φ angelua ardatzaren biraketa baita. Hortaz, (12-35) espresioa denborarekiko deribatuz, potentzia edukiko genuke:

$$P = \frac{dW}{dt} = M_0 \frac{d\varphi}{dt} = M_0 \omega. \quad (12-36)$$

Honelatan, bada, (12-36) ekuazioan momentu makurtzailea newton·m-tan adieraziz gero eta abiadura angeluarra rad/s-tan, potentzia watt-etan neurtuko genuke. Potentzia zalditan (CV edo HP) adieraziz gero, zaldi bat 735 Nm/s direla gogoratu beharko genuke. Biraketa-abiadura bira minutuko unitatetan emanez gero, honelaxe bihur dezakegu rad/s-tara:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}. \quad (12-37)$$

Beraz, ardatzak jasaten duen momentu bihurtzailea honako hau da, transmititu beharreko potentziaren eta biraketa-abiaduraren funtzioan:

$$M_0 = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{2\pi n/60}. \quad (12-38)$$

Ardatzak jasango duen tentsio ebakitzaile maximoa, (12-19) ekuazioan ikusi genuen bezala, hauxe da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_0}{W_x}. \quad (12-39)$$

Materialak hutsik egin ez dezan, tentsio hori onar daitekeen handiena baino txikiagoa izan beharko da:

$$\frac{M_0}{W_x} \leq \tau_{\text{onarg}} \tag{12-40}$$

Erresistentzia-modulua askatuz eta (12-38) espresioa ordeztuz:

$$W_x \leq \frac{M_0}{\tau_{\text{onarg}}} = \frac{Q}{\tau_{\text{onarg}} 2\pi n / 60} \tag{12-41}$$

Sekzio zirkular baten erresistentzia-modulua jarraian adierazten dena da:

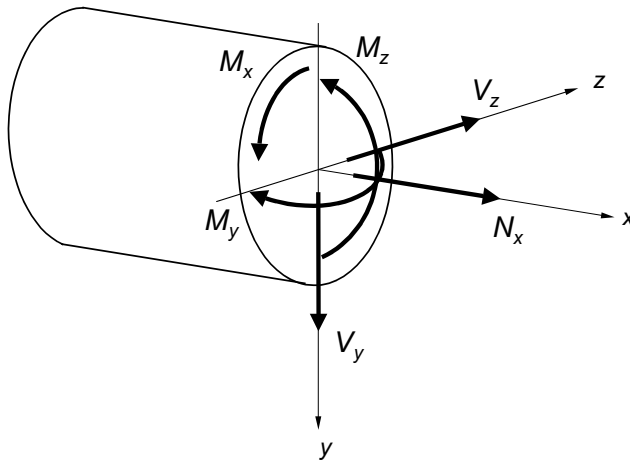
$$W_x = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^4 / 2}{R} = \frac{\pi R^3}{2} \tag{12-42}$$

Beraz, (12-41) espresioan oinarrituz, ardatzak beharko zukeen sekzioaren erradio minimoa kalkula dezakegu:

$$R \geq 3 \sqrt[3]{\frac{60Q}{\pi^2 n \tau_{\text{onarg}}}} \tag{12-43}$$

12.5. MAKURDURAREKIN KONBINATURIKO BIHURDURA

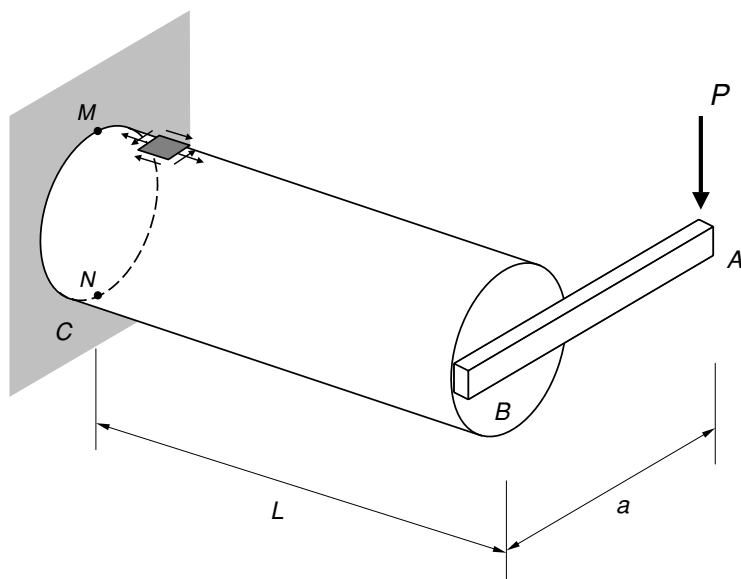
Momentu bihurtzailearen analisiarekin, pieza prismatikoen sekzioetan ager daitezkeen esfortzu guztiak ikasten bukatu dugu. Karga-egoera konplexuagoak agertzen direnean, hots, makurdura eta bihurtura konbinaturik daudenean, nahikoa da gainezarpren-printzipioa aplikatzea, sekzioko edozein puntutan agertzen diren tentsioak kalkulatu ahal izateko. Adibidez, izan bedi 12.13. irudiko sekzioan ageri den egoera orokorra.



12.13. irudia.

Aurreko gaitan ikusi dugun bezala, N_x ardatzeko indarrak tentsio normalak sortuko ditu. Bestetik, V_y eta V_z indar ebakitzaileek, M_x momentu bihurtzailearekin batera, tentsio ebakitzaileak sortuko dituzte. Eta M_z eta M_y momentu makurtzaileek, tentsio normalak. Hain zuzen, (12-44) adierazpenetan, tentsio horiek guztiak kalkulatzeko erabil daitezkeen espresioak laburbildu dira.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{N_x}{A}, & \sigma_{xx} &= \frac{M_z y}{I_z}, \\ \tau_{xy} &= \frac{V_y Q_z}{b_z I_z}, & \sigma_{xx} &= \frac{M_y z}{I_y}, \\ \tau_{xz} &= \frac{V_z Q_y}{b_y I_y}, & \tau &= \frac{M_x r}{I_P}. \end{aligned} \quad (12-44)$$



12.14. irudia.

Bestalde, karga-egoera orokor batean (12-44) espresioak nola erabil daitezkeen ikusteko, 12.14. irudiko adibidea erabiliko dugu. Kasu horretan, makurdura bakuna bihurtura-rekin batera agertzen da. Landapenetik x distantziara kokatutako sekzio bati dagokionez, barneko esfortzuek balio hauexek dituzte:

$$V_y = P, \quad M_z = P(L - x), \quad M_x = Pa. \quad (12-45)$$

Honelatan, bada, (12-45) ekuazioko espresioak aztertuz, sekziarik zigortuena landapenekoa dela ondoriozta daiteke. Sekzio horretan barne-esfortzuek sortzen dituzten tentsio maximoak honako hauek dira:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy}^{\max} &= \frac{4}{3} \frac{V_y}{A} = \frac{16P}{3\pi d^2}, \\
 \sigma_{xx}^{\max} &= \frac{M_z d/2}{I_z} = \frac{PLd/2}{\pi d^4/64} = \frac{32PL}{\pi d^3}, \\
 \tau &= \frac{M_x d/2}{I_p} = \frac{Pa d/2}{\pi d^4/32} = \frac{16Pa}{\pi d^3},
 \end{aligned}
 \tag{12-46}$$

non d delakoa sekzioaren diametroa baita.

Esfortzu bakoitzak sortzen dituen tentsio handienak kalkulatu ondoren, hurrengo pausoa sekzioko punturik zigortuena bilatzea da, hots, huts egiteko aukera gehien duena. Indar ebakitzailiek sortutako tentsio ebakitzailak besteak baino askoz txikiagoak izaten direnez, mespretxatu egingo ditugu, eta momentu makurtzaileak eta momentu bihurtzaileak sortzen dituztenekin geratuko gara. Beraz, momentu bihurtzailearen tentsio ebakitzailak maximoak mugaldeko puntuetan agertzen direnez, eta momentu makurtzailearenak goiko eta beheko zuntzetan, punturik arriskutsuenak irudian M eta N deitu ditugunak izango dira. Puntu horietan σ_{xx} tentsio normala eta τ_{xz} tentsio ebakitzaila edukiko ditugu. Izan ere, tentsio ebakitzaila mugaldeko puntuetan zirkunferentziarekiko ukitzaila da, eta, ondorioz, z ardatzaren norabidea edukiko du.

Ondoren, hutsegite-teoriak aplikatu ahal izateko, puntu horietako tentsio nagusiak eta tentsio ebakitzailak maximoa lortu beharko ditugu. Horretarako, tentsio-egoera lauaren kasuan ikusitako espresioak erabil ditzakegu:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_{xx}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}, & \sigma_3 &= 0, \\
 \tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}.
 \end{aligned}
 \tag{12-47}$$

Tentsio horiek M_z eta M_x momentuen funtzioan berridatziz gero, hauxe edukiko dugu:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{M_z}{2W_z} + \sqrt{\left(\frac{M_z}{2W_z}\right)^2 + \left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2} = \frac{M_z + \sqrt{M_z^2 + M_x^2}}{2W_z}, \\
 \sigma_2 &= \frac{M_z}{2W_z} - \sqrt{\left(\frac{M_z}{2W_z}\right)^2 + \left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2} = \frac{M_z - \sqrt{M_z^2 + M_x^2}}{2W_z}, \\
 \tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{M_z}{2W_z}\right)^2 + \left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_x^2}}{2W_z},
 \end{aligned}
 \tag{12-48}$$

non W_z delakoa makurduraren aurkako erresistentzia-modulua den, eta W_x delakoa bihurturaren aurkako erresistentzia-modulua. Sekzio zirkularren kasuan bien artean dagoen erlazioa honako hau da:

$$W_x = 2 W_z. \tag{12-49}$$

Material harikorretan hutsegitea auresateko, Tresca-en irizpidea erabiltzen da maiz. Hutsegite-teoria horren arabera, tentsio ebakitzaile maximoak tentsio ebakitzaile onargarria baino txikiagoa izan behar du, hau da,

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_x^2}}{2W_z} \leq \tau_{\text{onarg}}. \quad (12-50)$$

Beraz, honako espresio honi *Tresca-ren momentu baliokidea* deitzen badiogu,

$$M_{\text{bal}}^{\text{Tresca}} = \sqrt{M_z^2 + M_x^2}, \quad (12-51)$$

materialak huts egingo duen ala ez jakiteko, nahikoa da ondoko erlazio hau erabiltzea:

$$\frac{M_{\text{bal}}^{\text{Tresca}}}{W_z} \leq 2\tau_{\text{onarg}} = \sigma_{\text{onarg}}. \quad (12-52)$$

Espresio horretatik zuzenean lor daiteke ardatzak behar duen diametro minimoa, makurduraren aurkako erresistentzia-modulua ordeztuz:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{bal}}^{\text{Tresca}}}{\pi\tau_{\text{onarg}}}}. \quad (12-53)$$

Hodien kasuan, diametroen arteko erlazioa lortuko dugu:

$$d_2^3 - d_1^3 = \frac{16M_{\text{bal}}^{\text{Tresca}}}{\pi\tau_{\text{onarg}}}, \quad (12-54)$$

non d_2 eta d_1 direlakoak kanpoko eta barruko diametroen balioak baitira, hurrenez hurren.

Tresca-ren irizpidea erabili ordez Von Mises-ena erabiliko bagenu, teoria horren tentsio baliokidea trazio-saiakuntzan onar daitekeen tentsio maximoarekin konparatu behar ko genuke. Preseski, (12-47) ekuazioko σ_1 eta σ_2 tentsio nagusiak Von Mises-en tentsio baliokidearen espresioan ordeztuz (ikus (6-42) ekuazioa), hauxe lortzen da:

$$\sigma_{\text{bal}}^{\text{VonMises}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2} = \frac{\sqrt{M_z^2 + 3/4M_x^2}}{W_z} \leq \sigma_{\text{onarg}}, \quad (12-55)$$

Oraingoan Von Mises-en tentsio baliokidea beste espresio honi deituz:

$$M_{\text{bal}}^{\text{VonMises}} = \sqrt{M_z^2 + 0,75M_x^2}, \quad (12-56)$$

hauxe lortzen da:

$$\frac{M_{\text{bal}}^{\text{VonMises}}}{W_z} \leq \sigma_{\text{onarg}}, \quad (12-57)$$

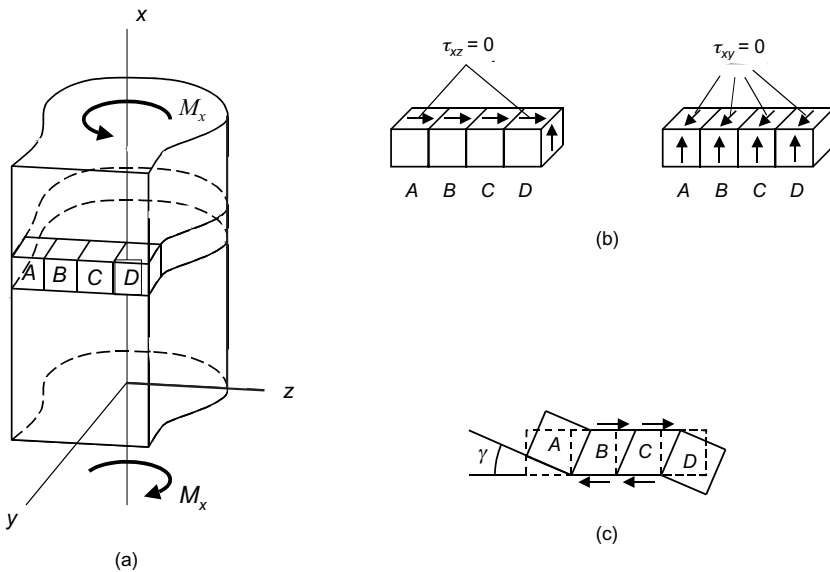
eta hemendik, diametro minimoaren balioa:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{bal}}^{\text{VonMises}}}{\pi\sigma_{\text{onarg}}}}. \quad (12-58)$$

Espresio hori eta (12-52) ekuazioan Tresca-rentzat lortutakoa berdinak direla ikus daiteke; hots, itxura berdina dute. Ondorioz, makurdura eta bihurturapean dauden sekzio zirkularretako hutsegitea aztertzeke, nahikoa da momentu baliokideak kalkulatzeko eta (12-52) edo (12-57) ekuazioak aplikatzea, aukeratzen den irizpidearen arabera. Era horretan, ez dago puntu arriskutsuenetako tentsio-egoera eta, ondoren, tentsio baliokideak kalkulatu beharrik. Ikusi dugun bezala, momentu baliokideen kontzeptua erabiliz, lan hori guztia aurreztu egin daiteke.

12.6. SEKZIO ZIRKULARRA EZ DUTEN PIEZEN BIHURDURA

Orain arte sekzio zirkularreko piezen bihurtura baino ez dugu aztertu. Atal honetan sekzioa zirkularra ez denean zer gertatzen den azaltzen saiatuko gara. Zeharkako sekzioa zirkularra denean, zirkuluak aurkezten duen simetria perfektua dela-eta, sekzioek disko zurrunk izango balira bezala biratzen dute ardatzaren inguruan, distortsiorik agertu gabe. Ondorioz, sekzioek lauak izaten jarraitzen dute deformazioa gertatu eta gero ere. Sekzioa zirkularra ez denean, ostera, baieztapen hori ez da egiazkoa eta sekzioak kopatu egiten dira, hots, distorsio bat agertzen da. Kopadura horren jatorria ulertzeko, 12.15. irudiko pieza prismatikoz baliatuko gara.



12.15. irudia.

Honelatan, bada, 12.15.a. irudiko piezan, *A*, *B*, *C* eta *D* elementuen portaera aztertuko dugu. Elementu horiek isolatu ondoren, zenbait ondorio interesgarri lor ditzakegu. Hain zuzen, 12.15.b. irudian ikusten den bezala, τ_{xy} tentsioa nulua izan behar da lau elementuetan. Izan ere, tentsio ebakitzaila hori existitzeko, agerian dauden aurrealdeko lau aurpegietan ere tentsio ebakitzaila egon beharko litzateke. Tentsio horiek existitzen ez direnez, ezin daiteke τ_{xy} osagairik egon. Beste osagai ebakitzailari dagokionez, τ_{xz} nulua izan behar da muturretako elementuetan, hots, *A* eta *D* elementuetan, lehengo arrazoi beragatik. Halere, *B*

eta C elementuetan τ_{xz} tentsio ebakitzaila agertuko da, eta, ondorioz, elementu horiek γ deformazio angeluarra jasango dute. Bestetik, 12.15.c. irudian ageri den bezala, A eta D elementuetan tentsio ebakitzailerik ez dagoenez, ez dute distortsiorik jasango eta solido zurrun gisa biratuko dute, erdiko bi elementuek agintzen dutenaren arabera. Hori dela-eta, hasieran laua zen sekzioa okertu egiten da, eta bertako puntuak sekzioaren planotik irteten dira, kopadura agertuz. Lau elementu bakarrik hartu beharrean elementuen kopurua infinitua balitz, A -tik D -ra doan lerroa kurba leun bat izango litzateke. Tentsio ebakitzaila kurba horrekiko ukitzaila izango litzateke mugaldeko puntuetan, osagai elkarzutak nulua izan behar duela ikusi baitugu. Bestalde, A eta D erpinetan nulua izango litzateke. Adibide horretatik, ondorio orokor hauek lor daitezke, sekzio zirkularra ez duten pieza prismatikoen bihurdurari buruz:

- a. Sekzioa kopatu egiten da.
- b. Mugaldeko puntuetan tentsio ebakitzaila ukitzaila da; beraz, ezin daiteke erradioarekiko elkarzuta izan, sekzio zirkularrekin gertatzen zen bezala.
- c. Erpinetako tentsio ebakitzaila nulua da.

Erraz uler daiteke sekzio horien kalkulua sekzio zirkularrena baino zailagoa izango dela. Aukera bat elastikotasunaren teoria erabiltzea da, gorputz elastikoen portaera definitzen duten ekuazio diferentzialak integratuz. Halere, sekzioaren geometria erraza izan ezean, ekuazio horien soluzioa lortzea lan latza izaten da. Elastikotasunaren teoriaren bidez Saint-Venant-ek egindako analisisian oinarrituz, bihurduraren problema honako ekuazio honen bidez labur daiteke:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta, \quad (12-59)$$

non Φ delakoa *tentsio-funtzioa* deitzen baita. Funtzio hori sekzioko puntuaren (y , z) koordenatuen funtzioa da. Funtzio horren sestra-kurbak marraztuko bagenitu, 12.16. irudikoaren antzeko adierazpen grafiko bat lortuko genuke. Tentsio ebakitzaila kurba horiekiko ukitzaila dela ere frogatu daiteke, beste espresio hauekin batera:

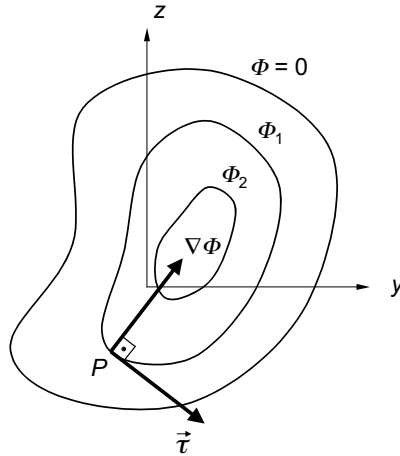
$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (12-60)$$

Hau da, tentsio-funtzioaren lehen deribatuek tentsio ebakitzailarekin erlazionaturik daude.

Bihurduraren problema definitzen duen (12-59) ekuazioak beste fenomeno fisiko batean agintzen duen ekuazio diferentzialaren antz handia dauka. Preseski, presio uniforme jasaten duen mintz lau bateko puntuen desplazamenduak deskribatzen dituen ekuazio diferentziala honako hau da:

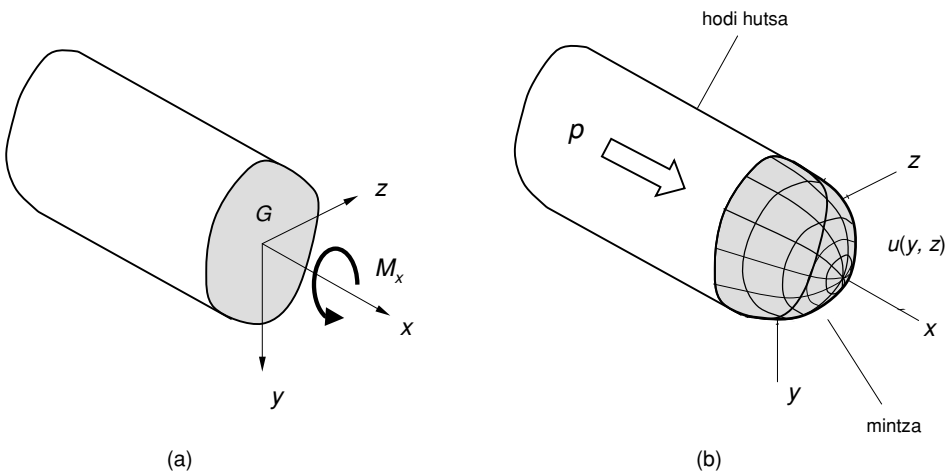
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{p}{T}, \quad (12-61)$$

non u delakoa puntuen zeharkako desplazamendua baita, p delakoa aplikatuta dagoen presioa eta T delakoa mintzaren luzera-unitateko tentsioa.



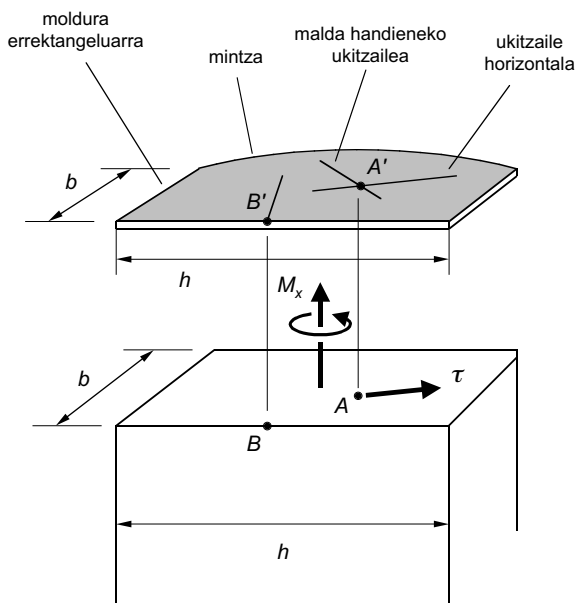
12.16. irudia.

Ikusten den bezala, (12-59) eta (12-61) ekuazioek itxura bera dute. Zehazkiago esanik, u desplazamendua Φ tentsio-funtzioaren parekoa da. Era berean, p/T eta $2G\theta$ baliokideak dira. Bi ekuazio horien artean dagoen antzekotasuna Prandtl-i zor zaio eta *mintzaren antzekotasuna* izenaz ezagutzen da (ikus 12.17.a. eta 12.17.b. irudiak). Propietate horretan oinarrituz, Φ tentsio-funtzioaren sestra-kurbak irudika daitezke, eta, horrela, tentsio-banaketa nolako izango den aurreratu. Gainera, mintzaren antzekotasunean oinarrituz, tentsio ebakitzaille maximoak non agertuko diren jakin daiteke, kualitatiboki bada ere. Bestalde, (12-59) eta (12-61) ekuazioak erkatuz, u desplazamenduaren lehen deribatua —hau da, sestra-kurben ukitzailea— eta Φ tentsio-funtzioaren deribatua —hots, tentsio ebakitzaillea— baliokideak direla ikus daiteke. Ondorioz, mintz deformatuaren malda handia den puntuetan tentsio ebakitzaillea ere handia izango da. Beste era batera esanda, sestra-kurbak bata bestetik gertu dauden puntuetan, tentsio ebakitzaillea handia izango da.



12.17. irudia.

Sekzio errektangeluar baten kasuan mintzaren analogia aplikatzeko, neurri berdinak dituen moldura errektangeluar bat erabiliko genuke, 12.18. irudian ageri den bezala. Mugaldean mintza erantsi eta gero, presio bat aplikatuko genioke. Horrela, A bezalako puntu batean dagoen tentsio ebakitzailearen norabidea kalkulatzeko, nahikoa da A' puntuan mintz deformatuarekiko ukitzaille horizontala marraztea. Tentsio ebakitzailearen modulua puntu horretan mintzak duen malda handienarekiko proportzionala izango da. Sekzioko puntu guztien artean, malda handiena luzera handieneko aldearen erdian agertzen da, hau da, 12.18. irudiko B puntuan. Beraz, lehen aurkeztutako antzekotasunaren arabera, tentsio ebakitzaile handiena ere puntu horretan egongo da. Sekzioaren erpinetan, mintzarekiko ukitzaillea horizontala da; ondorioz, tentsio ebakitzaileak zero balio du, espero zitezkeen bezala.



12.18. irudia.

Elastikotasunaren teorian oinarrituz, tentsio ebakitzaile maximoak eta biraketa unitarioa kalkulatzeko balio duten espresioak lor daitezke sekzio errektangeluarrentzat. Tentsio ebakitzaile maximoarena honako hau da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{\alpha h b^2}, \quad (12-62)$$

eta biraketa unitarioarena beste hau:

$$\theta = \frac{M_x}{\beta h b^3 G}, \quad (12-63)$$

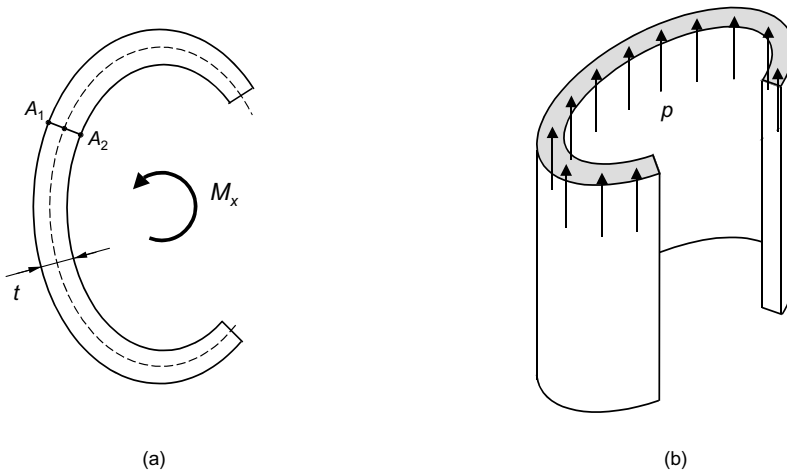
non α eta β koefizienteak ondoko taula honetatik lor daitezkeen:

h/b	α	β
1,0	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2,0	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3,0	0,267	0,263
4,0	0,282	0,281
5,0	0,291	0,291
10,0	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

12.2. taula.

12.7. HORMA MEHEKO SEKZIO ZABALDUEN BIHURDURA

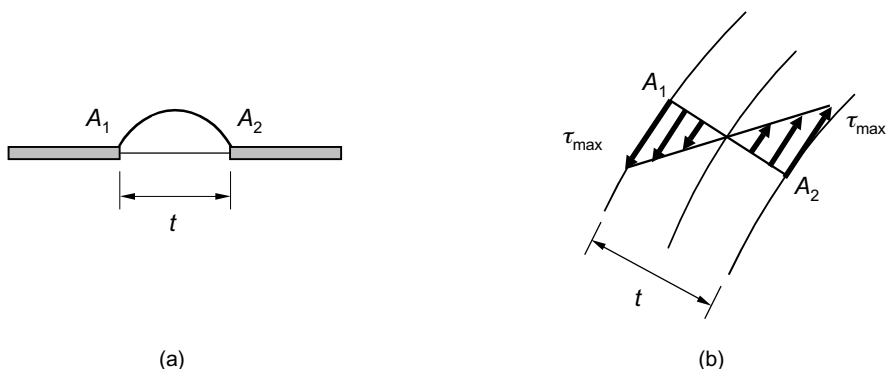
Aurreko atalean, zirkularrak ez diren sekzioetako tentsio ebakitzailak kalkulatzeko elastikotasunaren teorian oinarritu beharra dagoela ikusi dugu, nahiz eta, mintzaren antzekotasunean oinarrituz, tentsio horien banaketa nolako den hauteman dezakegun. Horma mehea duten sekzioen kasuan, ordea, zenbait hurbilketa eta hipotesi sinplifikatzaile egin ondoren, tentsio horiek kalkulatzeko balio duten espresio labur batzuetara iritsi gaitzke, segidan ikusiko dugun bezala. Atal honetan mugaldea zabalik duten sekzioak aztertuko ditugu.



