

TEMA 1

FLEXIÓN DESVIADA Y FLEXIÓN COMPUESTA. SECCIÓN HETEROGÉNEA

1.1. FLEXIÓN DESVIADA O ASIMÉTRICA

En el estudio de la flexión de una pieza prismática realizado hasta el momento, se ha supuesto que las cargas se encontraban contenidas en un plano que pasaba por el eje de la pieza y que además coincidía con uno de los planos principales de flexión, habitualmente el definido por el eje x de la pieza y el eje principal y de la sección. A este tipo de flexión se le suele denominar **flexión simétrica**. Como consecuencia de esa disposición relativa entre cargas y pieza, la flexión simétrica se caracteriza porque sólo aparece flexión en ese plano xy .

En ocasiones sucede que el plano en el que están contenidas las cargas, aún pasando por el eje de la pieza, no coincide con ninguno de los planos principales de flexión. Entonces a la flexión que se origina se la denomina **flexión desviada o asimétrica**. Puesto que el plano de cargas contiene al eje x de la pieza, ésta no trabajará a torsión. Ésta es la forma como trabaja la viga de la fig. 1.1.

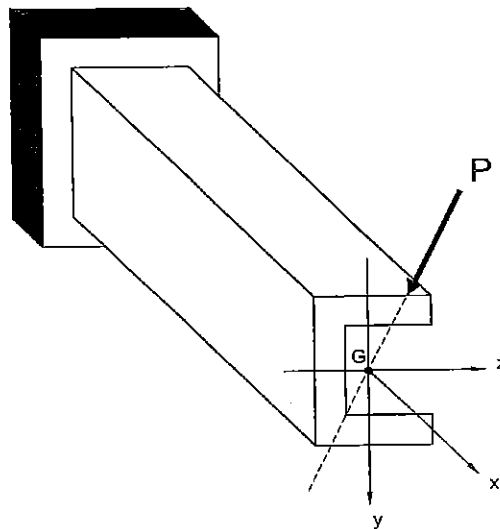


Figura 1.1. Flexión desviada

El problema de flexión desviada se puede abordar aplicando el principio de superposición. Considerando como ejes principales los ejes y y z , las acciones exteriores se descomponen según los dos planos principales xy y xz , y se resuelven dos problemas independientes de flexión simétrica. La solución final será la suma de las dos soluciones individuales.

Para ilustrar la metodología a seguir, considérese la viga en voladizo de la fig. 1.2, empotrada en un extremo y libre en el otro, de longitud L y sección rectangular $b \times h$, sometida en su extremo libre a una carga P contenida en el plano de la sección y cuya línea de acción pasa por el centro de gravedad de la misma y forma un ángulo α con el eje principal y , tal como se indica.

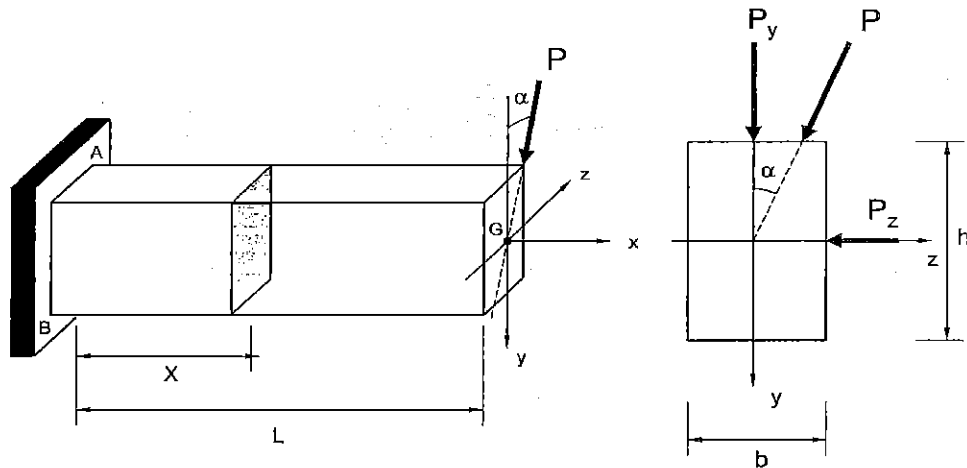


Figura 1.2. Flexión desviada: descomposición en dos flexiones simétricas

La carga P se puede descomponer en las direcciones principales y y z . Su efecto es el mismo que resulta de superponer los efectos de las respectivas componentes P_y y P_z , cuyos valores son:

$$\begin{aligned} P_y &= P \cdot \cos \alpha \\ P_z &= P \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (1.1)$$

En una sección cualquiera definida por su distancia x al empotramiento, los esfuerzos de sección serán los indicados en la fig. 1.3, es decir:

$$\begin{aligned} V_y &= P_y = P \cdot \cos \alpha \\ V_z &= P_z = P \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ M_y &= P_z \cdot (L - x) = P \cdot (L - x) \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ M_z &= P_y \cdot (L - x) = P \cdot (L - x) \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.2)$$

Los esfuerzos cortantes darán lugar a tensiones tangenciales y los momentos flectores a tensiones normales. Puesto que en secciones macizas, tal como la que

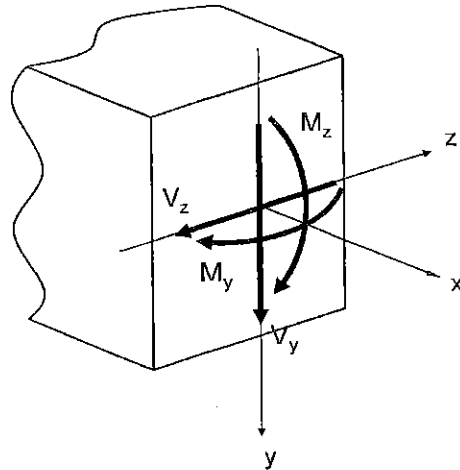


Figura 1.3. Esfuerzos de sección en flexión desviada

estamos considerando, habitualmente no se tienen en cuenta las tensiones tangenciales debidas a los cortantes ya que son, por lo general, de un orden de magnitud bastante más pequeño que las tensiones normales debidas a los flectores, nos centraremos únicamente en el estudio de éstas últimas. La tensión normal total en un punto cualquiera de coordenadas (y, z) en esa sección arbitraria será:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(M_y)} + \sigma_{xx}^{(M_z)} = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} = \frac{P \cdot (L-x) \cdot \text{sen} \alpha \cdot z}{I_y} - \frac{P \cdot (L-x) \cdot \text{cos} \alpha \cdot y}{I_z}$$

es decir:

$$\sigma_{xx} = P \cdot (L-x) \cdot \left(\frac{z \cdot \text{sen} \alpha}{I_y} - \frac{y \cdot \text{cos} \alpha}{I_z} \right) \quad (1.3)$$

Y así, por ejemplo, las tensiones en los puntos A y B (cfr. fig. 1.2) en la sección de empotramiento son, respectivamente:

$$\begin{aligned} A \left(0, -\frac{h}{2}, \frac{b}{2} \right): \quad \sigma_{xx}^{(A)} &= P \cdot L \cdot \left(\frac{b \cdot \text{sen} \alpha}{2I_y} + \frac{h \cdot \text{cos} \alpha}{2I_z} \right) \\ B \left(0, \frac{h}{2}, -\frac{b}{2} \right): \quad \sigma_{xx}^{(B)} &= P \cdot L \cdot \left(-\frac{b \cdot \text{sen} \alpha}{2I_y} - \frac{h \cdot \text{cos} \alpha}{2I_z} \right) = -\sigma_{xx}^{(A)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Por tanto, en A se suman las tracciones debidas a ambos momentos flectores y en B las compresiones.

Como estamos viendo, la flexión asimétrica puede considerarse como la suma de dos flexiones simétricas, es decir, de dos flexiones que tienen lugar en los planos principales de flexión xy y xz , siendo M_z y M_y los momentos respectivos. La superposición de estas dos flexiones da lugar a una única flexión. Cabe preguntarse en qué plano tiene lugar esta flexión y cuál es el valor del momento flector M resultante. Este valor será [cfr. ec. (1.2)]:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = P \cdot (L - x) \quad (1.5)$$

Como se indica en la fig. 1.4, este momento forma un ángulo θ con el eje z , de valor:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{M_y}{M_z} = \frac{P \cdot L \cdot \operatorname{sen} \alpha}{P \cdot L \cdot \operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \theta = \alpha \quad (1.6)$$

En otras palabras, el momento resultante M está contenido en el plano de carga.

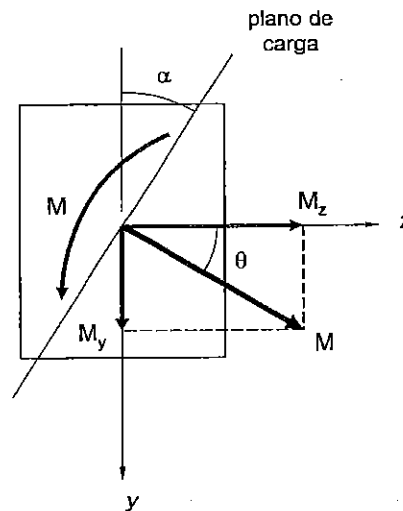


Figura 1.4. Momento resultante y plano de carga

Se puede determinar también la ecuación del eje neutro en una sección cualquiera. Puesto que la característica de dicho eje es que en todos sus puntos la tensión normal ha de ser nula, de (1.3) se obtiene:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{z \cdot \operatorname{sen} \alpha}{I_y} - \frac{y \cdot \operatorname{cos} \alpha}{I_z} = 0 \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \cdot \frac{I_z}{I_y} \quad (1.7)$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el centro de gravedad y tiene una pendiente β , tal que (fig. 1.5):

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{I_z}{I_y} \quad (1.8)$$

Esta ecuación nos indica que *el eje neutro no será, por lo general, perpendicular al plano de carga*. Únicamente lo será ($\alpha = \beta$) cuando se cumpla: $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ (casos de flexión simétrica), ó $I_y = I_z$.

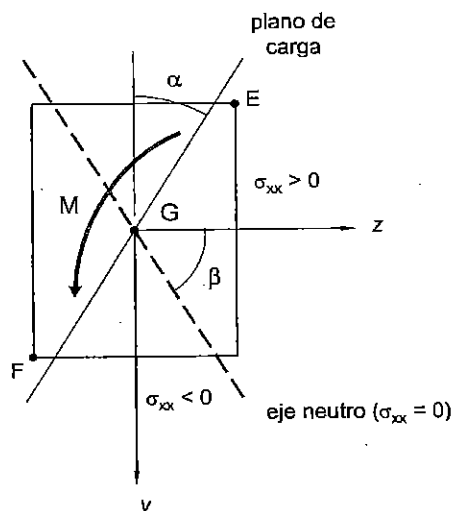


Figura 1.5. Eje neutro y plano de carga

Conviene recordar que los puntos de la sección situados a un lado del eje neutro tienen tensión de tracción y los situados al otro lado tensión de compresión. Y también que todos los puntos equidistantes del eje neutro (los de cualquier línea paralela a dicho eje) tienen la misma tensión. Por tanto, las tensiones máximas se presentarán en los puntos más alejados de este eje (puntos E y F de la fig. 1.5).

En el ejemplo que estamos considerando fácilmente se puede comprobar otra característica general del eje neutro y es que, por definición, es perpendicular al plano en el que tiene lugar la deformación (plano que contiene a la elástica). Para ello basta con estudiar la deformación en una sección cualquiera: más concretamente, la dirección en la que tiene lugar el desplazamiento de dicha sección.

Por razones de simplicidad consideremos la flecha en una sección concreta: el extremo libre. Esta flecha se puede obtener por superposición de las flechas en dicha sección correspondientes a las dos flexiones simétricas (fig. 1.6); es decir:

$$\delta_y = \frac{P_y \cdot L^3}{3EI_z} ; \quad \delta_z = \frac{P_z \cdot L^3}{3EI_y} \quad (1.9)$$

con lo que la flecha resultante δ es:

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2} \quad (1.10)$$

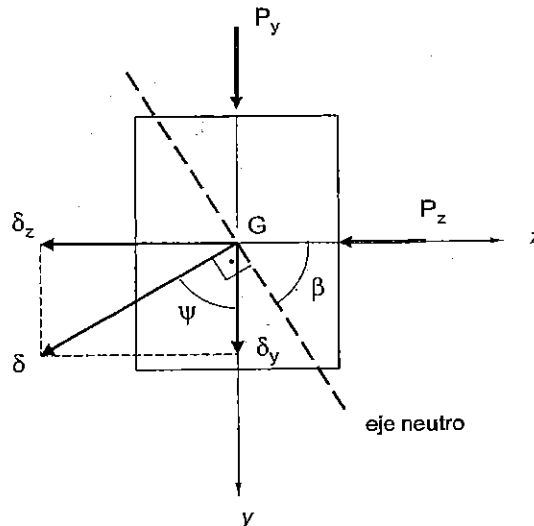


Figura 1.6. Plano de deformación y eje neutro

Por otra parte, teniendo en cuenta (1.1), se obtiene:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\delta_z}{\delta_y} = \frac{P_z}{P_y} \cdot \frac{I_z}{I_y} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{I_z}{I_y} = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \psi = \beta \quad (1.11)$$

donde se ha llamado ψ al ángulo que forma la traza del plano de deformación con el eje y . De (1.11) se concluye que el plano de deformación es perpendicular al eje neutro y, por consiguiente, en general no coincidirá con el plano de carga. Sí coinciden ambos planos, de carga y de deformación, cuando la flexión es simétrica. En efecto, de la aplicación de (1.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha = 0^\circ &\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \text{flexión en } xy \\ \alpha = 90^\circ &\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \infty = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \text{flexión en } xz \end{aligned}$$

En el caso particular en que la rigidez a flexión de la viga según sus dos planos principales sea muy diferente, por ejemplo, cuando la rigidez en el plano xy sea muy superior a la rigidez en el plano xz y, por tanto, $I_z \gg I_y$, entonces de la aplicación de (1.8) resulta:

$$\operatorname{tg} \beta \gg \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \beta \gg \alpha \quad (1.12)$$

y se comprueba que la deformación se produce principalmente en el plano xz (fig. 1.7), que es el plano de mayor flexibilidad. El eje neutro se aproxima entonces al eje y, y esto aunque el valor de α sea pequeño.

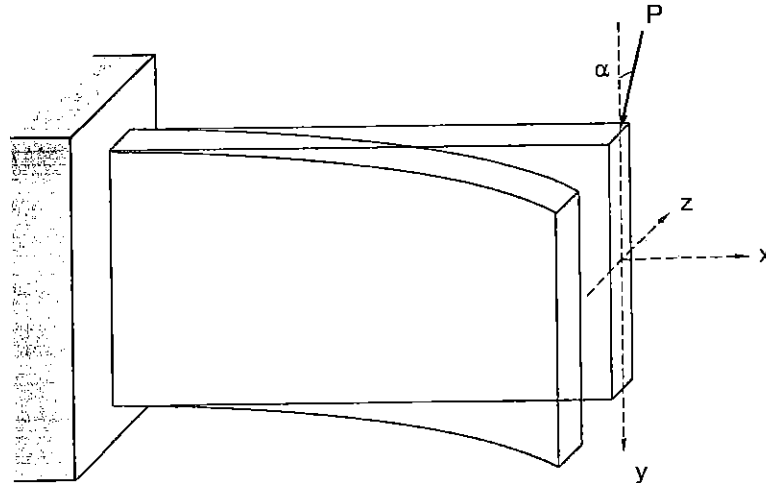


Figura 1.7. Flexión asimétrica con $I_z \gg I_y$

1.2. VIGAS DE SECCIÓN HETEROGÉNEA. MÉTODO DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA

Las *vigas de sección heterogénea* son aquellas cuya sección recta no es homogénea, sino que está formada por varios materiales diferentes. Tales son, por ejemplo, las vigas bimetálicas, las de hormigón armado, las llamadas vigas sandwich, etc. Sus respectivas secciones se representan en la fig. 1.8.

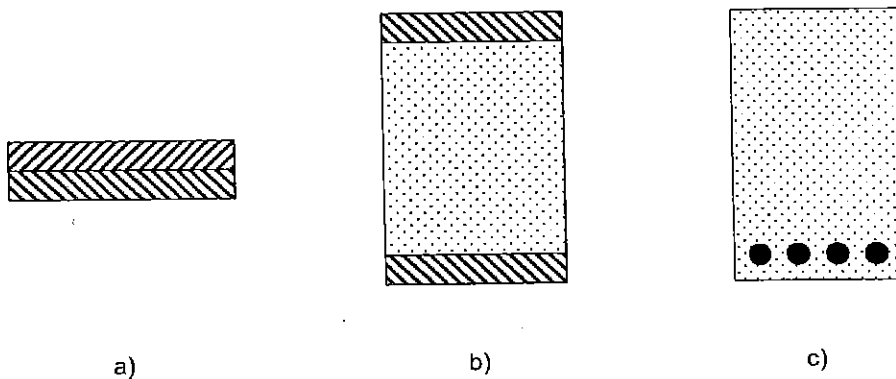


Fig. 1.8. Secciones rectas de vigas de sección heterogénea: a) viga bimetálica; b) viga sándwich; c) viga de hormigón armado

Las aplicaciones de este tipo de vigas son muy variadas. Por ejemplo, las vigas *sandwich*, formadas por dos placas delgadas de un material de alta resistencia dispuestas a ambos lados de un núcleo de otro material de baja resistencia y bastante más ligero, son muy útiles en aquellas aplicaciones en que se precise una combinación de poco peso y alta rigidez y resistencia. Con una *viga bimetálica* se puede diseñar un sencillo termostato: para ello basta unir longitudinalmente dos varillas de metales distintos y, por tanto, de diferente coeficiente de dilatación lineal. Al calentar el conjunto la diferencia de dilatación da lugar a una curvatura en esa barra bimetálica, curvatura que será proporcional al incremento de temperatura experimentado. Y es de sobra conocida la amplia utilización del *hormigón armado*. De hecho, el hormigón tiene su propia norma de cálculo, por lo que no le será de aplicación directa el procedimiento que a continuación se expondrá.

*El problema que interesa resolver es el **cálculo de la distribución de tensiones normales σ_{xx} y de deformaciones longitudinales ϵ_{xx} en el canto de la sección de una viga de sección heterogénea en flexión pura**, es decir, cuando el único esfuerzo de sección resultante es un momento flector M .*

Además de las hipótesis habituales de cálculo (comportamiento elástico lineal, pequeñas deformaciones, etc.), en el estudio de la flexión de vigas de sección heterogénea se supone que la unión entre los distintos materiales es perfecta y que por tanto, en la flexión, no existe deslizamiento relativo entre ellos. De esta forma se garantiza que las secciones transversales permanecen planas tras la deformación; por consiguiente, las deformaciones longitudinales ϵ_{xx} varían linealmente desde la parte superior a la parte inferior del canto de la sección. En la fig. 1.9.b se representa este diagrama lineal de deformaciones para una viga de dos materiales diferentes, designados como materiales 1 y 2, de módulos de elasticidad respectivos E_1 y E_2 (se supondrá, por ejemplo, $E_2 > E_1$).

Ahora bien, la discontinuidad de material que existe en la sección se manifiesta en el diagrama de tensiones normales σ_{xx} : este diagrama presenta una discontinuidad en la zona de interface de ambos materiales (fig. 1.9.c). Ocorre además, que la posición del eje neutro no es conocida de antemano (salvo en el caso particular de que exista doble simetría).

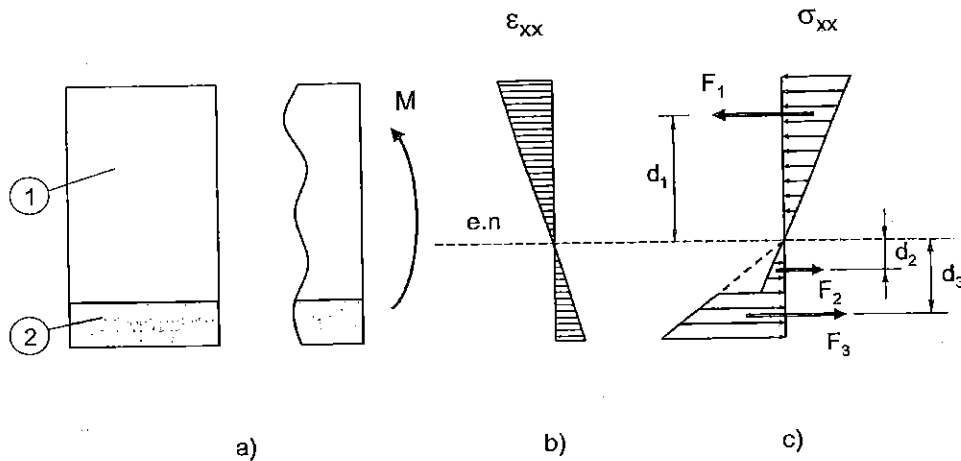


Figura 1.9. Viga de sección heterogénea de dos materiales. a) Sección transversal; b) diagrama de deformaciones longitudinales; c) diagrama de tensiones normales

La discontinuidad en el diagrama de tensiones normales tiene una explicación sencilla. Para ello consideremos dos puntos de la sección infinitamente próximos a la interface entre ambos materiales, estando cada uno de esos puntos a un lado de la misma. La relación entre las deformaciones longitudinales, idénticas para ambos puntos, y sus respectivas tensiones normales serán:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} ; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (1.13)$$

de donde:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \cdot \frac{E_2}{E_1} > \sigma_1 \quad (1.14)$$

ya que hemos supuesto $E_2 > E_1$.

Para determinar tanto la distribución de tensiones como la de deformaciones en el canto de la sección debido a la acción de un momento flector M , podría seguirse un procedimiento estrictamente basado en la equivalencia estática entre el momento flector aplicado y la distribución de tensiones resultante. Y así, para el caso de la sección heterogénea trabajando a flexión pura de la fig. 1.9:

$$\begin{aligned} \sum F_x = N_x = 0 & \Rightarrow F_1 - F_2 - F_3 = 0 \\ \sum M_x = 0 & \Rightarrow M = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde por F_i y d_i se representan resultantes parciales del diagrama de tensiones y las respectivas distancias de sus centros de gravedad al eje neutro. Es posible expresar ambas ecuaciones en función de tan sólo dos incógnitas (por ejemplo, una tensión del diagrama de tensiones y la posición del eje neutro). Resolviendo (1.15), podríamos calcular esas dos incógnitas y, por consiguiente, determinar tanto la distribución de tensiones como la de deformaciones.

Aunque es indudable la generalidad y sencillez del método que se acaba de exponer, aún es más sencillo y resulta particularmente útil para la resolución de vigas de sección heterogénea la aplicación del denominado *método de la sección transformada* que a continuación se verá.

Método de la sección transformada

Se trata de un procedimiento de cálculo para vigas de sección heterogénea que trabajan a flexión, que se basa en la transformación de la sección recta de la viga en una sección equivalente homogénea, de un solo material. Esta última, denominada ***sección transformada***, se analiza con los procedimientos usuales de la flexión de vigas de un solo material.

La condición de equivalencia que se impone es doble: *la sección transformada debe tener la misma resistencia y la misma rigidez que la sección original*; es decir, ambas secciones deben transmitir los mismos esfuerzos y experimentar la misma deformación. Esta igualdad de deformación implica, naturalmente, la misma posición del eje neutro en la sección original y en la transformada.

Consideremos de nuevo la sección heterogénea de dos materiales representada en la fig. 1.10.a, en la que $E_2 > E_1$, y vamos a obtener las dimensiones de la sección equivalente de un solo material, por ejemplo el 2. Para ello bastará sustituir el material 1 de la sección original por una cantidad equivalente de material 2; al ser este último más resistente ($E_2 > E_1$) hará falta menos cantidad de material. Y puesto que la sección original tenía simetría respecto del plano de cargas (plano xy), también la tendrá la sección transformada, cuya forma geométrica vendrá a ser la de una T, tal como se indica en la fig. 1.10.b, cuya única dimensión desconocida es el ancho del alma b_t .

Para calcular este ancho aplicamos las condiciones de igualdad de resistencia y de rigidez entre la sección real (r) y la transformada (t). La igualdad de resistencia implica

que elementos de área en las dos secciones situados a la misma distancia del eje neutro deben absorber el mismo esfuerzo; es decir:

$$dF_r = \sigma_1 \cdot b \cdot dy ; \quad dF_t = \sigma_t \cdot b_t \cdot dy$$

$$dF_r = dF_t \Rightarrow \sigma_1 \cdot b = \sigma_t \cdot b_t \Rightarrow b_t = b \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_t} \quad (1.16)$$

Y que ambas secciones tengan la misma rigidez a flexión quiere decir que tienen la misma deformación. Igualando el valor de la deformación longitudinal ε_{xx} en puntos situados a la misma distancia del eje neutro, resulta :

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_1}{E_1} ; \quad \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_2}$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t \Rightarrow \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_t}{E_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_t} = \frac{E_1}{E_2} = n \quad (1.17)$$

donde n es la *relación de módulos de elasticidad* de los materiales de la sección.

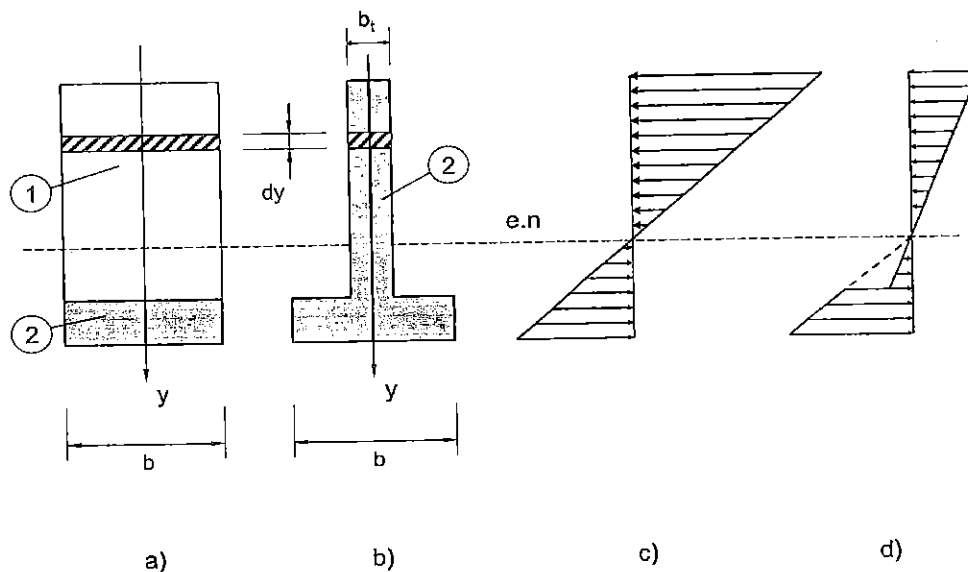


Figura 1.10. Método de la sección transformada

Combinando las expresiones (1.16) y (1.17) se puede obtener el espesor b_t de la sección transformada:

$$b_t = b \cdot \frac{E_1}{E_2} = b \cdot n \quad (1.18)$$

así como la relación que existe entre la distribución de tensiones en la sección real y en la sección transformada:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_t \\ \sigma_1 &= \sigma_t \cdot n = \sigma_t \cdot \frac{E_1}{E_2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

En resumen, esa viga de sección rectangular y heterogénea de dos materiales 1 y 2 (fig. 1.10.a), se puede calcular como una viga de sección en T de un solo material, el 2 en este caso (fig. 1.10.b), sometida al mismo momento flector M. Resuelto este problema, las tensiones reales en la parte de material 1 se obtienen multiplicando la tensión ficticia σ_t de la sección transformada por la relación modular E_1/E_2 . Lógicamente, las tensiones en la parte del material 2, común a las dos secciones, serán las mismas. Y por otra parte, como consecuencia de las hipótesis de equivalencia, tanto el eje neutro como los diagramas de deformaciones de las dos secciones (real y transformada) son coincidentes.

En la fig. 1.10 se incluyen las distribuciones de tensiones tanto en la sección transformada (fig. 1.10.c) como en la sección real (fig. 1.10.d).

Obsérvese que en el ejemplo presentado las capas de los distintos materiales se disponen en sentido normal al plano de cargas, que también es el plano de flexión. A veces se presentan casos en los que la disposición de esas capas se realiza en sentido paralelo a dicho plano (fig. 1.11.a).

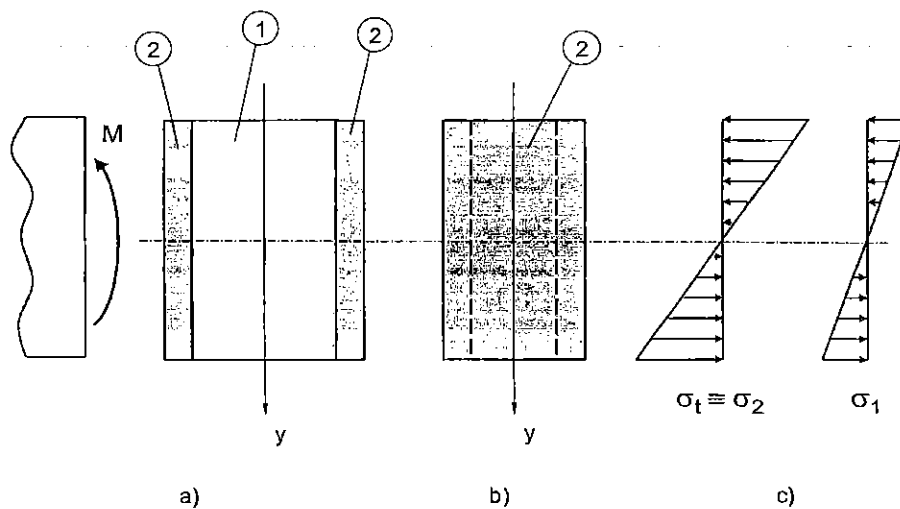


Figura 1.11. Viga de sección heterogénea con capas paralelas al plano de cargas

La resolución de vigas con esta disposición de los materiales mediante el método de la sección transformada es idéntica a la ya presentada. Al aplicar la equivalencia entre las secciones real y transformada (fig. 1.11.b), se obtienen las mismas ecuaciones (1.16)-(1.18) que en el caso anterior. La diferencia en los resultados en uno u otro caso estriba en que la distribución de tensiones se hace ahora continua a lo largo de cualquier línea paralela al eje y , y discontinua en toda línea paralela al eje z (dirección normal a las capas de materiales). Por consiguiente, para representar la distribución de tensiones en la sección real es preciso proporcionar dos distribuciones de tensiones en el sentido del canto de la sección: una para cada material (cfr. fig. 1.11.c).

1.3. FLEXIÓN COMPUESTA

Una viga está trabajando a flexión compuesta cuando en sus secciones transversales actúan conjuntamente momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiales. Es la sollicitación típica de vigas sometidas a cargas que no actúan transversalmente (fig. 1.12).

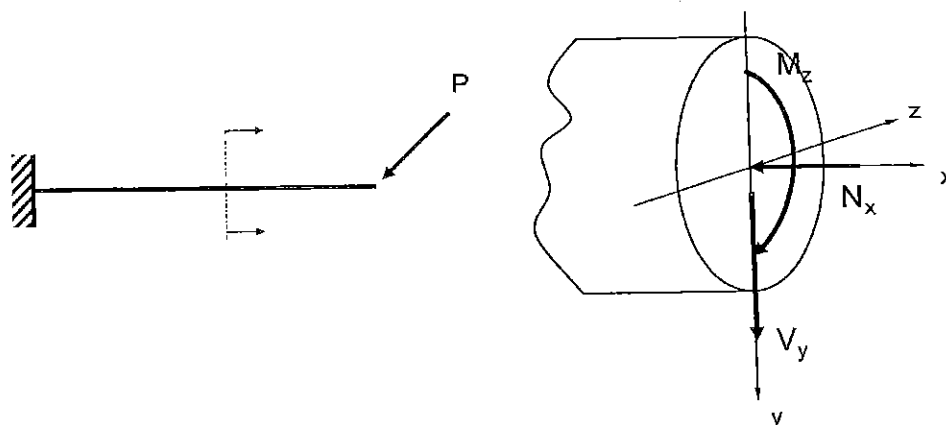


Figura 1.12. Flexión compuesta

Los esfuerzos cortantes dan lugar a tensiones tangenciales en tanto que el esfuerzo axial y los momentos flectores dan lugar a tensiones normales. *En lo que sigue supondremos flexión simétrica en el plano xy , y centraremos nuestra atención en la distribución de tensiones normales σ_{xx} . Esta distribución puede obtenerse por superposición de la debida al esfuerzo normal N_x y al momento flector M_z , es decir:*

$$\sigma_{xx} = \pm \frac{N_x}{A} \pm \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (1.20)$$

De esta expresión se deduce claramente una característica particular de la flexión compuesta: **el eje neutro ($\sigma_{xx}=0$) no pasa por el centro de gravedad de la sección ($y_G \neq 0$)**, como puede comprobarse en la fig. 1.13.

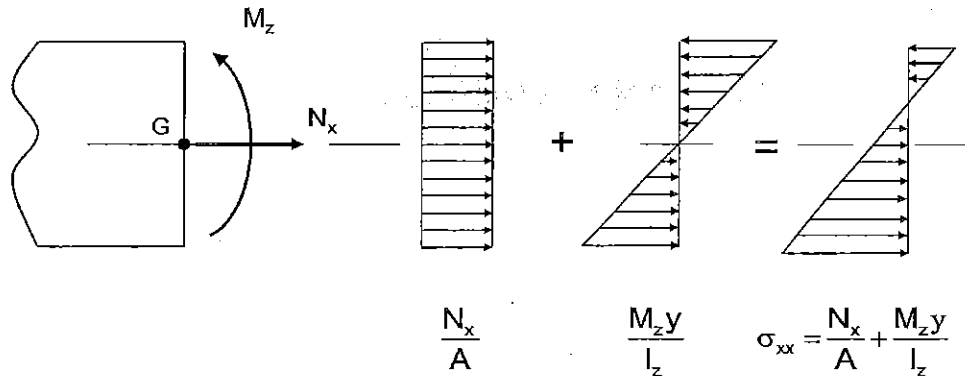


Figura 1.13. Tensiones normales en flexión compuesta

Por el interés particular que presenta, el siguiente apartado se centrará en el estudio de un caso particular de flexión compuesta: la denominada *compresión excéntrica*.

1.4. COMPRESIÓN EXCÉNTRICA. EJE NEUTRO. NÚCLEO CENTRAL

1.4.1. Compresión excéntrica

La compresión excéntrica se presenta cuando una pieza prismática recta está sometida a una carga de compresión paralela al eje de la pieza pero sin coincidir con él. En una sección cualquiera los esfuerzos se reducen a unos momentos flectores y a un esfuerzo axial de compresión (fig. 1.14). Puede considerarse como un caso particular de flexión compuesta en el que los esfuerzos cortantes son nulos.

Consideraremos dos casos diferentes, según que el punto de aplicación de la carga (al que en lo sucesivo se denominará *punto de ataque*) se encuentre sobre un eje principal de flexión o en un punto cualquiera de la sección.

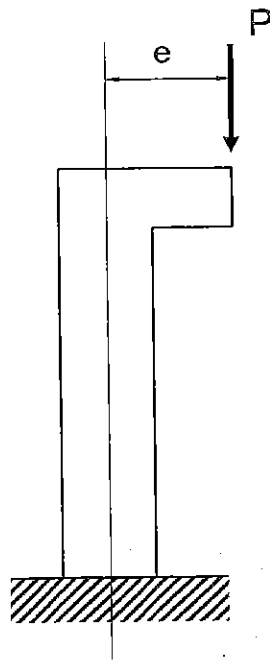


Figura 1.14. Compresión excéntrica

1) Punto de ataque sobre un eje principal de flexión

Es el caso de la fig. 1.15.a, donde se supone la carga de compresión aplicada en un punto del eje principal de flexión y , a una distancia e del centro de gravedad de la sección. En la fig. 1.15.b se representan los esfuerzos de sección, axial y flector, a que da lugar esta carga.

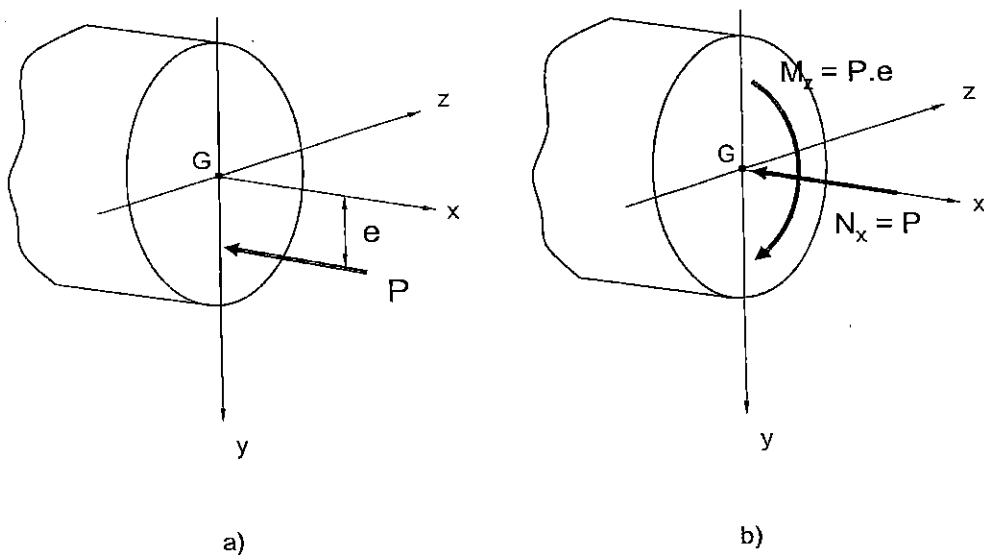


Figura 1.15. Compresión excéntrica: punto de ataque sobre un eje principal de flexión

La tensión normal resultante será:

$$\sigma_{xx} = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} = -\frac{P}{A} - \frac{P \cdot e \cdot y}{I_z} \quad (1.21)$$

A partir de esta expresión se puede obtener la ecuación del eje neutro. En efecto:

$$\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow -\frac{P}{A} - \frac{P \cdot e \cdot y}{I_z} = 0 \Rightarrow y = -\frac{I_z}{A \cdot e} = -\frac{i_z^2}{e} \quad (1.22)$$

donde i_z es el radio de giro de la sección respecto del eje z que, por definición, es:

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} \quad (1.23)$$

Como puede observarse, el eje neutro es una recta ($y = cte$), situada al otro lado del centro de gravedad G de donde está el punto de ataque (en este caso es $y < 0$ por ser $e > 0$). El eje neutro es por tanto paralelo al otro eje principal de flexión (eje z). Además, su posición es independiente del valor de la carga aplicada: sólo es función de la excentricidad y de las características geométricas de la sección.

Como se deduce de (1.22), a medida que aumenta la excentricidad de la carga, la posición del eje neutro se acerca al centro de gravedad de la sección. Y a la inversa, cuando la excentricidad se hace muy pequeña ($e \rightarrow 0$), la ecuación del eje neutro tiende a la recta $y = -\infty$; este valor correspondería al caso límite $e=0$, en el que el único esfuerzo de sección presente sería el esfuerzo axial.

Ejemplo. Para una sección rectangular de dimensiones $b \times h$ determinar en qué puntos del eje principal y puede estar aplicada una carga de compresión sin que en la sección aparezcan tensiones de tracción.

Para que toda la sección trabaje con tensiones normales del mismo signo es preciso que el eje neutro no corte a la sección, siendo la posición límite del mismo ($y = -h/2$) aquella en la que es tangente a la sección (fig. 1.16).

De acuerdo con (1.22) la excentricidad correspondiente a esta posición será:

$$-\frac{h}{2} = -\frac{h^2}{12e} \Rightarrow e = \frac{h}{6} \quad \left(i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12} \right) \quad (1.24)$$

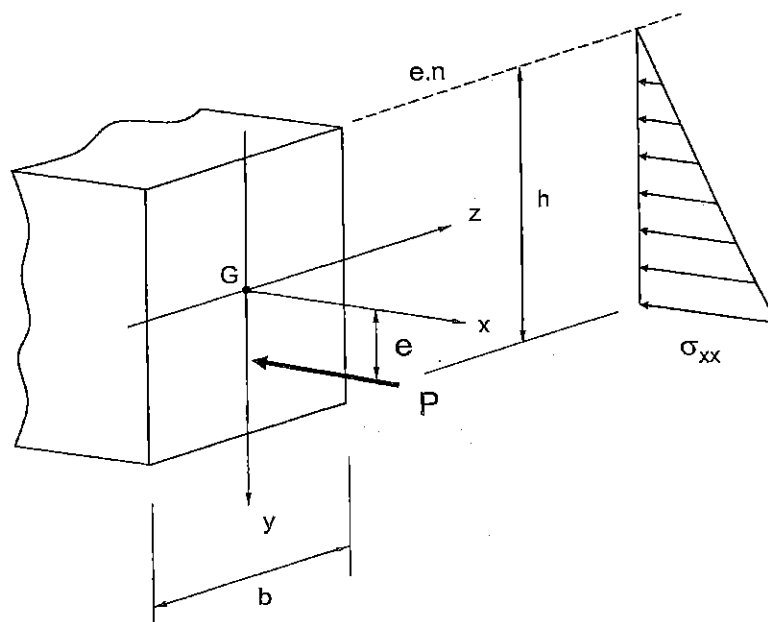


Figura 1.16. Compresión excéntrica en una sección rectangular

De acuerdo con las propiedades del eje neutro, éste se aleja de la sección para valores de la excentricidad inferiores a $h/6$, trabajando toda la sección con tensiones de compresión; y al revés, para valores de la excentricidad superiores a ese valor el eje neutro cortaría a la sección, dando lugar a que en la misma apareciesen tensiones de tracción. Por consiguiente, la respuesta al problema planteado es:

$$-\frac{h}{6} \leq y \leq \frac{h}{6} \quad (1.25)$$

2) Punto de ataque en un punto cualquiera de la sección

Supóngase ahora que la carga de compresión está aplicada en un punto arbitrario de la sección $P(y_p, z_p)$ que no está sobre ninguno de los ejes principales, tal como se indica la fig. 1.17.a.

En este caso los esfuerzos de sección son un esfuerzo axial y dos momentos flectores cuyos sentidos son los indicados en la fig.1.17.b, y de valores respectivos:

$$N_x = P; \quad M_y = P \cdot z_p; \quad M_z = P \cdot y_p \quad (1.26)$$

Cada uno de estos esfuerzos da lugar a una tensión normal en la sección. La tensión normal total puede obtenerse por superposición, resultando:

$$\sigma_{xx} = -\frac{N_x}{A} - \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} = -\frac{P}{A} - \frac{(P \cdot z_p) \cdot z}{I_y} - \frac{(P \cdot y_p) \cdot y}{I_z} \quad (1.27)$$

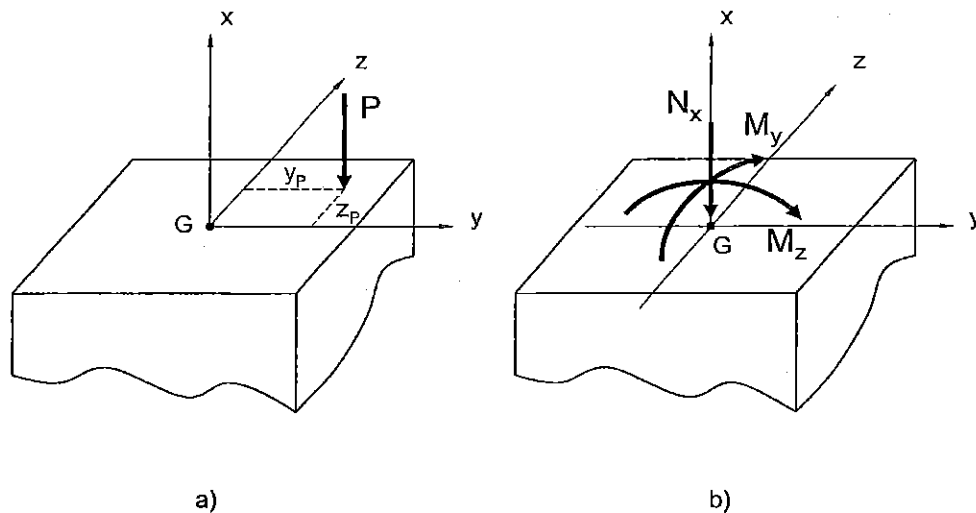


Figura 1.17. Compresión excéntrica fuera de un eje principal de flexión

La ecuación del eje neutro será por tanto:

$$\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{z_p \cdot z}{I_y} + \frac{y_p \cdot y}{I_z} = 0 \quad (1.28)$$

o bien:

$$1 + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} = 0 \quad (1.29)$$

donde $i_y^2 = \frac{I_y}{A}$, e $i_z^2 = \frac{I_z}{A}$, son los cuadrados de los radios de giro correspondientes a las flexiones M_y y M_z , respectivamente.

El eje neutro se puede definir mediante esta ecuación o bien mediante sus puntos de intersección $(y_p^n, 0)$ y $(0, z_p^n)$ con los ejes principales, siendo:

$$\text{con el eje } y: \quad z = 0 \Rightarrow y_p^n = -\frac{i_z^2}{y_p}; \quad (y_p^n, 0) \quad (1.30)$$

$$\text{con el eje } z: \quad y = 0 \Rightarrow z_p^n = -\frac{i_y^2}{z_p}; \quad (0, z_p^n) \quad (1.31)$$

Como sucedía cuando el punto de ataque estaba sobre un eje principal, también ahora, la posición del eje neutro no depende del valor de la carga aplicada, sino sólo de las coordenadas de su punto de aplicación y de la forma de la sección. Puede observarse, además, que las coordenadas de los puntos de corte con los ejes principales son de signo opuesto a las coordenadas del punto de ataque. Si este último se acerca al centro de gravedad de la sección, el eje neutro se irá distanciando de G y una parte mayor de la sección trabajará a compresión. A la inversa sucede cuando la carga se separa del centro de gravedad: puede estar lo suficientemente alejada para que el eje neutro corte a la sección y, por lo tanto, parte de la sección trabaje a tracción y parte a compresión.

Una propiedad interesante del eje neutro es la siguiente: *cuando el punto de ataque se desplaza a lo largo de una línea recta, el eje neutro gira pasando siempre por un mismo punto*; es decir, se obtiene un haz de rectas.

Para demostrar esta propiedad supongamos de nuevo, sin pérdida de generalidad, una sección rectangular sometida a una carga de compresión P aplicada en un punto (y_p, z_p) del primer cuadrante. Se trata de ver cuáles son las condiciones que deben cumplirse para poder sustituir esta carga P por dos cargas estáticamente equivalentes P_1 y P_2 aplicadas, respectivamente, en los puntos $M(m,0)$ y $N(0,n)$ de los ejes principales y y z (fig. 1.18).

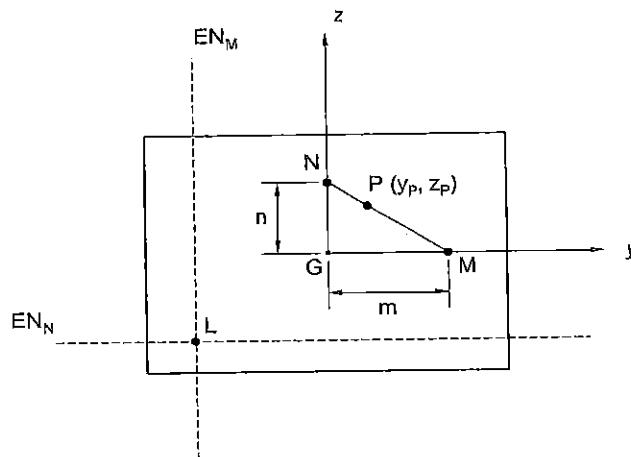


Figura 1.18. Propiedades del eje neutro

Para que la carga P y el sistema formado por las cargas P_1 y P_2 sean estáticamente equivalentes, deberían dar lugar a los mismos esfuerzos de sección, es decir:

$$\begin{aligned}
 N_x : \quad & P = P_1 + P_2 \\
 M_y : \quad & P \cdot z_p = P_2 \cdot n \\
 M_z : \quad & P \cdot y_p = P_1 \cdot m
 \end{aligned}
 \tag{1.32}$$

Son un conjunto de tres ecuaciones con cuatro incógnitas que no tendría solución salvo que las variables fueran linealmente dependientes. Y en efecto, entre ellas existe una relación que puede obtenerse eliminando P_1 y P_2 :

$$P_1 = \frac{P \cdot y_p}{m} ; P_2 = \frac{P \cdot z_p}{n} ; \Rightarrow P_1 + P_2 = P \left(\frac{y_p}{m} + \frac{z_p}{n} \right) = P \Rightarrow \frac{y_p}{m} + \frac{z_p}{n} = 1 \tag{1.33}$$

Luego el sistema formado por P_1 y P_2 es equivalente a P siempre y cuando se cumpla esta ecuación, que no es sino la expresión analítica de que los puntos P , M y N están alineados.

Ahora bien, designando por EN_M y EN_N los ejes neutros correspondientes a los puntos de ataque M y N , respectivamente, y siendo L el punto de intersección de ambos, cuando actúen simultáneamente P_1 y P_2 el eje neutro pasará necesariamente por L que, por consiguiente, también será un punto del eje neutro para cualquier posición del punto de ataque de la carga P , siempre que esté alineado con M y N .

1.4.2. Núcleo central de la sección

Recordemos que cuando el eje neutro corta a la sección la divide en dos zonas, una trabaja a tracción y la otra a compresión, y que si el punto de aplicación de la carga se acerca progresivamente al centro de gravedad de la sección, el eje neutro se irá alejando del mismo, de forma tal que llegará un momento en que toda la sección trabaje con tensiones de un mismo signo (compresiones si la carga aplicada es de compresión).

Pues bien, se denomina **núcleo central de la sección** a aquella zona de la misma en la que debe estar el punto de ataque de una carga de compresión de forma tal que no aparezcan tensiones de tracción en la sección. Es obvio que el centro de gravedad pertenece a este lugar geométrico. Su determinación resulta útil en materiales poco resistentes a la tracción, tales como, el hormigón, la cerámica, etc.

Como comprobaremos a continuación, la forma del núcleo central de una sección depende exclusivamente de la geometría de la misma, siendo independiente del valor

de la carga aplicada. Vamos a determinarlo para algunas secciones siguiendo un procedimiento lógico basado en las ecuaciones del eje neutro (1.30) y (1.31) y en sus propiedades anteriormente citadas, lo que nos llevará a formular un procedimiento general, válido para la determinación del núcleo central en una sección cualquiera.

Sección rectangular (fig. 1.19)

Para esta sección $b \times h$ el valor de los cuadrados de los radios de giro respecto de los ejes principales es:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{bh} = \frac{b^2}{12} \tag{1.34}$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{bh} = \frac{h^2}{12}$$

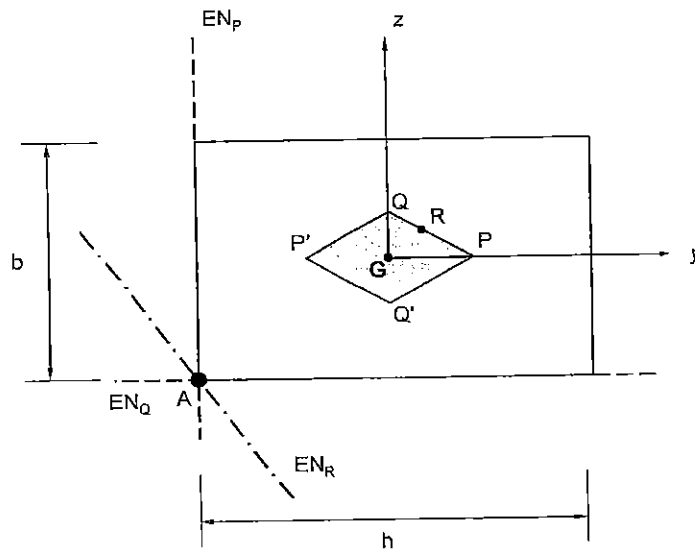


Figura 1.19. Núcleo central de una sección rectangular

Comencemos calculando los puntos de la zona positiva del eje principal y ($y > 0$) que pertenecen al núcleo central de la sección. Por estar el punto de ataque en el eje y , el eje neutro correspondiente es perpendicular a este eje, cortándolo en un punto situado al otro lado del centro de gravedad G de la sección. De entre los posibles puntos de ataque, el punto P más alejado de G que pertenece al núcleo central será aquel para el que el eje neutro EN_p es precisamente tangente a la sección, cortando al eje y en el punto $(-h/2, 0)$. De acuerdo con (1.30) y (1.34):

$$y_p^n = -\frac{h}{2} \Rightarrow y_p = -\frac{i_z^2}{y_p^n} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{-\frac{h}{2}} = \frac{h}{6} \Rightarrow P\left(\frac{h}{6}, 0\right) \quad (1.35)$$

La simetría de la sección nos lleva a considerar el punto $P'(-h/6,0)$ simétrico de P , concluyendo que pertenecen al núcleo central de la sección todos los puntos situados sobre el eje y tales que:

$$-\frac{h}{6} \leq y \leq \frac{h}{6} \quad (1.36)$$

Con un razonamiento en todo similar se obtienen los puntos $Q(0,b/6)$ y $Q'(0,-b/6)$, y se concluye que pertenecen al núcleo central de la sección todos los puntos situados sobre el eje z tales que:

$$-\frac{b}{6} \leq z \leq \frac{b}{6} \quad (1.37)$$

Ya conocemos, por tanto, qué puntos situados sobre los ejes principales pertenecen al núcleo central de la sección. Quedan por determinar aquellos puntos que, sin estar situados sobre esos ejes, también pertenecen al núcleo central. Fijémonos en puntos del primer cuadrante ($y>0, z>0$), y concretamente en los puntos alineados con los anteriormente obtenidos P y Q . Sea $R(y_R, z_R)$ uno cualquiera de estos puntos.

De acuerdo con la propiedad anteriormente demostrada, el eje neutro correspondiente EN_R pasará por el vértice $A(-h/6, -b/6)$ de la sección y, además, no cortará a la sección. En efecto, de las ecuaciones (1.30) y (1.31) del eje se deduce:

$$\begin{aligned} y_R \cdot y_R^n &= -i_z^2; & \text{Al ser: } y_R > 0 & \Rightarrow y_R^n < 0 \\ z_R \cdot z_R^n &= -i_y^2; & \text{Al ser: } z_R > 0 & \Rightarrow z_R^n < 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Y estas dos condiciones sólo pueden cumplirse cuando el eje neutro no corta a la sección. Luego todos los puntos del primer cuadrante situados sobre el segmento que resulta de unir P y Q pertenecen al núcleo central. Recordando lo que ocurre con el eje neutro cuando el punto de ataque se acerca o se aleja del centro de gravedad G , se concluye que todos los puntos del primer cuadrante contenidos en el triángulo de vértices G, P y Q pertenecen al núcleo central.

El mismo razonamiento se podría aplicar a los otros cuadrantes de la sección. En este caso la simetría simplifica el problema, concluyendo que el núcleo central de la sección rectangular es el rombo centrado en G de vértices P, Q, P', Q'.

Sección circular (fig. 1.20)

En el caso de una sección circular, las posiciones límite del eje neutro son las rectas tangentes a la sección. Además, dada la simetría de la sección, cualquier punto de aplicación de la carga se encuentra sobre un eje principal de inercia (todo diámetro es un eje principal de la sección), y el núcleo central tendrá también forma circular con su centro en G: basta determinar el valor de su radio.

Considérese un eje principal y cualquiera y como eje neutro la recta perpendicular a él. Aplicando (1.34) se puede calcular la coordenada y_p del punto de ataque P correspondiente a este eje neutro EN_p :

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\pi R^4}{\pi R^2} \tag{1.39}$$

$$y_p^n = -R \Rightarrow y_p = -\frac{i_z^2}{y_p^n} = -\frac{\frac{R^2}{4}}{-R} = \frac{R}{4} \Rightarrow P\left(\frac{R}{4}, 0\right)$$

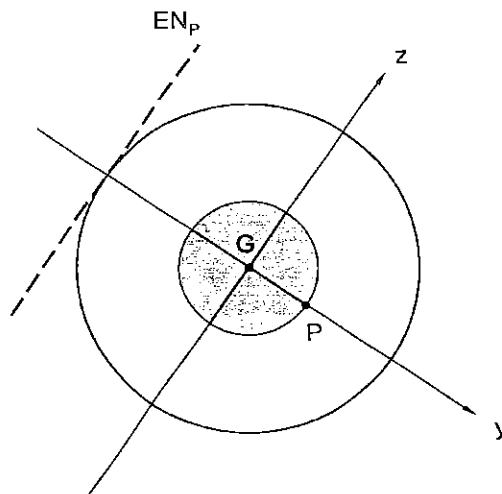


Figura 1.20. Núcleo central de una sección circular

Luego el núcleo central de una sección circular de radio R es también un círculo centrado en G y de radio R/4.

Sección en doble T (fig. 1.21)

Al igual que la sección rectangular, la sección en doble T es doblemente simétrica. El proceso de determinación de su núcleo central sigue idénticas pautas, y también se obtiene como resultado un rombo centrado en G y con sus diagonales sobre los ejes de simetría.

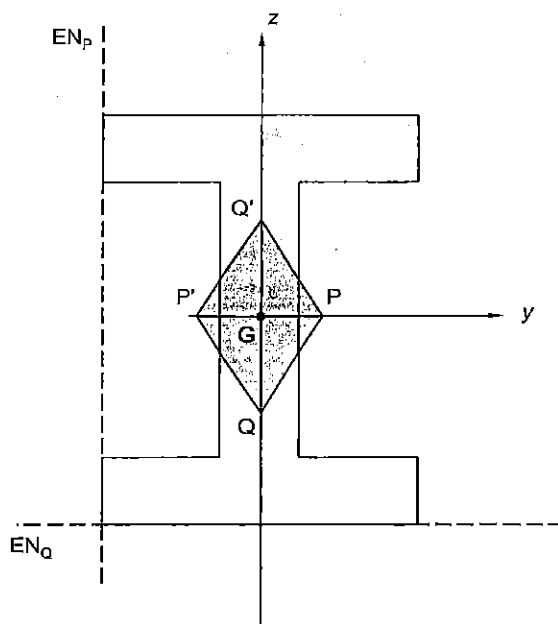


Figura 1.21. Núcleo central de una sección en doble T

Puede comprobarse que el núcleo central de esta sección, al igual que el de la sección rectangular de lados diferentes, es tal que las diagonales PP' y QQ' no son de la misma magnitud, ya que por lo general será:

$$\frac{i_y^2}{z_n} \neq \frac{i_z^2}{y_n} \tag{1.40}$$

Sección en T (fig. 1.22)

Respecto de las secciones vistas anteriormente, la sección en T presenta la novedad de que no es simétrica respecto del eje principal y. La determinación de los puntos del núcleo central situados sobre los ejes principales, puntos P, P', Q y Q' es en todo similar a los casos anteriores. También lo es la de los puntos correspondientes a $z > 0$. El problema surge con la determinación de los puntos para los cuales $z < 0$. Dada la simetría de la sección respecto de z, basta con considerar los puntos del cuadrante $y > 0, z < 0$.

Como fácilmente se puede verificar, ahora pertenecerán al núcleo central de la sección puntos más alejados de G de los que delimita el segmento PQ'. Para determinarlos basta con obtener el punto de ataque R al que corresponde el eje neutro EN_R , tangente a la sección e inclinado respecto de ambos ejes principales, tal como se indica en la figura. De forma similar se obtendría R', simétrico de R. Y de acuerdo con las propiedades del eje neutro se concluye que el núcleo central de la sección es el polígono QPRQ'R'P'.

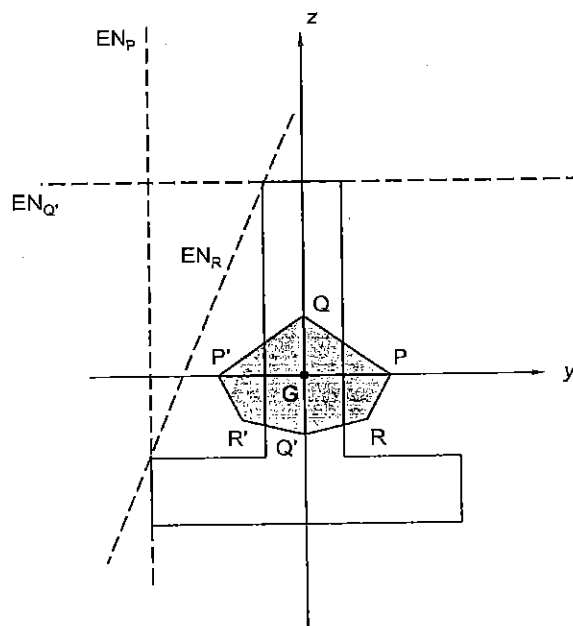


Figura 1.22. Núcleo central de una sección en T

Procedimiento general para la obtención del núcleo central

La metodología seguida para determinar el núcleo central en las diferentes secciones que se han considerado es totalmente general y puede aplicarse a cualquier tipo de sección, sea cual sea su forma geométrica. Se puede resumir en los siguientes tres pasos:

- 1º) Se inscribe la sección en el polígono del menor número posible de lados, de tal forma que toda recta que corte a la sección, corte también a este polígono y viceversa.
- 2º) Se considera cada uno de los lados de este polígono como si fuera un eje neutro y se calcula el correspondiente punto de ataque mediante las expresiones (1.30) y (1.31) y utilizando las posibles simetrías.

3º) Se unen los puntos de ataque así obtenidos. El área encerrada por el polígono que resulta es el núcleo central de la sección.

1.5. COMPRESIÓN COMPUESTA EN MATERIALES NO RESISTENTES A LA TRACCIÓN

Existen materiales, como el hormigón en masa o el ladrillo, que presentan muy poca resistencia a la tracción, de tal forma que si se les somete a tensiones de tracción aparecen grietas, se fisuran: no son capaces de aguantar tales tensiones. Es lo que ocurre cuando un soporte de uno de estos materiales se somete a una carga de compresión aplicada fuera del núcleo central de la sección: el eje neutro cortará a la sección, con lo que una parte de la misma debiera estar trabajando con tensiones de compresión y otra parte con tensiones de tracción. Sin embargo, como el material no resiste las tracciones, lo que realmente ocurre es que una zona de la sección no trabaja (se la suele llamar *superficie inactiva*) y la otra sí lo hace con tensiones de compresión (*superficie activa*). Ambas zonas están separadas por el eje neutro.

En lo que sigue se va a describir un procedimiento para obtener la distribución de tensiones para estos casos. Obsérvese que no son válidos los planteamientos realizados hasta el momento, planteamientos basados en que la sección resistía tanto tensiones de tracción como de compresión. Por consiguiente no son válidos los resultados obtenidos con ese presupuesto, como son la distribución de tensiones dada en (1.27), o la ecuación del eje neutro (1.28).

Como hipótesis de cálculo supondremos que la resistencia a tracción del material es nula, en tanto que la distribución de compresiones sigue un comportamiento elástico lineal. Y en cuanto a la deformación se mantienen las dos hipótesis habituales: pequeñas deformaciones y secciones planas después de la deformación. Finalmente consideraremos únicamente el caso en que el punto de aplicación de la carga está situado en uno de los ejes principales de la sección.

Sin pérdida de generalidad, consideremos un soporte de un material no resistente a la tracción cuya sección rectangular es la de la fig. 1.23. Está sometida a una carga de compresión aplicada en un punto P de su eje principal y, situado fuera del núcleo central. Sea N-N el eje neutro, perpendicular al eje y, al que corta a una distancia desconocida s_p del punto de ataque P. El eje neutro separa la *superficie inactiva* S_i de

la *superficie activa* S_a . En esta última se admite una distribución lineal para las tensiones de compresión, dada por:

$$\sigma_{xx} = k \cdot s \quad (1.41)$$

siendo s una coordenada cuyo origen está precisamente en el eje neutro y k una constante. En la figura se muestra tanto la distribución de tensiones como la de deformaciones en la sección, esta última de acuerdo con la hipótesis de las secciones planas de Navier.

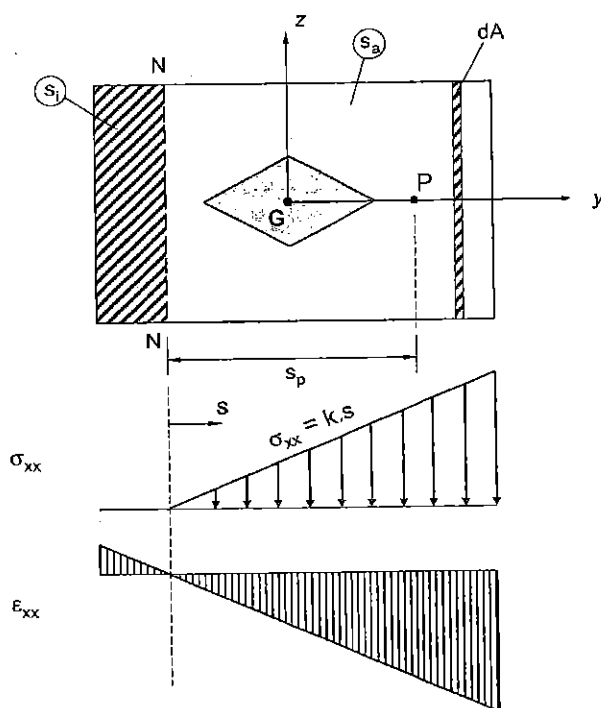


Figura 1.23. Compresión compuesta de un material no resistente a la tracción

Para la resolución del problema aplicaremos un principio general, permanentemente válido: la equivalencia estática entre la acción exterior y la distribución de tensiones a que da lugar. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \sum F_x = P: \quad P &= \int_{s_a} \sigma_{xx} \cdot dA = \int_{s_a} k \cdot s \cdot dA = k \int_{s_a} s \cdot dA = k \cdot Q_N \\ \sum M_{NN} = P \cdot s_p: \quad P \cdot s_p &= \int_{s_a} (\sigma_{xx} \cdot dA) \cdot s = \int_{s_a} k \cdot s^2 \cdot dA = k \int_{s_a} s^2 \cdot dA = k \cdot I_N \end{aligned} \quad (1.42)$$

donde Q_N e I_N son, respectivamente, el momento estático y el momento de inercia de la superficie activa respecto del eje neutro; ambos son funciones de s_p .

