

Cinemática de mecanismos

Análisis y diseño

PROYECTO EDITORIAL
SÍNTESIS INGENIERÍA

Áreas de Publicación

INGENIERÍA INDUSTRIAL
COORDINADORA: Alicia Larena



Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de la propiedad intelectual. La infracción de los

derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y sigs. Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (www.cedro.org) vela por el respeto de los citados derechos.

Cinemática de mecanismos

Análisis y diseño

Alfonso Hernández

Edición revisada



Consulte nuestra página web: www.sintesis.com
En ella encontrará el catálogo completo y comentado

© Alfonso Hernández

© EDITORIAL SÍNTESIS, S. A.
Vallehermoso, 34. 28015 Madrid
Teléfono: 91 593 20 98
<http://www.sintesis.com>

Depósito legal: M.32.886-2010
ISBN: 84-9756-224-0

Impreso en España - Printed in Spain

Reservados todos los derechos. Está prohibido, bajo las sanciones penales y el resarcimiento civil previstos en las leyes, reproducir, registrar o transmitir esta publicación, íntegra o parcialmente, por cualquier sistema de recuperación y por cualquier medio, sea mecánico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o cualquier otro, sin la autorización previa por escrito de Editorial Síntesis, S. A.

Índice

Prólogo	11
----------------	-----------

1. Nociones básicas sobre mecanismos y su diseño	15
1.1. Introducción	15
1.2. Conceptos básicos sobre mecanismos y máquinas	15
1.3. Tipos de mecanismos y sus aplicaciones	17
1.3.1. Mecanismos de barras	22
1.4. Diseño de mecanismos	28
1.4.1. Presente y futuro de los mecanismos	28
1.4.2. Nociones sobre diseño en mecanismos	28
1.5. Transmisiones mecánicas	34
1.6. Clasificaciones de los elementos y de los pares cinemáticos	37
1.6.1. Varias clasificaciones de los elementos	38
1.6.2. Varias clasificaciones de los pares cinemáticos	39
1.6.3. Representación de mecanismos	40
1.7. Cadena cinemática	42
1.8. Mecanismos e inversiones	43
1.9. Criterios de Grübler y Malishev	46

1.10. Limitaciones de los criterios de Grübler y Malishev	48
1.10.1. Restricciones redundantes	48
1.10.2. Grados de libertad inoperantes	55
1.10.3. Singularidades	56
1.11. Leyes de formación de cadenas cinemáticas planas y cerradas con pares R	57
1.12. Métodos para la obtención de mecanismos	63
1.12.1. Adición de elementos	63
1.12.2. Degeneración	65
1.12.3. Equivalencia	66
1.12.4. Inversión	69
Ejercicios propuestos	70
2. Geometría del movimiento plano	73
<hr/>	
2.1. Introducción	73
2.2. Estudio del movimiento continuo de una figura plana en su plano	74
2.3. Teoremas, propiedades y formulación del campo de velocidades de un plano móvil	81
2.3.1. Teorema de Burmester	82
2.3.2. Campo de velocidades	86
2.3.3. Imagen de velocidades	88
2.4. Teorema de Aronhold-Kennedy o de los tres centros	89
2.5. Campo de aceleraciones. Imagen de aceleraciones	93
2.6. Teorema de Hartmann	97
2.7. Fórmula de Euler-Savary	102
2.8. Circunferencia de las inflexiones	104
2.9. Construcciones gráficas	112
2.10. Teorema de Bobillier	114
2.11. Circunferencia de Bresse. Polo de aceleraciones	118
2.12. Perfiles conjugados, generalización de la fórmula de Euler-Savary	121
2.13. Circunferencia de los retrocesos, teoremas de Aronhold	123
Ejercicios propuestos	133
3. Análisis cinemático de mecanismos planos	137
<hr/>	
3.1. Introducción: problemas generales del análisis cinemático de mecanismos	137
3.2. Métodos de resolución para los problemas de posición	140

3.2.1. Revisión de los métodos de resolución de los problemas de posición	140
3.2.2. Métodos gráficos clásicos	141
3.2.3. Método Geométrico-Iterativo	143
3.3. Rotabilidad de mecanismos	146
3.3.1. Criterio de Grashof	146
3.3.2. Configuraciones, ramas de una trayectoria y posiciones de indeterminación	152
3.3.3. Puntos muertos	160
3.3.4. Extensión del criterio de Grashof a cuadriláteros con pares prismáticos	163
3.4. Ángulo de transmisión	165
3.5. Ventaja mecánica	169
3.6. Métodos gráficos para el cálculo de velocidades y aceleraciones	172
3.6.1. Método de Hall y Ault o del punto auxiliar	172
3.6.2. Coeficientes de influencia	181
3.6.3. Método de Hirschhorn	183
3.7. Métodos analíticos	189
3.7.1. Mecanismos de un lazo	189
3.7.2. Método numérico para la resolución del problema de posición	198
3.7.3. Mecanismos con varios lazos	199
3.7.4. Procedimiento general para mecanismos con 1 gdl	207
3.7.5. Procedimiento general para mecanismos multilazo con varios gdl	210
Ejercicios propuestos	219

4. Síntesis dimensional de mecanismos planos 225

4.1. Introducción	225
4.1.1. Tipos de síntesis dimensional	226
4.2. Síntesis de generación de funciones	229
4.2.1. Relación funcional entrada-salida para un cuadrilátero articulado: Ecuación de Freudenstein	229
4.2.2. Síntesis de generación de funciones con tres puntos de precisión	232
4.2.3. Generalización para m puntos de precisión	233
4.2.4. Selección de los puntos de precisión	234
4.2.5. Aumento del número de puntos de precisión	234
4.3. Síntesis de generación de trayectorias	237
4.3.1. Generación de tramos cuasi-rectilíneos	237
4.3.2. Curvas de acoplador del cuadrilátero articulado: posibilidades y limitaciones en la síntesis de generación de trayectorias	248

4.3.3. Método analítico para la generación de trayectorias con puntos de precisión	253
4.3.4. Métodos gráficos para la generación de trayectorias con puntos de precisión	255
4.3.5. Errores de orden y de rama	258
4.3.6. Mecanismos cognados, teorema de Roberts-Chebyshev	260
4.4. Síntesis de guiado de sólido rígido	264
4.4.1. Generación de un elemento con movimiento de traslación	265
4.4.2. Métodos gráficos	267
4.4.3. Aplicaciones prácticas	269
4.5. Proyecto de mecanismo de elevación	275
Ejercicios propuestos	279

5. Cinemática de mecanismos espaciales **283**

5.1. Introducción	283
5.2. Posiciones, orientaciones y objetos	286
5.3. Representación de la orientación	288
5.3.1. Matriz de rotación	289
5.3.2. Composición de rotaciones básicas	292
5.3.3. Ángulo y eje de rotación	298
5.3.4. Ángulos de Euler	303
5.3.5. Relación entre la matriz de rotación y los restantes métodos de orientación espacial	304
5.4. Representación de un objeto: matrices de transformación	306
5.4.1. Transformaciones entre sistemas de referencia con la misma orientación	306
5.4.2. Transformaciones entre sistemas de referencia cualesquiera	307
5.4.3. Transformaciones básicas y composición de las mismas	310
5.4.4. Composición de matrices de transformación	315
5.4.5. Transformación inversa	316
5.4.6. Ecuaciones de transformación	317
5.5. Método matricial	319
5.5.1. Sistemas de referencia asociados a elementos	321
5.5.2. Matrices de transformación elementales	327
5.6. Análisis de posiciones en mecanismos de cadena cerrada	330
5.6.1. Ecuaciones de posición mediante el método matricial	330
5.6.2. Ecuaciones de posición mediante el método geométrico	336

5.7. Análisis de posiciones en mecanismos de cadena abierta	337
5.7.1. Problema de posición directo	338
5.7.2. Problema de posición inverso	341
5.8. Análisis de velocidades y aceleraciones	348
Ejercicios propuestos	357

Bibliografía	361
---------------------	------------

Prólogo

Tradicionalmente la Teoría de Mecanismos y Máquinas ha sido dividida en dos grandes partes: Cinemática y Dinámica. La primera estudia el movimiento de los mecanismos sin tener en cuenta las causas que lo producen. La Cinemática depende directamente de las características geométricas de los mecanismos. Por otro lado, la Dinámica incluye en su estudio las acciones que provocan el movimiento de los mecanismos formulando la relación causa-efecto. Esta dualidad (fuerza-movimiento) lleva, incluso, a designar al mismo dispositivo con distintas acepciones (máquina-mecanismo) dependiendo del concepto que prevalezca.

Para el ingeniero, la formulación de estas ideas no es sólo generación de conocimiento como ocurre en otras disciplinas más “puras”, sino el medio para concebir realidades útiles. Para el hombre, la idea de crear dispositivos mecánicos capaces de realizar tareas que superen su capacidad física, siempre ha sido una fascinación. El concepto que resume todo esto es el diseño. Precisamente es el diseño lo que diferencia a la Ingeniería de cualquier otra disciplina. Éste es nuestro monopolio, algo que los ingenieros no debemos olvidar, sobre todo cuando se entra en la pugna científica con otros colectivos. Dentro de la Ingeniería, los mecanismos ocupan un lugar preponderante. Evidentemente, los mecanismos poseen muchos puntos en común con otros elementos de la Ingeniería, sin embargo, hay un matiz que les hace diferentes y que eleva el nivel de dificultad en torno a su conocimiento. Dicho matiz no se refleja en la etapa de análisis (comprensión del funcionamiento), sino en la etapa de síntesis, es decir, cuando se está gestando la concepción del mecanismo. En efecto, para incrementar la capacidad resistente de un elemento estructural, cualquier ingeniero baraja posibilidades como aumentar el espesor, la inercia de la sección o la utilización de un material más resistente; algo parecido pasa en otros ámbitos de la Ingeniería, como la transmisión de calor, la conducción de energía eléctrica, de fluidos, etc. Sin embargo, considérese un sencillo mecanismo, por ejemplo un cuadrilátero articulado que genera una trayectoria muy cercana a la que se ha definido como trayectoria objetivo. ¿Qué dimensión hay que modificar y en qué sentido, para ajustarla? Probablemente la intuición ingenieril no manifieste una opinión.