12.19. irudia.

Demagun 12.19.a. irudiko horma meheko pieza prismatikoaren tentsio ebakitzailak kalkulatu nahi ditugula, sekzioan M_x momentu bihurtzaile batek eragiten duenean. Tentsio-banaketa nolakoa izango den auresateko, mintzaren analogia erabil dezakegu. Horretarako, sekzioaren itxura berdina duen marko edo moldura bat erabiliko genuke, eta mugaldean mintz bat erantsi. Horrela, 12.19.b. irudian ageri den bezala presio bat aplikatu ondoren, mintzaren deformazioa aztertuz, tentsioen izaera nolakoa den jakin dezakegu.

Mintz deformatuaren itxura parabola baten antzekoa dela frogatu daiteke (ikus 12.20.a. irudia). Ondorioz, mintzaren antzekotasunari dagokionez, tentsio ebakitzaileak eta mintz deformatuaren maldak baliokideak direnez, tentsioen banaketa lineala izango da. Horrez gain, beste zenbait ondorio lor ditzakegu. Erdiko puntuan ukitzaila horizontala denez, erdiko lerroan tentsioa nulua izango da. Malda handienak muturretako A_1 eta A_2 puntuetan daudenez, tentsio ebakitzaileak ere puntu horietan izango dira maximoak. Puntu horietako malden zeinuak aurkakoak dira; beraz, tentsio ebakitzaileen noranzkoa ere kontrakoa izango da. Gainerako puntuetan, tentsioak gero eta txikiagoak dira, erdiko puntuan anulazten diren arte. Lodierako puntu guztietan tentsio ebakitzailearen norabidea ukitzaila izango da erdiko lerroarekiko. Izan ere, badakigu sekzioaren mugaldearekiko elkarzuta den osagai ebakitzaileak ezin egon daitekeela, 12.15. irudiko adibidearekin frogatu genuen bezala. Tentsio ebakitzaileen banaketa nolakoa den eta balio maximoak non agertzen diren ikusi ondoren, hurrengo pausoa tentsioen balioak kalkulatzeko balioko diguten espresioak lortzea da.



12.20. irudia.

Tentsioen analisi kuantitatiboa egiteko, sekzio errektangeluarrarentzat lortutako emaitzetan oinarrituko gara eta, zehazki, 12.2. taulan jasotzen diren balioetan. Izan ere, 12.21. irudian ikusten den bezala, mintzak jasaten duen deformazioa oso antzekoa da sekzioaren erdiko lerroa zuzena edo kurboa denean. Ondorioz, kurbaturik dagoen sekzio batentzat lortzen diren tentsio ebakitzaileak eta erdiko lerroa zuzena duen sekzio batentzat lortzen direnak oso antzekoak izango dira. Beraz, t lodiera eta s luzera duen horma meheko sekzio kurbo baten tentsioak kalkulatzeko, 12.21. irudiko sekzio errektangeluarra erabil dezakegu. Kasu honetan s/t erlazioa oso handia denez, $h/b = \infty$ erlazioari dagozkion balioak erabil ditzakegu, hau da, $\alpha = \beta = 1/3$. Beraz, tentsioa y koordenatuarekiko independentea dela suposatzen ari gara. Balio horiek (12-62) eta (12-63) ekuazioetan ordezkatzuz, t lodiera duen horma meheko sekzio batentzat hauxe lortzen da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{\frac{1}{3}st^2} = \frac{M_x t}{J}, \quad (12-64)$$

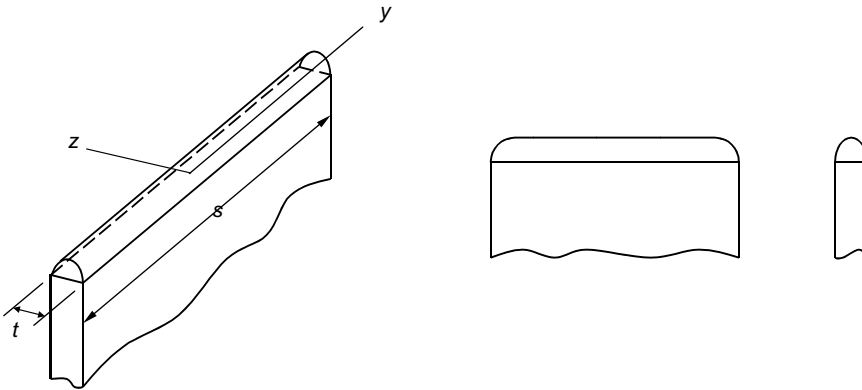
$$\theta = \frac{M_x}{G \frac{1}{3}st^3} = \frac{M_x}{GJ}, \quad (12-65)$$

non J delakoa *bihurdura-modulua* edo *bihurdura-konstantea* den:

$$J = \frac{1}{3} st^3. \tag{12-66}$$

Preseski, (12-65) ekuaziotik ondorioztatzen den bezala, bihurtura-modulua zeharkako sekzioaren geometriaren menpe dago soilik. Sekzioaren lodiera konstantea ez denean, tentsioa eta biraketa unitarioa kalkulatzeko espresioak erabiltzen jarrai dezakegu, baina bihurtura-modulua honelaxe kalkulatu beharko genuke:

$$J = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds. \tag{12-67}$$



12.21. irudia.

Sekzioa s_i luzerako eta t_i lodierako n zati desberdinekin osatuta egongo balitz, honako espresio hau aplikatu beharko litzateke:

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i t_i^3. \tag{12-68}$$

Lodiera aldakorra denean, tentsio ebakitzaile maximoaren balioak lodiera handieneko puntuetan agertuko dira, hau da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x t_{\max}}{J}. \tag{12-69}$$

Horma meheko piezen bihurturari eskainitako atal hau bukatzeko, adarrak dituzten sekzioak nola kalkula daitezkeen ikusiko dugu. Adibide gisa, demagun 12.22. irudiko horma meheko sekzioa dugula. Sekzio horrek adar desberdin ugari dituenez, ezin daiteke zuzenean sekzio errektangeluar bihur. Halere, tentsioak nolakoak izango diren auresateko, mintzaren antzekotasuna erabiltzen jarrai dezakegu. Mintz deformatuaren itxura, berriro ere, parabolikoa izango litzateke, adarrak lotzen diren korapiloetan izan ezik. Korapiloek aurkezten duten berezitasun hori alde batera utzirik, sekzioa s_i luzerako eta t_i lodierako n zati independentez osatuta dagoela onar daiteke. Beraz, adar bakoitzarentzat hauxe idatz dezakegu:

non J delakoa sekzio guztiaren *bihurdura-modulua* den (ikus (12-66) ekuazioa). Adar bakoitzari dagokion tentsio ebakitzaille maximoa M_x momentu bihurtzaile totalaren funtzioan adierazteko, nahikoa da (12-71) espresiotik M_{x_i} askatzea eta (12-70) ekuazioan ordeztzea:

$$\tau_i^{\max} = \frac{\theta G J_i t_i}{J_i} = \theta G t_i, \tag{12-75}$$

eta (12-74)-ko biraketa unitarioa erabiliz:

$$\tau_i^{\max} = \theta G t_i = \frac{M_x}{GJ} G t_i = \frac{M_x t_i}{J}. \tag{12-76}$$

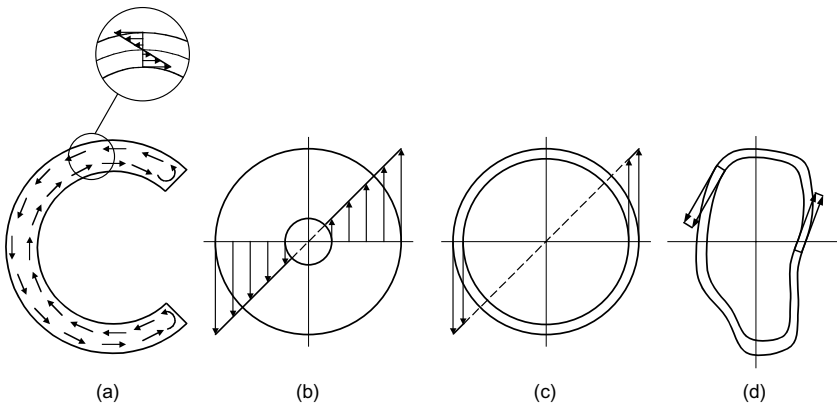
Beraz, adar guztien artean tentsio ebakitzaille handiena edukiko duena eta, ondorioz, hutsegiten lehena izango dena, lodiera handienekoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x t_{\max}}{J}. \tag{12-77}$$

Ikusten den bezala, tentsio ebakitzaille maximoa kalkulatzeko, ez dago adar bakoitza bere aldetik aztertu beharrik, eta adar bakarreko sekzioentzat lortutako (12-69)-ko espresio bera erabil daiteke.

12.8. HORMA MEHEKO SEKZIO ITXIEN BIHURDURA

Horma meheko pieza prismatikoen makurdurari eskainitako gaian ikusi genuen bezala, mugaldea definitzen duen lerroa kurba itxia denean, sekzioa itxia dela esaten da. Mota horretako sekzioa duten pieza prismatikoei *hodi* ere baderitze, eta sekzioaren paretak mugatzen duen azalerari *gelaxka*. Analisia egiteko orduan, gelaxka bat eta gelaxka bat baino gehiago dituzten sekzioak bereiziko ditugu. Lehendabizi gelaxka bakarrekoekin hasiko gara.

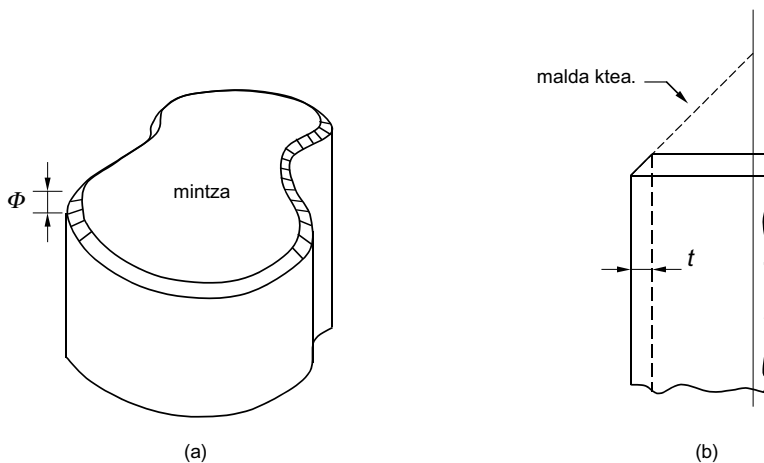


12.23. irudia.

Horma meheko sekzio zabalduentzat lortutako espresioak ezin daitezke sekzio itxien-tzat erabili, agertzen diren tentsio ebakitzailleen izaera zeharo desberdina delako, momentu bihurtzaile batek sortuak egon arren. Ezberdintasun hau ulertzeko, azter ditzagun 12.23.

irudian agertzen diren sekzio desberdinak. 12.23.a. irudian sekzio ireki bat ageri da. Daki-gun bezala, kasu horretan sortzen den tentsioen banaketa lineala da, eta erdiko lerroan tentsioak zero balio du. Bestalde, 12.23.b. irudiko sekzio zirkularren tentsio-banaketak ez dauka aurrekoarekin zerikusirik. Azaldu genuen bezala, tentsioek zero balio dute zentroan eta linealki hazten dira mugaldeko puntuetara iritsi arte. Kanpoko diametroa konstante mantenduz barnekoa handituko bagenu, tentsio-banaketak lineala izaten jarraituko luke, 12.23.c. irudian ageri den bezala. Barneko eta kanpoko diametroak oso antzekoak direnean, tentsio ebakitzailak oso gutxi aldatzen dira lodieran zehar eta, ondorioz, konstanteak direla suposatu dezakegu.

Horma meheko hodi zirkularrentzat lortutako ondorio hori edozein forma daukan sekzio meherentzat aplika daiteke, adibidez, 12.23.d. irudiko sekzioarentzat. Mintzaren antzekotasunaren bidez ere, hipotesi hori onargarria dela ondoriozta daiteke. Sekzioaren kanpoko muga mintz elastiko bat erantsiz gero, presioa aplikatu ondoren mintz deformatuak 12.24.a. irudiko itxura hartuko luke. Paretaren lodieran zehar mintz deformatuaren malda konstantea dela nabaritzen da (ikus 12.24.b. irudia). Beraz, mintz deformatuaren puntuetako malda eta tentsio ebakitzailen balioa erkideak direnez, tentsioa ere konstantea izango da. Beraz, mintzaren antzekotasunean oinarrituz edota 12.23. irudian jarraitutako arrazonamenduari jarraituz, emaitza berera iritsiko ginateke. Paretaren lodiera txikia dela-eta, sekzioko puntu guztietan tentsioak erdiko lerroarekiko ukitzailak direla onartuko dugu, irekita dauden sekzioekin egin genuen bezala.



12.24. irudia.

Azter dezagun orain gelaxka bakarra duen pieza-zati bat, bata bestetik oso gertu dauden bi sekzioen artean kokaturikoa, 12.25.a. irudian ageri den bezala. Sekzioen arteko distantzia infinitesimalari dx deituko diogu. Segidan, hodi-zati horren bi punturen artean dagoen horma-zatia isolatuko dugu (ikus 12.25.b. irudia). Esan dugun bezala, tentsio horiek uniformeki banatzen dira paretaren lodieran, eta erdiko lerroarekiko ukitzailaren norabidea dute. Paretarekiko norabide elkarzutean dauden osagaiak mespretxagarriak direla onar daiteke. Horrela, bada, elkarrekikotasun-teoremaren arabera, A eta B puntuetan luzetarako norabidean ere tentsioak agertuko dira. Tentsio horiek, indar baliokide bat emango dute

ardatzaren norabidean. Hain justu, A eta B puntuetako tentsio eta lodierei τ_A, t_A eta τ_B, t_B deituko diegu, hurrenez hurren. Ardatzaren norabidean indarren oreka aplikatuz gero, hauxe lortzen da:

$$\tau_A t_A dx = \tau_B t_B dx, \tag{12-78}$$

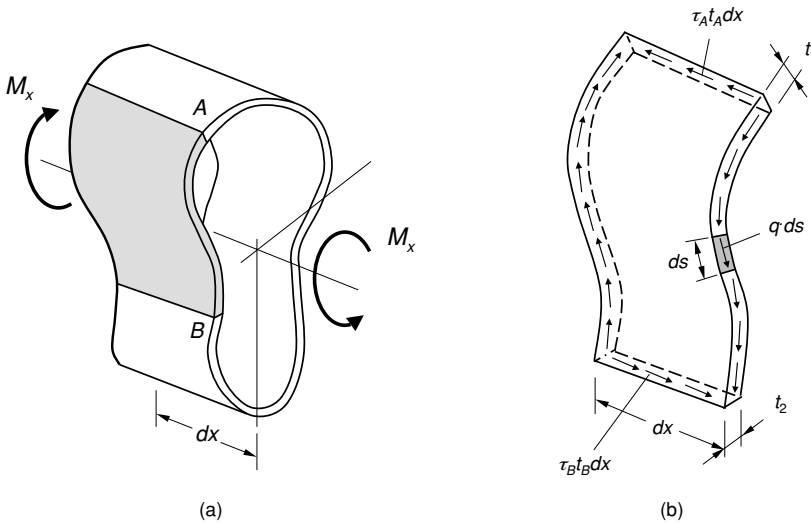
eta sinplifikatuz,

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B = q = \text{ktea}, \tag{12-79}$$

non q delakoa *ebakidura-fluxua* baita. Ebakidura-fluxuak luzera-unitateko indarra adierazten du, eta, (12-78) ekuaziotik ondorioztatzen den bezala, konstantea da sekzioan zehar. Beraz, ds luzerako elementu infinitesimal bati dagokion indarra $q ds$ izango da. Ebakidura-fluxu hori kalkulatu ondoren, sekzioko edozein punturen tentsio ebakitzaila kalkula dezakegu, dagokion lodierarekin zatituz, hau da:

$$\tau = \frac{q}{t}. \tag{12-80}$$

Halere, ebakidura-fluxuak ezezaguna izaten jarraitzen du oraindik ere. Fluxua sekzioan zehar konstantea dela ikusi ondoren, hurrengo pausoa fluxu hori sekzioan aplikatutako momentu bihurtzailearen funtzioan emango digun espresio bat lortzea da. Horretarako, berriro ere estatikaren legeetan oinarrituko gara.



12.25. irudia.

Sekzioan agertzen diren tentsio ebakitzailerek ardatzaren norabidean sortzen duten momentua eta sekzioak jasaten duen momentu bihurtzailea berdinak izan behar dira. Baliokidetasun estatiko horretaz baliatuz, ebakidura-fluxua kalkulatzeko balioko digun espresio batera iritsi gaitezke. Horretarako, 12.26. irudiko sekzioaren O puntu arbitrario batetik hormako puntu baten ukitzaileraino dagoen distantziari r deituko diogu. Puntu horren inguruan ds segmentu infinitesimal bat aukeratuz gero, q fluxuak O puntuarekiko ematen duen momentua honako hau izango litzateke:

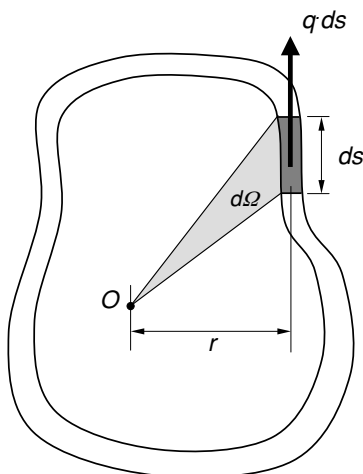
$$dM_x = q r ds. \quad (12-81)$$

Hormako puntu guztietan biderkadura berdina kalkulatuz eta momentu guztiak batuz, hots, (12-81) espresioa sekzio guztian zehar integratuz, sekzioan aplikatutako momentu bihurtzailea lor daiteke:

$$M_x = \int_s q r ds. \quad (12-82)$$

Bestalde, (12-79) ekuazioan ondorioztatu dugun bezala, q fluxua konstantea denez, goiko integraletik kanpora atera dezakegu:

$$M_x = q \int_s r ds. \quad (12-83)$$



12.26. irudia.

Ikus dezagun orain zein den (12-83) espresioiko integralaren esanahia. Horretarako, 12.26. irudira itzuliz, saia gaitzen ilunduta dagoen azaleraren balioa kalkulatzen. Azalera hori triangelu bat dela suposatuz gero, honelaxe lortuko dugu beraren balioa:

$$d\Omega = \frac{r ds}{2}, \quad (12-84)$$

ds delakoa triangeluaren oina izanik, eta r delakoa altuera. Beraz,

$$\int_s r ds = 2\Omega, \quad (12-85)$$

non Ω delakoa sekzioaren barruan mugatuta gelditzen den azalera totala baita. Hortaz, (12-85) erlazioa (12-83) ekuazioan ordeztuz, hauxe lortuko dugu:

$$M_x = 2q\Omega. \quad (12-86)$$

Hortik, sekzioko puntu batean dagoen tentsioa kalkula dezakegu:

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{M_x}{2\Omega t}. \quad (12-87)$$

Beraz, sekzio itxiko pieza prismatikoen kasuan, tentsio ebakitzaille handienak lodiera txikieneko puntuetan agertzen dira. Sekzioa zabalik duten piezekin justu alderantzizkoa gertatzen zen. Hortaz, tentsio ebakitzaille maximoa honela kalkulatu genuke:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{2\Omega t_{\min}}. \quad (12-88)$$

Biraketa-angelu unitarioa kalkulatzeko, hodiak gordetzen duen deformazio-energia kanpoko momentu makurtzaileak egiten duen indarraren ondorioz gordetzen duenaren berdina izan behar dela inposatu dugu. Hodiaren deformazio-energia honako hau da:

$$U = \int_V U_0 dV = \int_V U_0 t L ds, \quad (12-89)$$

non U_0 delakoa deformazio-energiaren dentsitatea den, hau da, bolumen-unitateko deformazio-energia elastikoa. Indar ebakitzaille dagoenean, U_0 -ren espresioa honelaxe idatz daiteke:

$$U_0 = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (12-90)$$

eta (12-87) ekuazioa ordeztuz,

$$U_0 = \frac{M_x^2}{8\Omega^2 t^2 G}, \quad (12-91)$$

Beraz, deformazio-energia totala hauxe izango da:

$$U = \int_s \frac{M_x^2}{8\Omega^2 t^2 G} L t ds = \frac{M_x^2 L}{8\Omega^2 G} \int_s \frac{ds}{t}, \quad (12-92)$$

non M_x , L , G eta Ω balioak integraletik kanpo atera ditugun, konstanteak baitira. (12-92) espresioan gelditzen den azken integral hori sekzioaren propietate geometriko bat da.

Bestalde, momentu bihurtzaileak egiten duen lana beste hau da:

$$W = \frac{1}{2} M_x \varphi = \frac{1}{2} M_x \theta L. \quad (12-93)$$

Hortaz, (12-92) eta (12-93) ekuazioak berdinduz,

$$U = W \Rightarrow \frac{M_x^2 L}{8\Omega^2 G} \int_s \frac{ds}{t} = \frac{1}{2} M_x \theta L, \quad (12-94)$$

eta θ biraketa unitarioa askatuz:

$$\theta = \frac{M_T}{4\Omega^2 G} \oint_s \frac{ds}{t}. \quad (12-95)$$

Espresio hori beste era orokorrago honetan idatz dezakegu, (12-74) ekuazioaren itxura berdina eduki dezan:

$$\theta = \frac{M_x}{GJ}, \quad (12-96)$$

non oraingoan bihurtura-moduluak balio hau duen:

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint_s \frac{ds}{t}}. \quad (12-97)$$

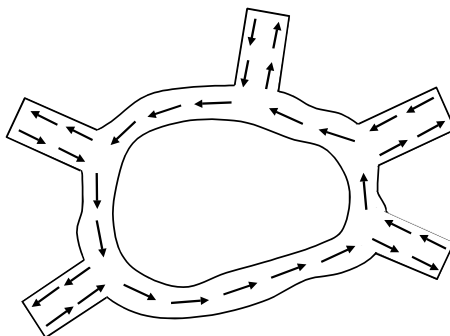
Lodiera konstantea duten n adar desberdinez osatutako sekzio bat edukiko bagenu, bihurtura-modulua honelaxe kalkulatu genuke:

$$J = \frac{4\Omega^2}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{t_i}}. \quad (12-98)$$

Azkenik, zati itxiez eta zabalik dauden elementuez osatutako sekzio nahasi bat dugunean (ikus 12.27. irudia), (12-66) eta (12-98) ekuazioak konbinatu beharko genituzke, era honetan:

$$J = \frac{4\Omega^2}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{t_i}} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i t_i^3. \quad (12-99)$$

n delakoa adar-kopurua izanik.



12.27. irudia.

Atal hau bukatzeko, gelaxka bat baino gehiago dituzten horma meheko sekzio itxien kalkulua deskribatuko dugu. Lehen ikusi dugun bezala, gelaxka bakar batekin osatutako sekzioak estatikoki zehaztuak dira, eta, ondorioz, tentsio ebakitzaileak materialaren

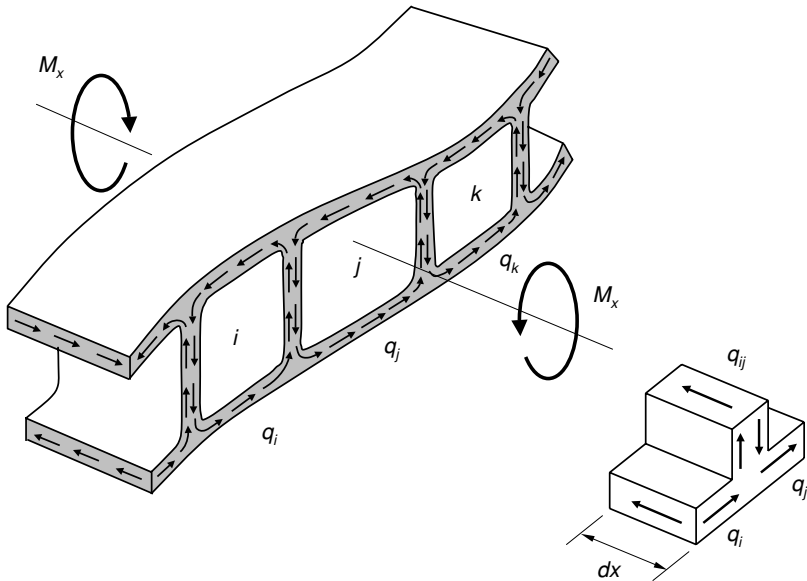
propietateekiko independenteak dira. Ostera, gelaxka bat gehitzen bada, ebakidura-fluxu berri bat agertzen da, estatikaren legeetan oinarrituz kalkula ezin daitekeena. Pieza prismatikoa n gelaxkaz osatuta badago, hiperstatikotasun-maila $h = n - 1$ izango da, eta beste horrenbeste bateragarritasun-ekuazio beharko ditugu problema askatzeko.

Gelaxka bat baino gehiago duten sekzioen ebazpen matematikoa egiteko, 12.28. irudiko sekzioa erabiliko dugu. Lehenik eta behin, i eta j deitu ditugun gelaxkek erdibana duten hormaren beheko korapiloa ebaki eta isolatuko dugu. Elementu horretan indarren baturak ardatzaren norabidean nulua izan behar duela inposatuz, hauxe idatzi beharko genuke:

$$q_i dx + q_{ji} dx - q_j dx = 0 \Rightarrow q_{ji} = q_j - q_i. \tag{12-100}$$

Erlazio hori korapilo bakoitzean aplikatuz, gelaxka desberdinen artean dauden hormetako ebakidura-fluxuak kalkula ditzakegu, gelaxka bakoitzari dagozkion fluxuak ezagutu ondoren. Fluxu horiek kalkulatu ahal izateko, estatikaren legeek ekuazio bakar bat eskaintzen dute, momentu bihurtzailearen eta ebakidura-fluxuen arteko erlazioa adierazten duena, hain zuzen. Beraz, gelaxka bakoitzari ebakidura-fluxu bat dagokiola onartuz eta noranzkoa aukeratu ondoren, hauxe egiaztatu beharko da:

$$M_x = 2q_1\Omega_1 + 2q_2\Omega_2 + \dots + 2q_j\Omega_j + \dots + 2q_n\Omega_n = 2 \sum_{i=1}^n q_i\Omega_i. \tag{12-101}$$



12.28. irudia.