Combinando las ecuaciones (1.42) pueden obtenerse tanto el valor de s_p , que proporciona la posición del eje neutro, como el de la constante k de la distribución de tensiones:

$$s_p = \frac{I_N}{Q_N}; \quad k = \frac{P}{Q_N} \quad (1.43)$$

Ejemplo. La fig. 1.24. muestra una sección rectangular de $800 \times 400 \text{ mm}^2$ que recibe una carga de compresión de 1000 kN en el punto P indicado. Calcular la distribución de tensiones así como la tensión máxima en los dos casos siguientes:

- El material es equirresistente.
- El material no resiste tensiones de tracción.

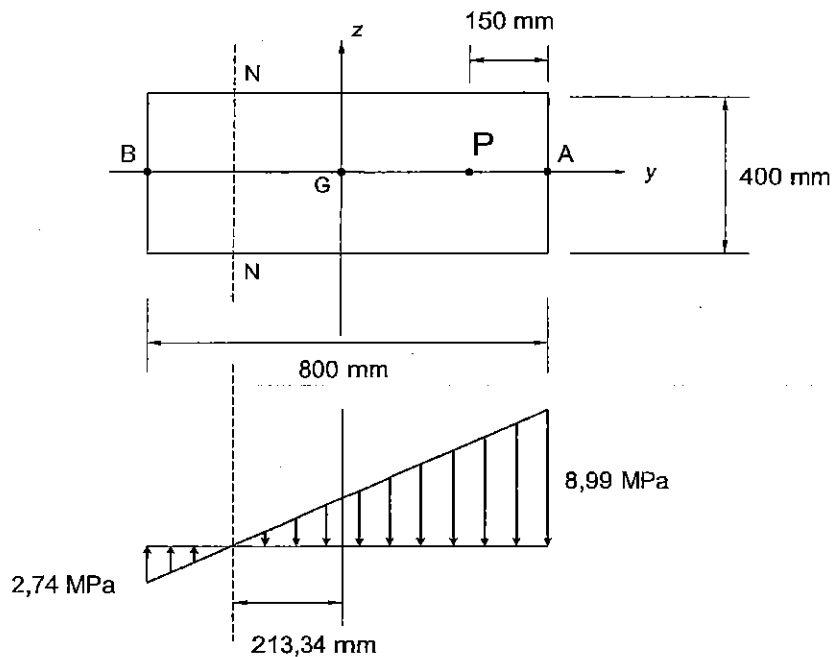


Figura 1.24. Compresión excéntrica en sección rectangular de un material equirresistente. Distribución de tensiones

a) Material equirresistente (resiste a tracción y compresión)

Se trata de un caso de compresión compuesta en el que los esfuerzos de sección son un esfuerzo axial y un momento flector de valores:

$$\begin{aligned} N_x &= P = 10^3 \text{ kN} \\ M_z &= 10^3 \cdot 0,25 = 250 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Los valores de la sección y el momento de inercia son:

$$\begin{aligned} A &= b \cdot h = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32 \text{ m}^2 \\ I_z &= \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,4 \cdot 0,8^3}{12} = 170,67 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned} \quad (1.45)$$

La distribución de tensiones, en MPa:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} = -\frac{10^6}{0,32 \cdot 10^6} - \frac{250 \cdot 10^6 \cdot y}{170,67 \cdot 10^8} = -3,125 - 1,465 \cdot 10^{-2} \cdot y \quad (1.46)$$

Posición del eje neutro:

$$\sigma_{xx} = -3,125 - 1,465 \cdot 10^{-2} \cdot y = 0 \Rightarrow y = -213,34 \text{ mm} \quad (1.47)$$

Tensión máxima de compresión (punto A):

$$A(400,0): \quad \sigma_{xx} = -3,125 - 1,465 \cdot 10^{-2} \cdot 400 = -8,99 \text{ MPa} \quad (1.48)$$

Tensión máxima de tracción (punto B):

$$B(-400,0): \quad \sigma_{xx} = -3,125 - 1,465 \cdot 10^{-2} \cdot (-400) = 2,74 \text{ MPa} \quad (1.49)$$

Ambas tensiones máximas así como la correspondiente distribución de tensiones se muestran en la fig. 1.24.

a) Material no resistente a la tracción

En primer lugar, habrá que comprobar si la carga está aplicada dentro o fuera del núcleo central. En este caso está aplicada fuera, por lo que el eje neutro cortará a la sección dividiéndola en dos zonas: superficies activa e inactiva. Tanto la posición del eje neutro como la distribución de tensiones en la sección, representada en la fig. 1.25, se pueden obtener con las ec. (1.43):

$$\begin{aligned} Q_N &= (s_p + 150) \cdot 400 \cdot \left(\frac{s_p + 150}{2} \right) = 200 \cdot (s_p + 150)^2 \\ I_N &= \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot (s_p + 150)^3 \\ s_p &= \frac{I_N}{Q_N} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 400 \cdot (s_p + 150)^3}{200 \cdot (s_p + 150)^2} = \frac{2}{3} \cdot (s_p + 150) \Rightarrow s_p = 300 \text{ mm} \\ k &= \frac{P}{Q_N} = \frac{10^6}{200 \cdot (300 + 150)^2} = \frac{10}{405} \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \end{aligned} \quad (1.50)$$

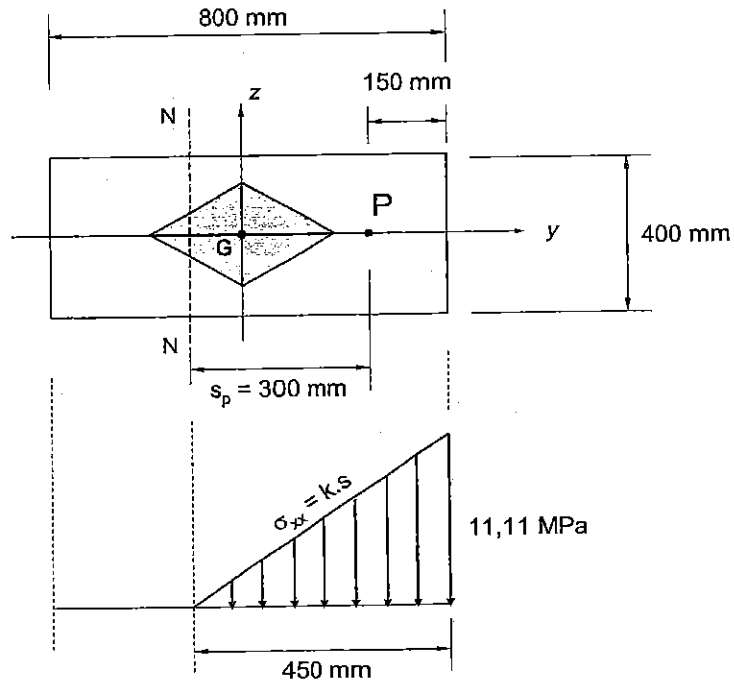


Figura 1.25. Compresión excéntrica en sección rectangular de un material no resistente a la tracción. Distribución de tensiones

Luego, supuesto expresado s en mm, la distribución de tensiones es:

$$\sigma_{xx} = k \cdot s = \frac{10}{405} \cdot s \quad (\text{MPa}) \quad (1.51)$$

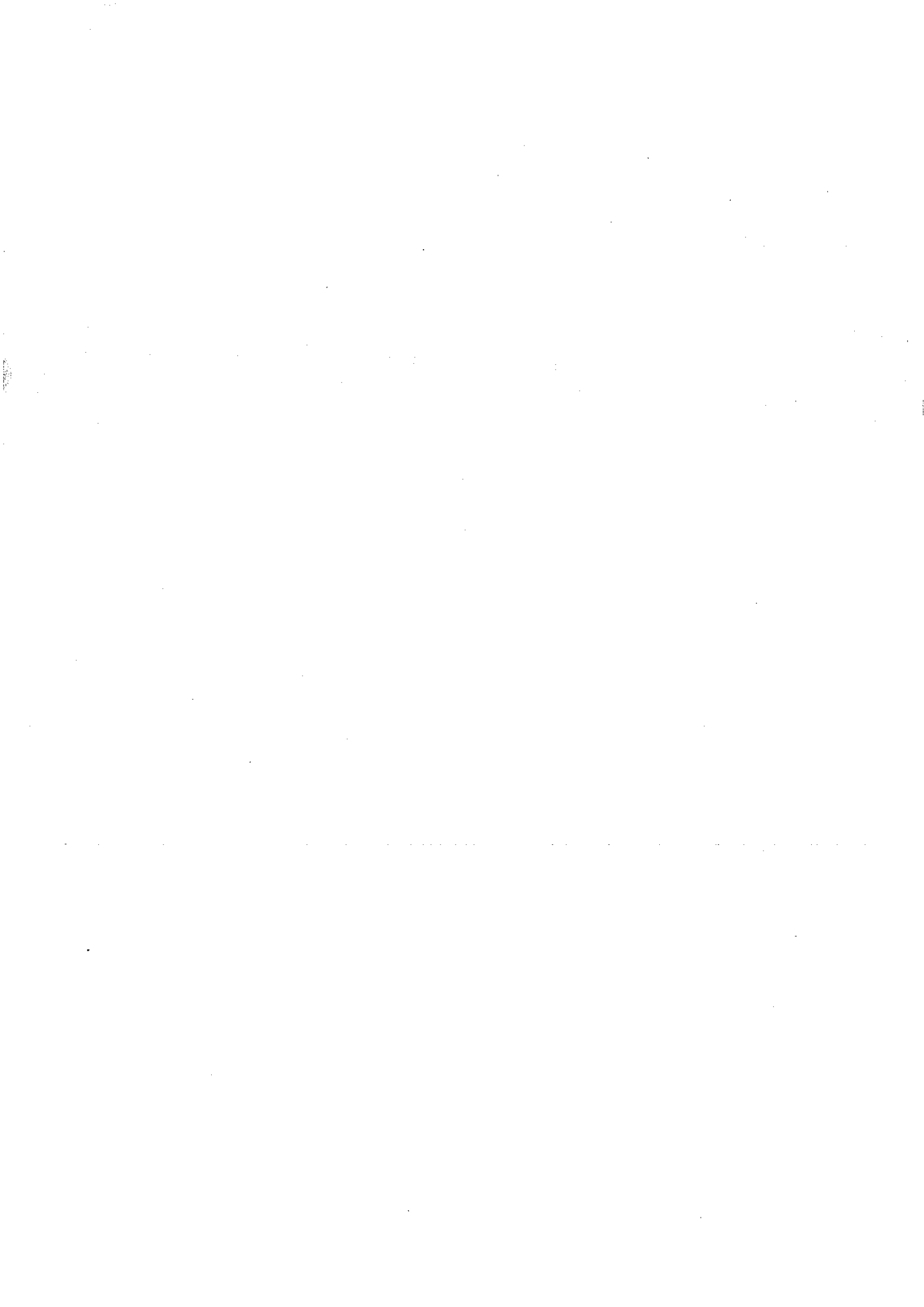
y la máxima tensión de compresión, que tendrá lugar en A ($s=450$ mm):

$$\sigma_{xx_{máx}} = \frac{10}{405} \cdot 450 = 11,11 \text{ MPa} \quad (1.52)$$

Como puede comprobarse, esta tensión es mayor que la máxima obtenida para el caso de material equirresistente.

TEMA 2

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS EN FLEXIÓN



2.1. INTRODUCCIÓN

En el estudio de la flexión realizado hasta el momento, se ha supuesto siempre que las estructuras que se estaban analizando eran isostáticas, es decir, estructuras en las que es posible determinar tanto las reacciones en los apoyos como los esfuerzos en cualquier sección mediante la exclusiva aplicación de las ecuaciones de la estática.

*En este tema se van a exponer algunos de los métodos más adecuados para el análisis de **estructuras hiperestáticas** en las que la forma fundamental de trabajo es la flexión; por tratarse de estructuras hiperestáticas, en ellas no es posible determinar todas las reacciones y esfuerzos de sección mediante consideraciones puramente estáticas; ésta es la razón por la que a estas estructuras también se las denomina **estáticamente indeterminadas**. Su resolución requiere la consideración simultánea de los tres aspectos que siempre deben satisfacerse: condiciones de equilibrio, compatibilidad de las deformaciones y ley de comportamiento.*

Se define el **grado de hiperestaticidad** de una estructura hiperestática, como la diferencia entre el número de fuerzas independientes desconocidas y el número de ecuaciones de equilibrio independientes que ligan a estas incógnitas. Suele definirse también como el número de incógnitas superfluas (o redundantes), entendiendo que una ligadura es superflua cuando su eliminación no convierte la estructura en un mecanismo: sigue siendo una estructura. *El grado de hiperestaticidad indica el número de condiciones complementarias de deformación que es preciso añadir a las ecuaciones de equilibrio para obtener tanto las reacciones como la distribución de esfuerzos en la estructura.*

En lo que sigue se considerarán exclusivamente estructuras planas en las que las cargas están contenidas en su plano; por consiguiente, el número de ecuaciones independientes de equilibrio se reduce a tres.

*La hiperestaticidad puede deberse a dos causas: a) a un exceso de ligaduras externas, es decir, en los apoyos de la estructura; b) a la forma en que están conectados entre sí los diversos elementos de la propia estructura. En el primer caso se dice que la estructura es *externamente hiperestática*, y en el segundo *internamente hiperestática*.*

*Una estructura constituida por un único elemento, que recuérdese recibe el nombre de **viga** cuando su forma de trabajo fundamental es la flexión, sólo puede ser*

externamente hiperestática. En la fig. 2.1 se muestran diversos casos de vigas hiperestáticas, indicando al mismo tiempo su grado de hiperestaticidad h .

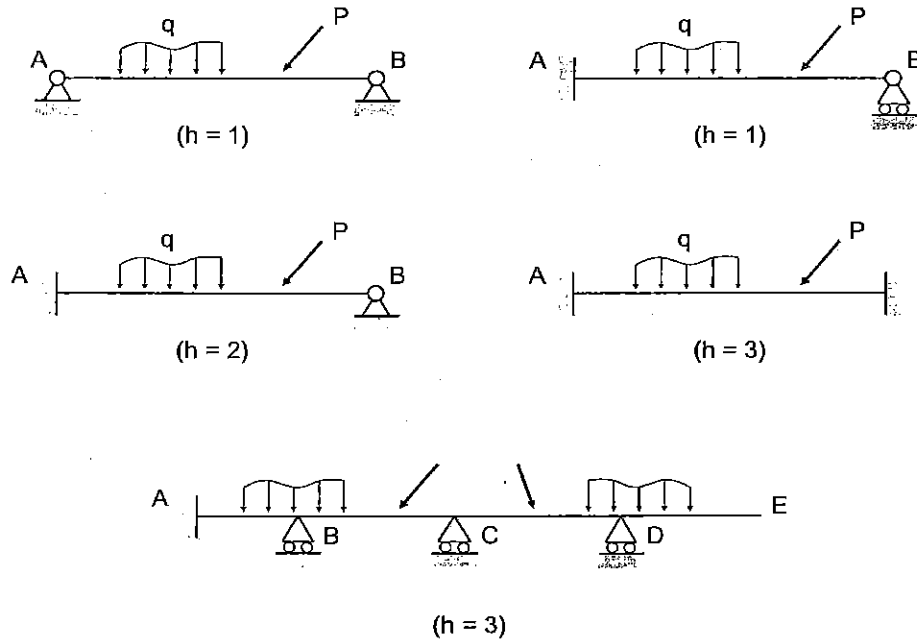


Figura 2.1. Vigas hiperestáticas

Si la estructura está formada por varios elementos, además de la posible hiperestaticidad externa es posible que también tenga una *hiperestaticidad interna*: esto ocurre cuando algunos de esos elementos están dispuestos formando un contorno cerrado. Es el caso de las estructuras representadas en la fig. 2.2.

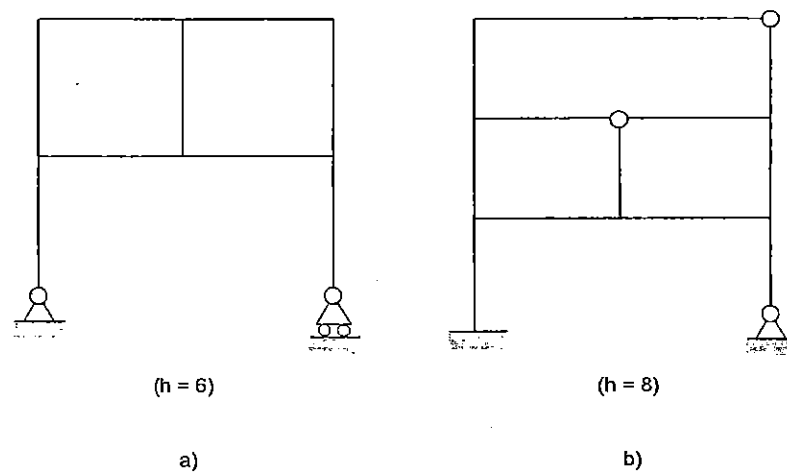


Figura 2.2. Estructuras hiperestáticas

Para determinar el grado de hiperestaticidad interna se pueden aplicar los siguientes principios (válidos para estructuras planas):

- a) Un contorno cerrado equivale a grado tres de hiperestaticidad.
- b) La introducción de una articulación intermedia equivale a reducir en una unidad el grado de hiperestaticidad. Si en la articulación concurren n barras, dicho grado se reduce en $n-1$ unidades.

La estructura de la fig. 2.2.a es externamente isostática e internamente hiperestática; su grado total de hiperestaticidad es 6. La estructura de la fig. 2.2.b es externamente hiperestática de grado 2 e internamente hiperestática de grado 6 ($=9-1-2$). En total es hiperestática de grado 8.

A lo largo de este tema se hará, en primer lugar, una breve descripción de las principales características de los dos grandes métodos de análisis de estructuras hiperestáticas: *el de los desplazamientos y el de las fuerzas*. Posteriormente se expondrá con cierto detalle la aplicación del método de las fuerzas para el análisis de vigas hiperestáticas y, como un caso particular, a las denominadas vigas continuas. Finalmente se completará el tema con una introducción al estudio de estructuras de varias barras cuya forma fundamental de trabajo es la flexión. En cualquier caso se considerarán fundamentalmente estructuras externamente hiperestáticas, y algunos casos sencillos de hiperestaticidad interna de muy bajo grado de hiperestaticidad

2.2. MÉTODOS DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

De entre los diferentes procedimientos de resolución de estructuras hiperestáticas cabe distinguir dos grandes métodos generales que responden a los nombres de *método de la flexibilidad y método de la rigidez*. La formulación estándar de ambos métodos es muy adecuada para su implementación en programas de ordenador. En cuanto a las diferencias de planteamiento más significativas pueden citarse tanto las variables que toman como incógnitas, como el orden de aplicación de las relaciones de equilibrio, compatibilidad y ley de comportamiento.

2.2.1. Método de la flexibilidad

También denominado *método de las fuerzas o de la compatibilidad*. En él las incógnitas elegidas son fuerzas (reacciones en los apoyos y/o esfuerzos de sección).

Como es sabido en las estructuras isostáticas estas fuerzas pueden obtenerse directamente aplicando las condiciones de equilibrio; una vez conocidas, las deformaciones se obtienen a partir de la ley de comportamiento (por ej., aplicando teoremas de Mohr), y los desplazamientos pueden conseguirse, finalmente, a partir de la formulación de las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones.

Como se ha dicho en repetidas ocasiones, en las estructuras hiperestáticas no es posible seguir un proceso secuencial similar al anterior, siendo necesario emplear conjuntamente las relaciones de equilibrio, compatibilidad y ley de comportamiento. El proceso de análisis en el método de la flexibilidad se inicia aplicando las condiciones de equilibrio y expresando las fuerzas de la estructura en función de las fuerzas incógnita: éstas serán tantas como el grado de hiperestaticidad de la estructura. A continuación, introduciendo estas fuerzas en la ley de comportamiento, se tienen las deformaciones en función de las fuerzas incógnitas; por último, sustituyendo las deformaciones en las ecuaciones de compatibilidad se llega a un sistema de ecuaciones de compatibilidad con las fuerzas como incógnitas. Una vez resuelto el sistema y obtenidas las fuerzas incógnitas, el proceso para resolver las deformaciones y los desplazamientos es el mismo que en las estructuras isostáticas.

2.2.2. Método de la rigidez

También conocido como **método de los desplazamientos o del equilibrio**. Las incógnitas en este método son los desplazamientos en determinados puntos de la estructura. Constituyen un número mínimo de desplazamientos tales que, una vez conocidos, a partir de los ellos pueden obtenerse los desplazamientos en cualquier otro punto de la estructura (a este número mínimo de desplazamientos se le denomina *grado de libertad* de la estructura).

El proceso de análisis mediante este método se inicia aplicando las condiciones de compatibilidad de deformaciones y expresando las deformaciones en función de esos desplazamientos incógnitas. A continuación, mediante la ley de comportamiento, se obtienen los esfuerzos en función de los desplazamientos; por último, sustituyendo las esfuerzos en las condiciones de equilibrio, se llega a un sistema de ecuaciones de equilibrio con los desplazamientos como incógnitas. Una vez obtenidos los desplazamientos, las deformaciones se obtienen a partir de las condiciones de compatibilidad y los esfuerzos a partir de la ley de comportamiento.

2.2.3. Comparación de ambos métodos

Teniendo en cuenta que tanto el método de la flexibilidad como el de la rigidez emplean las relaciones de equilibrio y compatibilidad para obtener las fuerzas y los desplazamientos, cabe preguntarse cuál de los dos métodos resulta más conveniente emplear para analizar una estructura determinada. Se ha visto que el análisis de la estructura, por cualquiera de los dos métodos, exige la resolución de un sistema de ecuaciones; de acuerdo con esto, puede pensarse que el método más interesante es aquel que conduce al sistema de ecuaciones de menor tamaño; así pues, el método de la flexibilidad se emplearía cuando el grado de hiperestaticidad de la estructura fuera menor que el grado de libertad de la misma, mientras que el método de la rigidez se emplearía en el caso contrario.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que al valorar la bondad y eficacia de estos métodos, los cuales son especialmente adecuados para el análisis de grandes estructuras con la ayuda del ordenador, se imponen otros criterios de idoneidad distintos del citado en el párrafo anterior, para decidir cuál es el método más adecuado. Para el uso del ordenador, la gran desventaja del método de la flexibilidad es la multiplicidad de conjuntos de fuerzas que pueden tomarse como incógnitas, lo que supone una elección entre varias alternativas. El método de la rigidez, por el contrario, tiene un único y perfectamente definido grupo de incógnitas para cada estructura, lo que le permite seguir un proceso sistemático y sin alternativas, muy adecuado para la implementación en un programa de ordenador. Esta característica, junto con el incesante incremento de la capacidad de memoria y velocidad de operación de los ordenadores, ha hecho que la gran mayoría de programas generales empleen el método de la rigidez, utilizándose el método de la flexibilidad en algunas aplicaciones específicas.

Como contrapartida, el método de las fuerzas aplicado a la resolución manual de estructuras sencillas, tiene el innegable mérito de facilitar una comprensión más rápida y eficaz del comportamiento físico de las estructuras bajo la acción de las cargas que las solicitan, conocimiento que ha de estar en la base para una mejor y más profunda asimilación no sólo de los grandes métodos generales del cálculo de estructuras, sino de otros muchos contenidos tecnológicos en el ámbito de la ingeniería mecánica. *Esta razón justifica el contenido del resto de este tema: descripción del método de las fuerzas para su aplicación al análisis de estructuras sencillas.*

Cabe señalar por otra parte que, además de estos dos métodos de análisis, existen también métodos mixtos, en los que se toman como incógnitas tanto fuerzas como desplazamientos.

Además de estos procedimientos basados en la teoría lineal de primer orden, teoría que implica, por un lado, la existencia de proporcionalidad entre cargas y desplazamientos y, por otro, la validez del principio de superposición, y que además supone que el equilibrio se puede plantear en la geometría de la estructura indeformada, hay otros métodos para los cuales no son válidas estas suposiciones: como son, por ejemplo, los métodos basados en el cálculo plástico. Se trata de métodos cada vez más utilizados, sobre todo en estructura metálica. Se caracterizan porque tienen en cuenta la plasticidad del acero o, por decirlo mejor, las reservas plásticas de las estructuras de acero.

2.3. MÉTODO DE LAS FUERZAS. APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE DIVERSAS ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

La aplicación del método de las fuerzas a la resolución de una estructura hiperestática se sintetiza en los siguientes pasos:

- 1) *Determinación del grado de hiperestaticidad h de la estructura y elección de un número de incógnitas hiperestáticas igual a dicho grado. Pueden ser reacciones en los apoyos y/o esfuerzos de sección.*
- 2) *Elegidas estas h incógnitas hiperestáticas se eliminan de la estructura los enlaces o ligaduras que las originan, y en su lugar se colocan las h incógnitas (fuerzas y/o momentos) correspondientes. La estructura resultante al eliminar esas ligaduras será isostática, y se denomina estructura básica. Estará sometida conjuntamente a las cargas exteriores que actúan sobre la estructura original más las incógnitas hiperestáticas que, a los efectos prácticos, se considerarán como si fueran unas cargas más.*
- 3) *Aplicación de las condiciones de compatibilidad de la deformación, es decir, imposición de las adecuadas condiciones de deformación (desplazamientos nulos; nudos rígidos; continuidad de la elástica; etc.) que deben cumplir las secciones en las que se ha liberado alguna ligadura, para que en ellas se reproduzca el comportamiento que tienen en la estructura real. Estos valores*

de las deformaciones se pueden obtener por cualquiera de los procedimientos estudiados: resulta particularmente útil la aplicación de los teoremas de Mohr.

A los efectos prácticos suele resultar especialmente útil aplicar el Principio de Superposición a la hora de calcular la deformación originada por las diferentes fuerzas que actúan sobre la estructura básica.

Para ilustrar los tres pasos del procedimiento que se acaba de exponer, considérese la viga de la fig. 2.3.a, empotrada en A y simplemente apoyada en B , sometida a unas cargas cualesquiera como las indicadas. En el empotramiento A se originan tres reacciones H_A , V_A y M_A , y otra más, V_B , en el apoyo B . Un total de cuatro incógnitas y tres ecuaciones de equilibrio: se trata de una estructura hiperestática de grado 1.

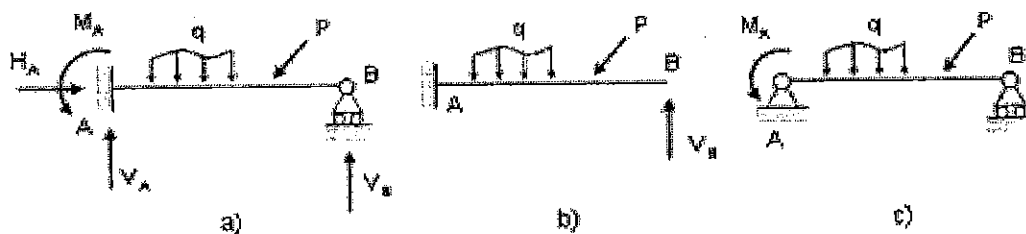


Figura 2.3. El método de las fuerzas

Para su resolución por el método de las fuerzas hay dos opciones muy claras que defieren en la incógnita hiperestática elegida y, en consecuencia, en la estructura isostática básica resultante: son las representadas en las fig. 2.3.b y 2.3.c. En la primera la incógnita es V_B y la estructura isostática básica es una viga empotrada en A y libre en B . La condición de compatibilidad de deformaciones a imponer es que, en esta estructura básica, el desplazamiento vertical de B ha de ser nulo. Este desplazamiento se puede obtener por superposición del debido a las cargas exteriores más el debido a V_B .

En cuanto a la segunda opción, la incógnita elegida es M_A y la estructura isostática básica es una viga biapoyada en A y B . La condición de compatibilidad de deformaciones a imponer es que el giro en la sección A de esta estructura básica ha de ser nulo. Este giro se puede obtener por superposición del originado por las cargas exteriores más el debido a M_A .

En este ejemplo sencillo puede observarse una característica del método de las fuerzas: a la hora de analizar una determinada estructura hiperestática, puede haber

distintas opciones en cuanto a la elección de las incógnitas hiperestáticas y, por consiguiente, distintas estructuras básicas, que son sobre las que en la parte final del procedimiento habrá que aplicar las correspondientes condiciones de compatibilidad de las deformaciones. Es obvio que la solución que se obtiene en todas ellas es la misma: la solución de la estructura real. Es probable que lo que no sea igual es la mayor o menor dificultad para obtener, en cada caso, esa solución.

Para ilustrar la aplicación de la metodología que se acaba de exponer se resuelven a continuación algunos casos sencillos de vigas hiperestáticas.

Ejemplo 1. Calcular las reacciones en la viga de la figura 2.4.a, empotrada en A y simplemente apoyada en B. Su rigidez a flexión es EI .

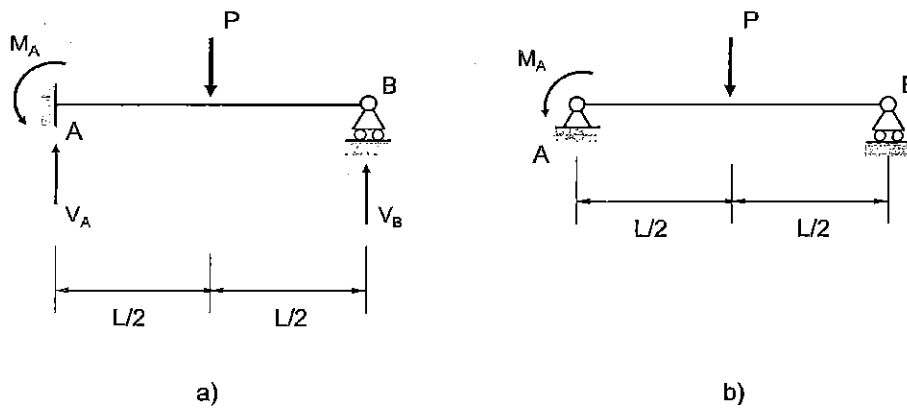


Figura 2.4. Viga empotrada y simplemente apoyada

La aplicación de las ecuaciones de equilibrio proporciona un sistema formado por dos ecuaciones y tres incógnitas, lo que indica que se trata de una estructura hiperestática de grado 1 ($h=1$). En efecto:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A + V_B = P \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow M_A - P \cdot \frac{L}{2} + V_B \cdot L = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Como se ha indicado anteriormente, para su resolución puede elegirse como incógnita la reacción V_B en el apoyo B o el momento M_A en el empotramiento. Según sea la elección la estructura isostática básica resultante será diferente.

Se opta por el momento en el empotramiento. En la figura 2.4.b se indica la estructura básica resultante de eliminar la ligadura que impide el giro en A y colocar en su lugar

el momento M_A . La condición de compatibilidad de deformaciones a imponer es que el giro en A en la estructura básica sea nulo, giro que se puede calcular aplicando el principio de superposición, tal como se indica en la fig. 2.5. Es decir:

$$\theta_A = 0 \Rightarrow \bar{\theta}_A^{(P)} - \bar{\theta}_A^{(M_A)} = 0 \Rightarrow \frac{PL^2}{16EI} - \frac{M_A L}{3EI} = 0 \Rightarrow M_A = \frac{3PL}{16} \quad (2.2)$$

Obtenido el valor de M_A , las restantes reacciones pueden calcularse mediante las ecuaciones de equilibrio (2.1), resultando los siguientes valores:

$$V_A = \frac{11P}{16}; \quad V_B = \frac{5P}{16} \quad (2.3)$$

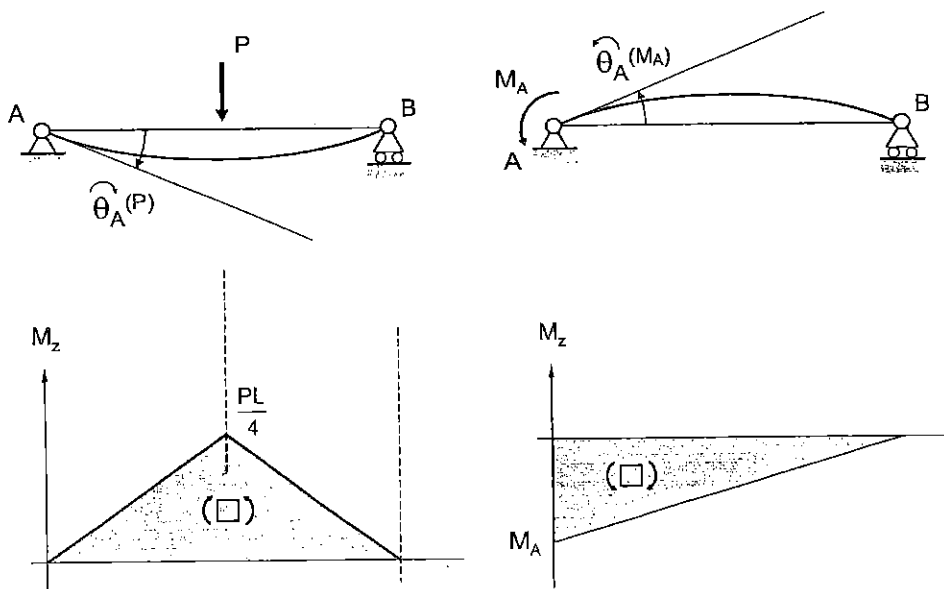


Figura 2.5

× **Ejemplo 2.** Calcular las reacciones y dibujar el diagrama de momentos flectores de la viga biempotrada de la figura 2.6.a. Su rigidez a flexión es EI .

Se trata de una estructura hiperestática de grado 2 ($h=2$). En efecto, de la aplicación de las ecuaciones de equilibrio se obtiene un sistema formado por dos ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A + V_B = P \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow M_A - P \cdot \frac{L}{2} - M_B + V_B \cdot L = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

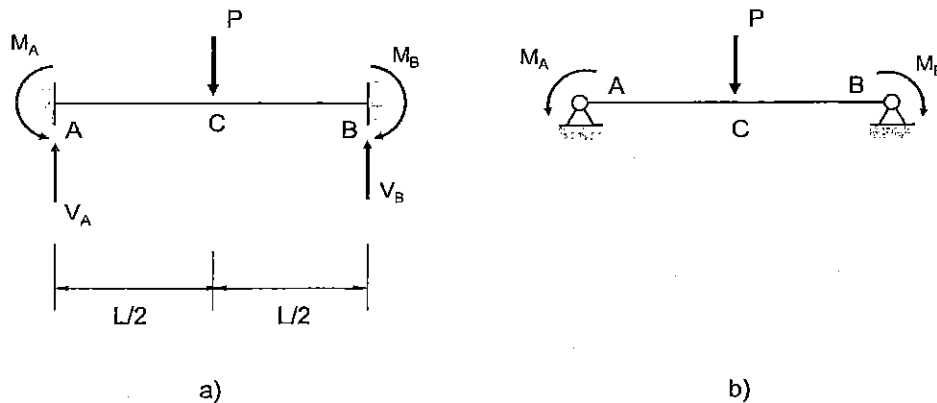


Figura 2.6. Viga biempotrada

Como en el caso anterior, hay más de una opción para la elección de las incógnitas hiperestáticas. Se eligen los momentos en ambos empotramientos, con lo que la estructura básica es la viga biapoyada de la figura 2.6.b. Las condiciones de compatibilidad de las deformaciones a imponer son que los giros en los apoyos A y B en la estructura isostática básica han de ser nulos.

El problema admite una simplificación originada por la simetría que presenta: debido a esta simetría, tanto de forma como de carga, las reacciones en los empotramientos (que son secciones simétricas) también lo serán. Teniendo esto en cuenta, de las ecuaciones de equilibrio se deduce que:

$$V_A = V_B = \frac{P}{2} \quad (2.5)$$

siendo, además, $M_A = M_B = M$.

Este momento M es la única incógnita hiperestática, para cuyo cálculo se precisa una sola condición de compatibilidad, por ejemplo, giro nulo en el apoyo A de la estructura básica. De nuevo este giro se puede calcular por superposición (fig.2.7):

$$\theta_A = 0 \Rightarrow \bar{\theta}_A^{(P)} - \bar{\theta}_A^{(M)} = 0 \Rightarrow \frac{PL^2}{16EI} - \frac{ML}{2EI} = 0 \Rightarrow M = \frac{PL}{8} \quad (2.6)$$

$\bar{\theta}_A = \theta_{Ac}$

El momento en la sección de aplicación de la carga C será:

$$M_C = \frac{PL}{4} - \frac{PL}{8} = \frac{PL}{8} \quad (2.7)$$

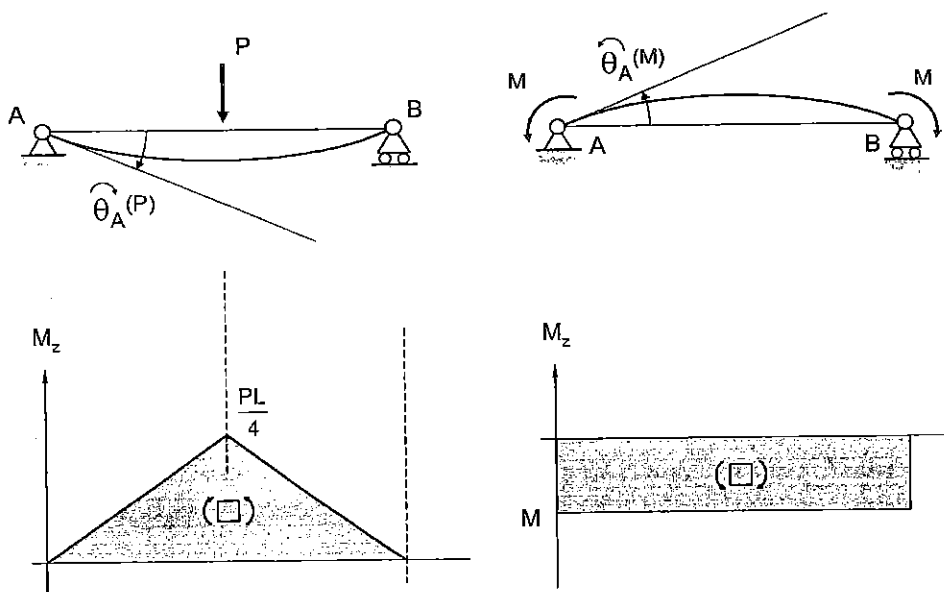


Figura 2.7

En la fig. 2.8 se representa el diagrama de momentos flectores de la viga, suma de los debidos a P y a M .

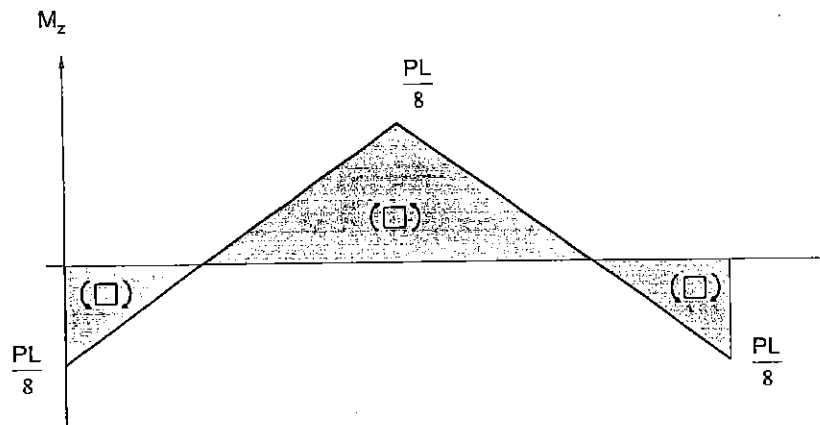


Figura 2.8. Diagrama de momentos flectores

× **Ejemplo 3.** Calcular las reacciones y dibujar el diagrama de momentos de la viga de la figura 2.9.a, sustentada en tres apoyos A , B , y C . Su rigidez a flexión es EI .

Se trata de una estructura hiperestática de grado 1 ($h=1$) que va a servir para poner de manifiesto una nueva posibilidad a la hora de elegir las incógnitas hiperestáticas: en los ejemplos previos siempre han sido reacciones en los apoyos; ahora, además de tener en cuenta de nuevo esta posibilidad, se considerará una opción alternativa: elegir como incógnita un esfuerzo de sección.

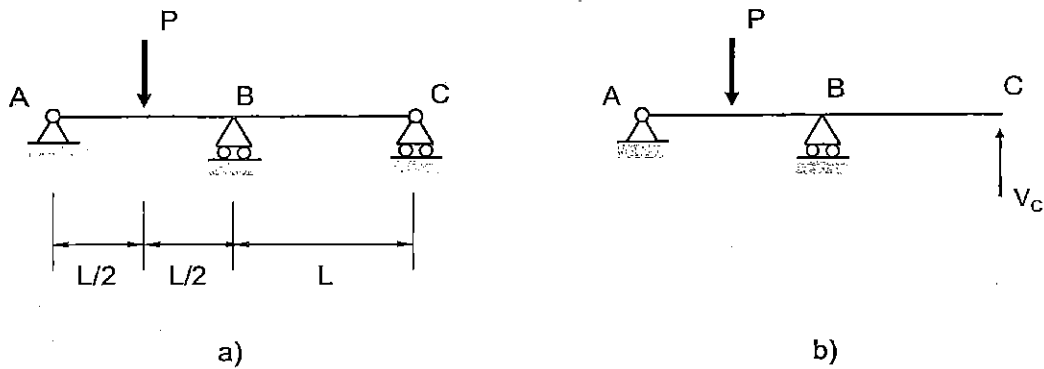


Figura 2.9. Viga sobre tres apoyos

a) Incógnita: la reacción en un apoyo

Por ejemplo, la reacción V_c en el apoyo C. En la fig. 2.9.b se representa la estructura básica resultante. La condición de compatibilidad a imponer es que en esta estructura el desplazamiento vertical de C sea nulo. De nuevo este desplazamiento se puede obtener por superposición, como se indica en la fig. 2.10, es decir:

$$y_c = y_c^{(P)} + y_c^{(V_c)} = 0 \quad (2.8)$$

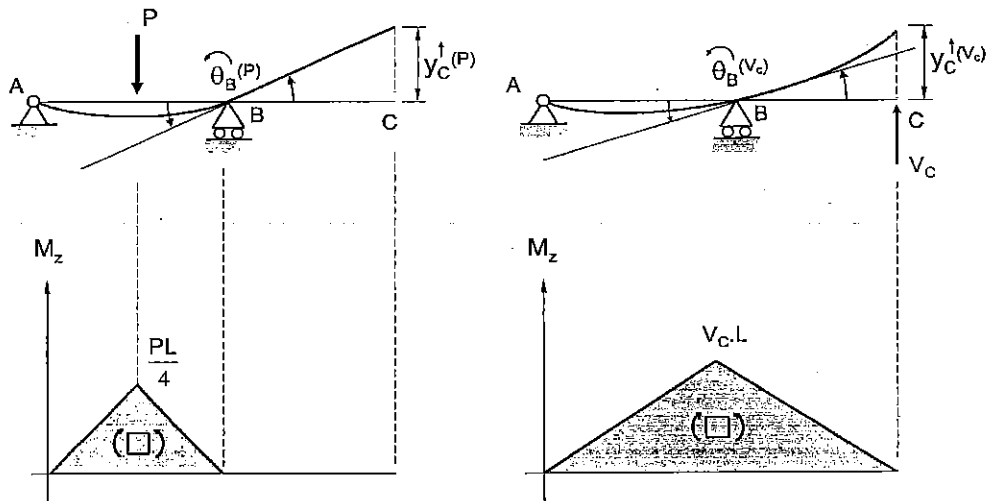


Figura 2.10

Los valores que se obtienen aplicando los teoremas de Mohr son:

$$y_c^{(P)} (\uparrow) = \bar{\theta}_B^{(P)} \cdot L = \frac{PL^2}{16EI} \cdot L = \frac{PL^3}{16EI}$$

$$y_c^{(V_c)}(\uparrow) = \bar{\theta}_B^{(V_c)} \cdot L + y_{CB} = \frac{(V_c \cdot L) \cdot L}{3EI} \cdot L + \frac{V_c \cdot L^3}{3EI} = \frac{2V_c \cdot L^3}{3EI} \quad (2.9)$$

que, sustituidos en (2.8):

$$y_c = y_c^{(P)} + y_c^{(V_c)} = \frac{PL^3}{16EI} + \frac{2V_c \cdot L^3}{3EI} = 0 \Rightarrow V_c = -\frac{3P}{32} \quad (2.10)$$

Las restantes reacciones se obtienen aplicando las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow V_A \cdot L - P \cdot \frac{L}{2} + \frac{3P}{32} \cdot L = 0 \Rightarrow V_A = \frac{13P}{32} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow \frac{13P}{32} - P + V_B - \frac{3P}{32} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{22P}{32} \end{aligned} \quad (2.11)$$

En la fig. 2.11 se representa el diagrama de momentos flectores.

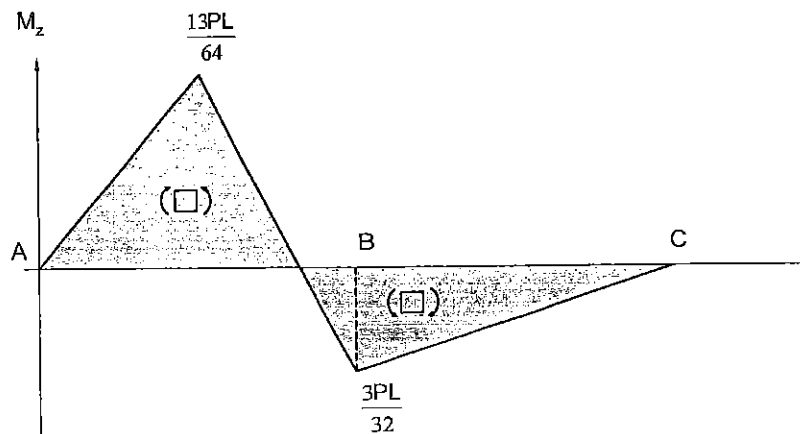


Figura 2.11. Diagrama de momentos flectores

b) Incógnita: un esfuerzo de sección

Un procedimiento de resolución alternativo al anterior es elegir como incógnita el momento flector M_B en la sección de apoyo B. De acuerdo con la metodología del método de las fuerzas hay que comenzar eliminando la ligadura que da lugar a este momento, lo que equivale a introducir una articulación en la sección B. Al introducir esta articulación se permite que los giros en B a uno y otro lado sean totalmente independientes o, lo que es lo mismo, que los tramos AB y BC se comporten, cada uno de ellos, como una viga biapoyada y totalmente independiente de la otra, que es precisamente lo que se indica en la fig. 2.12.

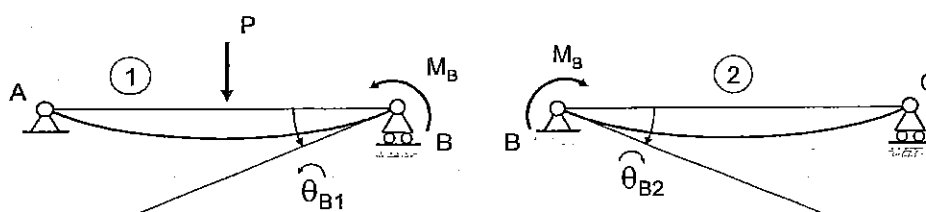


Figura 2.12

La estructura básica resultante la constituyen esas dos vigas isostáticas, en las que para reproducir la condición real en B, se ha añadido el momento M_B , tal y como se prescribe en el método de las fuerzas. Finalmente, la condición de compatibilidad de deformaciones que debe imponerse es la de tangente única en B o, lo que es lo mismo, el giro en B en una y otra viga debe ser idéntico: mismo valor y en el mismo sentido. Es decir [cfr. fig. (2.12)]:

$$\bar{\theta}_{B1} = -\bar{\theta}_{B2} \quad (2.12)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican que se trata de las vigas AB y BC, respectivamente. Aplicando superposición para obtener dicho giro en la viga AB, se obtienen los valores:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{B1} &= \bar{\theta}_{B1}^{(P)} + \bar{\theta}_{B1}^{(M_B)} = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_B \cdot L}{3EI} \\ \bar{\theta}_{B2} &= \frac{M_B \cdot L}{3EI} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Finalmente, aplicando la condición de compatibilidad (2.12), se obtiene:

$$\bar{\theta}_{B1} = -\bar{\theta}_{B2} \Rightarrow \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_B \cdot L}{3EI} = -\frac{M_B \cdot L}{3EI} \Rightarrow M_B = -\frac{3PL}{32} \quad (2.14)$$

valor que como es lógico coincide con el obtenido con el procedimiento de resolución empleado anteriormente. Conocido M_B ya es posible representar el diagrama de momentos flectores (suma de los diagramas de las vigas isostáticas de la fig. 2.12), y calcular las reacciones en los apoyos.

2.4. VIGAS CONTINUAS. ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

En la resolución del último ejemplo del apartado anterior se planteó un método alternativo de cálculo, consistente en elegir como incógnita hiperestática el momento flector en la sección de la viga situada sobre el apoyo intermedio. De esta forma la

viga inicial sustentada en tres apoyos (viga de dos vanos), se convertía en dos vigas biapoyadas y por tanto isostáticas; a continuación se aplicaba la condición de compatibilidad de que el giro en el apoyo común en ambas vigas fuera el mismo, que es lo mismo que decir que la tangente a la elástica en la sección de ese apoyo intermedio B de la viga original es única.

Este procedimiento se puede generalizar al análisis de vigas sustentadas en un número cualquiera de apoyos, dando origen a un procedimiento clásico de resolución para este tipo de vigas, a las que se denomina **vigas continuas**, que se basa en la utilización de una ecuación estándar que se conoce con el nombre de **ecuación de los tres momentos**. En este epígrafe se va a deducir esta ecuación.

Conviene precisar, en primer lugar, *qué se entiende por viga continua*. Se define como tal aquella viga que está sustentada por más de dos apoyos y que no tiene articulaciones intermedias. Las vigas continuas suelen disponerse de forma que uno de los apoyos es fijo y los demás móviles. En este caso, el grado de hiperestaticidad de una viga continua sustentada en n apoyos sería: $h = n - 2$.

2.4.1. Ecuación de los tres momentos

Para obtener la ecuación de los tres momentos consideremos dos vanos contiguos intermedios cualesquiera de una viga continua, sustentados en los apoyos $(n-1)$, (n) y $(n+1)$, tal como se indica en la fig. 2.13. En dicha figura se indican también las cargas que actúan en este tramo de la viga, cargas contenidas en el plano de la estructura. A los vanos los denominaremos genéricamente I y II (respectivos módulos de elasticidad E_I y E_{II} ; momentos de inercia I_I e I_{II} ; longitudes L_I y L_{II}).

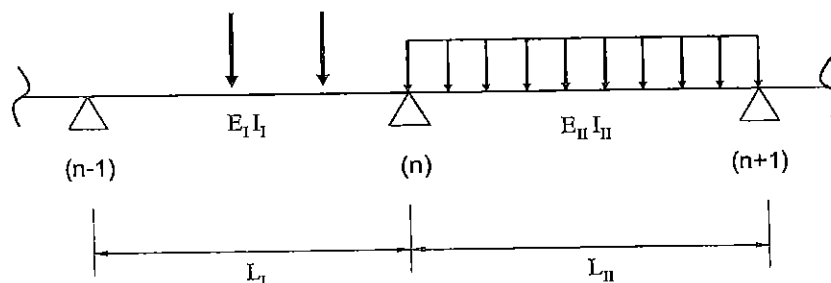


Figura 2.13. Tramo de viga continua sobre tres apoyos intermedios

Para analizar la viga continua se eligen como incógnitas hiperestáticas los momentos en las secciones de apoyo. Como se indicó al estudiar la viga continua del ejemplo 3, esto equivale a introducir unas articulaciones en dichas secciones y considerar cada

vano como una viga biapoyada que bajo la acción de las cargas aplicadas se comporta independientemente de las vigas que representan los vanos adyacentes.

Para el tramo de viga continua que estamos considerando esos momentos son M_{n-1} , M_n y M_{n+1} ; para el desarrollo que se va a realizar se supondrán positivos, tal y como se indica en la fig. 2.14. En esta figura se indican las cargas que actúan en ambos vanos contiguos considerados como vigas independientes: son suma de las respectivas cargas exteriores más los momentos en las secciones extremas. Para garantizar que

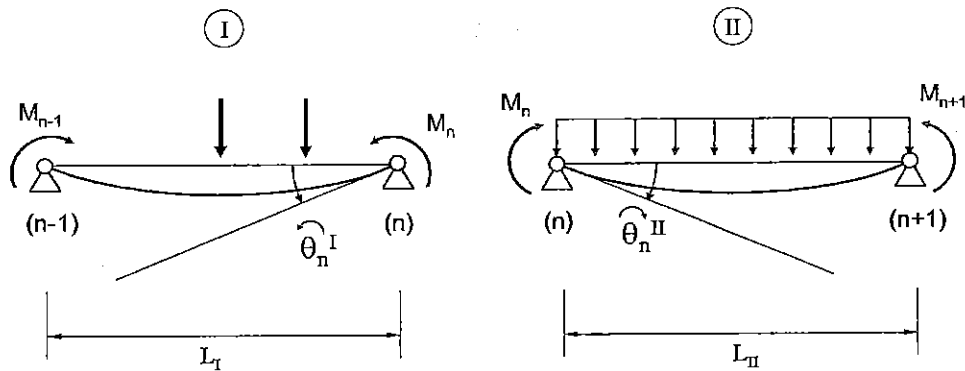


Figura 2.14. Vigas biapoyadas resultantes del tramo de viga continua

cada una de estas vigas se comporta igual a como lo hace el correspondiente vano en la viga real, habrá que imponer determinadas condiciones de compatibilidad de las deformaciones: concretamente, que el giro en cada uno de los apoyos sea único, como de hecho lo es en la viga real.

Particularizando al tramo de viga continua que se está considerando, la condición de compatibilidad de deformaciones implica que los ángulos girados en el apoyo común (n) sean de idéntico valor y del mismo sentido en las vigas I y II; es decir:

$$\vec{\theta}_n^I = -\vec{\theta}_n^{II} \quad (2.15)$$

Para obtener estos giros se aplicará una vez más el principio de superposición, calculando por separado el efecto de las cargas exteriores y el de los momentos flectores en las secciones de apoyo.

En la fig. 2.15 se representan los diagramas de momentos flectores de la viga I debidos, respectivamente, a las cargas exteriores y a los momentos hiperestáticos. El giro en el apoyo (n) será:

$$\bar{\theta}_n^I = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 = \frac{S_I \cdot x_G^I}{L_I} + \left(\frac{M_{n-1} \cdot L_I}{6E_I I_I} + \frac{M_n \cdot L_I}{3E_I I_I} \right) \quad (2.16)$$

donde S_I representa el cociente entre el área del diagrama de momentos flectores debido a las cargas exteriores en la viga I y la rigidez a flexión de dicha viga, que se supone constante; y x_G^I es la distancia desde el centro de gravedad de S_I al apoyo izquierdo ($n-1$).

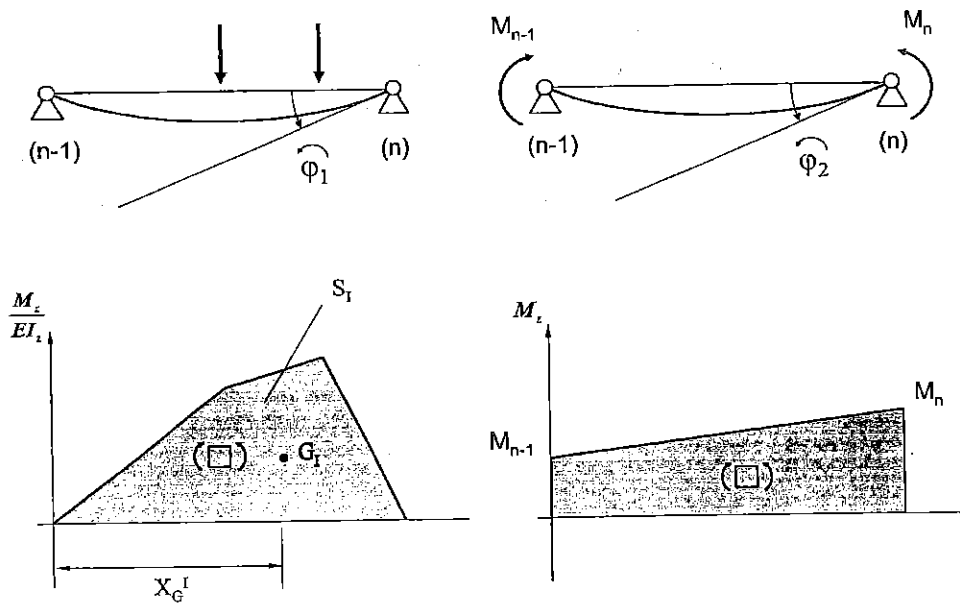


Figura 2.15. Diagramas de momentos flectores de la viga I

Para la viga II se procede de modo análogo. En la fig. 13.16 se representan los diagramas de momentos flectores correspondientes. Suponiendo de nuevo rigidez a flexión constante, el giro en el apoyo (n) en esta viga será:

$$\bar{\theta}_n^{II} = \bar{\varphi}_3 + \bar{\varphi}_4 = \frac{S_{II} \cdot x_G^{II}}{L_{II}} + \left(\frac{M_n \cdot L_{II}}{3E_{II} I_{II}} + \frac{M_{n+1} \cdot L_{II}}{6E_{II} I_{II}} \right) \quad (2.17)$$

donde ahora S_{II} representa el cociente entre el área del diagrama de momentos flectores debido a las cargas exteriores en la viga II y la rigidez a flexión de dicha viga, y x_G^{II} es la distancia desde el centro de gravedad de S_{II} al apoyo derecho ($n+1$).

Imponiendo la condición de compatibilidad de deformaciones (2.15):

$$\frac{S_I \cdot x_G^I}{L_I} + \left(\frac{M_{n-1} \cdot L_I}{6E_I I_I} + \frac{M_n \cdot L_I}{3E_I I_I} \right) = - \frac{S_{II} \cdot x_G^{II}}{L_{II}} - \left(\frac{M_n \cdot L_{II}}{3E_{II} I_{II}} + \frac{M_{n+1} \cdot L_{II}}{6E_{II} I_{II}} \right) \quad (2.18)$$

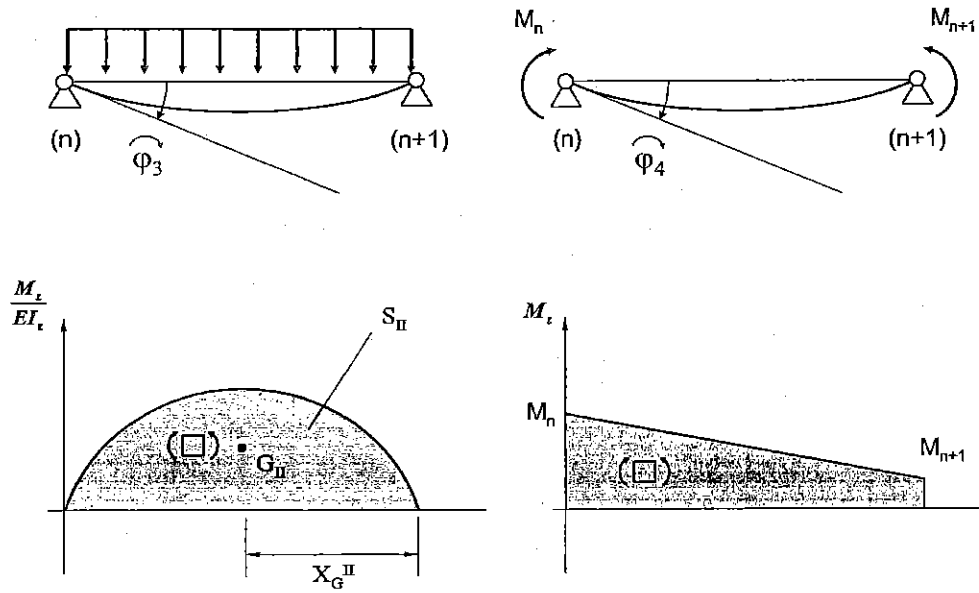


Figura 2.16. Diagramas de momentos flectores de la viga II

Multiplicando ambos miembros por 6 y agrupando términos, resulta la ecuación:

$$\frac{M_{n-1} \cdot L_I}{E_I I_I} + 2M_n \cdot \left(\frac{L_I}{E_I I_I} + \frac{L_{II}}{E_{II} I_{II}} \right) + \frac{M_{n+1} \cdot L_{II}}{E_{II} I_{II}} = -6 \left(\frac{S_I \cdot x_G^I}{L_I} + \frac{S_{II} \cdot x_G^{II}}{L_{II}} \right) \quad (2.19)$$

conocida como *ecuación de Clapeyron* o *ecuación de los tres momentos*.

Para el caso particular de una viga del mismo material y sección constante en ambos vanos, la ecuación (2.19) se simplifica a:

$$M_{n-1} \cdot L_I + 2M_n \cdot (L_I + L_{II}) + M_{n+1} \cdot L_{II} = -6 \left(\frac{A_I \cdot x_I}{L_I} + \frac{A_{II} \cdot x_{II}}{L_{II}} \right) \quad (2.20)$$

donde A_I y A_{II} representan directamente las áreas de los diagramas de momentos flectores debidos a las cargas exteriores, y x_I y x_{II} las respectivas distancias de los centros de gravedad de estas áreas.

La ecuación de los tres momentos se puede formular para los $n-2$ apoyos intermedios de la viga continua, obteniendo así $n-2$ ecuaciones con $n-2$ incógnitas, que son precisamente los momentos flectores en dichos apoyos intermedios.

Conocidos estos momentos, ya es posible representar el diagrama de momentos flectores de la viga continua. Para cada uno de sus vanos este diagrama se puede

obtener a partir del mismo vano considerado como viga biapoyada y, por consiguiente, suma del debido a las cargas exteriores que sobre ella actúan más el correspondiente a los momentos hiperestáticos obtenidos. A partir de este diagrama y aplicando ecuaciones de equilibrio adecuadas pueden calcularse las reacciones en todos los apoyos.

Para ilustrar el método, consideremos el mismo **ejemplo 3** del epígrafe anterior (fig. 2.9.a). En la fig. 2.17 se representan sus dos vanos considerados como vigas isostáticas, así como los correspondientes diagramas de momentos flectores.

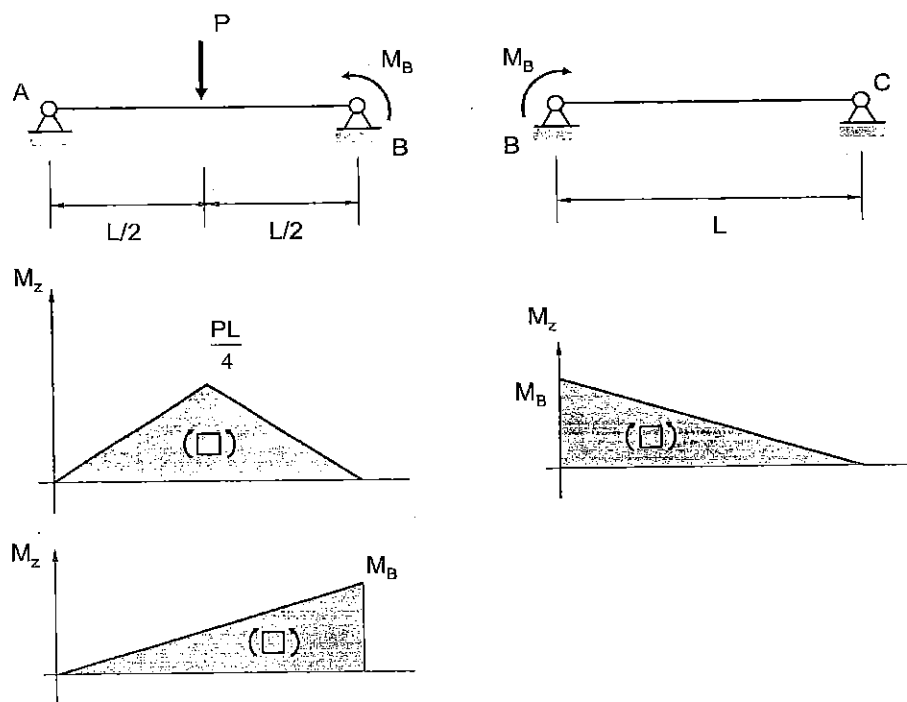


Figura 2.17. Viga continua de dos vanos

La viga tiene un único apoyo intermedio y, por consiguiente, hay una sola incógnita hiperestática, el momento M_B en la sección B . Aplicando la ecuación (2.20), en la que M_B debe figurar en el sentido indicado en la figura (positivo):

$$A_I = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{PL}{4} = \frac{PL^2}{8}; \quad x_I = \frac{L}{2}; \quad A_{II} = 0; \quad x_{II} = 0$$

$$2M_B(L+L) = -6 \left(\frac{\frac{PL^2}{8} \cdot \frac{L}{2}}{L} \right) \Rightarrow M_B = -\frac{3PL}{32} \quad (2.21)$$

Conocido M_B ya es posible representar el diagrama de momentos flectores (suma de los diagramas de las vigas isostáticas de la fig. 2.17), obteniéndose el diagrama de la fig. 2.11. Las reacciones en los apoyos pueden obtenerse mediante simple aplicación de ecuaciones de equilibrio. Por ejemplo, para el apoyo en A, suponiendo dicha reacción dirigida hacia arriba y teniendo en cuenta que el momento en la sección de aplicación de la carga P es de $13P/64$:

$$\frac{13P}{64} = V_A \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow V_A = \frac{13P}{32} \quad (2.22)$$

2.4.2. Casos singulares

La ecuación de los tres momentos puede utilizarse también cuando la viga continua no tiene la forma estándar considerada hasta el momento: por ejemplo, cuando en sus extremos haya empotramientos o se trate de extremos libres de enlaces (vano en voladizo). Para ello basta realizar en estos casos las transformaciones que a continuación se indican.

a) Empotramiento. Se sustituye el empotramiento por un apoyo simple y se prolonga la viga al otro lado del mismo añadiendo un vano que debe tener longitud nula o rigidez infinita. De esta forma se garantiza que la viga resultante tenga la forma estándar y, por consiguiente, pueda resolverse con la aplicación exclusiva de la ecuación de los tres momentos; y al mismo tiempo, que en esa sección el giro sea nulo y en ella pueda existir un momento (características ambas de un empotramiento).

b) Voladizo o extremo libre de enlaces. Se sustituye por su efecto, en el apoyo más próximo. En la fig. 2.18, se incluye un ejemplo en el que se presentan los dos casos.