Este libro pretende introducir al lector con sólidos conocimientos de Mecánica Fundamental en la Cinemática de Mecanismos. Tiene dos objetivos fundamentales: la formulación del movimiento de los mecanismos en el plano y en el espacio, y el establecimiento de unas pautas útiles para su diseño. El texto está estructurado en cinco capítulos, de los

cuales el primero y el cuarto están dedicados básicamente al diseño, y los restantes al análisis. Posee numerosos ejemplos de aplicación resueltos, así como una serie de casos reales de diseño de mecanismos.

En el primer capítulo se establece una completa clasificación de los mecanismos por su función y en combinación con su tipología. A continuación, se describe el ciclo de diseño de un mecanismo ilustrando los pasos fundamentales con ejemplos de diseño concretos. Se analiza la estructura de un mecanismo describiendo los distintos tipos de elementos y pares cinemáticos. Se obtiene el número de grados de libertad de un mecanismo mediante las fórmulas de Grübler y Malishev. Asimismo, se realiza un análisis detallado de sus limitaciones. Finalmente, se establecen las bases de la síntesis estructural incluyendo, además, algunos procedimientos para la obtención de nuevos mecanismos a partir de uno dado.

El segundo capítulo está dedicado a la geometría del movimiento plano. En él se presentan conceptos teóricos complejos, expuestos de forma ordenada y didáctica. A pesar de la carga teórica de este capítulo, se incluyen algunas aplicaciones prácticas, como el análisis de la estabilidad de cuerpos a partir de la posición del centro de gravedad respecto de la circunferencia de las inflexiones. En él se establecen también las bases para la generación de mecanismos con tramos rectilíneos en la trayectoria de sus puntos de acoplador.

El tercer capítulo se inicia con una descripción de los problemas generales del análisis cinemático de mecanismos. En primer lugar, se estudian los problemas de posición, analizando el rango de movimientos de sus elementos, así como ciertas posiciones singulares que el mecanismo puede alcanzar a lo largo de su movimiento. Se define el ángulo de transmisión y la ventaja mecánica como indicadores de la calidad en la transmisión de movimiento y fuerza. A continuación, se exponen algunos de los clásicos métodos gráficos para el cálculo de velocidades y aceleraciones en una posición concreta, y cuyo valor es fundamentalmente docente. En la parte final del capítulo se realiza un planteamiento analítico global para la resolución de todos los problemas cinemáticos, incluyendo el complejo análisis de singularidades. Este planteamiento alcanza a los mecanismos planos multi-lazo con varios grados de libertad, aunque es parcialmente válido para mecanismos espaciales.

A continuación, se aborda el cuarto capítulo, que está dedicado a la síntesis dimensional. En él se exponen los procedimientos gráficos para generación de función, generación de trayectorias y guiado de sólido rígido con varios puntos (o posiciones en su caso) de precisión. Estos procedimientos siguen siendo muy útiles en el diseño actual; además, poseen una gran facilidad para ser implementados en un programa de computador. Es de destacar la buena conexión entre aquellos conceptos de geometría del movimiento plasmados en el segundo capítulo y los conceptos prácticos que se exponen en éste. Las ideas expuestas en este capítulo están ilustradas con numerosos ejemplos de diseño y proyectos de mecanismos, entre los cuales cabe destacar un original ejemplo de movimiento paralelo vertical que encadena conceptos como la circunferencia de las inflexiones, las cúbicas, el punto de Ball, los mecanismos cognados y las relaciones de semejanza aplicadas al movimiento de mecanismos.

Finalmente, en el quinto capítulo se tratan los mecanismos espaciales. Se analizan no sólo los tradicionales manipuladores serie o robots, sino también los denominados mani-

puladores paralelos de creciente utilización industrial. En la primera parte del capítulo se presentan las herramientas matemáticas necesarias para describir la posición y orientación de objetos en el espacio. Se introduce un operador matemático denominado matriz de transformación, capaz de referir la localización de un sistema de referencia respecto de otro. A continuación, se expone un método matricial para describir la localización de los elementos de un mecanismo, basado en la conocida notación de Denavit-Hartenberg. Se ha tenido especial cuidado en tratar de forma unificada los mecanismos de cadena abierta y los de cadena cerrada. Se incluye, además, un método geométrico por su efectividad en la resolución de mecanismos de cadena cerrada. Con estos recursos se resuelven los problemas de posición directo e inverso, de velocidades y aceleraciones, en varios mecanismos espaciales tanto de cadena abierta como cerrada.

Los contenidos de este libro surgen del compendio de notas, apuntes y monografías que he escrito y utilizado para la impartición de clases en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Bilbao. Por ello, este libro está dirigido fundamentalmente a estudiantes de Ingeniería, y está pensado como soporte a la docencia de asignaturas como Teoría de Máquinas, Cinemática de Máquinas o Teoría de Mecanismos y Máquinas. No obstante, dada la carga de contenidos en temas de diseño, puede ser también de utilidad a ingenieros en el desarrollo de la profesión. Incluso, aspiro modestamente a que el tratamiento dado a algunos temas del libro pueda resultar interesante a otros colegas universitarios.

En los planes de estudio de las Escuelas de Ingeniería, el número de créditos utilizados para esta temática es muy variable. Por esta razón, los contenidos del libro han sido estructurados de forma que puedan eliminarse algunos apartados, sin que por ello se pierda continuidad en la exposición. Por ejemplo, en el primer capítulo pueden eliminarse los detalles de las limitaciones de las fórmulas de Grübler y Malishev, y también las leyes de formación de cadenas cinemáticas si no es imprescindible incluir la síntesis estructural. En el capítulo segundo hay partes, como la formulación de los campos de velocidades y de aceleraciones, que han podido anticiparse en asignaturas previas como Mecánica Aplicada. También puede ser suficiente explicar la geometría del movimiento plano justo hasta la circunferencia de las inflexiones. Del capítulo tercero, que es bastante amplio, pueden omitirse los métodos gráficos si se apuesta por un enfoque analítico para la resolución de los problemas de velocidades y aceleraciones. Incluso éste puede restringirse a los mecanismos de un grado de libertad, si existieran limitaciones de tiempo. El capítulo cuarto es un bloque completo que puede omitirse o no, dependiendo del programa de la asignatura en cada Escuela de Ingenieros. Igual ocurre con el último capítulo, dedicado a los mecanismos espaciales, el cual podría constituir, incluso, la primera parte de un curso de Robótica.

Las construcciones gráficas, trayectorias de puntos, posiciones de elementos y figuras en general son realistas. Una parte de ellas ha sido obtenida con ayuda de varios programas de ordenador para la simulación de mecanismos (MECAN4, BIEMAN y GIM), cuyo desarrollo he dirigido. MECAN4 y BIEMAN están basados en el cuadrilátero articulado y en el biela-manivela, respectivamente. Resuelven los problemas de posición, velocidades y aceleraciones. Disponen de multitud de capacidades, algunas de las cuales son: trayectorias, configuraciones abierta y cruzada, polodias, circunferencias notables, cúbicas, ángu-

lo de transmisión, ventaja mecánica, cognados, síntesis dimensional, giros y opciones de diseño. Estos programas, así como sus correspondientes manuales pueden bajarse libremente de la actual dirección web <<http://www.ehu.es/compmech>> del grupo de investigación del autor. Las representaciones de movimientos de mecanismos espaciales han sido generadas con el programa GIM. Éste es un programa de propósito general para la simulación cinemática de mecanismos planos y espaciales, cuya complejidad es superior a la de los dos anteriores. En la citada dirección web se encuentran también disponibles numerosos archivos con simulaciones de mecanismos.

Quiero dar las gracias a los profesores del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad del País Vasco que han compartido conmigo la docencia de esta disciplina, con los cuales he contrastado mi personal punto de vista y de los que he aprendido. Más concretamente, agradezco a los profesores Ch. Pinto, V. Petuya, J. Aguirrebeitia y O. Altuzarra las sugerencias e ideas con las que han contribuido a la realización de este texto. Asimismo, doy las gracias al profesor R. Avilés, quien me introdujo en el mundo de los mecanismos.

Finalmente, dedico esta obra a mi esposa M.^a Ángeles y a mis hijos Cristina y Josu, por su paciencia y comprensión, y en compensación por el tiempo que este trabajo me ha restado de estar con ellos.

*Alfonso Hernández
Catedrático de Universidad
Bilbao, 2 de julio de 2004*

1

Nociones básicas sobre mecanismos y su diseño

1.1. Introducción

En este capítulo se establecen los conceptos fundamentales relativos a los mecanismos y las máquinas. Las dos principales funciones de estos dispositivos mecánicos son: la generación de movimiento y la transmisión de fuerzas. Adoptando dichas funciones como criterios, se establece una clasificación general de los mecanismos, en la que se presentan numerosos ejemplos; sobre todo de los mecanismos de barras a los que este texto dedicará una mayor atención. A continuación se describe el proceso de diseño de un mecanismo, detallando las etapas de síntesis estructural y síntesis dimensional, así como las funciones de los análisis cinemático y dinámico en dicho proceso.

En la segunda parte de este capítulo se analiza la estructura de un mecanismo, la cual está basada en dos conceptos: el elemento y el par cinemático (enlace entre elementos). Ambos son definidos y clasificados según distintos criterios. La descripción estructural de un mecanismo exige la representación simplificada de los diferentes tipos de elementos y pares que lo constituyen, para lo cual se utiliza la denominada notación simbólica. A continuación, se exponen los criterios de Grübler y Malishev para la obtención del número de grados de libertad de los mecanismos planos y espaciales, respectivamente. A partir de la fórmula de Grübler se desarrollan las leyes de formación de cadenas cinemáticas planas. Fijando cada uno de los elementos de la cadena se obtienen distintos mecanismos, a los que se denomina inversiones. La obtención de las cadenas cinemáticas y de sus correspondientes inversiones constituye una parte importante del proceso de diseño de mecanismos, el cual también será descrito en este capítulo.