Gelaxka bakoitzaren ebakidura-fluxuak lortzeko $n - 1$ bateragarritasun-ekuazio erabili beharko ditugu. Bateragarritasun-ekuazio horiek gelaxkek jasaten dituzten biraketekin daude erlazionaturik. Biraketak berdinak direla onartuz, honelaxe idatziko genituzke bateragarritasun-ekuazioak:

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_j = \dots = \theta_n. \quad (12-102)$$

Aurreko atalean azaldu genuen bezala, gelaxka baten biraketa (adibidez j deitu dugunarena), (12-95) espresioarekin kalkula dezakegu. Era berean, j gelaxkak jasaten duen M_{xj} momentu makurtzailea honako hau izango litzateke (ikus 12-86 erlazioa) :

$$M_{xj} = 2q_j \Omega_j. \quad (12-103)$$

Beraz, (12-95) ekuazioan ordeztuz,

$$\theta_j = \frac{M_{xj}}{4G\Omega_j^2} \oint_{s_j} \frac{ds}{t} = \frac{q_j}{2G\Omega_j} \oint_{s_j} \frac{ds}{t}. \quad (12-104)$$

Jarraian j gelaxka i eta k deitu ditugun gelaxken artean kokatuta dagoela gogoratzen badugu, eta erdibanatuta dauden hormetako fluxua (12-100) erlazioaren bidez lor daitekeela, hauxe lortzen da:

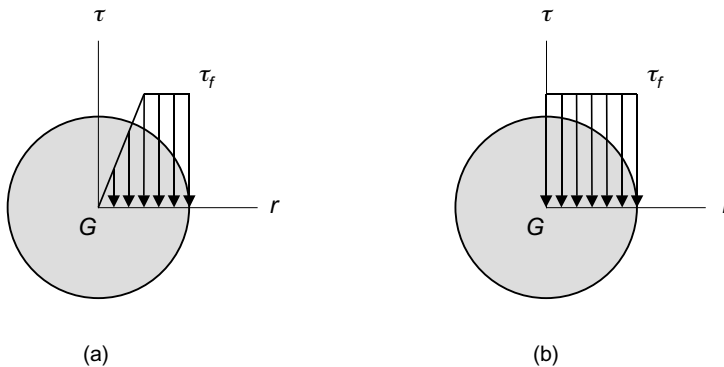
$$\theta_j = \frac{1}{2G\Omega_j} \left[q_j \oint_{s_j} \frac{ds}{t} - q_i \int_{s_{ij}} \frac{ds}{t} - q_k \int_{s_{jk}} \frac{ds}{t} \right]. \quad (12-105)$$

Azkenik, j gelaxka bi gelaxken erdian egon beharrean m gelaxkez inguratuta egongo balitz, (12-105) espresioa honelaxe orokor dezakegu:

$$\theta_j = \frac{1}{2G\Omega_j} \left[q_j \oint_{s_j} \frac{ds}{t} - \sum_{r=1}^m \left(q_r \int_{s_{jr}} \frac{ds}{t} \right) \right]. \quad (12-106)$$

12.9. BIHURDURA PLASTIKOA

Gai hau bukatzeko, azter dezagun laburki sekzio zirkularreko piezen bihurtura plastikoa. Orain arte ikusitako espresioak materialaren portaera elastikoa eta lineala denean soilik aplika daitezke, hau da, tentsio maximoa τ_f isurpen-tentsioa baino txikiagoa denean.



12.29. irudia.

Dakigun bezala, tentsio handiena grabitate-zentrotik urrunen dauden mugaldeko puntuetan sortzen da. Puntu horietako tentsioa τ_f baliora irits dadin aplikatu behar den momentua bihurtzailea (12-18) ekuaziotik lor dezakegu:

$$\tau_{\max} = \frac{M_f R}{I_p} = \tau_f, \quad (12-107)$$

eta M_x askatuz,

$$M_f = \frac{\tau_f I_p}{R}. \quad (12-108)$$

I_p inertzia-momentu polarra ordeztuz, hauxe lortuko genuke:

$$M_f = \frac{\tau_f \pi R^3}{2}. \quad (12-109)$$

Materialaren portaera elastoplastikoa perfektua dela onartuz gero, tentsio maximoak isurpen-tentsio ebakitzzailea gaitzen duenean, 12.29.a. irudiko banaketa edukiko genuke. Ikus daitekeen bezala, isurpena grabitate-zentrorantz hedatzen da momentu bihurtzailea handitu ahala. Sekzioko puntu guztietan tentsioaren balioa τ_f denean, sekzioa ahitu egin dela esaten da, eta piezak huts egiten du (ikus 12.29.b. irudia). *Momentu plastiko* edo *ahitze-momentuaren* balioa oreka-ekuazioetan oinarrituz lor dezakegu. Arestian esan genuen bezala, tentsio ebakitzzaileek ardatzaren inguruan sortzen duen momentua eta sekzioan aplikatuta dagoen momentu bihurtzailea berdinak izan behar dira. Beraz,

$$M_x = \int_A \tau r dA. \quad (12-110)$$

Bestalde, 12.8. irudian ageri den bezalako eraztun infinitesimal bat erabiliz gero, $dA = 2\pi r dr$ da, eta (12-110) espresioa honelaxe berridatz daiteke:

$$M_p = \int_A 2\pi \tau_f r^2 dr, \quad (12-113)$$

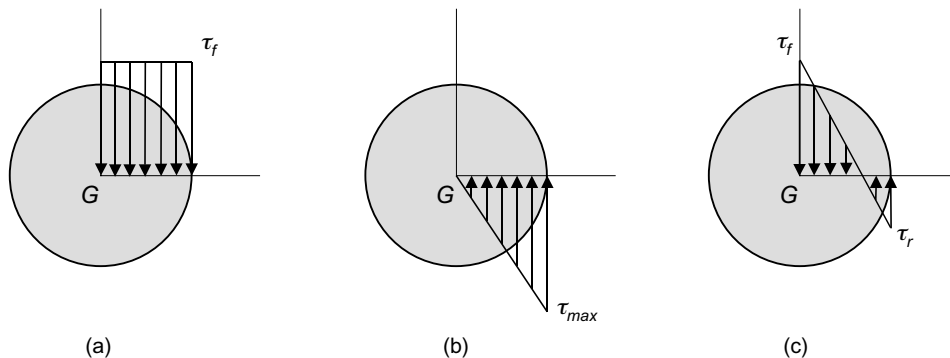
eta integratuz,

$$M_p = \frac{2\pi R^3}{3} \tau_f. \quad (12-112)$$

Hortaz, (12-109) eta (12-112) atalez atal zatitzen baditugu, erlazio hau lortzen da:

$$\frac{M_p}{M_f} = \frac{4}{3}. \quad (12-113)$$

Beraz, sekzioaren isurpena hasi ondoren, momentu makurtzailea heren bat gehiago bakarrik handitu dezakegu, hutsegitea gertatu baino lehen.



12.30. irudia.

Ardatzeko indarrarekin eta momentu makurtzailearekin gertatzen zen bezala, sekzio-puntuetan isurpena agertu ondoren momentu bihurtzailea aplikatzeari utziz gero, hondar-tentsioak agertuko lirateke. Tentsio horiek kalkulatzeko, aurreko bi kasuetan erabilitako pauso berberak eman ditzakegu: lehendabizi aurkako noranzkoa duen momentu bihurtzaile bat aplikatu, deskarga-prozesua lineala dela gogoratuz, eta, ondoren, gainezarpen-printzipioa aplikatu.

Honelatan, bada, 12.30. irudian azaltzen den bezala, sekzio guztiaren plastifikaziora iritsi baino zertxobait lehenago momentua aplikatzeari uzten badiogu, sekzioan hondar-tentsioak agertuko dira. Ikusi dugun bezala, sekzio guztia isurpenean sartzeko aplikatu behar den momentu bihurtzailea (12-112) ekuaziokoa da. Momentu hori aurkako noranzkoarekin aplikatuz gero, deskarga-prozesua lineala denez, 12.30.b. irudiko banaketa lortuko genuke. Tentsio-banaketa horretan τ_{max} deitu dugunaren balioa honako hau izango litzateke:

$$\tau_{max} = \frac{M_p R}{I_p} = \frac{(2\pi R^3 \tau_f / 3) R}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{4}{3} \tau_f. \quad (12-114)$$

Bukaerako tentsioak lortzeko, 12.30.a. eta 12.30.b. irudietako tentsioak batuko genituzke, 12.30.c. banaketa lortuz. Banaketa horretan sekzioaren zentroko tentsioa τ_f izango litzateke, eta mugaldean gelditzen dena beste hau:

$$\tau_r = \tau_{max} - \tau_f = \frac{4\tau_f}{3} - \tau_f = \frac{\tau_f}{3}. \quad (12-115)$$

13. Metodo energetikoak

13.1. SARRERA

Aurreko kapituluetan indarren eta deformazioen artean dauden erlazioak aztertu ditugu, pieza prismatikoetan eragin dezaketen esfortzu desberdinentzat. Analisi hori egiteko, oinarriko bi magnitude erabili ditugu, hots, tentsioa eta deformazioa. Horrela, piezen zeharkako sekzioetan ager daitezkeen esfortzuen funtzioan (ardatzeko indarra, momentu makurtzailea, eta abar), tentsio-banaketak eta desplazamenduak lortzeko zenbait erlazio lortu dira. Erlazio horietara iritsi ahal izateko, bi baldintzatan oinarritu gara beti: egiturak orekan egon behar du eta deformazioek mugako baldintzekin bateragarriak izan behar dira. Lehenengo baldintza betearazteko, estatikaren legeez baliatu gara. Bigarrena egiaztatzeke, aldiz, egitura deformatuaren geometria aztertu dugu. Lortutako ekuazioak egitura isostatikoak nahiz egitura hiperestatikoak kalkulatzeko erabil daitezke, eta *metodo zuzenak* deituriko taldean sailkatzen dira.

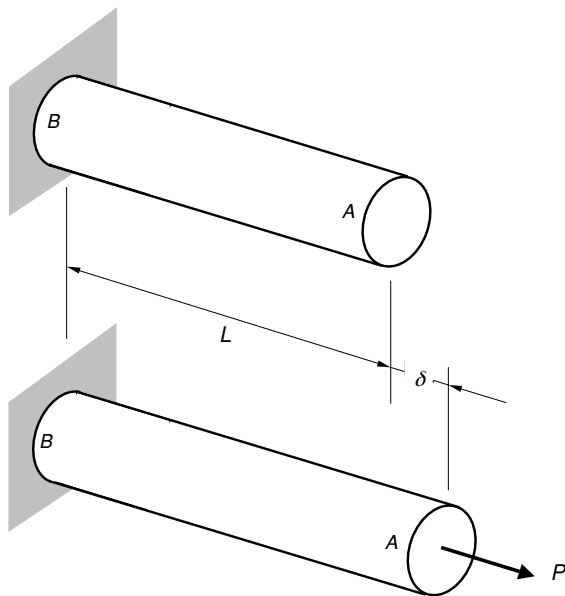
Badira, halere, oreka eta bateragarritasun-baldintzak egiaztatuz egiturak kalkulatzeko erabil daitezkeen beste metodo batzuk. Metodo horiek egituren mekanikaren printzipioetan oinarritzen dira, eta funtsezko bi magnitude erabiltzen dituzte: *energia* eta *lana*. Energia era askotan ager daiteke. Esate baterako, abiadura batekin higitzen den edozein elementuk energia zinetikoa duela esaten da. Era berean, energia elektrikoa, kimikoa edo akustikoa aipa ditzakegu. Lana eta energia kontzeptu desberdinak diren arren, erlazionaturik daude elkarrekin, eta baliokideak direla esan daiteke. Sistema batean egindako lana neurtzeko era bat energia-aldaketa neurtzea da. Ondorioz, energia-aldaketak soilik interesatzen zaizkigunez, edozein erreferentzia arbitrario aukera dezakegu energia neurtzeko.

Laugarren gaian portaera-legeei buruz hitz egin genuenean, energia kontzeptuaren garrantzia azpimarratu genuen. Edozein sistema kanpoko indar batzuen eraginpean dagoenean, deformatu egiten da, eta energia gordetzen du bere barnean, *deformazio-energia elastikoa* izenarekin ezagutzen dena. Energia horri esker, gorputzak lana egiteko gaitasuna du. Deformazio-energia elastikoan oinarrituz, egituren kalkuluan lagunduko diguten teorema eta printzipio garrantzitsuak lor daitezke. Izan ere, indarrak eta desplazamenduak lan kontzeptuarekin zuzenki erlazionaturik daude, lanaren definizioan biak agertzen baitira. Energiari oinarritutako metodoei *zeharkako metodoak* deritze. Gaur egun metodo horiek oso hedaturik daude, eta batez ere egiturak konputagailuen laguntzaz kalkulatu ahal izateko egiten diren programetan erabiltzen dira. Izan ere, metodo horiek oso ongi moldatzen dira konputagailuekin lan egiteko orduan, magnitude eskalarrekin lan egiten baitute, metodo zuzenek erabiltzen dituzten magnitude bektorialetan oinarritu beharrean.

Gai honetan, bada, pieza prismatikoaren kalkulurako erabil daitezkeen teorema energetiko garrantzitsuenak azalduko ditugu. Metodo horiek XIX. mendearen erdialdera agertu ziren lehen aldiz, Castigliano ingeniari italiarrak bere izena daraman teorema aurkeztu zuenean. Ondoren, Rayleigh-ek eta Ritz-ek egituren kalkulurako metodo original bat asmatu zuten. Azkenik, mendearen bukaera aldean Engesser ingeniari alemaniarrek Castigliano-k lorturiko emaitzak orokortu zituen, portaera ez-lineala ere kontuan hartuz. Teorema horiez gain, Maxwell-en eta Betti-ren elkarrekikotasun-teoremak, Clapeyron-en teorema eta karga unitarioaren metodoa ere ikusiko ditugu hamahirugarren gai honetan.

13.2. DEFORMAZIO-ENERGIA ELASTIKOA

Atal honetan deformazio-energia elastikoaren kontzeptua sakonduko da, eta orain arte aipatu ez dugun beste energia-mota bat azalduko dugu, hots, deformazio-energia osagarria. Esan bezala, deformazio-energia elastikoa gorputzek deformatzen direnean gordetzen duten energia da, eta barneko indarrek lana egiteko duten gaitasuna baino ez du adierazten. Laugarren gaian ikusi genuen bezala, deformazio-energia elastikoari U deituko diogu. Aldiz, gorputz deformagarri baten puntuetan bolumen-unitateko dagoen energia —hau da, deformazio-energiaren dentsitatea— U_0 eran izendatuko dugu. Kontzeptu horiek argitzeko, 13.1. irudiko pieza prismatikoan oinarrituko gara. Pieza hori pixkanaka handituz doan P indar baten eraginean dagoela suposatuko dugu, eta bere puntuetan ardatz bakarreko egoera bat agertzen dela.



13.1. irudia.

Irudian agertzen den bezala, aplikatu dugun ardatzeko indarraren eraginez, pieza luzatu egiten da, eta luzera-aldaketa horrek δ balio du. Karga-prozesuaren aldiune batean, piezaren luzera $d\delta$ aldatzen denean, P indarrak egiten duen lan infinitesimala honako hau izango da:

$$W_{\text{kanp}} = Pd\delta, \quad (13-1)$$

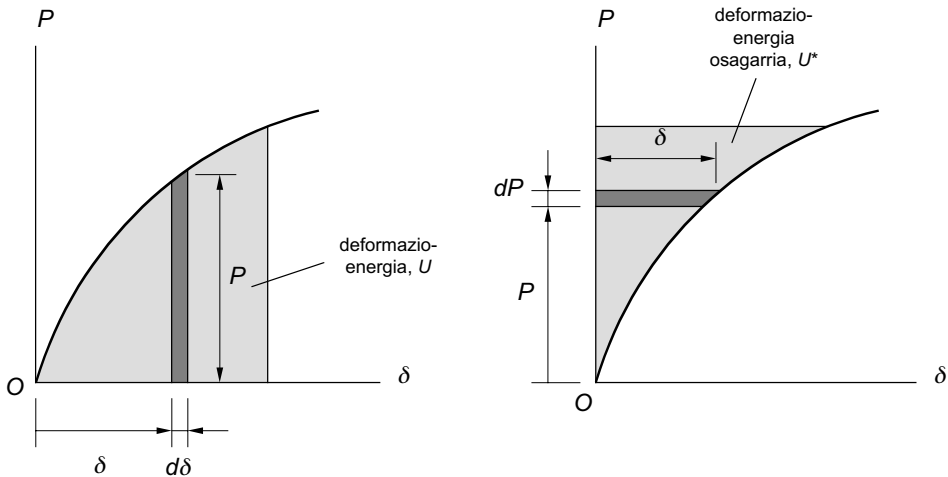
non W_{kanp} delakoa kanpoko indarrek —hots, aplikatutako P indarrak— egindako lana baita. P indarraren bukaerako baliora iritsi eta gero, karga-prozesua bukatu ondoren egindako lan totala integral honen bidez kalkulatu genuke:

$$W_{\text{kanp}} = \int_0^{\delta} Pd\delta. \quad (13-2)$$

Inolako energia-galerarik ez dagoela onartuz, kanpoko indarrek egindako lana gorputzak gordetzen duen deformazio-energiaren berdina izango da. Beraz, (13-2) espresioa U deformazio-energia kalkulatzeko ere erabil dezakegu:

$$U = W_{\text{kanp}} = \int_0^{\delta} Pd\delta. \quad (13-3)$$

Bestalde, P indarra eta δ luzapena grafikoki adieraziko bagenitu, kanpoko indarrek egindako lana eta, beraz, deformazio energia elastikoa kurbaren azpian dagoen azaleraren berdina direla egiazta daiteke, 13.2.a. irudian ageri den bezala.



13.2. irudia.

Demagun orain kurbaren azpian dagoen azalera kalkulatu beharrean, gainean dagoena kalkulatu dugula. Beste era batera esanda, aldiune batean daukagun δ luzapena indarraren dP gehikuntza infinitesimal batez biderkatzen dugula:

$$dW_{\text{kanp}}^* = \delta dP. \quad (13-4)$$

Horrela lortzen den lanari kanpoko indarren *lan osagarria* deritzo, eta esanahi fisiko garbirik eduki ez arren, magnitude oso garrantzitsua da, laster ikusi ditugun teorema energetikoen garapenerako. Lehen egin dugun bezala, lan osagarri infinitesimalak karga-

prozesu guztian zehar batuz gero —hots, (13-4) ekuazioa integratuz gero—, lan osagarri totala lortuko genuke:

$$W_{\text{kanp}}^* = \int_0^{\delta} \delta dP . \quad (13-5)$$

Deformazio-energiarentzat erabili dugun arrazonamendua errepikatuz, kanpoko indarrek egiten duten lan osagarria deformazio-energia osagarriaren berdina dela esango dugu:

$$U^* = W_{\text{kanp}}^* = \int_0^{\delta} \delta dP . \quad (13-6)$$

Honelatan, bada, 13.2. irudiko azalerak aztertuz, erraz froga daiteke ondoko berdintza egiaztatzen dela:

$$W_{\text{kanp}} + W_{\text{kanp}}^* = P\delta , \quad (13-7)$$

eta, beraz, beste hau ere bai:

$$U + U^* = P\delta . \quad (13-8)$$

Lan osagarria eta deformazio-energia osagarria definitzeko beste era bat honako hau izango litzateke: indarrak hasieratik P balioa edukiko balu egingo zukeen lana lortzeko W_{kanp} balioari batu behar zaion lana da. Bukatzeko, esan dezagun materialaren portaera lineala denean, 13.2. irudiko bi azalerak berdinak direla; beraz, U deformazio-energia eta U^* deformazio-energia osagarria ere berdinak dira.

Ikus dezagun orain nola lor daitekeen deformazio-energia kalkulatzeko balioko digun espresio orokor bat. Dakigun bezala, deformazio-energia kanpoko indarrek egiten duten lanaren berdina da. Horrez gain, deformazio-energia barneko indarrek lana egiteko duten gaitasun gisa ere definitu dugu. Beraz, deformazio-energia kalkulatzeko bi bide dauzkagu: barneko nahiz kanpoko indarren lanak erabiltzea, hau da,

$$W_{\text{kanp}} = W_{\text{barn}} = U . \quad (13-9)$$

Kalkulua errazteko, berriro ere 13.1. irudian agertzen den ardatz bakarreko egoera erabiliko dugu. Kanpoko indarrek egiten duten lana kalkulatzeko, nahikoa da (13-3) espresioa erabiltzea. Materialaren portaera lineala dela suposatuz gero, egoera horretan indarren eta luzapenaren artean dagoen erlazioa ezaguna da:

$$\delta = \frac{PL}{EA} . \quad (13-10)$$

Eta (13-3) ekuazioan ordeztuz, hauxe lortzen da:

$$U = W_{\text{kanp}} = \int_0^{\delta} \frac{EA}{L} \delta d\delta = \frac{EA\delta^2}{2L} = \frac{1}{2} P\delta . \quad (13-11)$$

Deformazio-energia barneko indarrek egiten duten lanaren bidez kalkulatzeko, 13.1. irudiko pieza prismatikoko puntuetan dagoen tentsio egoera-erabiliko dugu. Horretarako, piezako puntu baten inguruan paralelepipedo itxurako bolumen infinitesimal bat hartuko dugu, 13.3.a. irudian agertzen dena bezalakoa. Egoera ardatz bakarrekoa denez, bere aurpegietan σ_x tentsioak bakarrik eragiten du (ikus 13.3.b. irudia). Tentsio hori zerotik hasi eta bukaerako baliora iristen den bitartean, deformazio unitarioak ere zerotik ondoko balioetara pasatuko dira:

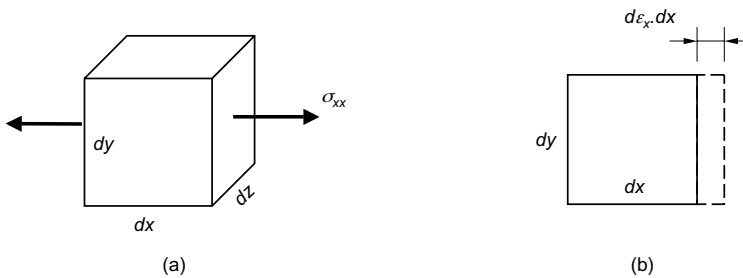
$$\varepsilon_x, \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x, \quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x. \quad (13-12)$$

Elementuan eragiten duen indar bakarrak x norabidea duenez, egindako lana ere norabide horretako luzapenari dagokiona izango da. Gauzak horrela, suposa dezagun deformazio-prozesuaren aldiune bat, non tentsioa σ_x den eta deformazioa ε_x . Tentsioak sortzen duen indarra hauex da:

$$\sigma_x dy dz. \quad (13-13)$$

Aldiune horretan deformazioa $d\varepsilon_x$ handitzen bada, paralelepipedoren dx aldeak jasaten duen luzapena beste hau izango da:

$$d\varepsilon_x dx, \quad (13-14)$$



13.3. irudia.

eta beraz, barneko indarrek egindako lana honako hau izango da:

$$dW_{\text{bar}} = \sigma_x dy dz d\varepsilon_x dx = \sigma_x d\varepsilon_x dV. \quad (13-15)$$

Gorago esan dugun bezala, barneko indarrek egiten duten lana deformazio-energiaren berdina da. Beraz,

$$dU = dW_{\text{bar}} = \sigma_x d\varepsilon_x dV. \quad (13-16)$$

Aurreko atal batean esan genuen bezala, deformazio-energiaren dentsitatea U_0 eran izendatzen da, eta puntu batean bolumen-unitateko dagoen energia adierazten du. Beraz, (13-16) espresioa aztertuz, dV bolumena biderkatzen duen gaia aldiune batean deformazio-energiaren dentsitateak jasaten duen aldaketa izango da:

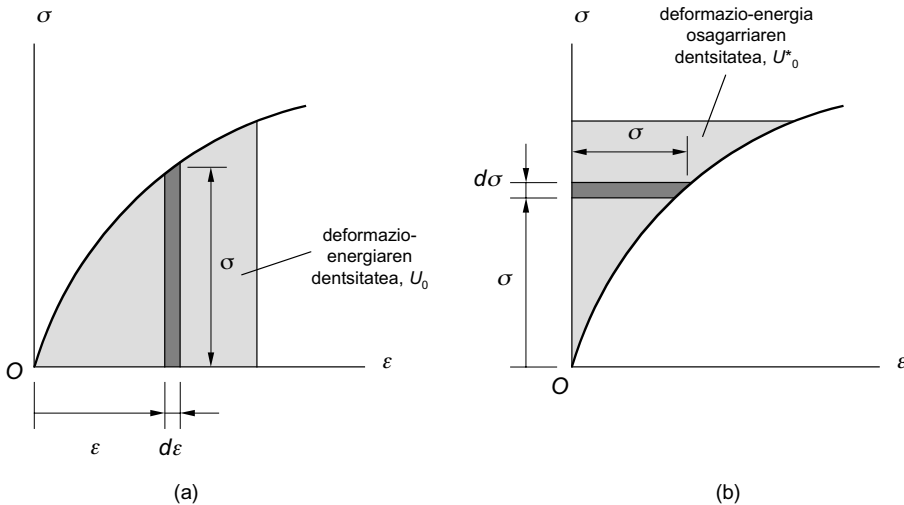
$$dU_0 = \sigma_x d\varepsilon_x \quad (13-17)$$

Beraz, biderkadura hori karga-prozesu guztian zehar integratuz, puntu horretan dagoen bolumen-unitateko energia kalkulatu dezakegu:

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x. \quad (13-18)$$

Hain zuzen, (13-18) ekuazioko integralak $\sigma - \varepsilon$ diagramako kurbaren azpian gelditzen den azalera adierazten du (ikus 13.4.a. irudia). Eta (13-6) ekuazioan egin genuen bezala, kurbaren azpiko azalera kalkulatu beharrean gainekoa kalkulatu gero, deformazio-energiaren dentsitate osagarria lortzen da, alegia:

$$U_0^* = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x d\sigma_x. \quad (13-19)$$



13.4. irudia.

Materialaren portaera elastikoa eta lineala denean, tentsio normalaren eta deformazio unitarioaren artean dagoen erlazioa honako hau da:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad (13-20)$$

eta beraz, U_0 deformazio-energiaren dentsitatearen espresioa honelaxe gelditzen da:

$$U_0 = \int_V \sigma_x d\varepsilon_x = \int_V E\varepsilon_x d\varepsilon_x = \frac{E\varepsilon_x^2}{2} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x. \quad (13-21)$$

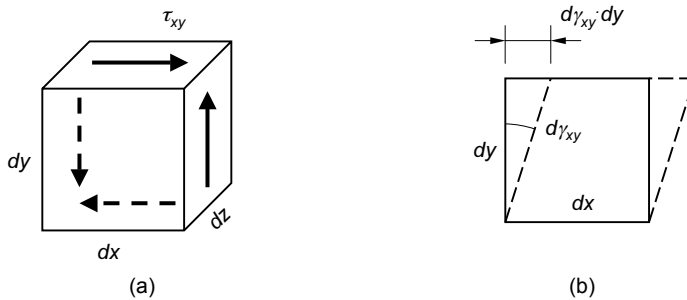
Bestalde, 13.1. irudiko piezak gordetzen duen deformazio-energia totala kalkulatu nahiko bagenu, (13-21) espresioa piezaren bolumen guztian integratu beharko genuke, honelaxe:

$$U = \int_V U_0 dV = \int_V \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x A dx = \frac{1}{2} (\sigma_x A) (\varepsilon_x L) = \frac{1}{2} P \delta. \quad (13-22)$$

Ikus daitekeen bezala, 13-11 espresioa lortuko genuke berriro. Argi dago, beraz, pieza baten deformazio-energia kalkulatzeko orduan, kanpoko nahiz barneko indarrek egiten duten lana erabil daitekeela, biek in emaitza berdina lortzen baita.