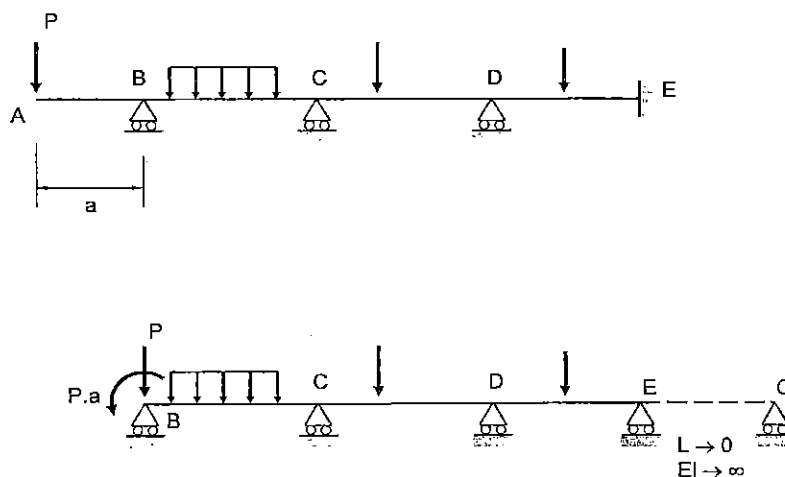


Figura 2.18. Viga continua con empotramiento y vano en voladizo

2.4.3. Aspectos estructurales de las vigas continuas

Algunas características reseñables de las vigas continuas son las siguientes::

1) Aún cuando se trata de estructuras hiperestáticas, en ellas no se originan tensiones térmicas cuando experimentan una variación uniforme de temperatura.

2) Si se compara una viga continua con un conjunto de vigas biapoyadas donde cada una de ellas se corresponde con uno de los vanos de la viga continua, de forma tal que este conjunto de vigas isostáticas soportase la misma carga total que la viga continua, se observaría que el momento flector máximo que se alcanza en la viga continua es menor que el momento máximo obtenido en el sistema de vigas biapoyadas.

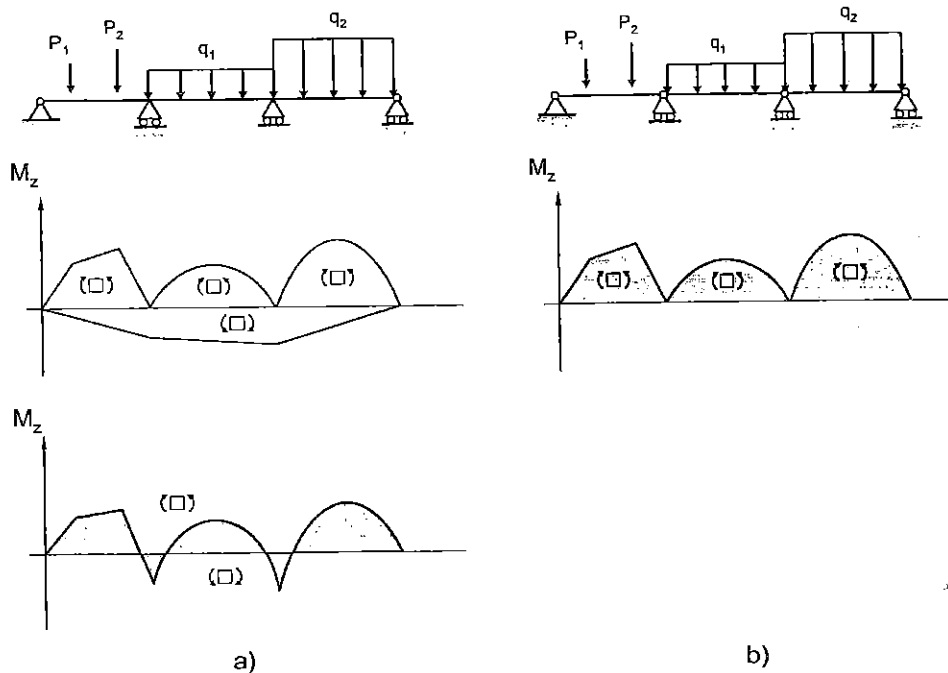


Figura 2.19. Comparación entre: a) una viga continua de 3 vanos; b) 3 vigas biapoyadas

La razón que explica esta propiedad se puede comprender considerando el ejemplo de la viga continua de tres vanos de la fig. 2.19. En la fig. 2.19.b se representa el diagrama de momentos flectores debido a las cargas exteriores obtenido cuando se considera cada vano como si se tratara de una viga articulada en sus extremos, es decir, una viga biapoyada; a este diagrama se le puede llamar isostático. Recuérdese, por otra parte, que para obtener el diagrama de momentos de la viga continua hay que superponer a este diagrama de las cargas exteriores el correspondiente a los momentos en las secciones de apoyo, diagrama que, por lo general, tiene sentido

contrario al anterior: es decir, esa superposición realmente es una resta, con lo que los máximos del diagrama de momentos resultante serán menores, en valor absoluto, que los máximos del diagrama isostático. Es lo que se ilustra en la fig. 2.19.a.

Esta es la razón por la que para cubrir una determinada distancia entre apoyos extremos, resulte más apropiada la utilización de una viga continua de n vanos que un sistema de n vigas contiguas biapoyadas.

3) Las flechas máximas son menores en la viga continua que en el caso del sistema de vigas isostáticas. Esta hecho tiene un interés práctico en los casos en que es preceptivo (por norma, etc.) que la flecha máxima no supere un determinado valor (por ejemplo, en los puentes grúa se requiere una flecha máxima no superior a un determinado porcentaje de la luz).

4) Pero las vigas continuas también poseen algunos inconvenientes estructurales frente a la posible alternativa de cubrir la distancia entre apoyos extremos mediante un sistema de vigas isostáticas adyacentes. El principal de ellos es la aparición de tensiones de flexión cuando se produce el asentamiento de alguno de los apoyos de la viga continua. En la fig. 2.20 se ilustra esta afirmación mediante la comparación del comportamiento entre una viga continua de tres vanos y un sistema de tres vigas isostáticas.

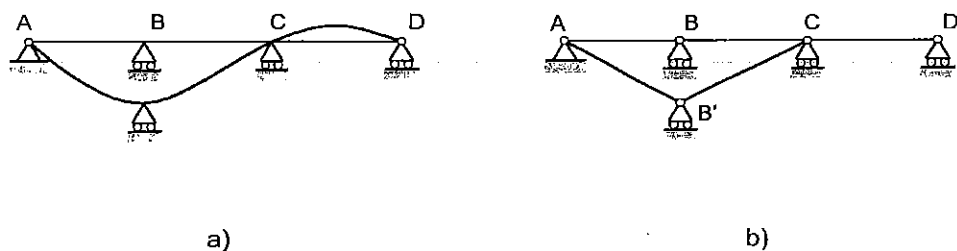


Figura 2.20. Efecto de un asentamiento: a) en la viga continua, b) en el sistema de vigas biapoyadas

Cuando uno de los apoyos sufre un asentamiento, por ejemplo el apoyo B , la viga continua experimenta una flexión (aparece una curvatura), necesaria para que se pueda mantener la continuidad de la pendiente en la configuración deformada; aparecen, por tanto, tensiones de flexión que tienen su causa en ese asentamiento. En cambio, en el sistema de vigas isostáticas cada viga se deforma de manera totalmente

independiente de las demás, y por ello al asentarse un apoyo (siempre que ese asentamiento sea pequeño), el conjunto queda inalterado: no aparecen, por tanto, deformaciones ni tensiones de flexión.

2.4.4. Cálculo de los esfuerzos debidos a asentamientos en los apoyos

En este apartado se describe la forma en que pueden calcularse los esfuerzos originados por asentamientos de los apoyos en una viga continua; concretamente veremos la manera en que puede modificarse la ecuación de los tres momentos (2.20) para tener en cuenta estos posibles asentamientos.

El punto de partida es idéntico al utilizado en su momento para obtener dicha ecuación: se consideran dos vanos contiguos intermedios cualesquiera de una viga continua, sustentados en los apoyos $(n-1)$, (n) y $(n+1)$ [cfr. fig. 2.13].

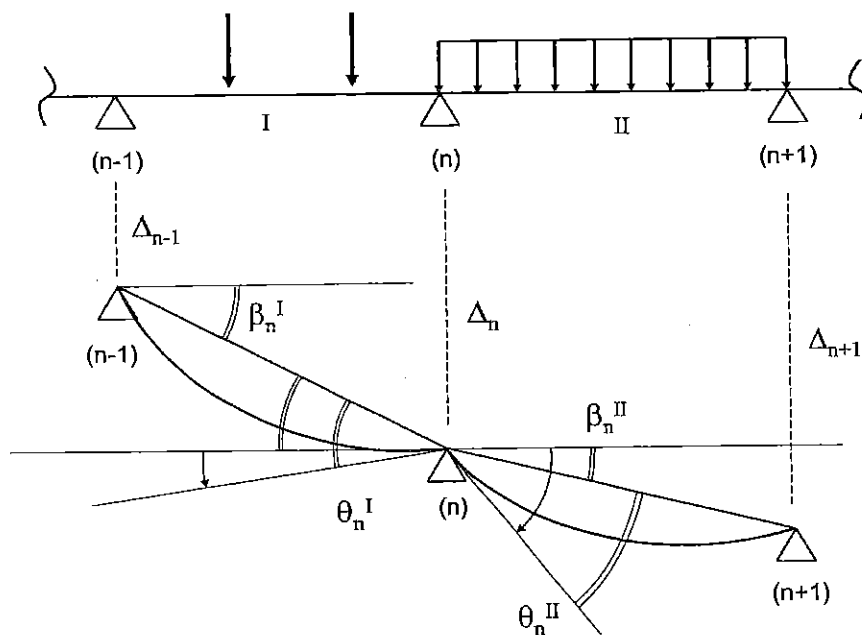


Figura 2.21. Asentamientos en los apoyos en vigas continuas

Para dar mayor generalidad, se supondrá que los tres apoyos experimentan unos asentamientos (pequeños desplazamientos verticales) de valores respectivos Δ_{n-1} , Δ_n , Δ_{n+1} (fig. 2.21). Llamaremos β_n^I y β_n^{II} a los ángulos horarios girados respecto a la horizontal por los vanos I y II, respectivamente, de tal forma que:

$$\beta_n^I = \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{L_I} ; \quad \beta_n^{II} = \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{L_{II}} \quad (2.23)$$

La condición (2.15) de tangente única en el apoyo central n sigue siendo la condición de compatibilidad de deformaciones aplicable, con la particularidad de que ahora al efecto de las cargas exteriores y al de los momentos en los apoyos, se superpone el giro debido a los asentamientos. Si, por ejemplo, se toma como referencia una horizontal que pasara por el apoyo n , dicha ecuación se transforma en [cfr. fig. 2.21]:

$$(\theta_n^I - \beta_n^I) = -(\theta_n^{II} + \beta_n^{II}) \quad (2.24)$$

donde los giros θ a un lado y otro del apoyo n son los formulados en (2.16) y (2.17). Teniendo esto en cuenta estas expresiones así como las indicadas en (2.23), resulta:

$$\frac{S_I \cdot x_G^I}{L_I} + \left(\frac{M_{n-1} \cdot L_I}{6E_I I_I} + \frac{M_n \cdot L_I}{3E_I I_I} \right) - \beta_n^I = -\frac{S_{II} \cdot x_G^{II}}{L_{II}} - \left(\frac{M_n \cdot L_{II}}{3E_{II} I_{II}} + \frac{M_{n+1} \cdot L_{II}}{6E_{II} I_{II}} \right) - \beta_n^{II} \quad (2.25)$$

Para el caso de momento de inercia I constante y mismo material de módulo de elasticidad E en ambos vanos, esta ecuación se simplifica, resultando:

$$M_{n-1} \cdot L_I + 2M_n \cdot (L_I + L_{II}) + M_{n+1} \cdot L_{II} = -6 \left(\frac{A_I \cdot x_I}{L_I} + \frac{A_{II} \cdot x_{II}}{L_{II}} \right) - 6EI (\beta_n^{II} - \beta_n^I) \quad (2.26)$$

que no es sino la formulación que adopta la ecuación de los tres momentos para tener en cuenta posibles asentamientos en los apoyos. Evidentemente, si no existen tales asentamientos la ecuación coincide con la (2.20) obtenida previamente.

2.5. INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE ESTRUCTURAS DE NUDOS RÍGIDOS

2.5.1. Definiciones

En epígrafes anteriores de este tema se ha expuesto, en forma simplificada, la metodología general a seguir en la aplicación del método de las fuerzas a la resolución de estructuras hiperestáticas cuya forma fundamental de trabajo es la flexión, si bien de momento su aplicación se ha restringido a estructuras formadas por una sola barra. Ahora se generalizará su aplicación a estructuras formadas por varias barras.

Recordemos que a las estructuras formadas por la unión de barras prismáticas se las conoce con el nombre de **estructuras reticulares**, nombre derivado de la forma de

retícula a la que se asemejan estas estructuras. En ellas, las secciones de unión de unas barras con otras se llaman **nudos** y cada barra tiene siempre dos nudos extremos. La unión de unas barras con otras en los nudos puede hacerse de distintas formas, siendo las más importantes:

- **Unión rígida** (o empotrada), que impone desplazamientos y giros comunes al nudo y a las barras que en él concurren, de tal manera que entre ellos se transmiten fuerzas y momentos.
- **Unión articulada**, que permite giros distintos en los extremos de las barras que concurren en el nudo, y en las que no se transmite momento, pero sí fuerza, a través de la articulación.
- **Unión flexible** (o semirrígida), que no es ni perfectamente articulada ni perfectamente rígida. Permite un determinado giro relativo entre los elementos que en él concurren y además transmite fuerzas y momentos.

En un tema anterior se estudiaron algunos casos muy sencillos de estructuras de barras unidas exclusivamente mediante nudos articulados, las **celosías**, y se analizaron tanto celosías isostáticas como hiperestáticas. En lo que sigue se considerarán estructuras en las que la mayor parte de sus nudos son rígidos (también pueden tener algún nudo articulado), y que se caracterizan, por consiguiente, porque la forma fundamental de trabajo de todos, o de muchos de sus elementos, es la flexión.

En la fig. 2.22 se muestran dos estructuras muy similares, con idénticos apoyos, geometría y carga, cuya única diferencia es el tipo de unión (nudo B) de sus dos

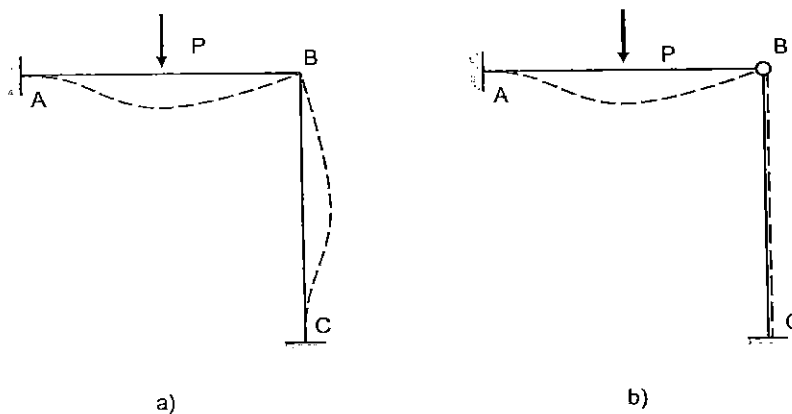


Figura 2.22. a) Nudo rígido; b) Nudo articulado

elementos: en la fig. 2.22a dicha unión es rígida, mientras que en la fig. 2.22b es articulada. Debido a estas diferencias los esfuerzos y deformaciones en ambas estructuras serán diferentes. En la estructura de la fig. 2.22a se mantiene la compatibilidad de giros entre la viga AB y la columna BC (el giro en el extremo B es el mismo para viga y columna), con lo cual la rigidez a flexión de la columna colaborará para disminuir las deformaciones de la viga. En la estructura de la fig. 2.22b, al no mantenerse esta compatibilidad de giros la columna no trabajará a flexión, con lo cual la deformación de la viga será mayor que en el otro caso.

2.5.2. Hipótesis de cálculo

Además de las hipótesis habituales que se vienen considerando (comportamiento elástico lineal de la estructura bajo las acciones a que está sometida; pequeñas deformaciones; ley de Navier de las secciones planas), *en el estudio de la deformación se considerará únicamente el efecto del momento flector, despreciándose el de los esfuerzos axiales y cortantes*. Por consiguiente, por despreciar el efecto del esfuerzo axial no se tienen en cuenta los posibles alargamientos o acortamientos de las barras: al deformarse las barras no cambian su longitud o, lo que es lo mismo, para una barra cualquiera no hay desplazamiento relativo entre sus nudos extremos en la dirección de su eje.

Esto implica, por ejemplo, que en la estructura de la fig. 2.23 los nudos B y C no tengan desplazamiento vertical, y que el desplazamiento horizontal δ sea el mismo para ambos, perpendicular a las barras AB y DC , respectivamente.

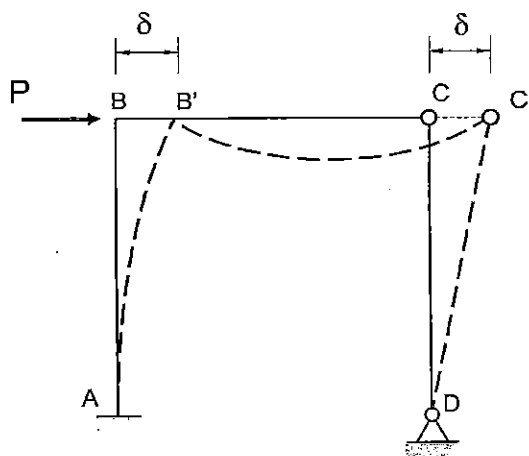


Figura 2.23. Hipótesis sobre la deformación

2.5.3. Estructuras isostáticas e hiperestáticas

En lo que sigue se analizarán tanto estructuras isostáticas como hiperestáticas, externas y/o internas, de pequeño grado de hiperestaticidad. El objetivo no es tanto el capacitar para poder realizar un análisis detallado de cualquier estructura, para lo cual existen métodos de cálculo estandarizados que no son objeto de esta materia, sino el comprender cómo es el comportamiento físico de la estructura bajo las sollicitaciones a las que está sometida, así como la forma en que han de aplicarse las condiciones de equilibrio, compatibilidad de deformaciones y leyes de comportamiento que deben satisfacerse.

2.5.4. Simplificaciones en estructuras simétricas

a) Estados de carga simétricos y antisimétricos (o antimétricos)

Si una estructura es simétrica su análisis admite ciertas simplificaciones. **Una estructura plana se considera simétrica si es posible definir un eje respecto del cual la estructura tiene simetría tanto en la geometría, como en las propiedades mecánicas y en las condiciones de apoyo** (si se trata de una estructura espacial la simetría se define respecto de un plano).

Se dice que una estructura simétrica está sometida a un **estado de carga simétrico** si las cargas a un lado del eje de simetría de la estructura son imagen directa de las cargas que actúan al otro lado del eje, es decir, cuando al girar el sistema de cargas actuantes 180° alrededor del eje de simetría de la estructura todas las fuerzas y momentos coinciden en módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. Un estado de carga simétrico da lugar a que la respuesta de la estructura también lo sea: es decir, las reacciones, esfuerzos de sección y deformaciones también son simétricas. Es el caso de la estructura de la figura 2.24.a.

Un estado de carga es **antisimétrico (o antimétrico)** si las cargas a un lado del eje de simetría de la estructura son imagen inversa de las cargas que actúan al otro lado del eje, es decir, cuando al girar el sistema de cargas actuantes 180° alrededor del eje de simetría de la estructura todas las fuerzas y momentos coinciden en módulo, dirección y punto de aplicación, pero tienen sentido contrario. Un estado de carga antisimétrico da lugar a que la respuesta de la estructura también lo sea: es decir, las reacciones, esfuerzos de sección y deformaciones son antisimétricas. Es el caso representado en la fig. 2.24.b.

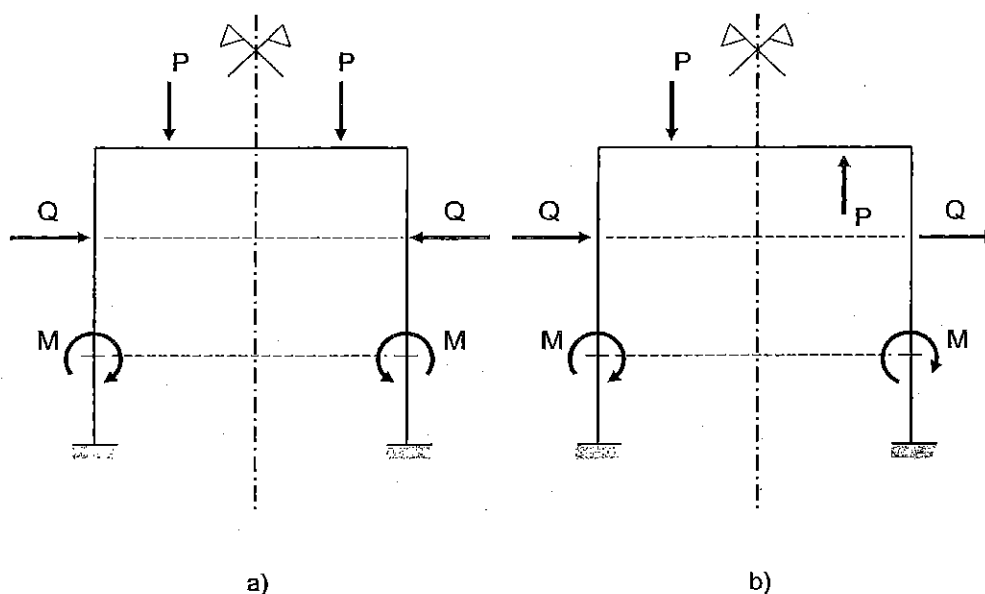


Figura 2.24. a) Estado de carga simétrico; b) Estado de carga antisimétrico

b) Descomposición de estados de carga

Cualquier estado de carga puede descomponerse en la suma de un estado de carga simétrico más un estado de carga antisimétrico. El proceso para realizar esta descomposición es el siguiente:

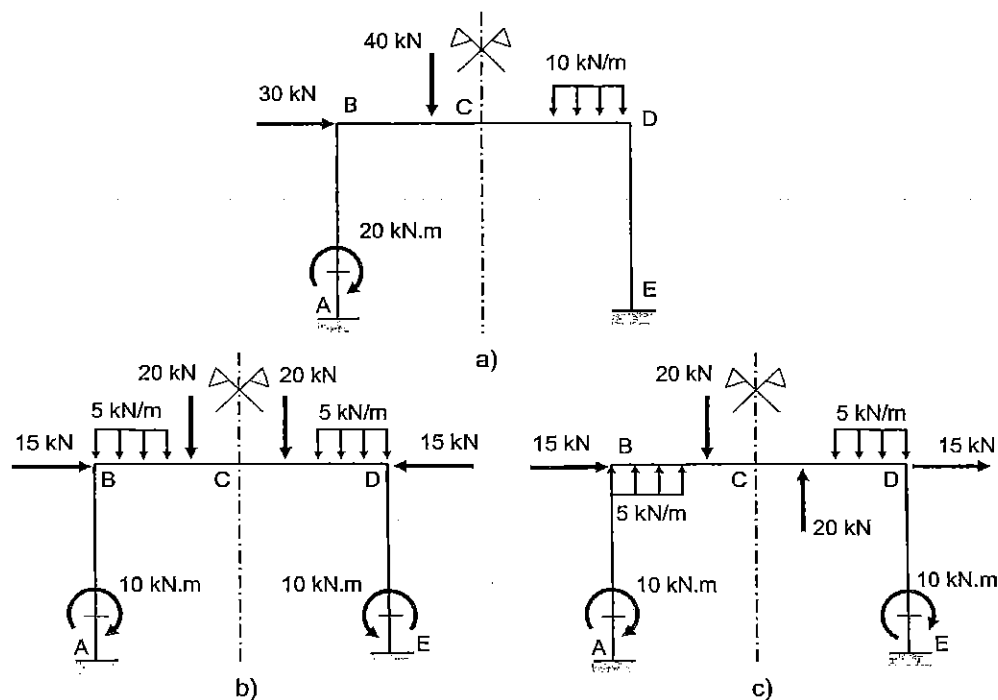


Figura 2.25. Descomposición de un estado de carga; a) Estado general; b) Estado de carga simétrico; c) Estado de carga antisimétrico

1. Las cargas que en el estado inicial ya son simétricas (o antisimétricas) se incluyen directamente en el estado de cargas simétrico (o en el antisimétrico).
2. Cada una de las cargas que no son simétricas ni antisimétricas se divide en dos cargas iguales: una de ellas pasa al estado de cargas simétrico y la otra al estado de cargas antisimétrico. A continuación, para completar estos dos estados de carga, en la posición simétrica en cada uno de ellos se colocan dos cargas del mismo tipo con igual módulo (la mitad que el de la carga inicial), la misma dirección y sentido contrario; de esta forma estas dos últimas cargas se anulan entre sí, no se altera el equilibrio, y se mantienen las características de simetría y antimetría de ambos sistemas de cargas.

En la fig. 2.25 se muestra un ejemplo de descomposición de un estado de carga.

c) Simplificaciones en estructuras simétricas

Cuando el estado de carga es simétrico, en las secciones transversales situadas sobre el eje (o el plano) de simetría son nulos los esfuerzos y los desplazamientos antisimétricos.

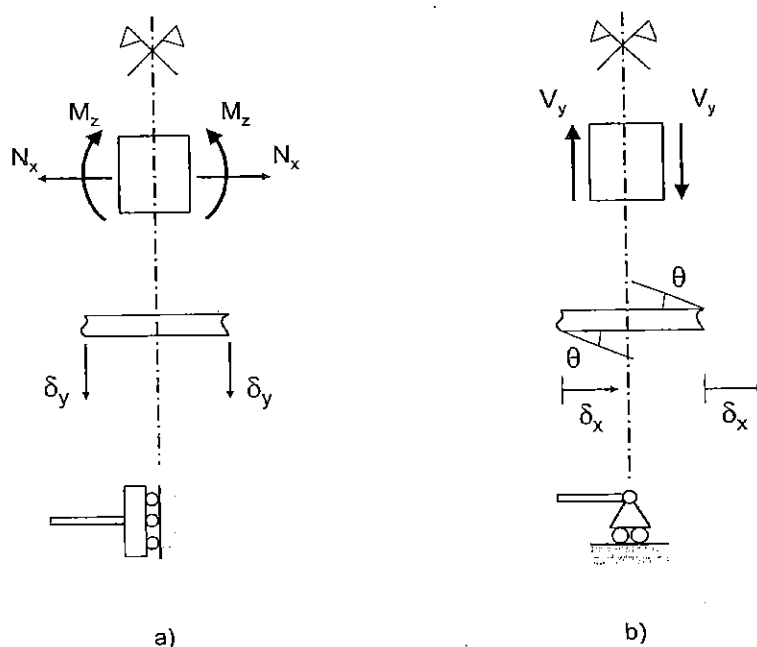


Figura 2.26. Esfuerzos y desplazamientos: a) Simétricos; b) Antisimétricos

Cuando el estado de carga es antisimétrico, en las secciones transversales situadas sobre el eje (o el plano) de simetría son nulos los esfuerzos y los desplazamientos simétricos.

En la fig. 2.26 se indican cuáles son los esfuerzos de sección y los desplazamientos de uno y otro tipo para una estructura plana.

Por consiguiente, en una estructura simétrica plana y para un estado de carga simétrico, en la sección situada sobre el eje de simetría sólo existirán los esfuerzos N_x y M_z y el desplazamiento vertical δ_y . Esta sección se comporta como lo haría un empotramiento con posibilidad de deslizarse verticalmente (fig.2.26.a). En cambio, en una estructura simétrica plana y para un estado de carga antisimétrico, en la sección situada sobre el eje de simetría sólo existirán el esfuerzo cortante V_y , el desplazamiento horizontal δ_x y el giro θ . Esta sección se comporta como lo haría un apoyo articulado deslizante (fig.2.26.b).

De estas consideraciones se deduce que para un estado de carga simétrico la estructura es **no traslacional**, es decir, sus nudos no experimentan desplazamientos finitos en dirección perpendicular al eje (o plano) de simetría. En cambio, para un estado de carga antisimétrico la estructura, por lo general, sí será **traslacional**.

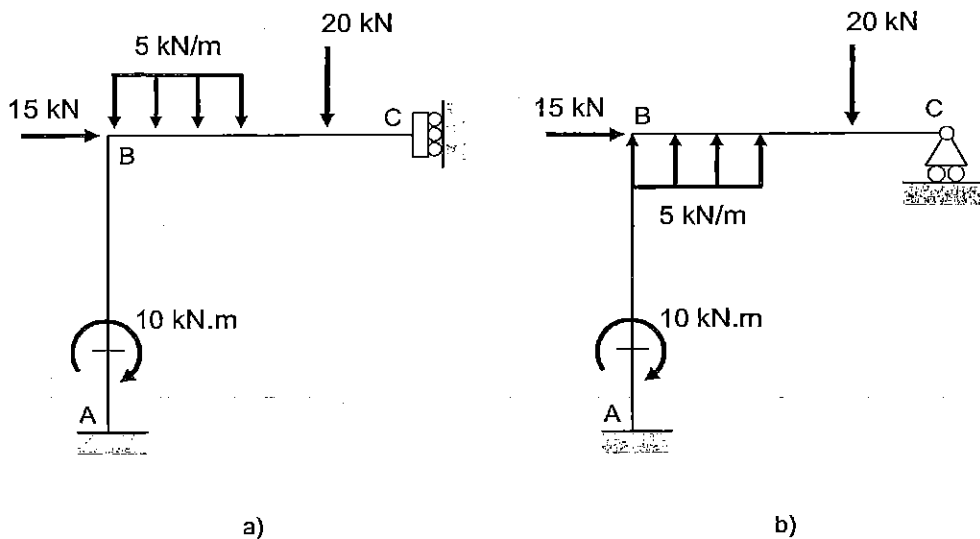


Figura 2.27. Simplificación: a) Estado de carga simétrico; b) Estado de carga antisimétrico

Basándose en estas mismas propiedades, el análisis de una estructura simétrica se puede reducir al análisis de la mitad de la estructura. Para ello se comenzará descomponiendo la carga original en la suma de dos estados de carga, uno simétrico y otro antisimétrico. Para analizar cada uno de ellos bastará considerar media estructura, imponiendo en los puntos en los que el eje (o el plano de simetría) corta a la estructura las condiciones de contorno correspondientes a ese estado de carga

(simétrico o antisimétrico). Una vez analizada esa media estructura, las reacciones, esfuerzos y desplazamientos en la otra mitad se obtienen a partir de la condición de simetría (o antisimetría). Los valores totales de estas magnitudes en la estructura original serán la suma de los obtenidos para ambos estados de carga, simétrico y antisimétrico.

En la fig. 2.27 se muestra esta simplificación para la estructura de la fig.2.25. La fig.2.27.a corresponde al estado de carga simétrico, y la fig. 2.27.b al estado de carga antisimétrico.

2.5.5. Procedimientos de resolución de estructuras de nudos rígidos

Por su propia naturaleza, *la resolución de una estructura isostática no debe plantear ninguna dificultad especial*: mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio se calculan reacciones en los apoyos y esfuerzos de sección; conocidos éstos pueden calcularse valores cualesquiera de las deformaciones en los distintos elementos de la estructura (por ej., mediante el uso de los teoremas de Mohr); y a partir de las deformaciones y mediante la adecuada formulación de las condiciones de compatibilidad de las mismas, será posible obtener el desplazamiento o giro en cualquier sección de la estructura.

En cambio y como es sabido, *la resolución de una estructura hiperestática requiere la consideración simultánea de esas tres condiciones: equilibrio, ley de comportamiento y compatibilidad de deformaciones*. En lo que sigue se van a describir algunos procedimientos generales, basados en el método de las fuerzas, aplicables a la resolución de estructuras hiperestáticas de bajo grado de hiperestaticidad, con independencia de que la estructura sea simétrica o no lo sea. Como es natural, si la estructura es simétrica, para su resolución se pueden aplicar las simplificaciones vistas en el epígrafe anterior; sin embargo, esto no es estrictamente necesario: pueden prescindirse de esas simplificaciones derivadas de la simetría y analizarse por los procedimientos generales que a continuación se describen.

1) Incógnitas: Reacciones en los apoyos

La primera decisión es elegir las incógnitas hiperestáticas con las que se va a formular el problema: reacciones en los apoyos o esfuerzos de sección. Si se opta por las reacciones, el proceso a seguir es estrictamente el indicado en el epígrafe 2.3 al describir el proceso de aplicación del método de las fuerzas: liberar las condiciones de

enlace que dan lugar a esas reacciones hiperestáticas y formular las correspondientes condiciones de compatibilidad de las deformaciones impuestas por los enlaces reales.

Por lo general, este procedimiento es fácil de aplicar cuando la estructura es de muy pequeño grado de hiperestaticidad y tiene una forma geométrica sencilla; fuera de estos casos, la formulación de las ecuaciones de compatibilidad puede llegar a ser bastante complicada. Es lo que fácilmente se comprende sin más que considerar la estructura hiperestática de grado 3 de la fig. 2.28.a. Elegidas como incógnitas del problema las reacciones en el empotramiento D , las condiciones de compatibilidad de las deformaciones serán:

$$\delta_{Dx} = 0; \quad \delta_{Dy} = 0; \quad \theta_D = 0 \quad (2.27)$$

valores que, evidentemente, pueden obtenerse en la estructura isostática básica de la fig. 2.28.b. Sin embargo esa obtención entraña una dificultad no despreciable, como fácilmente puede comprobarse.

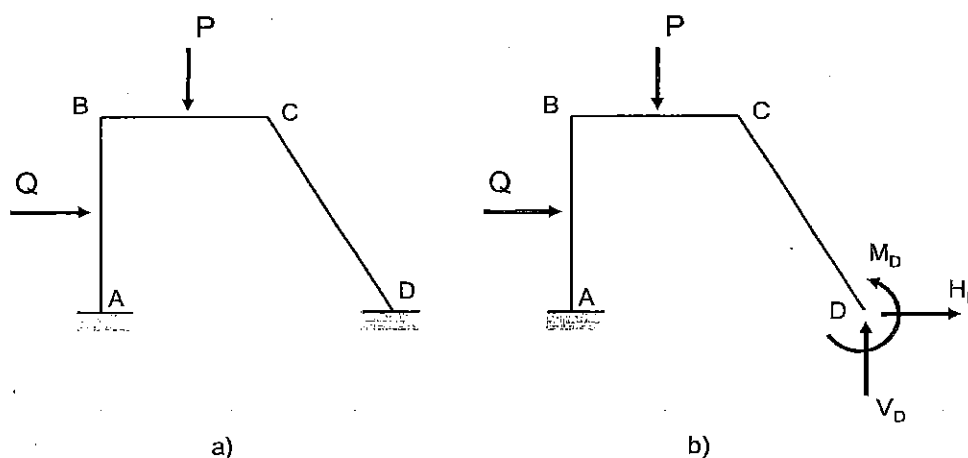


Figura 2.28. Incógnitas: Reacciones en los apoyos

Para ilustrar la metodología que se acaba de describir considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. "Para la estructura de la fig. 2.29.a, calcular las reacciones, dibujar el diagrama de momentos flectores y obtener el giro del nudo B".

Se trata de una estructura de dos barras hiperestática de grado 1. Para su resolución se elige como incógnita la reacción horizontal $H_C = R$ en el apoyo C. En la fig. 2.29.b. se representa la correspondiente estructura isostática básica, la cual resulta de

eliminar de la estructura original el enlace que da lugar a R ; está sometida a esta fuerza R más las cargas exteriores que actúan en la estructura original (carga P).

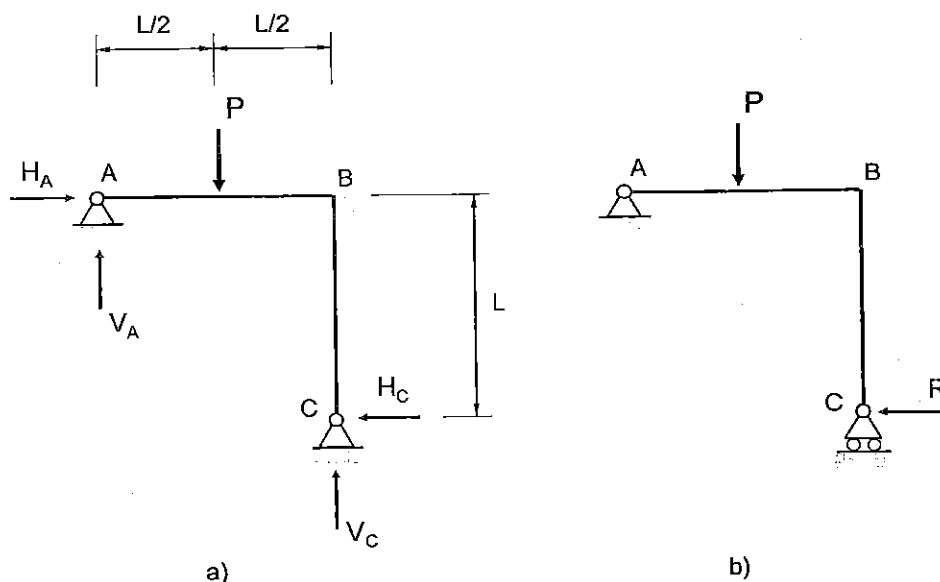


Figura 2.29. a) Estructura real; b) Estructura básica

La condición de compatibilidad de deformaciones a imponer es que el desplazamiento horizontal de C en la estructura isostática básica sea nulo, es decir,

$$\delta_{Cx} = \delta_{Cx}^{(P)} + \delta_{Cx}^{(R)} = 0 \quad (2.28)$$

expresión en la que ya se indica que dicho desplazamiento se va a calcular aplicando el principio de superposición.

En cuanto al primer sumando (contribución de la carga P), en la fig. 2.30.a se representa el diagrama de momentos en la estructura básica debido a la acción de P y en la fig. 2.30.b se ilustra el procedimiento para su cálculo, que incluye las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{Cx}^{(P)} &= \theta_B^{(P)} \cdot L \\ \theta_B^{(P)} &= \frac{\delta_{AB}}{L} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{PL}{4} \cdot \frac{L}{2} \right) = \frac{PL^2}{16EI} \\ \bar{\delta}_{Cx}^{(P)} &= \frac{PL^3}{16EI} \end{aligned} \quad (2.29)$$

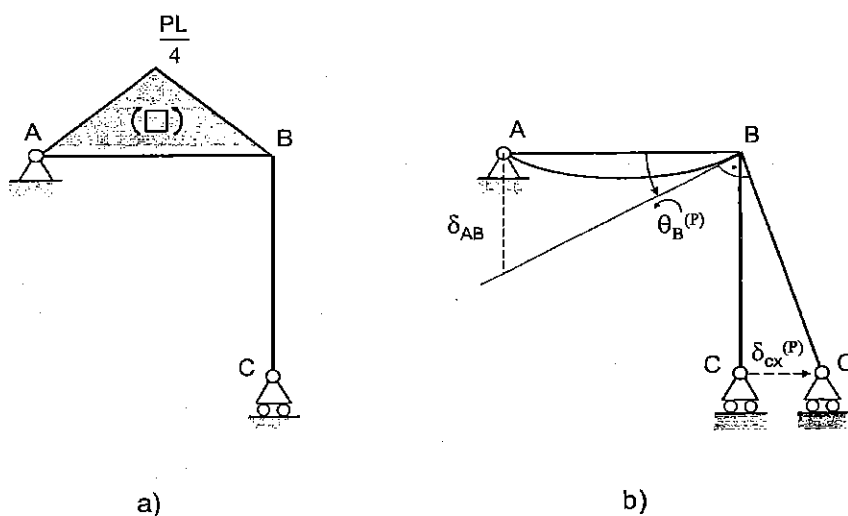


Figura 2.30. Cálculo de $\delta_{Cx}^{(P)}$

En cuanto al segundo sumando de (2.28) (contribución de R), en la fig. 2.31.a se representa el diagrama de momentos en la estructura básica debido a la acción de R y en la fig. 2.31.b se ilustra el procedimiento para su cálculo, que incluye las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \delta_{Cx}^{(R)} &= \theta_B^{(R)} \cdot L + \delta_{CB} \\ \theta_B^{(R)} &= \frac{\delta_{AB}}{L} = \frac{1}{EIL} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot RL \cdot \frac{2L}{3} \right) = \frac{RL^2}{3EI} \\ \delta_{CB} &= \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot RL \cdot \frac{2L}{3} \right) = \frac{RL^3}{3EI} \\ \delta_{Cx}^{(R)} &= \frac{RL^2}{3EI} + \frac{RL^3}{3EI} = \frac{2RL^3}{3EI} \end{aligned} \tag{2.30}$$

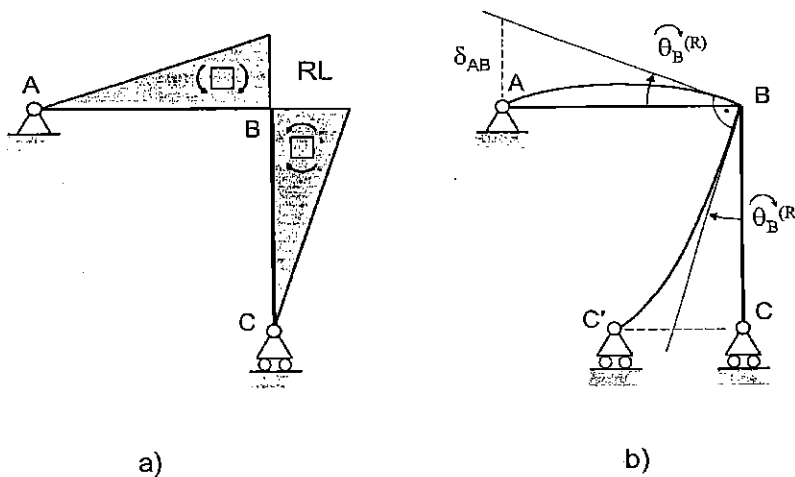


Figura 2.31. Cálculo de $\delta_{Cx}^{(R)}$

La ecuación de compatibilidad de deformaciones será, por consiguiente:

$$\delta_{Cx} = 0 \Rightarrow \bar{\delta}_{Cx}^{(P)} - \bar{\delta}_{Cx}^{(R)} = 0 \Rightarrow \frac{PL^2}{16EI} - \frac{2RL^3}{3EI} = 0 \Rightarrow R = \frac{3P}{32} = H_C \quad (2.31)$$

Resuelta la hiperestaticidad del problema, mediante las ecuaciones de equilibrio se pueden calcular las restantes reacciones y obtener los diagramas de esfuerzos (fig. 2.32). Los valores que se obtienen para las reacciones son:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A = H_C = R = \frac{3P}{32} \\ \sum M_C = 0 &\Rightarrow H_A \cdot L + V_A \cdot L = P \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow V_A = \frac{13P}{32} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A + V_C = P \Rightarrow V_C = \frac{19P}{32} \end{aligned} \quad (2.32)$$

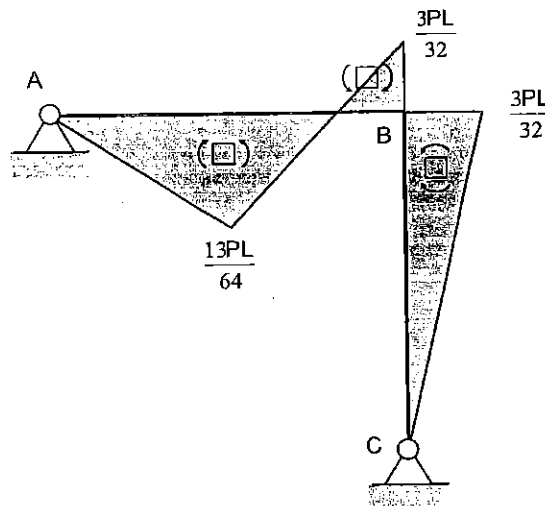


Figura 2.32. Diagrama de momentos flectores

Conocido el diagrama de momentos puede calcularse cualquier valor de la deformación que se desee. Para algunos valores concretos es posible apoyarse en expresiones utilizadas en los desarrollos anteriores, por ej., en las ec. (2.29) y (2.30) para calcular el giro del nudo B:

$$\theta_B = \theta_B^{(P)} + \theta_B^{(R)} = \frac{PL^2}{16EI} - \left(\frac{3P}{32}\right) \cdot L^2 = \frac{PL^2}{32EI} \quad (2.33)$$

giro que tiene lugar en sentido antihorario.

2) Incógnitas: Esfuerzos de sección

Generalmente se trata de los esfuerzos en algunos de los nudos de la estructura. Al eliminar alguna o todas las ligaduras que unen a diversas barras que concurren en algunos nudos, será posible estudiar cada una de esas barras como una viga isostática que estará sometida simultáneamente a las cargas exteriores que en ella están aplicadas más los esfuerzos de sección correspondientes a las ligaduras eliminadas.

De esta manera cada una de esas barras se deforma independientemente de las demás, y es evidente que tanto esas deformaciones de cada una de las barras considerada individualmente como la del conjunto de todas ellas no tiene por qué reproducir la deformación de la estructura real. Sí lo hará si los valores de los esfuerzos de sección, que recuérdese son las incógnitas del problema, coinciden exactamente con los que existen en dicha estructura real. Para obtener los valores correctos de estos esfuerzos habrá que imponer las condiciones de compatibilidad de las deformaciones que necesariamente deben cumplirse, por ej., la condición de nudo rígido (los extremos de todas las barras que concurren en un nudo tienen idénticos desplazamientos y giros, módulo y sentido). *Al formular estas condiciones deben tenerse en cuenta las posibles condiciones de traslacionalidad de la estructura.*

Este procedimiento, someramente descrito, es al pie de la letra el que se ha seguido para deducir la ecuación de los tres momentos para vigas continuas, incluyendo la posible traslacionalidad de las mismas (esas traslaciones finitas de sus nudos son los posibles asentamientos de los apoyos).

Para ilustrar las principales características de este procedimiento se analizará la misma estructura de dos barras del ejemplo 4 (fig.2.29.a).

Para su resolución se elige ahora como incógnita hiperestática el momento en el nudo *B*. El planteamiento según la metodología que se acaba de describir es el siguiente: en la estructura real (fig.2.29.a) se introduce una articulación en el nudo *B*, con lo que la estructura se transforma en la representada en la fig. 2.33.a, es decir, en *B* se ha eliminado la condición de nudo rígido, condición con la que estaban unidas en *B* las dos barras de la estructura. De esta forma cada una de ellas se comporta independientemente de la otra (fig. 2.33.b) y es evidente que esta forma de trabajar no reproduce el comportamiento que tienen en la estructura real.

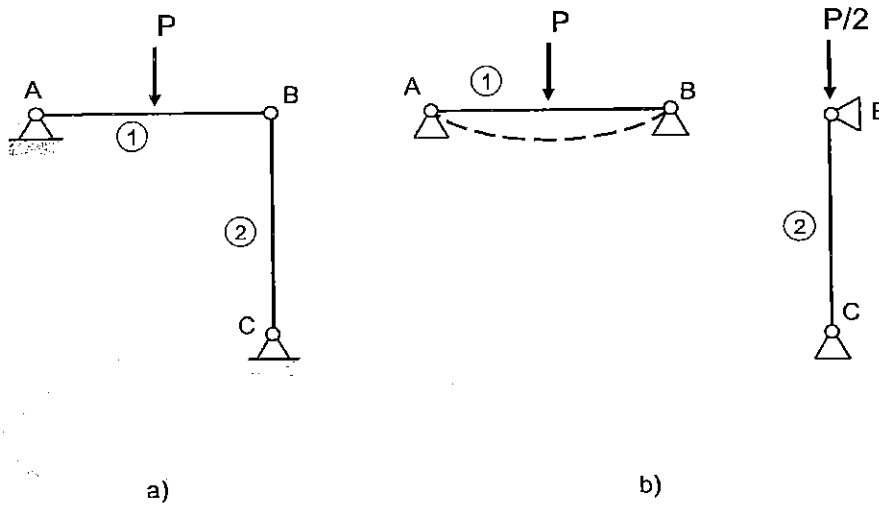


Figura 2.33. Incógnita: momento en B

De hecho, al introducir una articulación en B se ha modificado la estructura original en dos aspectos importantes: 1) se ha hecho nulo el momento en B; 2) el nudo B ha dejado de ser rígido. Es preciso rectificar ambas modificaciones y esto puede hacerse con relativa facilidad. Para ello basta: 1) añadir el momento M_B en los extremos de las barras que concurren en B; 2) imponer la condición de que el nudo B es realmente un nudo rígido.

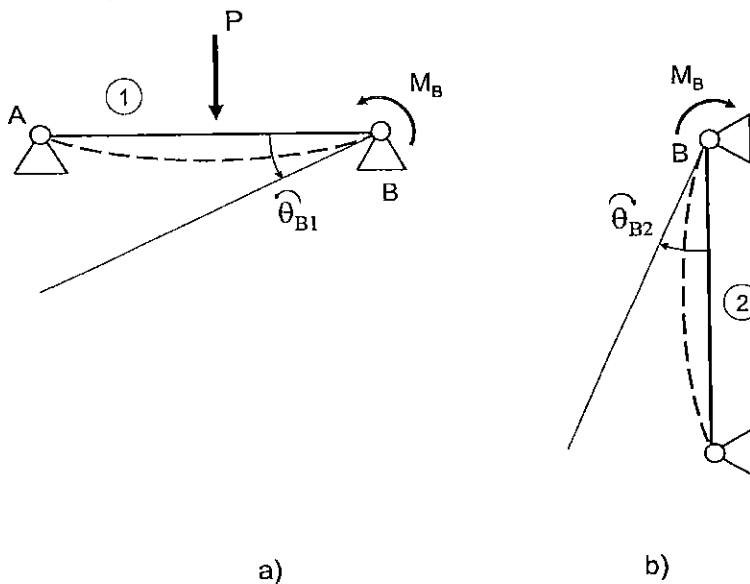


Figura 2.34. Compatibilidad de deformaciones

En la fig. 2.34 se muestra como trabaja cada una de las barras de la estructura. En cada una de ellas es sencillo calcular el giro en su extremo B, con lo que la condición de nudo rígido puede formularse como:

$$\bar{\theta}_{B1} = \bar{\theta}_{B2} \quad (2.34)$$

Estos dos giros pueden calcularse con los teoremas de Mohr:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{B1} &= \theta_{B1}^{(P)} + \theta_{B1}^{(M_B)} = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_B L}{3EI} \\ \bar{\theta}_{B2} &= \frac{M_B L}{3EI} \end{aligned} \quad (2.35)$$

La ecuación de compatibilidad de deformaciones (2.34) permite obtener el valor de la incógnita M_B :

$$\bar{\theta}_{B1} = -\bar{\theta}_{B2} \Rightarrow \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_B L}{3EI} = -\frac{M_B L}{3EI} \Rightarrow M_B = -\frac{3PL}{32} \quad (2.36)$$

Calculado este valor, del estudio del equilibrio de cada una de las barras (fig. 2.34) y de la estructura en conjunto pueden obtenerse las reacciones en los apoyos y los diagramas de esfuerzos.

El problema que se acaba de resolver es no traslacional: sus nudos experimentan giros, pero no desplazamientos. **Falta por ver cómo afecta al planteamiento que se está considerando la posible traslacionalidad de la estructura.**

Ejemplo 5. "Elijiendo como incógnitas esfuerzos de sección, explicar el procedimiento hasta llegar a formular las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones, para el análisis de la estructura de la fig. 2.35, en la que las barras 1 y 3 son verticales y la 2 horizontal".

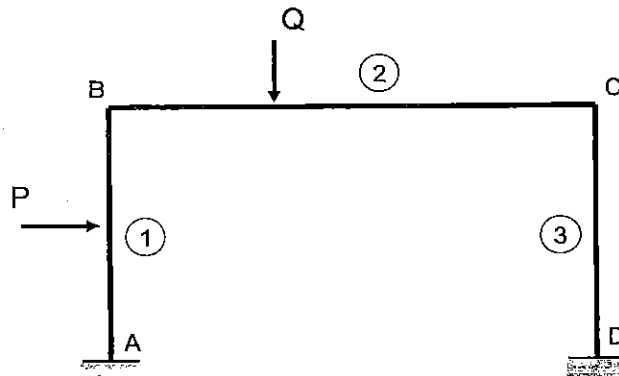


Figura 2.35. Estructura traslacional

Por tratarse de una estructura simétrica podría plantearse su resolución aplicando las simplificaciones correspondientes. Sin embargo y puesto que ahora el objetivo es poner de manifiesto la influencia que en la resolución tiene su posible traslacionalidad, se prescinde de la simetría y se exponen los pasos a seguir en un procedimiento general.

Se trata de una estructura hiperestática de tercer grado ($h=3$) que es traslacional: es muy posible que los nudos B y C experimenten unos desplazamientos que, con la hipótesis de pequeñas deformaciones y despreciando el efecto del esfuerzo axial (las barras no experimentan cambios de longitud) serán horizontales y de la misma magnitud. Por lo tanto, al considerar separadamente las barras 1 y 3, los nudos respectivos B y C deben tener la posibilidad de desplazarse horizontalmente: hay que eliminar su ligadura horizontal.

Teniendo esto en cuenta y eligiendo como incógnitas adicionales los momentos en los nudos B y C , cada una de las barras de la estructura puede analizarse separadamente tal como se indica en la figura 2.36.

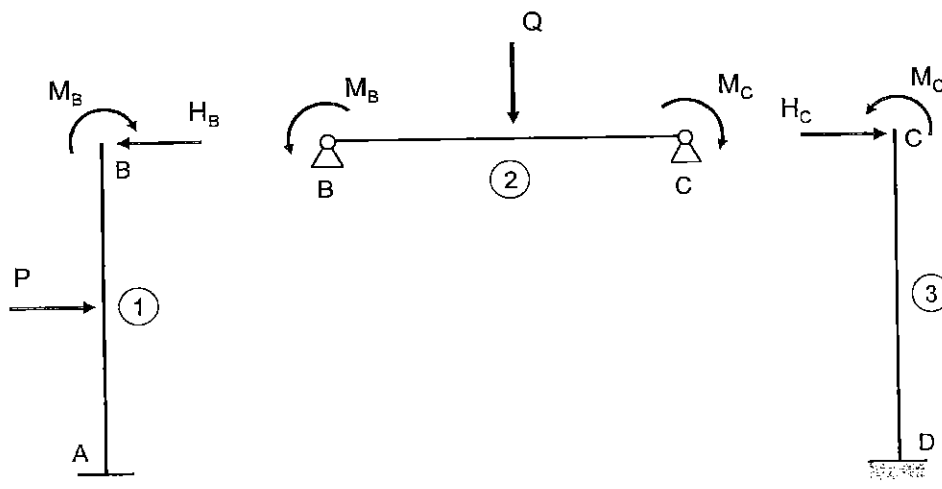


Figura 2.36. Incógnitas

Aparentemente el número de incógnitas es de cuatro: una más que el grado de hiperestaticidad. Pero realmente son sólo tres, ya que el equilibrio horizontal de la barra 2 permite establecer una relación entre H_B y H_C :

$$H_B = H_C = H \quad (2.37)$$

Las incógnitas del problema son, por consiguiente H , M_B y M_C . Las ecuaciones de compatibilidad serán:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{B1} &= \bar{\theta}_{B2} & (= \theta_B) \\ \bar{\theta}_{C2} &= \bar{\theta}_{C3} & (= \theta_C) \\ \bar{\delta}_{B1} &= \bar{\delta}_{C3} & (= \delta_B = \delta_C)\end{aligned}\tag{2.38}$$

A continuación se aplicarán las ideas que se han ido exponiendo a lo largo de este epígrafe, hasta la resolución completa de una estructura hiperestática.

Ejemplo 6. "Calcular las reacciones, sí como los desplazamientos y giros en los nudos B y C de la estructura de la fig. 2.37. Todas las barras tienen rigidez a flexión EI ".

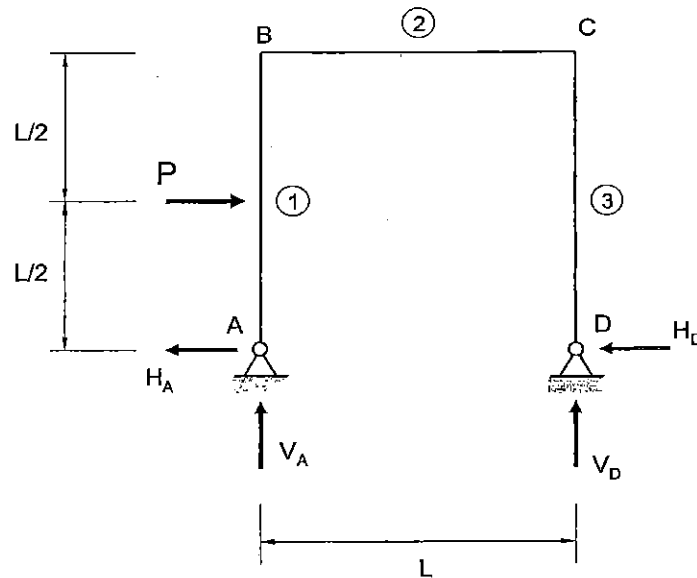


Figura 2.37

Por tratarse de una estructura simétrica sometida a una carga que no lo es, se concluye que es traslacional. Para su resolución cabe considerar (o no hacerlo), las simplificaciones derivadas de su simetría: se abordarán ambas posibilidades.

La estructura es hiperestática de grado 1 ($h=1$). De la aplicación de las ecuaciones de equilibrio al cálculo de las reacciones se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A + H_D = P \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A + V_D = 0 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow V_D \cdot L - P \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow V_D = \frac{P}{2}; \quad V_A = -\frac{P}{2}\end{aligned}\tag{2.39}$$

a) Sin tener en cuenta la simetría de la estructura

El primer paso es elegir el tipo de incógnita hiperestática con la que se va a trabajar: una reacción en un apoyo o un esfuerzo de sección. Se opta por esta segunda posibilidad. La idea es liberar la condición de nudo rígido en los nudos B y C para poder trabajar con cada una de las barras como si fuera una viga biapoyada.

Por otra parte hay que tener en cuenta que por ser la estructura traslacional, al formular la ecuación de compatibilidad de las deformaciones va a intervenir, además de la incógnita hiperestática que se elija, el desplazamiento δ de los nudos B y C, por lo que realmente serán necesarias dos ecuaciones de compatibilidad (por ej., las condiciones de nudo rígido en B y C). En la fig. 2.38 se muestra cómo trabaja cada una de las barras en la configuración de equilibrio.

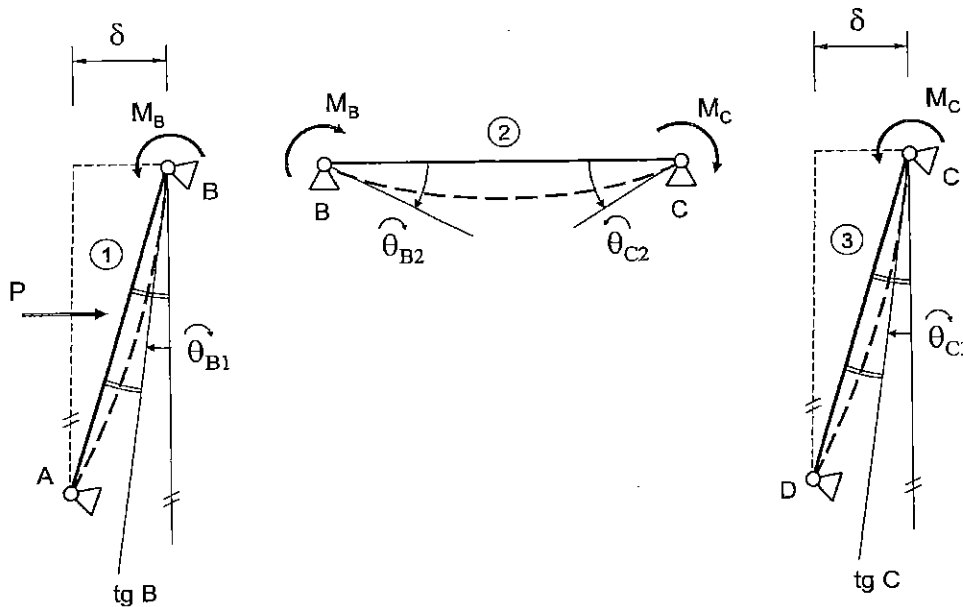


Figura 2.38

Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{B1} &= \bar{\theta}_{B2} & (= \theta_B) \\ \bar{\theta}_{C2} &= -\bar{\theta}_{C3} & (= \theta_C) \end{aligned} \quad (2.40)$$

En la figura aparecen dos momentos, M_B y M_C , que necesariamente deben estar relacionados ya que la estructura es hiperestática de primer grado. En efecto, del equilibrio de las barras 1 y 3, y teniendo en cuenta la primera de las ecuaciones (2.39), se obtiene:

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0 &\Rightarrow M_B = H_A \cdot L - P \cdot \frac{L}{2} = P \cdot L - H_D \cdot L - P \cdot \frac{L}{2} = P \cdot \frac{L}{2} - H \cdot L \\ \sum M_C = 0 &\Rightarrow M_C = H_D \cdot L = H \cdot L\end{aligned}\quad (2.41)$$

donde se ha elegido como incógnita hiperestática $H=H_D$. Para formular las ecuaciones de compatibilidad es preciso calcular los giros en los nudos B y C en cada una de las barras, en función de las incógnitas H y δ . Estos valores son los siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{B1} &= \frac{\delta}{L} - \left(\frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_B L}{3EI} \right) = \frac{\delta}{L} - \frac{PL^2}{16EI} - \frac{PL^2}{6EI} + \frac{HL^2}{3EI} = \frac{\delta}{L} - \frac{11PL^2}{48EI} + \frac{HL^2}{3EI} \\ \bar{\theta}_{B2} &= \frac{M_B L}{3EI} - \frac{M_C L}{6EI} = \frac{PL^2}{6EI} - \frac{HL^2}{3EI} - \frac{HL^2}{6EI} = \frac{PL^2}{6EI} - \frac{HL^2}{2EI}\end{aligned}\quad (2.42.a)$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{C2} &= \frac{M_B L}{6EI} - \frac{M_C L}{3EI} = \frac{PL^2}{12EI} - \frac{HL^2}{6EI} - \frac{HL^2}{3EI} = \frac{PL^2}{12EI} - \frac{HL^2}{2EI} \\ \bar{\theta}_{C3} &= \frac{\delta}{L} - \frac{M_C L}{3EI} = \frac{\delta}{L} - \frac{HL^2}{3EI}\end{aligned}\quad (2.42.b)$$

con lo que las ecuaciones de compatibilidad resultan:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{B1} = \bar{\theta}_{B2} &\Rightarrow \frac{\delta}{L} - \frac{11PL^2}{48EI} + \frac{HL^2}{3EI} = \frac{PL^2}{6EI} - \frac{HL^2}{2EI} \Rightarrow \frac{\delta}{L} = \frac{19PL^2}{48EI} - \frac{5HL^2}{6EI} \\ \bar{\theta}_{C2} = -\bar{\theta}_{C3} &\Rightarrow \frac{PL^2}{12EI} - \frac{HL^2}{2EI} = -\left(\frac{\delta}{L} - \frac{HL^2}{3EI} \right) \Rightarrow \frac{\delta}{L} = \frac{5HL^2}{6EI} - \frac{PL^2}{12EI}\end{aligned}\quad (2.43)$$

De la resolución de este sistema de ecuaciones se obtienen los valores:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{5PL^3}{32EI} = \bar{\delta}_B = \bar{\delta}_C \\ H &= \frac{23P}{80} = H_D\end{aligned}\quad (2.44)$$

La ecuación de equilibrio (2.39) permite completar el cálculo de las reacciones con la obtención de H_A :

$$H_A = P - H_D = P - \frac{23P}{80} = \frac{57P}{80}\quad (2.45)$$

Finalmente, los giros en los nudos serán [cfr. (2.42)]:

$$\bar{\theta}_B = \bar{\theta}_{B2} = \frac{PL^2}{6EI} - \left(\frac{23P}{80}\right) \frac{L^2}{2EI} = \frac{11PL^2}{480EI}$$

$$\bar{\theta}_C = \bar{\theta}_{C2} = \frac{PL^2}{12EI} - \left(\frac{23P}{80}\right) \frac{L^2}{2EI} = -\frac{29PL^2}{480EI} \Rightarrow \bar{\theta}_C = \frac{29PL^2}{480EI} \quad (2.46)$$

b) Teniendo en cuenta la simetría de la estructura

Para comenzar, habrá que descomponer el estado de carga en la suma de uno simétrico y otro antisimétrico (fig. 2.39).

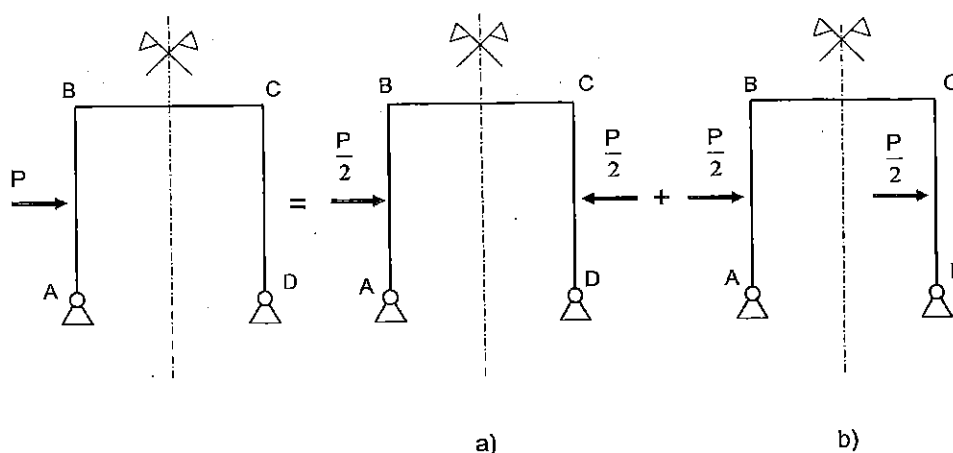


Figura 2.39. Descomposición del estado de carga; a) Simétrico; b) Antisimétrico

Resultado de la descomposición son las dos estructuras de la fig. 2.39 que habrá que resolver. Para la resolución de cada una de ellas cabe de nuevo elegir entre diversas opciones: aplicar las simplificaciones derivadas de la simetría o prescindir de ellas; elegir como incógnitas reacciones en apoyos; elegir esfuerzos de sección. Incluso en estructuras más complejas que la que se está analizando se podría optar por una solución combinación de varias de estas posibilidades.