1.2. Conceptos básicos sobre mecanismos y máquinas

Tradicionalmente, la Teoría de Mecanismos y Máquinas se ha dividido en dos grandes partes: Cinemática y Dinámica. La primera estudia el movimiento de los mecanismos sin

tener en cuenta las causas que lo producen. En ella sólo aparecen unidades de longitud y tiempo. La Cinemática depende directamente de las características geométricas de los mecanismos. Por otro lado, la Dinámica incluye en su estudio las acciones que provocan el movimiento de los mecanismos estableciendo la relación que existe entre ambos (fuerzas y movimientos).

Esta división proviene claramente de las dos funciones básicas que se han buscado en los mecanismos y máquinas. La primera de ellas es la necesidad de generar una serie de movimientos; la segunda, obtener una fuerza motriz. Precisamente, los términos *mecanismo* y *máquina* están claramente asociados a sendas funciones. Así, al dispositivo se le denomina mecanismo cuando en su análisis sólo interviene el concepto de movimiento (posiciones, velocidades y aceleraciones). Sin embargo, al mismo dispositivo se le denomina máquina cuando incluye además la idea de transmisión de fuerzas, predominando incluso esta última sobre la primera.

Por ejemplo, consideremos un motor de combustión como el representado en la figura 1.1. Se habla de mecanismo biela-manivela cuando se está explicando cómo el movimiento rectilíneo-alternativo del pistón es convertido en un movimiento de rotación del elemento de salida, que es el eje. Sin embargo, cuando se indica cómo la fuerza originada por la presión de los gases es convertida en un par aplicado al cigüeñal a través de la biela, se está aludiendo a la máquina. Sin entrar en mayores disquisiciones, conviene indicar que el concepto de máquina posee matices diferentes en un área afín como el de las Máquinas y Motores Térmicos.

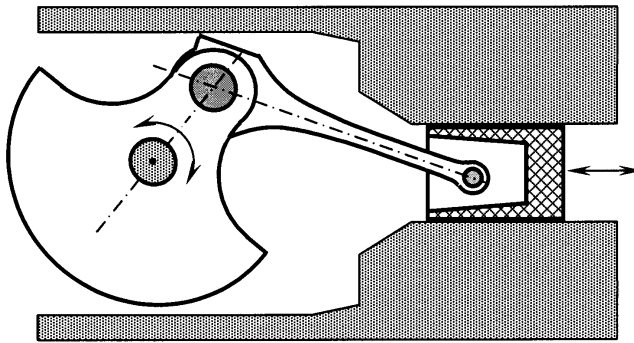


FIGURA 1.1. Motor de combustión.

Dicho todo esto, el sentido común induce a pensar que nunca debería considerarse la fuerza separadamente del movimiento. De hecho, una primera definición oficial (reconocida por la IFToMM, International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms), que engloba ambos términos (mecanismo y máquina) sería: “dispositivos que transfieren movimiento y acciones (fuerzas y momentos) desde un elemento de entrada a un elemento de salida”. No obstante, toda vez que en una categoría de máquinas la fuerza desempeña el papel predominante, mientras que en la otra lo desempeña la variedad de

movimientos, parece adecuado seguir al lado de la tradición. En este sentido, y tras este breve preámbulo, una definición más precisa de mecanismo sería la siguiente:

Conjunto de elementos mecánicos, uno de los cuales es fijo, en contacto unos con otros mediante uniones imperfectas de forma que puede haber movimiento relativo entre ellos, y con el objetivo de transmitir movimiento desde un elemento de entrada hasta otro de salida.

En esta definición, el concepto de unión imperfecta es equivalente al de enlace en Mecánica Fundamental, y al de par cinemático en Teoría de Mecanismos y Máquinas. Este concepto será analizado con detalle en próximos epígrafes.

Otra idea básica en el estudio dinámico de un sistema mecánico es el concepto de sólido rígido. En realidad, todos los sólidos son deformables, sin embargo, hay veces que los resultados que se obtienen utilizando tanto la hipótesis de sólido rígido como la de sólido deformable, se ajustan por igual a la realidad. En ese caso, es una ventaja utilizar la hipótesis de sólido rígido ya que las ecuaciones resultantes que gobiernan el problema son mucho más sencillas. En otras ocasiones, cuando la flexibilidad real de los elementos de una máquina influye de forma notable en su respuesta, la hipótesis de sólido rígido no es admisible. Cuando esto ocurre, el problema debe abordarse según un punto de vista más general que incluya las teorías de la Dinámica del Sólido Deformable, también conocida como Teoría de Vibraciones.

1.3. Tipos de mecanismos y sus aplicaciones

La mayoría de los mecanismos son accionados o conducidos por un único actuador. Los movimientos generados pueden ser muy variados, desde los más simples, como los rotatorios alrededor de un eje fijo o los lineales alternativos, hasta los más complejos en el espacio tridimensional. El mecanismo establece unas relaciones funcionales de movimiento y fuerza entre el elemento de entrada y el de salida. Este último determina la aplicación del mecanismo, mientras que la elección del primero definirá el tipo de actuador a utilizar (figura 1.2).

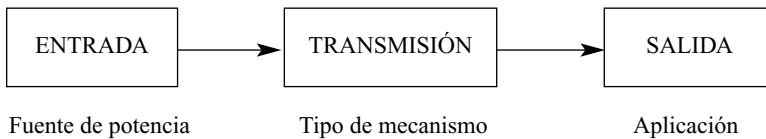


FIGURA 1.2. Relaciones funcionales en un mecanismo.

Los actuadores o fuentes de potencia pueden ser: rotativos, lineales, manuales y de energía almacenada. Las principales fuentes de potencia rotativas son: motores eléctricos de corriente alterna o continua, motores paso a paso para el control de posición y servo-

motores. Las fuentes de potencia lineales son, básicamente, cilindros hidráulicos y neumáticos, cilindros eléctricos y motores con bovinado lineal. Manivelas y palancas son las fuentes de potencia manuales. Por último, muelles, elementos elásticos y volantes de inercia constituyen las fuentes de potencia basadas en el almacenamiento y liberación de energía.

A partir de los otros dos conceptos de la figura 1.2 (tipo de mecanismo y aplicación) se establecen sendos criterios para realizar otras tantas clasificaciones de los mecanismos. Esto tiene su importancia, pues el principal motivo por el cual se establecen clasificaciones de mecanismos es ayudar al ingeniero a identificar estructuras cinemáticas capaces de satisfacer los requisitos de diseño. Se han hecho bastantes intentos (Artobolevski, 1977; Kozhevnikov, 1981; Chironis, 1996) para realizar clasificaciones de mecanismos, pero dada la complejidad de la tarea no se ha llegado a una clasificación general unificada. Sin embargo, lo que sí se tiene claro son los dos criterios fundamentales de clasificación: tipología y función.

Por su tipología, los mecanismos se clasifican según la naturaleza de las partes que los componen, así como por el tipo de enlaces.

La clasificación de los mecanismos por su función atiende a cuál es el objeto o función que debe cumplir el mecanismo. Ejemplos de ello son: la generación de un determinado movimiento, el desarrollo de una fuerza concreta, o una combinación de ambos, es decir, vencer una fuerza según un determinado movimiento.

Las clasificaciones más completas combinan ambos criterios. Quizás, la más conocida es la debida a I. I. Artobolevski (1977), la cual utiliza como criterio básico de clasificación el tipológico o estructural. Los grupos de mecanismos resultantes de esta primera clasificación se subdividen, a su vez, según las distintas funciones que son capaces de desempeñar.

Puesto que éste es un enfoque razonable, aquí se va a proponer una clasificación resumida siguiendo esta misma idea. Así, los mecanismos pueden clasificarse según su tipología en los siguientes grupos:

- a) *Mecanismos de levas*. Son mecanismos compactos y relativamente fáciles de diseñar (figura 1.3). Entran en juego cuando al elemento de salida se le exigen funciones tales como:
 - Una ley de desplazamiento (y/o velocidad y aceleración) compleja que no puede ser realizada por un mecanismo de barras.
 - Una detención temporal del elemento conducido a pesar del movimiento continuo del elemento de entrada.
 - Generar un ciclo del elemento conducido para n ciclos del elemento de entrada.

- b) *Mecanismos de engranajes*. Trabajan no sólo en forma de pareja de ruedas dentadas, sino también en combinaciones más complejas denominadas trenes de engranajes (figura 1.4). Sus principales funciones son:
 - Transmisión de potencia entre dos ejes.
 - Reductores o multiplicadores: se utilizan para reducir o aumentar el número de revoluciones del eje de salida respecto del número de revoluciones del eje de entrada.

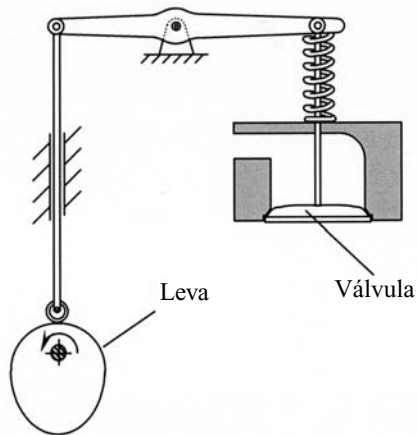


FIGURA 1.3. Leva de accionamiento de válvula.

- Cajas de cambios. Permiten variar escalonadamente el número de revoluciones del eje de salida mediante diferentes conexiones de engranajes, para una velocidad concreta del eje de entrada.

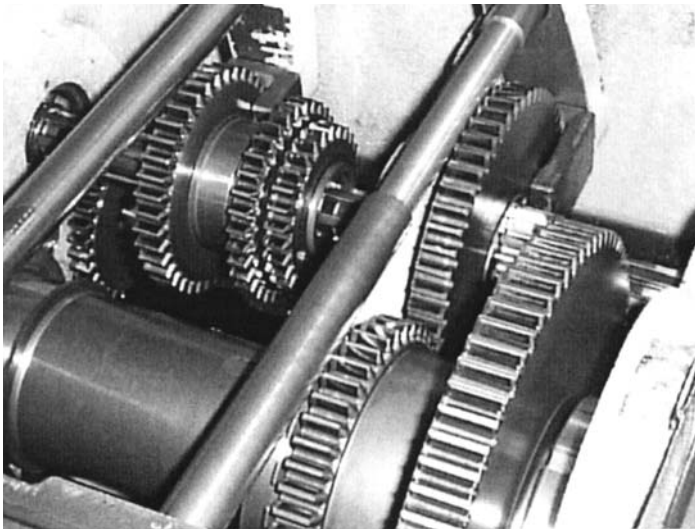


FIGURA 1.4. Tren de engranajes.