Ardatz bakarreko trakzio-egoera batentzat U_0 deformazio-energiaren dentsitatearen espresioa lortu eta gero, jarraian ebakidura-egoera bat dugunean nola kalkulatu genukeen ikusiko dugu. Suposa dezagun, bada, puntu batean τ_{xy} tentsio ebakitzailak eragiten dutela. Lehen egin dugun bezala, puntu horren inguruan paralelepipedo infinitesimal bat irudikatuko dugu (ikus 13.5.a. irudia) eta beraren deformazioak aztertuko ditugu. Ebakidurak sortzen duen distorsioa 13.5.b. irudian ageri dena da. Deformazio hori onartuz, lana egiten duen indar bakarra paralelepipedoaren goiko aurpegian dagoena da. Indar horren balioa honako hau da:

$$\tau_{xy} dx dz, \quad (13-23)$$



13.5. irudia.

eta indar horren ondorioz goiko aurpegiak jasaten duen desplazamendua, beste hau:

$$d\gamma_{xy} dy. \quad (13-24)$$

Beraz, aldiune horretan egindako lan infinitesimalak hauxe balio du:

$$dW_{\text{bar}} = \tau_{xy} dx dz \cdot d\gamma_{xy} dV = \tau_{xy} d\gamma_{xy} dV. \quad (13-25)$$

Barneko indarrek egindako lana eta deformazio-energiaren gehikuntza berdinak direnez,

$$dU = dW_{\text{bar}} = \tau_{xy} d\gamma_{xy} dV. \quad (13-26)$$

Beraz, (13-26) ekuaziotik ebakidura-egoera batean deformazio-energiaren dentsitatea kalkulatzeko espresioa lor dezakegu, lehenago trakzio-egoerentzat egin dugun bezala:

$$dU_0 = \tau_{xy} d\gamma_{xy}, \quad (13-27)$$

eta karga-prozesu osoan zehar integratuz:

$$U_0 = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy}. \quad (13-28)$$

Material elastikoaren kasuan, tentsio ebakitzailaren eta deformazio angeluarraren arteko erlazioa honako hau da:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (13-29)$$

Hortaz, (13-28) ekuazioan ordeztuz eta integratuz:

$$U_0 = \int_0^{\gamma_{xy}} G\gamma_{xy} d\gamma_{xy} = \frac{G\gamma_{xy}^2}{2} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}. \quad (13-30)$$

Tentsio normalaren beste bi osagaietzat —hau da, σ_{yy} eta σ_{zz} tentsioentzat—, (13-21) ekuazioa bezalako beste bi espresio lortuko genituzke. Era berean, τ_{xz} eta τ_{yz} ebakitzailen espresioek (13-30) ekuazioaren itxura berdina edukiko lukete.

Beraz, tentsio-egoera orokor bat edukiko bagenu, ager daitezkeen tentsioaren osagai guztiakin, nahikoa litzateke gainezarpren-printzipioa aplikatzea, deformazio-energiaren dentsitatearen espresio orokor bat lortzeko:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}). \quad (13-31)$$

Bestalde, Hooke-ren legea erabiliz (13-31) espresioiko deformazio unitarioak tentsioen funtzioan idatziko bagenitu, hauxe lortuko genuke:

$$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2), \quad (13-32)$$

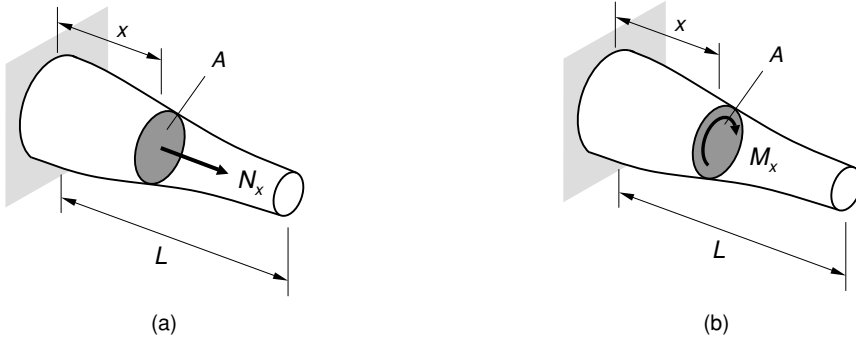
elastikotasunaren teoriari eskainitako gaietan frogatu genituen espresioak biak ere.

13.3. DEFORMAZIO-ENERGIAREN ESPRESIOA ESFORTZU DESBERDINEN FUNTZIOAN

Aurreko atalean U_0 deformazio-energiaren dentsitatea tentsioaren osagaien funtzioan idaztea lortu dugu. Halere, sarritan ezagutzen diren datuak sekzioko esfortzuak izaten dira. Hori dela-eta, atal honetan (13-32) ekuazioa esfortzu desberdinen funtzioan idatziko dugu, hots, ardatzeko indarraren, indar ebakitzailen, momentu makurtzaileen eta momentu bihurtzailearen funtzioan.

Lehendabizi, ardatzeko indarrarekin hasiko gara. Preseski, 13.6.a. irudian ardatzeko indar baten eraginpean dagoen pieza prismatiko baten sekzioa ageri da. Ardatzeko indar horren ondorioz, tentsio normalak bakarrik agertzen dira zeharkako sekzioaren puntuetan, eta tentsioaren beste osagai guztiak nuluak dira. Beraz, kasu horretan (13-32) ekuazioa honelaxe laburtuko litzateke:

$$U_0 = \frac{\sigma_x^2}{2E}. \quad (13-33)$$



13.6. irudia.

Tentsio normalaren balioa kalkulatzeko, nahikoa da ardatzeko indarra zeharkako sekzioaren azaleraz zatitzea:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}. \quad (13-34)$$

Beraz, erlazio hori (13-33) espresioan ordeztuz, hauxe lortzen da:

$$U_0 = \frac{N_x^2}{2EA^2}. \quad (13-35)$$

Azkenik, pieza prismatikoaren deformazio-energia totala kalkulatzeko, (13-35) adierazpeneko energia-dentsitatea pieza prismatiko osoan integratuko genuke:

$$U = \int_V U_0 dV = \int_V \frac{N_x^2}{2EA^2} dV. \quad (13-36)$$

Pieza prismatikoaren sekzioari A deituz, bolumen-elementu diferentziala $dV = A dx$ eran idatz daiteke. Ondorioz,

$$U = \int \frac{N_x^2}{2EA} dx. \quad (13-37)$$

Bestalde, 13.6.b. irudian bihurturapean dagoen pieza bat ageri da. Aurreko gaien ikusi dugun bezala, momentu bihurtzailearen ondorioz tentsio ebakitzailak agertzen dira sekzioko puntuetan. Sekzio zirkularra duten piezetan, honako espresio hau erabil dezakegu tentsio horiek kalkulatzeko:

$$\tau = \frac{M_x r}{I_p}. \quad (13-38)$$

Tentsio ebakitzaila erradioarekiko elkarzuta denez, oro har, bi osagai edukiko ditu, τ_{xy} eta τ_{xz} . Beraz, bihurtura hutsean beste osagai guztiak nuluak direnez, U_0 -ren espresioa honelaxe geratuko da:

$$U_0 = \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (13-39)$$

Hortaz, (13-38) eta (13-39) ekuazioetatik:

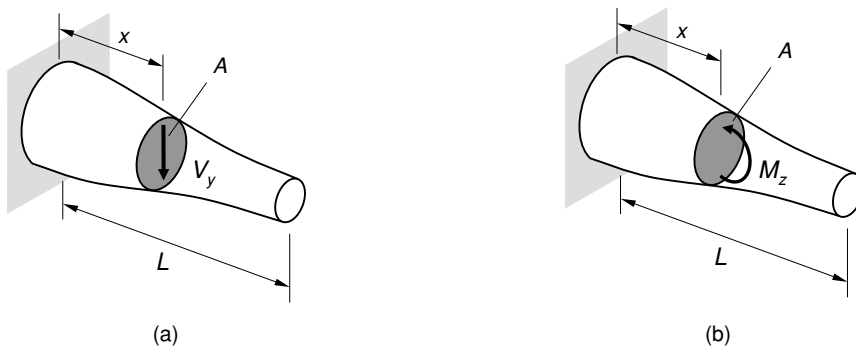
$$U_0 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{M_x^2 r^2}{2GI_p^2}, \quad (13-40)$$

eta lehen bezala piezaren bolumen osoan integratuz:

$$U = \int_V U_0 dV = \int \frac{M_x^2 r^2}{2GI_p^2} dV = \int \frac{M_x^2}{2GI_p^2} \left(\int_A r^2 dA \right) dx. \quad (13-41)$$

Hain justu, (13-41) adierazpeneko parentesien artean dagoen integrala sekzioaren inertzia-momentu polarra da, I_p . Beraz,

$$U = \int \frac{M_x^2}{2GI_p} dx. \quad (13-42)$$



13.7. irudia.

Sekzioa makurdurean dagoenean, indar ebakitzaila eta momentu makurtzailea agertzen dira gehienetan. Esaterako, 13.7.a. irudiko sekzioa V_y ebakitzailaren eraginpean dago. Ikus dezagun esfortzu horri dagokion energia. Indar horrek sortzen dituen tentsio ebakitzailak kalkulatzeko, Colignon-en formula erabil dezakegu:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{b I_z}. \quad (13-43)$$

Eta (13-39) ekuazioan $\tau_{xz} = 0$ ordeztuz τ_{xy} -rentzat (13-43) erlazioa erabiliz, hauxe lortuko genuke:

$$U_0 = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} = \frac{V_y^2 Q_z^2}{2Gb^2 I_z^2}, \quad (13-44)$$

eta bolumen osoan integratuz:

$$U = \int_V U_0 dV = \int_V \frac{V_y^2 Q_z^2}{2Gb^2 I_z^2} dV = \int_V \frac{V_y^2}{2GI_z^2} \left[\int_A \left(\frac{Q_z}{b} \right)^2 dA \right] dx = \int_V \frac{V_y^2}{2GA} \left[\frac{A}{I_z^2} \int_A \left(\frac{Q_z}{b} \right)^2 dA \right] dx, \quad (13-45)$$

non izendatzailea eta zenbakitzailea sekzioaren A azalera biderkatu ditugun. Kortxete artean dagoen integrala, sekzioaren propietate geometriko bat da, *itxura-faktorea* (f_z) izenarekin ezagutzen dena. Beraz, energiaren espresioa honelaxe geldituko litzateke azkenik:

$$U = \int \frac{f_z V_y^2}{2GA} dx, \quad (13-46)$$

non f_z itxura-faktorea honelaxe kalkulatu baita:

$$f_z = \frac{A}{I_z^2} \int_A \left(\frac{Q_z}{b} \right)^2 dA. \quad (13-47)$$

Bukatzeko, azter dezagun 13.7.b. irudian makurdupean dagoen sekzioa. Kasu horretan, σ_{xx} tentsio normala agertuko da soilik. Tentsio hori Navier-en legearen bidez lor dezakegu:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}. \quad (13-48)$$

Espresio hori (13-33) ekuazioan ordeztuz:

$$U_0 = \frac{M_z^2 y^2}{2EI_z^2}, \quad (13-49)$$

eta, beste kasuetan egin dugun bezala, piezaren bolumen osoan integratuz:

$$U = \int_V U_0 dV = \int_V \frac{M_z^2 y^2}{2EI_z^2} dV = \int \frac{M_z^2}{2EI_z^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx. \quad (13-50)$$

Kasu honetan, parentesi artean dagoen integrala sekzioaren inertzia-momentua da, I_z alegia. Beraz:

$$U = \int \frac{M_z^2}{2EI_z} dx. \quad (13-51)$$

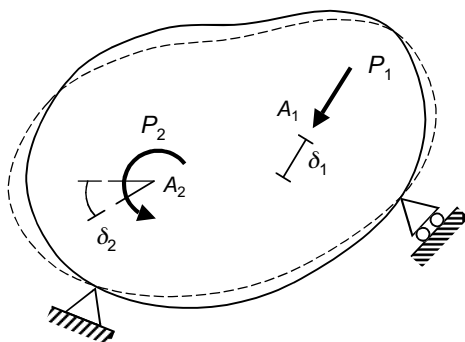
Makurdura eta ebakidura plano horizontalean gertatuko balira, (13-46) eta (13-51) ekuazioen itxura bera duten espresioak lortuko genituzke, erraz ondoriozta daitekeen bezala. Beraz, sekzio batean sei esfortzuak batera aplikaturik daudenean, gainezarpen-printzipioa aplikatuz, deformazio-energiaren espresio orokor hau lortuko genuke:

$$U = \int \frac{N_x^2}{2EA} dx + \int \frac{M_z^2}{2EI_z} dx + \int \frac{M_y^2}{2EI_y} dx + \int \frac{f_z V_y^2}{2GA} dx + \int \frac{f_y V_z^2}{2GA} dx + \int \frac{M_x^2}{2GI_p} dx. \quad (13-52)$$

Hortaz, pieza prismatiko baten sekzioetan eragiten duten esfortzuen diagramak ezagutzuz gero, (13-52) ekuazioaren bidez piezaren deformazio-energia totala kalkulatu dezakegu.

13.4. CLAPEYRON-EN TEOREMA

Izan bedi 13.8. irudian ageri den gorputz elastikoa eta lineala, kanpoko indar batzuen eraginpean dagoena. Indar eta momentu horiei P_i deituko diegu, idazkera berdina erabiltzearen bidez. Gorputza solido zurrun erako mugimendua galarazten duten euskarri batzuen bidez dago lotuta. Aplikaturako indarren ondorioz, gorputza deformatu egiten da, eta beraren puntuek desplazamenduak jasaten dituzte. Zama aplikatuta dauden puntuek dagozkien indarren norabidean jasaten dituzten desplazamenduei *desplazamendu orokortu* deituko diegu, eta δ hizkia izendatuko ditugu. Honela, P_1 indarraren aplikazio-puntuak indar horren norabidean jasaten duen desplazamenduari δ_1 deituko diegu, P_2 momentuaren aplikazio puntuaren biraketari δ_2 , etab. Aplikaturako indarrak estatikoak direla onartuko dugu, hau da, poliki aplikatzen direla karga-prozesuan zehar. Indarrak azkar aplikatuko balira, talka bat edukiko genuke. Gai honetan bertan ikusiko dugun bezala, talkak gertatzen direnean, energiaren baliokidetasunean oinarritutako metodoa erabil dezakegu, egitura agertzen diren tentsio eta deformazio maximoak kalkulatu ahal izateko. Dena den, oraingoz indarren izaera kuasiestatikoa dela suposatuko da.



13.8. irudia.

Bestalde, karga-prozesua kontserbakorra dela suposatuko dugu, hots, inolako energia-galerarik ez dagoela. Beraz, kanpoko indarrek egindako lana ez da erabilitako bidearen menpe egongo, hasierako eta bukaerako egoeren menpe baizik. Ikusi dugun bezala, kanpoko indarrek egindako lana gorputzak gordetzen duen deformazio-energiaren berdina izango da. Ikus dezagun nola kalkula daitekeen kanpoko indarrek egiten duten lana. Aplikaturako indar desberdinak zero baliotik hasi eta handitzen joango dira pixkanaka, beren bukaerako balioetara iritsi arte. Egindako lana jarraitutako bidearekiko independentea denez, indarrak denak batera eta linealki handitzen doazela suposatuko dugu. Beraz, α parametroa 0 eta 1 balioen artean alda badaiteke, aldiune batean P_i indarrak edukiko duen balioa αP_i izango da. Materialaren portaera lineala dela onartu dugunez, desplazamenduak ere indarrekiko proportzionalki haziko dira, hau da, $\alpha \delta_i$ balioko dute.

Aldiune batetik hurrengora pasatzen denean, hau da, α baliotik $\alpha + d\alpha$ baliora pasatzen garenean, aplikaturako indarrek egiten duten lan infinitesimala hauxe izango da:

$$dW_{\text{kamp}} = \sum_{i=1}^n \alpha P_i d\delta_i = \sum_{i=1}^n \alpha P_i \delta_i d\alpha, \quad (13-53)$$

non n delakoa kanpoko indarren kopurua baita. Karga-prozesu osoan kanpoko indarrek egiten duten lana, hau da, gorputzak gordetzen duen deformazio-energia kalkulatzeko, nahikoa da (13-53) espresioa lan infinitesimalak integratzea, hau da:

$$U = W_{\text{kanp}} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \alpha P_i \delta_i d\alpha = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \alpha P_i \delta_i d\alpha . \tag{13-54}$$

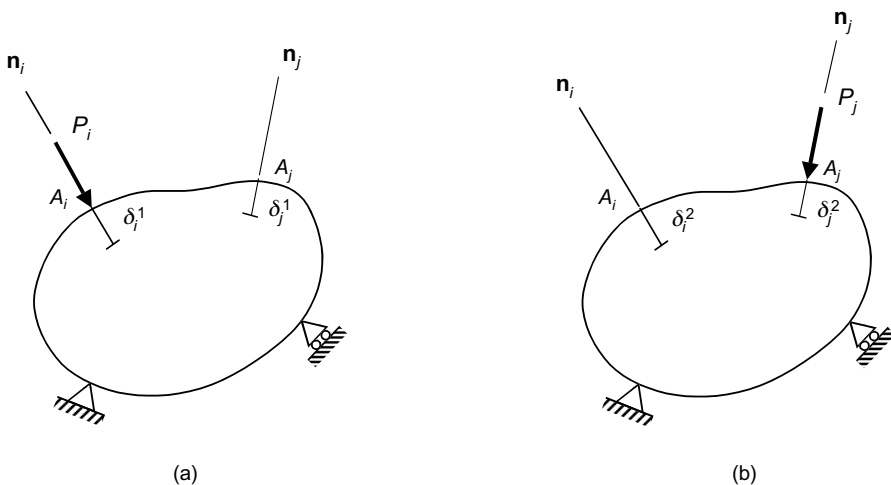
Hemen, P_i eta δ_i direlakoak indarren eta desplazamenduen bukaerako balioak direnez, hurrenez hurren, konstanteak dira eta integraletik kanpora atera daitezke. Ondorioz,

$$U = W_{\text{kanp}} = P_i \delta_i \sum_{i=1}^n \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i . \tag{13-55}$$

Hain zuzen, (13-55) ekuazioko espresio matematikoari *Clapeyron-en teorema* deritzo, eta honelaxe enuntzia daiteke: “Gorputz elastiko lineal batean eragiten duten kanpoko indar estatikoek egiten duten lana, indarrak aplikatzen diren ordenarekiko independentea da, eta indarren eta desplazamendu orokortuen biderkaduren balioen erdiak batuz lor daiteke”.

13.5. ELKARREKIKOTASUN-TEOREMAK

Atal honetan ondorioztatuko ditugun elkarrekikotasun-teorema teorema energetiko garantzitsuenetakoak dira. Izan bedi gorputz elastiko lineal bat, solido zurrun erako mugimendua galarazirik duena. Gorputz horretan bi karga-egoera desberdinek eragiten dutela suposatuko dugu. Lehenengo karga-egoerako indarrei P_i ($i = 1, \dots, m$) deituko diegu eta A_i ($i = 1, \dots, m$) puntuetan egongo dira aplikaturik. Bestetik, bigarren karga-egoerako indarrak P_j ($j = 1, \dots, n$) dira, eta A_j ($j = 1, \dots, m$) puntuetan daude aplikaturik. P_i indarren norabidea \mathbf{n}_i da, eta P_j indarra \mathbf{n}_j . P_i indarrak bakarrik aplikatzen direnean, A_i puntuen desplazamendua \mathbf{n}_i norabidean δ_i^1 da, eta A_j puntuena \mathbf{n}_j norabidean δ_j^1 . Alderantziz, P_j indarrak bakarrik aplikatuz gero, A_i puntuen desplazamendua \mathbf{n}_i norabidean δ_i^2 deituko dugu, eta A_j puntuena \mathbf{n}_j norabidean δ_j^2 .



13.9. irudia.

Ikus dezagun orain zein den bi karga-egoerek batera eragiten dutenean kanpoko indarrek egiten duten lana. Lan hori bi eratarik kalkulatu dugu. Lehenengo, 13.9.a. irudiko P_i indarrak bakarrik aplikatzen direla suposatuko dugu, eta, ondoren, 13.9.b. irudiko P_j indarrak. Segidan, prozedura bera jarraituko dugu, baina lehenengo P_j indar-sistema aplikatuz, eta gero P_i sistema. Aurreko azpiatalean esan dugun bezala, lan hori ez dago jarraitutako bidearen menpe; beraz, bi kasuetako lanaren balioak berdinak izan behar dira.

Aplika dezagun lehenengo P_i indar multzoa, zerotik hasi eta beren bukaerako balioetara iritsi arte. Clapeyron-en teoremaren arabera, indar horiek egindako lana honelaxe idatz dezakegu:

$$W_{\text{kamp}}(P_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_i \delta_i^1. \quad (13-56)$$

Ondoren, P_j indar-multzoa aplikatuko dugu. Kasu horretan, P_j indarrek egiten duten lanaz gain, ez da ahaztu behar P_i indarrek ere egiten dutena. Izan ere, P_i indarrak lehenetik aplikaturik dauzkagu eta horien A_i aplikazio-puntuak ere P_j indarren ondorioz higitu egiten direnez, lana egiten dute. Gainera, P_i indar horien lana kalkulatzeko, nahikoa da indarrak eta desplazamenduak biderkatzea, P_i indarrek bukaerako balioa baitute jada. Ostera, P_j indarren lana kalkulatzeko orduan, aldiz, $1/2$ terminoa agertuko zaigu, indar horiek zerotik hasi eta pixkanaka handitzen baitoaz.

Beraz, bi karga-egoerak aplikatu ondoren, kanpoko indarrek egiten duten lana honako hau izango da:

$$W_{\text{kamp}}(P_i + P_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_i \delta_i^1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n P_j \delta_j^2 + \sum_{i=1}^m P_i \delta_i^2. \quad (13-57)$$

Errepika dezagun orain kanpoko indarren lanaren kalkulua baina alderantziz. Lehen-dabizi P_j indar-multzoa aplikatuz gero, Clapeyron-en teoremaren arabera indar horiek egiten duten lana hau da:

$$W_{\text{kamp}}(P_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n P_j \delta_j^2. \quad (13-58)$$

Segidan P_i indar-multzoa aplikatuz gero, alde batetik indar horiek egiten duten lan berria edukiko dugu, eta beste alde batetik jadanik aplikaturik dauden P_j indarrek egiten dutena. Oraingoan P_j indarrak dira hasieratik balio totala dutenak. Beraz,

$$W_{\text{kamp}}(P_i + P_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_i \delta_i^1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n P_j \delta_j^2 + \sum_{j=1}^n P_j \delta_j^1. \quad (13-59)$$

Bi bideetatik lortutako lanek berdinak izan behar dutenez, (13-57) eta (13-59) ekuazioak berdinduz, hauex lortzen da:

$$\sum_{i=1}^m P_i \delta_i^2 = \sum_{j=1}^n P_j \delta_j^1. \quad (13-60)$$

Preseski, (13-62) ekuazioa Rayleigh-en eta Betti-ren elkarrekikotasun-teoremaren espresio matematikoa da, eta honelaxe enuntzia daiteke: “Gorputz elastiko lineal bat bi karga-egoera desberdinen eraginpean badago, lehenengo egoerako indarrek bigarren egoerakoek sortutako desplazamenduen ibilbidean egiten duten lana, bigarren egoerakoek lehenengo egoerakoen ibilbidean egiten dutenaren berdina da”.

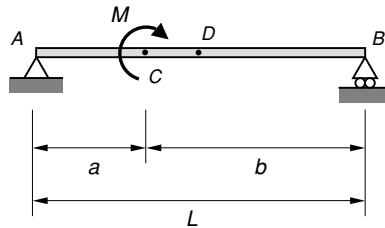
Bukatzeko, demagun orain lehenengo egoeran P_1 indar bakar batek eragiten duela, A_1 puntuan aplikatua eta \mathbf{n}_1 norabidea duena. Era berean, bigarren egoeran ere P_2 indar batek bakarrik eragiten duela onartuko dugu, A_2 puntuan aplikatua eta \mathbf{n}_2 norabide duena. Kasu honetan, (13-62) espresioa honelaxe gedituko litzateke:

$$P_1 \delta_1^2 = P_2 \delta_2^1. \tag{13-61}$$

Horrez gain, bi egoeretako indarrak berdinak balira, hots, $P_1 = P_2$ bada, hauxe edukiko genuke:

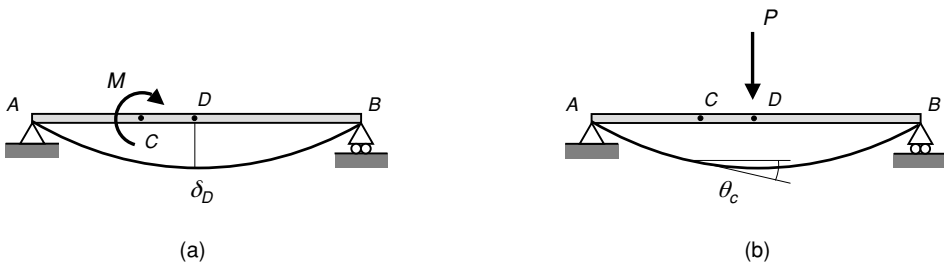
$$\delta_1^2 = \delta_2^1. \tag{13-62}$$

Azken erlazio horri *Maxwell-en elkarrekikotasun-teorema* deritzo. Aipaturiko bi teorema horiek oso baliagarriak dira egituren analisisan agertzen diren problema asko ebazteko. Esate baterako, puntu bateko desplazamenduaren kalkulua errazago kalkulatu daitekeen beste puntu baten desplazamenduaren kalkulua ordezka dezakegu. Ikus dezagun teorema horiek aplikatzeko adibide erraz bat.



13.10. irudia.

Alboko 13.10. irudian muturretan giltzatutako habe bat ageri da, EI balioko makurdurazurruntasuna duena. Habeak M_0 momentuaren eragina jasaten du C sekzioan. Helburua erdiko D sekzioaren desplazamendu bertikala kalkulatzeko da. Kalkulua egiteko, 13.11.a. eta 13.11.b. irudietako bi karga-egoerak suposatuko ditugu. Lehenengoan habe errealeko M_0 momentua daukagu. Bigarrenean, berriz, P indar bertikal bat asmatu dugu, D sekzioan aplikaturik dagoena.



13.11. irudia.

Hain zuzen, (13-61) ekuazioiko elkarrekikotasun-teoremaren arabera, hauxe idatz dezakegu:

$$M_0 \theta_C = P \delta_D. \quad (13-63)$$

Beraz, δ_D desplazamendua zuzenean kalkulatu beharrean, θ_C biraketa kalkula dezakegu, eta (13-63) ekuazioaren baitan, komeni zaigun desplazamendua askatu:

$$\delta_D = \frac{M_0 \theta_C}{P}. \quad (13-64)$$

Izan ere, θ_C biraketa errazago kalkulatu daiteke, Mohr-en teorema aplikatuz nahikoa delako momentuen diagramako azalera kalkulatzeko. Biraketa horren balioa kalkulatu, hauxe lortzen da:

$$\theta_C = \frac{L^2 - 4a^2}{16EI} P, \quad (13-65)$$

eta hortik, (13-63) ekuazioan ordeztuz:

$$\delta_D = \frac{L^2 - 4a^2}{16EI} M_0. \quad (13-66)$$

13.6. CASTIGLIANO-REN LEHEN TEOREMA

Datozen ataletan egituren analisisian oso garrantzitsuak diren eta sarritan erabiltzen diren teorema batzuk aurkeztuko ditugu. Izan bedi oreka estatikoan dagoen gorputz elastiko bat (lineala izatea ez da beharrezko baldintza). Gorputz hori kanpoko P_i ($i = 1, \dots, n$) kargamultzo baten eraginpean dagoela onartuko dugu. Dakigun bezala, karga horiek indar nahiz momentu kontzentratuak adieraz ditzakete. Bestalde, P_i indar bakoitzaren aplikazio-puntuak indarraren norabidean jasaten duen desplazamenduari δ_i desplazamendu orokortua deituko diogu.