Para el estado de carga simétrico de la estructura objeto de estudio (fig. 2.39.a) se elige como incógnita un esfuerzo de sección: los momentos en los nudos B y C (una sola incógnita por la simetría), en tanto que para la resolución del estado de carga antisimétrico (fig.2.39.b) se aplicará la simplificación correspondiente.

Estado de carga simétrico (fig. 2.39.a)

Se trata de una estructura no traslacional hiperestática de grado 1. En la fig. 2.40 se indica la incógnita elegida y la forma de trabajar de las barras 1 y 2.

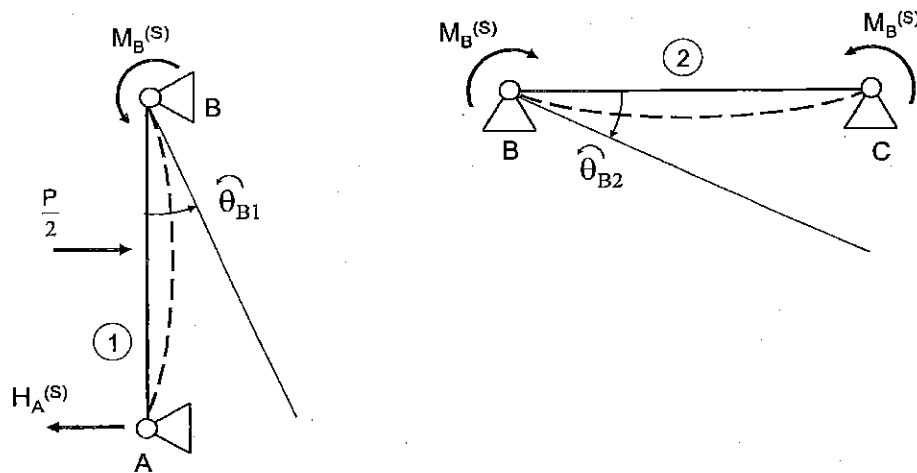


Figura 2.40. Estado de carga simétrico

De las condiciones de equilibrio de la estructura se deduce:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A^{(s)} = H_D^{(s)} \\ \sum M_D = 0 &\Rightarrow V_A^{(s)} = V_D^{(s)} = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

La ecuación de compatibilidad (condición de nudo rígido en B) es:

$$\bar{\theta}_{B1} = -\bar{\theta}_{B2} \Rightarrow \frac{\left(\frac{P}{2}\right)L^2}{16EI} + \frac{M_B^{(s)} \cdot L}{3EI} = -\frac{M_B^{(s)} \cdot L}{2EI} \Rightarrow M_B^{(s)} = -\frac{3PL}{80} \quad (2.48)$$

Por otra parte, aplicando las condiciones de equilibrio a la barra 1:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B^{(s)} = H_A^{(s)} \cdot L - \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow H_A^{(s)} = \frac{P}{4} - \frac{3P}{80} = \frac{17P}{80} = H_D^{(s)} \quad (2.49)$$

Los giros en los nudos son:

$$\bar{\theta}_B^{(s)} = \bar{\theta}_{B2} = \frac{M_B^{(s)} \cdot L}{2EI} = -\frac{3PL^2}{160EI} \Rightarrow \bar{\theta}_B^{(s)} = \frac{3PL^2}{160EI} = \bar{\theta}_C^{(s)} \quad (2.50)$$

Estado de carga antisimétrico (fig. 2.39.b)

Evidentemente se trata de una estructura traslacional. Además es isostática: en efecto, como se vio al estudiar las simplificaciones para un estado de carga antisimétrico, basta con estudiar la mitad de la estructura teniendo en cuenta que la sección E situada sobre el eje de simetría se comporta como un apoyo articulado móvil (fig.

2.41.a). Resulta una estructura isostática, en la que se pueden calcular las reacciones formulando las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A^{(a)} = \frac{P}{2} \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow V_E \cdot \frac{L}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow V_E = \frac{P}{2} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_E + V_A^{(a)} = 0 \Rightarrow V_A^{(a)} = -\frac{P}{2} \end{aligned} \quad (2.51)$$

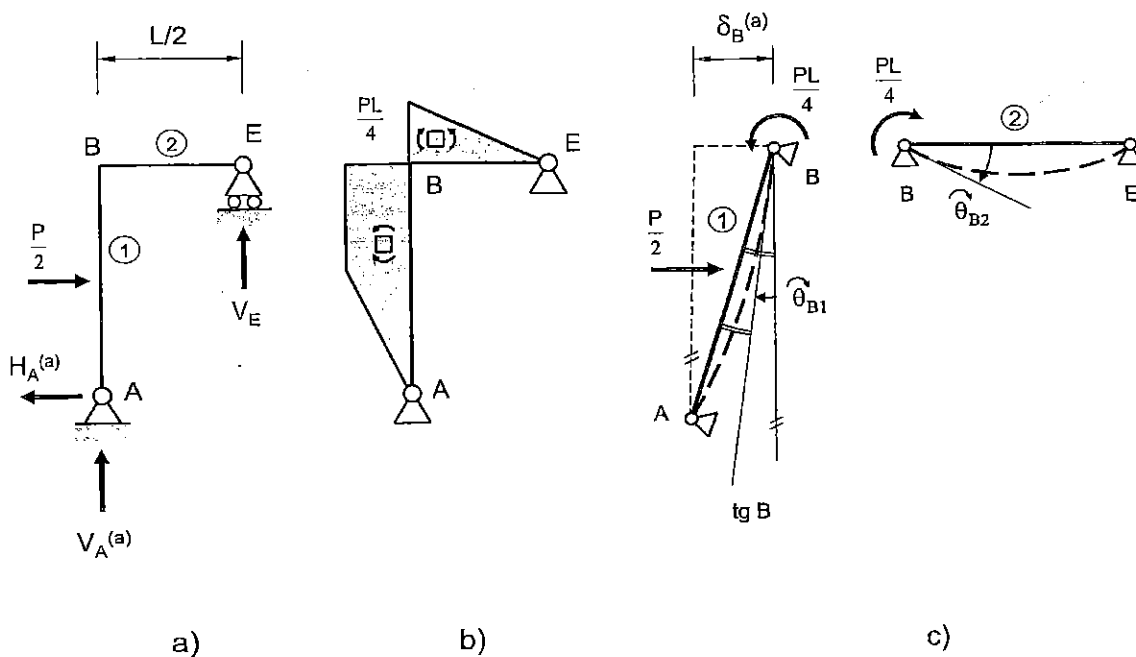


Figura 2.41

Las reacciones totales son la suma de las obtenidas para ambos estados de carga: simétrico y antisimétrico (fig. 2.42). Como es lógico coinciden con las obtenidas anteriormente [cfr. (2.39), (2.44) y (2.45)].

Para calcular el desplazamiento y giros totales será preciso obtener estos valores para el estado de carga antisimétrico. En la fig. 2.41.b se muestra el diagrama de momentos flectores para este estado de carga, y en la fig. 2.41.c el procedimiento seguido para su cálculo, a partir del estudio del equilibrio en la configuración deformada. Téngase en cuenta que la estructura es isostática (se conoce el valor del momento en el nudo B) y traslacional.

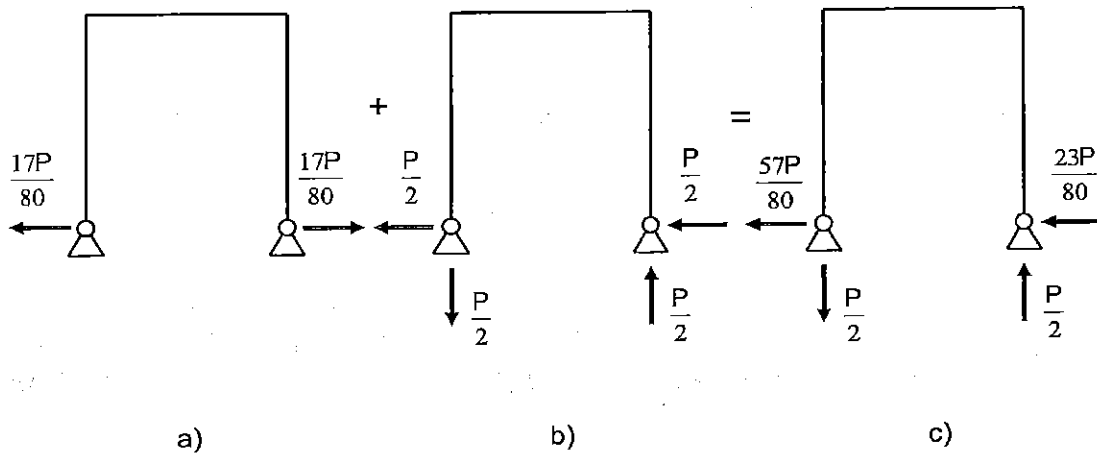


Figura 2.42. Reacciones. a) Simétrico; b) Antisimétrico; c) Totales

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{B1} = \bar{\theta}_{B2} &\Rightarrow \frac{\delta_B^{(a)}}{L} - \left(\frac{\frac{P}{2} \cdot L^2}{16EI} + \frac{\frac{P}{4} \cdot L}{3EI} \right) = \frac{PL}{3EI} \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\delta_B^{(a)}}{L} = \frac{15PL^2}{96EI} \Rightarrow \delta_B^{(a)} = \frac{5PL^3}{32EI} \quad (2.52) \\ \bar{\theta}_B^{(a)} &= \frac{PL}{3EI} \cdot \frac{L}{2} = \frac{PL^2}{24EI} = \bar{\theta}_C^{(a)} \end{aligned}$$

Los desplazamientos y giros totales en los nudos B y C serán la suma de éstos que se acaban de obtener más los originados en el estado de carga simétrico [cfr. (2.50)]:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_B &= \delta_B^{(s)} + \delta_B^{(a)} = \delta_B^{(a)} = \frac{5PL^3}{32EI} = \bar{\delta}_C \\ \bar{\theta}_B &= \bar{\theta}_B^{(s)} + \bar{\theta}_B^{(a)} = -\frac{3PL^2}{160EI} + \frac{PL^2}{24EI} = \frac{11PL^2}{480EI} \\ \bar{\theta}_C &= \bar{\theta}_C^{(s)} + \bar{\theta}_C^{(a)} = \frac{3PL^2}{160EI} + \frac{PL^2}{24EI} = \frac{29PL^2}{480EI} \end{aligned} \quad (2.53)$$

resultados que lógicamente coinciden también con los obtenidos anteriormente [cfr. (2.44) y (2.46)].

2.6. EFECTO DE UNA VARIACIÓN UNIFORME DE TEMPERATURA

Entre los diversos temas de la Resistencia de Materiales estudiada previamente, se incluyó el de las estructuras formadas por barras rectas articuladas en sus extremos en las que las cargas estaban aplicadas en los nudos (celosías) y, entre otros aspectos, se analizó su comportamiento cuando algunas de sus barras se sometían a una variación uniforme de temperatura. Se comprobó que, en celosías isostáticas, al no existir restricción a la deformación, no se originan tensiones térmicas. En cambio en las celosías hiperestáticas, al estar restringida su deformación, sí aparecen tensiones de origen térmico.

En el caso de estructuras de nudos rígidos el comportamiento es similar. Si se trata de una estructura hiperestática, cuando alguno de sus elementos (o todos) experimenta una variación uniforme de temperatura, aparecen en la estructura las reacciones necesarias para que se satisfagan las condiciones impuestas por las ligaduras superfluas, dando lugar a que muchos de sus elementos, o todos, trabajen a flexión. Se trata de una deformación y de las correspondientes tensiones de origen exclusivamente térmico.

No obstante, téngase presente que es posible encontrar algunos casos hiperestáticos singulares como lo es el de las vigas continuas, en las que por la particular disposición de sus apoyos una variación uniforme de temperatura no se traduce necesariamente en la aparición de reacciones ni tensiones térmicas.

Para ilustrar estas ideas *considérese el pórtico hiperestático de primer grado de la fig. 2.43.a, en el que todas las barras tienen la misma longitud L y rigidez a flexión EI , y están sometidas a un incremento uniforme de temperatura $\Delta T > 0$.*

Debido al incremento de temperatura las barras tienden a dilatarse y experimentar un alargamiento $\alpha L \Delta T$. Sin embargo y por tratarse de una estructura hiperestática, la libre dilatación de las barras está restringida: al ser los apoyos fijos aparecen en ellos unas reacciones que habrán de verificar las ecuaciones de equilibrio. Es decir:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A = H_D = H \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A + V_D = 0 \\ \sum M_D = 0 &\Rightarrow V_A \cdot L = 0 \Rightarrow V_A = V_D = 0\end{aligned}\tag{2.54}$$

En la fig. 2.43.b se representa, en función de la reacción horizontal H , el diagrama de momentos flectores y en la fig. 2.43.c se representa un dibujo aproximado de la deformada, indicando los valores de los desplazamientos horizontal y vertical de los nudos B y C : téngase en cuenta que la estructura es simétrica y que se desprecian los posibles acortamientos de las barras debidas al esfuerzo axial. Está claro que la causa de la flexión originada en las barras de la estructura, con los correspondientes valores de las tensiones y deformaciones, es exclusivamente térmica.

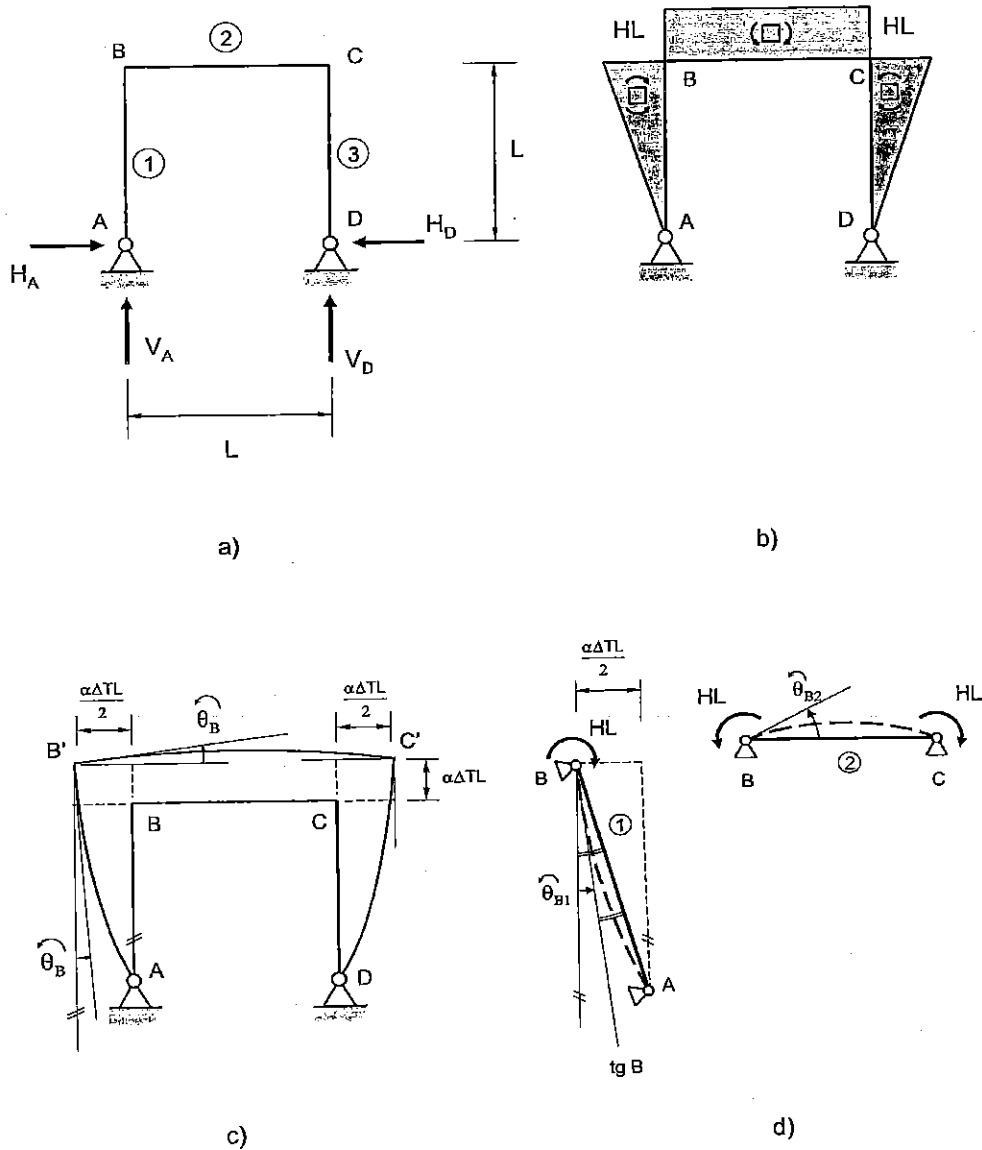


Figura 2.43. Efecto de una variación uniforme de temperatura

Se trata, por tanto, de un problema hiperestático de grado 1 para cuya resolución caben diferentes posibilidades: por ejemplo, puede elegirse como incógnita la reacción H (liberar el enlace que la origina en uno de los apoyos, que se transformará en un apoyo deslizante en el que está aplicada H , e imponer la condición de que su desplazamiento horizontal sea nulo). El análisis se simplifica si se elige como incógnita el momento en los nudos B y C (será el mismo, dada la simetría del problema, y de valor HL , como se indica en el diagrama de momentos), y se aplica la condición de nudo rígido en la configuración de equilibrio (que, recuérdese, es la configuración deformada). En la figura 2.43.d se indica la forma en que trabajan las barras en esta configuración.

De la aplicación de la condición de nudo rígido en B se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{B1} &= \frac{\alpha L \Delta T}{2L} - \frac{(HL)L}{3EI} = \frac{\alpha \Delta T}{2} - \frac{HL^2}{3EI} \\ \bar{\theta}_{B2} &= \frac{(HL)L}{2EI} = \frac{HL^2}{2EI} \\ \bar{\theta}_{B1} = \bar{\theta}_{B2} &\Rightarrow \frac{\alpha \Delta T}{2} - \frac{HL^2}{3EI} = \frac{HL^2}{2EI} \Rightarrow H = \frac{3\alpha EI \Delta T}{5L^2}\end{aligned}\tag{2.55}$$

con lo que el problema se puede dar por resuelto.

TEMA 3

TEORÍA DE LA TORSIÓN

3.1. TORSIÓN DE PIEZAS RECTAS DE SECCIÓN CIRCULAR

Este tema está dedicado al estudio de las tensiones y deformaciones originadas como consecuencia de la aplicación de un momento en dirección del eje longitudinal de la pieza prismática, al que se denomina **momento torsor**. En la fig.3.1 se representa este tipo de sollicitación: el par de fuerzas P , cuyas líneas de acción están separadas una distancia d , forma un par o momento torsor de valor $M_x = P \cdot d$ que tiende a hacer girar la barra alrededor de su eje x . Se indican también las formas habituales de representación del momento torsor. A las piezas prismáticas cuya forma fundamental de trabajo es la torsión se les suele denominar **ejes**.

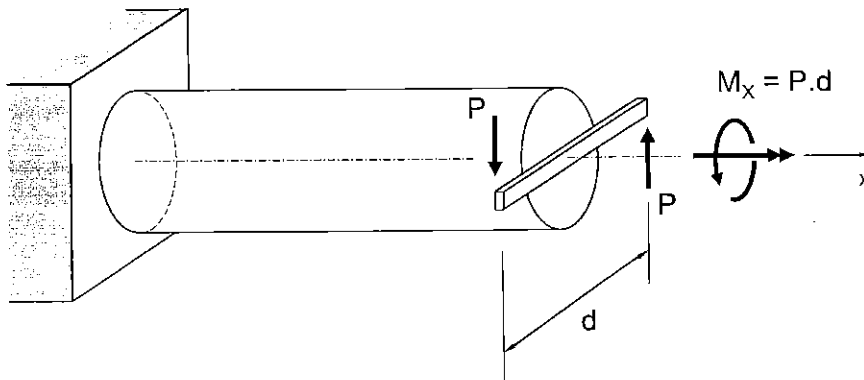


Figura 3.1. Barra sometida a torsión

En este primer apartado se desarrollará la teoría clásica de la torsión de piezas rectas de sección circular (macizas o huecas). Al igual que en el estudio de los restantes esfuerzos de sección, se admiten las hipótesis de comportamiento elástico lineal y pequeñas deformaciones.

3.1.1. Consideraciones previas sobre la deformación

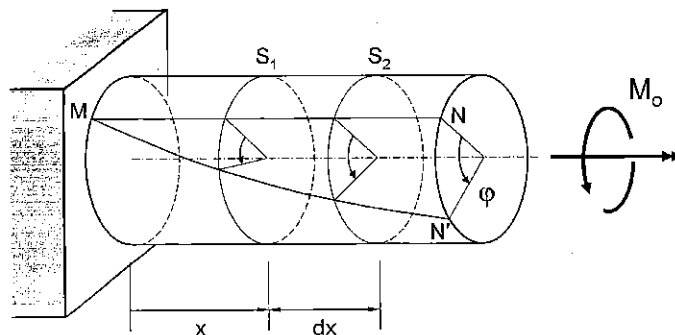
En la torsión pura de una barra recta de sección circular, debido a la perfecta simetría tanto de geometría como de carga, se puede deducir que cada sección transversal de la barra permanece plana y normal al eje durante la deformación y no experimenta ningún tipo de distorsión en su propio plano. Es decir, *al deformarse la barra como consecuencia de la torsión, cada sección gira un cierto ángulo alrededor de su centro comportándose como si fuera un disco rígido*, de forma tal que durante la torsión los

radios de las distintas secciones permanecen rectos y el ángulo formado por dos radios cualesquiera de una misma sección no varía.

3.1.2. Determinación de la distribución de tensiones tangenciales

Por consiguiente, la deformación de una pieza prismática que trabaja a torsión consiste en un retorcimiento de la misma alrededor de su eje. En esta deformación dos secciones infinitamente próximas se comportan como sendos discos rígidos, produciéndose entre ambas un giro relativo y, en consecuencia, *las únicas tensiones que aparecen en la sección son tensiones tangenciales contenidas en el plano de la misma, y cuya dirección, en cada punto, es perpendicular al segmento que une ese punto con el centro de la sección*. A continuación se van a obtener tanto la distribución de tensiones en la sección como la deformación originada en el caso de torsión pura de una pieza prismática recta de sección circular.

Para ello consideremos la barra recta de sección circular de radio R de la fig.3.2a, empotrada en un extremo y libre en el otro. En este último está aplicado un momento torsor M_o , tal como se indica. El equilibrio exige que en la sección de empotramiento aparezca un momento torsor de reacción de igual valor y sentido contrario al momento aplicado M_o , y que cualquier sección de la barra esté solicitada exclusivamente por este mismo momento, es decir, que en una sección cualquiera se cumpla: $M_x=M_o$, de forma tal que la barra trabaja a torsión pura. En la deformación, cualquier sección girará un pequeño ángulo con respecto a la sección de empotramiento, y una generatriz cualquiera situada en su superficie tal como la MN se deformará, pasando a ocupar la posición MN' . Sea φ el ángulo girado por la sección del extremo libre.



a)

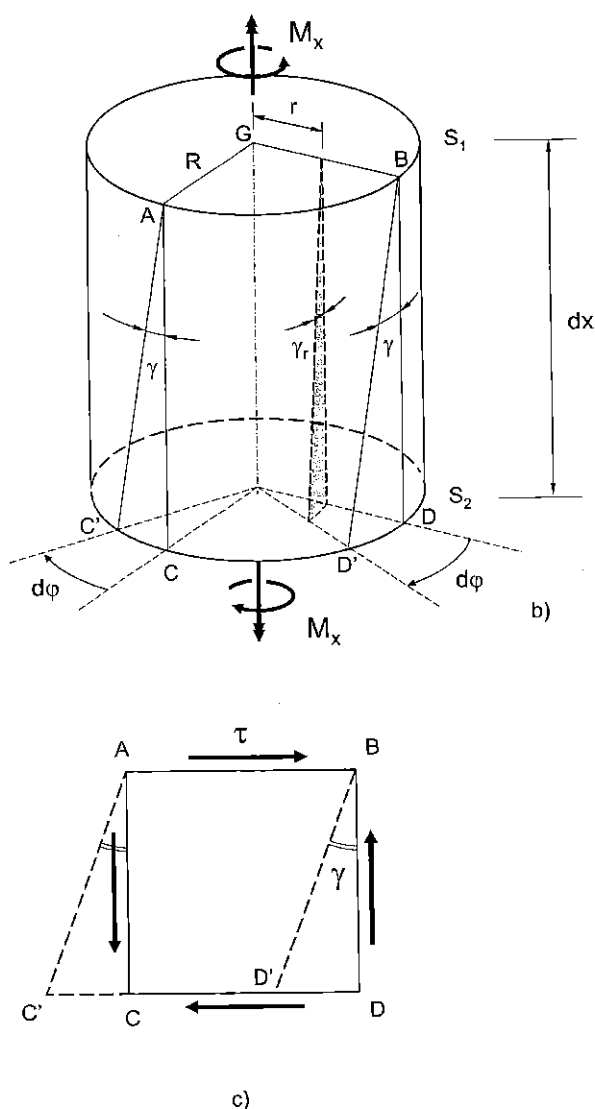


Figura 3.2. Torsión pura de una barra de sección circular

Vamos a estudiar el comportamiento relativo entre dos secciones indefinidamente próximas S_1 y S_2 , separadas una distancia elemental dx . Sea M_x el momento torsor con el que trabajan y $d\phi$ el giro de la sección S_2 con respecto a la S_1 (fig.3.2b). Debido a esta rotación relativa entre ambas, un elemento infinitesimal rectangular sobre la superficie de la barra tal como el elemento $ABCD$, se deformará transformándose en el romboide $ABC'D'$. Ahora bien, como estamos suponiendo pequeñas deformaciones, las longitudes de los lados de ese elemento rectangular no cambian, siendo la única deformación que experimenta el elemento una deformación angular, definida por el ángulo γ . Y puesto que también suponemos comportamiento elástico lineal, esta

deformación angular se relaciona exclusivamente con tensiones tangenciales o cortantes τ , cuya dirección y sentido se indica en la fig.3.2c.

El valor de γ puede expresarse en términos del giro relativo entre las dos secciones:

$$\gamma = \frac{\overline{CC'}}{AC} = \frac{R \cdot d\varphi}{dx} = R \cdot \theta \quad (3.1)$$

donde se ha denominado:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (3.2)$$

variable que se suele llamar **ángulo (o giro) de torsión por unidad de longitud**: representa el giro de la barra alrededor de su eje por unidad de longitud. En el caso que estamos considerando, por tratarse de torsión pura, cualquier elemento de longitud infinitesimal que hubiéramos elegido entre dos secciones cualesquiera se encontrará sometido al mismo momento torsor, y por tanto, se puede afirmar que este giro por unidad de longitud es constante. Pero por lo general, tanto el valor de θ como el de φ , serán función de x .

En (3.1) se expresa la relación entre la deformación angular y el ángulo de torsión por unidad de longitud. En virtud de la ley de Hooke, las tensiones tangenciales que actúan en los lados del elemento superficial ABCD serán:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot R \cdot \theta \quad (3.3)$$

siendo G el módulo de elasticidad transversal del material.

Supuesto conocido el valor del ángulo de torsión θ , mediante la expresión (3.3) se podría obtener la tensión tangencial en los puntos del contorno de una sección arbitraria de la barra. A continuación determinaremos la tensión tangencial en un punto cualquiera del interior de la sección, a una distancia r del centro de gravedad G de la misma (cfr. fig.3.2b).

Para este cálculo nos basaremos una vez más en las consideraciones realizadas previamente, según las cuales las secciones rectas se comportan como si fueran discos rígidos que giran alrededor de su centro. Por todo ello, la deformación angular en ese punto del interior se puede obtener sin más que sustituir R por r en (3.1), resultando:

$$\gamma_r = r \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r \cdot \theta \quad (3.4)$$

Por tanto, la tensión tangencial correspondiente se expresará como:

$$\tau_r = G \cdot \gamma_r = G \cdot r \cdot \theta \quad (3.5)$$

es decir, se trata de una *distribución lineal*: en un punto cualquiera la tensión tangencial es proporcional a la distancia del punto al centro de la sección (fig.3.3a). Estas tensiones tangenciales aparecerán tanto en la sección transversal como en los planos longitudinales que contienen al eje de la pieza (fig.3.3b), pues como es sabido, siempre existen tensiones cortantes iguales en planos mutuamente perpendiculares.

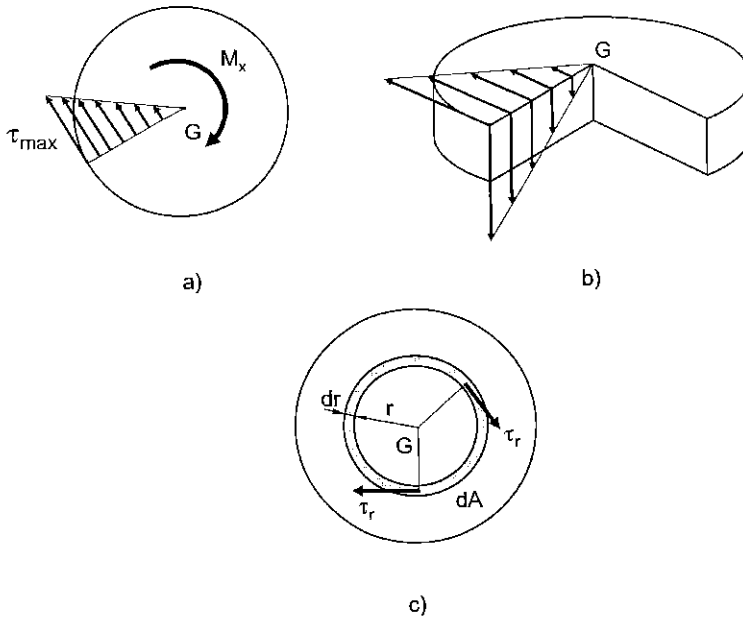


Figura 3.3. Distribución de tensiones tangenciales en la sección recta

3.1.3. Relación entre el momento torsor y las tensiones originadas

La expresión (3.5) que se acaba de obtener no es suficiente para determinar la distribución de tensiones tangenciales en la sección, puesto que el giro de torsión por unidad de longitud θ es todavía una incógnita. Su valor se puede determinar estableciendo la equivalencia estática entre la distribución de tensiones tangenciales y el momento torsor que la ha originado.

Para ello, considérese a una distancia r del centro G de la sección una corona circular de espesor elemental dr y área dA (fig.3.3c). El momento torsor equivalente a la distribución de tensiones tangenciales τ_r en los puntos de dicha corona será, de acuerdo con (3.5):

$$dM_x = \tau_r \cdot dA \cdot r = \tau_r \cdot (2\pi r \cdot dr) \cdot r = (G \cdot r \cdot \theta) \cdot (2\pi r^2 \cdot dr) = 2\pi G \cdot \theta \cdot r^3 \cdot dr \quad (3.6)$$

Integrando a toda la sección se obtiene:

$$M_x = \int dM_x = \int_0^R 2\pi G \cdot \theta \cdot r^3 \cdot dr = G \cdot \theta \cdot I_p \quad (3.7)$$

donde I_p el momento polar de inercia de la sección, de valor:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} \quad (3.8)$$

De (3.7) se deduce para el ángulo de torsión por unidad de longitud:

$$\theta = \frac{M_x}{G \cdot I_p} \quad (3.9)$$

donde al producto GI_p se le denomina **rigidez a la torsión** de la barra.

Sustituyendo en (3.5) se obtiene para la distribución de tensiones tangenciales la expresión:

$$\tau_r = \frac{M_x \cdot r}{I_p} \quad (3.10)$$

Como ya sabíamos, el valor máximo de la tensión tangencial se presenta en los puntos de la superficie de la barra ($r=R$), siendo su valor en función de M_x :

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M_x \cdot R}{I_p} = \frac{M_x}{W_x} \quad (3.11)$$

donde:

$$W_x = \frac{I_p}{R} \quad (3.12)$$

es el denominado **módulo resistente a torsión** de la barra.

Por otra parte, teniendo en cuenta (3.2) y (3.9) se deduce que el ángulo girado entre dos secciones de abscisas x_1 y x_2 se expresará por:

$$\varphi_{2/1} = \int_{x_1}^{x_2} \theta \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_x}{G \cdot I_p} \cdot dx = \frac{M_x \cdot (x_2 - x_1)}{G \cdot I_p} \quad (3.13)$$

donde la última igualdad puede establecerse siempre que tanto el momento torsor M_x como la rigidez a torsión $G I_p$ sean constantes.

Como se ha comprobado, el valor máximo de la tensión tangencial se presenta en los puntos de la superficie exterior de la pieza. En consecuencia, en el caso de una barra de sección circular sometida a un momento torsor creciente hecha de un material dúctil, el fallo se presentará por la aparición de deformaciones plásticas en los puntos de la superficie de la misma.

Si el material del que está hecha la barra fuera un material frágil con menor resistencia a las tensiones cortantes longitudinales que a las transversales, como ocurre, por ejemplo, con muchas maderas que tienen vetas dispuestas en sentido longitudinal, la rotura comenzaría a manifestarse por la aparición en su superficie de unas grietas longitudinales: la causa del fallo es la tensión cortante longitudinal. Aunque estas grietas también pueden producirse en puntos interiores de la barra, es en su superficie exterior donde comienzan a manifestarse, por alcanzarse ahí los valores máximos de la tensión tangencial.

Si se tratara, en cambio, de un material frágil con muy pequeña resistencia a las tensiones de tracción, el fallo se haría visible por la aparición en su superficie de unas grietas dispuestas en forma helicoidal, con una inclinación de 45° respecto del eje de la barra (fig.3.4a). La explicación de este hecho es muy sencilla. Como se representa en la fig.3.4b, en un punto P de la superficie exterior de la barra se genera un estado de tensión plana en el plano definido por las direcciones axial y circunferencial. Se trata de un estado de cortadura pura en ese plano y, en consecuencia, las tensiones principales no nulas, una de tracción y otra de compresión, tendrán lugar en direcciones inclinadas 45° respecto de esas direcciones, como se deduce fácilmente del diagrama de los círculos de Mohr correspondiente a ese punto P (fig.3.4c y d). Si el material tiene mucha menos resistencia a la tracción que a la compresión, las grietas se propagarán perpendicularmente a la dirección de la tensión principal de

tracción σ_1 . De ahí que se muestren según hélices a 45° sobre la superficie de la barra.

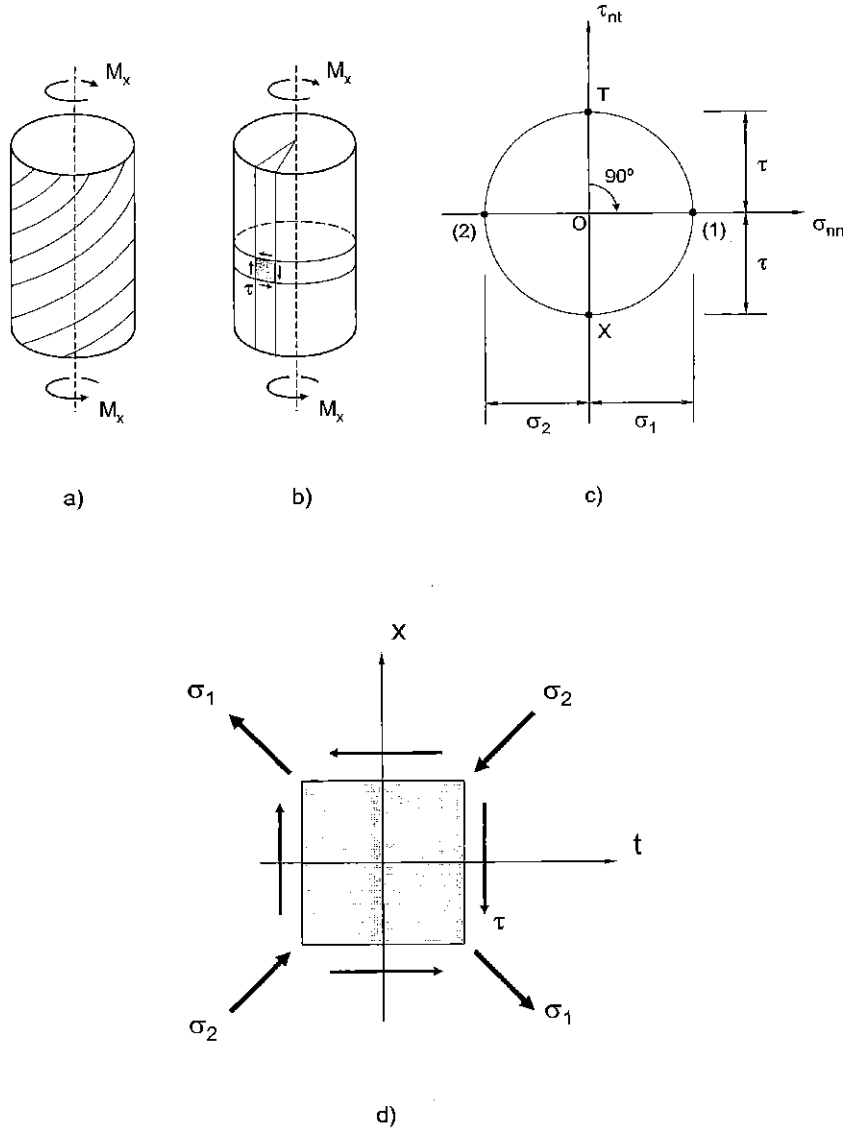


Figura 3.4. Fallo en torsión de materiales poco resistentes a la tracción

3.1.4. Torsión de ejes de sección circular hueca

Si la barra sometida a torsión es de sección maciza el material está mal aprovechado, ya que si en los puntos de la superficie exterior trabaja a la tensión admisible, la tensión en los puntos del interior será siempre inferior a aquella, con el consiguiente desaprovechamiento de material.

Por esta razón, en piezas sometidas a torsión, las formas tubulares resultan más racionales. Se utilizan especialmente en los casos en que la reducción de peso reviste una importancia considerable (automóviles, aviones, etc.).

Las expresiones obtenidas suponiendo secciones llenas seguirán siendo válidas en las secciones huecas o tubulares, sin otra diferencia que sustituir el valor de I_p , que ahora vendrá dado por:

$$I_p = \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2} \quad (3.14)$$

siendo R_e y R_i los radios exterior e interior de la sección, respectivamente. La distribución de tensiones en la sección será tanto más uniforme cuanto más parecidos sean estos radios, es decir, cuanto menor sea el espesor de la pared (fig. 3.5).

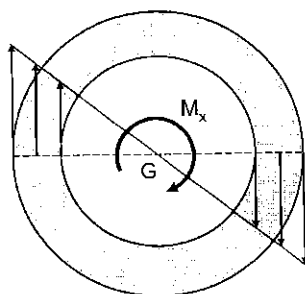


Figura 3.5. Torsión de barras de sección tubular

Además, a igualdad de área, los ejes de sección hueca poseen un módulo resistente superior a los ejes de sección maciza, ya que el área puede alejarse más del centro en los primeros y el momento polar de inercia crece con la cuarta potencia de esa distancia. En consecuencia, la tensión tangencial máxima es menor en un eje de sección hueca que en otro de sección maciza de la misma área.

Este comportamiento presenta un límite: si la pared del tubo es demasiado delgada (en relación al radio exterior), puede producirse un fenómeno local de pandeo.

3.1.5. Paralelismo entre flexión y torsión puras en ejes de sección circular

Terminamos este apartado poniendo de manifiesto el estrecho paralelismo que existe entre las formulaciones obtenidas para la flexión y para la torsión pura de una barra de sección circular. En la tabla 3.1, se incluyen las magnitudes análogas (que tienen además las mismas unidades), así como las formulaciones en uno y otro caso.

Flexión	Torsión
M_z	M_x
E	G
$\sigma_{xx} = M_z y / I_z$	$\tau_r = M_x r / I_P$
$E I_z$	$G I_P$
$k = 1/\rho = M_z / E I_z$	$\theta = M_x / G I_P$

Tabla 3.1. Paralelismo entre la flexión y la torsión pura de una barra de sección circular

Además, el ángulo girado entre dos secciones rectas de la pieza, de abscisas x_1 y x_2 , expresado por (3.13), es decir :

$$\varphi_{2/1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_x}{G \cdot I_P} \cdot dx \quad (3.15)$$

recuerda al primer teorema de Mohr en flexión.

3.2. DIAGRAMAS DE MOMENTOS TORSORES. CÁLCULO DE EJES DE TRANSMISIÓN DE POTENCIA

Este apartado se dedicará a la determinación de los diagramas de momentos torsores a lo largo del eje de la pieza, distinguiendo entre los casos isostático e hiperestático. Como ejemplo de diseño se incluye el cálculo de ejes de transmisión de potencia.

Antes de continuar, conviene precisar que la teoría vista en el apartado anterior es también aplicable cuando bien la sección o bien el momento torsor varían suavemente a lo largo del eje.

3.2.1. Torsión isostática

La torsión isostática se caracteriza por la posibilidad de obtener el momento torsor en una sección cualquiera de la barra, considerando únicamente las ecuaciones de la estática.

El procedimiento de obtención del diagrama de momentos torsores es el mismo que el seguido para cualquiera de los esfuerzos de sección: se aplica el principio del corte y se estudia el equilibrio de una de las dos partes en que queda dividida la estructura. Para obtener el momento torsor la ecuación a utilizar es la correspondiente al equilibrio de momentos en la dirección del eje.

El momento torsor M_x se representa mediante un vector (doble flecha) aplicado en el centro de gravedad de la sección, en dirección del eje de la pieza. Por convenio, se supondrá positivo si se dirige en sentido saliente, el de la normal positiva al corte (de modo similar a N_x).

Ejemplo 1. Representar el diagrama de momentos torsores y obtener el giro de la sección libre de la barra de la fig.3.6, empotrada en un extremo y libre en el otro. La barra está sometida a los momentos torsores indicados, siendo G e I_p su módulo de elasticidad transversal y su momento polar de inercia, respectivamente.

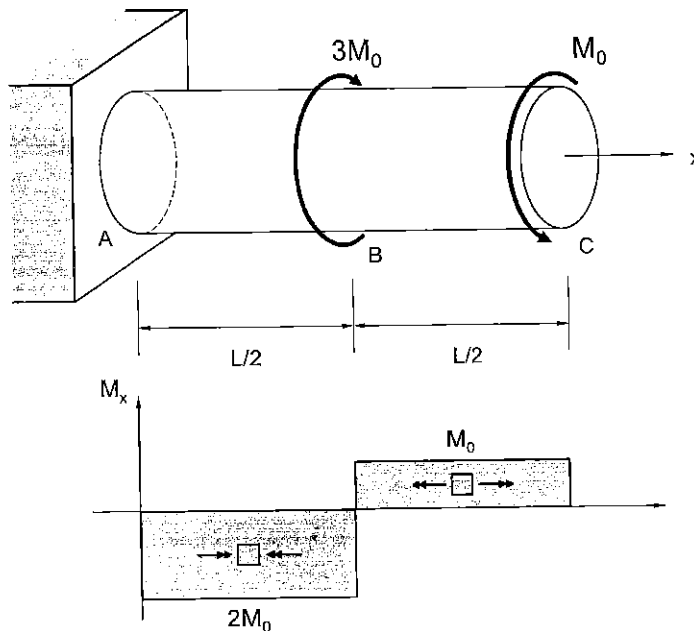


Figura 3.6. Torsión isostática

Por consideraciones puramente estáticas se deduce que entre B y C, el momento torsor es M_0 , y entre A y B, $-2M_0$. El giro total en C, en sentido horario, será:

$$\varphi_C = \varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = \frac{M_0 L/2}{GI_p} - \frac{2M_0 L/2}{GI_p} = -\frac{M_0 L}{2GI_p} \quad (3.16)$$

3.2.2. Torsión hiperestática

En el caso de la torsión en una estructura hiperestática, las ecuaciones de la estática no son suficientes para determinar el diagrama de momentos torsores. Como ecuaciones suplementarias deben imponerse condiciones de compatibilidad de las deformaciones apropiadas al problema.

Ejemplo 2. Representar el diagrama de momentos torsores de la barra doblemente empotrada de la fig.3.7, sometida a un momento torsor en una sección intermedia C, tal como se indica.

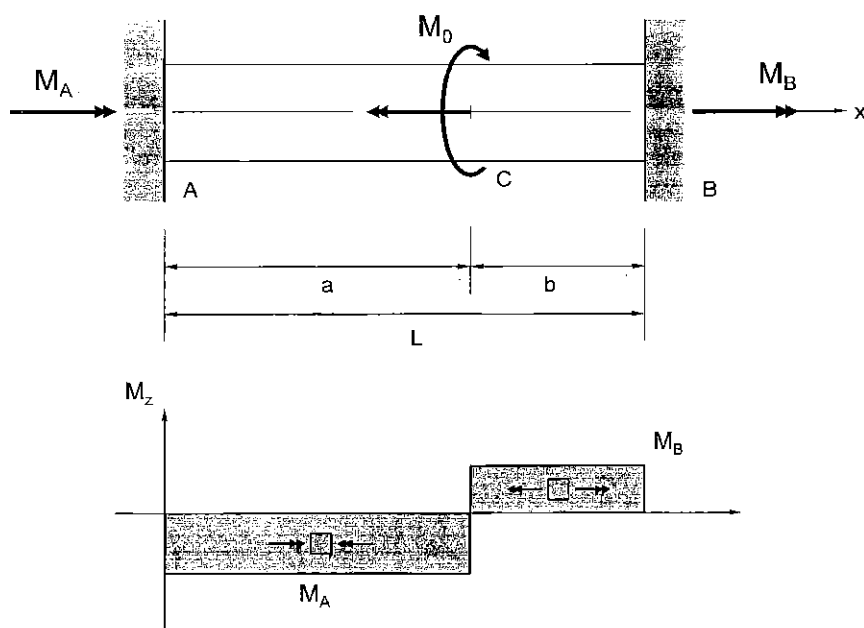


Figura 3.7. Torsión hiperestática

La única ecuación de equilibrio aplicable es la de momentos alrededor del eje \$x\$. Llamando \$M_A\$ y \$M_B\$ a los momentos en las secciones de empotramiento, resulta:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_A + M_B = M_0 \quad (3.17)$$

Por consiguiente, bajo esa carga esta estructura es hiperestática de primer grado. Para su resolución aplicaremos la ya conocida metodología del método de las fuerzas. Se comienza, por tanto, con la elección de una incógnita, que en este caso puede ser, por ejemplo, el momento torsor de reacción \$M_B\$ en el empotramiento B; a continuación se libera la condición de enlace que origina este momento, con lo que la

estructura resultante pasa a ser isostática (empotrada en A y libre en B) sometida simultáneamente a M_o y a M_B ; y finalmente se formula la correspondiente condición de compatibilidad de las deformaciones, que será la condición de giro nulo en B que impone el empotramiento. De esta forma:

$$\varphi_B = \varphi_{BA} = 0 \quad (3.18)$$

Desarrollando, teniendo en cuenta (3.17):

$$\varphi_B = \varphi_{BA} = \varphi_{BC} + \varphi_{CA} = \frac{M_B \cdot b}{GI_P} - \frac{M_A \cdot a}{GI_P} = \frac{M_B \cdot b}{GI_P} - \frac{(M_o - M_B) \cdot a}{GI_P} = 0 \quad (3.19)$$

de donde resulta:

$$M_B = \frac{M_o \cdot a}{L} \quad (3.20)$$

Resuelta la hiperestaticidad, el valor de la otra reacción M_A puede obtenerse a partir de la ecuación de equilibrio (3.17), con lo que el diagrama de momentos torsores queda perfectamente definido.

3.2.3. Cálculo de ejes de transmisión de potencia

Un problema típico en el diseño de ejes es determinar la sección óptima para transmitir una potencia dada Q a una velocidad conocida n (r.p.m.).

Punto de partida para la resolución de este problema es expresar la potencia que transmite el eje como:

$$Q = M_x \cdot \omega \quad (3.21)$$

siendo M_x el momento torsor necesario y ω la velocidad angular, expresada en rad/s.

Por tanto, el valor del momento M_x necesario será:

$$M_x = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{2\pi \cdot n/60} = \frac{30 \cdot Q}{\pi \cdot n} \quad (3.22)$$

donde de momento no se han especificado las unidades en que puede estar expresada la potencia. En el ámbito de los motores sigue siendo bastante habitual expresar dicha potencia Q en C.V., en cuyo caso recuérdese que 1C.V. \approx 746 N•m/s.

Para calcular la sección necesaria para transmitir ese par torsor bastará imponer que la tensión tangencial máxima originada sea inferior a la máxima admisible en el material, es decir:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x \cdot R}{I_p} = \frac{M_x}{W_x} \leq \tau_{adm} \quad (3.23)$$

Luego el módulo resistente mínimo de la sección ha de ser:

$$W_x \geq \frac{M_x}{\tau_{adm}} = \frac{30 \cdot Q}{\pi \cdot n \cdot \tau_{adm}} \quad (3.24)$$

De acuerdo con esta expresión es posible transmitir la misma potencia con un módulo resistente menor, aumentando bien el número de revoluciones o bien la tensión tangencial admisible.

A partir de (3.24) puede obtenerse el radio necesario para el eje:

$$W_x = \frac{\pi \cdot R^3}{2} \Rightarrow R \geq \sqrt[3]{\frac{60 \cdot Q}{\pi^2 \cdot n \cdot \tau_{adm}}} \quad (3.25)$$

Si se optara por una sección hueca tendríamos dos incógnitas (R_i , R_e) en lugar de una y la solución quedaría indeterminada, a no ser que se impusiera algún otro tipo de requerimiento (por ejemplo, alguna relación entre los dos radios, o el peso máximo del eje). En cualquier caso, la sección resultante ha de ser tal que verifique (3.24).

3.3. FLEXIÓN Y TORSIÓN COMBINADAS EN PIEZAS DE SECCIÓN CIRCULAR

No es habitual que se presente torsión pura en los problemas reales; por el contrario, son frecuentes los casos en que la torsión aparece combinada con la flexión, tal como ocurre con los ejes de los motores. Su análisis requiere la consideración conjunta de ambas sollicitaciones: flexión y torsión. Supuestas pequeñas deformaciones y comportamiento elástico lineal, aplicando el principio de superposición se puede obtener la distribución de tensiones y deformaciones totales como suma (vectorial) de las correspondientes a cada uno de los esfuerzos.

Sin pérdida de generalidad y con objeto de ilustrar la metodología a seguir en un caso cualquiera de acción combinada de flexión y torsión en una pieza de sección circular, consideremos el siguiente caso:

La fig.3.8 muestra una pieza cilíndrica AB de sección maciza, longitud L y material de tensión admisible σ_{adm} , que está empotrada en uno de sus extremos y que en el otro lleva soldada una barra rígida BC. Ambas están dispuestas en un plano horizontal y son perpendiculares entre sí. En el extremo C, a una distancia e del eje de la pieza, recibe una carga vertical P. Determinar el radio R que debe tener la pieza para soportar esta carga.

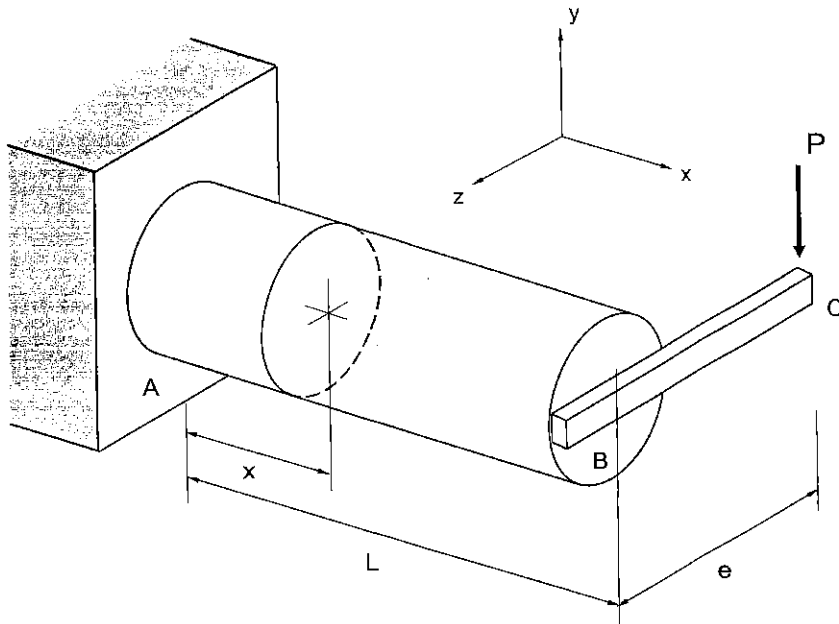


Figura 3.8. Flexión y torsión combinadas

Para el análisis de esta estructura utilizaremos el sistema de ejes cartesiano xyz indicado en la figura.

En una sección genérica de la pieza situada a una distancia x del empotramiento, los esfuerzos de sección resultantes son:

$$V_y = P; \quad M_x = P \cdot e; \quad M_z = P \cdot (L - x); \quad (3.26)$$

y los diagramas de esfuerzos son los indicados en la fig.3.9a.

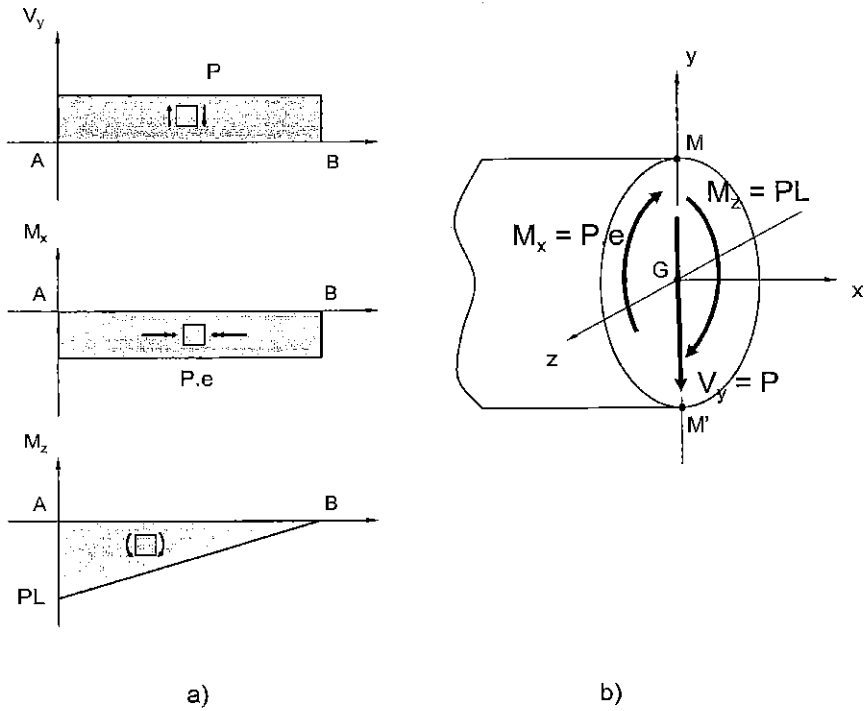


Figura 3.9. a) Diagramas de esfuerzos; b) Esfuerzos en la sección de empotramiento

De la simple observación de estos diagramas se concluye que *la sección más comprometida de la pieza es la de empotramiento (x=0)*, en la que simultáneamente actúan un esfuerzo cortante, un momento torsor y un momento flector cuyos valores y sentidos se indican en la fig.3.9b.

Una vez se ha determinado cuál es la sección más comprometida, queda por fijar qué punto de esa sección es el que trabaja en peores condiciones. Será el estado tensional de este punto el que servirá como referencia para aplicar alguna de las teorías de fallo.

Para ello bastará tener en cuenta cómo son las distribuciones de tensiones debidas a cada uno de los esfuerzos presentes en esa sección. Por lo que se refiere al momento torsor M_x , da lugar a una distribución de tensiones tangenciales que varía linealmente desde un valor nulo en el centro de la sección hasta un valor máximo en los puntos del contorno, en los cuales es tangente al mismo y de valor:

$$\tau_{x\phi máx} = \frac{M_x \cdot R}{I_p} = \frac{2M_x}{\pi R^3} \tag{3.27}$$

En la fig.3.10a se representa esta distribución para los puntos del diámetro vertical MM'.

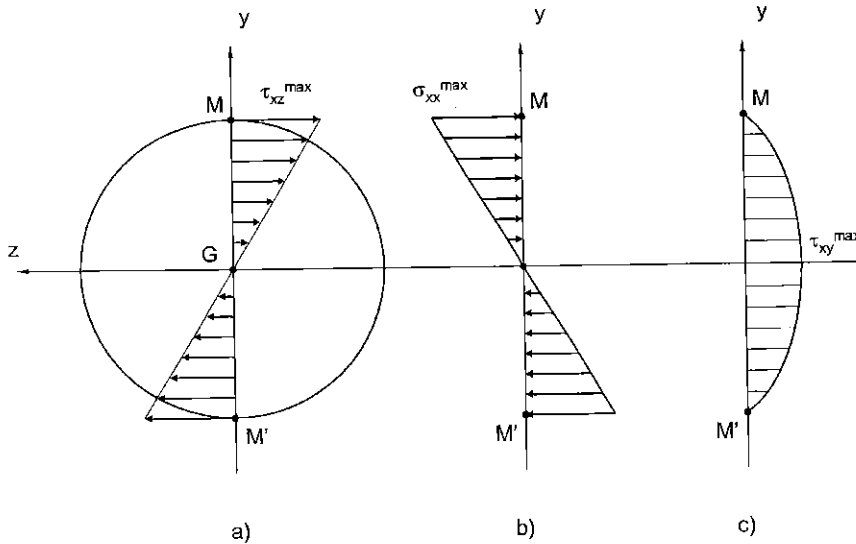


Figura 3.10. Distribución de tensiones: a) Torsor; b) Flector; c) Cortante

Por su parte, el momento flector M_z da lugar a una distribución de tensiones normales que varía linealmente con la distancia al eje neutro z : es nula en los puntos de este eje y máxima en los puntos M y M' más alejados del mismo, como se indica en la fig.3.10b. El valor máximo viene dado por:

$$\sigma_{xx}^{máx} = \frac{M_z \cdot R}{I_z} = \frac{4M_z}{\pi R^3} \quad (3.28)$$

Finalmente, el esfuerzo cortante V_y da lugar a una distribución de tensiones cortantes que varía de forma parabólica en el canto de la sección. En la fig.3.10c se representa esta distribución para los puntos del diámetro vertical. Su valor es nulo en los extremos del mismo y máximo en el centro, de valor:

$$\tau_{xy}^{máx} = \frac{4V_y}{3A} = \frac{4V_y}{3\pi R^2} \quad (3.29)$$

Este valor máximo se presenta simultáneamente en todos los puntos del eje neutro z y es, por lo general, muy pequeño frente a los otros valores máximos (3.27) y (3.28), por lo que no suele tenerse en cuenta.

Tras estas consideraciones se concluye con facilidad cuál es el punto de la sección con el estado tensional más desfavorable: considerada la torsión, este punto será uno del contorno, puesto que es ahí donde se originan las tensiones máximas (3.27); y en cuanto a la flexión, las tensiones máximas (3.28) aparecen en los puntos M y M' más alejados del eje neutro: éstos serán, por consiguiente, los puntos de la sección que trabajan en peores condiciones. En ambos los valores numéricos de las tensiones normal y tangencial serán idénticos: únicamente se diferencian en los sentidos, como se aprecia en la fig.3.10. Para el ejemplo que se está considerando, en M la tensión normal es de tracción y en M' es de compresión. Esto sería relevante si el material de la pieza tuviera distintas resistencias a tracción y compresión. No lo es cuando ambas resistencias son iguales, como ocurre con la gran mayoría de los materiales dúctiles, que son los materiales empleados en ejes de transmisión de potencia.

En lo que sigue supondremos material dúctil equirresistente de tensión admisible σ_{adm} . Es indiferente, por tanto, considerar el punto M o el M'. Consideremos el punto M, en el que la tensión normal (3.28) es de tracción y la tensión tangencial (3.27) tiene la dirección negativa del eje z. En la fig.3.11a se representa su estado tensional y en la fig.3.11b el correspondiente diagrama de los círculos de Mohr.

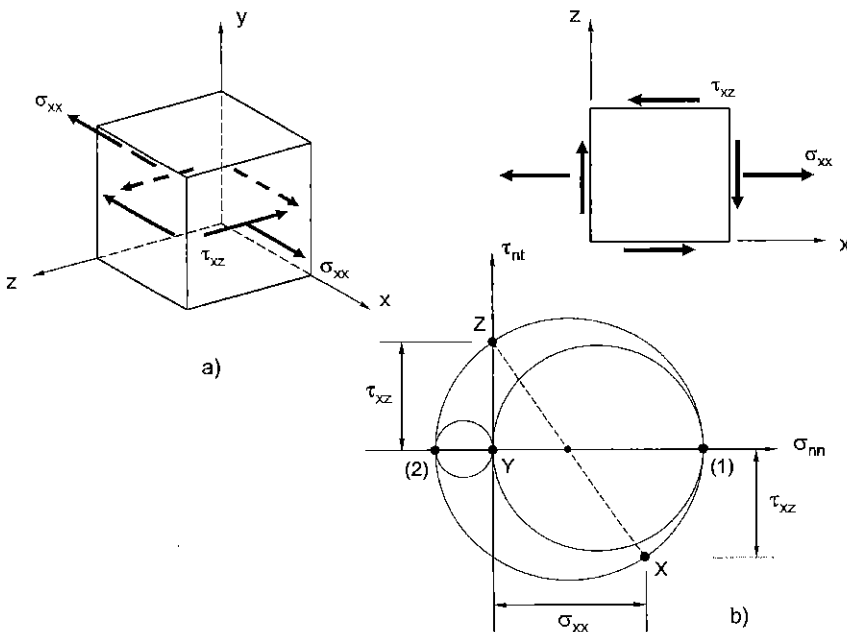


Figura 3.11. Punto M: a) estado tensional; b) diagrama de los círculos de Mohr

Los correspondientes valores de las tensiones principales y de la tensión tangencial máxima en este punto son:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}; \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_{xx}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}; \quad \sigma_3 = 0$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$
(3.30)

Una vez que se ha definido el estado tensional en el punto más comprometido de la pieza, para finalizar el análisis no resta sino aplicar en él alguna de las teorías de fallo. Para el caso de materiales dúctiles, como son los habitualmente utilizados en la fabricación de ejes, es habitual emplear bien la teoría de Tresca o bien la de von Mises. Como veremos a continuación, para el caso de flexión y torsión combinadas en piezas de sección circular es posible obtener una formulación común que sirve para ambas teorías y que presenta la particularidad de expresarse directamente en función de los momentos flector y torsor que actúan en la sección más desfavorable, sin necesidad de estudiar el estado tensional en el punto más comprometido de esa sección.

Recordemos que en el ejemplo que estamos considerando se trata del punto M de la sección de empotramiento, en el que los valores de la tensión normal y cortante son:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z \cdot R}{I_z} = \frac{M_z}{W_z} \quad \left(W_z = \frac{I_z}{R} = \frac{\pi R^3}{4} \right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{M_x \cdot R}{I_p} = \frac{M_x}{2W_z}$$
(3.31)

donde M_z y M_x son, respectivamente, los momentos flector y torsor que actúan en la sección, y W_z el módulo resistente a la flexión que, recuérdese, es doble del módulo resistente a la torsión, ya que en una sección circular el momento polar de inercia es el doble del diametral ($I_p=2I_z$). Las tensiones principales y la tensión tangencial máxima en este punto son las expresadas en (3.30).

Formulación de la teoría de Tresca

Según esta teoría debe cumplirse:

$$\tau_{m\acute{a}x} \leq \frac{\sigma_{adm}}{2}$$
(3.32)

que, teniendo en cuenta (3.30), se convierte en:

$$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xz}^2} \leq \sigma_{adm} \quad (3.33)$$

de donde, sustituyendo los valores dados en (3.31), se obtiene finalmente:

$$\frac{\sqrt{M_z^2 + M_x^2}}{W_z} \leq \sigma_{adm} \quad (3.34)$$

Formulación de la teoría de von Mises

Según esta teoría debe cumplirse:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq \sigma_{adm} \quad (3.35)$$

que, teniendo en cuenta (3.30), se convierte en:

$$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xz}^2} \leq \sigma_{adm} \quad (3.36)$$

y sustituyendo los valores expresados en (3.31):

$$\frac{\sqrt{M_z^2 + 0,75M_x^2}}{W_z} \leq \sigma_{adm} \quad (3.37)$$

Formulación conjunta de ambas teorías

Como puede observarse, hay una gran similitud en las expresiones (3.34) y (3.37) obtenidas de la aplicación de estas teorías al caso de flexión y torsión combinadas. Ambas pueden englobarse en la siguiente formulación única:

$$\frac{M_{eq}}{W_z} \leq \sigma_{adm} \quad (3.38)$$

que no es sino la formulación del criterio de resistencia que debiera aplicarse si la pieza trabajara a flexión pura bajo la acción de un *momento flector equivalente* M_{eq} . Este momento varía según sea la teoría que decida aplicarse:

$$\begin{aligned} \text{Tresca :} & \quad M_{eq} = \sqrt{M_z^2 + M_x^2} \\ \text{von Mises :} & \quad M_{eq} = \sqrt{M_z^2 + 0,75M_x^2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Teniendo en cuenta la expresión (3.31) para el módulo resistente a flexión W_z , el valor del radio requerido para la pieza puede obtenerse fácilmente:

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{4M_{eg}}{\pi \cdot \sigma_{adm}}} \quad (3.40)$$

3.4. TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN RECTA NO CIRCULAR. ANALOGÍA DE LA MEMBRANA

3.4.1. Introducción

La teoría de torsión de piezas prismáticas de sección recta circular desarrollada hasta ahora se basaba en una consideración previa, derivada de la perfecta simetría de la sección: que durante la deformación las secciones rectas permanecen planas. Las secciones giran como un disco rígido alrededor de su eje normal, de forma que en cualquier punto la tensión tangencial originada es perpendicular al segmento que une ese punto con el centro de la sección. *Por el contrario, en torsión de piezas de sección recta no circular, ni las secciones permanecen planas ni la tensión en un punto es normal al segmento que le une con el centro.*

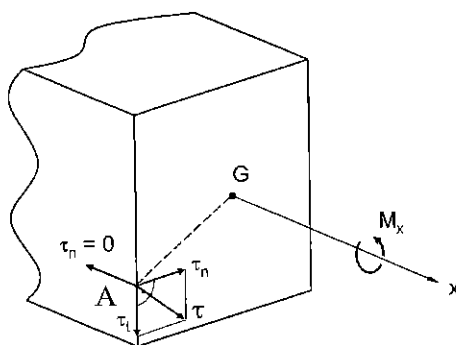


Figura 3.12. Torsión de una barra de sección rectangular: tensiones

Consideremos, por ejemplo, la pieza de sección rectangular de la fig.3.12 sometida a dos pares iguales y de sentido contrario aplicados en sus extremos: trabaja, por tanto, a torsión pura. Si se mantiene la hipótesis de que en cualquier punto de la sección la tensión es perpendicular al radio vector que une ese punto con el centro de gravedad de la misma, en el punto A del contorno la tensión τ podría descomponerse en dos componentes, una τ_n según la dirección normal y otra τ_t según la dirección tangente al

contorno, y de conformidad con la ley de reciprocidad de tensiones tangenciales en la superficie exterior de la barra debiera aparecer una tensión tangencial del mismo valor que la normal τ_n . Ahora bien, esta tensión ha de ser nula ya que la superficie exterior está libre de carga, de donde se concluye *que la tensión tangencial en los puntos del contorno de la sección tiene la dirección de la tangente al mismo*. El mismo razonamiento permite concluir *que en aquellos puntos del contorno que tienen dos tangentes, como son los vértices de la sección rectangular, la tensión cortante es nula*.