- c) *Mecanismos de tornillo*. Se utilizan profusamente en maquinaria. Algunas de sus aplicaciones más comunes se dan en máquina herramienta (figura 1.5), tornillos de banco para sujeción de piezas, tornillos de prensa y gatos. Sus principales funciones son:

- Conversión del movimiento de rotación en movimiento lineal de traslación.
- Como elemento de fijación o bloqueo.
- Aplicación de acciones de compresión.
- Transmisión de potencia (fuerza y movimiento).

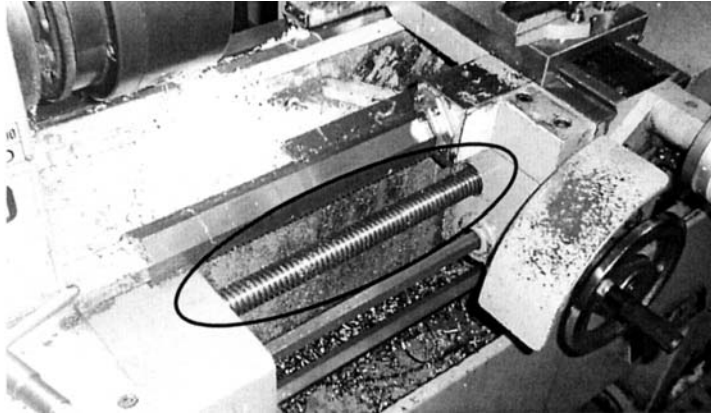


FIGURA 1.5. Husillo de torno paralelo.

d) *Mecanismos con elementos flexibles*. Pueden distinguirse dos tipos de elementos flexibles. De un lado, las correas, los cables y las cadenas; de otro, los resortes. Los del primer tipo son elementos unirrigidos que absorben bien las cargas de choque y reducen las vibraciones. Dentro de ellos, los más importantes son las correas (figura 1.6), cuyas funciones y utilidades son las siguientes:

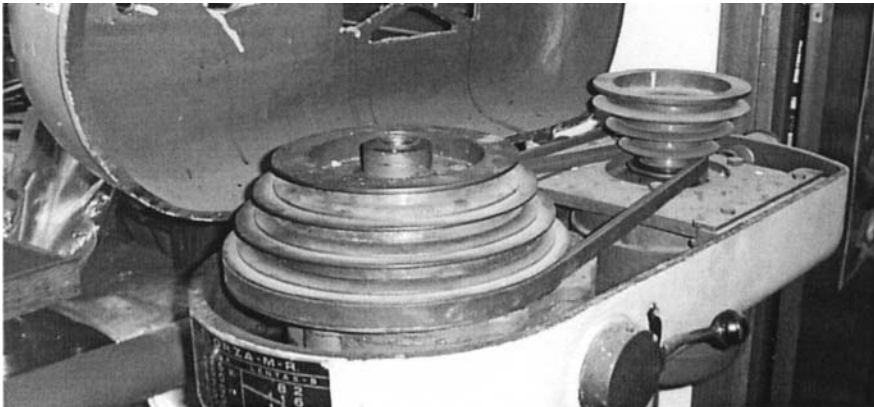


FIGURA 1.6. Transmisión mediante correa.

- Transmisión de potencia entre dos ejes, sobre todo cuando la distancia entre ambos es notable, ya que en este caso la utilización de engranajes es inviable.

Los cables se utilizan cuando las distancias son extraordinariamente grandes, y las cadenas cuando hay peligro de deslizamiento de la correa.

- Frenos de cinta.
- Elemento de transmisión en los variadores de velocidad.

Los resortes pueden trabajar a tracción, compresión y torsión. Sus principales funciones o aplicaciones son las siguientes:

- Absorbedores de energía o cargas de choque, como en las suspensiones de vehículos o en los topes de ferrocarril.
- Fuentes de potencia.
- Elementos de cierre de fuerza en mecanismos (levas, embragues y frenos).

e) *Mecanismos con elementos fluidos*. Las principales funciones y aplicaciones de los mismos son:

- Actuadores hidráulicos y neumáticos (figura 1.7).
- Multiplicadores de fuerza.
- Automatización del funcionamiento de máquinas y dispositivos con ciclos de gran complejidad.



FIGURA 1.7. Actuador hidráulico.

f) *Mecanismos de barras*. Constituyen el grupo más amplio y con mayor número de aplicaciones en la industria; son, además, el objeto central de este texto. Por todo ello, van a tratarse con mayor detalle en el siguiente subapartado.

1.3.1. Mecanismos de barras

En primer lugar, hay que indicar que el concepto de barra debe ser entendido en un sentido amplio y no como un elemento longitudinal. Los ámbitos de aplicación de estos mecanismos son tan variados como la máquina herramienta, la automoción, el ferrocarril, maquinaria de elevación y transporte, aeronáutica, maquinaria textil, biomecánica y, en general, en cualquier tipo de industria. Las principales funciones y/o aplicaciones de estos mecanismos son:

- Conversión de movimientos.



FIGURA 1.8. Rotación-rotación.

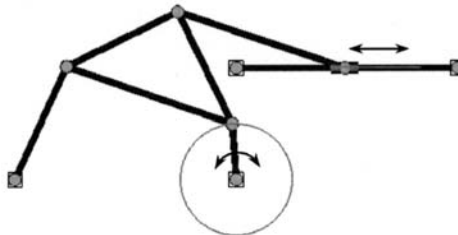


FIGURA. 1.9. Rotación-traslación.

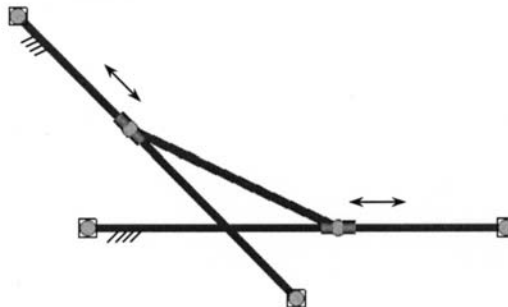


FIGURA 1.10. Traslación-traslación.

- Mecanismos de guía: se caracterizan porque alguno de sus puntos genera tramos rectos de forma exacta (figura 1.11) o aproximada, tramos circulares o curvas especiales.

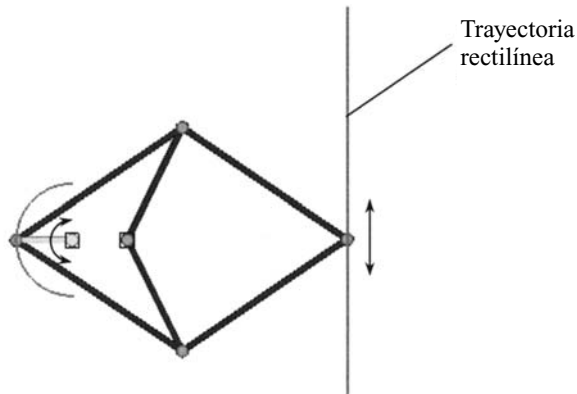


FIGURA 1.11. Mecanismo de Peaucellier-Lipkin.

- Generación de elementos con movimiento de traslación. En la figura 1.12 se representa un mecanismo que posee un elemento que se traslada (velocidad angular nula) según un tramo horizontal recto.

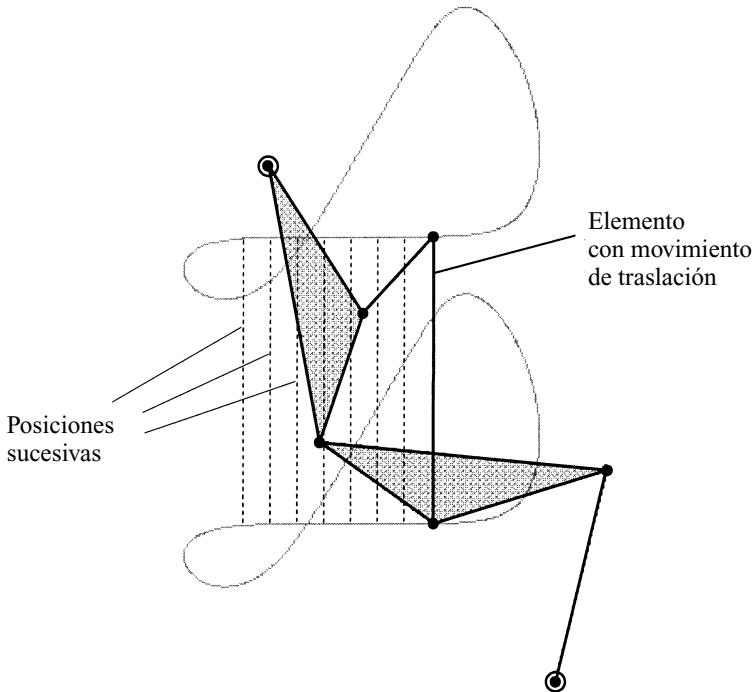


FIGURA 1.12. Mecanismo con elemento que se traslada.

- Pantógrafo (figura 1.13): mecanismo para obtener curvas semejantes a una dada.

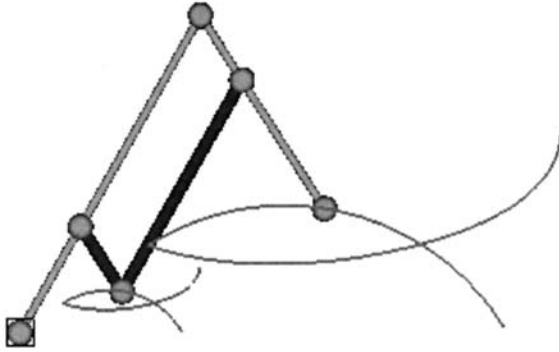


FIGURA 1.13. Pantógrafo.