Kanpoko indarrek egiten duten lana honelaxe kalkulatu dezakegu:

$$W_{\text{kamp}} = \sum_{i=1}^n \int P_i d\delta_i. \quad (13-67)$$

Arestian aipatu genuen bezala, kanpoko indarrek egiten duten lana eta egiturak gordetzen duen deformazio-energia berdinak dira. Beraz, deformazio-energia indarren aplikazio-puntuen desplazamendu orokortuen funtzioan adieraziz, hauxe idatz dezakegu:

$$W_{\text{kamp}} = \sum_{i=1}^n \int P_i d\delta_i = U(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n). \quad (13-68)$$

Demagun orain aplikazio-puntu horietako bati $d\delta_i$ desplazamendu infinitesimal bat aplikatzen diogula P_i indarraren norabidean, eta beste aplikazio-puntu guztiak mugimendurik gabe jarraitzen dutela. Gauzak horrela, P_i indarraren aplikazio-puntuaren desplazamendua dela-eta, indar horrek lan bat egingo du, eta ondorioz, gorputzean dU energia-

aldaketa gertatuko da. Deformazio-energia funtzio jarraitua eta zehatza denez, aldaketa hori honelaxe idatz dezakegu desplazamenduen funtzioan:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \delta_1} d\delta_1 + \frac{\partial U}{\partial \delta_2} d\delta_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i + \dots + \frac{\partial U}{\partial \delta_n} d\delta_n. \quad (13-69)$$

Desplazamendu birtuala P_i indarraren aplikazio-puntuari bakarrik eman diogunez, gainerako deribatu guztiak nuluak izango dira; beraz,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i. \quad (13-70)$$

Era berean, lana egingo duen indar bakarra P_i izango da:

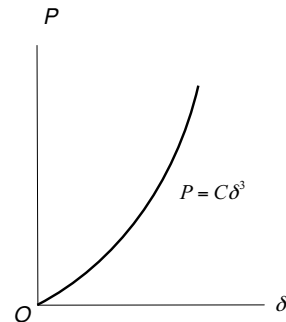
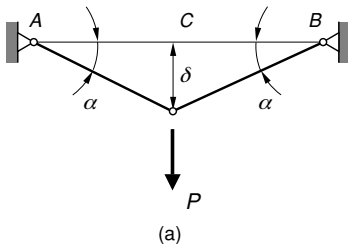
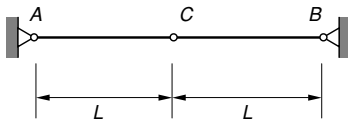
$$dW_{\text{karr}} = dU = P_i d\delta_i. \quad (13-71)$$

Hortaz, (13-70) eta (13-71) espresioak berdinduz, hauxe edukiko genuke:

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}. \quad (13-72)$$

Hain zuzen, (13-72) espresioa *Castigliano-ren lehenengo teorema* da, eta hauxe dio: “Gorputz elastiko baten deformazio-energia δ_i desplazamendu orokortuen funtzioan adierazten bada, energia horren deribatu partziala desplazamendu batekiko P_i indarraren berdina izango da”.

Azpimarratu behar da teorema hori portaera lineala edo ez-lineala duten materialentzat aplika daitekeela, egitura isostatikoak nahiz egitura hiperstatikoak kalkulatzeko. Hala ere, gehienetan ez da erraza izaten deformazio-energiaren espresioa desplazamendu orokortuen funtzioan adieraztea. Hori dela-eta, teorema hori nahiko mugaturik gelditzen da, eta ez da sarritan erabiltzen. Deformazio-energia osagarrian oinarritutako teoremek, aldiz, ez dute desabantaila hori, laster ikusiko dugun bezala.



(b)

13.12. irudia.

Teorema horren aplikazio modura, 13.12.a. irudiko egitura aztertuko dugu. Egitura horri AC eta CB barra horizontalez dago osaturik. Erdiko sekzioan P indar bertikalak eragiten du. Barren elastikotasun-modulua E da eta zeharkako sekzioa A . Ikus dezagun Castigliano-ren lehenengo teorema nola aplika daitekeen egitura horren analisisan. Lehenik eta behin, erdiko sekzioaren desplazamendu bertikala kalkulatu dugu, teorema energetikorik erabili gabe. Erraz ulertzen den bezala, bi barrek indar bertikalari euts diezaioten, beharrezkoa da barrak zertxobait inklinatzea. Inklinazio-angelu horri α deituko diogu. Beraz, barren luzera berria honako hau izango da:

$$L' = \frac{L}{\cos \alpha} = L \sec \alpha . \quad (13-73)$$

Preseski, $\sec \alpha$ funtzioaren seriezko garapena honako hau da:

$$\sec \alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{5\alpha^4}{4!} + \dots \quad (13-74)$$

Hortaz, (13-75) espresioan ordeztuz eta α angelua txikia denez goi mailako infinitesimoak mespretxatuz :

$$L' = L \left(1 + \frac{\alpha^2}{2!} \right) . \quad (13-75)$$

Barren hasierako luzera L zenez, luzapena (luzera-aldaketa) honako hau da:

$$\Delta L = L' - L = L \frac{\alpha^2}{2} , \quad (13-76)$$

eta α angeluaren balioa honako hau denez,

$$\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\delta}{L} , \quad (13-77)$$

(13-76) ekuazioan ordeztuz hauxe lortzen da:

$$\Delta L = L' - L = \frac{\delta^2}{2L} , \quad (13-78)$$

non δ delakoa C puntuaren desplazamendu horizontala baita. Bestalde, C korapiloa isolatu eta norabide bertikalean oreka-ekuazioak aplikatuz, erlazio honetara irits gaitetzke:

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha} , \quad (13-79)$$

non N delakoa barren ardatzeko indarra den. Beraz, zortzigarren gaian ardatzeko indarrari buruz esandakoa gogoratu, barraren luzapena honako hau izango da:

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} = \frac{PL}{2EA \sin \alpha} , \quad (13-80)$$

eta (13-77)-ren arabera:

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} = \frac{PL^2}{2EA\delta} \quad (13-81)$$

Azkenik, (13-78) eta (13-81) berdinuz,

$$\frac{\delta^2}{2L} = \frac{PL^2}{2EA\delta}, \quad (13-82)$$

eta hortik,

$$\delta = L \left(\frac{P}{EA} \right)^{1/3} \quad (13-83)$$

Ikusten denez, (13-83) ekuaziotik ondorioztatzen den bezala, kasu honetan P indarraren eta δ desplazamenduaren arteko erlazioa ez da lineala (ikus 13.12.b. irudia). Halere, Castigliano-ren lehenengo teorema portaera lineala ez duten gorputzetan ere aplika daiteke, segidan ikusiko dugun bezala. Nahi izanez gero, (13-83) ekuaziotik P indarra δ -ren funtzio modura adieraz dezakegu:

$$P = \frac{EA\delta^3}{L^3} \quad (13-84)$$

Orain, (13-68) ekuazioa erabiliz, U deformazio-energia kalkula dezakegu:

$$U = \int P d\delta = \int_0^{\delta} \frac{EA\delta^3}{L^3} d\delta = \frac{EA\delta^4}{4L^3} \quad (13-85)$$

Castigliano-ren lehenengo teoremaren arabera, C sekzioaren desplazamendua kalkulatzeko nahikoa da (13-85)-eko energiaren espresioa δ desplazamenduarekiko deribatzea. Beraz,

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{EA\delta^3}{L^3} = P \quad (13-86)$$

Ikusten den bezala, Castigliano-ren teoremak emaitza zuzena ematen du. Kontuan hartu behar da, halere, U deformazio-energia P indarrarekiko deribatuz gero, ez dugula δ desplazamendua lortuko. Hau da, (13-72) ekuazioaren alderantzizkoa ez da betetzen oro har. Horretarako, U^* deformazio-energia osagarria erabili behar da, hurrengo atalean ikusiko dugun bezala. Materialaren portaera lineala denean, ordea, U deformazio-energia eta deformazio-energia osagarria berdinak dira. Ondorioz, egokia da Castigliano-ren lehenengo teoremaren alderantzizkoa erabiltzea.

13.7. ENGESSER-EN LEHENENGO TEOREMA ETA CASTIGLIANO-REN BIGARREN TEOREMA

Teorema hauek frogatzeko, orekan estatikoan dagoen gorputz elastiko bat erabiliko dugu berriro ere, P_i ($i = 1, \dots, n$) kanpoko karga batzuen eraginpean dagoena, karga horiek indarrak nahiz momentuak izanik. Bestalde, P_i karga bakoitzari δ_i desplazamendu orokortua dagokio.

Kanpoko indarrek egiten duten lan osagarria honelaxe lor dezakegu:

$$W_{\text{kanp}}^* = \sum_{i=1}^n \int \delta_i dP_i. \quad (13-87)$$

Kanpoko indarrek egiten duten lan osagarria egituraren deformazio-energia osagarriaren berdina da. Beraz, deformazio-energia osagarria kanpoko indarren funtzioan adierazten badugu, berdintza hau edukiko dugu:

$$W_{\text{kanp}}^* = \sum_{i=1}^n \int \delta_i dP_i = U^*(P_1, P_2, \dots, P_n). \quad (13-88)$$

Kanpoko indarretako batek —adibidez, P_i indarrak— aldaketa infinitesimal bat jasango balu, beste indar guztiak konstante mantenduz, gorputzaren deformazio-energia osagarria ere aldatu egingo litzateke. Izan ere, definizioz, indarraren aldaketa bere aplikazio-puntuaren desplazamenduaz biderkatuz gero lan osagarria lortzen da. Era berean, U^* deformazio-energia osagarriak ere aldaketa bat jasango luke. Aldaketa infinitesimal hori honelaxe idatz dezakegu:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial U^*}{\partial P_2} dP_2 + \dots + \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i + \dots + \frac{\partial U^*}{\partial P_n} dP_n. \quad (13-89)$$

Aldaketa jasan duen indarra bakarra denez, (13-89) espresioa honelaxe geratuko litzateke:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i. \quad (13-90)$$

Era berean, P_i indarrari zor zaion lan osagarria honako hau da:

$$W_{\text{kanp}}^* = dU^* = \delta_i dP_i. \quad (13-91)$$

Hortaz, (13-91) eta (13-90) berdinduz, espresio honetara iritsiko ginateke:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i}, \quad (13-92)$$

Engesser-en bigarren teorema izenarekin ezagutzen den erlaziora, hain zuzen. Teorema honen enuntziatua honako hau da: “Egitura elastiko baten deformazio-energia osagarria P_i indarren funtzioan adierazten bada, energia horren deribatua indarrekiko δ_i desplazamendu orokortuaren berdina izango da”. Teorema hau gorputz elastiko lineal eta ez-linealekin aplikatu daiteke. Materialaren portaera elastiko lineala bada, deformazio-energia eta

deformazio-energia osagarria berdinak dira, hau da, $U = U^*$. Beraz, (13-92) ekuazioa honelaxe geratzen da:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}, \quad (13-93)$$

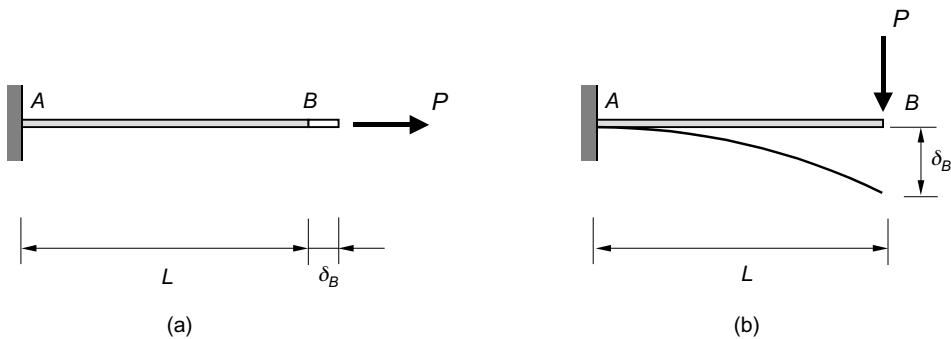
Castigliano-ren bigarren teorema izenaz ezagutzen dena.

Adibide gisa, har dezagun berriro 13.12. irudiko adibidea. Egituraren deformazio-energia osagarria honelaxe kalkula dezakegu:

$$U^* = \int \delta dP = \int_0^\delta L \left(\frac{P}{EA} \right)^{1/3} dP = \frac{3LP^{4/3}}{4(EA)^{1/3}}. \quad (13-94)$$

Adierazpen horretan (13-95) ekuazio aplikatuz, desplazamenduaren balioa lortuko genuke, (13-83) espresioarekin bat datorrena:

$$\frac{\partial U^*}{\partial P} = L \left(\frac{P}{EA} \right)^{1/3} = \delta. \quad (13-95)$$



13.13. irudia.

Bukatzeko, Castigliano-ren bigarren teorema 13.13. irudiko adibideen deformazioak kalkulatzeko erabiliko dugu. Etsenplu modura, 13.3.a. irudian trakziopean dagoen barra bat ikus daiteke, ez-kerreko muturrean landatua. Barra horren luzapena kalkulatzeko, (13-93) espresioa erabil dezakegu, zeren P indarraren aplikazio-puntuaren desplazamendua barraren luzapenaren berdina baita. Lehendabizi pieza prismatikoaren deformazio-energia kalkulatu beharko dugu. Zeharkako sekzioetan ardatzeko indarra soilik dagoenez, (13-37) espresioaz baliatuko gara. Honelatan, bada, $N_x = P$ ardatzeko indarra ordeztuz:

$$U = \int \frac{P^2}{2EA} dx, \quad (13-96)$$

eta deribatuz, jadanik ezaguna zaigun emaitza hau lortzen dugu:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{P}{EA} dx = \frac{PL}{EA}. \quad (13-97)$$

Bestalde, 13.3.b. irudiko habea makurdurapean dago, eskuineko B muturrean eragiten duen P indar bertikalaren ondorioz. Kalkula dezagun puntu horren desplazamendu bertikalak. Hain zuzen, x ardatzaren jatorria B puntuan kokatuz, piezako sekzio desberdinetako momentu makurtzailea $M_z = Px$ izango da. Momentu hori (13-51) ekuazioan ordeztuz,

$$U = \int \frac{P^2 x^2}{2EI_z} dx. \quad (13-98)$$

Eta (13-95) espresioaren arabera deribatuz, hauxe dugu:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{Px^2}{EI_z} dx = \frac{PL^3}{3EI_z}, \quad (13-99)$$

hots, hamargarren gaian lortu genuen espresio berbera.

13.8. KARGA UNITARIOAREN METODOA

Atal honetan teorema energetikoetan oinarritutako kalkulu-metodo garrantzitsu bat aurkeztuko dugu. Izan bedi estatikoki zehaztutako egitura elastiko lineal bat, P_i kanpoko indar batzuen eraginpean dagoena. Helburua egiturako puntu baten δ desplazamendua lortzea da. Desplazamendu hori lortzeko, puntu honetan eta interesatzen zaigun norabidean Q indar bat aplikaturik dagoela suposatuko dugu. Hain zuzen, Q indarrak unitatea balio duenean egituraren agertzen diren esfortzuei N_x^1 , V_y^1 , V_z^1 , M_y^1 , M_z^1 eta M_x^1 deituko diegu. Kanpoko indarren ondorioz agertzen diren esfortzuak, aldiz, N_x^0 , V_y^0 , V_z^0 , M_y^0 , M_z^0 eta M_x^0 izango dira. Beraz, egitura lineala denez, gainezarpen-printzipioa aplikatuz, esfortzu totalak lor ditzakegu, honelaxe:

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^0 + QN_x^1, & M_y &= M_y^0 + QM_y^1, \\ V_y &= V_y^0 + QV_y^1, & M_z &= M_z^0 + QM_z^1, \\ V_z &= V_z^0 + QV_z^1, & M_x &= M_x^0 + QM_x^1. \end{aligned} \quad (13-100)$$

Aurreko atalean ikusi dugun bezala, indar baten aplikazio-puntuaren desplazamendu orokortua kalkulatzeko, Castigliano-ren bigarren teorema erabil dezakegu, zeren egituraren portaera elastikoa izateaz gain lineala ere izango dela onartu baitugu. Deformazio-energia elastikoa kalkulatzeko, espresioa hau izango litzateke:

$$U = \int \frac{N_x^2}{2EA} dx + \int \frac{M_z^2}{2EI_z} dx + \int \frac{M_y^2}{2EI_y} dx + \int \frac{f_z V_y^2}{2GA} dx + \int \frac{f_y V_z^2}{2GA} dx + \int \frac{M_x^2}{2GI_p} dx. \quad (13-101)$$

Hortaz, (13-100) ekuazioko erlazioak (13-101) adierazpenean ordeztuz, eta (13-95) ekuazioaren arabera deformazio-energia Q indarrarekiko deribatuz, hauxe lortzen da:

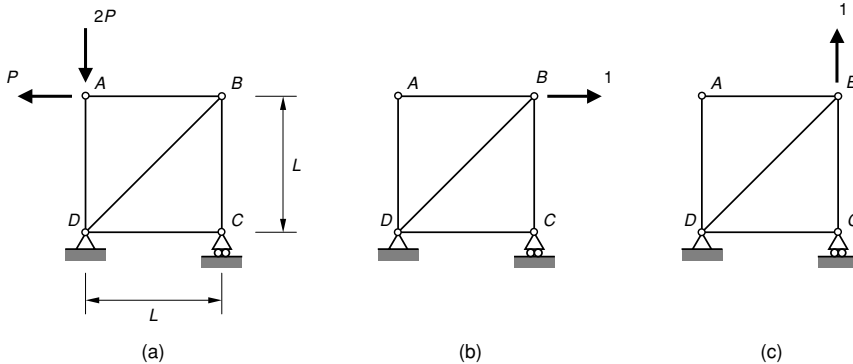
$$\delta = \int \frac{N_x N_x^1}{EA} dx + \int \frac{M_z M_z^1}{2EI_z} dx + \int \frac{M_y M_y^1}{2EI_y} dx + \int \frac{f_z V_y V_y^1}{2GA} dx + \int \frac{f_y V_z V_z^1}{2GA} dx + \int \frac{M_x M_x^1}{2GI_p} dx. \tag{13-102}$$

Ondoren, Q indarra asmatutakoa denez —hau da, benetako egitura existitzen ez denez—, nulua dela suposa dezakegu. Ondorioz, (13-102) ekuazioa beste era honetan agertuko litzateke:

$$\delta = \int \frac{N_x^0 N_x^1}{EA} dx + \int \frac{M_z^0 M_z^1}{2EI_z} dx + \int \frac{M_y^0 M_y^1}{2EI_y} dx + \int \frac{f_z V_y^0 V_y^1}{2GA} dx + \int \frac{f_y V_z^0 V_z^1}{2GA} dx + \int \frac{M_x^0 M_x^1}{2GI_p} dx. \tag{13-103}$$

Beraz, egitura isostatikoa kalkulatzeko, nahikoa da lehenengo kanpoko indarrek sortzen dituzten esfortzuak kalkulatzea. Ondoren, komeni den puntuan eta norabidean unitatea balio duen karga bat aplikatzen da, eta horrek sortzen dituen esfortzu berriak kalkulatu dira. Azkenik, lortutako bi esfortzuak (13-103) espresioan ordeztuz, desplazamendu lor dezakegu.

Desplazamenduak kalkulatzeko metodo hori *karga unitarioaren metodoa* deritzo, eta sarritan erabiltzen da egituren analisisan. Hemen egitura isostatikoen kalkulurako bakarrik azaldu dugun arren, metodo hori egitura hiperestatikoentzat ere aplika dezakegu. Gainera, metodo horren aplikazioa oso sistematikoa da, eta oso egokia da elementu asko dituzten egiturak kalkulatzeko. Horretarako, nahikoa da egitura askatuan eragiten duten indarrak eta ezezagun hiperestatikoak kanpoko indarrak direla suposatzea.



13.14. irudia.

Adibide gisa 13.14.a. irudiko egitura B puntuaren desplazamendu bertikala eta desplazamendu horizontala kalkulatuko ditugu. Egitura hori bost barraz dago osaturik, eta bi euskarri artikulaturen gainean dago, bata finkoa izanik eta bestea higikorra. Bestalde, A korapiloan P indar horizontal batek eta $2P$ indar bertikal batek eragiten dute. Egitura hori

muturretan artikulatuta dauden barrekin osatuta dagoenez eta indarrak korapiloetan aplikaturik daudenez, pieza prismatikoetan ardatzeko indarra egongo da soilik. Egitura isostatikoa izanik, oreka-ekuazioak aplikatuz erreazioak eta barra guztien ardatzeko indarrak kalkula daitezke. Indar horiek 13.1. taulako hirugarren zutabean laburtu dira. Hain zuzen, B puntuko desplazamendu horizontala eta desplazamendu bertikala kalkulatu nahi ditugunez, erabili behar ditugun bi karga unitarioak 13.14.b. eta 13.14.c. irudietan agertzen direnak dira. Lehenengoak sortzen dituen ardatzeko indarrei N^1 deituko diegu eta 13.1. taulako laugarren zutabean agertzen dira. Karga unitario bertikalak sortzen dituenak, aldiz, N^2 eran izendatu ditugu eta seigarren zutabean daude. Ardatzeko indar horiek kalkulatu ondoren, (13-103) ekuazioaren arabera, ondoko eragiketa egin beharko genuke desplazamendu horizontala lortzeko:

$$\delta_h = \int \frac{N^0 N^1}{EA} dx = \sum_{i=1}^5 \frac{N^0 N^1 L}{EA}, \quad (13-104)$$

non δ_h desplazamendu horizontala baita. Ikusten den bezala, energia kalkulatzeko integrala batuketa batez ordeztu dugu, barra guztien deformazio-energiak batuz egitura osoarena lortzeko. Era berean, δ_b desplazamendu bertikala lortzeko, hauxe egingo genuke:

$$\delta_b = \int \frac{N^0 N^2}{EA} dx = \sum_{i=1}^5 \frac{N^0 N^2 L}{EA}. \quad (13-105)$$

Bestetik, 13.1. taulako bosgarren eta zazpigarren zutabeetan, (13-104) eta (13-105) ekuazioetako espresioak kalkulatzeko eragiketak ageri dira. Zutabe horien azpian, barra guztiei dagozkien balioen batura ageri da. Batura horiek EA balioaz zatituz, bilatzen genituen bi desplazamenduak lortuko genituzke:

$$\delta_h = -3,828 \frac{PL}{EA}, \quad \delta_b = \frac{PL}{EA}. \quad (13-106)$$

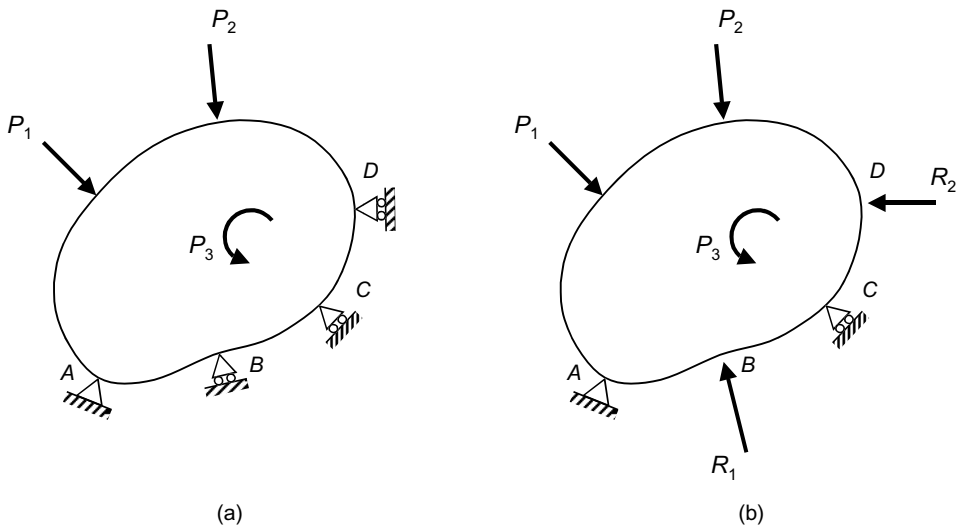
Ikus daitekeenez, (13-106) adierazpenetako, δ_h desplazamenduaren balioa negatiboa da. Honako hau adierazten du: B muturraren desplazamendu horizontala erabilitako karga unitarioaren aurkakoa da. Ondorioz, karga unitarioa eskuinerantz marraztu dugunez, B puntuaren benetako desplazamendua ezkererantz izango da. Ostera, desplazamendu bertikala positiboa irten da. Beraz, B puntua gorantz higituko da.

Barra	Luzera	N^0	N^1	$N^0 N^1 L$	N^2	$N^0 N^2 L$
AB	L	P	0	0	0	0
AC	L	$-2P$	0	0	0	0
BD	L	P	-1	$-PL$	1	PL
CD	L	0	0	0	0	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$-2,828PL$	0	0
				<u>$-3,828PL$</u>		<u>PL</u>

13.1. taula.

13.9. ENGESSER-EN BIGARREN TEOREMA

Engesser-en bigarren teorema berebiziko garrantzia du estatikoki zehaztugabeko egituren kalkuluan, hau da, egitura hiperestatikoaren kalkuluan. Teorema horren frogapena egiteko, demagun h hiperestatikotasun-maila duen egitura bat, P_i ($i = 1, \dots, n$) kanpoko indarren eraginpean dagoena (ikus 13.15.a. irudia). Egitura hori indarren metodoaren bidez kalkulatu nahi izanez gero, hiperestatikotasun-mailak agintzen duen adina ezezagun hiperestatiko aukeratuko beharko genituzke, hamaikagarren gaian ikusi genuen bezala. Demagun, hasiera batean, aukeratu ditugun ezezagun guztiak euskarrietako erreakzioak direla. Euskarri horietako loturak askatu ondoren, bakoitzari dagozkion erreakzioak aplikatuko genituzke egiturean. Horrela eginik, alde batetik hasieratik aplikatuta geneuzkan kargak egongo dira, eta beste alde batetik agertu berri zaizkigun R_j ($j = 1, \dots, h$) ezezagunak, 13.15.b. irudian ikus daitekeen bezala.



13.15. irudia.

Indar horiek guztiak elkarrekiko independenteak direla suposa dezakegu. Dakigun bezala, Engesser-en lehenengo teoremaren bidez, indarren aplikazio-puntuen desplazamenduak kalkula ditzakegu. Horrela, deformazio-energia osagarria indarren funtzioan idatziz gero, hauxe dugu:

$$U^* = U^*(P_1, P_2, \dots, P_n, \dots, R_1, R_2, \dots, R_h), \quad (13-107)$$

eta hortik euskarrietako erreakzioen aplikazio-puntuen desplazamenduak lor ditzakegu, U^* energia osagarria erreakzioekiko deribatuz, (13-92) ekuazioaren arabera. Aplikazio-puntuak euskarrietan daudenez, ezin dira erreakzioen norabidean higitu eta, beraz, desplazamendu horiek ezagunak dira, zero eman behar baitute. Matematikoki,

$$\frac{\partial U^*}{\partial R_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, h). \quad (13-108)$$

Hain zuzen, (13-108) ekuazioari *Engesser-en bigarren teorema* edo *lan minimoaren teorema* deritzo, eta honelaxe enuntzia daiteke: “Estatikoki zehaztugabeko egitura batean, oreka-ekuazioak betetzen dituzten ezezagun hiperestatikoaren balio guztien artean, bateragarritasun-ekuazioak ere betetzen dituztenak deformazio-energia osagarria minimoa egiten dutenak dira”.

Egituraren portaera lineala denean, deformazio-energia eta deformazio-energia osagarria berdinak dira. Beraz, (13-110) ekuazioa honelaxe geratuko litzateke:

$$\frac{\partial U}{\partial R_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, h). \quad (13-109)$$

Adierazpen hori *Castigliano-ren lan minimoaren teorema* izenez ezagutzen da.



13.16. irudia.

Frogapena ezezagun hiperestatiko gisa euskarrietako erreakzioak erabiliz egin dugun arren, beste edozein ezezagun hiperestatikorentzat ere betetzen da. Azter dezagun, adibidez, 13.16.a. irudiko barra-sarea (elastiko lineala dela onartuko dugu). Barra-sare hori hiperestatikoa da, eta bere hiperestatikotasun-maila $h = 1$ da. Demagun orain ezezagun gisa barra diagonaletako baten ardatzeko indarra aukeratzeko indarra erabiliko dugula. Egitura askatua edo isostatikoa lortzeko, barra hori kendu eta beraren ordez R ardatzeko indarra gehituko genuke, 13.16.b. irudian ikusten den bezala. Ezezagun horren balioa lortzeko, bateragarritasun-ekuazio bat erabili beharko genuke, A eta B puntuen desplazamendu erlatiboa barraren uzkurketaren berdina dela adierazten duena, hain zuzen:

$$\delta_{AB} = -\Delta L, \quad (13-110)$$

non δ_{AB} distantzia A eta B muturrak gerturatzen direna baita; eta ΔL delakoa, kendu dugun barra R ardatzeko indarraren ondorioz luzatuko zena. Honelatan, bada A eta B muturren arteko desplazamendu erlatiboa Engesser-en lehenengo teoremaren edo Castigliano-ren bigarrenaren bidez kalkula dezakegu, egituraren portaera lineala baita; eta barraren luzapena, ardatzeko indarrari eskainitako gaian ikusitako espresioen bidez. Hau da:

$$\delta_{AB} = \frac{\partial U_0}{\partial R}, \quad \Delta L = \frac{RL}{EA}, \quad (13-111)$$

non U_0 delakoa egitura isotatikokoaren energia baita.