Y además las secciones no permanecen planas. Por eso, *una teoría que pretenda calcular de forma correcta la distribución de tensiones y deformaciones en una pieza prismática de sección recta no circular sometida a torsión deberá tener en cuenta que las secciones transversales experimentan importantes alabeos*. Este hecho se puede verificar experimentalmente de una forma muy sencilla: basta someter a torsión una pieza prismática de sección cuadrada hecha de un material fácilmente deformable, como puede ser la goma, en la que previamente se ha dibujado una retícula (fig.3.13a) coincidiendo con lados de secciones rectas y líneas paralelas al eje de la pieza. Por simple observación de la pieza deformada como consecuencia de la aplicación del momento torsor, se comprueba que las secciones rectas, inicialmente planas, sufren un cierto alabeo (fig.3.13b).

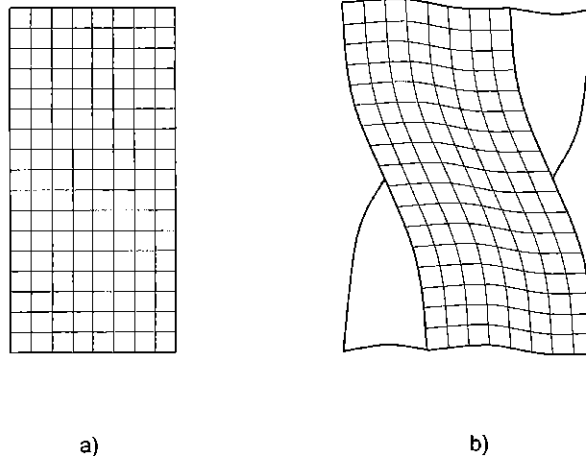


Figura 3.13. Torsión de una barra de sección rectangular: deformaciones

Para explicarlo, examinemos el comportamiento de los elementos A, B, C y D de la barra prismática de la fig.3.14a. En los elementos extremos A y D no puede aparecer tensión cortante τ_{xz} (ni tampoco τ_{xy}), pues de lo contrario habría también tensión sobre las caras de la superficie libre de la barra (fig.3.14b). Por tanto, estos elementos no

experimentan deformación angular γ_{xz} , lo cual significa que mantienen sus ángulos rectos en este plano xz (fig.3.14c). En cambio, en los elementos intermedios B y C sí se pueden originar tensiones τ_{xz} (aunque no τ_{xy} por la misma razón anterior). En consecuencia, cuando B y C experimentan deformación angular γ_{xz} , los elementos A y D giran como un sólido rígido, quedando de esta forma fuera del plano de la sección transversal. Se dice entonces que la sección ha sufrido **alabeo**.

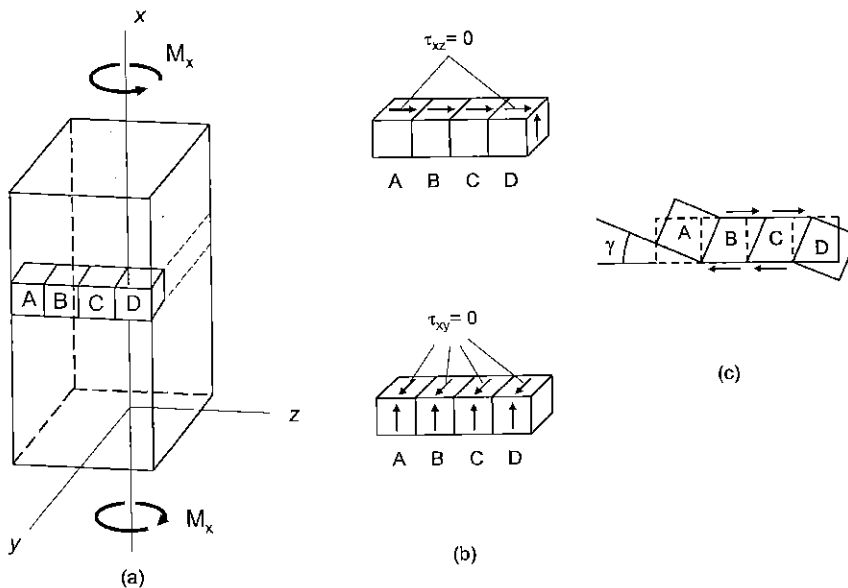


Figura 3.14. Alabeo de las secciones rectas

Si se aumenta indefinidamente el número de elementos considerado, haciéndose éstos muy pequeños, la deformada de la línea A-D sería una curva suave. La tensión cortante se dirige en dirección paralela a esta curva del contorno y se anula en los puntos extremos A y D.

De este ejemplo y las consideraciones hechas anteriormente se pueden deducir las siguientes *conclusiones generales relativas a la torsión de una barra de sección recta no circular*:

- 1) La sección experimenta un alabeo en la deformación.
- 2) La tensión tangencial en los puntos de la superficie está orientada según la tangente al contorno de la sección y, por tanto, no puede ser perpendicular al radio vector, como sucedía en la sección circular.

3) La tensión tangencial en los posibles vértices de la sección es nula.

Por estas razones, la determinación de las tensiones y deformaciones en la torsión de una barra de sección recta no circular es de por sí un problema bastante complicado que no se puede resolver con los métodos característicos de la Resistencia de Materiales, como es por ejemplo la teoría de Coulomb para torsión de barras de sección circular expuesta al comienzo de este capítulo. La solución del problema se debe a Saint-Venant, quien en 1855 formuló las ecuaciones diferenciales fundamentales para la torsión elástica basado en la Teoría de la Elasticidad.

3.4.2. Torsión libre y torsión restringida

En ocasiones ocurre que la pieza sometida a torsión tenga alguna sección transversal obligada a permanecer fija, como es el caso de secciones de empotramiento, que no pueden alabearse durante la torsión. Esta restricción al alabeo de una sección transversal durante la torsión da lugar a la aparición en esa sección de una distribución de tensiones normales que decrece en las secciones próximas; a su vez, esta distribución de tensiones normales origina en todas las secciones afectadas un momento flector adicional decreciente y, por consiguiente, una nueva distribución de tensiones cortantes que añadir a la debida propiamente a la torsión, con lo que la rigidez a torsión de la barra se modifica. A la torsión en la que ninguna sección tiene restringido el posible alabeamiento se le denomina “torsión libre”, y se conoce como “torsión restringida” el caso en el que sí existe esa restricción.

La influencia que la restricción del alabeo de una sección tiene en el comportamiento de una barra solicitada a torsión puede ser importante cuando las secciones transversales son abiertas y de pequeño espesor, y por lo general es despreciable en los restantes tipos de secciones.

3.4.3. Deducción de las ecuaciones generales: Torsión de Saint-Venant. Método de la función de tensión de Prandtl

En este apartado se deducirán las ecuaciones generales de la torsión para piezas de sección recta cualquiera. Para ello, consideremos una barra prismática de sección genérica sometida a torsión pura de valor M_x . Suponemos que la torsión es libre, y que por lo tanto no se desarrollan tensiones normales. Las únicas componentes de tensión necesarias para el equilibrio son las tensiones cortantes τ_{xy} y τ_{xz} . Las tensiones cortantes τ_{yz} son nulas por exigencias del equilibrio (no contribuyen a M_x , sino a M_y ó M_z , que son nulos). Así pues:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{yz} = 0 \quad (3.41)$$

Además, sabemos por las ecuaciones de equilibrio interno (2.30) que:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (3.43)$$

donde las ecuaciones (3.43) nos indican que las tensiones tangenciales no varían con la coordenada x , es decir, existe la misma distribución de tensiones en todas las secciones transversales.

Por tanto, para resolver el problema, contamos con la ecuación (3.42) y dos incógnitas (las dos tensiones tangenciales). Se trata entonces de un problema estáticamente indeterminado, que sólo puede resolverse con información adicional de las deformaciones.

Por la ley de Hooke, se deduce que:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.44)$$

Las tres primeras deformaciones en (3.44) proporcionan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.45)$$

que nos permiten expresar los desplazamientos en la forma:

$$u = f(y, z); \quad v = g(x, z); \quad w = h(x, y) \quad (3.46)$$

Como γ_{yz} es nula, un rectángulo contenido en la sección recta (plano yz) conservará sus ángulos rectos. Así pues, durante la deformación, un punto en el plano yz únicamente girará alrededor de un determinado centro, que podemos tomar coincidente con el eje x . Pueden así obtenerse los desplazamientos v y w contenidos en el plano en términos de un ángulo ϕ constante en la sección, tal como muestra la fig.3.15:

$$v = -\phi \cdot z; \quad w = \phi \cdot y \quad (3.47)$$

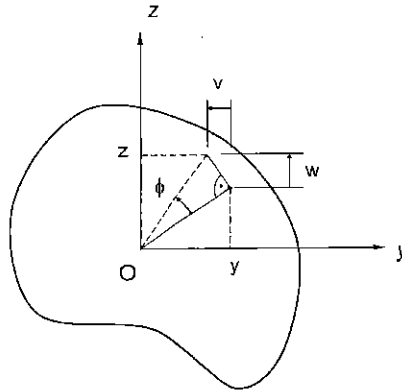


Figura 3.15. Desplazamientos contenidos en el plano de la sección recta

A continuación demostraremos que $d\phi/dx$ es constante. Teniendo en cuenta la ley de Hooke y la ecuación (3.43):

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = G \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.48)$$

y sustituyendo (3.47):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - z \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (3.49)$$

El primer sumando de esta ecuación se anula por (3.45). Por tanto:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \theta = cte \quad (3.50)$$

De aquí se deduce que el giro relativo a la sección $x=0$ es $\theta \cdot x$ y que las ecuaciones (3.46) pueden expresarse en la forma:

$$u = f(y, z); \quad v = -\theta \cdot x \cdot z; \quad w = \theta \cdot x \cdot y \quad (3.51)$$

Finalmente, de las relaciones de Hooke obtenemos:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta \cdot z \right) \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \theta \cdot y \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Diferenciando la primera de estas ecuaciones respecto a y y la segunda respecto a z , y sustituyendo en (3.42) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.53)$$

que es la ecuación diferencial que gobierna el alabeo de la sección. La ecuación (3.53) es la *ecuación de Laplace*, cuya solución son las funciones armónicas.

Por otra parte, se puede comprobar que las ecuaciones de compatibilidad se reducen a la condición $\partial^2 u / \partial z \partial y = \partial^2 u / \partial y \partial z$. Si en (3.52) derivamos la primera ecuación respecto a z y la segunda respecto a y , y restamos una de otra, la imposición de la anterior condición de compatibilidad conduce a:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G \cdot \theta \quad (3.54)$$

El problema queda entonces planteado en términos de las tensiones incógnitas τ_{xy} y τ_{xz} con las ecuaciones (3.42) y (3.54).

La teoría de torsión expuesta hasta aquí se debe a Saint-Venant. Poco tiempo después, Prandtl presentó un método alternativo de análisis que permite reducir el problema a una sola incógnita. Su idea consistió en introducir una función dos veces diferenciable $\Phi(y,z)$, llamada *función de tensión*, tal que:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.55)$$

De esta forma, la ecuación de equilibrio (3.42) se satisface idénticamente. Nos falta comprobar que las deformaciones son compatibles. Sustituyendo en (3.54), resulta:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G \cdot \theta \quad (3.56)$$

es decir, la función Φ debe satisfacer la ecuación de Poisson.

Con (3.56) el problema quedaría planteado en términos de la única incógnita, la función de tensión Φ , de la que por derivación se obtienen las componentes de tensión.

Puede comprobarse que la pendiente de Φ en cualquier dirección n es igual a la tensión cortante, cambiada de signo, en la dirección perpendicular (t):

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{dn} = -\tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen}\alpha = -\tau_t \quad (3.57)$$

donde α es el ángulo de n con el eje y (fig.3.16a).

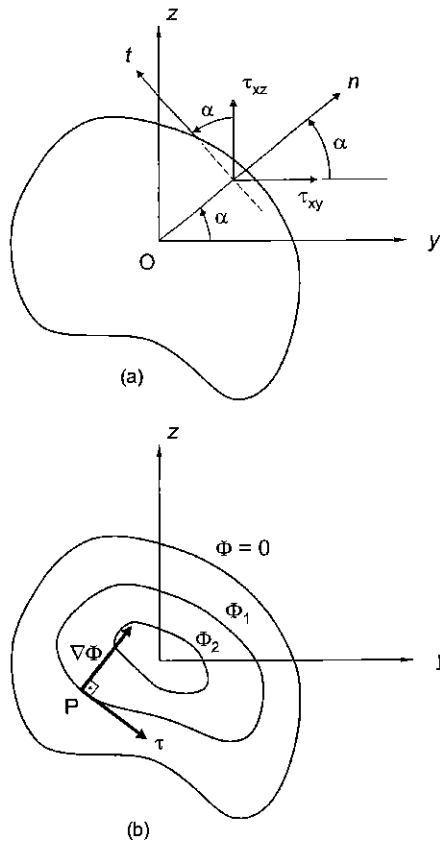


Figura 3.16. Interpretación geométrica de la función de tensión Φ

Además, como las componentes de tensión cortante normales al contorno son nulas, la pendiente de Φ en dirección paralela al contorno debe ser cero. Esto significa que Φ es constante a lo largo del contorno. La magnitud de esta constante es arbitraria, pues las tensiones se definen a partir de las derivadas de Φ y no de sus valores absolutos. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que esa constante es cero.

De (3.57) también se deriva que el vector $\vec{\tau}$ en un punto es tangente a la línea $\Phi=cte$ que pasa por ese punto (cfr. fig.3.16b).

Seguindo con el análisis, hemos visto hasta ahora que cualquier solución de (3.56) cumple con los requisitos de equilibrio y compatibilidad. Resta por asegurar que la resultante de las tensiones generadas en la sección es estáticamente equivalente al momento torsor M_x impuesto:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A (-\tau_{xy} \cdot z + \tau_{xz} \cdot y) dydz = - \int_A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot z + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y \right) dydz = \\ &= - \int_A \left(\frac{\partial(\Phi z)}{\partial z} + \frac{\partial(\Phi y)}{\partial y} \right) dydz + 2 \int_A \Phi dydz \end{aligned} \quad (3.58)$$

La primera integral se transforma por Green-Riemann¹ en:

$$\int_A \left[\frac{\partial(\Phi z)}{\partial z} + \frac{\partial(\Phi y)}{\partial y} \right] dydz = \oint_C (\Phi \cdot z \cdot n_z ds + \Phi \cdot y \cdot n_y ds) = 0 \quad (3.59)$$

donde C representa el contorno de la sección recorrido en sentido antihorario. La integral se anula porque $\Phi=0$ en el contorno. De esta forma, nos queda:

$$M_x = 2 \int_A \Phi \cdot dydz \quad (3.60)$$

resultado que expresa que el momento torsor en cualquier sección es el doble del volumen encerrado por la superficie Φ .

Si expresamos:

$$M_x = G \cdot J \cdot \theta \quad (3.61)$$

con una formulación análoga a la de la torsión de un eje de sección circular, resultará que el módulo de torsión J es:

$$J = \frac{2}{G \cdot \theta} \int_A \Phi \cdot dydz \quad (3.62)$$

¹ Fórmula de Green-Riemann para el plano: Si C es la frontera del recinto S y las funciones P(x,y) y Q(x,y) son continuas, junto con sus derivadas parciales de primer orden, en el recinto cerrado (S∪C), entonces:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

donde el sentido del recorrido del contorno C se elige de forma que deje al recinto S a la izquierda.

3.4.4. Analogía de la membrana

Como la solución analítica del problema de la torsión de barras de sección no circular resultaba bastante complicada, especialmente si la sección carece de simetría, surgió la necesidad de desarrollar métodos indirectos para el estudio de este problema. Entre ellos ocupa un lugar destacado la llamada *analogía de la membrana*, cuyo fundamento es el siguiente: en 1903 Prandtl observó que la ecuación (3.56), que gobierna el problema de torsión según la teoría de Saint-Venant, se asemeja a la ecuación de la superficie de equilibrio de una membrana delgada unida en su periferia a un marco rígido que tiene la misma forma que el contorno de la sección que trabaja a torsión, y que está sometida a una presión uniforme p en una de sus caras.

Si \bar{u} es el desplazamiento transversal de la membrana y T es la tensión constante por unidad de longitud en su contorno, se puede comprobar que la ecuación de equilibrio que gobierna el comportamiento de la membrana es:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = -\frac{p}{T} \quad (3.63)$$

ecuación similar a la (3.56) de la torsión, en la que la variable \bar{u} equivale a Φ y p/T hace lo mismo con $2G\theta$.

Basadas en la identidad formal de las ecuaciones diferenciales que gobiernan ambos problemas, de la simple observación de la forma de la membrana se pueden deducir importantes relaciones cualitativas acerca de la distribución de tensiones tangenciales en una sección debidas a la acción de un momento torsor. Cabe señalar las siguientes:

- a) La magnitud de la tensión tangencial en un punto cualquiera de la sección sometida a torsión, es proporcional a la máxima pendiente del punto correspondiente en la membrana.
- b) En un punto de la sección la tensión tangencial es tangente a la curva de nivel que pasa por el punto correspondiente en la configuración de equilibrio de la membrana deformada.
- c) Las máximas tensiones tangenciales se presentan en aquellos puntos donde las curvas de nivel están muy próximas unas a otras, es decir, donde es mayor la pendiente de la membrana.

- d) El momento torsor aplicado a la sección es proporcional al doble del volumen comprendido entre la membrana deformada y el plano de su contorno.

Sometiendo a presiones conocidas membranas muy delgadas, como son por ejemplo las películas de jabón, la analogía de la membrana de Prandtl permitió obtener experimentalmente tanto la distribución de tensiones como la rigidez a torsión de barras de sección no circular.

3.4.5. Torsión de una pieza de sección recta rectangular

Sea la sección rectangular de dimensiones $b \times h$ ($h > b$) de la fig.3.17a, solicitada a torsión por el momento torsor M_x . Aplicando la solución de Saint-Venant se puede obtener la distribución de tensiones cortantes, caracterizada por presentar valores nulos en el centro de gravedad de la sección y en los vértices, y valores máximos en los puntos medios A de los lados mayores, siendo:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{\alpha \cdot h \cdot b^2} \quad (3.64)$$

donde α es un coeficiente que depende de la relación h/b . Si analizáramos el problema mediante la analogía de la membrana comprobaríamos que es en esos puntos medios donde las curvas de nivel están más próximas (fig.3.17b).

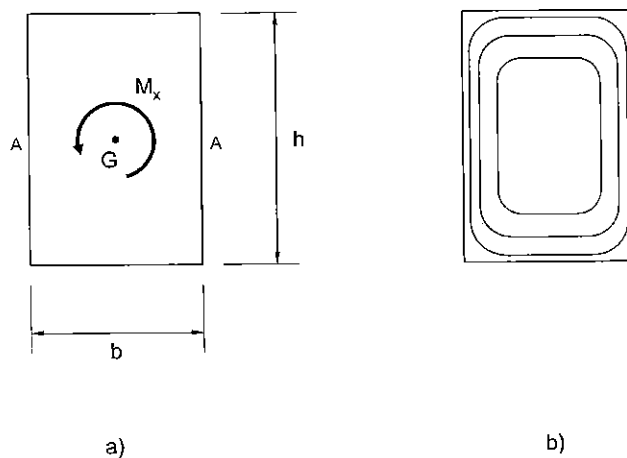


Figura 3.17. Sección rectangular

A su vez, el ángulo de torsión por unidad de longitud puede expresarse como:

$$\theta = \frac{M_x}{\beta \cdot h \cdot b^3 \cdot G} \quad (3.65)$$

siendo β un coeficiente que depende también de la relación h/b . En la tabla 3.2 se incluyen valores de α y β para distintas relaciones h/b . Obsérvese que para $h \gg b$, ambos coeficientes se aproximan a $1/3$.

h/b	1	1,5	2	3	...	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	...	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	...	0,333

Tabla 3.2. Coeficientes α y β para la torsión de secciones rectangulares

3.5. TORSIÓN DE PERFILES ABIERTOS DE PARED DELGADA

En el apartado anterior se ha puesto de manifiesto que para determinar con precisión la distribución de tensiones tangenciales debidas a un momento torsor en piezas prismáticas rectas de sección no circular es necesario recurrir a los métodos matemáticos de la Teoría de la Elasticidad. Por su gran número de aplicaciones en ingeniería, presentan un particular interés los **perfiles de pared delgada**, así denominados porque *en ellos el espesor que presenta su sección recta es muy pequeño en comparación con las otras dimensiones lineales de la misma*. Pueden ser abiertos y cerrados. En el estudio de la torsión de estos perfiles de pared delgada es posible introducir ciertas hipótesis simplificadoras que permiten obtener la distribución de tensiones debidas al momento torsor de una forma bastante sencilla y con suficiente aproximación.

Considérese el **perfil delgado de sección transversal abierta** de la fig.3.18a, sometido a un momento torsor M_x . Si se hiciera uso de la analogía de la membrana de Prandtl, se podría deducir cómo es la distribución de tensiones cortantes en este perfil colocando una membrana unida a un marco que posea la misma forma que la sección de pared delgada y aplicando una presión uniforme p normal a la membrana (fig.3.18b). Puede comprobarse que la intersección de la membrana deformada con

un plano perpendicular a la *línea media* de la pared, entendiéndose por tal la que divide constantemente el espesor de la pared en dos partes iguales, es una parábola (fig.3.18c). De aquí se concluye que la tensión tangencial (gradiente de la membrana deformada) es una función lineal (derivada de una parábola), y que como en los bordes A_1 y A_2 las pendientes de la membrana son máximas y de sentidos opuestos, las tensiones tangenciales serán igualmente máximas y de sentidos opuestos en dichos puntos perimetrales, anulándose en el punto de la línea media (fig.3.18d).

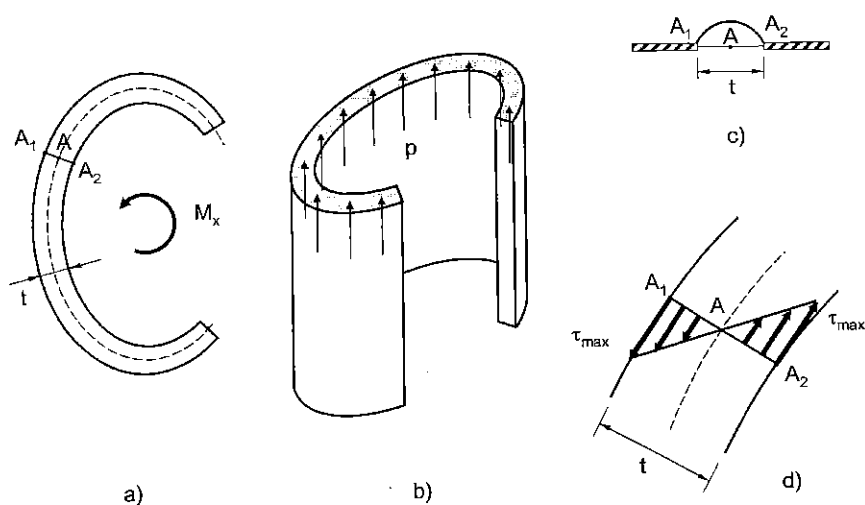


Figura 3.18. Torsión de un perfil delgado abierto. Analogía de la membrana

La aplicación de la analogía de la membrana permite asimismo comprobar que la deformación obtenida y, por consiguiente, la distribución de tensiones cortantes en el perfil apenas dependen de la curvatura del contorno de la sección recta. Quiere esto decir que los resultados para un perfil como el de la fig.3.18a serían prácticamente los mismos si considerásemos recto el contorno de la sección transversal.

Por tanto, a efectos de calcular los valores de la tensión tangencial máxima y el ángulo de torsión por unidad de longitud en un perfil abierto cualquiera de espesor constante t y línea media de longitud s , podemos considerar la torsión de una sección rectangular del mismo espesor y longitud (fig.3.19).

Se trata entonces de analizar la torsión de una sección rectangular cuya relación $h/b=s/t$ es elevada (característica de un perfil de pared delgada). Si aplicamos las expresiones (3.64) y (3.65), los valores de los coeficientes α y β se aproximan a $1/3$.

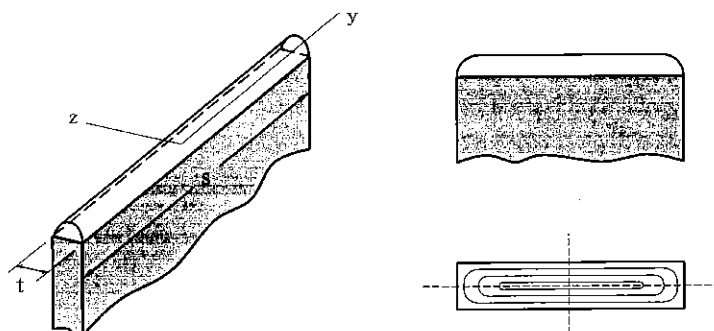


Figura 3.19. Perfil de pared delgada equivalente

Así pues, la tensión tangencial máxima y el ángulo de torsión por unidad de longitud en un perfil delgado rectangular de espesor constante t y longitud de línea media s , pueden expresarse como:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M_x}{\frac{1}{3}st^2} = \frac{M_x \cdot t}{J} \quad (3.66)$$

$$\theta = \frac{M_x}{G \cdot \frac{1}{3}st^3} = \frac{M_x}{G \cdot J} \quad (3.67)$$

donde:

$$J = \frac{1}{3}st^3 \quad (3.68)$$

es el *módulo de torsión* o *constante torsional* de la barra. Como puede apreciarse, depende exclusivamente de la geometría de la sección. Al producto $G \cdot J$ se le llama *rigidez a torsión* de la barra.

En el caso de que el espesor de la sección recta sea variable, las expresiones para $\tau_{m\acute{a}x}$ y θ siguen siendo válidas, pero ahora el módulo de torsión será:

$$J = \frac{1}{3} \int t^3 \cdot ds \quad (3.69)$$

Puede observarse que los valores máximos absolutos de la tensión tangencial en la sección corresponden a los puntos del contorno donde el espesor es máximo, siendo:

$$\tau_{\max}^{\text{Tot}} = \frac{M_x \cdot t_{\max}}{J} \quad (3.70)$$

3.5.1. Perfiles abiertos ramificados

Consideremos ahora un perfil abierto de pared delgada ramificado, como el que se representa en la fig.3.20. Por ser ramificado, y es lo que le diferencia con el caso anterior, el perfil no puede transformarse en un rectángulo equivalente.

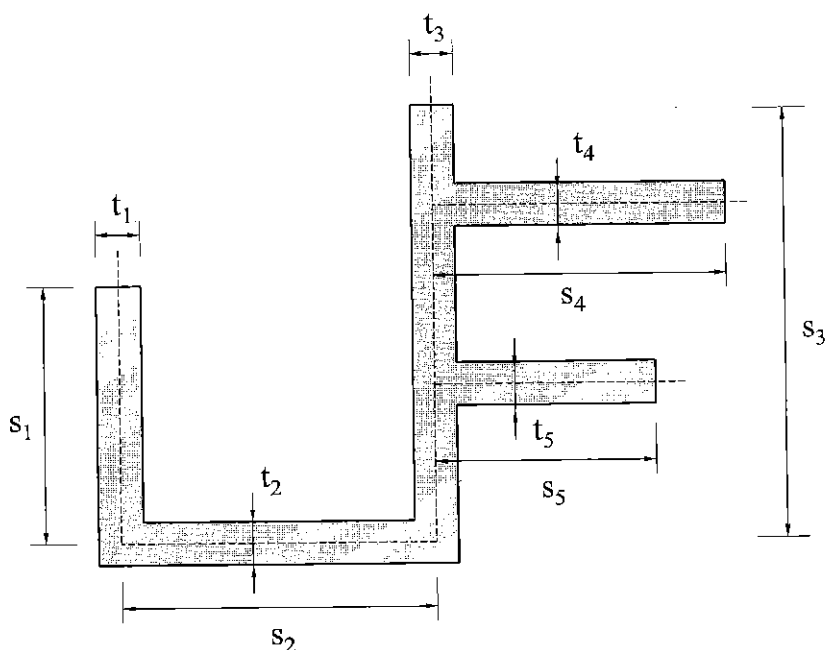


Figura 3.20. Perfil de pared delgada ramificado

Si se aplica la analogía de la membrana, se observará que la deformada de la membrana está formada por superficies cilíndricas de generatrices paralelas a la línea media, excepto en los puntos de ramificación y los extremos libres de la sección. Prescindiendo de las perturbaciones que estos puntos introducen, puede considerarse que el volumen total bajo la membrana es igual a la suma de los volúmenes bajo los rectángulos equivalentes de los diferentes tramos que componen la sección.

En otras palabras, la sección del perfil puede considerarse como constituida por n tramos rectangulares de espesores t_i y longitudes s_i . Suponiendo que en todos ellos la relación s/t es suficientemente elevada ($s/t > 10$), se puede expresar para cada tramo:

$$\tau_{\max_i} = \frac{M_{x_i}}{\frac{1}{3} s_i t_i^2} = \frac{M_{x_i} \cdot t_i}{J_i} \quad (3.71)$$

$$\theta = \frac{M_{x_i}}{G \cdot \frac{1}{3} s_i \cdot t_i^3} = \frac{M_{x_i}}{G \cdot J_i} = cte \quad (3.72)$$

en donde M_{x_i} es la parte de momento torsor que absorbe el elemento rectangular i , y J_i el correspondiente módulo de torsión.

Como el momento torsor M_x de la sección es igual a la suma de todos los M_{x_i} y el ángulo de torsión es el mismo para todos los tramos rectangulares del perfil, se deduce:

$$M_x = \sum_{i=1}^n M_{x_i} = \theta \cdot G \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} s_i \cdot t_i^3 \quad (3.73)$$

y, por tanto:

$$\theta = \frac{M_x}{G \cdot J} \quad \text{donde: } J = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} s_i \cdot t_i^3 \quad (3.74)$$

expresión que proporciona el valor del ángulo de torsión por unidad de longitud en función del momento torsor y de las características geométricas de la sección.

En la fig.3.21 se muestran los valores del módulo de torsión J para distintas secciones.

Teniendo en cuenta (3.71), (3.72) y (3.73), la tensión tangencial máxima en el elemento i puede expresarse como:

$$\tau_{\max_i} = \frac{M_{x_i}}{\frac{1}{3} s_i t_i^2} = \frac{\theta \cdot G \cdot \frac{1}{3} s_i t_i^3}{\frac{1}{3} s_i t_i^2} = \theta \cdot G \cdot t_i = \frac{M_x \cdot t_i}{J} \quad (3.75)$$

El máximo valor absoluto de la tensión tangencial en la sección del perfil se presenta en el tramo de espesor máximo, de tal forma que si aumenta en exceso el valor del momento torsor, el perfil fallará por el tramo más grueso.

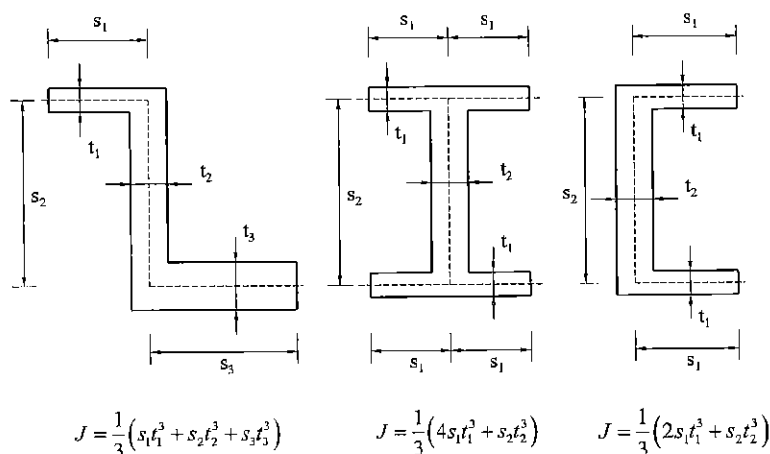


Figura 3.21. Módulos de torsión de diversos perfiles ramificados

3.6. TORSIÓN DE PERFILES CERRADOS DE PARED DELGADA

Las piezas prismáticas cuya sección transversal está constituida por un perfil cerrado de pared delgada suelen denominarse *tubos*. El área encerrada por la línea media de la pared tubular se conoce como *célula* o *celda*. Vamos a distinguir en nuestro análisis entre perfiles cerrados de una célula o de varias células.

3.6.1. Perfiles delgados cerrados de una sola célula

Las expresiones obtenidas para el análisis de secciones abiertas no son válidas para secciones cerradas, debido fundamentalmente a la diferente forma en que desarrollan las tensiones cortantes en torsión.

Considérese la torsión de la sección circular abierta de la fig.3.22a. Sabemos que en su sección transversal se origina una distribución lineal de tensiones, tal como se indica en la figura.

Por otra parte, en un eje circular anular (fig.3.22b), la forma de resistir el momento torsor es totalmente diferente. Recuérdese que las tensiones varían linealmente con el radio r . Si, manteniendo constante el diámetro exterior, se aumenta el interior hasta que el espesor de la pared sea muy pequeño en relación con las otras dimensiones, la distribución exacta de tensiones seguirá variando linealmente con r (fig.3.22c), pero esta variación, debido al pequeño espesor de la pared, será casi inapreciable. De esta forma, la tensión puede considerarse prácticamente uniforme en el espesor.

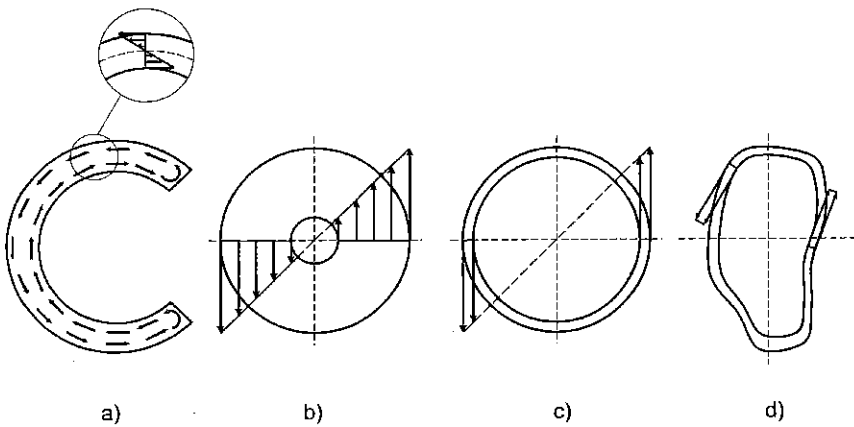


Figura 3.22. Distribución de tensiones tangenciales de torsión en perfiles abiertos (a) y cerrados (b-d)

Esta última conclusión, deducida para una sección circular, es aplicable también a secciones tubulares de forma diversa (cfr. fig.3.22d), como se pone de manifiesto mediante la analogía de la membrana: la membrana se deforma con pendiente prácticamente constante (cfr. fig.3.24b). Esta consideración simplifica notablemente el análisis de este tipo de estructuras.

Considérese un elemento longitudinal de un tubo de una sola célula, entre dos secciones transversales separadas Δx , y en particular, la porción de la pared del tubo entre los puntos 1 y 2, tal como se indica en la fig.3.23.

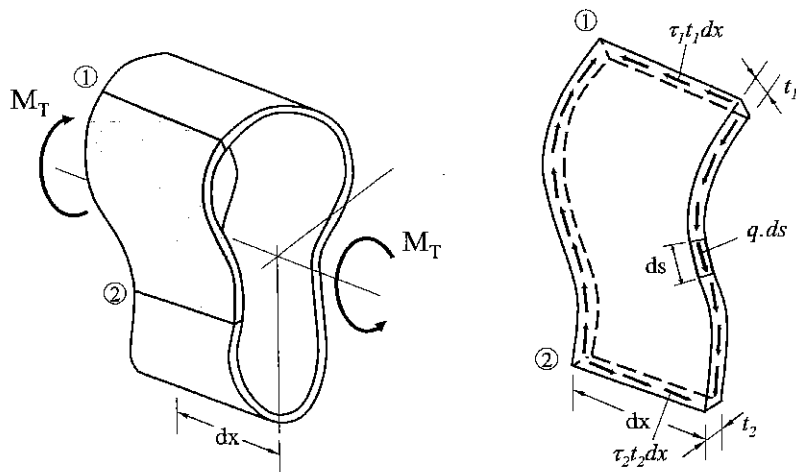


Figura 3.23. Tramo elemental del tubo

La tensión cortante es uniforme en el espesor de la pared. Por ser tangente al contorno interior y exterior, se puede admitir que en los puntos medios de la pared la tensión cortante conserva la dirección tangente a la línea media s . Las tensiones que sean normales a la línea media son despreciables, debido al pequeño espesor de la pared.

En las secciones longitudinales que pasan por 1 y 2, aparecen las tensiones tangenciales recíprocas, que dan lugar a una fuerza resultante longitudinal. Si τ_1 , τ_2 , t_1 y t_2 denotan, respectivamente, las tensiones y espesores en los puntos 1 y 2, el equilibrio en la dirección longitudinal proporciona:

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = q = cte \tag{3.76}$$

donde q representa el **flujo de cortadura en el espesor**, que resulta ser constante. Este flujo, que fue definido al estudiar la distribución de tensiones tangenciales debida al esfuerzo cortante en perfiles de pared delgada, denota una fuerza por unidad de longitud, de forma que la fuerza total sobre un elemento infinitesimal de arco ds será qds .

Hasta ahora, la variable q es desconocida. Su determinación se efectúa planteando el equilibrio estático con el momento torsor aplicado M_x .

Para calcular el momento total equivalente al flujo cortante (3.76), designemos por r la distancia perpendicular desde un punto arbitrario O de la sección transversal a la tangente por un punto de la línea media s (fig.3.24a).

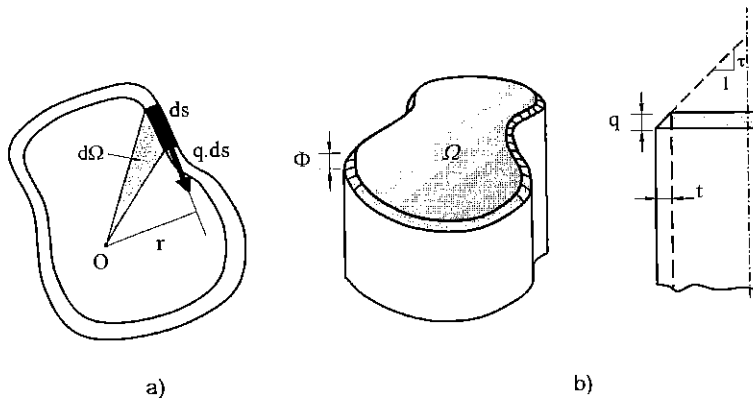


Figura 3.24. Geometría de un tubo. Analogía de la membrana

Del equilibrio resulta:

$$M_x = \int r \cdot q ds = q \int r ds \quad (3.77)$$

Ahora bien, de la definición de r .

$$d\Omega = \frac{ds \cdot r}{2} \Rightarrow \int r \cdot ds = 2\Omega \quad (3.78)$$

donde Ω es el área total encerrada por la línea media s de la pared tubular. La ecuación (3.77) se transforma, por tanto, en:

$$M_x = 2\Omega \cdot q \quad (3.79)$$

y la tensión en un punto cualquiera será:

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{M_T}{2\Omega \cdot t} \quad (3.80)$$

En la fig.3.24b, se representa la forma de obtener q y τ mediante la analogía de la membrana.

De (3.80) se deduce que, en contraste con los perfiles abiertos de pared delgada, el máximo valor de la tensión tangencial se alcanza en puntos donde el espesor es mínimo:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{2\Omega \cdot t_{min}} \quad (3.81)$$

Para calcular el ángulo de torsión por unidad de longitud, plantearemos que la energía de deformación debe ser igual al trabajo de las fuerzas exteriores.

La energía de deformación de un tubo de longitud unidad es:

$$U = \int U_o \cdot dV = \int U_o \cdot t \cdot ds \quad (3.82)$$

donde U_o representa la energía elástica de deformación por unidad de volumen:

$$U_o = \frac{\tau_{xs}^2}{2G} = \frac{M_x^2}{8\Omega^2 t^2 G} \quad (3.83)$$

Luego:

$$U = \oint \frac{M_x^2}{8\Omega^2 t^2 G} \cdot t ds = \frac{M_x^2}{8\Omega^2 G} \cdot \oint \frac{ds}{t} \quad (3.84)$$

Esta última integral depende de la ley de variación del espesor en el contorno, y es una característica geométrica de la sección.

Por otra parte, el trabajo de las fuerzas exteriores es el realizado por el momento torsor M_x :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} M_x \cdot \varphi = \frac{1}{2} M_x \cdot \theta \cdot 1 = \frac{1}{2} M_x \cdot \theta \quad (3.85)$$

Igualando (3.84) y (3.85):

$$\frac{M_x^2}{8\Omega^2 \cdot G} \cdot \oint \frac{ds}{t} = \frac{1}{2} M_x \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{M_x}{4G\Omega^2} \cdot \oint \frac{ds}{t} \quad (3.86)$$

Esta última ecuación puede expresarse en la forma general:

$$\theta = \frac{M_x}{G \cdot J} \quad (3.87)$$

siendo J el *módulo de torsión* dado por

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}}, \quad \text{ó:} \quad J = \frac{4\Omega^2}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{t_i}} \quad (3.88)$$

en donde la segunda expresión es aplicable cuando la sección transversal está formada por elementos de espesor constante.

En el caso de *secciones híbridas* compuestas por células cerradas y elementos abiertos en formas de aletas, tal como la sección de la fig.3.25, las ecuaciones (3.74) y (3.88) se combinan en la forma:

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i t_i^3 \quad (3.89)$$

siendo n el número de aletas o ramificaciones.

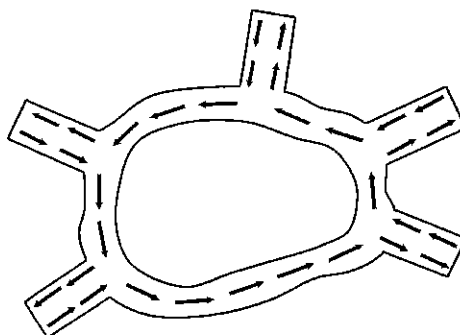


Figura 3.25. Sección híbrida de pared delgada

3.6.2. Perfiles delgados cerrados de varias células

La torsión libre (sin restricción al alabeo) de un tubo unicelular es un problema estáticamente determinado: el flujo cortante q , y, por consiguiente, la tensión tangencial es independiente de las propiedades elásticas del material. Dicho flujo se determinó estableciendo su equivalencia con el momento torsor, sin tener en cuenta la deformación de la sección.

Cuando se introduce una célula más, se añade un flujo de cortadura independiente, asociado con esta nueva célula, que no puede determinarse por simples consideraciones estáticas. Si el tubo estuviera formado por n células, habría entonces $n-1$ incógnitas de más. Por tanto, la torsión pura de secciones multicelulares es un problema estáticamente indeterminado. Como el grado de indeterminación de un tubo de n células es $n-1$, son necesarias $n-1$ condiciones de deformación.

Considérese el tubo de n células representado en la fig.3.26a. Llamemos q_i al flujo de cortadura en las paredes que rodean a la celda i , y q_{ij} al flujo de cortadura en la pared común a las celdas i y j (fig.3.26b). Realizando un corte alrededor del nudo A y planteando el equilibrio en la dirección longitudinal del perfil (fig.3.26c), se obtiene:

$$q_i dx - q_{ij} dx - q_j dx = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{ij} = q_i - q_j \quad (3.90)$$

ecuación que nos indica que el flujo de cortadura es continuo. Aplicada a cada nudo, (3.90) permite determinar los flujos de cortadura en las paredes intercelulares en

función de los flujos propios de cada célula, q_1, q_2, \dots, q_n , que son las incógnitas del problema.

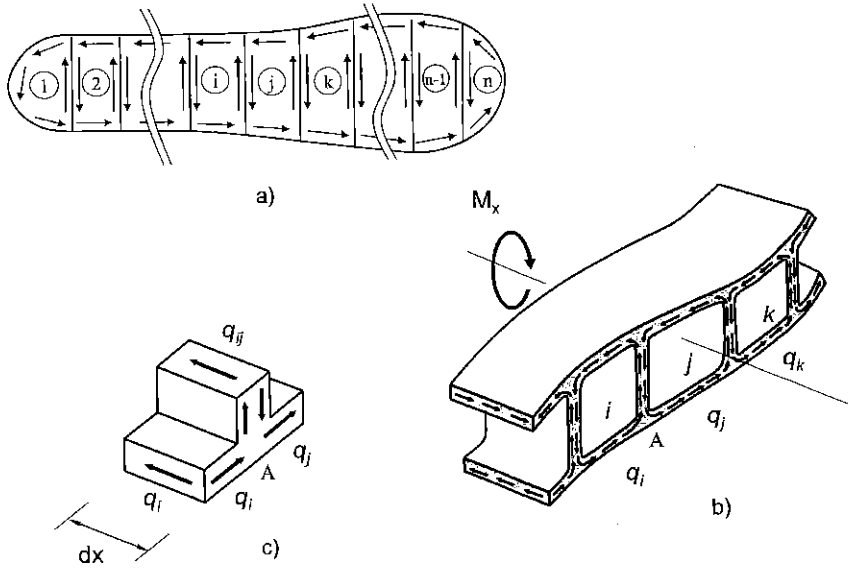


Figura 3.26. Sección tubular multicelular

La única ecuación que proporciona la estática es la que expresa la equivalencia entre el momento y los flujos cortantes de la sección, es decir:

$$M_x = 2q_1 \cdot \Omega_1 + 2q_2 \cdot \Omega_2 + \dots + 2q_j \cdot \Omega_j + \dots + 2q_n \cdot \Omega_n = 2 \sum_{i=1}^n q_i \cdot \Omega_i \quad (3.91)$$

siendo Ω_i el área encerrada por la línea media de la celda i . El problema es de grado de hiperestaticidad $n-1$, como habíamos adelantado. Por tanto, para poder calcular los flujos de cortadura se necesitan $n-1$ ecuaciones complementarias, basadas en la deformación de la sección recta.

La condición de compatibilidad de la deformación en este caso es suponer que todas las celdas giran el mismo ángulo de torsión (las secciones no se distorsionan en su propio plano), es decir:

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_j = \dots = \theta_n \quad (3.92)$$

Considerando una sola célula, la celda j , de (3.86) se obtiene:

$$\bar{\theta}_j = \frac{M_{xj}}{4G \cdot \Omega_j^2} \oint_{s_j} \frac{ds}{t} = \frac{q_j}{2G \cdot \Omega_j} \oint_{s_j} \frac{ds}{t} \quad (3.93)$$

ecuación en la que s_j expresa el contorno de la célula j y $\bar{\theta}_j$ el ángulo de torsión (ficticio) si sólo hubiera q_j . Si ahora se incluyen las células adyacentes i y k , los flujos de cortadura en los tramos comunes, según (3.90), se convierten en:

$$\begin{aligned} q_{ij} &= q_i - q_j \\ q_{jk} &= q_j - q_k \end{aligned} \quad (3.94)$$

y se obtendrá definitivamente para θ_j :

$$\theta_j = \frac{1}{2G \cdot \Omega_j} \left[q_j \oint_{s_j} \frac{ds}{t} - q_i \int_{s_{ij}} \frac{ds}{t} - q_k \int_{s_{jk}} \frac{ds}{t} \right] \quad (3.95)$$

donde s_{ij} y s_{jk} representan la línea media común a las células $i-j$ y $j-k$, respectivamente.

El sistema formado por la ecuación (3.91) y las $n-1$ ecuaciones (3.92) permite obtener los flujos de cortadura q_1, q_2, \dots, q_n . El valor del ángulo de torsión por unidad de longitud se determina aplicando la ecuación (3.95).

En el caso general de que la célula j se encuentre rodeada por m células en lugar de dos, el ángulo de torsión quedaría

$$\theta_j = \frac{1}{2G \cdot \Omega_j} \left[q_j \oint_{s_j} \frac{ds}{t} - \sum_{r=1}^m q_r \int_{s_{jr}} \frac{ds}{t} \right] \quad (3.96)$$

TEMA 4

INESTABILIDAD: PANDEO

4.1. INTRODUCCIÓN

En el comportamiento de piezas prismáticas sometidas a compresión es posible que se presente un fenómeno particular al que se conoce con el nombre de **pandeo**. En tanto que la carga de compresión a la que están sometidas es relativamente pequeña, incrementos de la carga dan lugar únicamente a un acortamiento axial de la pieza. Sin embargo, cuando la carga alcanza un valor determinado, un posterior incremento de la misma da lugar a la aparición de una curvatura, de una flexión inicial que crece rápidamente, con las consiguientes grandes deformaciones y rotura final de la pieza. Se trata del fenómeno del *pandeo*.

Experimentalmente se comprueba que cuando se someten a una compresión creciente dos piezas de la misma sección y material, igualmente sustentadas, cuya única diferencia es la longitud (por ejemplo dos alambres, uno corto y otro largo), su comportamiento ante esa carga de compresión es diferente. La pieza corta resiste bien la compresión, sin deformación aparente, en tanto que la larga experimenta una gran flexión aún para valores pequeños de esa carga.

Este hecho resulta inexplicable con la teoría desarrollada hasta el momento. *Se trata de un fenómeno que está relacionado de alguna forma con el equilibrio y la estabilidad de la pieza sometida a compresión.*

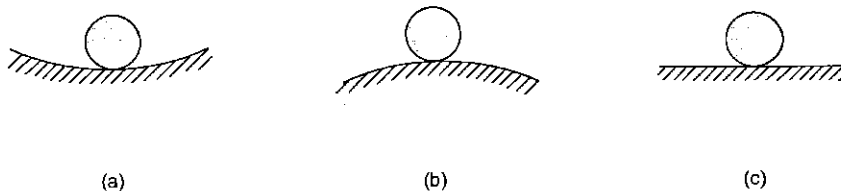


Figura 4.1. Tipos de equilibrio

Recordemos de la física que *existen tres tipos de equilibrio* según sea la variación de la energía que experimenta un sistema ante pequeñas perturbaciones: estable, inestable e indiferente. Y así se dice que un sistema elástico se encuentra en equilibrio estable, cuando pequeñas perturbaciones momentáneas originan en el sistema desplazamientos que desaparecen al suprimir dichas perturbaciones (fig.4.1a). Si los desplazamientos aumentan de un modo continuo después de suprimir las perturbaciones, el equilibrio es inestable (fig.4.1b). Por último, cuando el sistema permanece desplazado después de que las perturbaciones han desaparecido, el equilibrio es indiferente (fig.4.1c).

Para comprender mejor los tres tipos de equilibrio en relación con el tema que nos ocupa, consideremos una columna simplemente apoyada sometida a una carga de compresión P (fig.4.2a). Según sea el valor de esta carga, la viga se encontrará en equilibrio estable, inestable o indiferente.

En efecto, al principio la columna se encuentra en equilibrio en su forma rectilínea. Para analizar la estabilidad de este equilibrio se origina una perturbación aplicando una carga transversal F que da lugar a una pequeña flexión de la columna (fig.4.2b) y, seguidamente, se retira esta carga adicional F . Se puede comprobar que para valores pequeños de la carga P la columna recupera elásticamente su forma recta y el equilibrio es estable, en tanto que para valores grandes de P la columna sigue curvándose progresivamente y el equilibrio es inestable. También puede verificarse que existe un cierto valor de la carga P para la cual permanece la flexión producida por la carga transversal cuando ésta se retira, siendo entonces el equilibrio indiferente.

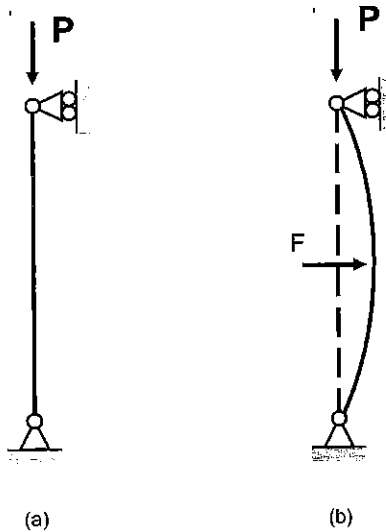


Figura 4.2. Columna biapoyada sometida a compresión

Por consiguiente, cuando la carga P alcanza un determinado valor al que se denomina **carga crítica o carga de pandeo** P_{cr} , la columna puede presentar la forma recta o una forma curva, es decir, dos formas de equilibrio. Incrementos de la carga por encima de este valor dan lugar a una pérdida de estabilidad de la columna, el **pandeo** de la misma, con las consiguientes grandes deformaciones que ocasionarán su inevitable rotura. Precisamente en la teoría que se va a desarrollar a continuación, el cálculo de P_{cr} se

basará en el hecho que se acaba de exponer: calcular aquella carga para la cual es posible el equilibrio de la columna en una configuración ligeramente deformada.

Este fenómeno de pandeo es característico de los elementos estructurales trabajando a compresión: pilares de edificios, membranas de pequeño espesor, cilindros de paredes delgadas, vigas esbeltas, etc. En este tema se presenta exclusivamente el comportamiento y la teoría de pandeo global de elementos tipo pieza prismática. Es interesante tener en cuenta que cuando se presenta el fenómeno de pandeo lo hace de forma repentina: son fallos espectaculares y muchas veces catastróficos.

Como aplicación práctica de la teoría que se va a desarrollar a lo largo del tema, al final del mismo se expondrá la metodología seguida para el cálculo de piezas comprimidas de acero.

4.2. EL PROBLEMA DE EULER

En 1757 Euler fue el primer investigador que proporcionó un análisis bastante preciso de la estabilidad de una columna. Aun cuando su estudio se refería a un caso idealizado, al que se suele conocer con el nombre de **columna de Euler**, resulta conveniente abordar el fenómeno de pandeo a partir de esa teoría.

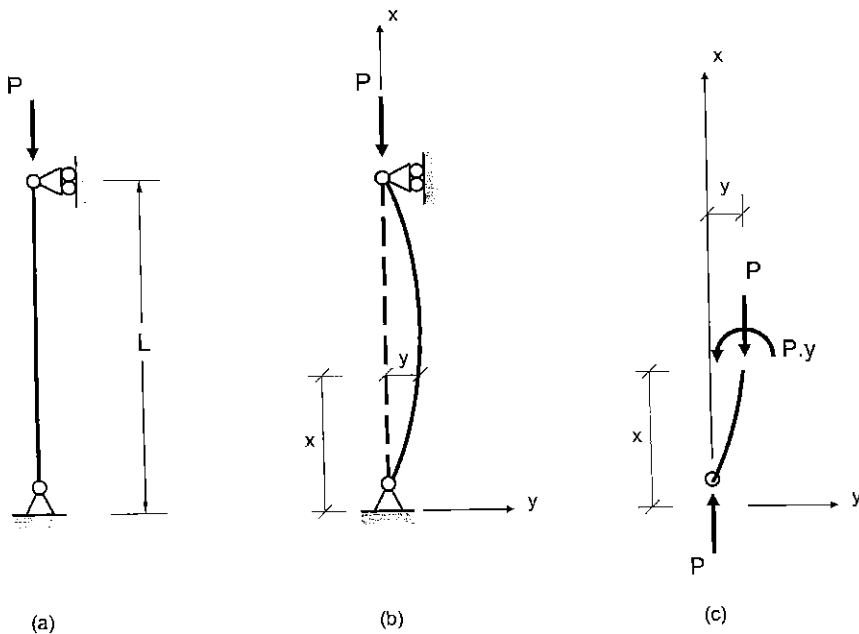


Figura 4.3. Problema de Euler: columna biarticulada

Considérese una pieza prismática de longitud L simplemente apoyada en sus extremos, sometida a una carga axial de compresión P (fig.4.3a). De acuerdo con lo dicho anteriormente se pretende determinar para qué valor de la carga P es posible el equilibrio en una configuración ligeramente flexionada (fig.4.3b). Como *hipótesis* se tendrán en cuenta las ya habituales: comportamiento elástico lineal (cumplimiento de la ley de Hooke) y pequeñas deformaciones. Además se supondrá que no se presenta ningún tipo de imperfección (eje totalmente recto y carga perfectamente centrada y alineada con el mismo), y se despreciará el acortamiento longitudinal de la pieza debido a la carga de compresión. Se considerará el sistema de ejes coordenados xy mostrado en la figura.

Del equilibrio del tramo de pieza considerado entre la articulación inferior y una sección cualquiera a una distancia x de la misma, se deduce el valor de los esfuerzos de sección: una compresión P y un momento $P \cdot y$ (fig.4.3c). Recordando, por otra parte, la ecuación diferencial de la elástica, se obtiene:

$$M_z = -EI_z \cdot y'' = P \cdot y \Rightarrow y'' + \frac{P}{EI_z} \cdot y = 0 \Rightarrow y'' + k^2 \cdot y = 0 \quad (4.1)$$

que es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden (la misma ecuación diferencial que rige el problema de un movimiento armónico simple), y en la que:

$$k^2 = \frac{P}{EI_z} \quad (4.2)$$

La solución de dicha ecuación es:

$$y = A \cdot \operatorname{sen} kx + B \cdot \cos kx \quad (4.3)$$

siendo A y B constantes de integración que se determinarán imponiendo las condiciones de sustentación:

$$(y)_{x=0} = 0 \quad ; \quad (y)_{x=L} = 0$$

Aplicando sucesivamente ambas condiciones de contorno se deduce:

$$B = 0 \Rightarrow y = A \cdot \operatorname{sen} kx \\ A \cdot \operatorname{sen} kL = 0$$

Esta segunda ecuación admite dos soluciones: $A=0$ ó $\operatorname{sen} kL=0$. En el primer caso, al ser $A=B=0$, los desplazamientos se anulan idénticamente confirmando que la forma recta es una de las formas de equilibrio indiferente de la columna.

El segundo caso se cumple siempre que:

$$k \cdot L = n \cdot \pi$$

siendo n un número entero arbitrario. Teniendo en cuenta (4.2), esta condición se satisface para valores de las cargas:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI_z}{L^2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

siendo las correspondientes ecuaciones de la elástica:

$$y = A \cdot \text{sen} \frac{n\pi}{L} x \quad (4.5)$$

Por consiguiente, las cargas dadas por la ecuación (4.4) son aquellas para las que la columna adopta una forma curva de equilibrio indiferente, siendo la correspondiente curva elástica la definida en (4.5). Se observa que la amplitud de la deformación permanece indeterminada, ya que A puede tomar cualquier valor cuando $\text{sen} kL = 0$

La primera posición de equilibrio se alcanza para una carga:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (4.6)$$

Esta carga se denomina **carga crítica de Euler**. Es independiente de la resistencia del material y denota la mínima carga para la que el equilibrio indiferente es posible. También es la mínima carga para la cual la columna deja de estar en equilibrio estable. En conclusión, si una columna biarticulada perfecta se somete a una carga creciente de compresión, en tanto en cuanto esta carga sea inferior a la carga crítica de Euler, la columna estará en equilibrio y de forma completamente recta. En cuanto la carga alcance ese valor, la columna pasará a estar en equilibrio inestable de pandeo.

Conviene observar que se ha supuesto que la flexión tiene lugar en el plano xy ($M=M_z$). En realidad, el pandeo de la columna tiene lugar en el plano longitudinal de mínima rigidez a la flexión, girando las secciones transversales alrededor del eje de menor momento de inercia. Por tanto, la expresión (4.6) puede escribirse de modo general:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2} \quad (4.7)$$

4.3. DIFERENTES TIPOS DE APOYOS. LONGITUD DE PANDEO

El primer paso para generalizar los resultados obtenidos al estudiar la columna de Euler es considerar condiciones de enlace diferentes y obtener las respectivas cargas críticas.

En este epígrafe se demostrará que la carga crítica de cualquier columna puede obtenerse a partir de una *columna de Euler equivalente*, pues como se verá, a cualquier columna se le puede asociar una columna de Euler equivalente cuya carga crítica coincide con la de la columna dada.

A la longitud de esta columna de Euler equivalente – que tiene la misma sección que la columna dada – se le denomina *longitud de pandeo*, y su valor será función de las condiciones de enlace de la columna objeto de estudio.

Por consiguiente, se denomina "**longitud de pandeo L_k** de una columna de longitud L , a la longitud de una columna de la misma sección y material, articulada en sus extremos, cuya carga crítica sea la misma que la correspondiente a la columna real considerada".

Por lo tanto, esta última podrá expresarse como:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L_k^2} \quad (4.8)$$

La introducción de este concepto simplifica considerablemente el estudio del pandeo, pues permite reducir el análisis de una columna de enlaces cualesquiera al análisis de una columna de Euler equivalente, y por tanto, articulada en sus extremos.

A continuación se hará un estudio de columnas con diferentes condiciones de contorno similar al realizado para la columna de Euler con objeto de obtener las cargas críticas así como las longitudes de pandeo correspondientes.

4.3.1. Columna con un extremo empotrado y otro libre

Sea una columna empotrada en un extremo y libre en el otro, sometida a una carga axial de compresión (fig.4.4a).

Una pequeña flexión lateral da lugar a un desplazamiento δ del extremo libre y a un momento de reacción $P \cdot \delta$ en la base (fig.4.4b). Estableciendo el equilibrio en una sección a una distancia x del empotramiento (fig.4.4c), se obtiene:

$$M = P \cdot y - P \cdot \delta = -EI \cdot y'' \quad \Rightarrow \quad y'' + k^2 \cdot y = k^2 \cdot \delta \quad (4.9)$$

$$(I = I_{\min} ; k^2 = P/EI)$$

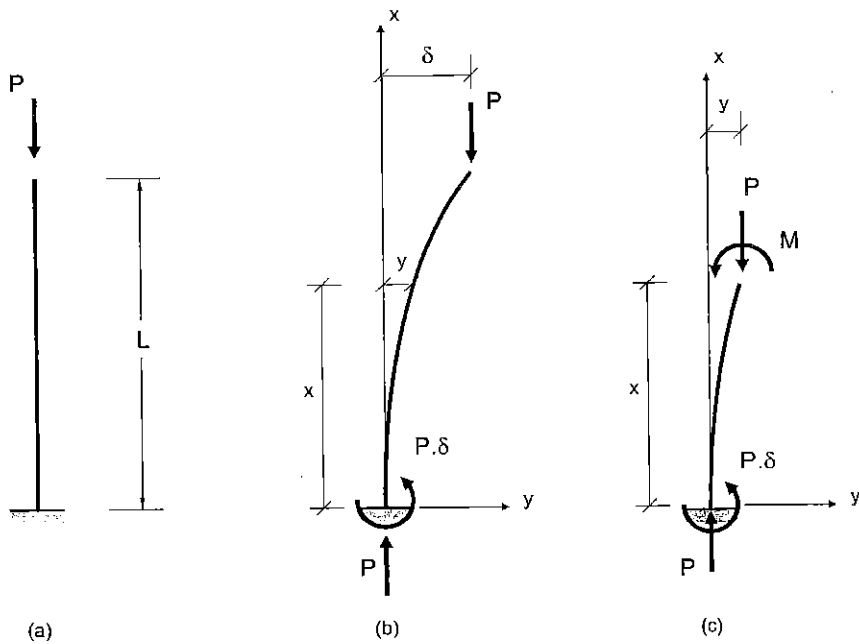


Figura 4.4. Columna empotrada y libre

Se trata de una ecuación diferencial lineal completa de segundo orden, cuya solución general es la suma de la solución de la homogénea más una solución particular de la completa. La ecuación homogénea coincide con la del problema de Euler, de solución:

$$y_h = A \cdot \text{sen} kx + B \cdot \text{cos} kx \quad (4.10)$$

Una solución particular de la ecuación completa es $y_p = \delta$. Por consiguiente, la solución general será:

$$y = A \cdot \text{sen} kx + B \cdot \text{cos} kx + \delta \quad (4.11)$$

Imponiendo, finalmente, las condiciones de contorno, (en $x=0, y=y'=0$; en $x=L, y=\delta$), se obtiene:

$$\begin{aligned} (y')_{x=0} = 0 &\Rightarrow A \cdot k = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y = B \cdot \text{cos} kx + \delta \\ (y)_{x=0} = 0 &\Rightarrow B + \delta = 0 \Rightarrow B = -\delta \Rightarrow y = \delta \cdot (1 - \text{cos} kx) \\ (y)_{x=L} = \delta &\Rightarrow \text{cos} kL = 0 \Rightarrow kL = (2n-1) \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Las soluciones del problema son entonces:

$$P = \frac{(2n-1)^2 \pi^2 EI}{4L^2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (4.12)$$

cuyo valor mínimo corresponde a $n=1$. Este valor será la carga crítica de pandeo para la columna empotrada y libre:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4L^2} \quad (4.13)$$

Comparando con (4.8), se deduce que *su longitud de pandeo es $L_k=2L$* . Es decir, la columna equivalente de Euler tendría doble longitud.

A este mismo resultado se podía haber llegado observando la elástica de la columna de Euler equivalente (fig.4.5): en la sección central de esta última, la pendiente es nula, tal como sucede en un empotramiento. Por esta razón, el comportamiento frente a pandeo de una columna empotrada y libre es semejante al de una columna biarticulada de doble longitud.