- Movimientos intermitentes del elemento de salida con paro total del mismo. Esto puede conseguirse empleando mecanismos con un enlace unilateral, como los mecanismos de trinquete. También se puede lograr mediante mecanismos que varían sus condiciones de enlace durante ciertas posiciones del elemento de entrada, como los mecanismos de cruz de Malta (figura 1.14) o las ruedas dentadas incompletas. En máquinas rápidas y con masas considerables se emplean mecanismos de barras en los que determinados puntos describen trayectorias con tramos circulares.

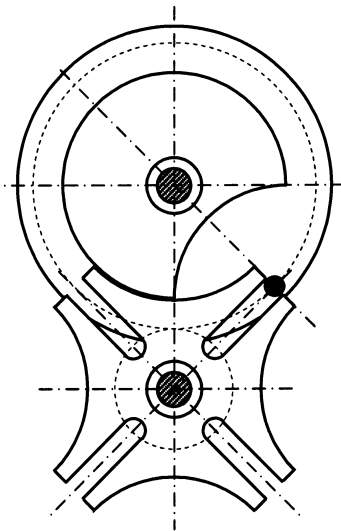


FIGURA 1.14. Mecanismo de cruz de Malta.

- Mecanismos de alimentación de máquinas automáticas (figura 1.15).

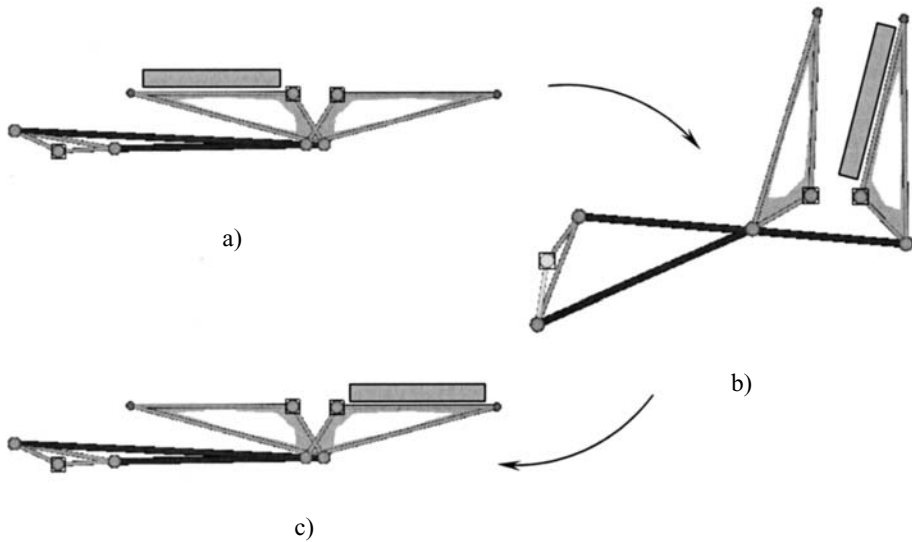


FIGURA 1.15. Mecanismo para volteo de perfiles (secuencia a-b-c).

- Mecanismos con carrera regulable. Son necesarios cuando la carrera del elemento conducido está relacionada con la forma o las dimensiones de la pieza a trabajar. Un ejemplo típico es la longitud de cepillado en las limadoras (figura 1.16).

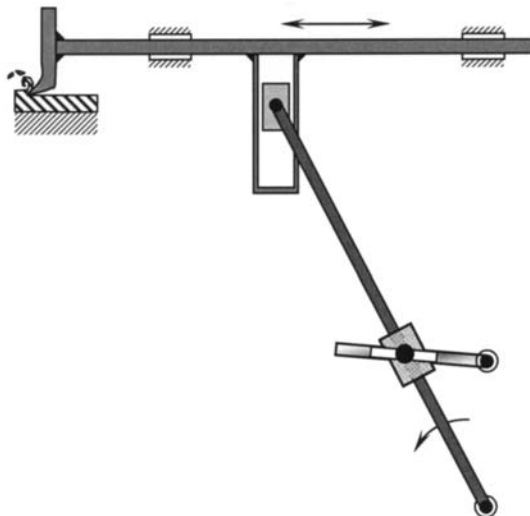


FIGURA 1.16. Esquema de limadora.

- Mecanismos para multiplicación de fuerzas. Se caracterizan por la obtención de una ventaja mecánica en el elemento de salida; es decir, la fuerza que puede vencer

el elemento de salida es muy superior a la aplicada al elemento de entrada. Para ello se diseña el mecanismo en las proximidades de puntos muertos (posiciones que serán estudiadas en el capítulo 3). Dos ejemplos de este tipo de mecanismos son las cizallas y las prensas (figura 1.17).

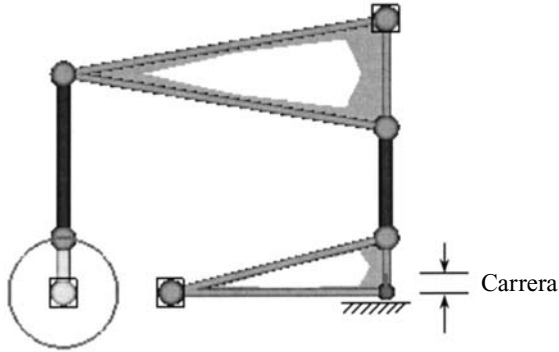


FIGURA 1.17. Esquema de prensa en la posición de máxima ventaja mecánica.

- Juntas cinemáticas. El objeto fundamental de las mismas es la unión entre ejes. La mayoría de ellas son mecanismos espaciales. La más conocida de todas es la junta Universal (figura 1.18), también conocida con los nombres de junta Cardan y junta Hooke.

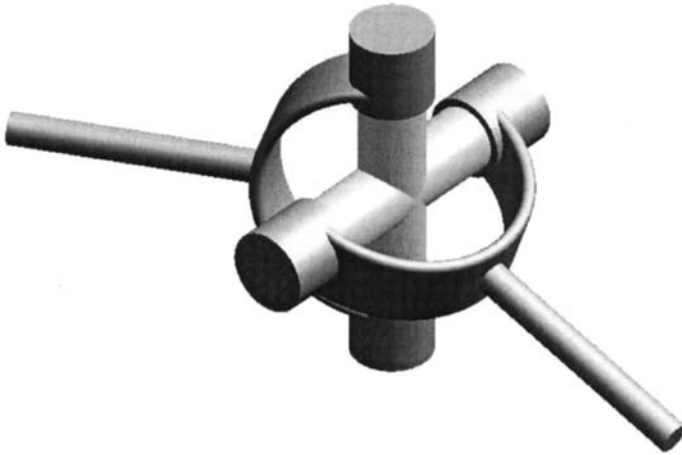


FIGURA 1.18. Junta Cardan.

- Robots (figura 1.19). Son mecanismos de cadena abierta con varios grados de libertad, los cuales necesitan de un sistema de control y sensorización para programar diferentes tareas. Por ello ofrecen una gran variedad de aplicaciones como son:

manipulación de piezas, soldadura, pintura con *spray*, montaje de piezas, procesos de fabricación, inspección y manejo de materiales peligrosos.



FIGURA 1.19. Robot KUKA KR 60/2 (cortesía de KUKA).

- Manipuladores paralelos (figura 1.20). Son mecanismos de cadena cerrada con varios grados de libertad, caracterizados por poseer un elemento flotante, la plataforma, la cual se conecta al bastidor mediante varias cadenas cinemáticas independientes en paralelo. Esta estructura es más rígida que la de los robots, por lo que las plataformas paralelas aguantan, en comparación, cargas superiores.

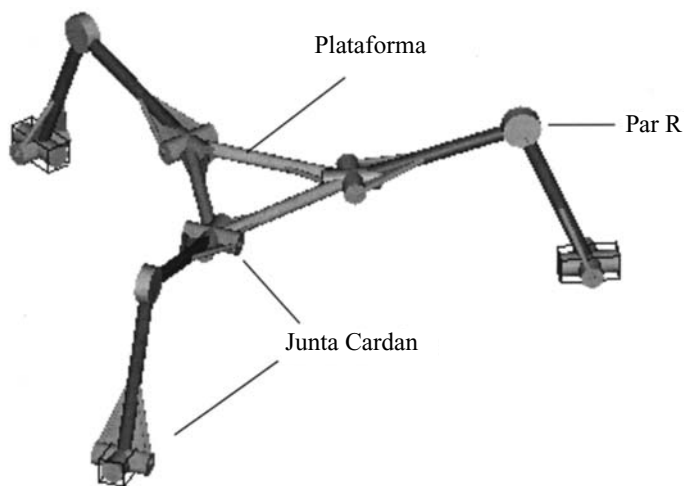


FIGURA 1.20. Plataforma paralela con 3 grados de libertad (Zlatanov, 2002).

1.4. Diseño de mecanismos

1.4.1. Presente y futuro de los mecanismos

Algunos investigadores piensan que la edad de las invenciones mecánicas ha finalizado, y que sólo habrá avances realmente significativos en disciplinas como la Electrónica, Ciencias de la Computación o Comunicaciones. Aunque esto no es cierto, es verdad que el período cumbre de la Mecánica ya pasó. No obstante, hay ámbitos como la Robótica, la Aeronáutica, las Tecnologías de Fabricación o la Automoción, donde el diseño mecánico es todavía crucial. La diferencia respecto a épocas pasadas estriba en una mayor interdependencia con otras disciplinas. Probablemente, los futuros desarrollos no podrán ser ubicados exclusivamente en el ámbito mecánico, puesto que a buen seguro incorporarán componentes eléctricos o electrónicos, microprocesadores, elementos de control o dispositivos hidráulicos o neumáticos.