Beraz, (13-110) bateragarritasun-ekuazioan ordeztuz:

$$\frac{\partial U_0}{\partial R} = -\frac{RL}{EA}. \quad (13-112)$$

Gogora dezagun orain zein den trakziopean dagoen pieza prismatiko baten energia osagarria. Portaera lineala dela suposatuz eta (13-37) ekuazioa aplikatuz, hauxe edukiko genuke:

$$U_1 = \frac{R^2 L}{2EA}, \quad (13-113)$$

non U_1 delakoa kendu dugun barraren energia den. Horren arabera, (13-112) ekuazioa honelaxe berridatz dezakegu:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(U_0 + \frac{R^2 L}{2EA} \right) = \frac{\partial}{\partial R} (U_0 + U_1) = \frac{\partial U}{\partial R} = 0. \quad (13-114)$$

Beraz, ezezagun gisa ardatzeko indar bat erabilita ere, energia edo lan minimoaren teorema lortzen dugu berriro ere. Ezezagun hiperstatiko bat baino gehiago edukiko bage-nitu, R_j ($j = 1, \dots, h$) ardatzeko indar ezezagunen multzoa erabiliko genuke. Horien energiak honako hauek lirarteke:

$$U_1 = \frac{R_1^2 L}{2EA}, \quad U_2 = \frac{R_2^2 L}{2EA}, \quad \dots \quad U_h = \frac{R_h^2 L}{2EA}. \quad (13-115)$$

Bateragarritasun-ekuazioa (13-112) ekuazioaren berdina izango litzateke, baina R_j ezezagunak elkarrekiko independenteak direnez, honelaxe idatziko genuke:

$$\frac{\partial U_0}{\partial R_i} = -\frac{R_i L}{EA} = -\frac{\partial}{\partial R_i} (U_1 + U_2 + \dots + U_h), \quad (13-116)$$

eta hortik:

$$\frac{\partial}{\partial R_i} (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_h) = \frac{\partial U}{\partial R_i} = 0. \quad (13-117)$$

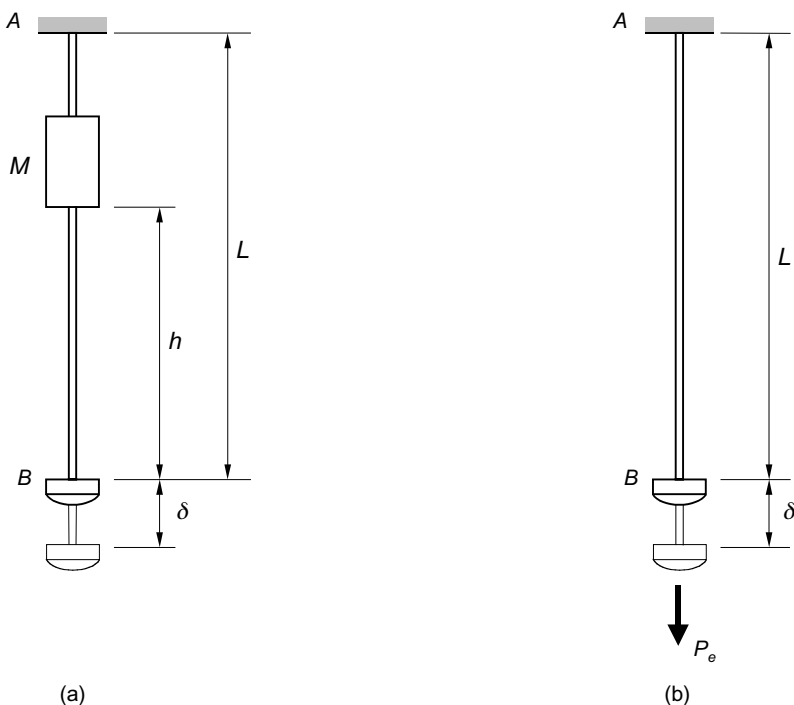
Ikusten den bezala, egituraren deformazio-energia totala minimoa izan behar da, hiperstatikotasun-maila edozein izanik ere.

13.10. TALKEN TEORIA

Orain arte aplikatutako indarrak estatikoak zirela suposatu dugu, hau da, pixkanaka aplikatzen genituela. Halere, sarritan indarren izaera ez da kuasiestatikoa izaten eta indarrak bat-batean aplikatzen dira egituran. Mota horretako indarrei *talka-indarrak* deritze, eta denbora-epe oso laburrean eragiten dute. Talka-indarrek sorrarazten dituzten ondorioen analisi sakona egitea oso luzea izango litzateke. Beraz, atal honetan fenomeno horren oinarriak baino ez ditugu aztertuko. Kontuan hartu behar da, talkaren ondorioz egituran zehar transmititzen diren deformazio-uhin batzuk agertzen direla, egituraren motelgarritasunari

ezker txikiagotuz edo motelduz joaten direnak, desagertu arte. Halere, guri egoera kaltegarriena bakarrik ardura zaigunez, talka-indarrak sortzen dituen tentsio eta deformazio handienak bakarrik kalkulatu ditugu, tarte iragankorra alde batera utziz.

Garapen matematikoarekin hasi baino lehen, ontzat emango ditugun zenbait hipotesi aipatuko ditugu. Batetik, trakzio-saiakuntza estatikoan lortzen den tentsio-deformazio diagrama baliokoa dela onartuko dugu talkak aztertzeko orduan. Bestetik, talka egiten duen gorputzak dakarren energia guztia egiturari transmititzen zaiola onartuko dugu, inolako energia-galerarik gertatu gabe. Ondorioz, gorputza egiturari erantsita gelditzen dela suposatuko dugu. Horrela gertatuko ez balitz, abiadura batekin aldentuko litzateke eta, beraz, bere energiaren parte bat egiturari transmititu gabe geldituko litzateke. Egoera hori errealitatean gutxitan emango den arren, egokia da hipotesi hori onartzea, egitura benetan egongo dena baino zigortuago dagoela suposatzen dugulako. Horrela, gerta daitezkeen ezustekoen aurka babesturik geratzen gara, zeren errealitatean hemen iragartzen dena baino energia gutxiago transmitituko baitzaio egiturari.



13.17. irudia.

Adibide gisa 13.17.a. irudiko egitura analizatuko dugu. Ikusten den bezala, h altuera batetik M masa bat askatzen dugu. Masa barraren beheko muturrera iristen denean, talka bat gertatuko da, pieza luzatuz eta tentsioak agertuz. Kalkulua egin ahal izateko, masak talka egiten duen tokian P_e deituko dugun indar estatiko bat aplikatuko dugu (ikus 13.17.b. irudia). Indar estatiko horrek talka-indarraren baliokidea izan beharko du, noski. Hau da, talkak eta P_e indarrak eragin berdina eduki beharko dute piezan. Baliokidetasun hori bete dadin, P_e indarrak eta talkak energia berdina transmititu behar diote egiturari eta, gainera,

deformazio berdina sortu beharko dute. Ikusten den bezala, energien baliokidetasunean oinarrituko gara problema ebazteko.

Clapeyron-en teoremaren arabera, P_e indarraren ondorioz egiturak gordetzen duen deformazio-energia kalkulatzeko erraza da. Nahikoa da indar horrek egiten duen lana kalkulatzeko, hau da,

$$U_{P_e} = \frac{1}{2} P_e \delta, \quad (13-118)$$

δ delakoa (luzapena) indarra aplikatzen den puntuaren desplazamendua izanik. Era berean, talkaren ondorioz egiturari transmititzen zaion energia lortzeko, masak altuera murriztean jasaten duen energia-galera kalkulatu beharko genuke, hots,

$$U_M = Mg(h + \delta), \quad (13-119)$$

non piezaren δ luzapena kontuan hartu den altuera-aldaketa kalkulatzeko orduan. Bi ekuazioak berdinduz,

$$\frac{1}{2} P_e \delta = Mg(h + \delta). \quad (13-120)$$

Halere, (13-120) ekuazioa ez da nahikoa P_e karga estatiko baliokidea kalkulatzeko, δ luzapena ezezaguna baita oraindik. Dena den, bien artean dagoen erlazioa ezaguna da. Ardatzeko indar baten eraginpean dauden pieza pramatikoen luzapena honelaxe kalkulatu dezakegu:

$$\delta = \frac{P_e L}{EA}, \quad (13-121)$$

eta indarra, beraz, hauxe izango da:

$$P_e = \frac{EA\delta}{L}. \quad (13-122)$$

Hortaz, (13-120) ekuazioan ordeztuz, bigarren mailako ekuazio hau lortuko genuke:

$$\frac{1}{2} \frac{EA\delta^2}{L} = Mg(h + \delta). \quad (13-123)$$

Masa estatikoki aplikatu izan bagenu piezak jasango zuen luzapen estatikoa hauxe izango zen:

$$\delta_{ST} = \frac{MgL}{EA}. \quad (13-124)$$

Honelatan, bada, (13-124) ekuazioa (13-123) erlazioan ordeztuz:

$$2\delta_{ST}(h + \delta) = \delta^2. \quad (13-125)$$

Bigarren mailako ekuazio hori askatuz, hauxe lortzen da:

$$\delta = \delta_{ST} + \sqrt{\delta_{ST}^2 + 2h\delta_{ST}}. \quad (13-126)$$

Erorketa-altuera barraren luzapenarekin konparatuz txikia bada, espresio hau lortzen da:

$$\delta = \sqrt{2h\delta_{ST}} = \sqrt{2h \frac{MgL}{EA}}. \quad (13-127)$$

Desplazamendua lortu ondoren, P_e karga estatiko baliokidea kalkula dezakegu:

$$P_e = \sqrt{2h \frac{MgEA}{L}}, \quad (13-128)$$

eta baita tentsio normala ere:

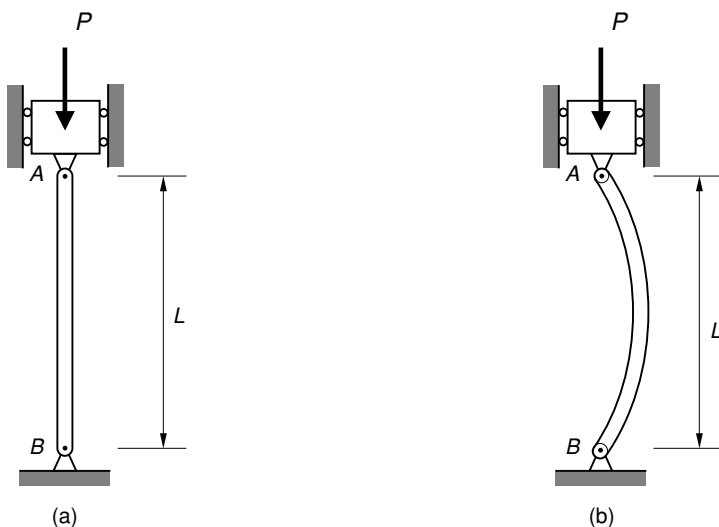
$$\sigma_{xx} = \frac{P_e}{A} = \sqrt{2h \frac{MgE}{AL}}. \quad (13-129)$$

Beraz, (13-129) ekuazioan ikusten den bezala, indar estatiko baten eraginpean agertzen den tentsio normala eta talka batean agertzen dena zeharo desberdinak dira. Kasu honetan, tentsioa E elastikotasun-moduluaren eta L luzeraren menpe dago, trakzio estatikoan gertatzen ez dena.

14. Gilbordura

14.1. SARRERA

Orain arte ikusi ditugun kapituluetan, egitura baten diseinua analizatzeko orduan bi magnitude izan dira arduratu gaituztenak: egituraren erresistentzia, hau da, gehiegizko tentsiorik agertu gabe kanpoko eraginei aurre egiteko duen gaitasuna, eta egituraren zurruntasuna, hots, gehiegizko deformazioei aurre egiteko gaitasuna. Egitura eta makina askoren hutsegitea erresistentziarekin eta zurruntasunarekin erlazionatuta dago. Adibidez, trakziopean edo makurdurapean dauden material harikorretan isurpena gerta daiteke, gehiegizko deformazioak agertuz eta, azkenik, piezaren hausturara iritsiz. Material harikorretan ere zartadurak ager daitezke, piezaren haustura sor dezaketenak. Dakigun bezala, hutsegite horiek galarazteko, nahikoa da piezako tentsio maximoa muga onargarri batzuen azpitik dagoela ziurtatzea. Kapitulu honetan, ordea, egiturek huts egiteko duten era berri bat aurkeztuko dugu: *gilbordura*. Gilbordura konpresiopean dauden elementuetan gertatzen da, eta egituren egonkortasunarekin erlazionatuta dago. Bat-bateko konfigurazio-aldaketak eduki gabe kanpoko kargei eusteko duen gaitasuna da egituraren egonkortasuna. Zehazkiago, kapitulu honetan konpresiopean dauden zutabeen gilbordura aztertuko dugu, hau da, lerdentasun handiko pieza prismatikoen gilbordura.



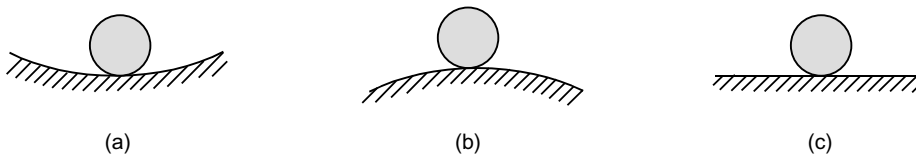
14.1. irudia.

Esperimentalki froga daitekeen bezala, sekzio eta material berdinez egindako bi zutaberen portaera oso desberdina izan daiteke luzeraren arabera. Luzera txikia duen zutabeak ongi eusten die konpresiozko indarrei, uzkurketa txiki bat dela medio. Ordea, zutabearen luzera handia bada, ustekabeko kurbadura handia ager daiteke (ikus 14.1.b. irudia). Orduan, zutabearen gilbordura gertatu dela esaten da. Bat-bateko itxura-aldaketa hori ezin daiteke inoiz ere onar zutabe baten diseinua egiten denean, arazo ugari ekar baititzake, egitura osoaren hondamena barne. Mota askotako egituretan eta era desberdinean gerta daiteke gilbordura. Adibidez, aluminiozko latontzi bat zapaltzen dugunean, bere hormetan gilbordura agertzen da gure pisuaren ondorioz. Fenomeno hori ezin daiteke azal orain arte garatu dugun teoriaren bidez, zeren, egituraren orekaz gain, egonkortasuna ere kontuan hartu behar baita. Azken gai honetan horri guztiari buruz hitz egingo dugu.

Esan dugun bezala, ezinbestekoa da zutabearen egonkortasuna zertan datzan ulertzea, gilbordura ulertu ahal izateko. Beraz, kapituluaren lehenengo atala egonkortasun kontzeptuari eskainiko diogu, non oreka egonkorra, ezegonkorra eta neutroa deskribatuko ditugun. Segidan, muturretan artikulatuta dagoen zutabea aztertuko dugu, eta Euler-en formula garrantzitsua ondorioztatuko dugu. *Gilbordura-luzera* deituriko kontzeptua agertu ondoren, lotura-baldintza desberdinak dituzten zutabearen karga kritikoak kalkulatu ditugu. Ondoren, perfektuak ez diren zutabeetako gilbordura aztertuko dugu. Gaia bukatzeko, ω koefizienteen metodoaren bidez zutabearen karga kritikoa nola lor daitekeen azalduko dugu.

14.2. EGONKORTASUNA ETA ZUTABEEN GILBORDURA

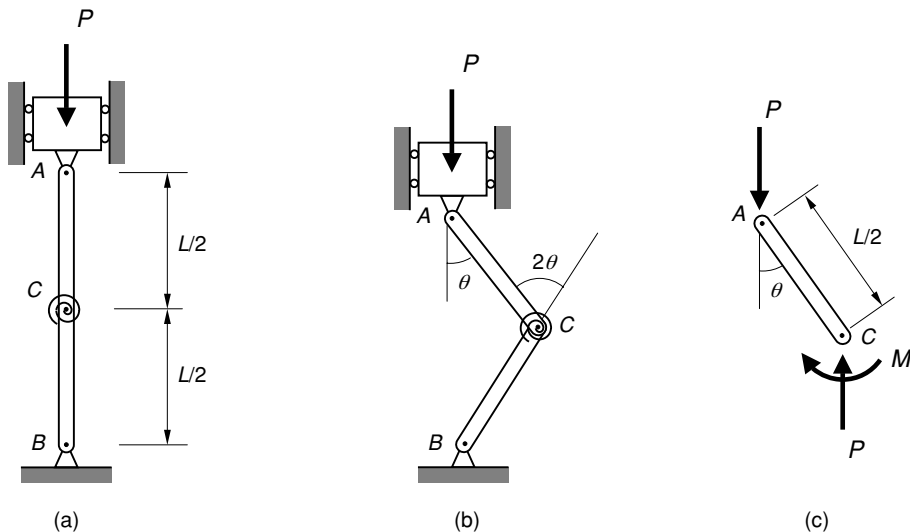
Zutabearen gilborduraren analisiarekin hasi baino lehen, fisikari hiru oreka-mota desberdintzen direla gogoratuko dugu. Saikapena sistemak perturbazio bat jasatean azaltzen duen erantzunaren arabera egiten da. Horrela, sistema bere oreka-posiziotik zertxobait urrundu ondoren berriro hasierako posiziora itzultzen bada, *oreka egonkorra* dela esaten da (ikus 14.2.a. irudia). Hasierako posiziora itzuli beharrean etengabe urruntzen jarraitzen badu, *oreka ezegonkorra* da, 14.2.b. irudiko kasuan bezala. Azkenik, sistema posizio berrian gelditzen bada, hasierako posiziora itzuli gabe baina gehiago urrundu gabe, *oreka neutroa* dela esango dugu (ikus 14.2.c. irudia). Hiru kasuetan, hasierako oreka-posizioaren energia minimoa da, hau da, $U' = 0$. Halere, bigarren deribatua balio desberdinak dauzka eta, ondorioz, portaera oso desberdinak dituzte, sistema oreka-posizio horretatik ateratzen denean. Oreka egonkorrean, bigarren deribatua positiboa da, hots, $U'' > 0$. Negatiboa bada, $U'' < 0$, oreka ezegonkorra edukiko dugu. Azkenik, oreka neutroa denean, bigarren deribatua (eta hurrengoak) nulua da, $U'' = U''' = \dots = 0$.



14.2. irudia.

Hain zuzen, 14.2. irudiko elementuarentzat ikusi dugun portaera zeharo erlazionatuta dago zutabearen egonkortasunarekin eta gilbordura gertatzeko arriskuarekin. Hori guztia argiago azaltzeko, 14.3.a. irudiko sisteman oinarrituko gara. Sistema hori *AC* eta *CB* barrez

dago osatuta. Barra horiek artikulaturik daude muturretan, eta C puntuan K zurruntasuna duen bihurtura-malguki bat kokatu dugu. Barrak eta aplikatutako konpresiozko P indarra lerrotaturik badaude, sistemak orekan jarraituko du. Demagun orain C puntua eskuinerantz higitzen dugula zertxobait, eta barrek $\Delta\theta$ angelu txikia osatzen dutela bertikalarekin. Sistema bere oreka-posiziotik atera eta aplikatutako indarra kenduz gero, zer da ondoren gertatuko dena? (ikus 14.3.b. irudia). Hasierako posiziora itzultzen bada, oreka egonkorra izango da; eskuinerantz higitzen jarraitzen bada, oreka ezegonkorra da; eta higitu gabe posizio berria jarraitzen bada, oreka neutroa da. Bi barrek osatzen duten sistema hori egonkorra edo ezegonkorra den jakiteko, AC barran eragiten duten momentuak aztertuko ditugu. Momentuak bi dira: alde batetik P indarrak sortutakoa, barrak kanporantz higitzeko joera duena, eta bestetik malgukiak egiten duen M momentua, barrak hasierako posiziora eramateko joera duena.



14.3. irudia.

P indarrak egiten duen momentua $PL/2$ da. Aldiz, barren arteko angelua $2\Delta\theta$ denez, malgukiarena $2K\Delta\theta$ izango da. Momentu hori lehenengoa baino handiagoa bada, oreka egonkorra da eta sistema hasierako posiziora itzuliko da perturbazio horizontala aplikatzeari uzten diogunean. Aldiz, P indarraren momentua malgukiarena baino handiagoa bada, oreka ezegonkorra da eta sistema oreka-posiziotik etengabe urruntzen joango da. Bi momentuen balioa berdina izateko P indarrak eduki behar duen balioari *indar kritikoa* deritzo, eta P_{kr} izendatuko dugu. Momentuak berdinduz, indar kritikoa kalkula dezakegu:

$$P_{kr} \frac{L}{2} \sin\Delta\theta = k(2\Delta\theta). \tag{14-1}$$

Beraz, angelu txikia denez, $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ eginez,

$$P_{kr} = \frac{4K}{L}. \tag{14-2}$$

Zutabearen karga kritikoa kalkulatzeko, “oreka neutroaren” metodoa erabiliko dugu. Lehen aipatu den bezala, oreka neutroaren kasuan zutabeak deformazio txiki bat onar dezake, eta egoera horri dagokion indarra karga kritikoa da. Beraz, zutabearen ardatza kurbadura txiki batekin marraztuko dugu (ikus 14.4.b. irudia), eta egoera horretan bete behar diren erlazioak bilatuko ditugu. Hasiera batean deformazioa XY planoan gertatzen dela suposatuko da. Zutabea beheko euskarritik x distantziara ebaki ondoren, ebakidura-sekzioan agertzen diren esfortzuak $N_x = P$ ardatzeko indarra eta $M_z = Py$ momentu makurtzailea dira. Momentu makurtzailearen eta kurbaduraren arteko erlazioa gogoratuz (ikus 10-9 ekuazioa), hauxe dugu:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = -\frac{Py}{EI_z}, \quad (14-3)$$

eta hortik:

$$y'' + \frac{P}{EI_z} y = 0, \quad (14-4)$$

hau da, bigarren mailako ekuazio diferentzial homogeneo bat. Ekuazio horren soluzioa aski ezaguna da:

$$y = A \sin kx + B \cos kx, \quad (14-5)$$

non k konstanteak hauxe balio duen:

$$k^2 = \frac{P}{EI_z}. \quad (14-6)$$

Preseski, A eta B integrazio-konstanteak mugako baldintza hauek inposatuz kalkula ditzakegu:

$$\begin{aligned} y(x=0) &= 0, \\ y(x=L) &= 0, \end{aligned} \quad (14-7)$$

honelaxe:

$$\begin{aligned} y_{x=0} &= B = 0, \\ y_{x=L} &= A \sin kL = 0, \end{aligned} \quad (14-8)$$

Hain zuzen, (14-8) ekuazioko erlazioa betetzen duten angeluak hauexek dira:

$$kL = n\pi, \quad n = 1, \dots, \infty. \quad (14-9)$$

Beraz, kurba elastikoaren eta karga kritikoaren soluzioak honako hauek izango dira:

$$\begin{aligned} y_n &= A_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \\ P_n &= \frac{n^2 \pi^2 EI_z}{L^2}. \end{aligned} \quad (14-10)$$

Hain justu, (14-10) ekuazioko karga kritikoen artean, gilbordura-arriskua sortuko duen lehena guztien artean txikiena izango da, hots,

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}. \quad (14-11)$$

Halere, karga kritikoen espresio hori ez da zeharo orokorra, gilbordura XY planoan gertatuko dela suposatu baitugu, beste edozein plano bertikaletan gerta daitekeela jakin arren. Dena den, erraz uler daiteke deformazioa inertzia txikiena duen planoan gertatuko dela. Beraz, (14-11) espresioa honelaxe orokor dezakegu:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2}. \quad (14-12)$$

Indar horri *Euler-en karga kritikoa* deritzo, eta, ikusten den bezala, materialaren erresistentziarekiko independentea da. Konpresiozko indar hori zutabearen gilbordura agertzeko arriskurik gabe onar daitekeen indarririk handiena da. Indar handiagoa aplikatuz gero, egoera egonkorretik egoera ezegonkorrera igaroko ginatke, gilbordura-arriskua agertuz.

Tentsio kritikoa (σ_{kr}) lortzeko, nahikoa da P_{kr} karga kritikoen eta sekzioaren A azaleraren arteko zatiketa kalkulatzeko:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{AL^2} = \frac{\pi^2 Ei_{\min}^2}{L^2}, \quad (14-13)$$

non i_{\min} delakoa sekzioaren biraketa-erradioa baita. Zutabearen luzeraren eta biraketa-erradio horren arteko erlazioari *lerdentasuna* (λ) deituz,

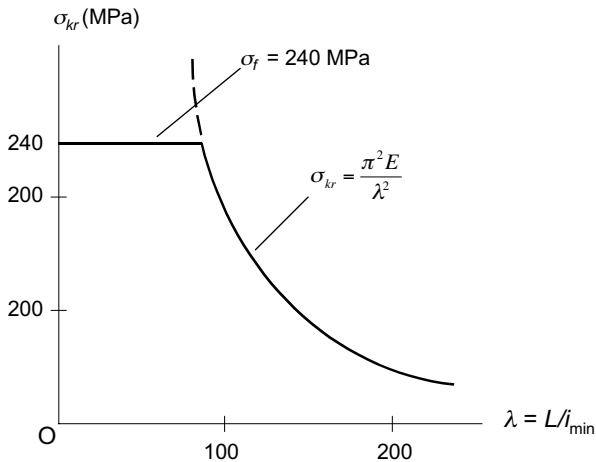
$$\lambda = \frac{L}{i_{\min}}, \quad (14-14)$$

honelaxe berridatz dezakegu tentsio kritikoen espresioa:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (14-15)$$

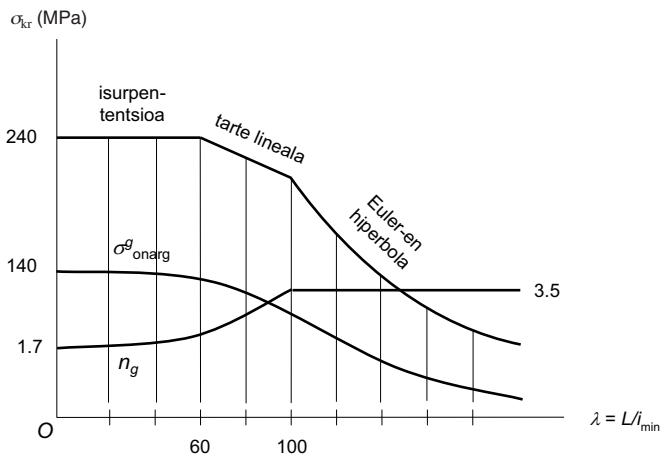
Ikus dezagun orain nola adieraz daitekeen grafikoki (14-15) erlazioa. Ekuazio horrek adierazten duen kurba hiperbola bat denez, *Euler-en hiperbola* deritzo. Esaterako 14.5. irudian $E = 200$ GPa balioko altzairu bati dagokion hiperbola adierazi da. Irudi horretan ikusten den bezala, zutabearen lerdentasuna handia denean, tentsio kritikoa txikia da. Beraz, zutabe lerdin batean gilbordura gertatzeko, nahikoa da konpresiozko karga txiki bat edukitzea. Karga kritiko hori handitzeko erresistentzia handiagoa duen altzairu bat aukeratzeak ez du ezertarako balio, altzairu gehien elastikotasun-modulua oso antzekoa baita. Aukera bakarra lerdentasuna txikitzea da, luzera txikiagotuz edo biraketa-erradioa handiagotuz. Biraketa-erradioa eta, beraz, sekzioaren inertzia-momentua handiagotzeko era bat hodi erako zutabeak erabiltzea da, materiala ardatzetik urrun kokaturik baitaukate. Horregatik, gilbordura-arriskupean egon daitezkeen zutabe asko sekzio hutsak erabiliz egiten dira. Kontuz ibili behar da, halere, zeren, pareta mehegia erabiliz gero, mailatu egin baitaiteke. Bestalde, lerdentasuna txikia denean, karga kritikoa isurpen-tentsioa baino txikiagoa izatea

gerta daiteke, irudian ageri den bezala. Beraz, lerdentasunaren arabera, zutabeen isurpena edo gilbordura gerta daitezke hutsegiteko orduan.