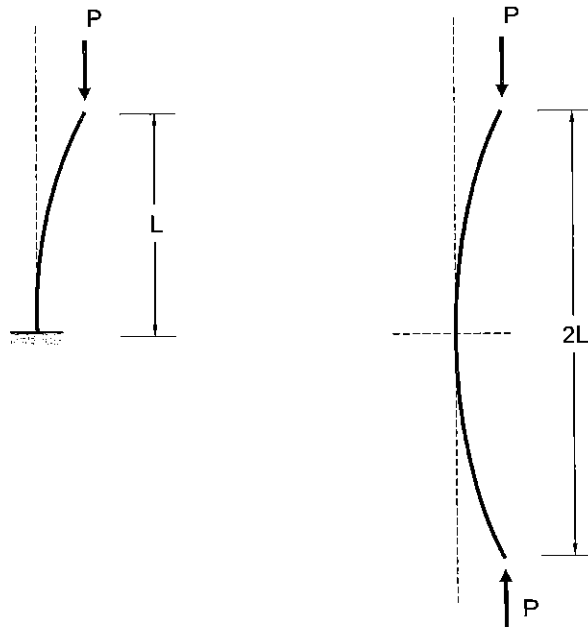


Figura 4.5. Equivalencia entre la columna empotrada-libre y la de Euler

4.3.2. Columna con ambos extremos empotrados

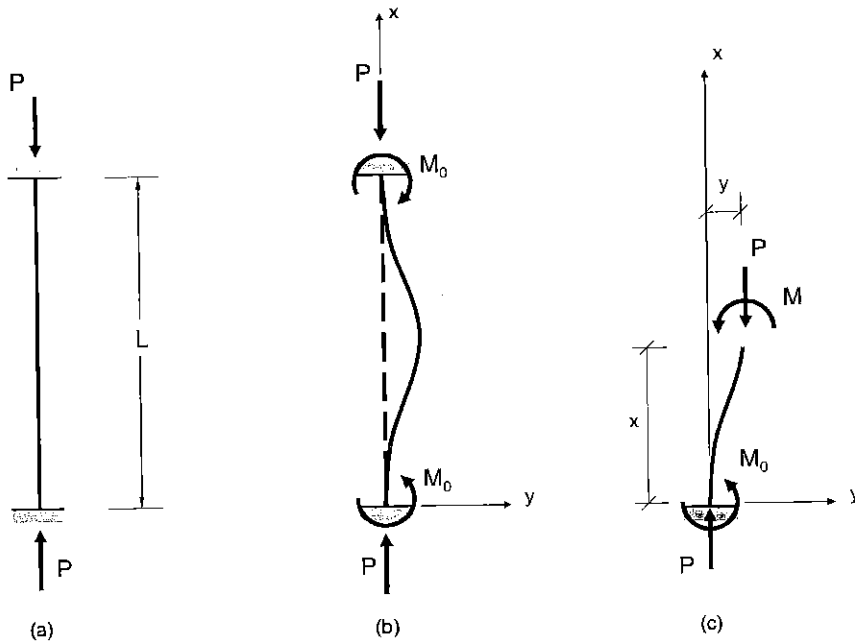


Figura 4.6. Columna biempotrada

Considérese ahora una columna empotrada en sus dos extremos sometida a una carga axial de compresión (fig.4.6a), y sea M_0 el momento de empotramiento originado al comunicarle una pequeña flexión lateral (fig.4.6b).

Formulando el equilibrio en una sección a una distancia x del empotramiento inferior (fig.4.6c), se obtiene:

$$M = P \cdot y - M_0 = -EI \cdot y'' \quad \Rightarrow \quad y'' + k^2 \cdot y = k^2 \cdot \frac{M_0}{P} \quad (4.14)$$

$(I = I_{\min} ; k^2 = P/EI)$

ecuación diferencial cuya solución general es:

$$y = A \cdot \text{sen} kx + B \cdot \text{cos} kx + \frac{M_0}{P} \quad (4.15)$$

Aplicando las condiciones de contorno (en $x=0, y=y'=0$; en $x=L, y=y'=0$), se obtiene:

$$(y')_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot k = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad y = B \cdot \text{cos} kx + \frac{M_0}{P}$$

$$(y)_{x=0} = 0 \Rightarrow B + \frac{M_o}{P} = 0 \Rightarrow B = -\frac{M_o}{P} \Rightarrow y = \frac{M_o}{P} \cdot (1 - \cos kx)$$

$$(y)_{x=L} = 0 \Rightarrow \cos kL = 1 \Rightarrow kL = 2n \cdot \pi$$

proporcionando el conjunto de soluciones:

$$P = \frac{n^2 4\pi^2 EI}{L^2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (4.16)$$

La carga crítica de pandeo corresponderá al menor valor propio del problema (n=1). Es decir:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad (4.17)$$

Comparando con la expresión de Euler (4.8), resulta una *longitud de pandeo para la columna biempotrada*: $L_k=L/2$.

De modo similar a la columna empotrada-libre, podemos también obtener la carga crítica basándonos en consideraciones sobre la elástica. En efecto, la combinación de reacciones P y M_o en los empotramientos A y B es equivalente a la acción de una fuerza P con excentricidad e en las secciones intermedias C y D, tal como se representa en la fig.4.7.

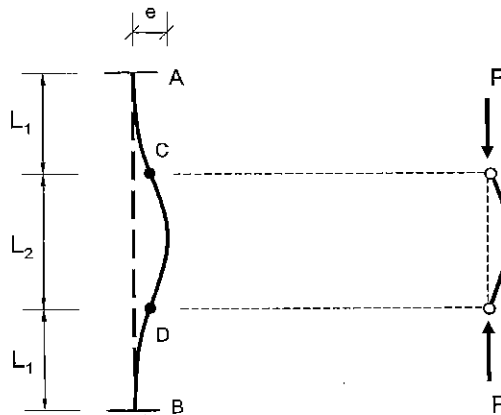


Figura 4.7. Equivalencia entre la columna biempotrada y la columna de Euler

Los puntos C y D se corresponden con los puntos de inflexión de la deformada, ya que en ellos el momento flector es nulo ($y'' = -M/EI$). Los tramos AC y BD responden a las condiciones de barra empotrada y libre. La carga crítica para ellos será [cfr (4.13)]:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L_1^2}$$

El tramo CD es análogo al caso de una barra biarticulada, de carga crítica [cfr (4.7)]:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_2^2}$$

Al ser P común ambas cargas deben ser iguales y, por consiguiente, se obtiene:

$$4L_1^2 = L_2^2 \quad \Rightarrow \quad L - L_2 = L_2 \quad \Rightarrow \quad L_2 = \frac{L}{2}$$

y, por tanto, la carga crítica coincide con (4.17). Dadas las características de un punto de inflexión, puede afirmarse que la longitud de pandeo equivalente de una columna con enlaces cualesquiera es la distancia entre dos puntos de inflexión consecutivos de su elástica, y así ha podido verificarse en los dos casos contemplados hasta el momento.

4.3.3. Columna empotrada en un extremo y articulada en el otro

Finalmente, considérese una columna articulada en un extremo y empotrada en el otro (fig.4.8a). Una ligera flexión lateral da lugar a un momento M_o en el empotramiento y a unos esfuerzos cortantes de magnitud M_o/L en cada extremo (fig.4.8b).

Planteando el equilibrio como en ocasiones anteriores (fig.4.8c):

$$M = P \cdot y - \frac{M_o}{L} \cdot x = -EI \cdot y'' \quad \Rightarrow \quad y'' + k^2 \cdot y = k^2 \cdot \frac{M_o}{P \cdot L} \cdot x \quad (4.18)$$

$(I = I_{\min} ; k^2 = P/EI)$

La solución de esta ecuación diferencial completa de segundo orden es:

$$y = A \cdot \operatorname{sen} kx + B \cdot \cos kx + \frac{M_o}{P \cdot L} \cdot x \quad (4.19)$$

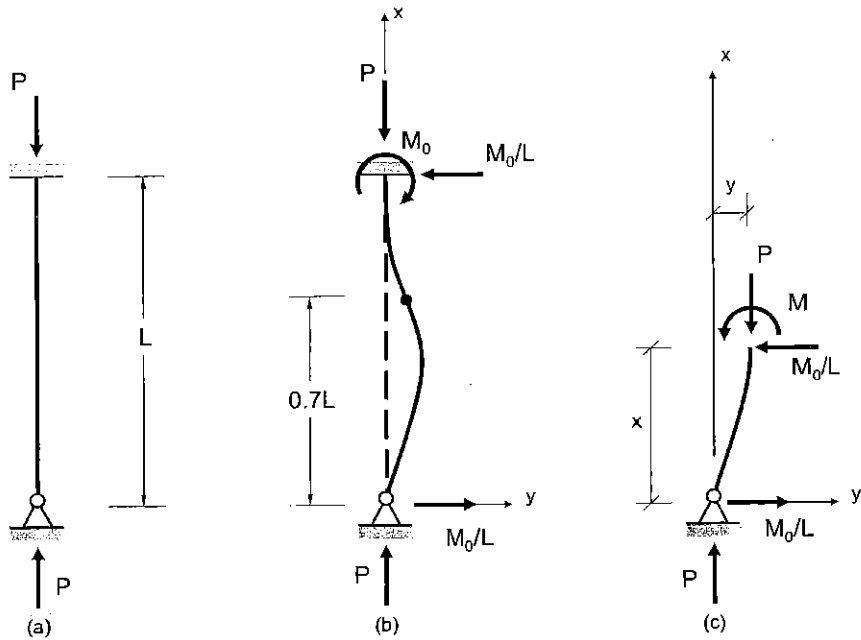


Figura 4.8. Columna articulada y empotrada

Aplicando las condiciones de contorno (en $x=0, y=0$; en $x=L, y=y'=0$), se obtiene:

$$(y)_{x=0} = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y = A \cdot \text{sen}kx + \frac{M_0}{P \cdot L} \cdot x$$

$$(y')_{x=L} = 0 \Rightarrow A = -\frac{M_0}{P \cdot L} \cdot \frac{1}{k \cdot \cos kL} \Rightarrow y = \frac{M_0}{P \cdot L} \cdot \left(x - \frac{\text{sen}kx}{k \cdot \cos kL} \right)$$

$$(y)_{x=L} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{M_0}{L} \cdot \left(L - \frac{\text{sen}kL}{k \cdot \cos kL} \right) \Rightarrow kL = \text{tg}kL$$

Por tanto, los valores propios deben cumplir esta última ecuación trascendente, cuya solución puede obtenerse por iteración. Su solución gráfica se muestra en la fig.4.9.

La menor de las soluciones, distinta de la trivial, corresponde al valor $kL=4,49$. Por tanto, la carga crítica será:

$$P_{cr} = \frac{4,49^2 EI}{L^2} = \frac{4,49^2 \pi^2 EI}{\pi^2 L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\pi L / 4,49)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(0,7L)^2} \quad (4.20)$$

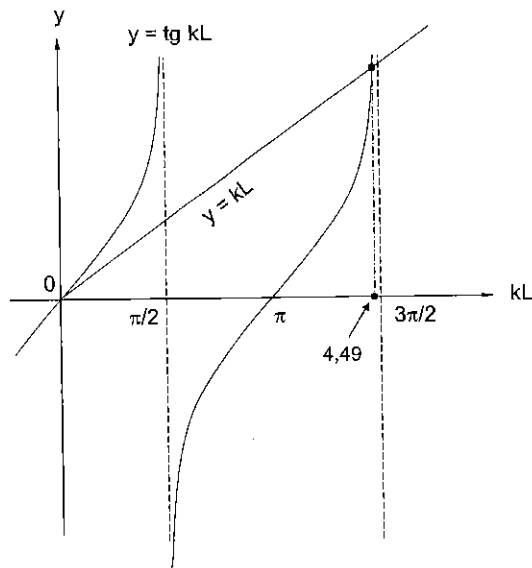


Figura 4.9. Soluciones de la ecuación $\text{tg } kL = kL$

La longitud de pandeo equivalente que corresponde a la columna articulada y empotrada es entonces:

$$L_k = \frac{\pi}{4,49} L = 0,6992L \approx 0,7L \quad (4.21)$$

Puede demostrarse asimismo que la elástica presenta un punto de inflexión a una distancia $0,7L$ de la articulación, según se muestra en la fig.4.8b.

4.4. COLUMNAS CON IMPERFECCIONES. COMPRESIÓN EXCÉNTRICA

Al deducir el valor de la carga de Euler se suponía que la columna era perfectamente recta y que la carga axial de compresión era normal a cualquier sección recta transversal, pasando por el centro de gravedad de la misma. Naturalmente, son meras idealizaciones que simplifican el problema y que en los elementos de maquinaria o estructuras reales no se presentan. *En las columnas reales siempre hay ligeras imperfecciones en cuanto a la forma y pequeñas excentricidades en la carga. Por este motivo conviene estudiar el comportamiento de columnas con este tipo de imperfecciones y compararlo con el deducido con la teoría de Euler.*

Se limitará el estudio a uno de estos tipos de imperfecciones: la excentricidad en la carga. Conclusiones análogas a las que se obtengan podrían deducirse para columnas cuyo eje centroidal se encuentra inicialmente flectado.

El análisis se realizará para una columna empotrada en un extremo y libre en el otro, sometida en su extremo libre a una carga P con excentricidad e (fig.4.10a).

Recuérdese que para el caso de carga perfectamente centrada el valor de la carga crítica es el expresado en (4.13), es decir:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4L^2} \quad (4.22)$$

Excepto el hecho de la aplicación excéntrica de la carga, se supondrá que se satisfacen las restantes hipótesis en las que se basó la deducción de esta expresión.

Como consecuencia de la aplicación excéntrica de la carga aparece una curvatura y una flecha δ en el extremo libre (fig.4.10b).

En una sección a una distancia x del empotramiento, el equilibrio proporciona la ecuación diferencial (fig.4.10c):

$$M = P \cdot y - P \cdot (\delta + e) = -EI \cdot y'' \quad \Rightarrow \quad y'' + k^2 \cdot y = k^2 \cdot (\delta + e) \quad (4.23)$$

cuya solución general es:

$$y = A \cdot \operatorname{sen} kx + B \cdot \cos kx + (\delta + e) \quad (4.24)$$

Aplicando las condiciones de contorno (en $x=0, y=y'=0$; en $x=L, y=\delta$), se obtiene:

$$\begin{aligned} (y')_{x=0} = 0 &\Rightarrow A \cdot k = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y = B \cdot \cos kx + (\delta + e) \\ (y)_{x=0} = 0 &\Rightarrow B + (\delta + e) = 0 \Rightarrow B = -(\delta + e) \Rightarrow y = (\delta + e) \cdot (1 - \cos kx) \\ (y)_{x=L} = \delta &\Rightarrow \delta = (\delta + e) \cdot (1 - \cos kL) \end{aligned} \quad y$$

despejando en la última ecuación:

$$\delta = \frac{e \cdot (1 - \cos kL)}{\cos kL} = e \cdot (\sec kL - 1) \quad (4.25)$$

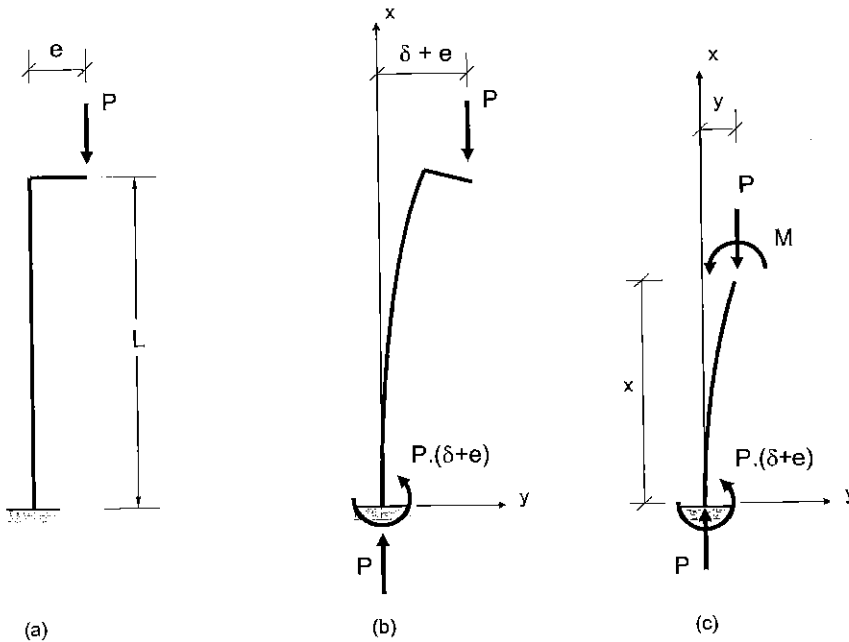


Figura 4.10. Compresión excéntrica de una columna esbelta

Por consiguiente, la ecuación de la elástica es:

$$y = e \frac{1 - \cos kx}{\cos kL} \quad (4.26)$$

válida para: $0 < k^2 < \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$, o bien: $0 < P < \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$.

A continuación se estudiará la variación de la flecha δ en el extremo libre, en función de la carga aplicada. Del valor de la carga crítica (4.22) obtenida en el caso ideal, es decir, con carga de compresión perfectamente centrada, se deduce que:

$$kL = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \quad (4.27)$$

y, por tanto, (4.25) se transforma en:

$$\delta = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right] \quad (4.28)$$

En la fig.4.11 se representa gráficamente esta ecuación, mostrándose la variación de la carga P con δ para diversos valores de la excentricidad e . Se puede concluir:

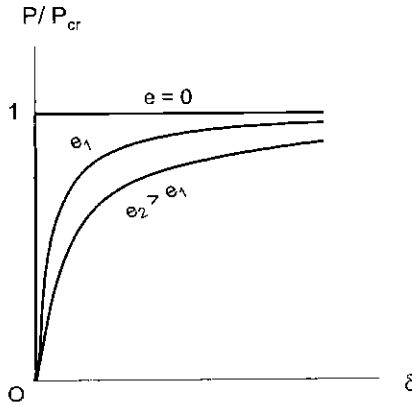


Figura 4.11. Carga y flecha en la compresión excéntrica de una viga empotrada y libre

1) A diferencia de la columna perfecta, que permanece recta hasta la carga de Euler, las columnas cargadas excéntricamente comienzan a deformarse en cuanto se aplica la carga. Al comienzo, la deformación crece lentamente, pero cada vez se hace más rápida conforme aumenta la relación entre la carga aplicada y la carga de Euler.

2) Para valores de la carga próximos a P_{cr} , la deformación aumenta indefinidamente [obsérvese que según (4.25) y (4.27), para el valor $P = P_{cr}$, $kL = \pi/2$ y $\delta \rightarrow \infty$], independientemente de la magnitud de la excentricidad. Por esta razón, la capacidad resistente de una columna imperfecta es siempre menor que la carga de Euler, aun cuando la excentricidad sea muy pequeña.

3) Grandes excentricidades dan lugar a grandes deformaciones para cargas bastante inferiores a la carga de Euler. Por el contrario, columnas con pequeñas excentricidades de carga no experimentan una flexión apreciable hasta que la carga es próxima a la de Euler.

Con un razonamiento similar, puede comprobarse que el comportamiento de columnas inicialmente flectadas - otro tipo de imperfección frente a la columna de Euler - es esencialmente el mismo que el de columnas cargadas excéntricamente.

4.5. ESBELTEZ DE LA PIEZA. TENSIÓN CRÍTICA. CURVA DE PANDEO

Para una columna de enlaces cualesquiera se ha definido su *carga crítica de Euler* como el valor [cfr. (4.8)]:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_k^2} \quad (4.29)$$

siendo L_k su *longitud de pandeo*.

Se denomina **esbeltez** (o *esbeltez mecánica*) λ de la barra a la relación:

$$\lambda = \frac{L_k}{i} \quad (4.30)$$

donde i es el radio de giro mínimo de la sección. Se trata, por consiguiente, de *una magnitud que depende de la geometría y de las condiciones de enlace de la pieza*. Teniendo en cuenta la definición de radio de giro y designando por A el área de la sección recta, se puede expresar la carga crítica (4.29) como:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2} \quad (4.31)$$

Finalmente, se denomina **tensión crítica de Euler** al cociente entre la carga crítica y el área de la sección recta de la columna, es decir:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (4.32)$$

La tensión crítica es por tanto función solamente del módulo de elasticidad E del material y de la esbeltez de la pieza.

Al representar la ecuación (4.32) en coordenadas σ - λ se obtiene la gráfica denominada **hipérbola de Euler** (fig.4.12).

Suponiendo un material elastoplástico perfecto de tensión de fluencia σ_f , la recta $\sigma = \sigma_f$ trazada en la gráfica corta a la hipérbola en el punto de abscisa:

$$\lambda_f = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_f}} \quad (4.33)$$

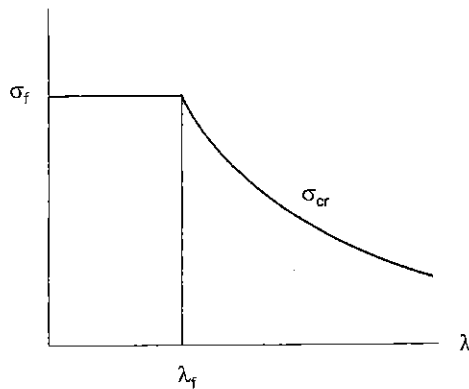


Figura 4.12. Hipérbola de Euler

A este valor se le denomina *esbeltez ideal* o *esbeltez de Euler*, que no es sino la esbeltez mínima para la que son aplicables las fórmulas que proporcionan los valores, bien de la carga crítica (4.29), o bien la tensión crítica (4.32) de Euler. Los valores $\sigma > \sigma_f$ que se obtendrían de esta última ecuación para esbelteces $\lambda < \lambda_f$ no tienen sentido, pues contradicen al presupuesto de partida (comportamiento elástico lineal) en base al cual esa ecuación se ha formulado. Por lo tanto, para valores de la esbeltez menores a λ_f , la tensión σ_{cr} se sitúa en la zona de deformación elastoplástica del diagrama σ - ε del material, no siendo aplicable la teoría de Euler.

A cada material le corresponde una curva como la representada en la fig.4.12, definida por sus valores de E y σ_f . Se la denomina **curva de pandeo**, y la de la figura corresponde al caso de una columna perfecta de un material de módulo de elasticidad E y tensión de fluencia σ_f . Objetivo de los estudios teóricos y experimentales que en torno al pandeo se han venido desarrollando desde la segunda mitad del S. XX es obtener curvas más o menos similares a ésta, es decir, curvas que representen la tensión media máxima de compresión admisible en un elemento en función de su esbeltez λ .

4.6. DISEÑO DE SOPORTES

En un epígrafe anterior se comprobó que la existencia de una imperfección, como era la excentricidad de la carga de compresión, daba lugar a una disminución de la carga crítica de Euler (4.29), y eso aún en el supuesto de que las restantes variables del problema se ajustaran al caso perfecto de la teoría de Euler. Y es inevitable que las piezas que componen cualquier estructura real posean unas imperfecciones iniciales, como pueden ser el hecho de que su eje no sea perfectamente recto, o la existencia de tensiones

iniciales debidas a soldaduras o al proceso de laminación, etc., imperfecciones que, aunque contenidas dentro de unas tolerancias admisibles, realmente existen.

De ahí que la adecuación entre la teoría de Euler y el comportamiento de los elementos reales de las estructuras no sea lo suficientemente buena, con la desventaja añadida de que la carga de pandeo obtenida a partir de la teoría de Euler está del lado de la inseguridad; es decir, que los elementos reales fallan para cargas de pandeo inferiores a las predichas según Euler.

La propia complejidad del fenómeno como al mismo tiempo su importancia en el ámbito del diseño de estructuras explican que, a lo largo de los últimos años, hayan surgido diversas normativas para el diseño de elementos estructurales trabajando a compresión. Cada una de estas normas trata el problema de la inestabilidad de una forma particular. Por ejemplo, la normativa americana de estructuras de acero del "American Institute of Steel Construction" (AISC) provee dos métodos para el diseño de pilares, el ASD (allowable stress design), basado en tensiones admisibles, y el LRFD (Load Resistance Factor Design), o método de diseño por factores de carga y resistencia, siendo este último es el que está siendo más aceptado en la práctica.

Para el diseño de metales menos resistentes como el aluminio, el estudio del pandeo se hace mucho más complejo y requiere un tratamiento particular. La "Aluminium Association" (AA) provee un manual con una gran cantidad de fórmulas de diseño para distintos tipos de aleaciones. En todas ellas se controla la tensión límite en base a la esbeltez resistente. En otros materiales más clásicos pero menos utilizados, como la madera, la "National Forest Product Association" (NFPA) proporciona, a su vez, manuales para el diseño de soportes de madera, centrándose en las secciones rectangulares al ser este tipo de sección la más utilizada.

En España, para el *diseño de estructuras metálicas de acero*, se utiliza el **Código Técnico de la Edificación (CTE)**. Esta norma ha sustituido desde abril de 2007 a la NBE EA-95 (Normas Básicas de la Edificación para Estructuras de Acero) y está basada en el Eurocódigo, el cual se está implantando en la mayoría de los países europeos. Dada la vigencia de la NBE EA-95 hasta hace muy poco tiempo y que la metodología que propone figura en la práctica totalidad de libros y manuales en uso, se hará una breve descripción de sus principales características antes de abordar el procedimiento propuesto en el CTE.

4.6.1. Norma NBE EA-95

Como se ha dicho, el análisis real del comportamiento de una columna frente a un esfuerzo axial de compresión ha de tener en cuenta las posibles imperfecciones, algunas de ellas iniciales, otras debidas a las circunstancias de ejecución, etc., y en qué medida estas imperfecciones afectan a la tensión crítica de pandeo, tensión a la que a lo largo de este epígrafe se denominará σ_p para diferenciarla de la tensión crítica de Euler σ_{cr} correspondiente al caso perfecto.

El procedimiento de cálculo propuesto por diversas normativas europeas, entre ellas la *norma española NBE EA-95*, se basaba en el *método Dutheil*, el cual estimaba que el conjunto de imperfecciones existentes, como son las inevitables faltas de rectitud, faltas de homogeneidad del material, tensiones residuales, etc., pueden asimilarse a una curvatura inicial de la barra de forma senoidal, definida por su flecha máxima en el centro de la columna a la que se denominó *preflecha convencional*, cuyo valor depende de unos coeficientes que se obtienen experimentalmente.

Estudios teóricos con base experimental permitieron establecer, para un material de valores E y σ_f determinados, la ecuación que relaciona la tensión de pandeo σ_p con la esbeltez mecánica λ de la pieza. Su correspondiente representación gráfica es la curva de pandeo, tal como se indica en la fig.4.13, que permite una comparación entre esta curva y la correspondiente a un caso perfecto del mismo material. Ambas curvas envuelven a la nube de resultados experimentales. La de Dutheil la bordea por su parte inferior, de forma que es muy poco probable que la carga de pandeo de una columna real sea inferior a la carga de pandeo de Dutheil. Característica reseñable de la NBE EA-95 es que para cada tipo de acero propone una única curva de pandeo, válida para cualquier tipo de sección.

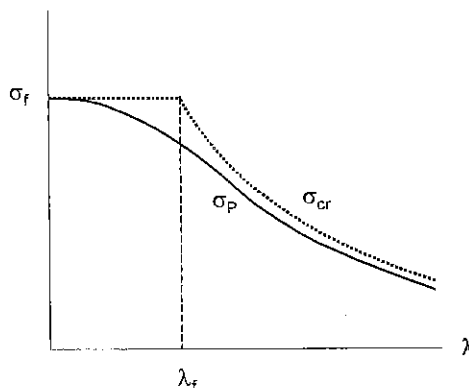


Figura 4.13. Comparación entre tensión de pandeo σ_p y tensión crítica σ_{cr}

En la NBE EA-95 la aplicación práctica del método Dutheil se llevaba a cabo mediante el llamado **Método ω** (o *método de los coeficientes ω*), consistente en la mayoración de las cargas de cálculo mediante un coeficiente ω dado por:

$$\omega = \frac{\sigma_f}{\sigma_p} \geq 1 \quad (4.34)$$

que para un material dado dependerá, como la tensión de pandeo, de la esbeltez de la pieza, y que se calcula tomando para el valor de σ_p el obtenido por Dutheil. De hecho, a partir de él se obtienen las tablas de coeficientes ω que, para los aceros tipificados en nuestro país, se incluían en esa norma.

4.6.2. Código Técnico de la Edificación (CTE)

Los métodos de cálculo que propone el Código Técnico de la Edificación están basados en el Eurocódigo 3. Éste a su vez hace uso de un procedimiento propuesto por la Convención Europea de la Construcción Metálica (*European Convention for Constructional Steelworks, ECCS*). Desde su fundación en 1955, este organismo está estudiando los problemas de inestabilidad de las estructuras metálicas tanto a nivel teórico como experimental, a fin de establecer criterios prácticos para el diseño de las mismas. Para ello se han llevado a cabo una serie de ensayos de perfiles diferentes y con distintas longitudes sometidos a carga axial, y a partir de los resultados obtenidos experimentalmente se ha desarrollado una teoría que permite el análisis a pandeo de los elementos comprimidos.

El procedimiento propuesto por la ECCS y, por tanto, el recogido en el Eurocódigo y en el CTE, analiza con mayor precisión que la NBE EA-95 el comportamiento real de la columna, está basado en un criterio de agotamiento plástico de la sección y tiene en cuenta tanto las imperfecciones geométricas como las estructurales. Establece un total de 4 curvas de pandeo, dependiendo de la sección del elemento que se esté considerando.

Según el CTE, al estudiar la resistencia a compresión pura de una barra de sección constante habrá que comprobar que el esfuerzo axial de compresión centrada no supere la carga última de pandeo por flexión. En general será necesario comprobar la resistencia a pandeo en cada posible plano en que pueda flexionar la pieza, puesto que las condiciones de apoyo podrán ser distintas en cada uno de ellos.

El valor de la carga última de pandeo por flexión viene dado por:

$$P_b = \chi \cdot A \cdot \sigma_f \quad (4.35)$$

donde:

A es el área de la sección transversal;

σ_f es la *tensión de fluencia del material*, que depende del tipo de acero. Realmente al tratar del pandeo tanto el Eurocódigo como el CTE utilizan, para caracterizar el acero, lo que en ambas normas se denomina límite elástico (al que en unas ocasiones se representa por σ_e y otras por f_y), cuyo significado prácticamente coincide con el de la tensión de fluencia σ_f que venimos considerando a lo largo estas páginas, razón por la cual se mantendrá esta terminología;

χ es el **coeficiente de reducción por pandeo**. Es siempre menor o igual a la unidad y puede obtenerse en función de la esbeltez reducida y la curva de pandeo apropiada al caso.

Se denomina **esbeltez reducida** (o *adimensional*) $\bar{\lambda}$ a la relación entre la resistencia plástica de la sección de cálculo (resistencia a compresión simple) y la compresión crítica por pandeo:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot \sigma_f}{P_{cr}}} \quad (4.36)$$

siendo P_{cr} la *carga crítica de Euler* (4.29), es decir:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_k^2} \quad (4.37)$$

en donde:

E módulo de elasticidad del material;

I momento de inercia del área de la sección para flexión en el plano considerado;

L_k longitud de pandeo de la pieza, equivalente a la distancia entre puntos de inflexión de la deformación de pandeo en el plano considerado. Para los casos canónicos ya estudiados se define en la tabla 4.1 en función de la longitud de la pieza.

Condiciones de sustentación	biarticulada	biempotrada	empotrada-articulada	empotrada-libre
Longitud L_k	1,0 L	0,5 L	0,7 L	2,0 L

Tabla 4.1. Longitud de pandeo de barras canónicas

De la observación de (4.35) cabría interpretar que el coeficiente χ de reducción por pandeo no es sino un coeficiente de minoración de la resistencia a compresión simple que permite efectuar el cálculo como si se tratara de una pieza sin influencia del pandeo.

El valor de χ depende no sólo de la esbeltez reducida $\bar{\lambda}$ sino también de la sensibilidad de la sección al fenómeno del pandeo, la cual variará según sea la geometría de la sección, el proceso de fabricación (laminado o soldado), el plano de pandeo considerado y el tipo de acero. De ahí que se hayan establecido diferentes **curvas de pandeo**, denominadas **a_0, a, b, c y d** (fig.4.14), para distintos tipos de sección transversal (tabla 4.2). Estas curvas de pandeo tienen en cuenta, por tanto, las imperfecciones geométricas de la pieza así como el efecto de las tensiones residuales. La curva a_0 sólo se emplea en algunas secciones conformadas con acero de alta resistencia; la curva d se emplea en perfiles H laminados cuando el espesor del ala es mayor de 100 mm, o en perfiles I soldados cuando el espesor del ala es mayor de 40 mm.

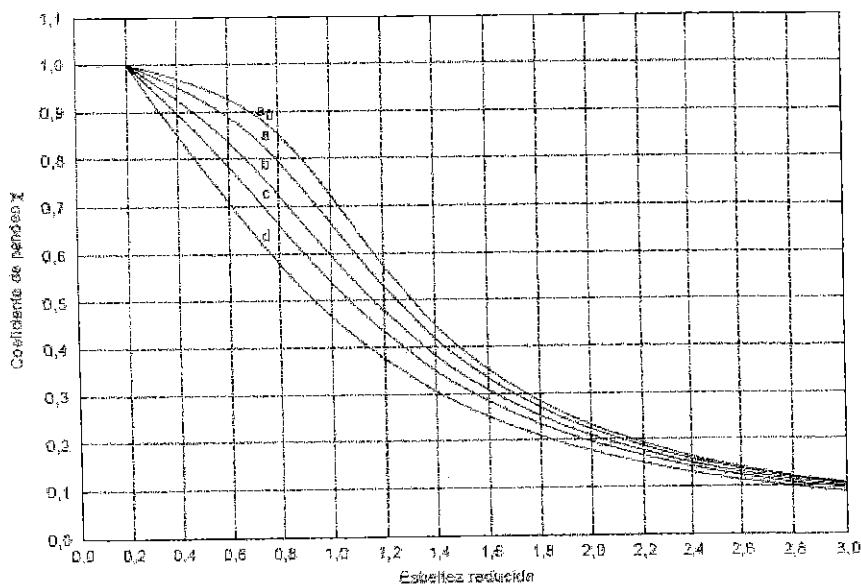


Figura 4.14. Curvas de pandeo

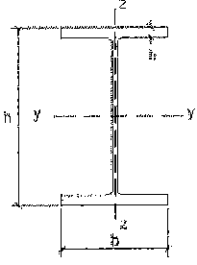
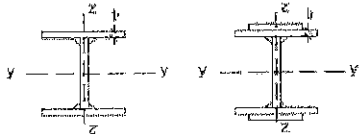
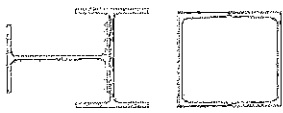
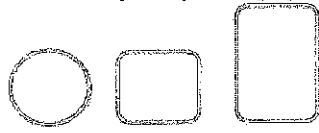
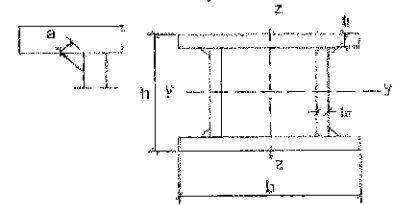
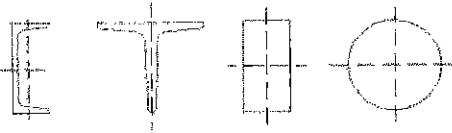
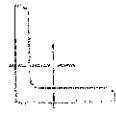
Tipo de sección	Tipo de acero Eje de pandeo ⁽¹⁾	S235 o S355		S450		
		y	z	y	z	
Perfiles laminados en I 	$h/b > 1,2$	$t \leq 40$ mm	a	b	a_0	a_0
		$40 \text{ mm} < t \leq 100$ mm	b	c	a	a
	$h/b \leq 1,2$	$t \leq 100$ mm	b	c	a	a
		$t > 100$ mm	d	d	c	c
Perfiles armados en I 		$t \leq 40$ mm	b	c	b	c
		$t > 40$ mm	c	d	c	d
Agrupación de perfiles laminados soldados 			c	c	c	c
Tubos de chapa simples o agrupados 		laminados en caliente	a	a	a_0	a_0
		conformados en frío	c	c	c	c
Perfiles armados en cajón ⁽²⁾ 		soldadura gruesa: $a/t > 0,5$ $b/t < 30$ $h/w < 30$	c	c	c	c
		en otro caso	b	b	b	b
Perfiles simples U, T, chapa, redondo macizo 			c	c	c	c
Perfiles L 			b	b	b	b

Tabla 4.2. Curvas de pandeo en función de la sección transversal

En cuanto al cálculo del valor del coeficiente de reducción χ puede realizarse bien gráfica o bien numéricamente.

Para la obtención gráfica bastará obtener el valor de la esbeltez reducida $\bar{\lambda}$ y seleccionar la curva de pandeo adecuada (fig.4.14). Como puede observarse, para un valor de la esbeltez reducida $\bar{\lambda} \leq 0,2$ no habrá reducción de la resistencia plástica de la sección puesto que las curvas de pandeo dan un factor $\chi = 1$; en este caso el pandeo no se produciría en el elemento, y por lo tanto la resistencia de este elemento quedaría determinada al calcular la resistencia plástica de la sección bruta mediante la expresión:

$$P_{pl} = A \cdot \sigma_f \tag{4.38}$$

Por lo que se refiere al valor numérico de χ , viene dado por la expresión:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1 \tag{4.39}$$

donde:

$$\phi = 0,5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2] \tag{4.40}$$

siendo α el *coeficiente de imperfección elástica*, que adopta los valores de la tabla 4.3 en función de la curva de pandeo.

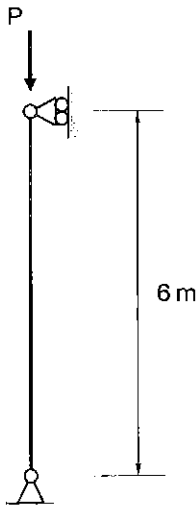
Curva de pandeo	a_0	a	b	c	d
Coeficiente de imperfección α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Tabla 4.3. Valores del coeficiente de imperfección α

Resumiendo, los pasos a dar para calcular la **resistencia de un elemento trabajando a compresión pura** son los siguientes:

1. Seleccionar la curva de pandeo que corresponde a la sección recta (tabla 4.2).
2. Calcular la carga crítica de Euler [expresión (4.37)].
3. Determinar el coeficiente de imperfección elástica α (tabla 4.3).
4. Obtener la esbeltez reducida $\bar{\lambda}$ [expresión (4.36)] y el coeficiente de reducción por pandeo χ [expresiones (4.39) y (4.40) ó fig.4.14].
5. Calcular la resistencia a pandeo P_b con la expresión (4.35).

Ejemplo. Calcular la carga máxima de compresión de la columna de la figura. Se trata de un perfil HEB 200 de acero S-275, de módulo de elasticidad 210 GPa y tensión de fluencia 260 MPa.



Las características mecánicas de la sección son:

$$\text{Área} = 78,1 \text{ cm}^2 \quad ; \quad I = 2003 \text{ cm}^4 \quad (I_{\text{mínimo}})$$

Curva de pandeo: c ($h/b=1 < 1,2$ y $t < 100$ mm)

Coefficiente de imperfección: $\alpha = 0,49$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 2003 \cdot 10^4}{6000^2} = 1153,18 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot \sigma_f}{P_{cr}}} = \sqrt{\frac{78,1 \cdot 10^2 \cdot 260}{1153,18 \cdot 10^3}} = 1,327$$

$$\phi = 0,5 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right] = 0,5 \cdot \left[1 + 0,49 \cdot (1,327 - 0,2) + 1,327^2 \right] = 1,657$$

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = \frac{1}{1,657 + \sqrt{1,657^2 - 1,327^2}} = 0,377$$

Luego la carga de pandeo es:

$$P_b = \chi \cdot A \cdot \sigma_f = 0,377 \cdot 78,1 \cdot 10^2 \cdot 260 = 765,53 \text{ kN}$$

TEMA 5

TEOREMAS ENERGÉTICOS

5.1. INTRODUCCIÓN

El método del análisis estructural se centra, como sabemos, en dos condiciones básicas: el equilibrio de las fuerzas y la compatibilidad de las deformaciones. Ambos factores -fuerzas y deformaciones- se relacionan, para cada elemento de la estructura, a través de una ley de comportamiento.

Según el procedimiento de resolución que hemos seguido hasta ahora, para formular las condiciones de equilibrio bastaba con aplicar las ecuaciones generales de la estática, en tanto que las condiciones de compatibilidad de las deformaciones se obtenían mediante consideraciones puramente geométricas de la deformación. Este tipo de análisis da origen a los llamados *métodos directos*.

Sin embargo, la formulación directa puede resultar a veces difícil y laboriosa, incluso en problemas no muy complicados. Es entonces cuando surge la necesidad de utilizar los llamados *métodos indirectos* para formular esas condiciones. Entre estos métodos se encuentran los que expondremos en este tema.

Estos métodos indirectos se basan en la consideración de dos magnitudes escalares definitorias del estado mecánico de un sistema: *trabajo* y *energía*. Parece lógico que un proceso general que pretenda satisfacer simultáneamente las condiciones de equilibrio y compatibilidad, incluya en su tratamiento una magnitud que dependa tanto de las fuerzas como de los desplazamientos. Tal sucede con el trabajo y la energía, definida ésta última como la capacidad de realizar trabajo.

Estos métodos se encuentran muy extendidos hoy día, por constituir una poderosa herramienta del cálculo estructural. A este desarrollo han contribuido en gran medida diversos factores. Por una parte, la creciente aplicación de métodos aproximados de análisis a modelos discretizados de la estructura. Por otra, el extraordinario avance de la tecnología de los ordenadores, para los que es particularmente adecuada la formulación basada en magnitudes escalares (como son trabajo y energía), frente a la formulación vectorial derivada de los métodos directos.

Este tema se dedicará a la exposición de algunos de los más importantes teoremas en los que se basan los métodos indirectos: los llamados **Teoremas Energéticos**. Históricamente surgen en el último tercio del siglo XIX, cuando *Castigliano*, un ingeniero italiano, establece el primer método energético al enunciar el teorema que lleva su nombre y que posteriormente presentaremos. Sin realizar una demostración rigurosa, Castigliano basa su método en la consideración de relaciones lineales entre

fuerzas y desplazamientos. Posteriormente, *Rayleigh* y *Ritz* desarrollan un método original, para la obtención de soluciones aproximadas. Y a finales de siglo, *Engesser*, ingeniero alemán, generaliza las afirmaciones de Castigliano, extendiéndolas a relaciones no lineales, a partir de los conceptos de energía complementaria de deformación y trabajo complementario de las fuerzas exteriores. Por desgracia, estos estudios no merecieron la atención de los investigadores hasta que, a mediados del siglo XX, *Westergaard* los sacó de nuevo a la luz pública.

5.2. HIPÓTESIS BÁSICAS

Los teoremas que vamos a estudiar se apoyan en las siguientes hipótesis básicas:

- 1) Las deformaciones que experimenta la estructura son pequeñas, de tal modo que la geometría de la estructura no resulta sensiblemente afectada por la deformación.
- 2) Todos los elementos que componen la estructura presentan un comportamiento elástico, no necesariamente lineal.
- 3) El proceso de deformación se supone cuasi-estático, es decir, las cargas se aplican gradualmente de forma que las deformaciones crecen muy lentamente.
- 4) No existen efectos térmicos en el proceso. Al no haber disipación de energía, el proceso carga-deformación es conservativo.

5.3. ENERGÍA ELÁSTICA DE DEFORMACIÓN EN PIEZAS PRISMÁTICAS

5.3.1. Energía elástica de deformación

Al estudiar la Teoría de la Elasticidad se consideró el hecho de que cuando un sólido elástico se deforma como consecuencia de la aplicación de unas cargas exteriores, los puntos de aplicación de las cargas se desplazan y, en consecuencia, se realiza un trabajo. Este trabajo queda almacenado en el propio sólido como una energía a la que se denomina **energía elástica de deformación**, que no es más que la capacidad que poseen las fuerzas internas para realizar un trabajo a partir de la configuración deformada del cuerpo.

Un procedimiento empleado con frecuencia para evaluar el trabajo W realizado por las cargas aplicadas o, lo que es lo mismo, la energía elástica U almacenada en el correspondiente proceso de deformación, se basa en la aplicación de la primera ley de la Termodinámica al proceso carga-deformación. Recuérdese que en lugar de utilizar directamente como variable la energía elástica de deformación U , es habitual usar en su lugar la *energía elástica por unidad de volumen* U_o , también denominada *energía elástica específica* o *densidad de energía de deformación*. La relación entre ambas es:

$$U = \iiint_V U_o \cdot dV \quad (5.1)$$

Entre las formulaciones clásicas obtenidas en la Teoría de la Elasticidad es habitual considerar la expresión de U_o para el caso particular de un comportamiento elástico lineal en el proceso carga-deformación que estamos considerando. Para un estado totalmente general de tensiones, y basándose en que en dicho proceso se cumple la primera ley de la Termodinámica, ese valor venía dado por:

$$U_o = \frac{1}{2E}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (5.2)$$

Para ilustrar estos conceptos, vamos a considerar su formulación para un caso particular de carga aplicada y la consiguiente deformación: el de una barra prismática de longitud L y sección constante A , sometida a una carga axial de tracción P que se hace crecer lentamente (fig.5.1a).

Elegido un sistema cartesiano de ejes xyz en el que el eje x coincide con el de la barra, el estado tensional que se origina es tal que la única componente de tensión no nula es la tensión uniforme $\sigma_{xx}=P/A$. En la dirección x se produce también una deformación unitaria $\epsilon_{xx}=\delta/L$, siendo δ el alargamiento de la barra. Si suponemos que el material se comporta con una relación σ - ϵ no lineal, como la indicada en la fig.5.1b, la relación entre la carga aplicada P y la deformación δ presentará entonces idéntica forma, tal como muestra la fig.5.1c.

El trabajo realizado por la carga vendrá dado por:

$$W_{ext} = \int_0^\delta P \cdot d\delta = U \quad (5.3)$$

que, como puede apreciarse en la fig. 5.1c, coincide con el área comprendida entre la curva P - δ y el eje de las deformaciones. Como el proceso es cuasi-estático y

conservativo, este trabajo se almacenará en la barra en forma de energía elástica de deformación, y puede recuperarse después en el proceso de descarga. El valor de la densidad de energía de deformación será:

$$U_o = \int \sigma_{xx} \cdot d\varepsilon_{xx} \quad (5.4)$$

que coincide con el área comprendida entre la curva $\sigma-\varepsilon$ y el eje de abscisas (fig.5.1.b).

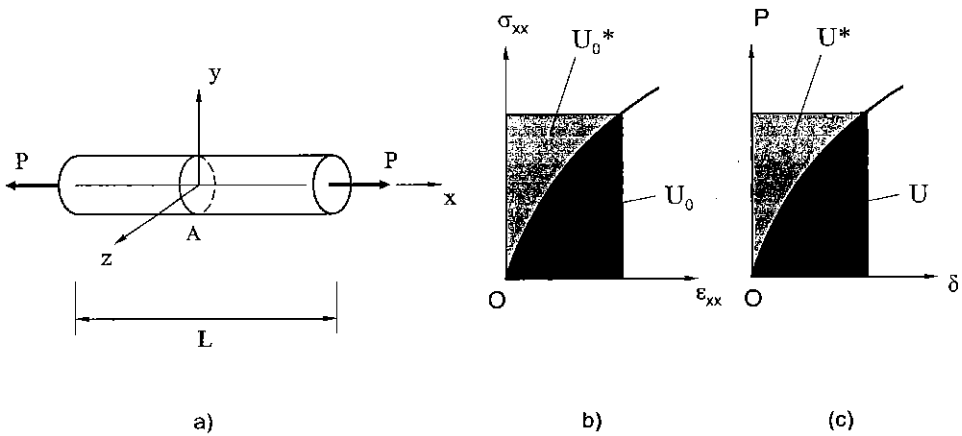


Figura 5.1. Tracción uniaxial de una barra prismática. Trabajo y energía de deformación en el caso general de comportamiento elástico

Otros de los conceptos definidos al estudiar la Teoría de la Elasticidad son los de *trabajo complementario de las fuerzas exteriores* y *energía complementaria de deformación*, magnitudes que se formulaban como:

$$W_{ext}^* = \int^P \delta \cdot dP = U^* \quad (5.5)$$

Esta integral representa el área entre la curva $P-\delta$ y el eje de ordenadas. Aunque no posee una interpretación física tan clara como W_{ext} , puede observarse que satisface la relación:

$$W_{ext} + W_{ext}^* = U + U^* = P \cdot \delta \quad (5.6)$$

La densidad de energía complementaria de deformación se formula como:

$$U_o^* = \int \varepsilon_{xx} \cdot d\sigma_{xx} \quad (5.7)$$

que coincide con el área comprendida entre la curva $\sigma-\varepsilon$ y el eje de ordenadas (fig.5.1.b). Como puede observarse, se verifica:

$$U_o + U_o^* = \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} \quad (5.8)$$

En el supuesto de que el material presente un comportamiento elástico lineal (fig.5.2a), y dado que la única componente de tensión no nula es σ_{xx} , el valor de la densidad de energía de deformación, de acuerdo con (5.2), será:

$$U_o = \frac{\sigma_{xx}^2}{2E} \quad (5.9)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que de la particularización de la ley de Hooke al estado de tensiones y deformaciones originado, resulta:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (5.10)$$

se obtiene para U_o :

$$U_o = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} \quad (5.11)$$

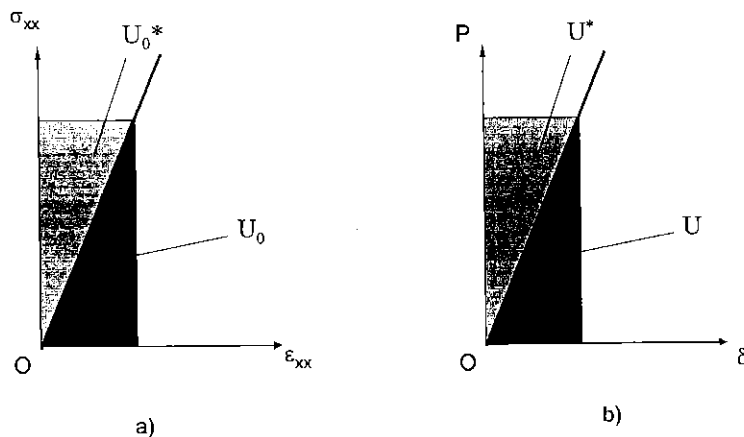


Figura 5.2. Tracción uniaxial de una barra prismática. Trabajo y energía de deformación en el caso general de comportamiento elástico lineal

que coincide con el área comprendida entre la curva $\sigma-\varepsilon$, en este caso una recta dada la linealidad del comportamiento, y el eje de abscisas (fig.5.2a).

La energía de deformación U almacenada en la pieza se obtendrá sin más que integrar al volumen de la misma [cfr. (5.1)] ese valor de U_o , es decir:

$$U = \iiint_V U_o \cdot dV = U_o \cdot (A \cdot L) = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \cdot A) \cdot (\varepsilon_{xx} \cdot L) = \frac{1}{2} P \cdot \delta \quad (5.12)$$

que coincide, por tanto, con el área comprendida entre la recta $P-\delta$ y el eje de las deformaciones en la fig.5.2b.

Es evidente que en el caso de comportamiento elástico lineal la energía de deformación y la energía complementaria de deformación coinciden, siendo, además:

$$U = U^* = \frac{1}{2} P \cdot \delta, \quad y: \quad U_o = U_o^* = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} \quad (5.13)$$

5.3.2. Energía elástica de deformación en piezas prismáticas

Puesto que en el estudio del comportamiento de piezas prismáticas es habitual utilizar como variables intermedias los esfuerzos de sección, deduciremos a continuación la expresión de la energía elástica de deformación en función de dichos esfuerzos. Para ello se aplicará el principio de superposición: en primer lugar se obtendrá la energía elástica asociada a cada uno de ellos para, posteriormente, sumar los resultados obtenidos y formular dicha energía para el caso general de que estén presentes todos los esfuerzos de sección.

a) Esfuerzo axial

En una sección transversal solicitada por un esfuerzo axial N_x , sea de tracción o compresión, la única componente de tensión no nula es:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} \quad (5.14)$$

Sustituyendo este valor en (5.2), se obtiene:

$$U_o = \frac{\sigma_{xx}^2}{2E} = \frac{N_x^2}{2EA^2} \quad (5.15)$$

y teniendo en cuenta (5.1):

$$U_{(N_x)} = \iiint_V U_o dV = \iiint_V \frac{N_x^2}{2EA^2} dx dy dz = \int_L \frac{N_x^2}{2EA^2} \left(\iint_A dy dz \right) = \int_L \frac{N_x^2}{2EA} dx \quad (5.16)$$

ya que N_x , E y A no son funciones ni de y ni de z , y la integración se realiza a lo largo de la longitud L de la pieza.

Si E , A y N_x son constantes a lo largo de toda la barra:

$$U_{(N_x)} = \frac{N_x^2 L}{2EA} \quad (5.17)$$

b) Momento flector

En una sección transversal solicitada por un momento flector M_z actuando en el plano principal de flexión xy , la única componente de tensión no nula es:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (5.18)$$

Sustituyendo este valor en (5.2), se obtiene:

$$U_o = \frac{\sigma_{xx}^2}{2E} = \frac{M_z^2 \cdot y^2}{2EI_z^2} \quad (5.19)$$

y teniendo en cuenta (5.1):

$$U_{(M_z)} = \iiint_V \frac{M_z^2 \cdot y^2}{2EI_z^2} dx dy dz = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z^2} \left(\iint_A y^2 dy dz \right) = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \quad (5.20)$$

ya que al depender M_z e I_z exclusivamente de x , se puede realizar en primer lugar la integral del paréntesis, que no es sino I_z .

c) Esfuerzo cortante

En una sección transversal en la que actúa un esfuerzo cortante V_y , dirigido según el eje principal y , la componente cortante de la tensión τ_{xy} viene dada por:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{b I_z} \quad (5.21)$$

que, sustituida en (5.2), da lugar a:

$$U_o = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} = \frac{V_y^2 Q_z^2}{2G \cdot b^2 I_z^2} \quad (5.22)$$

Teniendo en cuenta (5.1):

$$U_{(V_y)} = \iiint_V \frac{V_y^2 Q_z^2}{2G \cdot b^2 I_z^2} dx dy dz = \int_L \frac{V_y^2}{2GA} \left[\frac{A}{I_z^2} \iint_A \left(\frac{Q_z}{b} \right)^2 dy dz \right] dx = \int_L \frac{f_z V_y^2}{2GA} dx \quad (5.23)$$

donde al coeficiente adimensional f_z se le denomina *factor de cortadura*, y depende únicamente de la geometría de la sección. Para las secciones más comunes su cálculo no reviste una especial dificultad, y así por ejemplo, para la sección rectangular es $f_z=f_y=1,2$. En secciones de pared delgada estos factores son muy cercanos a la unidad. En cualquier caso sus valores para las secciones más características pueden encontrarse en los manuales.

d) Momento torsor

La tensión en un punto de una sección circular solicitada por un momento torsor M_x viene dada por:

$$\tau = \frac{M_x \cdot r}{I_p} \quad (5.24)$$

siendo r la distancia del punto al centro de la sección, e I_p el momento polar de inercia de la misma.

Proyectando τ sobre los ejes cartesianos y y z dará lugar a dos componentes de tensión τ_{xy} y τ_{xz} , y de acuerdo con (5.2) se obtendrá para U_o :

$$U_o = \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{M_x^2 \cdot r^2}{2GI_p^2} \quad (5.25)$$

Teniendo en cuenta (5.1):

$$U_{(M_x)} = \iiint_V \frac{M_x^2 \cdot r^2}{2GI_p^2} dx dy dz = \int_L \frac{M_x^2}{2GI_p^2} \left(\iint_A r^2 dy dz \right) dx = \int_L \frac{M_x^2}{2GI_p} dx \quad (5.26)$$

Debe tenerse en cuenta que esta expresión sólo es válida para una sección circular. Para cualquier otra sección deberá sustituirse el momento de inercia polar I_p por la constante torsional J correspondiente a esa sección, siendo entonces:

$$U_{(M_x)} = \int_L \frac{M_x^2}{2GJ} dx \quad (5.27)$$

f) Caso general de solicitaciones

En el caso general de una pieza prismática en el que sus secciones están solicitadas por los diferentes esfuerzos de sección, la energía de deformación de la barra será igual a la suma de las energías de deformación correspondientes a cada una de las solicitaciones actuando por separado. En consecuencia:

$$U = \int_L \frac{N_x^2}{2EA} dx + \int_L \frac{f_z \cdot V_y^2}{2GA} dx + \int_L \frac{f_y \cdot V_z^2}{2GA} dx + \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} dx + \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dx + \int_L \frac{M_x^2}{2GJ} dx \quad (5.28)$$

donde, como se ha dicho, J representa la constante torsional de la sección (en el caso particular de secciones circulares, esta constante es precisamente I_p).

No todos los términos de la expresión (5.28) tienen el mismo orden de magnitud. Para la mayoría de las barras en las que están presentes esfuerzos de flexión o de torsión, las energías de deformación debidas a los esfuerzos axiales o cortantes son despreciables frente a las de flexión o torsión. Sin embargo, hay casos como el de la compresión excéntrica en el que las energías de deformación a compresión y a flexión tienen el mismo orden de magnitud cuando la excentricidad es pequeña.

5.4. TRABAJO DE LAS FUERZAS EXTERIORES. TEOREMA DE CLAPEYRON

A partir de este epígrafe se van a formular algunos teoremas que, basados en los conceptos de trabajo de las fuerzas aplicadas y energía elástica de deformación, resultan muy útiles en el análisis de estructuras. Para ello comenzaremos calculando el *trabajo realizado por las fuerzas exteriores aplicadas a una estructura con comportamiento elástico lineal*.

Considérese una estructura a la que se le supone un comportamiento elástico lineal bajo la acción de un sistema de cargas exteriores a las que denominaremos Q_k ($k=1,2,\dots,n$), cargas pueden representar tanto fuerzas concentradas como momentos.

Además, la estructura está sustentada de tal forma que tiene imposibilitado cualquier movimiento de sólido rígido. Se la representa de una forma genérica en la fig.5.3.

A cada carga Q_k es posible asociar un desplazamiento Δ_k , que no es sino la componente del desplazamiento de su punto de aplicación en la dirección de Q_k . Por ejemplo, en la fig.5.3, Δ_1 representa el desplazamiento lineal del punto 1 en la dirección de la fuerza puntual Q_1 , y Δ_2 la rotación en el punto 2 en el que está aplicado un par Q_2 . Por consiguiente, el producto escalar de cada una de estas fuerzas por su correspondiente desplazamiento representa trabajo. A las fuerzas y desplazamientos así definidos se les suele denominar *fuerzas y desplazamientos generalizados*.

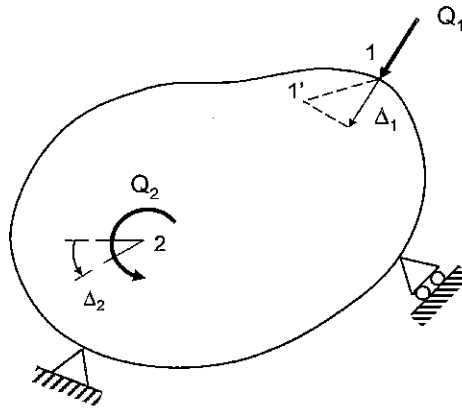


Figura 5.3. Cargas exteriores y desplazamientos

Como suponemos que el proceso carga-deformación es conservativo, el trabajo que efectúan las cargas a lo largo del proceso de su aplicación y la consiguiente deformación a que dan lugar dependerá sólo de los estados inicial y final, y será igual a la energía de deformación acumulada en la estructura.

Al no existir dependencia del orden de aplicación de las cargas, éstas se pueden hacer crecer desde cero hasta su valor final de modo arbitrario, siempre que este crecimiento sea suficientemente lento.

Para valorar del modo más sencillo el trabajo realizado por las cargas aplicadas, supongamos que todas éstas crecen de forma proporcional, es decir, van aumentando simultáneamente desde cero hasta sus valores finales pasando por valores constantemente proporcionales entre sí. Por tanto, si α es un escalar que varía desde 0 hasta 1, en un instante dado las cargas aplicadas serán $\alpha Q_1, \alpha Q_2, \dots, \alpha Q_n$.

Como el material es lineal, los desplazamientos crecen proporcionalmente a las fuerzas, de tal modo que en ese mismo instante (definido por α) valen $\alpha\Delta_1, \alpha\Delta_2, \dots, \alpha\Delta_n$.

Cuando se pasa del estado caracterizado por α al estado $(\alpha+d\alpha)$, el trabajo elemental realizado por las fuerzas es:

$$dW = \sum_{k=1}^n (\alpha \cdot Q_k + d\alpha \cdot Q_k) d\alpha \cdot \Delta_k = \sum_{k=1}^n Q_k \Delta_k \alpha \cdot d\alpha \quad (5.29)$$

donde se han despreciado los infinitésimos de orden superior. Nótese que Q_k e Δ_k son valores finales y, por tanto, constantes. El trabajo desarrollado en todo el proceso de carga-deformación, trabajo que será igual a la energía de deformación, se obtendrá integrando esta expresión

$$W = \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} dW = \int_0^1 \sum_{k=1}^n Q_k \Delta_k \alpha \cdot d\alpha = \sum_{k=1}^n Q_k \Delta_k \int_0^1 \alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n Q_k \Delta_k = U \quad (5.30)$$

expresión matemática del **Teorema de Clapeyron**, que puede enunciarse de la siguiente forma: *“El trabajo realizado por las cargas exteriores que actúan estáticamente sobre una estructura elástico lineal es independiente del orden de aplicación de las cargas, y es igual a la mitad de la suma de los productos de los valores finales de las cargas por los valores finales de los desplazamientos de sus puntos de aplicación, medidos en la dirección de las cargas”*.

En el desarrollo anterior no se han tenido en cuenta las reacciones de los apoyos, por suponer que se trata de apoyos rígidos (y, por tanto, no realizan trabajo). Si la estructura estuviera sustentada en apoyos elásticos que se deforman de manera proporcional a las reacciones en ellos originadas, se podría extender el teorema de Clapeyron considerando además de las fuerzas exteriores también las reacciones que realizan un trabajo.

5.5. TEOREMAS DE RECIPROCIDAD

Basándonos en las mismas hipótesis y en las conclusiones que acabamos de obtener, demostraremos a continuación dos nuevos teoremas de utilidad en el análisis de estructuras: los *teoremas de reciprocidad*.

Sea una estructura sustentada de forma que están totalmente impedidos los posibles movimientos de sólido rígido, y supongamos que presenta un comportamiento elástico lineal cuando se le somete a dos estados diferentes de carga (fig.5.4).

- 1) En el primer estado actúan unas fuerzas que designaremos por Q_i ($i=1,2,\dots,n$), aplicadas en los puntos A_i , según las direcciones n_i .
- 2) En el segundo estado de cargas actúan unas fuerzas P_j ($j=1,2,\dots,m$), aplicadas en los puntos B_j , según las direcciones n_j .

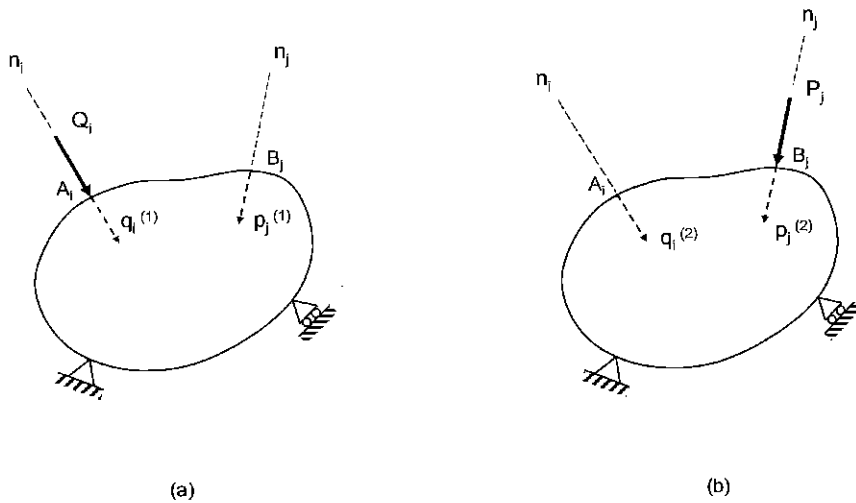


Figura 5.4. Teoremas de Reciprocidad

- a) Cuando se aplica únicamente el sistema de fuerzas Q_i , al desplazamiento de A_i en la dirección n_i lo designaremos por $q_i^{(1)}$, y al desplazamiento de B_j en la dirección n_j lo designaremos por $p_j^{(1)}$.
- b) Cuando se aplica solamente el sistema de fuerzas P_j , al desplazamiento de B_j en la dirección n_j lo designaremos por $p_j^{(2)}$, y al desplazamiento de A_i según la dirección n_i por $q_i^{(2)}$.

El superíndice en los desplazamientos es indicativo únicamente del estado de cargas a que corresponden.

A continuación se calculará el trabajo realizado al actuar simultáneamente los dos sistemas de fuerzas. Podemos efectuar este cálculo de dos formas distintas:

1º). Aplicamos primero el sistema de fuerzas Q_i y a continuación el P_j . Según (5.30), el trabajo realizado al aplicar en primer lugar las fuerzas Q_i será:

$$W(Q_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \cdot q_i^{(1)} \quad (5.31)$$

Cuando a continuación aplicamos a la estructura el sistema de fuerzas P_j , aunque las fuerzas previamente aplicadas Q_i no varían, efectúan un determinado trabajo ya que su punto de aplicación experimenta un desplazamiento. Además, en virtud del principio de superposición, los desplazamientos debidos a P_j no dependen de que las fuerzas Q_i estén o no aplicadas a la estructura. Por consiguiente:

$$W(Q_i + P_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \cdot q_i^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m P_j \cdot p_j^{(2)} + \sum_{i=1}^n Q_i \cdot q_i^{(2)} \quad (5.32)$$

2º). Aplicamos primero el sistema de fuerzas P_j y a continuación el Q_i . El trabajo realizado al aplicar en primer lugar las fuerzas P_j será:

$$W(P_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m P_j \cdot p_j^{(2)} \quad (5.33)$$

A continuación, se aplica el sistema de fuerzas Q_i . El trabajo total será en este caso:

$$W(P_j + Q_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m P_j \cdot p_j^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \cdot q_i^{(1)} + \sum_{j=1}^m P_j \cdot p_j^{(1)} \quad (5.34)$$

Como el trabajo total realizado como consecuencia de la aplicación de los dos sistemas de fuerzas ha de ser idéntico, independiente del orden de su aplicación, las expresiones (5.32) y (5.34) deben ser iguales. Luego:

$$\sum_{i=1}^n Q_i \cdot q_i^{(2)} = \sum_{j=1}^m P_j \cdot p_j^{(1)} \quad (5.35)$$

expresión matemática del **Teorema de Reciprocidad de Rayleigh y Betti**, que puede enunciarse de la siguiente forma: "Si una estructura con comportamiento elástico lineal es sometida a dos sistemas de fuerzas diferentes, el trabajo que realizaría el primer sistema, cuando las fuerzas recorren los desplazamientos producidos por el segundo, es igual al trabajo realizado por las fuerzas del segundo sistema, cuando recorren los desplazamientos producidos por el primero".