A todo esto hay que incluir otro factor que ha revolucionado completamente el Diseño de Máquinas; esto es, la incorporación de nuevos materiales como los plásticos, los materiales compuestos, las cerámicas, el titanio, etc. Todavía se abren nuevos horizontes en el Diseño de Máquinas, donde la Realidad Virtual será una herramienta de gran utilidad, sobre todo en mecanismos espaciales. Asimismo, el software de simulación de mecanismos deberá mejorar notablemente. Están apareciendo nuevas aplicaciones en Robótica, como las plataformas paralelas y las estructuras adaptativas. Ambas poseen una arquitectura distinta a la de los tradicionales robots, de manera que para ciertas aplicaciones reportan ventajas o simplemente son insustituibles. Pero, quizás, la línea de desarrollo más innovadora está constituida por los denominados micromecanismos, o incluso descendiendo aún más en la escala dimensional, la incipiente Nanotecnología. Con todo, no es aventurado decir que, a pesar de los avances que nos depare el futuro, siempre habrá un tema abierto: el proceso de diseño. La razón es que en él hay una parte que no es análisis, sino síntesis; es decir, no es ciencia, sino experiencia, intuición, sentido común e imaginación. Esta compleja combinación es muy difícil de sistematizar, al menos con los parámetros con los que hoy día se mueve la Inteligencia Artificial. Precisamente en el siguiente subpartado se van a exponer algunas ideas sobre el diseño de mecanismos.

1.4.2. Nociones sobre diseño en mecanismos

El diseño de mecanismos es un proceso complejo que incluye dos elementos básicos: el *análisis* y la *síntesis*. La misión del primero es llegar a entender el funcionamiento de un mecanismo dado, mientras que el objeto del segundo es la concepción del mecanismo de manera que verifique una serie de requisitos de funcionamiento. Sin embargo, el diseño no es una suma de ambos, puesto que la tarea que realiza la síntesis es mucho más compleja y creativa; es más, en mi opinión, prácticamente podría equipararse la síntesis al diseño, siendo el análisis una herramienta o elemento auxiliar de la síntesis. Por ejemplo, un procedimiento de diseño en ingeniería es el denominado de “prueba y error”, consis-

tente en realizar sucesivos análisis para, en función de los resultados, ir variando “a sentimiento” los parámetros de diseño hasta verificar las especificaciones de funcionamiento. Obviamente, éste es un pobre procedimiento que realmente no se utiliza en el diseño de mecanismos.

Hasta la fecha, se han hecho grandes esfuerzos en la sistematización del diseño de mecanismos. Sin embargo, es todavía una tarea “a caballo” entre la ciencia y el arte, por lo que no existe un procedimiento detallado paso a paso, cuya consecución permita obtener una determinada solución. De hecho, un determinado movimiento puede ser logrado de muy diferentes maneras. La clave está en diseñar el mecanismo más apropiado de entre los posibles. Para ello se establecen criterios de selección que pueden ser de carácter cinemático, como aceptables índices de calidad en la transmisión del movimiento, o de otra índole, como coste, ajuste al espacio disponible, fiabilidad, proceso de fabricación, etc. A continuación se describe la sistemática que se sigue a la hora de diseñar un mecanismo y que, en realidad, no es más que una secuencia de etapas con una cierta reorientación:

- a) El primer paso consiste en definir detalladamente la *función* que debe realizar el mecanismo junto con el resto de las especificaciones de diseño. Hay que recordar que los mecanismos se diseñan para generar movimientos, realizar acciones resistentes o combinar ambas funciones.
- b) A continuación se debe elegir el tipo de mecanismo apropiado para realizar esa función. Esta fase se apoya fuertemente en la experiencia e imaginación del diseñador y se denomina *síntesis de tipo*. Dicha síntesis consiste en seleccionar un determinado tipo (estructura cinemática) de mecanismo: un sistema de levas, un tren de engranajes, un mecanismo de barras, o una combinación de los mismos. Para ello, disponer de una buena clasificación de mecanismos puede ser una ayuda importante. La elección del tipo de mecanismo es clave en la consecución de la función objetivo; para ello es importante darse cuenta del potencial geométrico del mecanismo. Adicionalmente, debe recalarse que en la elección del tipo de mecanismo interviene otro tipo de factores (facilidad de mantenimiento, materiales disponibles, proceso de fabricación, etc.) que, incluso, pueden ser determinantes.

Una vez elegido el tipo de mecanismo, sus barras pueden articularse de distintas maneras, dando lugar a diferentes mecanismos. La obtención de todos los mecanismos posibles que pueden constituirse con un determinado número de elementos se conoce como *síntesis de número*. La tabulación de familias de mecanismos, cada una con el mismo número de elementos y un determinado número de grados de libertad, permite comparar mecanismos de la misma complejidad. Después de esta comparación, otra más detallada puede hacerse en cada familia considerando características tales como el número de puntos fijos o el número de articulaciones en cada elemento; teniendo en cuenta que una articulación doble es más barata y ocupa menos espacio que dos simples; o que dos articulaciones simples permiten al diseñador más libertad que una doble.

Un ejemplo (Hain, 1967; Molian, 1997) clarificará el concepto de síntesis de número. Se desea montar un aparejo de labranza en la parte trasera de un tractor.

Mediante un accionamiento rotativo el aparejo se eleva quedando recogido, y se baja permaneciendo aproximadamente paralelo al suelo. En la etapa de síntesis de tipo decide utilizarse un mecanismo de 6 barras por razones constructivas y de diseño. La solución dada por la síntesis de número está constituida por 10 mecanismos (figura 1.21) de 1 grado de libertad con 7 articulaciones (las dobles suman dos):

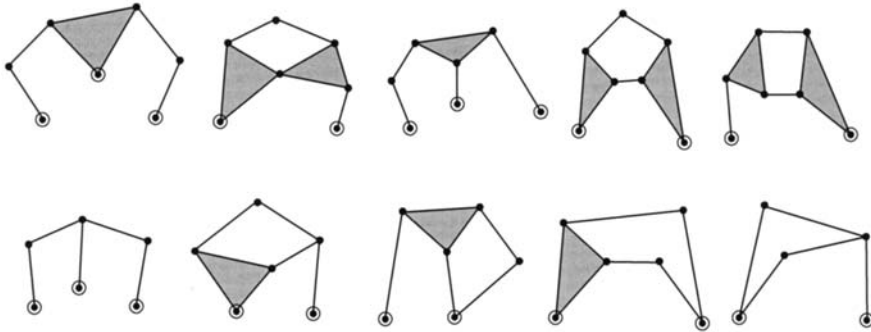


FIGURA 1.21 Diferentes mecanismos de 6 barras.

El tractor es el elemento fijo, y el aparejo se montará solidario sobre un elemento flotante. Con estas premisas pueden obtenerse múltiples soluciones, dos de las cuales se representan en la figura 1.22.

Como se ha visto, la síntesis de tipo y la síntesis de número van seguidas en el proceso de diseño; es más, a veces se solapan siendo difícil diferenciarlas. En cualquier caso, constituyen una etapa del diseño en la cual no intervienen las dimensiones del mecanismo que se conoce con el nombre de *síntesis estructural*.

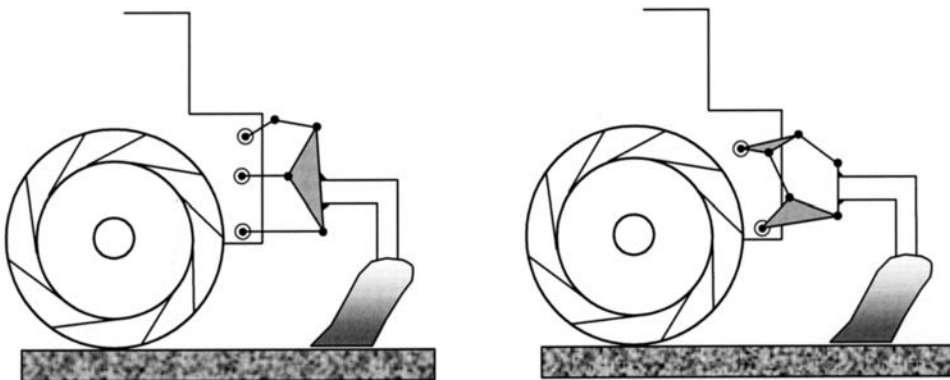


FIGURA 1.22. Dos de las soluciones dadas por la síntesis de número.

Antes de pasar a la siguiente etapa merece la pena destacar otra forma de generar un mecanismo concreto, que consiste en combinar bloques de elementos que realizan transformaciones de movimiento básicas (Erdman, 1997) como:

- Una rotación en otra rotación; utilizando, por ejemplo, cualquiera de los cuatro bloques siguientes: un cuadrilátero articulado, una pareja de engranajes, transmisión por correas y una leva rotación con seguidor de rotación.
- Una rotación en una traslación mediante los bloques: biela-manivela, cremallera-piñón, tuerca-tornillo y una leva de rotación con seguidor de traslación.
- Una traslación en otra traslación, usando por ejemplo una doble deslizadera o una leva de traslación con seguidor de traslación.

El ejemplo más típico que puede ponerse es la transmisión de un vehículo automóvil: del motor de arranque al cigüeñal mediante un bloque correa-polea, el sistema de inyección (mecánica) mediante una leva de rotación con seguidor de traslación; el motor de combustión es un mecanismo de biela-manivela, y la transmisión del cigüeñal a las ruedas se realiza mediante parejas de engranajes.

- c) Definido ya un mecanismo concreto, del cual se conoce su capacidad geométrica para realizar la función objeto del diseño, se trata ahora de obtener las dimensiones principales del mismo para que cumpla estrictamente dicha función. A esta etapa se la denomina *síntesis dimensional*. Realmente existen muchos procedimientos para realizar la síntesis dimensional, aunque ninguno tan robusto como para cumplir cualquier tipo de función objetivo. Si la función es sencilla, podrán utilizarse procedimientos gráficos o analíticos como los que serán explicados en el capítulo 4. En caso contrario, existen métodos específicos, más sofisticados, capaces de abordar este problema. Uno de ellos es la denominada síntesis óptima, la cual consiste en expresar el objetivo del mecanismo mediante una función matemática que posteriormente será minimizada.

Considérese, a modo de ejemplo, el siguiente caso, en el que se pretende aplicar un cordón o una serie de puntos de soldadura según una determinada forma geométrica. La máquina de soldar se ha ubicado en el punto de acoplador de un cuadrilátero articulado. Se trata de obtener las dimensiones del cuadrilátero para que éste sea capaz de trazar un cordón de soldadura en forma de “L” (señalado a trazos en la figura 1.23). Para ello, se ha utilizado un procedimiento de síntesis óptima (Avilés, 1994) que, partiendo del cuadrilátero articulado de la figura 1.23, ha alcanzado la solución dada en la figura 1.24. En ella, puede observarse la excelente aproximación entre la trayectoria deseada (a trazos) y la generada por el cuadrilátero resultante de la síntesis.