14.5. irudia.

Euler-en kurba hori materialaren portaera lineala den bitartean erabil daiteke soilik. Halere, dakigun bezala, materialen portaera ez da zeharo lineala izaten, zeren, isurpen-mugara gerturatuz goazen neurrian, tentsio-deformazio motako diagramak kurba bat marrazten baitu. Altzairuaren kasuan, proportzionaltasun-muga $\sigma_{prop} = 0,8\sigma_f$ da gutxi gorabehera. Lineala ez den tarte hori kontuan eduki ahal izateko, 14.6. irudiko diagrama berria erabil dezakegu, hiru zati desberdinez osatzen dena. Lehenengo tartea isurpen-tentsioari dagokiona da. Bigarrena neurketa enpirikoen bidez lortzen da, eta zuzen bat da. Azkenik, hirugarren zatia Euler-en hiperbola da. Kurba horiei *Euler-Tetmajer-en kurbak* deritze.



14.6. irudia.

Esan bezala, gilbordurarik ez gertatzeko, konpresiozko tentsioa tentsio kritikoaren azpitik egon behar da. Halere, ezustekoetatik babesturik egoteko, segurtasun-tarte bat gor-detzea komeni da. Ondorioz, kalkuluak egiteko erabiltzen den tentsioa —hots, tentsio onarg-
garria— tentsio kritikoa baino txikiagoa izaten da. Tentsio onargarria honelaxe kalkulatu-
dugu:

$$\sigma_{\text{onarg}}^g = \frac{\sigma_{\text{kr}}}{n_g}, \quad (14-16)$$

non n_g gilborduraren aurreko segurtasun-koefizientea baita. Segurtasun-koefiziente hori ez da konstantea izaten. Gilbordura-arriskua handituz doan neurrian —hau da, zutabearen lerdentasuna handitzen den heinean—, segurtasun-koefizientea ere handituz doa. Horrela, lerdentasun txikiko zutabeetan ($\lambda < 40$), $\lambda = 0$ denean erabiltzen den segurtasun-koefiziente bera aukera daiteke. Lerdentasuna $\lambda = 40$ eta $\lambda = 100$ bitartean dagoenean gutxi gora-behera, linealki handituz doan segurtasun-koefiziente bat erabiltzen da. Azkenik, Euler-ren hiperbola hasten den puntura iristean ($\lambda = 100$), segurtasun-koefizientea 3,5 izatera irits daiteke, eta hortik aurrera balio konstante hori erabiltzen da. Segurtasun-koefizientearen balio horiek aplikatuz, 14.6. irudiko kurba lortzen da.

Konpresiopean dauden zutabeen kalkulua egiteko, atal honetan ikusitako garapen teo-
rikoetan oinarrituriko ekuazioak erabil daitezkeen arren, praktikan saiakuntza esperimen-
talen bidez lortutako beste espresio batzuk erabiltzen dira, gaiaren bukaeran ikusiko dugun
bezala.

14.4. ZUTABEEN KARGA KRITIKOA LOTURA-BALDINTZEN ARABERA

14.4.1. Gilbordura-luzera

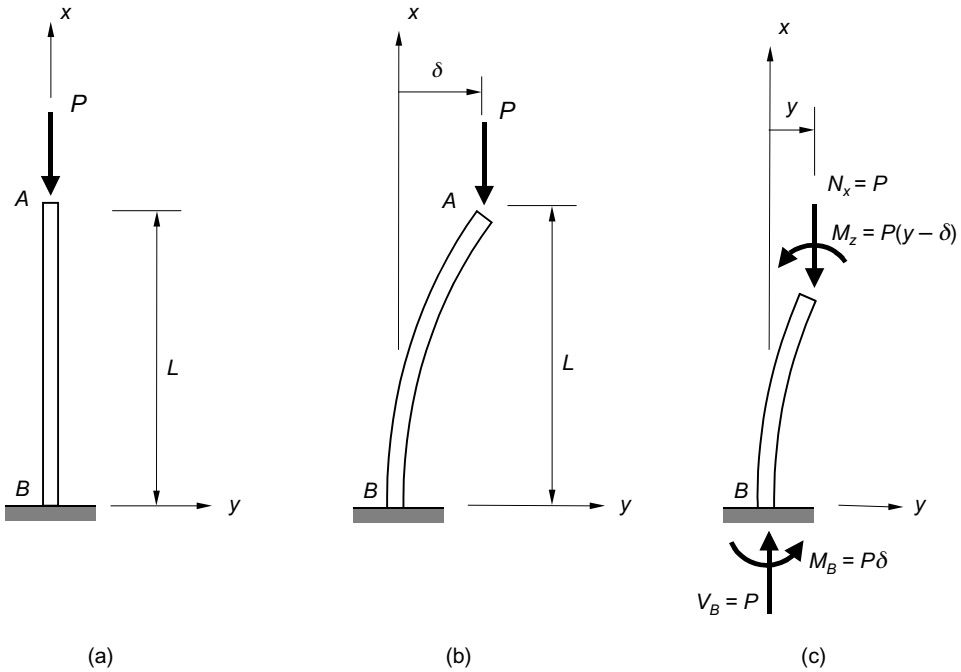
Aurreko atalean muturretan artikulatuta dagoen zutabe baten karga kritikoa nola kalkulatu daitekeen ikusi dugu. Halere, zutabe guztiak ez dira beti biartikulatuak izaten, eta mugako baldintzen konbinazio desberdin asko topatu ditzakegu. Dena den, *gilbordura-luzera* izenaz ezagutzen den kontzeptuaren bidez, (14-12) ekuazioko Euler-en karga kritikoa erabiltzen jarrai dezakegu, lotura-baldintza desberdinak dituzten zutabeak kalkulatzeko.

Honelatan, bada, L luzera eta edozein lotura-baldintza dituen zutabe baten L_g *gilbordura-luzera*, karga kritiko berdina edukitzeko zutabe biartikulatu batek eduki beharko zukeen luzera da, bi zutabeen zeharkako sekzioa eta materiala berdinak izanik. Beste era batera esanda, edozein zutaberentzat Euler-en zutabe baliokide bat lor daiteke, benetakoaren karga kritiko bera duena. Zutabe errearen eta zutabe baliokidearen arteko ezberdintasun bakarra luzera izango da. Zutabe biartikulatu baliokidearen luzera lortu eta gero —hots, gilbordura-luzera ezagutu ondoren—, kalkulua Euler-en formula aplikatuz egin daiteke. Kontzeptu hori argitzeko, zenbait zutaberaren karga kritikoak kalkulatu ditugu segidan.

14.4.2. Mutur batean landatutako zutabearen karga kritikoa

Izan bedi 14.7.a. irudiko zutabea, beheko muturrean landaturik dagoena. Goiko muturrean P konpresio-indarra aplikatzen da. Zutabe horren karga kritikoa kalkulatzeko,

Euler-en zutabearekin jarraitutako pauso berdinak emango ditugu. Lehendabizi, mugako baldintzak errespetatzen dituen konfigurazio deformatu bat suposatuko dugu, 14.7.b. irudian agertzen den bezalako. Goiko muturraren desplazamenduari δ deituko diogu. Ondoren, zutabea B muturretik x distantziara dagoen sekzioan ebakiko dugu, eta, oreka-ekuazioak aplikatuz, agertzen diren esfortzuak kalkulatuko ditugu.



14.7. irudia.

Honelatan, bada, 14.7.c. irudiko momentu makurtzailea (14-3) espresioan ordeztuz,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = -\frac{P(y - \delta)}{EI_z} \tag{14-17}$$

Beraz,

$$y'' + \frac{P}{EI_z}y = \frac{P\delta}{EI_z} \tag{14-18}$$

Lehen bezala $k^2 = P/EI_z$ eginuz, bigarren mailako ekuazio diferentzial hau lortuko dugu:

$$y'' + k^2y = k^2\delta \tag{14-19}$$

Ekuazio horren soluzioa lortzeko, ekuazio homogeneoaren soluzioa eta ekuazio osoaren soluzio partikular bat batu behar dira. Ekuazio homogeneoaren soluzioa aurreko atalean lortutako berdina da (ikus (14-5) ekuazioa):

$$y_h = A \sin kx + B \cos kx, \quad (14-20)$$

eta (14-19) ekuazioa betetzen duen soluzio partikular bat honako hau da:

$$y_p = \delta. \quad (14-21)$$

Beraz, (14-20) eta (14-21) espresioak batuz, soluzio orokorra lortuko dugu:

$$y_h = A \sin kx + B \cos kx + \delta. \quad (14-22)$$

Mugako baldintzak aplikatuz, integrazio-konstanteen balioak lor ditzakegu:

$$\begin{aligned} y'_{x=0} &= Ak \cos kx - Bk \sin kx + Ak = 0 \Rightarrow A = 0, \\ y_{x=0} &= B \cos kx + \delta = B + \delta = 0 \Rightarrow B = -\delta, \\ y_{x=L} &= \delta (1 - \cos kL) = \delta \Rightarrow \cos kL = 0. \end{aligned} \quad (14-23)$$

Bestalde, (14-23) ekuazioko azken erlazioa betetzen duten angeluak hauek dira:

$$kL = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, \dots, \infty. \quad (14-24)$$

Karga kritiko txikiena aukeratuz —hau da, $n = 1$ eginez— eta (14-6) ekuazioan ordeztuz:

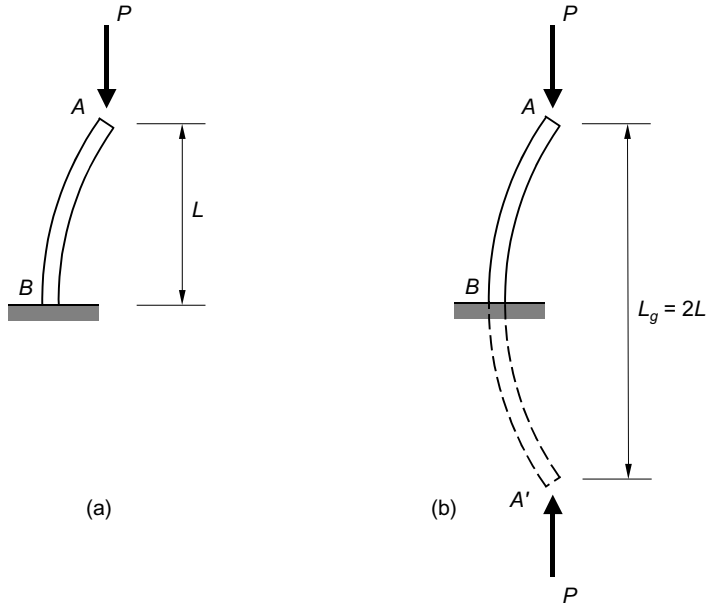
$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}. \quad (14-25)$$

Espresio horrek Euler-en ekuazioaren antzeko itxura du beste era honetan berridatiz gero:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2}. \quad (14-26)$$

Alegia, zutabe horren gilbordura-luzera $L_g = 2L$ dela ikusi dezakegu. Hau da, mutur bat landaturik duen L luzerako zutabearen eta luzera bikoitzeko zutabe biartikulatuaren karga kritikoak berdinak dira.

Emaitza berera irits gaitzeko 14.8. irudiko eraikuntza geometrikoan oinarrituz. Hain zuzen, 14.8.a. irudian ikusten den bezala, B landapeneko malda edo biraketa nulua da. Halaber, 14.8.b. irudiko zutabeak berezitasun bera du; hau da, erdiko sekzioaren malda nulua da. Beraz, luzera bikoitza duen zutabearen eta mutur batean landatuta dagoen zutabearen portaera berdinak dira gilbordurarekiko. Beste era batera esanda, bi zutabe horiek baliokideak dira, karga kritiko bera edukiko baitute. Hortaz, 14.8.b. irudiko deformazioa muturretan artikulatuta dagoen zutabe batean agertzen dena izatean, 14.8.a. irudiko zutabearen gilbordura-luzera $L_g = 2L$ dela ondoriozta daiteke.



14.8. irudia.

14.4.3. Muturretan landatutako zutabea

Atal honetan 14.9.a. irudiko zutabearen karga kritikoa kalkulatu dugu. Zutabea bi muturretan landatua dago, eta konpresiozko P indarra jasaten du. Egiturak duen simetriaren ondorioz, landapenetan M_0 deituko ditugun momentu ezezagunak agertuko dira. Bestalde, 14.9.b. irudian zutabearen deformazioa adierazten da, non A eta B muturretako biraketak nuluak baitira. Orain arte egin dugun bezala, beheko muturretik x distantziara dagoen sekzioan ebakiko dugu zutabea. Oreka-ekuazioak aplikatuz, 14.9.c. irudiko esfortzuak lortzen dira ebakidura-sekzioan. Momentu makurtzailea (14-3) ekuazioan ordeztuz, hauxe lortzen da:

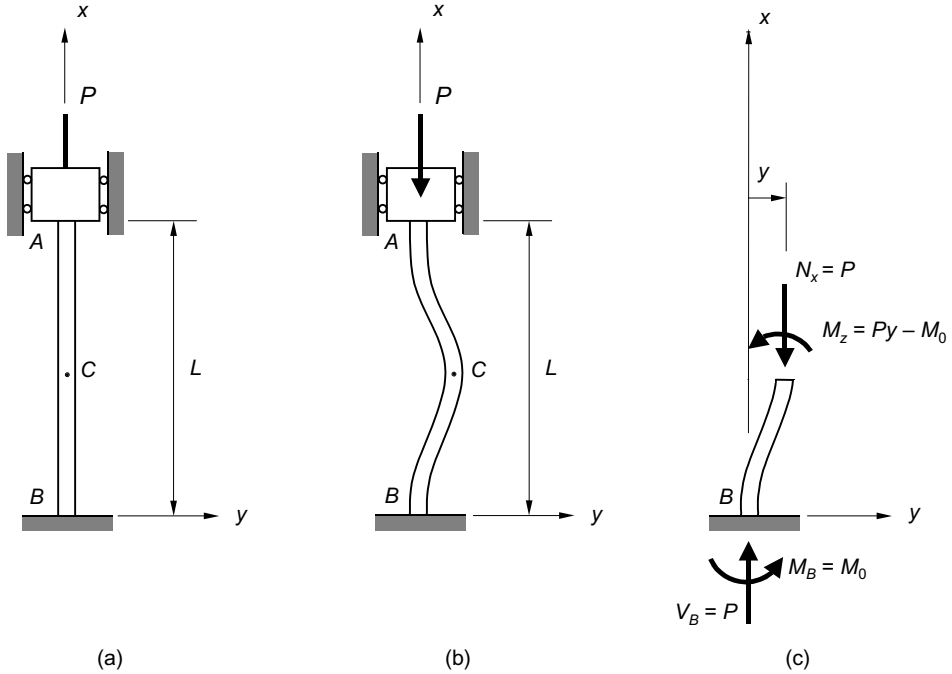
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = -\frac{Py - M_0}{EI_z}, \tag{14-27}$$

eta hortik, ekuazio diferentzial hau:

$$y'' + \frac{P}{EI_z} y = \frac{M_0}{EI_z}. \tag{14-28}$$

Orain arte erabili dugun k konstante berdina definituz,

$$k^2 = \frac{P}{EI_z}, \tag{14-29}$$



14.9. irudia.

(14-28)-ko ekuazio diferentziala honelaxe geratuko da:

$$y'' + k^2 y = k^2 \frac{M_0}{P}. \quad (14-30)$$

Ekuazio homogeneoaren soluzioari ekuazio osoaren soluzio partikular bat batu ondoren, ondoko funtzioa lortzen da:

$$y_h = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_0}{P}. \quad (14-31)$$

Mugako baldintzak aplikatuz, integrazio-konstanteen balioak aska ditzakegu:

$$\begin{aligned} y'_{x=0} &= A k \sin kx - B k \cos kx = A k = 0 \Rightarrow A = 0, \\ y_{x=0} &= B \cos kx + \frac{M_0}{P} = B + \frac{M_0}{P} = 0 \Rightarrow B = -\frac{M_0}{P}, \\ y_{x=L} &= \frac{M_0}{P} (1 - \cos kL) = 0 \Rightarrow \cos kL = 1. \end{aligned} \quad (14-32)$$

Beraz, (14-32)-ko azkeneko espresioarekin geldituz, $\cos kL = 1$ erlazioa betetzen duten angeluak honako hauek dira:

$$kL = 2n\pi, \quad n = 1, \dots, \infty. \quad (14-33)$$

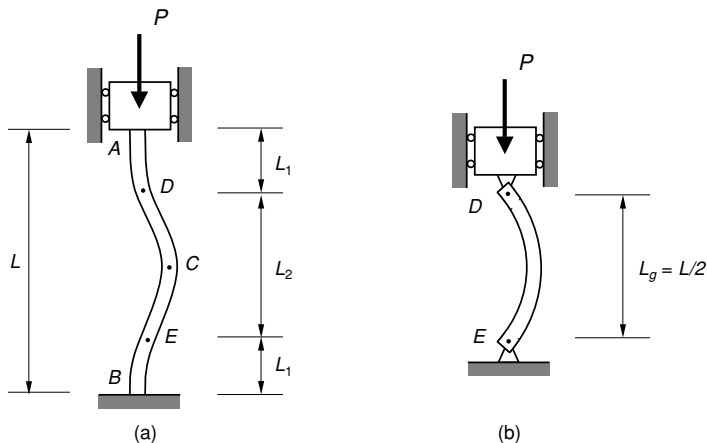
Azkenik, karga kritikoaren balio txikiena hartuz ($n = 1$) eta (14-29) ekuazioan ordeztuz, P_{kr} kalkulatu dugu:

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 EI_z}{L^2} \tag{14-34}$$

Karga kritiko hori beste era honetan adieraziz gero,

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(L/2)^2} \tag{14-35}$$

muturretan landatutako zutabearen gilbordura luzera $L_g = L/2$ dela ondoriozta daiteke. Hau da, zutabe landatuak eta luzera erdia duen zutabe artikulatuak karga kritiko bera dute.



14.10. irudia.

Aurreko kasuan egin dugun bezala, gilbordura-luzera hori kurba elastikoaren itxura aztertuz ere lor daiteke. Hain zuzen, 14.10. irudian adierazten den bezala, A eta B muturrak landatuak egotean, D eta E sekzioetan kurbadura-aldaketa gertatu behar da; hau da, sekzio horietan kurba elastikoak inflexio-puntuak edukiko ditu. Inflexio-sekzio horietan momentu makurtzaileak zero balio du. Beraz, DE tartea muturretan artikulatutako zutabe-zati baten baliokidea da, 14.10.b. irudian ikus daitekeen bezala. Bi zutabe horien karga kritikoa berbera denez, L_2 luzera lortuz gero, L_g gilbordura-luzera edukiko dugu. Bestalde, AD eta BE zatiak mutur batean bakarrik landatutako zutabeak dira, 14.7.b. irudikoak bezalakoak. Zutabe-zati horien karga kritikoa hauxe da:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L_1)^2} \tag{14-36}$$

DE tartean dagoen zutabe-zatia biartikulatua dela onar daiteke. Zati horren karga kritikoa honako hau da:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L_2^2} \tag{14-37}$$

AD eta DE tarteak zutabe beraren zatiak direnez, denek karga kritiko bera edukiko dute. Beraz, (14-36) eta (14-37) ekuazioak berdinduz, hauxe lortzen da:

$$\frac{\pi^2 EI_z}{(2L_1)^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{L_2^2}, \quad (14-38)$$

hau da,

$$2L_1 = L_2. \quad (14-39)$$

Bestalde, 14.10. iruditik erlazio hau betetzen dela ikus daiteke:

$$2L_1 + L_2 = L. \quad (14-40)$$

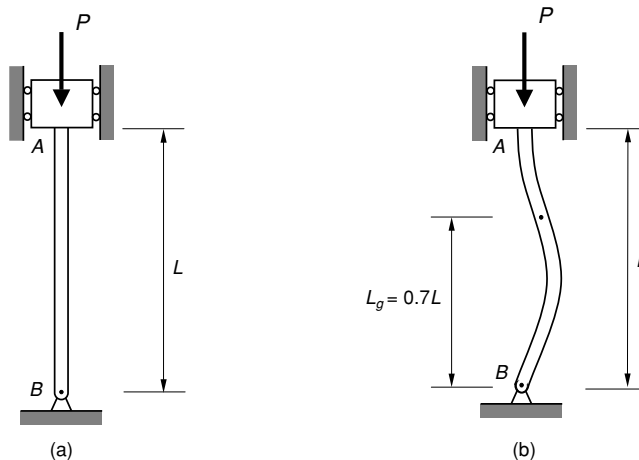
Azkenik, (14-39) eta (14-40) ekuazioetatik L_2 luzera aska daiteke:

$$L_2 = \frac{L}{2} = L_g, \quad (14-41)$$

goian lortutako gilbordura-luzeraren berdina dena.

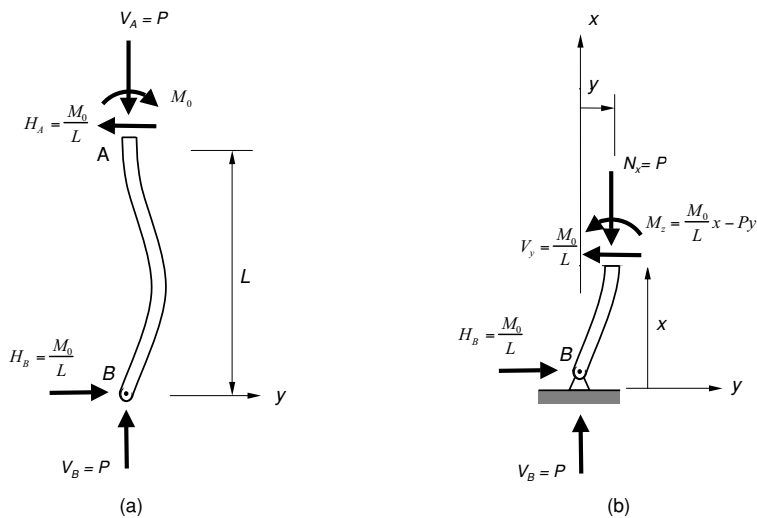
14.4.4. Mutur batean landatuta eta bestean artikulatuta dagoen zutabea

Bukatzeko, kalkula dezagun 14.11.a. irudiko zutabearen karga kritikoa. Kasu honetan beheko muturra artikulatuta dago, eta goikoa landatuta. Hain zuzen, 14.11.b. irudian zutabe horren itxura deformatua marraztu da. Goiko muturreko biraketa galarazita dago; beraz, malda nulua da A muturrean. Ordea, B sekzioak biratu egin dezake.



14.11. irudia.

Berrito ere, A muturreko landapenean agertzen den momentu ezezagunari M_0 deituko diogu. Beheko muturrekiko momentuak hartuz gero, A sekzioan indar horizontal bat agertu behar dela ikusten dugu, estatikaren legeak bete daitezzen. Preseski, H indar horizontal horren balioa honako hau da (ikus 14.12.a. irudia):



14.12. irudia.

$$\sum M_{zB} = 0 \Rightarrow HL = M_0 \Rightarrow H = \frac{M_0}{L}. \tag{14-42}$$

Bestalde, 14.12.b. irudian, x distantziara dagoen sekzio bateko esfortzuak agertzen dira. Kurbadura eta momentu makurtzailea erlazionatzen dituen espresioan ordeztuz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = -\frac{M_0 x/L - Py}{EI_z}, \tag{14-43}$$

eta sinplifikatuz,

$$y'' + \frac{P}{EI_z} y = \frac{M_0 x/L}{EI_z}. \tag{14-44}$$

Jadanik ezaguna zaigun k konstanteaz baliatuz, (14-44) ekuazioa honelaxe geratuko da:

$$y'' + k^2 y = k^2 \frac{M_0}{PL} x. \tag{14-45}$$

Ekuazio diferentzial horren soluzioa honako hau izango da:

$$y_h = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_0}{PL} x. \tag{14-46}$$

Segidan, mugako baldintzak inposatuko ditugu:

$$\begin{aligned}
 y_{x=0} &= Bk \cos kx = B = 0, \\
 y_{x=L} &= A \sin kL + \frac{M_0}{P} = 0 \Rightarrow A \sin kL = -\frac{M_0}{P}, \\
 y'_{x=L} &= A k \cos kL + \frac{M_0}{PL} = 0 \Rightarrow A k \cos kL = -\frac{M_0}{PL}.
 \end{aligned}
 \tag{14-47}$$

Eta (14-47) espresioko azken bi ekuazioak zatituz, hauxe lortzen da:

$$kL = \tan kL. \tag{14-48}$$

Ekuazio horren erro-kopurua, orain arte gertatu den bezala, infinitua da. Erroak kalkulatu ondoren (grafikoki, adibidez) eta txikiena aukeratu,

$$kL = 4,49. \tag{14-49}$$

Beraz, orain arte egin dugun bezala, k askatuz eta (14-29) ekuazioan ordeztuz, karga kritikoa lortuko dugu:

$$P_{kr} = \frac{4,49^2 EI_z}{L^2}, \tag{14-50}$$

eta ekuazioa beste era honetan antolatuz,

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{\left(\frac{\pi L}{4,49}\right)^2}, \tag{14-51}$$

gilbordura-luzera lor dezakegu:

$$L_g = \frac{\pi L}{4,49} \approx 0,7L. \tag{14-52}$$

Aurreko kasuetan egin dugun bezala, beheko muturretik hasita $L_g = 0,7L$ distantziara inflexio-puntu bat dagoela frogatu daiteke (ikus 14.11.b. irudia).

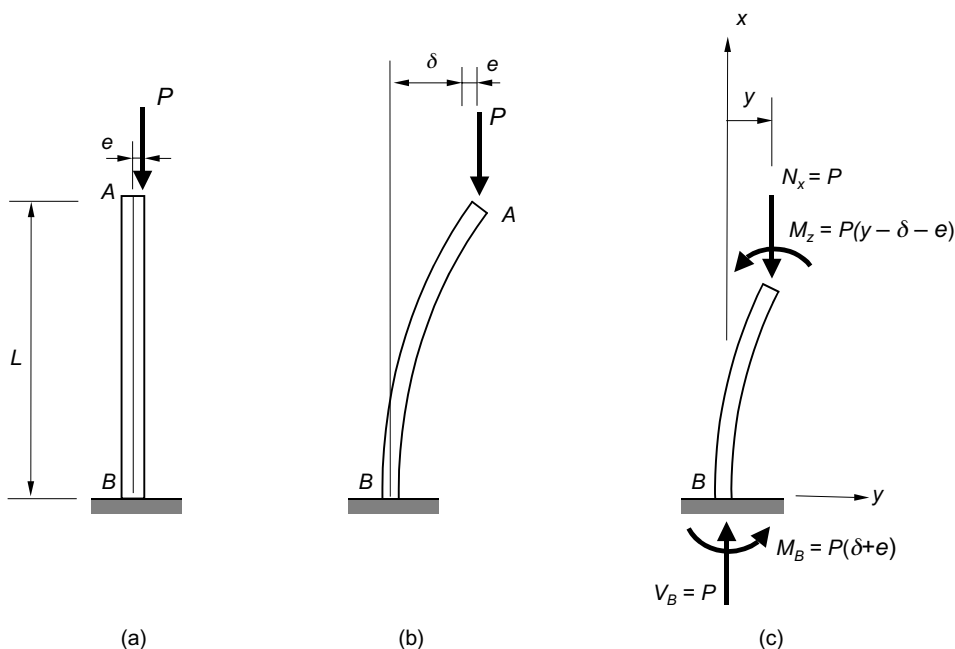
Bukatzeko, azpialde honetan ikusi ditugun zutabeen gilbordura-luzerak 14.1. taulan laburbildu dira:

Lotura-baldintzak	Gilbordura-luzera
Bi muturrak artikulaturik	L
Mutur bat landaturik eta bestea librea	$2L$
Bi muturrak landaturik	$L/2$
Mutur bat landaturik eta bestea artikulaturik	$0,7L$

14.1. taula.