Como en el teorema anterior, los términos fuerza y desplazamiento tienen un sentido generalizado. Las fuerzas pueden ser tanto fuerzas concentradas como momentos, y los desplazamientos correspondientes serían desplazamientos lineales y giros.

Un caso particular de este teorema fue formulado pocos años antes por Maxwell. Supongamos que en el primer estado de carga actúa una sola fuerza Q , aplicada en el punto A , según una determinada dirección n_i , y en el segundo actúa una sola fuerza P , aplicada en un punto B , en la dirección n_j (fig.5.5). La aplicación del teorema en este caso proporciona:

$$Q \cdot q^{(2)} = P \cdot p^{(1)} \quad (5.36)$$

Si ambas fuerzas son de la misma magnitud ($Q=P$), se deduce que:

$$q^{(2)} = p^{(1)} \quad (5.37)$$

expresión del llamado **Teorema de Reciprocidad de Maxwell**, que puede enunciarse en la forma siguiente: "En una estructura elástico lineal, el desplazamiento de un punto A en la dirección n_i debido a la acción de una fuerza P aplicada en otro punto B y dirección n_j , es igual al desplazamiento del punto B en la dirección n_j , como consecuencia de la aplicación de una fuerza de la misma magnitud P en el punto A y dirección n_i ".

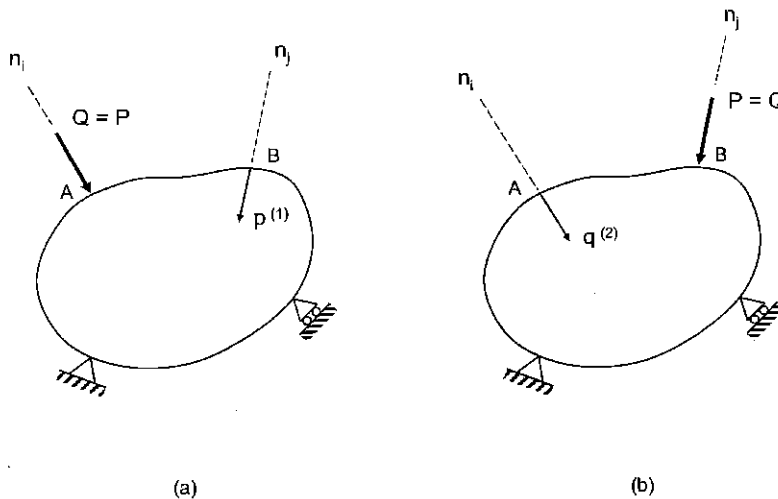


Figura 5.5. Teorema de Reciprocidad de Maxwell

La utilidad de estos dos teoremas radica, en buena parte, en las simplificaciones a que conduce su aplicación en la resolución de muchos problemas del análisis estructural. Además, permiten sustituir la obtención directa del desplazamiento en un punto, por la de otro de más sencilla determinación. Veremos a continuación un ejemplo de su aplicación.

Ejemplo 5.1. La viga de la fig.5.6a, de rigidez a flexión constante EI , está sometida a un momento M_o en la sección C. Determinar el desplazamiento vertical en la sección central D.

Para calcular este desplazamiento supondremos la viga con los estados de carga (1) y (2) representados en las fig.5.6a y b, respectivamente. El estado (1) es el estado original de cargas, y en el estado (2) se ha considerado una fuerza concentrada de valor unidad en D, ya que la incógnita es el desplazamiento lineal de esta sección en el sistema original.

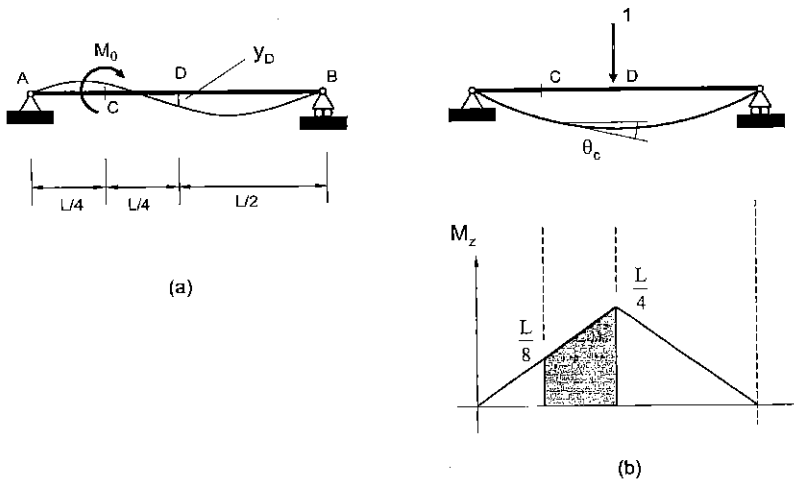


Figura 5.6. Aplicación de los Teoremas de Reciprocidad

De la aplicación de (5.35) o (5.36) resulta:

$$M_o \cdot \theta_C^{(2)} = 1 \cdot \delta_D^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \delta_D^{(1)} = M_o \cdot \theta_C^{(2)} \quad (5.38)$$

con lo que para obtener el desplazamiento propuesto bastará con calcular el giro en la sección C para el segundo estado de cargas, cálculo que al menos aparentemente es más sencillo que el que resultaría de operar directamente en el problema original. El valor de este giro puede obtenerse aplicando el primer Teorema de Mohr entre C y D:

$$\theta_C^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{8} + \frac{L}{4} \right) \frac{L}{4} = \frac{3L^2}{64EI} \quad (5.39)$$

El desplazamiento pedido será, por tanto:

$$\delta_D = \delta_D^{(1)} = \frac{3M_o L^2}{64EI} \quad (5.40)$$

5.6. PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO

Consideremos de nuevo una estructura con comportamiento elástico -lineal o no- en equilibrio estático, sin posibilidad de movimiento como sólido rígido, y sometida a un sistema de cargas exteriores independientes Q_i ($i=1,2,\dots,n$), que pueden representar indistintamente fuerzas concentradas o momentos. Se trata de unas *fuerzas generalizadas* tal como se definieron anteriormente. A cada fuerza generalizada Q_i es posible asociar un desplazamiento generalizado Δ_i , con el mismo significado de antes. La única diferencia con el caso anterior es que ahora únicamente se exige que la estructura tenga un comportamiento elástico, no necesariamente lineal. Por ser elástico hay una correspondencia biunívoca entre Q_i y Δ_i , de tal forma que, al menos teóricamente, siempre será posible expresar Q_i en función de su correspondiente desplazamiento Δ_i .

El producto de cada fuerza generalizada Q_i por su correspondiente desplazamiento Δ_i representa trabajo, y el trabajo total efectuado por las cargas durante su aplicación es igual a la energía de deformación almacenada en el cuerpo.

El trabajo total realizado por las cargas aplicadas vendrá expresado por:

$$W_{ext} = \sum_{i=1}^n \int Q_i d\Delta_i = U(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \quad (5.41)$$

y podrán expresarse trabajo y energía en función de los desplazamientos generalizados, ya que como se acaba de decir, al menos desde un punto de vista teórico será posible expresar las cargas en función de los correspondientes desplazamientos.

Calculemos qué variación se produce en la energía de deformación cuando se permite un desplazamiento infinitesimal $d\Delta_i$ en el punto i de aplicación de la carga Q_i y en la propia dirección de Q_i , permaneciendo fijos los restantes puntos de aplicación de las cargas. Por ser la energía de deformación una diferencial exacta, tal incremento vendrá dado por:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} d\Delta_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} d\Delta_i + \dots + \frac{\partial U}{\partial \Delta_n} d\Delta_n = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} d\Delta_i \quad (5.42)$$

en donde la última igualdad se establece porque sólo $d\Delta_i$ es distinto de cero.

Por otra parte, en ese desplazamiento infinitesimal del punto i sólo Q_i realizará trabajo, cuyo valor es:

$$dW = Q_i \cdot d\Delta_i = dU \quad (5.43)$$

Igualando (5.42) y (5.43), se obtiene:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.44)$$

expresión analítica del **Primer Teorema de Castigliano**, formulado por este ingeniero italiano en 1879, y que puede enunciarse en la forma siguiente: “Si la energía de deformación de una estructura elástica (sea lineal o no) se expresa como una función de los desplazamientos generalizados Δ_i , entonces la derivada parcial de la energía con respecto a cualquiera de dichos desplazamientos es igual a la correspondiente fuerza generalizada Q_i ”.

Obsérvese que el teorema es válido tanto para materiales elásticos lineales como no lineales, y es aplicable indistintamente tanto a estructuras estáticamente determinadas como indeterminadas.

Sin embargo, muchas veces no es fácil obtener la expresión de la energía de deformación en función de los desplazamientos generalizados, pues exige un análisis de la geometría de la deformación en la estructura, y este análisis puede ser realmente complicado. Este hecho limita la aplicabilidad de este teorema. Veremos a continuación otros teoremas, basados en los conceptos de energía de deformación complementaria y trabajo complementario de las fuerzas aplicadas, en los que no se presenta esa dificultad.

5.7. PRIMER TEOREMA DE ENGESSER Y SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO

Consideremos de nuevo una estructura con comportamiento elástico –lineal o no- en equilibrio estático, sin posibilidad de movimiento como sólido rígido, sometida a un sistema de cargas exteriores independientes Q_i ($i=1,2,\dots,n$), que representan indistintamente fuerzas y/o momentos. A cada fuerza generalizada Q_i se le asocia su correspondiente desplazamiento generalizado Δ_i , en la dirección de Q_i . Dada la correspondencia biunívoca entre Q_i y Δ_i será posible expresar, al menos teóricamente, Δ_i en función de la carga correspondiente Q_i .

Recordando la definición de trabajo complementario de una carga, el trabajo complementario total, que será igual a la energía complementaria de deformación de la estructura, se expresará en la forma:

$$W_{ext}^* = \sum_{i=1}^n \int \Delta_i dQ_i = U^*(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \quad (5.45)$$

valor que, como se acaba de decir, será posible expresar, al menos desde un punto teórico, en función de las cargas aplicadas. Como las restantes magnitudes que estamos considerando también es una magnitud conservativa y, por tanto, diferencial exacta.

Si una de las cargas, por ejemplo Q_i , sufre un incremento elemental dQ_i , mientras las demás permanecen constantes, la energía complementaria se incrementará en la cantidad elemental dU^* dada por:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial Q_1} dQ_1 + \dots + \frac{\partial U^*}{\partial Q_i} dQ_i + \dots + \frac{\partial U^*}{\partial Q_n} dQ_n = \frac{\partial U^*}{\partial Q_i} dQ_i \quad (5.46)$$

donde se ha tenido en cuenta que sólo dQ_i es distinto de cero.

Otro procedimiento para obtener una expresión de dU^* es considerar el trabajo complementario de las cargas cuando sólo Q_i aumenta en una cantidad dQ_i . La única carga que realiza trabajo complementario es la propia Q_i , puesto que las demás no cambian. Por consiguiente, el aumento de trabajo complementario será:

$$dW^* = \Delta_i dQ_i = dU^* \quad (5.47)$$

Comparando (5.46) y (5.47), resulta:

$$\Delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.48)$$

expresión matemática del denominado **Primer Teorema de Engesser**, formulado por este ingeniero alemán en 1889, y que puede enunciarse de la forma siguiente: "Si la energía complementaria de deformación de una estructura elástica (sea lineal o no) se expresa en función de las fuerzas generalizadas independientes Q_i , entonces la derivada parcial de la energía complementaria respecto a cualquiera de las fuerzas Q_i es igual al correspondiente desplazamiento generalizado Δ_i ".

Este teorema es aplicable a estructuras con comportamiento elástico, lineal o no. En el caso particular de que el comportamiento sea elástico lineal, recuérdese que la energía de deformación U y la energía complementaria de deformación U^* coinciden, con lo que la expresión (5.48) se transforma en:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.49)$$

resultado conocido como **Segundo Teorema de Castigliano**.

En cualquier caso, la energía debe expresarse en función de las cargas aplicadas, lo cual será factible directamente en estructuras estáticamente determinadas. Más adelante, se extenderá la aplicación de estos teoremas al caso de estructuras estáticamente indeterminadas.

Ejemplo 5.2. Calcular el alargamiento de la barra de longitud L y rigidez constante EA de la fig.5.7, empotrada en A y en cuyo extremo libre en B está aplicada una carga P en la dirección del eje de la barra.

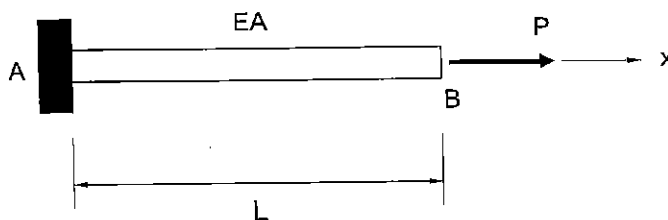


Figura 5.7. Alargamiento de una barra sometida a tracción

El alargamiento de la barra es igual al desplazamiento del extremo libre B. La barra trabaja exclusivamente a esfuerzo axial de valor constante $N_x=P$. Por consiguiente, según (5.28) la energía de deformación será:

$$U = \int_0^L \frac{N_x^2}{2EA} dx = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx = \frac{P^2 L}{2EA} \quad (5.50)$$

y aplicando (5.49) se obtiene para el alargamiento de la barra:

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL}{EA} \quad (5.51)$$

Ejemplo 5.3. La viga de la fig.5.8, empotrada en A y libre en B, tiene una longitud L y una rigidez a flexión constante EI_z . En su extremo libre está sometida a una carga transversal P. Calcular la flecha en dicho extremo.

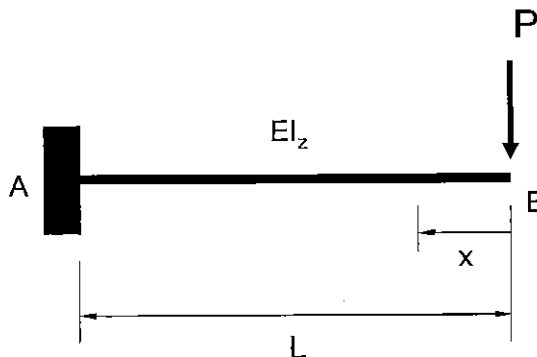


Figura 5.8. Flecha en una viga trabajando a flexión

Supondremos que la flexión tiene lugar en el plano xy en el que están contenidas viga y carga. Los esfuerzos de sección presentes son un cortante $V_y=P$ y un flector $M_z=Px$. Despreciando el efecto del esfuerzo cortante, la expresión para la energía de deformación será, según (5.28):

$$U = \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z} dx = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L P^2 x^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI_z} \quad (5.52)$$

y aplicando (5.49) se obtiene para la flecha en el extremo libre:

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI_z} \quad (5.53)$$

5.8. MÉTODO DE LA CARGA UNIDAD

La determinación de desplazamientos en estructuras es una parte esencial del análisis y diseño estructurales. Uno de los posibles procedimientos para su cálculo es la utilización del denominado *método de la carga unidad*, cuyo fundamento se expondrá a continuación.

Supongamos una estructura estáticamente determinada, sobre la que actúa un sistema de cargas Q_k . Sea Q_i la fuerza, en el sentido generalizado que se viene considerando, que actúa en el punto i de la estructura. Se pretende determinar el desplazamiento Δ_i de dicho punto en la dirección de aplicación de la carga.

Por ser la estructura estáticamente determinada, es posible expresar mediante simples consideraciones estáticas los esfuerzos de sección resultantes en función de las cargas aplicadas. Supongamos, por ejemplo, que los que contribuyen significativamente a la energía de deformación son un momento flector M_z y un momento torsor M_x . La energía de deformación será entonces [cfr. (5.28)]:

$$U = \int \frac{M_z^2}{2EI_z} dx + \int \frac{M_x^2}{2GJ} dx \quad (5.54)$$

Aplicando el segundo Teorema de Castigliano [cfr. (5.49)] se obtiene para el desplazamiento que se pretende calcular:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i} = \int \frac{M_z \cdot \partial M_z / \partial Q_i}{EI_z} dx + \int \frac{M_x \cdot \partial M_x / \partial Q_i}{GJ} dx \quad (5.55)$$

Al tener la estructura un comportamiento elástico lineal (que es el campo de validez del segundo Teorema de Castigliano), las derivadas parciales que aparecen en cada integrando de la ecuación (5.55) representan físicamente los valores de los esfuerzos resultantes, flector y torsor, debidos a la acción de una carga unidad aplicada en el punto i en la dirección de Q_i . Se trata de una carga virtual, evidentemente.

En efecto, si M_z es el momento flector originado por las sollicitaciones exteriores, entonces $\partial M_z / \partial Q_i \cdot dQ_i$ será el incremento de momento flector producido por una carga incremental dQ_i (supuestas constantes todas las demás cargas), y $m_z = \partial M_z / \partial Q_i$ será el incremento de momento flector producido por una carga incremental unidad en la dirección de Q_i , es decir, cuando $dQ_i=1$.

Por el principio de superposición, ese incremento representa el momento flector m_z originado en la estructura cuando sólo actúa una carga unidad ($\overline{Q_i}=1$) aplicada en el punto i y en la dirección de Q_i . De esta forma, la ecuación (5.55) puede escribirse como:

$$\Delta_i = \int \frac{M_z \cdot m_z}{EI_z} dx + \int \frac{M_x \cdot m_x}{GJ} dx \quad (5.56)$$

donde m_z y m_x tienen el significado que se acaba de exponer: esfuerzos de sección debidos a la acción de una carga unidad.

El procedimiento de cálculo de desplazamientos basado en las consideraciones que se acaban de exponer se conoce con el nombre de **método de la carga unidad**, y es ampliamente utilizado en el análisis estructural. Aunque se ha supuesto una estructura estáticamente determinada, el método también puede aplicarse a estructuras indeterminadas, sin más que considerar la estructura liberada isostática, sometida a las cargas exteriores y a las reacciones redundantes.

En resumen, los pasos a seguir para calcular un desplazamiento Δ_i según el método de la carga unidad son:

- 1º) Se determinan los esfuerzos de sección resultantes debidos a las cargas aplicadas (M_z, M_x, \dots).
- 2º) Se retiran de la estructura todas las cargas aplicadas y en su lugar se coloca una única carga, de valor unidad, correspondiente al desplazamiento Δ_i que se pretende calcular.
- 3º) Se determinan los esfuerzos de sección debidos a esta carga unidad (m_z, m_x, \dots).
- 4º) Mediante (5.56) se obtiene el desplazamiento deseado Δ_i .

Ejemplo 5.4. *Calcular, aplicando el método de la carga unidad, la flecha en el extremo libre de la viga del ejemplo 5.3.*

Como se dijo entonces, el único esfuerzo a considerar es el momento flector M_z . El momento debido a la carga real P vale $M_z=Px$ (fig. 5.8), y el debido a una carga unidad aplicada en B y en la dirección de P (fig. 5.9), vale $m_z=x$.

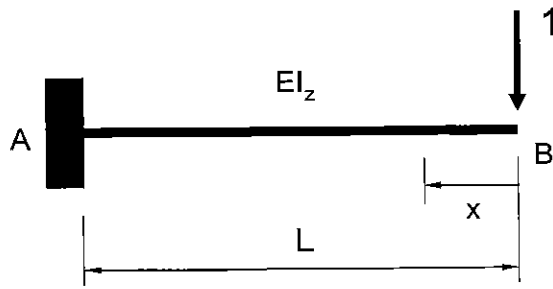


Figura 5.9. Método de la carga unidad

Aplicando (5.56) se obtiene para la flecha en B:

$$\delta_B = \int_0^L \frac{M_z \cdot m_z}{EI_z} dx = \int_0^L \frac{Px \cdot x}{EI_z} dx = \frac{PL^3}{3EI_z} \quad (5.57)$$

La interpretación que se ha dado a la ecuación (5.55) sugiere asimismo un procedimiento para determinar un desplazamiento Δ_j cuando no existe en el punto j ninguna carga real aplicada. En tales casos, basta suponer una carga imaginaria \overline{Q}_j aplicada en ese punto y en la dirección del desplazamiento que se desea calcular. A continuación, se evalúan los esfuerzos de sección resultantes y se aplica el segundo Teorema de Castigliano, por ejemplo mediante (5.55). El valor buscado del desplazamiento se obtendrá haciendo tender a cero la carga ficticia \overline{Q}_j . Es decir:

$$\Delta_j = \lim_{\overline{Q}_j \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial \overline{Q}_j} \quad (5.57)$$

Esto equivale a anular en la expresión final la carga imaginaria \overline{Q}_j .

Ejemplo 5.5. Calcular el giro en el extremo libre B de la viga del ejemplo 5.3.

La fuerza en sentido generalizado correspondiente al giro en B que se pretende calcular es un momento aplicado en B. Como este momento no forma parte de las cargas reales aplicadas, habrá que introducirlo: sea M este momento (fig.5.10). Por consiguiente, el valor del giro en B será:

$$\theta_B = \left[\frac{\partial U}{\partial M} \right]_{M=0} \quad (5.58)$$

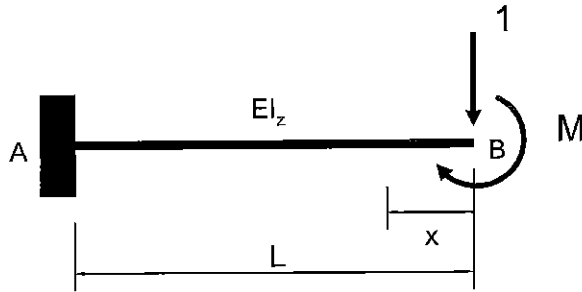


Figura 5.10. Giro en el extremo libre

Para la resolución del problema se puede aplicar o no el método de la carga unidad. Vamos a resolverlo, por ejemplo, aplicando directamente (5.55), con lo que la expresión (5.58) se transforma en:

$$\theta_B = \left[\frac{\partial U}{\partial M} \right]_{M=0} = \left[\int_0^L \frac{M_z \cdot \partial M_z / \partial M}{EI_z} dx \right]_{M=0} \quad (5.59)$$

donde:

$$M_z = Px + M; \quad \frac{\partial M_z}{\partial M} = 1 \quad (5.60)$$

Sustituyendo estos valores en (5.59):

$$\theta_B = \left[\int_0^L \frac{(Px + M) \cdot 1}{EI_z} dx \right]_{M=0} = \int_0^L \frac{Px}{EI_z} dx = \frac{PL^2}{2EI_z} \quad (5.61)$$

5.9. SEGUNDO TEOREMA DE ENGESSER: TEOREMA DEL TRABAJO MÍNIMO

Consideremos ahora el caso general de una estructura estáticamente indeterminada. En este caso no será posible obtener las reacciones en los apoyos mediante la sola aplicación de las ecuaciones universales de equilibrio y, por lo tanto, tampoco se podrá expresar a priori la energía de deformación o la energía de deformación complementaria en función de las fuerzas solicitantes. Veamos un procedimiento que permite la resolución de este tipo de estructuras mediante la aplicación de los teoremas energéticos.

Dando un tratamiento general al problema, comencemos considerando una estructura con comportamiento elástico –lineal o no-, sometida a un sistema de fuerzas exteriores generalizadas Q_i ($i=1,2,\dots,n$). En la estructura hay un total de m reacciones de enlace desconocidas, y sea s el número de ecuaciones independientes de equilibrio ($s=6$ para una estructura tridimensional; $s=3$ si es plana). Como es sabido, la diferencia $r=m-s$ es el grado de hiperestaticidad de la estructura. Por ejemplo, en la fig.5.11a se representa una estructura hiperestática de grado 3.

Para su resolución seleccionemos r incógnitas redundantes R_j ($j=1,2,\dots,r$), ya sean reacciones o esfuerzos interiores, y obtengamos la *estructura liberada* que resulta de introducir estas incógnitas redundantes tras haber suprimido previamente las restricciones correspondientes. En la fig.5.11b se muestra el ejemplo de una posible liberación de enlaces para la estructura hiperestática de la fig.5.11a. La estructura liberada correspondiente es, obviamente, una estructura isostática sometida simultáneamente a las cargas exteriores más las redundantes.

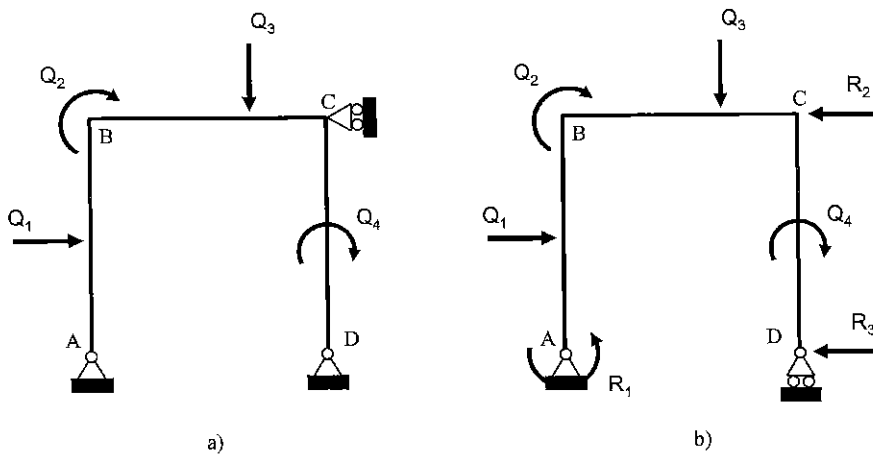


Figura 5.11. a) Estructura hiperestática; b) Estructura liberada

En cuanto a la decisión de qué incógnitas redundantes elegir, de entre las varias opciones posibles para un problema determinado, se impone la condición de que las que se elijan sean tales que no produzcan trabajo durante el proceso de deformación, es decir, que el desplazamiento de sus puntos de aplicación en la dirección de la redundante sea nulo. Así sucede con R_1 , R_2 y R_3 en la estructura de la fig.5.11.

Una vez elegidas las incógnitas R_j , mediante la aplicación de las s ecuaciones de la estática será posible expresar las restantes reacciones desconocidas en función de estas redundantes y de las fuerzas Q_i directamente aplicadas a la estructura. Por consiguiente, entonces también será posible formular la energía complementaria de deformación U^* en función de estos conjuntos de fuerzas Q_i y R_j , es decir, obtener:

$$U^* = U^*(Q_1, \dots, Q_n, R_1, \dots, R_r) \quad (5.62)$$

donde las variables Q_i y R_j se consideran independientes entre sí. De esta forma, se puede expresar:

$$dU^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U^*}{\partial Q_i} dQ_i + \sum_{j=1}^r \frac{\partial U^*}{\partial R_j} dR_j \quad (5.63)$$

La aplicación del primer teorema de Engesser conduce al conjunto de $n+r$ ecuaciones simultáneas:

$$\frac{\partial U^*}{\partial Q_i} = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial R_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (5.65)$$

La primera de estas expresiones ya nos es conocida. La segunda constituye un conjunto de r ecuaciones cuya resolución permite determinar las R_j reacciones desconocidas, y que es la formulación analítica del denominado **Segundo Teorema de Engesser o Teorema del Trabajo Mínimo**, que puede enunciarse de la siguiente forma: *“En una estructura estáticamente indeterminada, de todos los posibles conjuntos de redundantes que satisfacen las ecuaciones de equilibrio, el conjunto particular que también satisface las condiciones de compatibilidad es aquel que proporciona un valor estacionario de la energía complementaria de deformación, siempre que sean nulos los trabajos realizados por las redundantes”.*

El valor estacionario que se obtiene es realmente un mínimo, y estas redundantes, por satisfacer simultáneamente las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad, son las reacciones que realmente se originan en la estructura.

Conviene insistir que en (5.64) y (5.65), las variables se consideran independientes al realizar las derivadas parciales correspondientes.

Si las redundantes realizaran trabajo, entonces (5.65) se sustituye por:

$$\frac{\partial U^*}{\partial R_j} = \Delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (5.66)$$

sistema más complicado de resolución.

Finalmente, para estructuras con comportamiento elástico-lineal, las ecuaciones (5.64) y (5.65) se pueden escribir en función de la energía elástica de deformación, es decir:

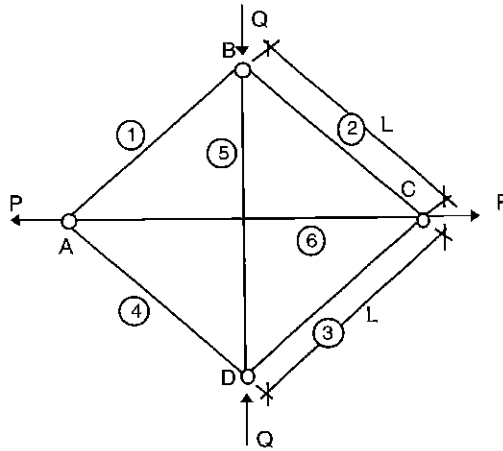
$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (5.68)$$

Las ecuaciones (5.68) constituyen la expresión de lo que se suele denominar **Teorema de Castigliano del Trabajo Mínimo**.

PROBLEMAS

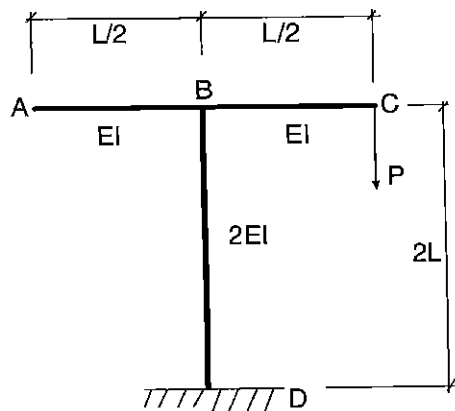
5.1. Un entramado compuesto de seis varillas articuladas entre sí está solicitado por cuatro fuerzas P y Q iguales dos a dos, que actúan en los vértices del entramado. La sección A y el módulo de elasticidad E es el mismo para todas las varillas. Hallar los esfuerzos en las barras.



5.2. La estructura de la figura está empotrada en D. La rigidez a flexión de BD es doble de la de los tramos AB y BC. Calcular:

- 1º) Flecha vertical en A.
- 2º) Flecha vertical en C.

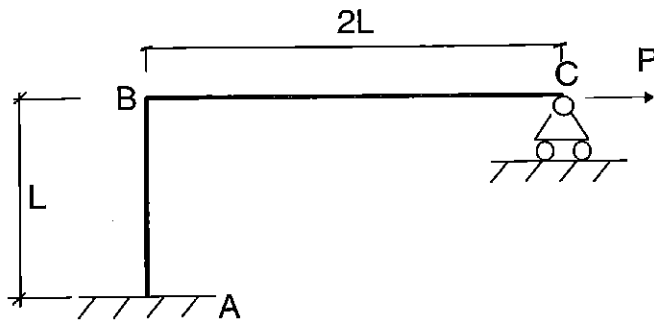
Se desprecian los efectos debidos a los esfuerzos axiales y cortantes.



5.3. El pórtico vertical ABC se apoya en A en un empotramiento perfecto y en C en una articulación deslizante, donde recibe una fuerza horizontal P. La rigidez a flexión del pórtico es uniforme de valor EI. Calcular:

- 1º) Reacciones y diagramas de esfuerzos axiales, cortantes y momentos flectores.
- 2º) Desplazamiento del punto C.

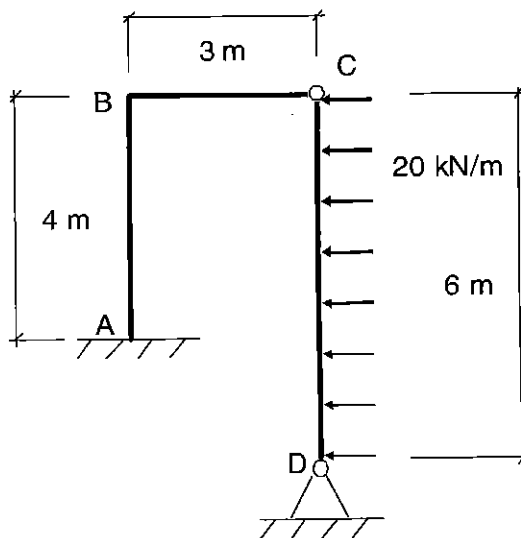
Se desprecian los efectos debidos a los esfuerzos axiales y cortantes.



5.4. La figura representa un pórtico de pilares desiguales. La rigidez a flexión EI es constante en pilares y dintel. A es un empotramiento perfecto, D una articulación fija y C una articulación intermedia. El pilar CD recibe una carga horizontal uniformemente repartida de 20 kN/m.

Representar el diagrama de momentos flectores y dibujar, en forma aproximada, la deformada.

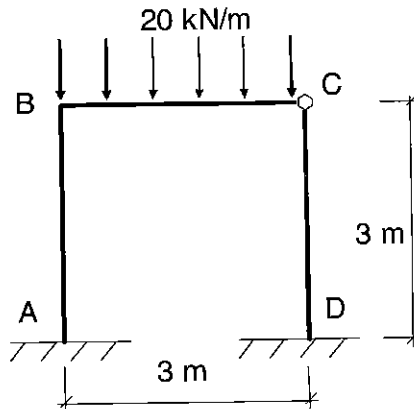
Se desprecia el efecto de los esfuerzos axiales y cortantes.



5.5. En el pórtico de la figura, A y D son empotramientos perfectos y C una articulación intermedia. La rigidez EI es constante en toda la estructura. El dintel soporta una carga vertical uniforme de 20 kN/m .

Determinar las reacciones en A y D.

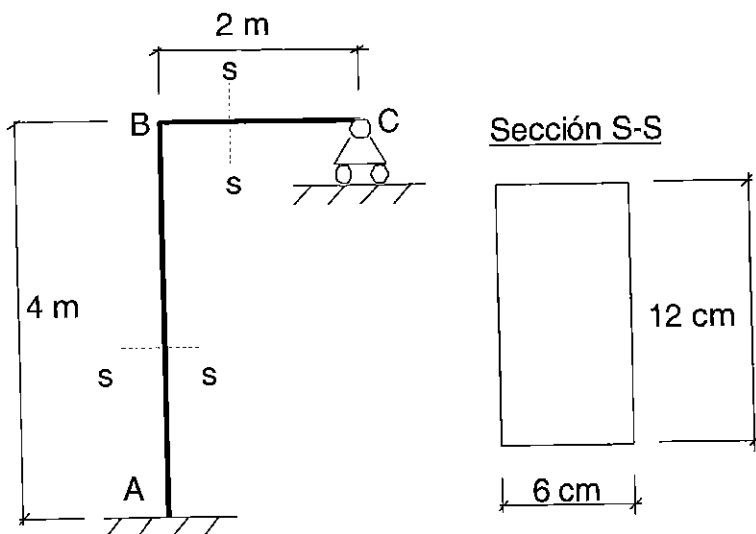
Se desprecia el efecto de esfuerzos axiales y cortantes.



5.6. El semipórtico ABC está empotrado en el extremo A y su extremo C está articulado a un apoyo de rodillos que puede deslizar horizontalmente. El material es elástico con módulo de elasticidad $E=200 \text{ GPa}$ y coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. La sección de ambas barras es de $6 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$, siendo el lado de 12 cm paralelo al plano del pórtico. Se somete al conjunto a una elevación de temperatura de 200°C . Obtener:

- 1º) Reacción del apoyo C y giro del nudo B.
- 2º) Diagramas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales, y deformada aproximada.

Se desprecian las deformaciones por esfuerzos cortantes y axiales.

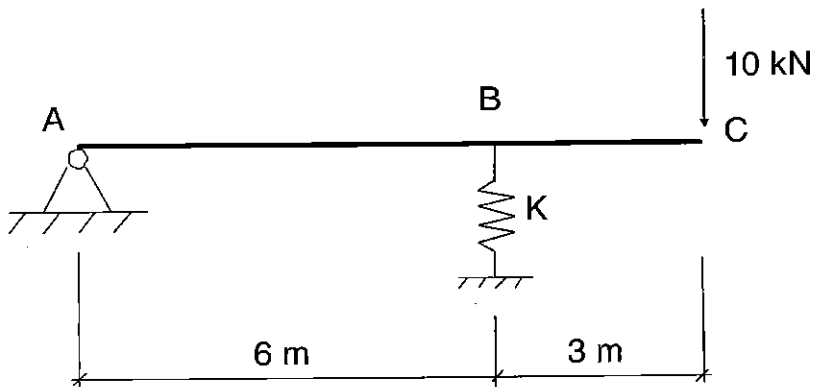


5.7. Una viga de acero ABC se apoya en A en una articulación fija, y en B en un muelle elástico de constante K (kN/m). Recibe una carga de 10 kN en C. Determinar:

- 1º) Valor de la constante K del muelle para que el punto medio de AB no experimente desplazamiento vertical.
- 2º) Para este valor de K, calcular la flecha en la sección C.

Momento de inercia de la viga: $I = 1.450 \text{ cm}^4$. Módulo de elasticidad del acero: $E = 200 \text{ GPa}$.

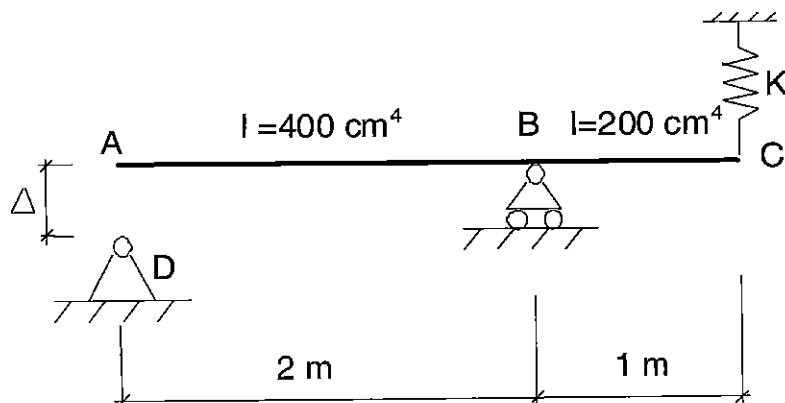
Se desprecia el efecto del esfuerzo cortante.



5.8. La barra ABC está compuesta de dos tramos, cuyas longitudes y momentos de inercia se indican en la figura. El módulo de elasticidad del material es $E = 200 \text{ GPa}$. El extremo C se halla unido a un muelle de constante $K = 600 \text{ kN/m}$, inicialmente sin deformar. La sección B descansa sobre un apoyo deslizante. El extremo A se une con el apoyo fijo D, separado inicialmente $\Delta = 5 \text{ cm}$.

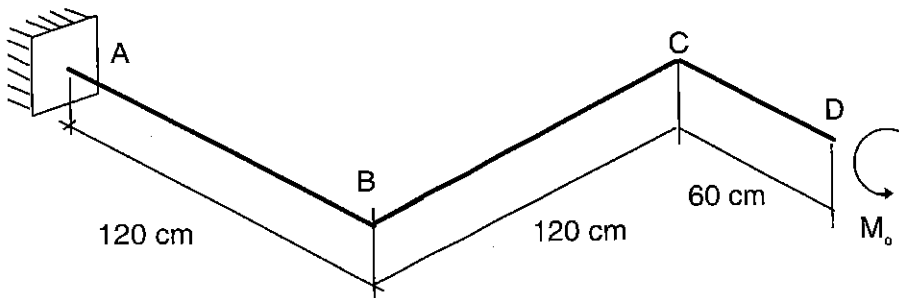
Calcular las reacciones de los apoyos y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores.

Se desprecia el efecto del esfuerzo cortante.



5.9. La figura representa la directriz plana y horizontal de una pieza que recibe en su extremo libre D un momento M_0 de valor 2 kN.m y eje CD. Los diversos tramos forman ángulos rectos entre sí y son de sección circular maciza de 6 cm de diámetro. El material es elástico-lineal de constantes: $\sigma_f = 240$ MPa, $E = 210$ GPa, $G = 84$ GPa.

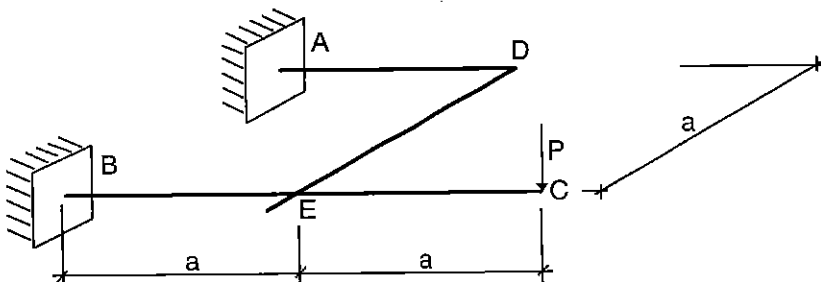
- 1º) Calcular el giro de la sección recta en el extremo libre D.
- 2º) Calcular el coeficiente de seguridad con que trabaja el conjunto utilizando el criterio de Tresca.



5.10. En la estructura de la figura todos los tramos son de sección circular y del mismo material, con $G = 0,4 E$. La viga BEC se apoya sobre la ADE en la sección E. Determinar el descenso del punto de aplicación de la carga P.

Datos: P, E, I, a

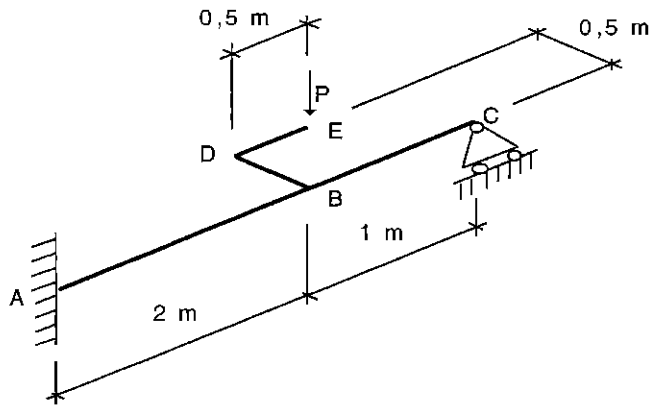
Se desprecia el efecto del esfuerzo cortante.



5.11. La figura representa la directriz plana y horizontal de una pieza que recibe una carga vertical P en el extremo libre E . Todos los tramos son de sección circular maciza de 10 cm de diámetro. A es un empotramiento perfecto y C un apoyo simple. El límite de fluencia del material es 240 MPa.

Para un coeficiente de seguridad de 1,2 determinar el máximo valor admisible de P utilizando el criterio de Tresca.

Se desprecia la influencia del esfuerzo cortante.

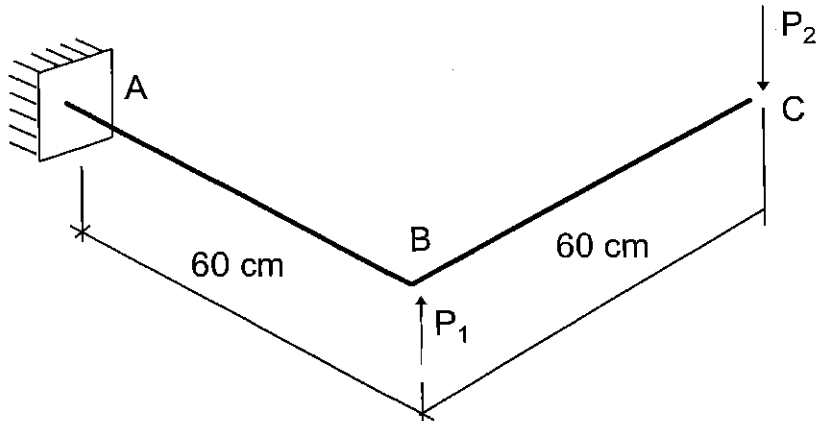


5.12. La figura representa la directriz plana y horizontal de una pieza que recibe en las secciones B y C dos fuerzas verticales P_1 y P_2 , respectivamente. Los dos tramos de la pieza son de sección circular maciza de 6 cm de diámetro y forman entre sí un ángulo recto. A es un empotramiento perfecto. El material es elástico lineal de constantes: $E = 210$ GPa, $G = 84$ GPa, $\sigma_f = 240$ MPa.

Determinar:

- 1º) La relación P_1/P_2 para que la sección C no experimente desplazamiento vertical.
- 2º) En el supuesto del apartado 1º) y para $P_2 = 1$ kN, coeficiente de seguridad con que trabaja el conjunto utilizando el criterio de Tresca.

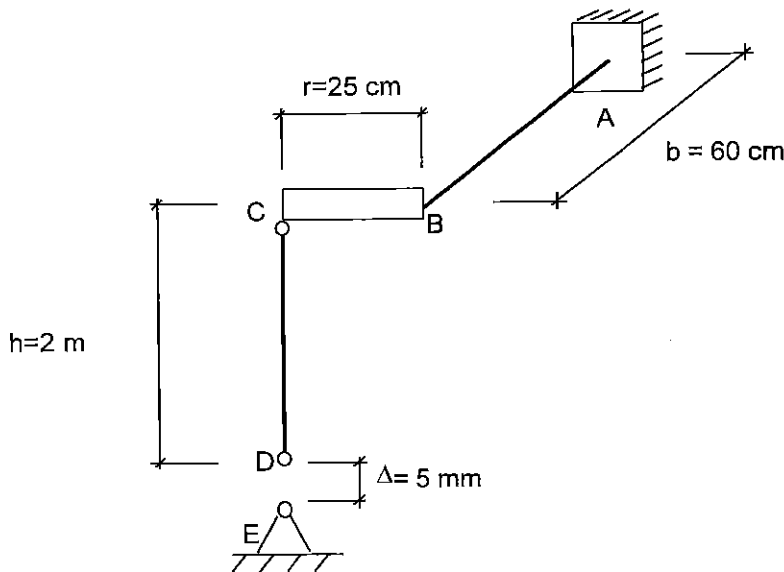
Se desprecia el efecto del esfuerzo cortante.



5.13. La barra AB, perpendicular al plano del dibujo y de 60 cm de longitud es de sección circular de 4 cm de diámetro. La barra BC de 25 cm de longitud es horizontal, está unida rígidamente a AB en B y es indeformable. En C se articula el tirante CD de longitud $h = 2$ m y sección $A = 5 \text{ mm}^2$ en dirección vertical. Asimismo se pretende articular el tirante en E, que por error de montaje queda separado una distancia $\Delta = 5 \text{ mm}$ por debajo de D, por lo que es necesario forzar este extremo para hacer coincidir los dos puntos.

Calcular la tensión en el tirante, el descenso de C y las tensiones principales en el extremo superior del diámetro vertical en la sección A.

Las barras AB y CD son del mismo material de características: $E = 200 \text{ GPa}$ y $G = 80 \text{ GPa}$. Se despreciarán los efectos del esfuerzo cortante.

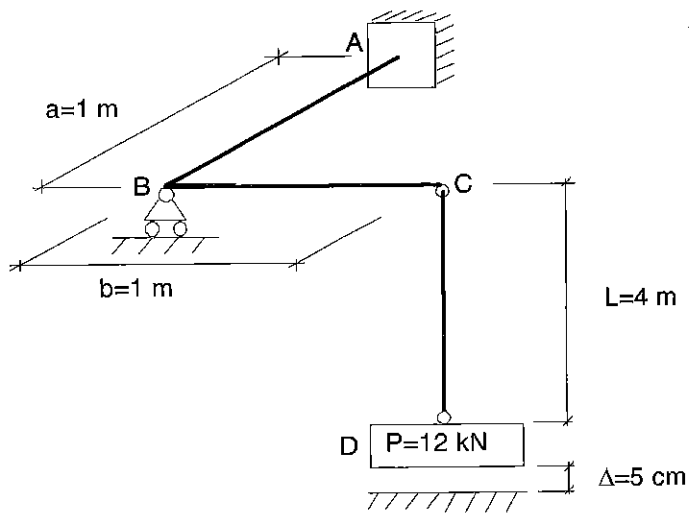


5.14. La barra acodada en ángulo recto ABC, de sección circular de 8 cm de diámetro, se encuentra en un plano horizontal, empotrada en A. El apoyo del punto B impide exclusivamente el desplazamiento vertical de dicho punto. Del extremo C y por medio de un tirante articulado de 4 m de longitud y 20 mm^2 de sección se suspende un peso de 12 kN. Calcular:

- 1º) Reacciones del suelo, del apoyo B y del empotramiento.
- 2º) Tensiones principales máximas en la sección de empotramiento.

Se desprecia el efecto del esfuerzo cortante.

Características de todos los elementos: $E = 100 \text{ GPa}$ $G = 40 \text{ GPa}$

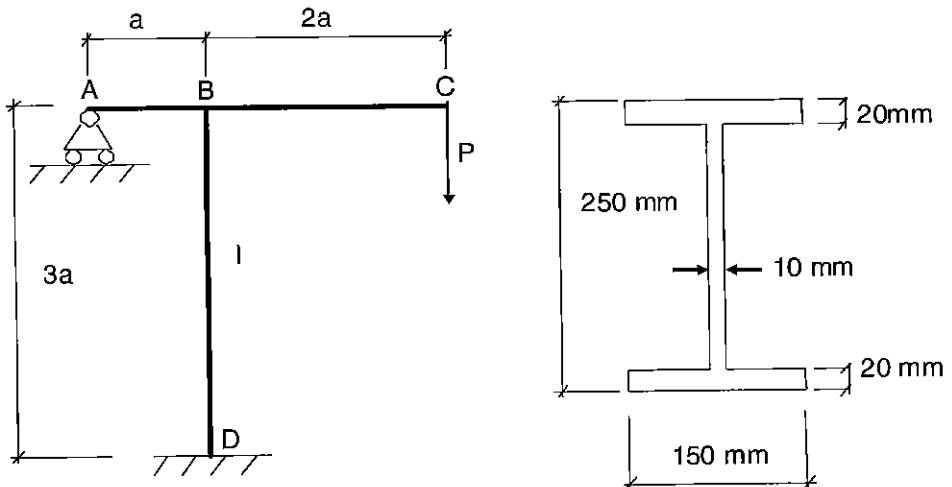


5.15. En la estructura de la figura, D es un empotramiento perfecto y A un apoyo articulado. El nudo B es rígido, y en el extremo libre C se aplica una carga P. Todas las barras son del mismo material (módulo de elasticidad E) e idéntica sección (momento de inercia a flexión I).

- 1º) Determinar el desplazamiento horizontal del nudo B.
- 2º) Dibujar los diagramas de esfuerzos normales, cortantes y momentos flectores de la estructura.
- 3º) Siendo la sección de la viga ABC la indicada en la figura, y supuestos unos valores $P=100 \text{ kN}$ y $a=40 \text{ cm}$, determinar el coeficiente de seguridad con el que trabaja dicha viga según el criterio de Tresca.

No se tendrán en cuenta los efectos debidos a los esfuerzos normales y cortantes en el cálculo de deformaciones.

Tensión de fluencia del material: $\sigma_f = 240 \text{ MPa}$.



TEMA 6

TEORÍA ELEMENTAL DEL CHOQUE

6.1. INTRODUCCIÓN

En los desarrollos realizados a lo largo de la asignatura, se ha supuesto siempre que las cargas exteriores eran estáticas, en el sentido de que se aplicaban gradualmente y las correspondientes deformaciones se originaban muy lentamente, sin aceleraciones sensibles. *A un proceso de carga y deformación de este tipo lo denominábamos cuasi-estático.*

En este último tema, se considerará brevemente el comportamiento de estructuras a las que se aplican cargas repentinas, cargas que varían apreciablemente durante intervalos de tiempo muy cortos. Esta clase de cargas recibe el nombre de **cargas de impacto o cargas de choque.**

Un análisis detallado de los efectos de estas cargas resultaría demasiado complejo para incluirlo en estos apuntes. En el material, se originan unas ondas de deformación, cuya velocidad de propagación influye en la magnitud y distribución de las tensiones y deformaciones resultantes. Por otra parte, estas ondas se van amortiguando hasta que el cuerpo queda en reposo. En definitiva, la resolución rigurosa del problema para una estructura real presentaría un elevado grado de complejidad.

Sin embargo, en el supuesto de que en el impacto la estructura mantiene un comportamiento elástico, es posible introducir algunas hipótesis simplificativas en base a las cuales pueden desarrollarse unos métodos de cálculo que permiten determinar una solución aproximada de una forma relativamente sencilla. Estos métodos son los que veremos en este tema y para su estudio resulta particularmente útil el concepto de energía elástica de deformación.

6.2. HIPÓTESIS BÁSICAS

Las hipótesis simplificativas con que abordaremos el cálculo de estructuras sometidas a cargas de impacto son las siguientes:

- 1) Pequeñas deformaciones.

- 2) La estructura mantiene un comportamiento elástico cuando se deforma como consecuencia del choque, y el diagrama tensión-deformación obtenido en un ensayo estático del material es válido también bajo una carga de impacto.
- 3) La energía cinética del cuerpo que impacta en la estructura se transmite íntegramente a la misma, transformándose en energía de deformación. Esto implica lo siguiente:
 - No hay disipación de energía durante el impacto.
 - La carga que choca no rebota (pues si lo hiciera significa que retiene parte de su energía).
- 4) La inercia de la estructura es despreciable comparada con la inercia del cuerpo que efectúa el impacto. Esto equivale a que las deformaciones se establecen instantáneamente en toda la extensión de la estructura, y que la masa de ésta no se tiene en consideración.

En la práctica, estos requisitos son poco reales ya que, por ejemplo, sólo una parte de la energía cinética del cuerpo que choca se transforma en energía de deformación. Por esta razón, las hipótesis introducidas conducen a resultados conservadores.

6.3. RESOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS SOMETIDAS A CARGAS DE IMPACTO

Basado en las hipótesis que se acaban de enunciar, es posible formular un método de cálculo de considerable sencillez, conocido con el nombre de **Método de la Carga Estática Equivalente**, que proporciona soluciones aproximadas a los problemas de impacto. Este método puede formularse en los siguientes términos: "La energía suministrada a la estructura por la carga de impacto es igual al trabajo que realizaría una cierta **carga estática equivalente P_e** que, aplicada en el punto de choque, diera lugar a la misma deformación en la estructura".

Recuérdese que el trabajo realizado por la carga estática P_e es igual a la energía de deformación de la estructura. De esta forma, *el problema se reduce a calcular, mediante ese balance de energías, la carga estática equivalente P_e que da lugar a un estado de deformación idéntico al que produce la carga de impacto*; y puesto que el comportamiento es elástico, con la consiguiente correspondencia biunívoca entre tensiones y deformaciones, no sólo serán idénticas las deformaciones para ambos tipos de cargas, impacto y estática P_e , sino también las tensiones. Si se conociera P_e ambas magnitudes, tensiones y deformaciones se podrían calcular con cualquiera de los diversos procedimientos que se han visto a lo largo de estas páginas y del estudio de la Resistencia de Materiales, en general, válidos para una aplicación estática de las cargas. De esta forma, el problema de analizar el comportamiento de la estructura bajo una carga de impacto se ha transformado en uno cuasi-estático.

Cabe formular el balance de energías como:

$$U_s = W_e \quad (6.1)$$

donde U_s es la energía suministrada por la carga de impacto, y W_e el trabajo realizado por la carga estática equivalente P_e al deformar la estructura. En la aplicación del método distinguiremos dos casos según la estructura, bajo la carga de impacto, tenga un comportamiento elástico lineal o simplemente elástico.

5.3.1. Estructura con comportamiento elástico lineal

En este caso, el trabajo W_e , que es igual a la energía de deformación de la estructura, puede calcularse como:

$$W_e = \frac{1}{2} P_e \cdot \delta \quad (6.2)$$

siendo δ el desplazamiento del punto de aplicación de P_e . Por tanto, la ecuación (6.1) queda en la forma:

$$U_s = \frac{1}{2} P_e \cdot \delta \quad (6.3)$$

es decir, el equilibrio de energías permite formular una ecuación con dos incógnitas, P_e y δ . Es necesaria una ecuación adicional que las relacione. Esta ecuación podría obtenerse mediante aplicación de cualquiera de los procedimientos conocidos: teoremas de Mohr, Castigliano, etc.

Puesto que el trabajo realizado por P_e es igual a la energía de deformación de la estructura, cabe también calcular W_e en la forma [cfr. (5.28)]:

$$W_e = U_e = \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} dx + \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dx + \int_L \frac{M_x^2}{2GJ} dx \quad (6.4)$$

En este caso, la relación adicional entre P_e y δ se obtendría sin más que aplicar el teorema de Castigliano:

$$\delta = \frac{\partial U_e}{\partial P_e} \quad (6.5)$$

6.3.2. Estructura con comportamiento elástico no lineal

Cuando la estructura en conjunto no sigue un comportamiento elástico lineal durante el proceso de impacto (aunque pudiera ocurrir que cada uno de sus componentes sí lo siguiera), entonces no se pueden aplicar las expresiones (6.3) y (6.4). En su lugar, habrá que calcular el trabajo de la carga estática equivalente en la forma general:

$$W_e = \int P_e \cdot d\delta \quad (6.6)$$

Esto podría hacerse, por ejemplo, mediante integración de la curva P_e - δ supuesto conocida. Habrá que estudiar también la forma de establecer una relación adicional entre ambas variables, P_e y δ .

En el epígrafe siguiente se considera la aplicación del método de la carga estática equivalente a algunos casos de cargas de choque en los que la estructura que recibe el impacto tiene un comportamiento tanto elástico lineal como simplemente lineal.

6.4. APLICACIONES

6.4.1. Tracción-compresión producida por impacto

Consideremos una barra empotrada en el suelo de longitud L y sección constante A , material de módulo de elasticidad E , que recibe el impacto en su extremo libre y en la dirección de su eje de un peso Q , inicialmente en reposo, que cae desde una altura h , tal como muestra la fig.6.1. Suponemos comportamiento elástico lineal.

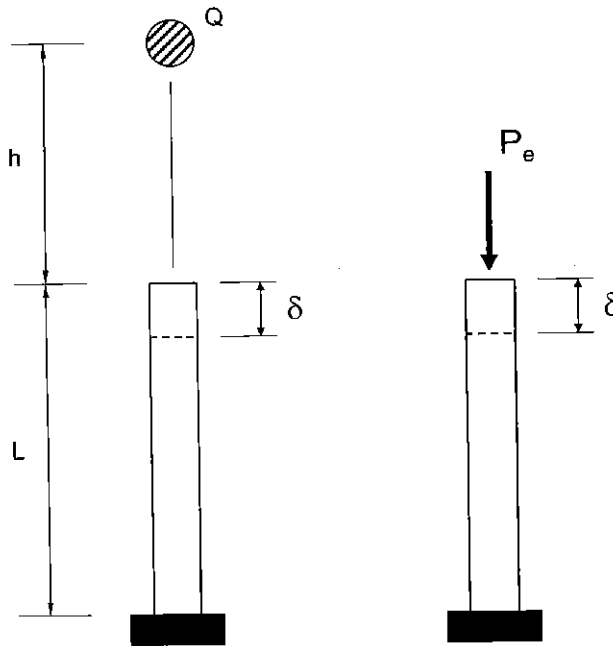


Figura 6.1. Compresión producida por choque

Después del contacto inicial, el peso Q continuará descendiendo, dando lugar a un acortamiento de la barra. Debido a la fuerza resistente presentada por ésta, el peso se irá desacelerando hasta que su velocidad se anule, momento en que el acortamiento δ de la barra y la tensión de compresión correspondiente σ_{xx} alcanzarán su valor máximo. Pero el fenómeno no termina aquí: inmediatamente después comienzan unas vibraciones longitudinales de la barra que poco a poco se van amortiguando hasta que finalmente el peso Q queda en reposo. La teoría elemental que estamos estudiando

prescinde de este fenómeno vibratorio: su objetivo es calcular el acortamiento máximo de la barra y el consiguiente estado tensional.

La energía suministrada a la estructura por el peso Q será:

$$U_s = Q \cdot (h + \delta) \quad (6.7)$$

y el trabajo realizado por la carga estática equivalente P_e que produce la misma deformación máxima δ es:

$$W_e = \frac{1}{2} P_e \cdot \delta = U_e \quad (6.8)$$

Igualando (6.7) y (6.8) resulta:

$$Q \cdot (h + \delta) = \frac{1}{2} P_e \cdot \delta \quad (6.9)$$

ecuación que contiene dos incógnitas, P_e y δ . Es necesaria una ecuación adicional, obtenida por cualquiera de los procedimientos conocidos, que establezca una relación entre ambas variables. Y así, puesto que δ representa el efecto estático de la carga de compresión P_e :

$$\delta = \frac{P_e L}{EA} \quad (6.10)$$

Se obtiene, por consiguiente, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se puede resolver, bien en P_e o bien en δ . En lo que sigue resolveremos el sistema en δ , eliminando para ello P_e . Despejando esta última de (6.10) y sustituyendo en (6.9), esta ecuación se transforma en:

$$Q(h + \delta) = \frac{1}{2} \frac{EA\delta^2}{L} \quad (6.11)$$

Introduciendo la notación:

$$\delta_{ST} = \frac{QL}{EA} \quad (6.12)$$

para designar la deformación de la barra debida a una aplicación estática de la carga Q , la ecuación (6.11) se transforma en:

$$2 \frac{QL}{EA} (h + \delta) = \delta^2 \quad \Rightarrow \quad 2\delta_{ST}(h + \delta) = \delta^2 \quad (6.13)$$

que resuelta en δ permite obtener:

$$\delta = \delta_{ST} + \sqrt{\delta_{ST}^2 + 2h\delta_{ST}} \quad (6.14)$$

Si la altura h se considera muy grande comparada con δ_{ST} , se obtiene la expresión aproximada:

$$\delta \cong \sqrt{2h\delta_{ST}} = \sqrt{2h \frac{QL}{EA}} \quad (6.15)$$

En este caso, teniendo en cuenta (6.10), la carga estática equivalente sería:

$$P_e = \frac{EA\delta}{L} = \sqrt{2h \frac{QE}{L}} \quad (6.16)$$

siendo la tensión máxima de compresión:

$$\sigma_{xx\max} = \frac{P_e}{A} = \sqrt{2h \frac{QE}{AL}} \quad (6.17)$$

De (6.17) se deduce que un aumento de la longitud L o una disminución del módulo de elasticidad E reducen la tensión originada en la barra. Este comportamiento es completamente diferente de la compresión estática, donde la tensión es independiente de la longitud y del módulo de elasticidad.

6.4.2. Flexión producida por impacto

El estudio de la flexión producida por el impacto de una carga lo realizaremos en una viga simplemente apoyada de longitud L y rigidez a flexión EI , que recibe en su sección central el impacto vertical de un peso Q que cae desde una altura h (fig.6.2). De nuevo consideraremos que en el impacto la viga tiene un comportamiento elástico lineal y aplicaremos el método de la carga estática equivalente.

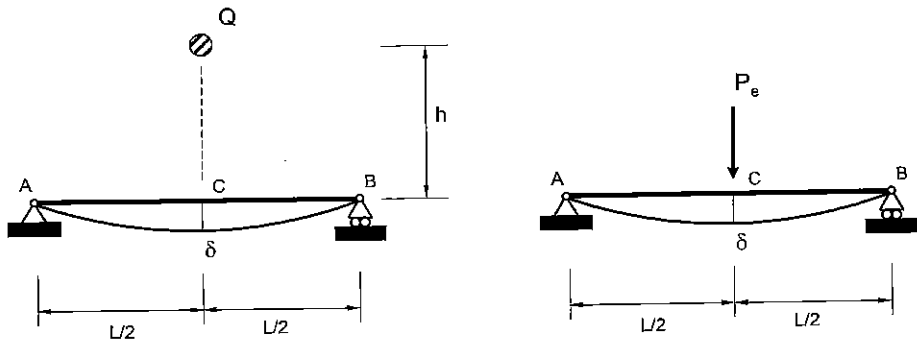


Figura 6.2. Flexión producida por choque

Tras el impacto se produce una flecha máxima δ en la sección central C , seguida de unas vibraciones transversales hasta que la viga queda en reposo. De nuevo se prescinde del fenómeno vibratorio, siendo el objetivo el cálculo de la deformación máxima y el estado tensional correspondiente.

El trabajo realizado por la carga estática equivalente P_e vendrá dado, como en el ejemplo anterior, por la expresión (6.8). Será igualmente válida la expresión (6.9) resultado de igualar este trabajo con la energía suministrada por la carga de impacto. De nuevo es preciso obtener una ecuación adicional que relacione P_e y δ .

Por cualquiera de los métodos conocidos (teoremas de Mohr, Castigliano,...), se obtiene la relación:

$$\delta = \frac{P_e L^3}{48EI} \quad (6.18)$$

que junto con (6.9) forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que habrá que resolver eliminando una cualquiera de las dos. De nuevo vamos a resolver en δ . Para ello, despejando P_e de (6.18) y sustituyendo en (6.9) se obtiene:

$$Q(h + \delta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{48EI\delta^2}{L^3} \quad (6.19)$$

Introduciendo la notación:

$$\delta_{ST} = \frac{QL^3}{48EI} \quad (6.20)$$

para designar la flecha producida por la aplicación estática de la carga Q , y siguiendo en todo un tratamiento similar al del caso anterior, se obtiene finalmente para la flecha:

$$\delta = \delta_{ST} + \sqrt{\delta_{ST}^2 + 2h\delta_{ST}} \quad (6.21)$$

expresión idéntica a (6.14) obtenida para el caso de impacto axial. Observamos que la flecha δ producida por el impacto es siempre mayor que la flecha estática δ_{ST} .

Cuando la altura h es suficientemente grande comparada con la deformación de la viga y, por consiguiente, con δ_{ST} , (6.21) se puede aproximar por:

$$\delta \cong \sqrt{2h\delta_{ST}} = \sqrt{2h \frac{QL^3}{48EI}} \quad (6.22)$$

y entonces, la carga estática equivalente vendrá dada por [cfr. (6.18)]:

$$P_e = \frac{48EI\delta}{L^3} = \sqrt{\frac{96QhEI}{L^3}} \quad (6.23)$$

La tensión normal máxima aparecerá en la sección central C de la viga, sección en la que el momento flector es máximo. Ambos valores serán:

$$M_C = \frac{P_e \cdot L}{4}; \quad \sigma_{xx\text{máx}} = \frac{M_C}{W_z} \quad (6.24)$$

donde W_z es el módulo resistente a flexión de la viga.