- d) Una vez conocidas las dimensiones principales del mecanismo hay que comprobar mediante los correspondientes *análisis cinemáticos*, el cumplimiento o grado de cumplimiento de los requisitos cinemáticos contenidos en la función objetivo. Por lo tanto, habrá que realizar análisis de posiciones para contrastar trayectorias, obtener el ángulo de transmisión o la ventaja mecánica; asimismo, serán necesarios cálculos de velocidades y aceleraciones en caso de que existan restricciones de este tipo.

Generalmente, los mecanismos, además de generar movimientos, realizan acciones resistentes. El *análisis dinámico* permite obtener las reacciones en los pares cinemáticos, así como las fuerzas necesarias para mover el mecanismo. Estos

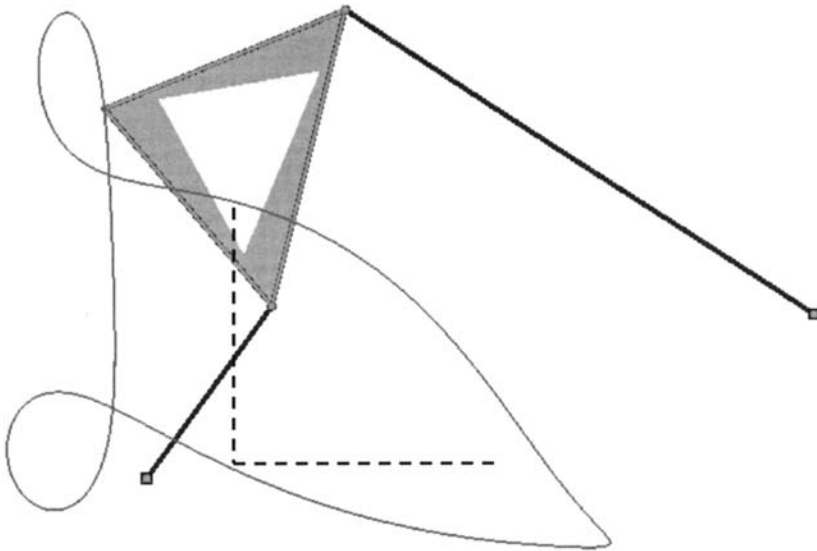


FIGURA 1.23. Mecanismo de partida para la síntesis dimensional.

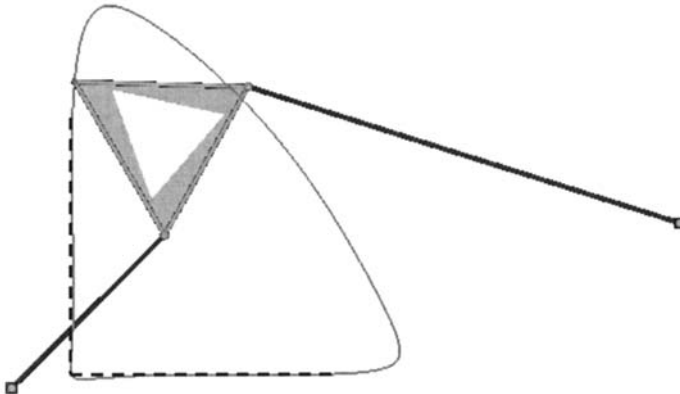


FIGURA 1.24. Mecanismo resultante de la síntesis dimensional.

datos son utilizados para dimensionar los accionamientos, los elementos y las juntas mecánicas. Con esto se obtienen las denominadas dimensiones secundarias (espesores, secciones, etc.). Pero el análisis dinámico requiere como datos las fuerzas de inercia de los elementos, que a su vez dependen de sus correspondientes aceleraciones, por lo que de nuevo es necesario el análisis cinemático. Ya se ve que éste es un proceso iterativo en el que, además de las dimensiones secundarias, se obtienen las masas e inercias de los elementos del mecanismo y se comprueban los requisitos dinámicos y resistentes del mecanismo.

En el organigrama de la figura 1.25 se representan las distintas etapas en el proceso de diseño de un mecanismo, así como la relación entre las mismas.

En los casos en que la función objetivo posee una mayor complejidad, podría considerarse la posibilidad de utilizar mecanismos con varios grados de libertad, disponiendo adecuadamente múltiples actuadores (motores) y coordinando electrónicamente sus movimientos. El diseño obviamente se simplifica, pero el resultado será más caro y también más ineficaz desde un punto de vista operativo. A no ser que la tarea exija un alto grado de flexibilidad, no es bueno abusar de mecanismos con varias entradas.

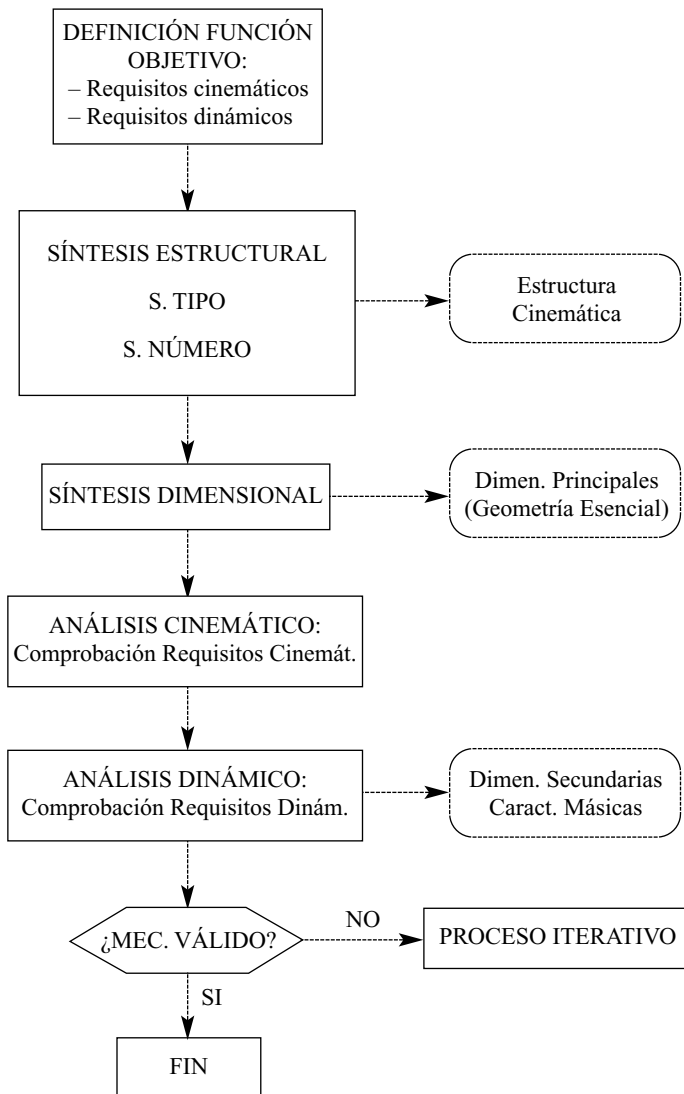


FIGURA 1.25. Ciclo de diseño de un mecanismo.

1.5. Transmisiones mecánicas

A veces la conexión entre el accionamiento y el elemento de entrada de un mecanismo no es directa, sino que se realiza a través de una serie de elementos mecánicos intermedios que constituyen las denominadas transmisiones mecánicas. En general, estos conjuntos mecánicos intermedios son propios de máquinas para producción continua, donde es necesario transmitir acciones de considerable magnitud. Este tipo de transmisiones suelen requerir regularidad de movimiento en el eje de entrada, elementos de conexión, reducción o multiplicación del número de revoluciones y suficiente espacio para su ubicación.

Un ejemplo representativo permitirá explicar con mayor concreción los elementos mecánicos que aparecen en una transmisión mecánica. En efecto, considérese el caso de una prensa mecánica para el conformado de chapa. Se supondrá ya realizada la síntesis del mecanismo adecuado para llevar a cabo tal función. Simplemente se aportará un resumen justificativo de la elección del mecanismo de biela-manivela como el más apropiado.

Los requisitos funcionales exigidos por la operación de conformado son: un movimiento rectilíneo alternativo, a la vez que se transmite una gran carga. Estos requisitos de movimiento y fuerza son verificados por un mecanismo de biela-manivela transmitiendo la fuerza en las cercanías de su posición de punto muerto (figura 1.26a). En dicha posición, en la cual se produce un alineamiento de las barras, el mecanismo alcanza una gran ventaja mecánica, por lo que la fuerza aplicada en el elemento de entrada experimenta una multiplicación en el elemento de salida. En la figura 1.26b se representa una variante mejorada del mecanismo anterior, constituida por un bloque biela-manivela (O_AAC) unido a un cuadrilátero articulado (O_AABO_B). Este mecanismo posee dos puntos muertos; el primero mantiene el punzón en la posición superior C sin aplicar prácticamente fuerza sobre la entrada, y sólo mediante la compresión de las barras O_BB y BA ; el segundo punto muerto C' permite la aplicación de una gran fuerza sobre la chapa.

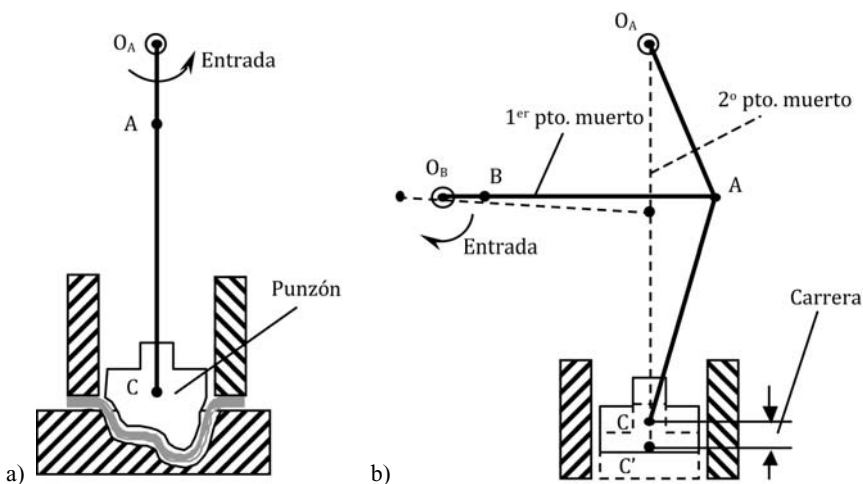


FIGURA 1.26. Mecanismos para conformado de chapa.