14.5. ESZENTRIKOKI KARGATUTAKO ZUTABEAK

Euler-en karga kritikoa lortu dugunean, zutabearen ardatza perfektua zela suposatu dugu —hots, zeharo zuzena zela—, eta konpresio indarra ardatz horrekin lerrotatuta zegoela, grabitate-zentrotik pasatuz. Halere, egitura errealetan hipotesi horiek ez dira betetzen gehienetan. Benetako zutabeetan beti egoten dira akatsak, txikiak badira ere. Horrez gain, aplikatutako indarrek beti izaten dute eszentrikotasunen bat. Ondorioz, akatsak dituzten zutabeak aztertzea komeni da.



14.13. irudia.

Esate baterako, 14.13.a. irudian eszentrikoki kargatutako zutabe bat ageri da. Adibide gisa, mutur batean landatuta eta bestean aske dagoen zutabe bat aukeratu dugu. Hasierako eszentrikotasuna dela-eta, A muturrak jasaten duen desplazamendua $\delta + e$ izango da, 14.13.b. irudian agertzen den bezala. Orain arte egin dugun legez, zutabea landapenetik x distantziara ebakitzen badugu, sekzioan agertzen diren esfortzuak 14.13.c. irudikoak izango dira. Momentu makurtzailea ordeztuz, hauxe edukiko dugu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = -\frac{P(y - \delta - e)}{EI_z}, \tag{14-53}$$

hau da,

$$y'' + \frac{P}{EI_z} y = \frac{P(\delta + e)}{EI_z}. \tag{14-54}$$

Aurreko atalean bezala $k^2 = P/EI_z$ konstantea erabiliz, bigarren mailako ekuazio diferentzial hau lortuko dugu:

$$y'' + k^2y = k^2(\delta + e). \quad (14-55)$$

Horren soluzioa honako hau da:

$$y = A\sin kx + B\cos kx + (\delta + e). \quad (14-56)$$

Mugako baldintzak aplikatuz, integrazio-konstanteen balioak lor ditzakegu. Baldintza horiek jarraian agertzen direnak dira:

$$\begin{aligned} y'_{x=0} &= Ak\cos kx - Bk\sin kx = Ak = 0 \Rightarrow A = 0, \\ y_{x=0} &= B\cos kx + \delta + e = B + \delta + e = 0 \Rightarrow B = -(\delta + e), \\ y_{x=L} &= (\delta + e)(1 - \cos kL) = \delta. \end{aligned} \quad (14-57)$$

Hirugarren ekuazioa askatuz:

$$\delta = e \frac{(1 - \cos kL)}{\cos kL} = e \left(\frac{1}{\cos kL} - 1 \right). \quad (14-58)$$

Beraz, kurba elastikoaren ekuazioa hauxe izango da:

$$y = e \frac{1 - \cos kx}{\cos kL}. \quad (14-59)$$

Azter dezagun sakonago (14-59) espresioa, mutur askearen desplazamendua nola aldatzen den aztertuz. Kasu idealean, hau da, indarra eta ardatza lerrokatuta daudenean, 14.13. irudiko zutabearen karga kritikoaren balioa honako hau da:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}. \quad (14-60)$$

Bestalde, (14-29) ekuazioa gogoratuz, hauxe idatz dezakegu:

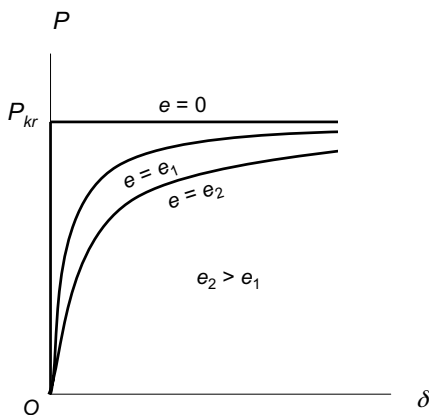
$$kL = \sqrt{\frac{P}{EI_z}} L = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}}}, \quad (14-61)$$

eta δ desplazamendua ematen digun (14-58) espresioan ordeztuz:

$$\delta = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}}} \right) - 1 \right]. \quad (14-62)$$

Espresio horri eta itxura berekoei *sekantearen formula* deritze, funtzio trigonometriko hori daramatelako. Hain zuzen, 14.14. irudian (14-62) ekuazioaren adierazpen grafiko bat agertzen da, non δ desplazamendua eta P indarra nola aldatzen diren ikus daitekeen, eszentrikotasunaren balio desberdinentzat. Konpresio-indarra eszentrikoki aplikatuta dagoen zutabeetan, indarra karga kritikora iritsi baino lehenago, ardatza deformatzen hasten da, Euler-en zutabeetan gertatzen ez dena. Hasieran, deformazio hori txikia da eta poliki

hazten da, baina konpresio-indarra karga kritikora gertutzen den heinean, deformazioa gero eta azkarrago handitzen da. Indarra P_{kr} baliotik oso gertu dagoenean, deformazioak infinitura jotzen du, (14-62) ekuaziotik ondoriozta daitekeen bezala, eszentrikotasunaren balioa edozein delarik ere. Hori dela-eta, zutabe errearen erresistentzia Euler-en zutabe teorikoarena baino txikiago da beti, eszentrikotasunaren balioa txikia bada ere.



14.14. irudia.

Deformazioaren balioa eszentrikotasunaren menpe dago, noski. Horrela, eszentrikotasuna handia denean, δ desplazamendua ere handia da, konpresio-indarra txikia izan arren. Eszentrikotasuna txikia bada, aldiz, deformazioak ez dira hain nabariak indarra karga kritikora iristen ez den bitartean. Aipagarria da δ desplazamenduaren eta P indarraren arteko erlazioa ez dela proportzionala. Beraz, materialaren portaera elastiko lineala izan arren, ezin aplikatu daiteke gainezarpen-printzipioa.

Ikus dezagun zer gertatzen den zutabearen luzera txikia dela suposatuz gero. Zutabea laburra bada, kL balioa ere txikia izango da. Ondorioz, espresio honen kosinua honelaxe hurbil dezakegu:

$$\cos kL \approx 1 - \frac{k^2 L^2}{2} \tag{14-63}$$

Emaitza hori (14-58) ekuazioko zenbatzailean ordeztuz, eta izendatzailean $\cos kL \approx 1$ eginez, hauxe lortuko dugu:

$$\delta = e \frac{(1 - \cos kL)}{\cos kL} \approx e \frac{k^2 L^2}{2}, \tag{14-64}$$

eta $k^2 = P/EI_z$ denez,

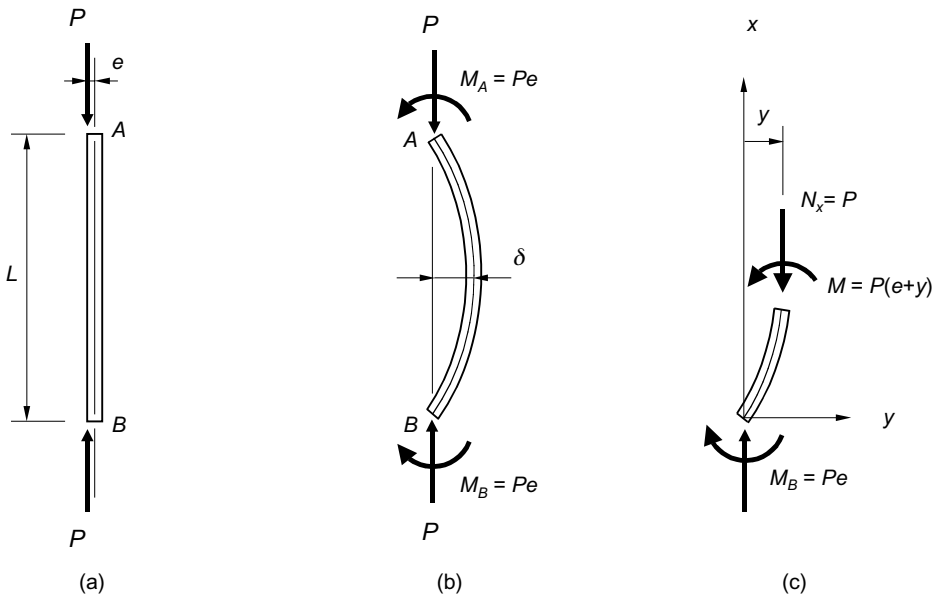
$$\delta = e \frac{(1 - \cos kL)}{\cos kL} \approx \frac{PeL^2}{2EI_z}, \tag{14-65}$$

hau da, muturrean $M = Pe$ momentua aplikatuta daukan hegalkinaren desplazamendua. Beraz, luzera txikia denean, gilbordura alde batera utz dezakegu, eta deformazioa orain arte

egin izan dugun bezala azter dezakegu, ezegonkortasun-arazoak kontuan hartu gabe. Alde-rantziz, luzera handia bada, gezia ez da indarrarekiko proportzionala, eta (14-58) ekuazioan ikusten den bezala, askoz azkarrago hazten da. Konpresio-indarra karga kritikora hurbiltzen denean, gezia oso handia izan daiteke, eta isurpen- edo haustura-mugak gaindituko dituen deformazioa agertuko dela itxaro daiteke.

14.6. SEKANTEAREN FORMULA

Aurreko azpiatalean gilbordura-tentsio onargarria (σ_{onarg}^g) kalkulatzeko era bat ikusi dugu, tentsio kritikoa segurtasun koefizienteaz zatituz. Horixe da, hain zuzen, metodo horren desabantaila, segurtasun-koefizientearen balioa aukeratu behar delako. Ikus dezagun orain tentsio onargarria kalkulatzeko beste era bat, goian egin dugun eszentrikotasunaren garapenean oinarritzen dena. Kasurako, 14.4.a. irudian konpresio eszentrikoaren eraginpean dagoen zutabe bat daukagu. Preseski, 14.4.b. irudian zutabe horren deformazioa ageri da.



14.15. irudia.

Zutabea sekzio batean ebaki ondoren, oreka-ekuazioak aplikatuz edozein sekzioko momentu makurtzailearen balioa kalkula dezakegu:

$$M_z = P(y + e). \quad (14-66)$$

Beraz, kurba elastikoaren bigarren deribatua eta momentu makurtzailea erlazioztatzen dituen ekuazio diferentziala hauxe izango da:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = -\frac{P(y + e)}{EI_z}, \quad (14-67)$$

hots,

$$y'' + \frac{P}{EI_z} y = -\frac{Pe}{EI_z}. \quad (14-68)$$

Kasu horretan, bigarren mailako ekuazio diferentzial hau lortuko dugu:

$$y'' + k^2 y = -k^2 e. \quad (14-69)$$

Ekuazio diferentzial horrentzat ere, aurreko kasuetan egin dugun bezala, soluzio hau proposatuko dugu:

$$y = A \sin kx + B \cos kx - e, \quad (14-70)$$

mugako baldintza hauekin:

$$y_{x=0} = B \cos kx - e = 0 \Rightarrow B = e, \quad (14-71)$$

$$y_{x=L} = A \sin kL + e(\cos kL - 1) = 0 \Rightarrow A \sin kL = e(1 - \cos kL).$$

Bestalde, honako bi espresio trigonometriko hauek gogoratu:

$$\begin{aligned} \sin kL &= 2 \sin \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2}, \\ \sin^2 \frac{kL}{2} &= \frac{1 - \cos kL}{2}, \end{aligned} \quad (14-72)$$

honelaxe labur daiteke (14-71) espresioa:

$$A = e \tan \frac{kL}{2}. \quad (14-73)$$

Azkenik, A eta B balioak ordeztuz, kurba elastikoaren balioa lortuko dugu:

$$y = e \left(\tan \frac{kL}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right). \quad (14-74)$$

Gezi handiena $x = L/2$ sekzioan agertzen da. Koordenatu hori (14-74) ekuazioan ordeztuz, sinplifikatu ondoren, desplazamendu maximoa hauxe izango da:

$$\delta = e \left(\sec \frac{kL}{2} - 1 \right), \quad (14-75)$$

eta $k^2 = P/EI_z$ dela gogoratu,

$$\delta = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right]. \quad (14-76)$$

Ikusten den bezala, aurreko azpiataleko espresioaren oso antzekoa lortu dugu berriro ere. Bestalde, 14.4. irudiko zutabearen sekziarik zigortuena C deitu duguna da, hots, erdiko sekzioa. Sekzio horretako tentsio normal handiena kalkulatzeko, ardatzeko indarraren eta momentu makurtzailearen eraginak batuko ditugu:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z}, \quad (14-77)$$

non W_z delakoa sekzioaren erresistentzia-modulua baita. Momentu maximoaren balioa hauxe izango da:

$$M_{\max} = P(\delta + e), \quad (14-78)$$

eta tentsio maximoa, honako hau:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{P}{A} + \frac{P(\delta + e)}{W_z}. \quad (14-79)$$

Biraketa-erradioaren definizioa gogoratzuz ($I_z = Ai^2$), (14-79) adierazpeneko tentsio maximoa honelaxe idatz dezakegu:

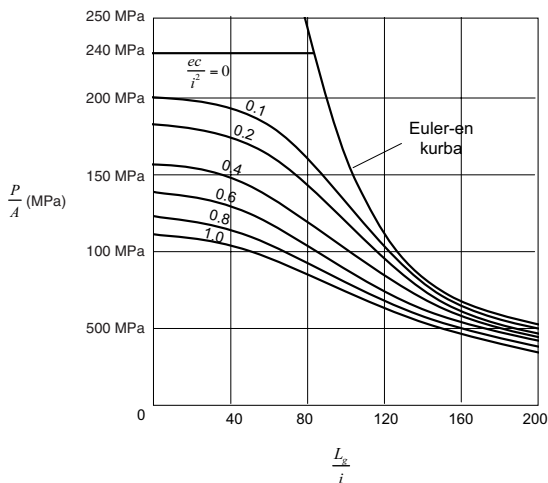
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{(\delta + e)c}{i^2} \right], \quad (14-80)$$

non c delakoa sekzioan urrunen dagoen zuntzaren y koordinatua baita, hots, y_{\max} . Gezi maximoaren balioa (14-80) espresioan sartuz:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{i^2} \sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} \frac{L}{2} \right) \right], \quad (14-81)$$

eta $I_z = Ai^2$ eginez,

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{i^2} \sec \left(\sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L}{2i} \right) \right]. \quad (14-82)$$



14.16. irudia.

Adibide gisa, materiala harikorra balitz, tentsio maximoa isurpen-tentsioaren azpitik egon beharko litzateke. Beraz, $\sigma_{\max} = \sigma_f$ eginez, isurpena sortuko zuen P indarra kalkula dezakegu:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_f}{1 + \frac{ec}{i^2} \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_g}{2i}\right)}, \quad (14-83)$$

non L luzera L_g gilbordura-luzerarekin ordeztu dugun, espresio hori mugako baldintza desberdinak dituzten habeetan ere aplikagarria izan dadin. Espresio horri *sekantearen formula* deritzo, eta isurpen-tentsioa sortzen duen konpresio-indarra kalkulatzeko balio du, $\lambda = L_g/i$ lerdentasunaren eta ec/i^2 erlazioaren funtzioan. Nolanahi den, P/A espresioa berdintzaren bi aldeetan ageri denez, ekuazio traszendente hau askatzeko, zenbait iterazio egin beharko genituzke, edo adierazpen grafikoetan oinarritu. Adibidez, 14.16. irudian 240 MPa-ko isurpen-tentsioa duen altzairu batekin eginiko zutabe biartikulatu baten adierazpena aurkezten da, lerdentasunaren eta ec/i^2 erlazioaren balio desberdinentzat. Grafiko horren bidez tentsio kritikoa kalkulatu ondoren, nahikoa da balio hori segurtasun-koefizienteaz zatitzea gilbordura-tentsio onargarria lortzeko. Oraingoan, ordea, segurtasun-koefiziente konstante bat aukera dezakegu, zeren eszentrikotasunak sortzen duen ziurgabetasuna kontuan hartu baitugu jadanik. Segurtasun-koefizientearen balio zentzudun bat $n = 2$ izan daiteke.

Lerdentasuna txikia denean, sekantearen balioa unitatea da gutxi gorabehera. Ondorioz, (14-83) ekuazioa honelaxe geratuko litzateke:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_f}{1 + \frac{ec}{i^2}} \Rightarrow \sigma_f = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{ec}{i^2}\right) = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I_z}, \quad (14-84)$$

hau da, gilbordurak sortzen duen gezia kontuan hartuko ez bagenu erabiliko genukeen espresioa. Era berean, lerdentasuna handia bada, 14.5. irudiko kurbak Euler-en hiperbolaren antzekoak izango lirateke; beraz, eszentrikotasunaren eragina mespretxagarria litzateke, zeren zutabearen luzeraren eragina gailenduko bailitzateke.

Badago, halere, sekantearen formula aplikatzeko orduan agertzen den arazo bat: gehienetan eszentrikotasunaren balioa ezezaguna izaten da, eta kalkulaten nahiko zaila. Kontuan hartu behar da, gainera, zutabe errealetan beste hainbat zehazgabetasun topa ditzakegula. Esate baterako, zutabearen ardatzak hasierako deformazio bat eduki dezake, edo euskarrietan akatsak egon daitezke, edo materiala ez da zeharo homogenea, etab. Zehazgabetasun horien guztien balioak aldakorrek izaten dira zutabe batzuetatik besteetara, eta saiakuntzetako emaitzak nahiko barreiaturik ager daitezke. Halere, sekantearen formula konpresiopean dauden zutabeak kalkulatzeko era egokia da, eszentrikotasunaren eragina segurtasun-koefiziente baten bidez bakarrik kontuan hartu ordez. Dena den, eszentrikotasunaren balioa saiakuntzen bidez kalkulatu beharko dugu, ez baitago hori lortzeko espresio matematikorik. Adibidez, altzairuzko zutabeak kalkulatzeko orduan erabil daitezkeen balio bat $ec/i^2 = 0,25$ da.

Bukatzeko, esan dezagun zutabeek bestelako zehazgabetasun batzuk ere eduki ditzaketela. Esate baterako, konpresio-indarra sekzioaren grabitate-zentroan aplikatuta egon

arren, ardatza inperfektua izan daiteke eta okertuta egon; hots, hasierako deformazio bat eduki dezake. Akats hori duten zutabeentzat ere azpiatal honetan egin dugun antzeko prozedura matematikoa jarrai dezakegu, nahiz eta hemen ez dugun azalduko, gehiegi ez luzatzearren. Kasu horretan, kurba elastikoak sinusoide baten itxura duen hasierako deformazioa duela suposatzen da. Ondoren, goian erabili dugun prozedura bera jarraituko genuke, hau da, momentu makurtzailea ordezkatzu eta bigarren mailako ekuazio diferentziala askatuz.

14.7. ω KOEFIZIENTEEN METODOA

Zutabeen kalkulu praktikoa egiteko orduan, gorago aipatu ditugun metodoak erabil daitezke, alegia, Euler-Tetmajer-en kurbetan oinarritutako segurtasun-koefizientearen metodoa eta zutabeen zehaztasun-gabezia kontuan hartzen duen sekantearen formula. Halere, metodo horiek desabantaila garrantzitsu bat daukate: erabili beharreko segurtasun-koefizientea ezin kalkula daiteke erraz, saiakuntza esperimentalak eginez ez bada. Bestalde, Euler-en formula lerdentasun handiko zutabeetan soilik aplika daiteke. Zutabe ertainen kasuan kalkulua bihurriagoa da, portaera lineala galtzen den eremuan sartzen baikara; horregatik, kontu handiz ibili behar dugu kasu horretan.

Arazo horiek guztiak gainditu ahal izateko, zenbait formula proposatu dira; baina ez dago unibertsalki onartu den metodorik. Gaur egun, eskualde bakoitzeko arautegiak proposatzen dituen ereduak eta gomendioak jarraitzea da biderik gomendagarriena. Arau horiek *ω koefizienteen metodoa* izeneko teknikan oinarritzen dira. Duen garrantziagatik, metodo honen azalpenarekin bukatuko dugu gaia.

Metodo hori Dutheil-ek proposaturiko analisisian dago oinarriturik. Zutabeak eduki ditzakeen akats eta zehazgabetasun guztiak (hasierako deformazioak, indarren eszentrikotasuna, euskarrien mugimenduak, etab.) hasierako deformazio sinusoidal baten barnean bil-tzen dira. Hasierako kurba elastiko sinusoidal horren gezi maximoari δ deituko diogu, eta ondoko formula erdienpiriko honen bidez kalkula daiteke:

$$\delta = K \frac{P}{P_{kr}} \frac{W_z}{A}, \quad (14-85)$$

non K delakoa konstante bat den eta P_{kr} delakoa Euler-en karga kritikoa. Horrez gain, aplikatutako P konpresio-indarraren funtzioa den anplifikazio-koefiziente bat erabiliko dugu (μ), honelaxe:

$$\delta = \mu K \frac{P}{P_{kr}} \frac{W_z}{A}. \quad (14-86)$$

Anplifikazio-faktorea kalkulatzeko, espresio hau proposatzen da:

$$\mu = \frac{\sigma'_{kr}}{\sigma'_{kr} - \sigma}, \quad (14-87)$$

non $\sigma = P/A$ den eta σ'_{kr} delakoa txikiagotutako tentsio kritikoa den. Tentsio hori b koefiziente esperimental baten bidez kalkulatzeko da, era honetan:

$$\sigma'_{kr} = \frac{\sigma_{kr}}{1+b} \quad (14-88)$$

Altzairuzko zutabeentzat, K eta b koefizienteek hauxe balio dute:

$$b = K = 0,3. \quad (14-89)$$

Beraz, hasierako gezi amplifikatua honelaxe geratzen da:

$$\delta = \frac{0,3\sigma}{\sigma_{kr} - 1,3\sigma} \frac{W_z}{A} \quad (14-90)$$

Barraren erdiko sekzioaren momentua, 14.15. irudiko zutabearentzat egin genuen antzera, hauxe izango litzateke:

$$M_{\max} = P\delta. \quad (14-91)$$

Adierazpen horretan (14-90) ekuazioko gezia ordeztuz:

$$M_{\max} = \frac{0,3\sigma^2}{\sigma_{kr} - 1,3\sigma} W_z. \quad (14-92)$$

Beraz, erdiko sekzioan dagoen tentsio normal handiena hauxe izango da:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} \cdot y_{\max}}{I_z} = \sigma \frac{\sigma_{kr} - \sigma}{\sigma_{kr} - 1,3\sigma} \quad (14-93)$$

Tentsio maximo hori altzairuan onartuko dugun tentsio maximoa izango da, $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{onarg}}$. Ondorioz, $\sigma = P/A$ da gilbordura kontuan hartuta aplika daitekeen tentsioa, hots, σ_{onarg}^g :

$$\sigma_{\text{onarg}} = \sigma_{\text{onarg}}^g \frac{\sigma'_{kr} - \sigma_{\text{onarg}}^g}{\sigma'_{kr} - 1,3\sigma} \quad (14-94)$$

eta σ_{onarg}^g askatuz:

$$\sigma_{\text{onarg}}^g = \frac{1}{2} (\sigma_{kr} + 1,3\sigma_{\text{onarg}}) - \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_{kr} + 1,3\sigma_{\text{onarg}})^2 - \sigma_{\text{onarg}} \sigma_{kr}} \quad (14-95)$$

Beraz, zutabe bat egokia den erabakitzeko, ondoko erlazioa betetzen den ala ez ikusi beharko genuke:

$$\frac{P}{A} \leq \sigma_{\text{onarg}}^g \quad (14-96)$$

Izatez, (14-95) espresioa altzairu-motaren eta lerdentasunaren funtzioa da. Kalkuluak errazteko, *gilbordura-koefizienteak* (ω) erabiltzen dira, ondoko eran definiturikoak:

$$\omega = \frac{\sigma_{\text{onarg}}}{\sigma_{\text{onarg}}^g} \quad (14-97)$$

Koefiziente horiek altzairu desberdinentzat prestatutako tauletan topa ditzakegu, lerdentasunaren funtzioan, eta unitatea baino handiagoak dira beti. Aztertzen ari garen zutabeari dagokion ω koefizientea lortu ondoren, aplika daitekeen konpresio-indarra kalkulatzeko, nahikoa da erlazio hau erabiltzea:

$$\frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_{\text{onarg}}}{\omega} \quad (14-98)$$

Ikusten den bezala, ω koefizienteen metodoa oso eroso da, zeren gilborduraren kalkulua orain arte bezala egiten jarrai baitezakegu. Hau da, nahikoa da pieza laburrentzat erabili ohi dugun tentsio onargarria koefiziente horren bidez murriztea, eta aplikatutako konpresio-indarra muga hori baino handiagoa edo txikiagoa den ikustea.

Bibliografía

- Beer, F. eta Russell, E. (1982): *Mecánica de materiales*, McGraw Hill, New York.
- Bickford, W. (1998): *Advanced mechanics of materials*, Addison-Wesley, New York.
- Boresi, A.; Schmidt, R. eta Sidebottom, O. (1993): *Advanced mechanics of materials*, John Wiley & Sons, New York.
- Budynas, R. (1977): *Advanced strength and applied stress analysis*, McGraw Hill, New York.
- Caddell, R. (1980): *Deformation and fracture of solids*, Prentice Hall, New Jersey.
- Chajes, A. (1974): *Principles of structural stability theory*, Prentice Hall, New Jersey.
- Chung, T. (1988): *Continuum mechanics*, Prentice Hall, New York.
- Courbon, J. (1968): *Tratado de resistencia de materiales*, Aguilar, Madrid.
- Feodosiev, V. (1980): *Resistencia de materiales*, Mir, Moscu.
- Fung, Y. (1965): *Foundations of solid mechanics*, Prentice Hall, New York.
- Garrido, J. eta Foces, A. (1994): *Resistencia de materiales*, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid, Valladolid.
- Gere, J. eta Timoshenko, S. (1986): *Mecánica de materiales*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Hearn, E. (1977): *Mechanics of materials*, Pergamon Press, Oxford.
- Oden, J. (1967): *Mechanics of elastic structures*, McGraw Hill, New York.
- Ortiz, L. (1998): *Elasticidad*, McGraw Hill, Madrid.
- Ortiz, L. (2002): *Resistencia de materiales*, McGraw Hill, Madrid.
- Paris, F. (2000): *Teoría de la elasticidad*, Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales de la Universidad de Sevilla, Sevilla.
- Popov, E. (2000): *Introducción a la mecánica de los sólidos*, Limusa, Mexico.
- Roark, J. eta Young, W. (2001): *Formulas for stress and strain*, McGraw Hill, New York.
- Rodríguez, J. (1991): *Materialen portaera elastikoa eta plastikoa*, Elhuyar, Donostia.
- Samartin, A. (1990): *Curso de Elasticidad*, Bellisco, Madrid.
- Sarriegi, A. (1989): *Materialen erresistentzia I*, Elhuyar, Donostia.
- Sarriegi, A. (1989): *Materialen erresistentzia II*, Elhuyar, Donostia.
- Singer, F. eta Pytel, A. (1980): *Strength of materials*, Harper & Row publishers, New York.
- Srinath, L. (1980): *Advanced mechanics of solids*, McGraw Hill, New Delhi.
- Tárrago, J. eta beste (2001): *Elasticidad y resistencia de materiales*, Sección de Publicaciones de la Escuela de Ingeniería de Bilbao, Bilbao.
- Tárrago, J. eta beste (2001): *Ampliación de resistencia de materiales*, Sección de Publicaciones de la Escuela de Ingeniería de Bilbao, Bilbao.
- Timoshenko, S. (1951): *Teoría de la Elasticidad*, Urmo, Madrid.

- Timoshenko, S. eta Gere, J. (1961): *Theory of elasticity*, McGraw Hill, New York.
- Torroja, A. (1967): *Elasticidad*, Dossat, Madrid.
- Ugural, A. eta Fenster, S. (1975): *Advanced strength and applied elasticity*, Elsevier, New York.

Ingeniaritza Sailean argitaratu diren beste liburu batzuk

Ingeniaritza termikoa

Iñaki Gómez eta J. L. Gutierrez de Rozas
2003an argitaratua
ISBN: 84-8438-037-8