6.4.3. Estructura con comportamiento elástico no lineal

Consideremos finalmente el caso de una estructura que aún manteniendo un comportamiento elástico al recibir una carga de impacto, su rigidez varía durante el proceso de deformación.

Sea la viga empotrada de la fig.6.3a, de longitud L y rigidez a flexión EI, sometida en su extremo B al impacto de un peso Q, que cae desde una altura h. Por debajo de la sección B existe un muelle de constante elástica k, separado inicialmente una distancia pequeña e de dicha sección.

Vamos a denominar δ al descenso que sufre el extremo B de la viga por efecto del impacto, descenso que supondremos mayor que e. Pues bien, aún suponiendo que los dos elementos que componen la estructura, viga y muelle, mantienen un comportamiento elástico lineal durante el proceso de deformación, la estructura en conjunto no se comporta de forma lineal. En efecto, en tanto el desplazamiento de B no supera el valor de e la rigidez que presenta la estructura es la de la viga, puesto que sólo ella trabaja. Pero cuando ese desplazamiento varía desde e hasta el valor final δ trabajan conjuntamente viga y muelle, con lo que la rigidez de la estructura cambia. Es lo que se representa, respectivamente, mediante los tramos OM y MN de la curva $P_e-\delta$ de la fig.6.3b.

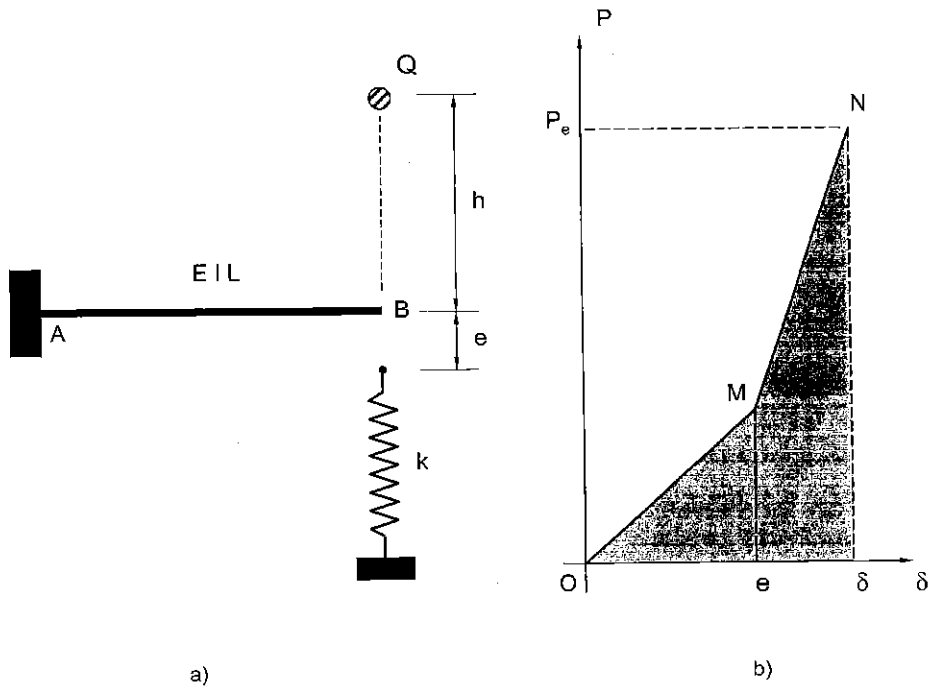


Figura 6.3. Impacto elástico no lineal; a) Estructura, b) Diagrama $P_e-\delta$

Puesto que el comportamiento de la estructura es elástico, es aplicable el método de la carga estática equivalente, siendo la energía suministrada en el impacto la expresada en (6.7). Sin embargo, al no ser lineal la relación $P_e-\delta$, como claramente se evidencia en la fig.6.3b, no es aplicable la expresión (6.2) para el cálculo del trabajo W_e de la carga estática equivalente P_e , puesto que esta expresión únicamente es válida para el caso de comportamiento elástico lineal. Habrá que calcular W_e o, lo que es lo mismo, evaluar el área sombreado de la figura, que no es sino la energía de deformación de la estructura, mediante algún otro procedimiento.

Vamos a calcular la energía de deformación de la estructura como la suma de las correspondientes energías de deformación de la viga y del muelle, que denotaremos respectivamente por U_v y U_m . Es decir:

$$W_e = U_e = U_v + U_m \tag{6.25}$$

Energía de deformación de la viga U_v

Al tener la viga un comportamiento elástico lineal y ser conservativo el proceso carga-deformación, la energía elástica de deformación sólo dependerá de los valores iniciales y finales, siendo por tanto:

$$U_v = \frac{1}{2} F \cdot \delta \quad (6.26)$$

donde F el valor de la fuerza aplicada en B en la dirección de δ correspondiente al valor máximo de la deformación. En esa situación, al ser $\delta > e$ el muelle estará trabajando bajo la acción de una fuerza R y con una deformación δ_m , siendo:

$$F = P_e - R \quad (6.27)$$

$$\delta = e + \delta_m \quad (6.28)$$

Mediante la aplicación de teoremas de Mohr, Castigliano, etc. puede calcularse la relación entre F y δ , resultando la expresión ya conocida:

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI} \quad (6.29)$$

Despejando F y sustituyendo en (6.26) se obtiene para U_v :

$$U_v = \frac{3EI\delta^2}{2L^3} \quad (6.30)$$

Energía de deformación del muelle U_m

El muelle también tiene un comportamiento elástico lineal, luego el valor de U_m será:

$$U_m = \frac{1}{2} R \cdot \delta_m \quad (6.31)$$

donde fuerza y deformación están relacionados mediante la rigidez del muelle mediante:

$$\delta_m = \frac{R}{k} \quad (6.32)$$

Despejando R en esta expresión y δ_m de la expresión (6.28), y sustituyendo ambas en (6.31) se obtiene:

$$U_m = \frac{1}{2}k(\delta - e)^2 \quad (6.33)$$

De las expresiones (6.25), (6.30) y (6.33) se concluye que la energía elástica de deformación de la estructura o, lo que es lo mismo, el trabajo realizado por la carga estática equivalente viene dado, en función de δ , por:

$$W_e = \frac{3EI\delta^2}{3L^3} + \frac{k(\delta - e)^2}{2} \quad (6.34)$$

Finalmente, igualando esta expresión a la (6.7) de la energía suministrada por la carga de impacto, resulta:

$$Q(h + \delta) = \frac{3EI\delta^2}{3L^3} + \frac{k(\delta - e)^2}{2} \quad (6.35)$$

ecuación que permite obtener el valor de δ con lo que el problema queda resuelto, ya que a partir de este valor se pueden obtener las restantes variables que intervienen en el problema: δ_m , R , F , los diagramas de esfuerzos en la viga, tensiones máximas, etc.

TEMA 7

DEFORMACIONES PLÁSTICAS EN FLEXIÓN

7.1. INTRODUCCIÓN

El análisis de flexión realizado hasta ahora se ha basado en el comportamiento elástico de los materiales, sin permitir en ningún caso sobrepasar su límite elástico o tensión de fluencia.

No es extraño que en algún momento de la vida de la estructura, la tensión máxima existente en la misma supere la tensión admisible del material (por sobrecargas no previstas, mal uso estructural, asentamientos, etc.). En particular, si la estructura se ha diseñado con una tensión de trabajo muy próxima a la de fluencia (coeficiente de seguridad cercano a la unidad), la probabilidad de que se produzca esta circunstancia es mayor.

Sin embargo, este hecho no supone, como demuestra la experiencia, que se origine la rotura o agotamiento de la estructura. Por una parte, la deformación de fluencia es muy inferior a la deformación de rotura en la mayoría de los materiales (sobre todo, en los metálicos). Por otra, si la estructura es hiperestática, puede absorber el fallo de uno o varios elementos, gracias a sus ligaduras superfluas, sin llegar al colapso final. Además, como se verá más adelante, una sección se agota o plastifica cuando se alcanza la tensión de fluencia en todos sus puntos, y no sólo en parte de ella.

Por estos motivos, podemos concluir que el diseño elástico efectuado hasta ahora en flexión resulta bastante conservador.

7.2. HIPÓTESIS BÁSICAS

En el estudio de flexión elastoplástica, consideraremos las siguientes hipótesis básicas:

1) *Las deformaciones de la estructura son pequeñas.* En consecuencia, podemos plantear las ecuaciones de equilibrio sobre la configuración no deformada. Podría pensarse que al admitir deformaciones en el rango plástico, éstas dejarían de ser pequeñas. Pero no es así, ya que siempre habrá algún elemento que desarrolle deformaciones elásticas, antes del colapso de la estructura. Este elemento, por la compatibilidad de deformaciones, impondrá el orden de magnitud de la deformación en la estructura.

2) Las secciones planas permanecen planas tras la deformación (*hipótesis de Navier*). Es decir, mientras no haya agotamiento en una sección, ésta se deforma siguiendo la relación lineal:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (7.1)$$

donde ρ es el radio de curvatura de la elástica en esa sección.

3) El material se supone con un *comportamiento elastoplástico perfecto* y con una tensión de fluencia a tracción igual que a compresión (*equirresistente*).

7.3. FLEXIÓN PURA ELASTOPLÁSTICA

7.3.1. Estados tensionales sucesivos para secciones simétricas

Sea una sección simétrica respecto a los ejes y y z , sometida a un momento de flexión M_z que aumenta paulatinamente desde cero. Estudiemos cómo varía la distribución de tensiones en la sección con el valor creciente de M_z .

Podemos distinguir dos fases en el proceso:

1) Hasta que entra en fluencia el primer punto de la sección. En esta fase, toda la sección se comporta elásticamente. Por tanto, la distribución de tensiones es lineal (fig.7.1) y obedece a la expresión:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (7.2)$$

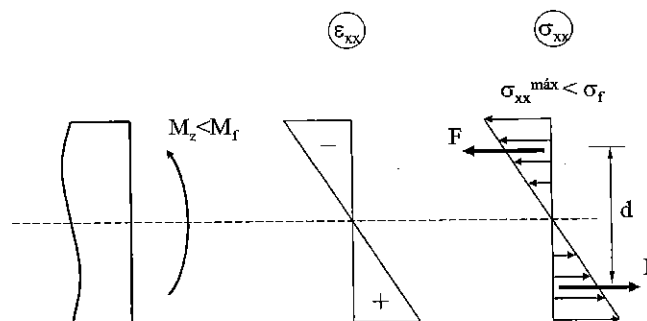


Figura 7.1. Rango elástico

La máxima tensión será inferior a la de fluencia. En el caso límite:

$$\sigma_{xx \max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{M_z}{W_z} = \sigma_f \quad (7.3)$$

$$\varepsilon_{xx \max} = \varepsilon_f$$

Al momento flector M_f correspondiente a ese instante se le denomina **momento de fluencia**, y su valor puede obtenerse de (7.3):

$$M_f = \sigma_f \cdot W_z \quad (7.4)$$

Para una sección rectangular de altura h y anchura b , resulta:

$$M_f = \sigma_f \frac{b \cdot h^2}{6} \quad (7.5)$$

Otro procedimiento para calcular el valor del momento de fluencia M_f es establecer la equivalencia estática entre el momento aplicado y la distribución de tensiones a que da lugar; siempre se verificará: $M_z = F \cdot d$ (cfr. fig. 7.1).

2) Hasta que toda la sección alcanza la fluencia. En esta segunda fase, el momento flector aumenta por encima de M_f . Esto quiere decir que más de una fibra habrá alcanzado la tensión de fluencia.

Como suponemos que el comportamiento plástico es perfecto, esas fibras podrán desarrollar deformaciones adicionales (plásticas) manteniéndose la misma tensión (de fluencia).

Las tensiones máximas elásticas ocurren siempre en las fibras más alejadas del eje neutro. Por tanto, la sección irá alcanzando el límite de fluencia comenzando por los extremos, a ambos lados del eje neutro. Además, como la sección es simétrica, el eje neutro mantendrá su posición en el centro de gravedad de la sección ($y=0$).

De esta forma, si la sección está parcialmente plastificada, las distribuciones de tensiones y deformaciones serán las de la fig.7.2.

Obsérvese que las deformaciones siguen la distribución lineal según la hipótesis de las secciones planas de Navier.

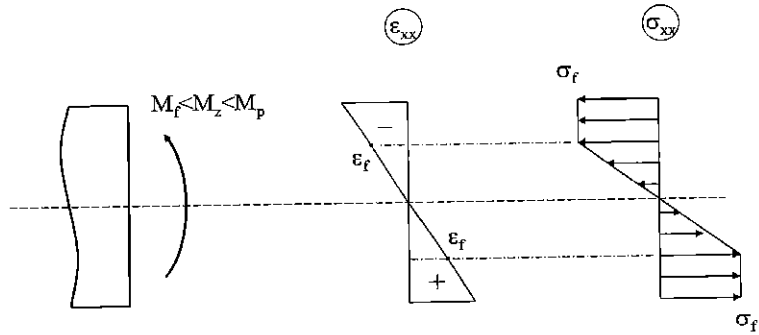


Figura 7.2. Rango elasto-plástico

Esta segunda fase se concluye cuando toda la sección alcanza su límite elástico (fig.7.3). El momento flector M_p asociado a ese instante se denomina **momento plástico o momento último** y se calcula en la forma:

$$M_p = F \cdot d = \sigma_f \cdot \frac{A}{2} \cdot d \quad (7.6)$$

siendo A el área de la sección. Para una sección rectangular, resulta:

$$M_p = \sigma_f \cdot \frac{b \cdot h^2}{4} \quad (7.7)$$

En la fig.7.3, se representan los diagramas de tensiones y deformaciones al llegar a ese instante.

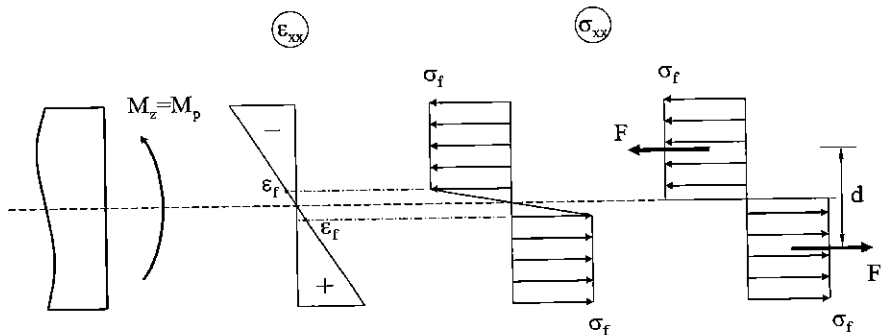


Figura 7.3. Agotamiento de la sección

Realmente, el agotamiento se produce poco antes de que toda la sección alcance la tensión de fluencia, ya que en las proximidades del eje neutro siempre existe un

núcleo elástico, por pequeño que sea. El límite de agotamiento lo impone la deformación máxima admisible. Suele considerarse para ésta un valor de 10 a 15 veces la deformación de fluencia. Para ese valor, el núcleo elástico resultante es muy pequeño, prácticamente despreciable. Por eso, en los cálculos no se tiene en cuenta.

7.3.2. Análisis para secciones asimétricas

La característica diferenciadora de la flexión elastoplástica en secciones asimétricas (aunque simétricas respecto al eje y) respecto a la vista para las simétricas estriba en la variación de la posición del eje neutro.

Mientras la viga trabaja en régimen elástico, el eje neutro pasará por el centro de gravedad de la sección. Sin embargo, en la distribución de tensiones elastoplástica y con carga última, el eje neutro queda desplazado. Veremos que su posición en carga última se determina dividiendo la sección en dos partes de igual área.

En efecto, sea la sección de la fig.7.4, sometida a su momento último. Si se iguala la fuerza resultante de las tensiones compresivas y la de las fuerzas tractivas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_f \cdot A_1 &= \sigma_f \cdot A_2 \\ A_1 + A_2 = A &\Rightarrow A_1 = A_2 = A/2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

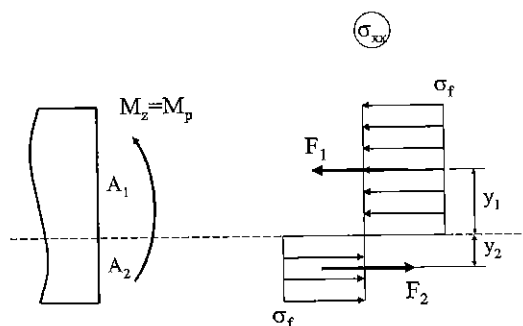


Figura 7.4. Agotamiento de una sección asimétrica

El momento plástico puede entonces expresarse:

$$M_p = F_1 y_1 + F_2 y_2 = \sigma_f A_1 y_1 + \sigma_f A_2 y_2 = \frac{\sigma_f A}{2} (y_1 + y_2) \quad (7.9)$$

Por tanto, para determinar el momento plástico o último de una sección asimétrica, bastará dividir la sección en dos partes de igual área, localizar el centro de gravedad de cada una y aplicar la expresión (7.9).

En un estado intermedio entre el comienzo de la fluencia y la carga última, la posición del eje neutro estará comprendida entre la correspondiente al rango elástico (centro de gravedad G de la sección) y la de agotamiento. Así, para la sección en T invertida de la fig.7.5, el eje neutro variará en el rango elastoplástico entre los puntos G y M (este último es el punto en el que la sección queda dividida en dos mitades).

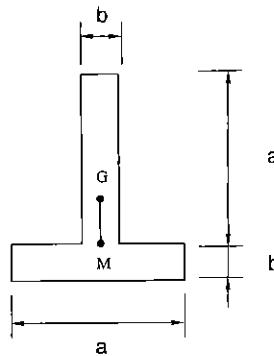


Figura 7.5. Variación de la posición del eje neutro en una sección en T invertida

7.3.3. Factor de forma

Se denomina **factor de forma f** al cociente entre el momento último y el momento de fluencia:

$$f = \frac{M_p}{M_f} > 1 \quad (7.10)$$

Puede comprobarse que este factor no depende de la tensión de fluencia del material sino sólo de la forma geométrica de la sección. Para una sección rectangular $f=1,5$; para una circular $f=1,70$; para una sección en doble T, según las dimensiones, f oscila entre 1,15 y 1,20.

El factor de forma indica el intervalo que separa la situación límite elástica de la situación de agotamiento. Contrariamente a lo que pueda parecer, interesa un factor de forma pequeño, porque entonces la zona de trabajo elástico, que es la habitual en estructuras, es más amplia (para la misma carga última).

7.3.4. Relación entre momento y curvatura

A continuación se estudiará la relación entre el momento flector M_z aplicado en una sección y la curvatura de la misma, pues del estudio de esta relación se deducirá una interpretación física del mecanismo de agotamiento de la sección, es decir, de cómo se comporta cuando el momento alcanza el máximo valor M_p que la sección es capaz de resistir. Para ello se distinguirán dos fases, tal como ya se ha hecho en otras ocasiones: en la primera se supone un comportamiento totalmente elástico de la sección, para posteriormente considerar el caso en que parte o toda la sección ha entrado en fluencia plástica. Para facilitar la comprensión de lo que se expone, se considerará una sección rectangular $b \times h$, sin que ello suponga pérdida de generalidad.

Pero antes volvamos al proceso de plastificación descrito en el epígrafe 7.3.1, y analicemos la situación cuando en la sección considerada el momento flector M_z aplicado en ella es mayor que el momento de fluencia M_f , pero menor que el momento plástico M_p . Ya sabemos que entonces las zonas más externas estarán plastificadas, y en ellas la tensión será uniforme y de valor σ_f , mientras que la zona interna, que llamamos núcleo elástico, estará sometida a una distribución lineal de tensiones. La situación se representa en la fig.7.6, donde e es la distancia del eje neutro a cada borde del núcleo elástico.

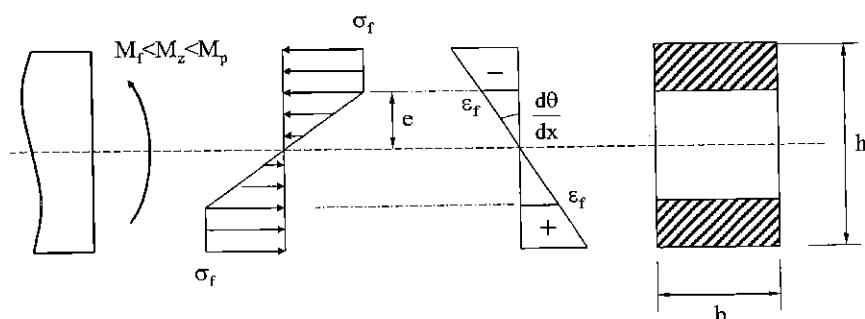


Figura 7.6. Tensiones elastoplásticas en sección rectangular

Para hallar la relación entre el momento aplicado M_z y la profundidad del núcleo elástico e , bastará establecer la equivalencia estática entre dicho momento y la distribución de tensiones que origina. Por consiguiente:

$$M_z = \sigma_f \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - e\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + e\right) + \frac{1}{2} \cdot \sigma_f \cdot e \cdot b \cdot \frac{4}{3} \cdot e = \frac{\sigma_f \cdot b \cdot h^2}{6} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2 \cdot e^2}{h^2}\right) \quad (7.11)$$

o bien, teniendo en cuenta la expresión (7.5) del momento de fluencia para una sección rectangular:

$$M_z = M_f \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2 \cdot e^2}{h^2}\right) \quad (7.12)$$

Esta expresión es conforme con lo que ya sabemos: cuando $M_z = M_f$ es $e = h/2$, es decir, sólo las fibras más extremas han alcanzado la tensión de fluencia, siendo lineal la distribución de tensiones en la sección. Y cuando $M_z = M_p$ entonces $e = 0$, ya que el cociente de momentos M_p / M_f es precisamente el factor de forma f y éste vale 1,5 para las secciones rectangulares.

Retornando al objetivo de este epígrafe, obtener la relación entre momento flector y curvatura, sabemos que en comportamiento elástico ambos están relacionados por la expresión:

$$\kappa = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \quad (7.13)$$

que, al iniciarse la fluencia, es decir, en el último instante en que la distribución de tensiones es lineal, podrá formularse como:

$$\kappa_f = \frac{M_f}{E \cdot I_z} \quad (7.14)$$

De ambas ecuaciones puede deducirse que en tanto en cuanto el momento aplicado no supere el momento de fluencia de la sección, la relación entre momento y curvatura es lineal. Es habitual hacer una representación gráfica adimensional de esta relación, extendiéndola a las distintas fases del proceso de carga, dividiendo momento y curvatura por los valores que ambos adquieren en el límite del comportamiento elástico. En el rango elástico, hasta ahora considerado, ya se ha dicho que esa relación es lineal, obtenida a partir de (7.13) y (7.14):

$$\frac{M_z}{M_f} = \frac{\kappa}{\kappa_f} \quad (7.15)$$

Veamos cómo es esa relación cuando la sección está parcialmente plastificada. Para este caso, el valor de la curvatura de la sección viene dado por:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\varepsilon_{xx}}{y} = \frac{\varepsilon_f}{e} \quad (7.16a)$$

Pero cuando: $e = h/2 \Rightarrow M_z = M_f$, y de la ecuación anterior:

$$\kappa_f = \frac{2\varepsilon_f}{h} \Rightarrow \varepsilon_f = \frac{h \cdot \kappa_f}{2} \quad (7.16b)$$

valor que sustituido en (7.16a) da lugar a:

$$\kappa = \frac{h \cdot \kappa_f}{2 \cdot e} \Rightarrow e = \frac{h \cdot \kappa_f}{2 \cdot \kappa} \quad (7.16c)$$

Finalmente, llevando este valor a (7.12), es posible expresar M_z en la forma:

$$M_z = M_f \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2 \cdot e^2}{h^2} \right) \Rightarrow \frac{M_z}{M_f} = 1,5 - 0,5 \cdot \left(\frac{\kappa_f}{\kappa} \right)^2 \quad (7.17)$$

que es la ecuación de la curva que se pretendía determinar. Teniendo en cuenta esta expresión y la (7.15), la representación gráfica momento-curvatura a lo largo de todo el proceso de carga es la de la fig.7.7.

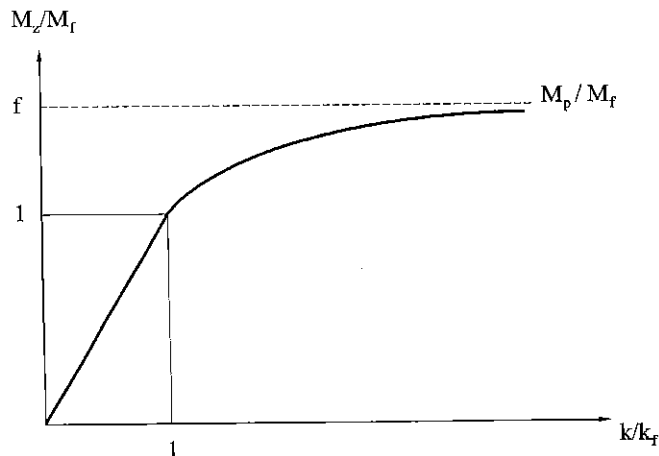


Figura 7.7. Relación adimensional momento-curvatura

Como puede observarse, la curva se compone de un tramo recto, desde el origen hasta $M_z / M_f = 1$, que corresponde al comportamiento elástico del material, seguido de una porción curva representativa del intervalo en que el material es parcialmente elástico y parcialmente plástico y que tiende asintóticamente al valor $M_p / M_f = f$. Este hecho admite una interpretación muy interesante: a medida que la curvatura κ crece, el momento M_z tiende al valor límite $1,5 \cdot M_f$ (obsérvese que 1,5 era precisamente el factor de forma f de la sección). Para este valor límite $M_z = 1,5 \cdot M_f$, la curvatura κ se hace infinita y de la ecuación (7.16a) se deduce que $e = 0$. Es decir, el núcleo elástico desaparece: toda la sección ha plastificado y el correspondiente momento flector es el momento plástico M_p .

Por consiguiente, cuando se alcanza el momento plástico paralelamente se desarrolla una curvatura infinita, lo que implica [cfr. (7.16a)] que se produce un cambio finito de pendiente en una longitud infinitesimal de viga (o si se quiere expresarlo de otra forma: se producen rotaciones ilimitadas), formándose en la sección donde se alcanza M_p un mecanismo muy parecido a una rótula: es la **rótula plástica**, concepto que juega un papel fundamental en el método plástico de cálculo.

En la fig.7.8 se muestran los diagramas momento-curvatura para diversos tipos de secciones. Como puede observarse, la situación de plastificación total y formación de la consiguiente rótula plástica se alcanza tanto más rápidamente cuanto menor es el factor de forma f y el fenómeno es muy acusado en las vigas de sección en doble T.

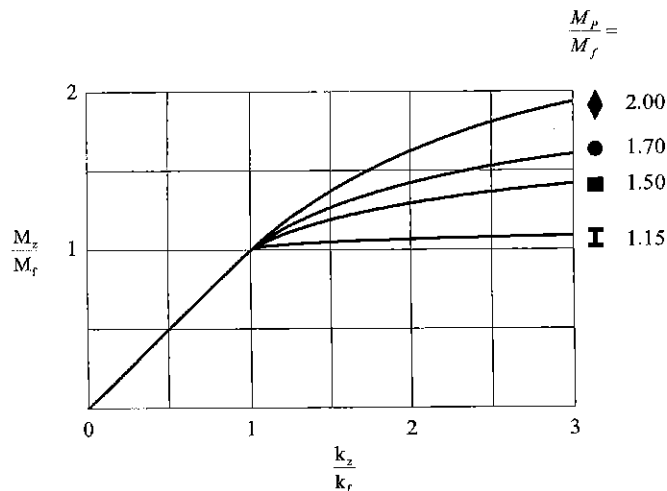


Figura 7.8 Diagramas momento-curvatura para diversas secciones

Esto último justifica la aplicación del diseño plástico a estos perfiles laminados, pues las vigas en doble T llegan a la situación de rotación ilimitada casi repentinamente tras haber llegado a la fluencia las fibras extremas, lo que permite idealizar la curva momento-curvatura suponiendo que la sección se comportará elásticamente justo hasta el momento en que se plastifica totalmente.

En cualquier caso, sea cual sea el tipo de sección, el diagrama consiste en una recta que representa un comportamiento linealmente elástico, seguida por una línea curva que representa el rango de valores del momento para los cuales el comportamiento de la sección es parcialmente elástico y parcialmente plástico por haberse superado el momento de fluencia. En estas circunstancias, una deformación adicional de la zona central elástica requiere un incremento del momento aplicado; es decir, la deformación está controlada por el núcleo elástico de la sección, comportamiento que suele conocerse como *flujo plástico controlado*. Seguidamente, conforme la curva tiende a su asíntota horizontal y el núcleo elástico se reduce, la sección se acerca paulatinamente al *flujo plástico incontrolado*, situación que correspondería a la plastificación total de la sección y en la que la deformación seguiría aumentando sin que aumentase el momento flector por encima del momento plástico M_p . Llegado ese momento es cuando se dice que en la sección se ha generado una *rótula plástica*.

7.3.5. Tensiones residuales originadas por momentos sucesivos y opuestos

Supongamos una viga de sección simétrica, sometida a un momento de flexión pura M_1 , tal que $M_f < M_1 < M_p$, es decir, que dé lugar a una plastificación parcial de la sección, tal como se indica en la fig.7.9a.

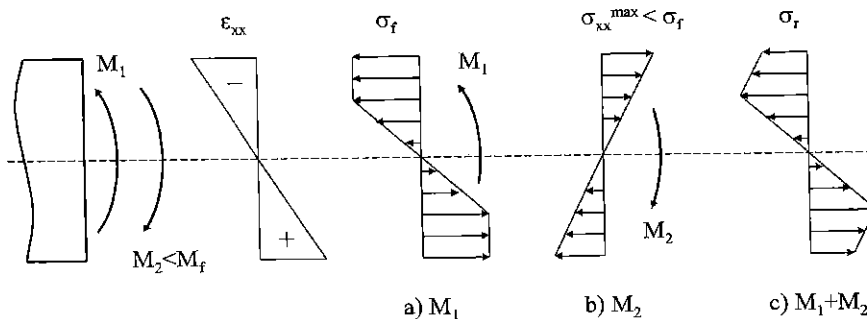


Figura 7.9. Carga $M_f < M_1 < M_p$ y descarga $M_2 < M_f$

Una vez alcanzado este estado, procedemos a aplicar un momento flector de signo opuesto (descarga) de valor $M_2 < M_f$ (fig.7.9b). Como la descarga es elástica,

proporciona un perfil lineal. Sumando las dos distribuciones, obtenemos el diagrama de la fig.7.9c. Obsérvese que como la tensión máxima en la descarga es inferior a σ_r , el signo de las tensiones en el diagrama final coincide con el de carga M_f .

Si el momento flector de descarga fuera igual a M_f , la distribución final de tensiones sería la de la fig.7.10.

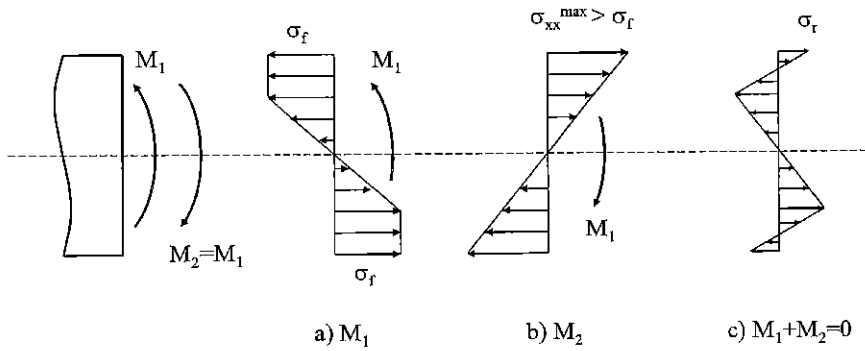


Figura 7.10. Carga y descarga $M_f < M_1 < M_p$

Evidentemente, en este caso el momento resultante debe ser nulo. Además, como el momento de descarga elástica supera M_f , en las fibras de los extremos el signo de la tensión está determinado por la distribución de descarga. En ésta el máximo supera σ_f (cfr. fig.7.10).

Supongamos finalmente que la descarga es $M_2 = 2M_f$. La distribución de tensiones resultante se representa en la fig.7.11.

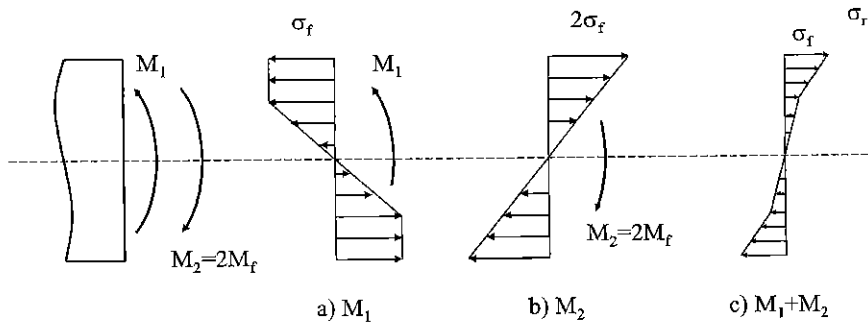


Figura 7.11. Carga $M_f < M_1 < M_p$ y descarga $M_2 = 2M_f$

En la fibra más externa se obtiene exactamente una tensión de valor σ_f , que es el valor máximo del diagrama. Con una descarga mayor a $2M_f$, las fibras extremas comenzarían a entrar en fluencia.

Para los valores de descarga más habituales (hasta M_f), observamos que las máximas tensiones residuales son siempre inferiores a σ_f . De todas formas, la sollicitación sucesiva de momentos de signo contrario produce una disminución de la capacidad resistente del material. Este fenómeno se conoce como *fatiga por flexión alternativa*. Puede observarse experimentalmente sometiendo a un alambre a flexión en uno y otro sentido: llega un momento en que rompe.

Para concluir el apartado, veamos un ejemplo de cálculo de tensiones residuales.

Ejemplo 1. Sea una sección rectangular de ancho b y canto h , sometida a un momento flector M que origina la plastificación de la mitad de la sección. Se desea determinar la distribución de tensiones residuales cuando se elimina el momento M .

En primer lugar, calculemos el valor de M que plastifica media sección (fig.7.12a):

$$M = 2 \left[\sigma_f \frac{h}{4} b \left(\frac{h}{4} + \frac{h}{8} \right) + \frac{1}{2} \sigma_f \frac{h}{4} b \frac{2}{3} \frac{h}{4} \right] = \frac{11}{48} \sigma_f b h^2 \quad (7.18)$$

Por otra parte, la máxima tensión en la descarga elástica (fig.7.12b) es:

$$\sigma_{\max}^d = \frac{M h/2}{I_z} = \frac{11}{8} \sigma_f \quad (7.19)$$

que se presenta en A. En los puntos C y D, los correspondientes valores de la tensión son exactamente la mitad, es decir, $11/16 \cdot \sigma_f$.

En la fig.7.12, se representan las distribuciones de tensiones correspondientes a la carga, descarga y resultante.

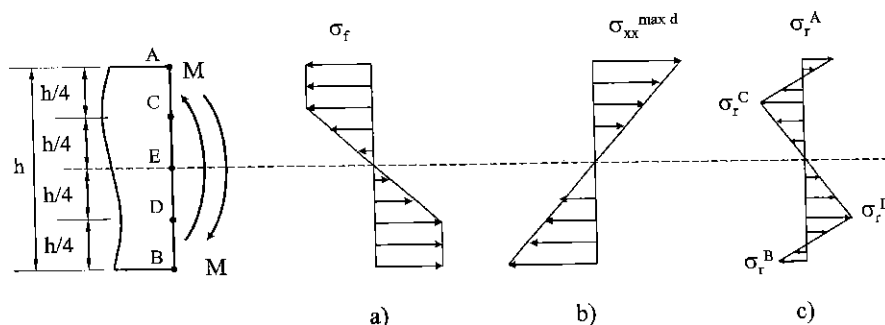


Figura 7.12. Descarga en una sección que ha plastificado en un 50%

A continuación se indican los valores más característicos de las tensiones residuales:

$$\begin{aligned}\sigma_r^A &= -\sigma_f + \frac{11}{8}\sigma_f = \frac{3}{8}\sigma_f \quad \sigma_r^B = \sigma_f - \frac{11}{8}\sigma_f = -\frac{3}{8}\sigma_f \\ \sigma_r^C &= -\sigma_f + \frac{11}{16}\sigma_f = -\frac{5}{16}\sigma_f \quad \sigma_r^D = \sigma_f - \frac{11}{16}\sigma_f = \frac{5}{16}\sigma_f\end{aligned}\tag{7.20}$$

7.4. ANÁLISIS PLÁSTICO DE VIGAS

La teoría de flexión desarrollada hasta ahora es estrictamente aplicable a los casos de flexión pura, poco frecuentes en las estructuras reales. Cabe preguntarse si los resultados obtenidos son trasladables a los casos de flexión simple y flexión compuesta. En otras palabras: cómo afecta la presencia de un esfuerzo cortante y de un esfuerzo axial.

La presencia de un esfuerzo axial de compresión ocasiona dos efectos adversos: una posible inestabilidad por pandeo y una disminución del momento plástico. Normalmente en el caso de barras cargadas transversalmente el segundo efecto puede ser ignorado, pues generalmente en ellas el esfuerzo axial es pequeño. También puede ignorarse el efecto del esfuerzo cortante. Pero no sucede lo mismo cuando la barra hace las veces de montante o columna, especialmente si se encuentra en una de las plantas más bajas de una estructura de varios pisos. Entonces el esfuerzo axial, además de causar la inestabilidad por pandeo, puede reducir apreciablemente el momento plástico, y de hecho debe tenerse en cuenta al calcular la carga última.

Dado el carácter introductorio al cálculo plástico de este capítulo, en lo que sigue se despreciarán ambos efectos, considerando que el valor del momento M_p que produce la total plastificación de la sección con la consiguiente formación de la rótula plástica, es el obtenido para flexión pura elastoplástica. Ya se ha dicho que esta aproximación es válida para el caso de elementos sometidos a cargas transversales, y también puede considerarse más que suficiente para un gran número de casos prácticos como son, entre otros, las estructuras relativamente sencillas que serán objeto de análisis.

Por otra parte, se ha visto que cuando una sección plastifica, en ella se forma un mecanismo similar a una rótula que permite el giro relativo de los dos extremos de la barra que concurren en esa sección: es la denominada rótula plástica. Este concepto

proporciona un método útil para determinar la **carga última o carga de agotamiento** que puede soportar una viga o una estructura más compleja. El objetivo de este epígrafe es poner de manifiesto cómo puede determinarse el valor de esta carga última, objetivo final del análisis plástico, en estructuras sencillas.

7.4.1. Análisis plástico de vigas isostáticas

La determinación de la carga última en una estructura isostática es muy sencilla ya que, precisamente por ser isostática, bastará la formación de una rótula plástica para que la estructura se convierta en un mecanismo y, por lo tanto, se produzca el colapso de la misma. La magnitud de la carga última se determinará imponiendo que el máximo momento flector en la viga sea precisamente M_p .

Considérese la viga simplemente apoyada de la fig.7.13 sometida a una carga concentrada P en el punto medio. El diagrama de momentos flectores es de forma triangular con un momento flector máximo en la sección central igual a $PL/4$, como se muestra en la misma figura. Si el valor de la carga crece continuamente, llegará un instante en que el momento máximo iguale al momento de fluencia de la sección. Al valor correspondiente de la carga se le llama **carga de fluencia**. Se representa por P_f y su cálculo es muy sencillo ya que:

$$M_{z \max} = M_f = \frac{P_f \cdot L}{4} \Rightarrow P_f = \frac{4 \cdot M_f}{L}; \quad \kappa_f = \frac{M_f}{E \cdot I_z} \quad (7.21)$$

Para incrementos posteriores de la carga, el momento máximo será mayor que M_f y la sección central comenzará a plastificar, propagándose esta zona plástica desde los extremos hacia el eje neutro. Simultáneamente en las secciones adyacentes también van apareciendo deformaciones plásticas conforme en ellas también se supera el momento de fluencia; en esa zona de la viga, que se muestra sombreada en la fig. 7.13, existe una región de flujo plástico controlado. También en esta figura se muestra la curvatura de la viga. Como puede observarse, esta curvatura aumenta linealmente desde los extremos de la viga hacia el centro, hasta que se alcanzan las secciones donde comienzan las deformaciones plásticas en las cuales la curvatura es igual a su valor de fluencia. A partir de ellas la curvatura se incrementa con mayor rapidez y alcanza un valor máximo κ_{\max} en la sección central de la viga. Esta curvatura máxima permanecerá finita mientras en dicha sección exista un núcleo elástico.

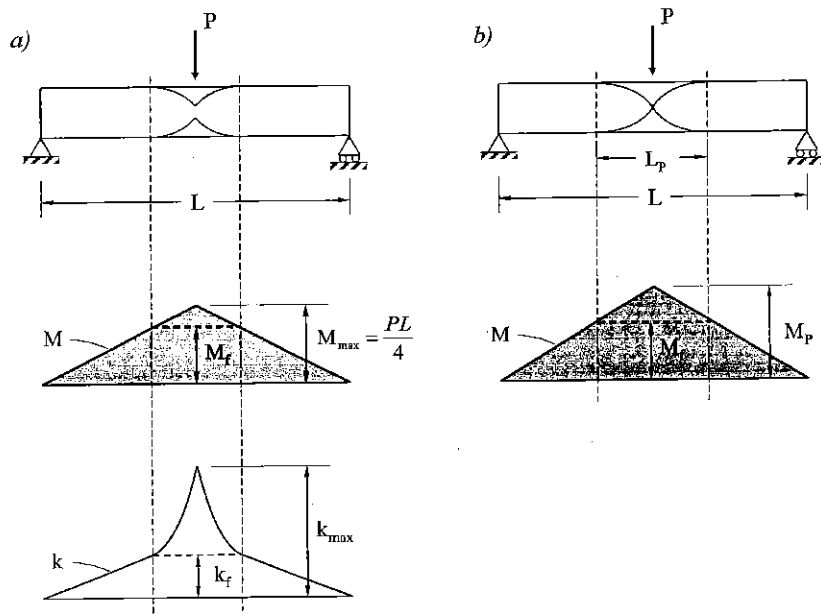


Figura 7.13. Colapso plástico de una estructura isostática

Finalmente, cuando el momento máximo sea igual a M_p , la sección transversal en el centro de la viga será totalmente plástica (fig.7.13b). La curvatura en dicha sección se vuelve entonces extremadamente grande, y tiene lugar un flujo plástico incontrolado. La viga falla por rotaciones excesivas que tienen lugar en esa sección transversal, mientras que las dos mitades de la viga permanecen relativamente rígidas. *Luego la viga se comporta como dos barras rígidas unidas mediante una rótula plástica que permite que las dos barras giren relativamente entre sí bajo la acción de un momento constante M_p .*

La carga que está aplicada en ese momento es la carga máxima que la viga es capaz de aguantar y se denomina **carga última, de agotamiento** o **de colapso**. Su cálculo es muy sencillo a partir de puras consideraciones de equilibrio:

$$M_p = \frac{P_p \cdot L}{4} \Rightarrow P_p = \frac{4 \cdot M_p}{L} \quad (7.22)$$

Aunque el tramo de plastificación abarca una fracción apreciable de la longitud de la viga, la curvatura tiende a concentrarse en la sección donde la plastificación es total, o sea, en la rótula plástica propiamente dicha. Por eso, desde un punto de vista práctico, se considera que la rótula plástica no tiene dimensiones y está localizada en

una sección concreta de la viga. Ésta se comporta como dos barras rígidas unidas por una articulación que presenta una resistencia al giro de momento M_p .

En esencia, el **método de cálculo o de diseño plástico** se basa en el cálculo de la carga requerida para producir el mínimo número suficiente de rótulas plásticas en la estructura de forma tal que ésta pueda moverse como si se tratara de un mecanismo articulado con un grado de libertad. Se dice entonces que se ha producido el **colapso o agotamiento** de la estructura, y por extensión, la carga que lo ha originado se llama **carga de colapso** y el mecanismo correspondiente **mecanismo de colapso**.

Esa carga se dividirá entonces por un **factor de carga**, concepto paralelo al de coeficiente de seguridad en el diseño elástico, dando como resultado la carga de trabajo o carga admisible. Naturalmente, en la práctica el problema puede presentarse en forma inversa: las cargas de trabajo (cargas admisibles) son conocidas con bastante aproximación y, para un particular factor de carga elegido, se determinan las secciones de los diversos miembros de la estructura. Es decir, se establecen primero las cargas de trabajo de la estructura y luego se multiplican tales cargas por el factor de carga elegido para obtener así las cargas últimas. La estructura se calcula para la condición de carga última, utilizando los conceptos del análisis plástico.

En las *estructuras isostáticas*, por propia definición, la plastificación total de una sección, es decir, la formación de una sola rótula plástica es suficiente para convertirla en un mecanismo, dando lugar al agotamiento de la estructura. Es el caso de la viga biapoyada que hemos considerado: al formarse la rótula plástica en la sección de momento máximo se produce el colapso de la viga por su transformación en un mecanismo articulado con un grado de libertad, adquiriendo deformaciones indefinidas bajo carga constante, quedando así inutilizada.

Para este tipo de estructuras realmente tiene poco interés aplicar el método de cálculo plástico, ya que en ellas siempre se verifica que la relación entre la carga de agotamiento y la carga de fluencia es el factor de forma de la sección transversal de la viga, como puede deducirse de (7.21) y (7.22) para el caso que se ha estudiado:

$$\frac{P_p}{P_f} = \frac{M_p}{M_f} = f \quad (7.23)$$

Para cualquier tipo de estructuras que se esté considerando, este cociente da una idea clara del aumento del valor de la carga determinada por cálculos plásticos en

relación con la calculada por métodos elásticos. En otras palabras, expresa la reserva de resistencia con que cuenta la estructura después de alcanzar el valor de la tensión de fluencia σ_f en la sección más solicitada. Un mejor aprovechamiento de la capacidad resistente de la estructura y una utilización más económica del material se consiguen cuando ese cociente es mayor que el factor de forma f , lo que sólo ocurre cuando la estructura es hiperestática: para este tipo de estructuras sí tiene un gran interés la aplicación de los métodos del análisis plástico.

7.4.2. Análisis plástico de vigas hiperestáticas

Si la estructura es hiperestática, no es suficiente la formación de una sola rótula para el colapso plástico, sino que se precisan, como norma general, $h+1$ rótulas, siendo h el grado de hiperestaticidad. Veámoslo con el ejemplo representado en la fig.7.14, que no es sino la misma viga del caso anterior, pero sustentada de forma hiperestática: empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro, y sometida asimismo a una carga puntual en la sección central.

La distribución de momentos flectores en el rango elástico se muestra en la fig.7.14b. El momento máximo se presenta en la sección empotrada A y es numéricamente igual a $3PL/16$. En dicha sección comenzará la fluencia plástica y el correspondiente valor de la carga de fluencia será:

$$P_f = \frac{16 \cdot M_f}{3 \cdot L} \quad (7.24)$$

Si P se incrementa continuamente más allá de este valor, en A aparecerá una fluencia adicional dando lugar a una plastificación parcial de la sección, y llegará un momento en que también se iniciará la fluencia en C, donde hay otro pico en el diagrama de momentos flectores. En cualquier caso, al ser A la sección más solicitada será en ella donde primero se formará, al continuar aumentando P , una rótula plástica, aunque su aparición no dará lugar al colapso de la viga: a partir de este momento ésta se comporta como una viga isostática, biapoyada, sometida a una fuerza P en la sección C, y un momento M_p en la sección A. Pero la viga es capaz de resistir un posterior incremento de cargas.

Al seguir aumentando éstas, la sección totalmente plastificada no es capaz de resistir un momento mayor, lo que da lugar a que secciones que todavía no se encuentran en el límite de su resistencia acudan en ayuda de aquellas que ya lo están, absorbiendo

momentos superiores hasta llegar al diagrama mostrado en la fig.7.14d. Es decir, existe una *redistribución de momentos*, que se conoce como adaptación plástica de las secciones, que hace que se incremente la resistencia de la viga por el hecho de que al fallar una sección, las demás secciones de la estructura soportan una carga adicional. Este hecho ocurre únicamente en estructuras hiperestáticas, de ahí que en ellas se incremente su resistencia última en comparación con las estructuras isostáticas.

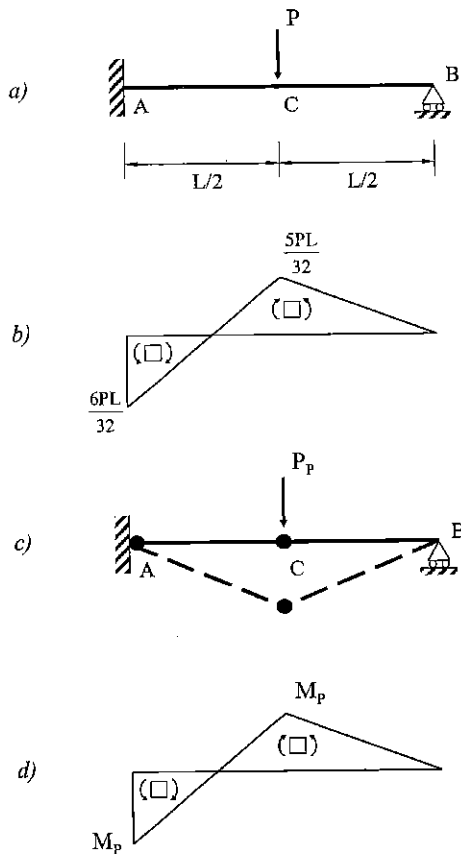


Figura 7.14. Colapso de una estructura hiperestática

Al continuar aumentando P , llegará un momento en que en la siguiente sección de momento máximo, en la sección C , se alcance también M_p , formándose en ella una nueva rótula plástica. En este instante se produce el colapso de la viga, pues ésta se ha transformada en un mecanismo, el mecanismo de colapso, siendo, por consiguiente, incapaz de absorber posteriores incrementos de carga.

Para determinar el valor de la carga última P_p , no se precisa verificar con detalle el comportamiento de la viga desde que se inicia el proceso de carga hasta llegar al colapso. Basta con referirse directamente al diagrama de momentos final, mostrado en la fig.7.14d, y calcular P_p basándose exclusivamente en las ecuaciones de equilibrio. De esta forma:

$$\left. \begin{aligned} V_B &= \frac{2 \cdot M_p}{L} \\ P_p \cdot \frac{L}{2} - V_B \cdot L &= M_p \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_p = \frac{6 \cdot M_p}{L} \quad (7.25)$$

Con estas operaciones se pone de manifiesto *una de las características importantes del análisis plástico, al que ya se ha hecho referencia anteriormente: la facilidad con que la carga última puede calcularse utilizando exclusivamente ecuaciones de la estática, sin necesidad de tener que formular ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones cuando la estructura es hiperestática. Además se verifica [cfr. (7.24) y (7.25)]:*

$$\frac{P_p}{P_f} = \frac{9M_p}{8M_f} = \frac{9}{8} \cdot f = 1,125 \cdot f \quad (7.26)$$

relación mayor que la (7.23), obtenida para la misma viga sustentada de forma isostática, y que indica que la sobrecarga que produciría el agotamiento de la viga sería del orden del 12.5% mayor que la que originaría, por primera vez, el momento de fluencia en el empotramiento. Frente a las estructuras isostáticas, que fallan con la primera rótula, las estructuras hiperestáticas presentan una mayor resistencia, ya que como se ha dicho, tras formarse la primera rótula las demás secciones de la estructura empiezan a soportar una carga adicional.

Este ejemplo permite también poner de manifiesto otra de las ventajas ya citadas del análisis plástico: sus resultados son insensibles a las imperfecciones de contorno. Un pequeño giro en el empotramiento o un pequeño asentamiento en un apoyo no alteran el diagrama de momentos flectores correspondientes a la situación de colapso de la viga que seguirá siendo el representado en la fig.7.14d, y por consiguiente tampoco se altera el valor de la carga última, cuyo cálculo se basa en considerar la situación descrita en ese diagrama como la última posible de equilibrio.

Otra característica también importante, y que lo diferencia claramente del análisis elástico, es que *en el cálculo plástico no es aplicable el principio de superposición* (la relación entre cargas y desplazamientos ha dejado de ser lineal). En consecuencia, el comportamiento de la estructura depende no sólo de los valores finales de las cargas, sino también del orden en que éstas se aplican. Por esta causa, es importante tener presente que *en el análisis plástico de estructuras se supone siempre que las cargas se aplican simultánea y gradualmente y que la relación entre ellas permanece constante durante el proceso de carga* (es lo que se suele resumir diciendo que el análisis plástico presupone que las cargas son *proporcionales*. Todas varían simultáneamente y en la misma proporción).

7.5. MÉTODOS DE CÁLCULO PLÁSTICO EN ESTRUCTURAS.

Como se ha dicho, el método de cálculo plástico consiste, en definitiva, en el cálculo de la carga P_p requerida para producir un número suficiente de rótulas plásticas en la estructura, de forma que ésta se convierta en un mecanismo. Existen diversos procedimientos para la determinación de la carga de agotamiento de una estructura. Prácticamente todos ellos se pueden incluir en uno de estos dos grandes grupos:

- a) *Métodos basados en la aplicación de las condiciones de equilibrio en el momento en que se produce el colapso de la estructura.*
- b) *Método basado en el principio de los trabajos virtuales.*

Sea cual sea el procedimiento utilizado para calcular la carga de agotamiento, un paso previo es conocer con precisión cuál es el mecanismo real de colapso de la estructura y, por lo tanto, el diagrama de momentos flectores correspondiente al mismo. Como es sabido, conocido el diagrama de momentos flectores en una estructura, mediante simple aplicación de ecuaciones de la estática, es posible determinar las reacciones en los apoyos, el valor de la carga que ha dado lugar a ese diagrama, etc.

Entre los procedimientos para determinar el mecanismo de colapso cabe señalar el denominado *método paso a paso*, cuya característica más relevante es que pone de manifiesto la secuencia en que se forman las rótulas plásticas a medida que las cargas que actúan sobre la estructura van creciendo hasta alcanzar el valor que da lugar al colapso de la misma. Es lo que se ha hecho en el caso de la viga hiperestática empotrada y apoyada.

El interés de este método es más didáctico que práctico. De hecho, existen métodos mucho más directos que permiten determinar la carga de agotamiento y el mecanismo de colapso para una estructura dada bajo la acción de unas determinadas cargas, métodos que no precisan del conocimiento de la secuencia de formación de las rótulas plásticas, característica del método paso a paso. Es más, la simplicidad de los métodos plásticos se debe en buena medida al hecho de poder realizar cálculos directos de esta clase. No obstante, un paso previo y en cierto modo esencial para el estudio de los métodos plásticos es una clara comprensión del proceso mediante el cual las rótulas plásticas presentes en el mecanismo de agotamiento se han formado sucesivamente a medida que las cargas crecen proporcionalmente.

Dejando a un lado el método paso a paso, cuya aplicación nos diría cuál es el mecanismo de colapso y el orden secuencial en el que se han ido formando las diversas rótulas plásticas para una estructura concreta, lo habitual es que sea difícil determinar, por simple inspección, cuál es el mecanismo real de colapso de entre los diversos mecanismos alternativos posibles, aún en estructuras de bajo grado de hiperestaticidad. Es por ejemplo el caso del pórtico de la fig. 7.15, en el que cabe considerar los cinco posibles mecanismos de colapso indicados.

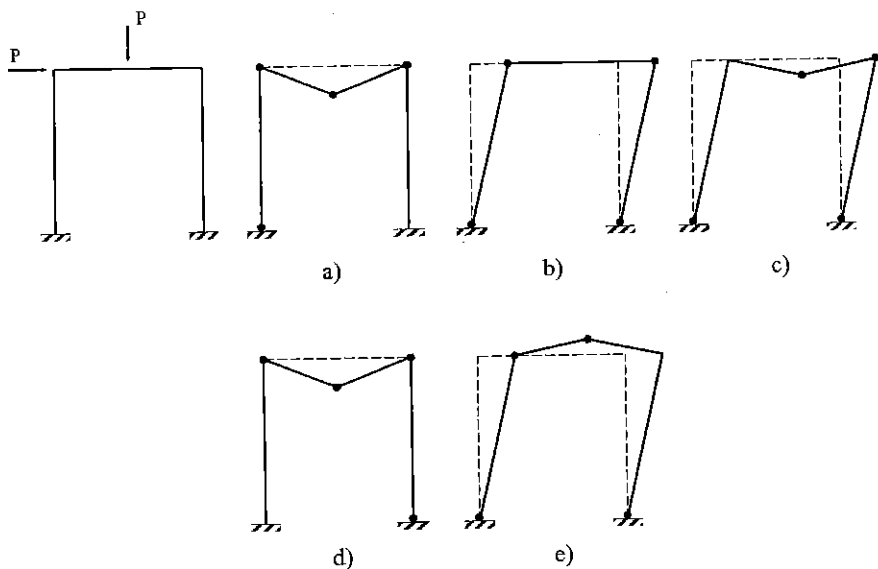


Figura 7.15. Posibles mecanismos de colapso en un pórtico

En casos como éste, y si el número de mecanismos de agotamiento es bajo bastaría con determinar, bien aplicando las ecuaciones de equilibrio o el principio de los trabajos virtuales, la carga de colapso para cada uno de ellos, y la menor de todas

ellas y el mecanismo correspondiente serán la carga y el mecanismo real de colapso de esa estructura.

Para este pórtico, si se aplicara el procedimiento resolutivo paso a paso se comprobaría que el mecanismo real de colapso es el de la fig.7.15c. Naturalmente, cuanto más compleja sea la estructura, el conjunto de posibles mecanismos de colapso se ampliaría notablemente. Afortunadamente, existen unos principios orientadores que facilitan la identificación del mecanismo real de ruina de entre los varios posibles: son los denominados *teoremas estático y cinemática*. En ellos se apoyan los métodos de cálculo plástico conocidos como método estático y método cinemático. Hay, además, otro método, el método de combinación de mecanismos, recomendable para estructuras hiperestáticas de alto grado de hiperestaticidad.

Dado el carácter introductorio al cálculo plástico de este capítulo, en él no se hará una exposición de estos teoremas ni de los métodos basados en ellos, limitándose al análisis de estructuras sencillas en el que el número de posibles mecanismos de colapso alternativos es reducido, y por tanto los cálculos de las cargas de colapso son abordables mediante planteamientos sencillos en un tiempo relativamente corto y sin excesivas complicaciones, bien a partir de puras consideraciones de equilibrio estático o aplicando el principio de los trabajos virtuales.

7.5.1. Métodos basados en la aplicación de las condiciones de equilibrio en el momento en que se produce el colapso de la estructura

Considérese, por ejemplo la viga hiperestática de la fig.7.16. Como se trata de una estructura hiperestática de grado $h=1$, el colapso se producirá por la formación de al menos dos rótulas plásticas. En el diagrama de momentos flectores correspondiente al rango elástico existen tres valores extremos: en las secciones A, C y D. Por tanto pueden considerarse tres diferentes combinaciones de rótulas plásticas, es decir, tres posibles mecanismos de colapso, y habrá que determinar el valor de la carga última para cada uno de ellos.

1) Mecanismo con rótulas en A y C:

$$\begin{aligned} V_B \cdot \frac{L}{2} - P_p \cdot \frac{L}{2} &= M_p \\ 2 \cdot P_p \cdot L - V_B \cdot L &= M_p \end{aligned} \tag{7.27}$$

de donde se obtiene su correspondiente carga de colapso:

$$P_p = \frac{3 \cdot M_p}{L} \quad (7.28)$$

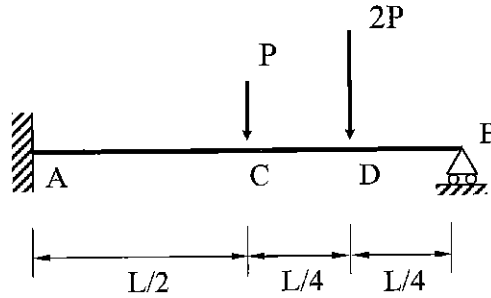


Figura 7.16. Estudio del colapso de una viga hiperestática

2) Mecanismo con rótulas en A y D:

$$2 \cdot P_p \cdot L - V_B \cdot L = M_p \quad (7.29)$$

$$V_B \cdot \frac{L}{4} = M_p$$

que proporciona un valor para la carga de colapso:

$$P_p = \frac{5 \cdot M_p}{2 \cdot L} \quad (7.30)$$

3) Mecanismo con rótulas en C y D:

$$V_B \cdot \frac{L}{4} = M_p \quad (7.31)$$

$$P_p \cdot \frac{L}{2} - V_B \cdot \frac{L}{2} = M_p$$

de donde resulta la carga de colapso:

$$P_p = \frac{6 \cdot M_p}{L} \quad (7.32)$$

Por consiguiente, se formará el segundo mecanismo de fallo, con rótulas en A y D, siendo la carga de colapso la dada en la ecuación (7.30).

7.5.2. Método basado en el principio de los trabajos virtuales

Un procedimiento alternativo al considerado en el epígrafe anterior, es el basado en el principio de los trabajos virtuales, uno de cuyos posibles enunciados se recoge a continuación: "Si una estructura está en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas, y permanece en equilibrio al ser sometida a un pequeño desplazamiento virtual (ficticio) cinemáticamente compatible, el trabajo virtual realizado por las fuerzas exteriores actuantes es igual al trabajo virtual realizado por las fuerzas interiores".

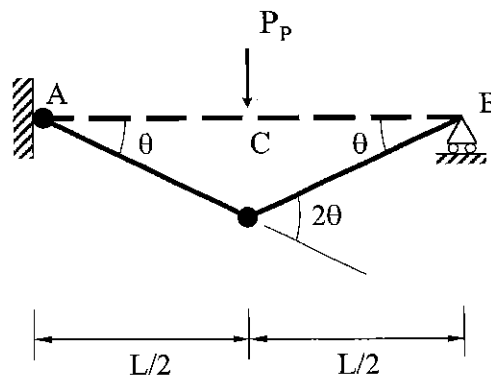


Figura 7.17. Aplicación del método de los trabajos virtuales

Apliquemos este principio a la viga hiperestática de la fig.7.17. El mecanismo de colapso se obtendrá en este caso tras la formación de dos rótulas plásticas en las secciones A y C. Introduzcamos un desplazamiento virtual, compatible con el movimiento de dichas rótulas. Por ejemplo, supongamos que la articulación plástica en A gira un ángulo pequeño θ (véase fig.7.18). Entonces, la sección C se desplazará hacia abajo una distancia $\theta \cdot L/2$. El principio de los trabajos virtuales nos permite expresar:

$$P_p \cdot \frac{\theta \cdot L}{2} = M_p \cdot \theta + 2 \cdot M_p \cdot \theta \Rightarrow P_p = \frac{6 \cdot M_p}{L} \quad (7.33)$$

que coincide con el resultado obtenido en (7.25).

En este ejemplo, sólo existía un posible mecanismo de fallo. En el caso en que sean diversos los mecanismos posibles de colapso, habrá que determinar la carga última para todos ellos y elegir el mecanismo que se produce con la mínima carga.

Sea el ejemplo de la fig.7.18, anteriormente considerado, y apliquemos el principio de los trabajos virtuales a los tres posibles mecanismos de colapso que es posible considerar para esta viga.

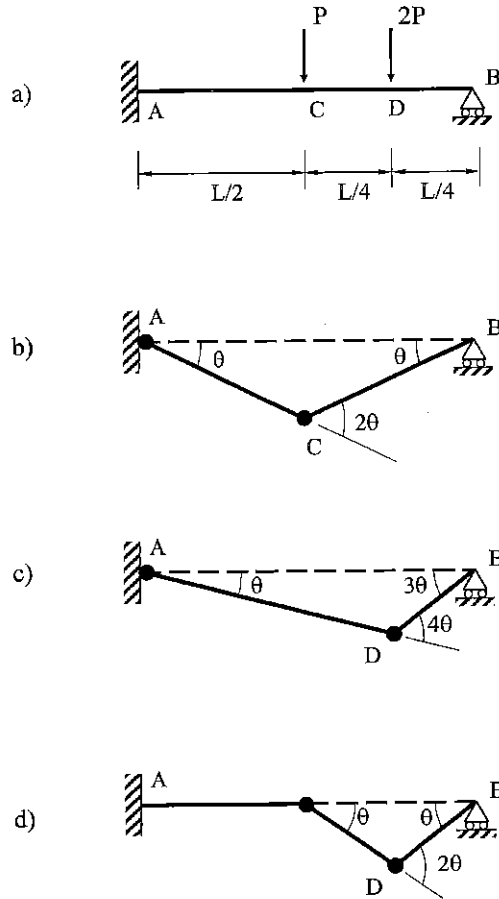


Figura 7.18. Aplicación del método de los trabajos virtuales

1) Mecanismo con rótulas en A y C (fig.7.18b):

$$P_p \cdot \theta \cdot \frac{L}{2} + 2 \cdot P_p \cdot \theta \cdot \frac{L}{4} = M_p \cdot \theta + M_p \cdot 2 \cdot \theta \Rightarrow P_p = \frac{3 \cdot M_p}{L} \quad (7.34)$$

2) Mecanismo con rótulas en A y D (fig.7.18c):

$$P_p \cdot \theta \cdot \frac{L}{2} + 2 \cdot P_p \cdot \theta \cdot \frac{3 \cdot L}{4} = M_p \cdot \theta + M_p \cdot 4 \cdot \theta \Rightarrow P_p = \frac{5 \cdot M_p}{2 \cdot L} \quad (7.35)$$

3) Mecanismo con rótulas en C y D (fig.7.18d):

$$2 \cdot P_p \cdot \theta \cdot \frac{L}{4} = M_p \cdot \theta + M_p \cdot 2 \cdot \theta \Rightarrow P_p = \frac{6 \cdot M_p}{L} \quad (7.36)$$

Los valores obtenidos coinciden con los deducidos en el método anterior. Se concluye por tanto que el colapso se produce con la formación de rótulas en A y D, para una carga última:

$$P_p = \frac{5 \cdot M_p}{2 \cdot L} \quad (7.37)$$