Entre la manivela y el motor van dispuestos una serie de mecanismos necesarios para la transmisión de la fuerza y del movimiento. La necesidad de estos mecanismos, así como su disposición a lo largo de la transmisión, va ser argumentada de acuerdo con el organigrama de la figura 1.27. Hay que indicar también, que los elementos mecánicos que aparecen en dicho organigrama no son exclusivos de las prensas, sino que aparecen en todas las transmisiones mecánicas.

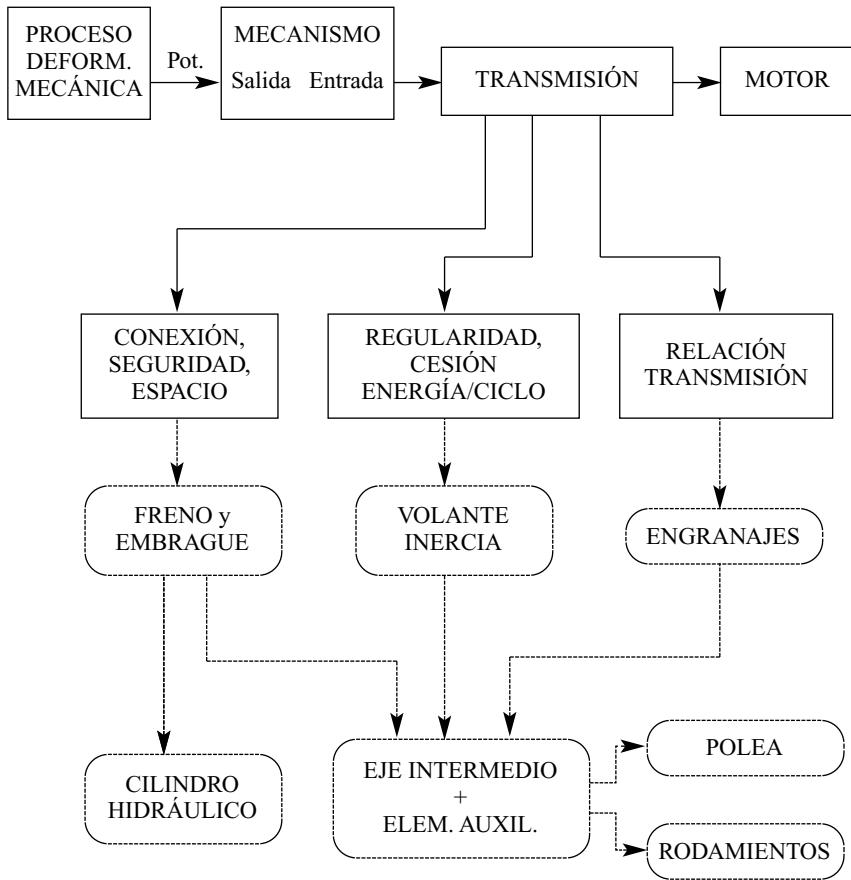


FIGURA 1.27. Organigrama de la transmisión.

El primer paso consiste en seleccionar el tipo de motor y realizar el dimensionamiento del mismo. Para esta aplicación resulta adecuado un motor eléctrico con la velocidad estándar de $n_m = 1.500$ rpm. La potencia del motor es el producto de la cadencia de golpes de la prensa n_p por la energía W cedida en cada golpe, mayorado por el rendimiento η de la operación en toda la transmisión: $Pot = n_p W/\eta$.

La velocidad angular del motor es, generalmente, mayor que la velocidad angular de la manivela. Esta reducción, definida por la relación de transmisión $\mu = n_p/n_m$, pue-

de conseguirse conjuntamente con una pareja de engranajes y una transmisión por correa.

Por otro lado, un motor eléctrico trabaja mejor con una velocidad angular aproximadamente constante, admitiendo a lo sumo pequeñas fluctuaciones. Pero teniendo en cuenta la gran variación del momento resistente, el cual es prácticamente nulo durante casi todo el ciclo y muy alto en las cercanías del punto muerto, se hace imprescindible un volante de inercia. Para esta aplicación, las dos funciones del volante son: la regularización de la velocidad angular, y el almacenamiento de energía durante una gran parte del ciclo para cederla después en el momento del golpe.

Toda transmisión exige un sistema de seguridad para frenar y desconectar la carga del eje motor. El freno es un elemento de seguridad en toda transmisión. Evita el embalamiento del eje y constituye una reacción rápida frente a circunstancias anómalas que pueden producirse durante el proceso de conformado; asimismo, consigue la parada total de la prensa una vez que el motor deja de funcionar. La conexión entre el eje motor y el resto de la transmisión ha de ser suave, razón por la cual es necesario un embrague. Para este tipo de aplicaciones son apropiados los embragues de fricción; de esta manera puede funcionar conjuntamente con el freno a través de un cilindro hidráulico.

La figura 1.28 es la cadena cinemática de la transmisión de una prensa, en la cual aparecen representados los anteriores elementos mecánicos (engranajes, volante de inercia, freno y embrague). Dichos elementos exigen un eje intermedio para poder realizar sus correspondientes funciones, además de por razones de espacio. En efecto:

- Los engranajes conectan dos ejes separados: el eje del piñón que es solidario al eje intermedio y el eje de la rueda que lo es al eje de la manivela del mecanismo de biela-manivela.
- Las operaciones de embragado y desembragado son, en sí mismas, la conexión y desconexión entre dos ejes: el eje motor y el eje intermedio (eje del piñón). Lo lógico es que la operación de frenado se realice sobre el eje intermedio.
- El volante de inercia puede aprovecharse de forma que una de sus caras trabaje como superficie de fricción en el embrague (figura 1.28); de esta manera hay que ubicarlo en el eje intermedio.

A su vez, el eje intermedio exige otros elementos auxiliares:

- Transmisión mediante correa entre el eje del motor y el eje intermedio. Puede utilizarse una correa plana circulando sobre la periferia del volante (figura 1.28), el cual actúa como una polea.
- Rodamientos (figura 1.28) para apoyar el volante sobre el eje intermedio, y el mismo sobre el bastidor.
- Cilindro hidráulico; las acciones del freno y del embrague pueden hacerse simultáneas desplazando el eje intermedio mediante un cilindro hidráulico (figura 1.28). El desplazamiento del pistón hacia la izquierda provoca el frenado del eje intermedio y el desembragado del motor; el desplazamiento del pistón hacia la derecha libera el eje intermedio del freno y lo acopla al eje motor.

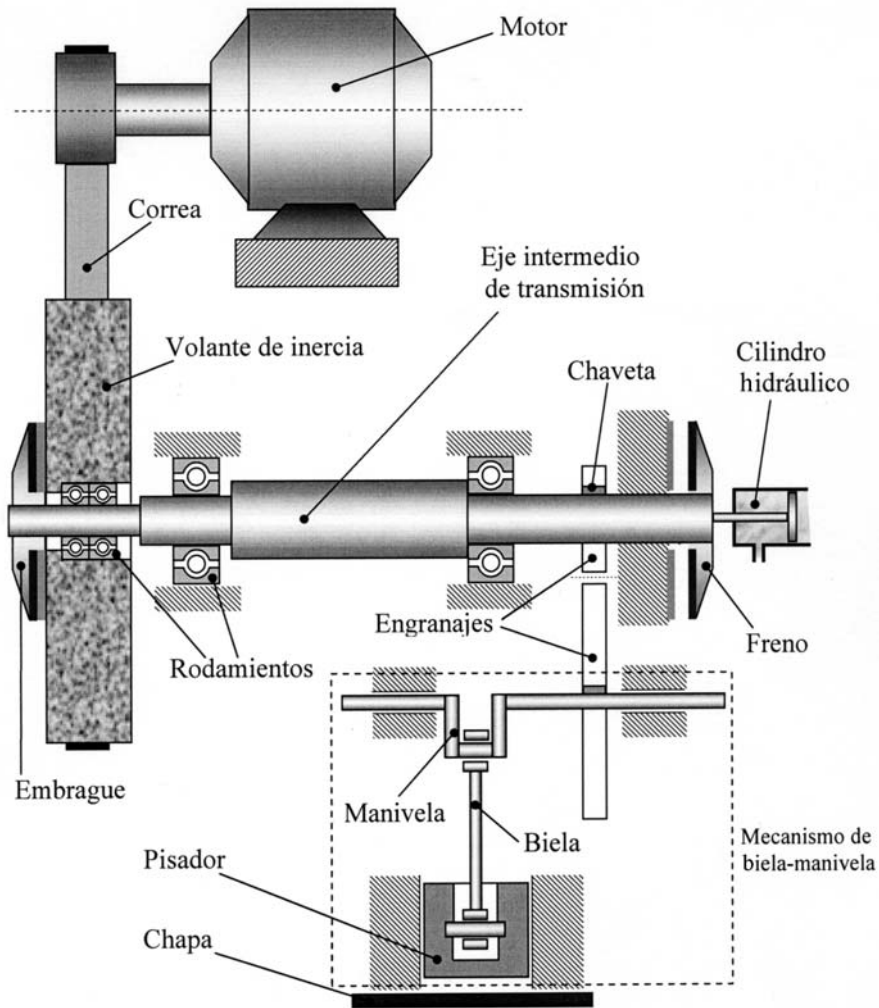


FIGURA 1.28. Esquema cinemático de la transmisión mecánica de una prensa.

1.6. Clasificaciones de los elementos y de los pares cinemáticos

De la definición de mecanismo se derivan dos conceptos importantes: el elemento y el par cinemático. El primero de ellos constituye la unidad básica de los mecanismos. El segundo tiene que ver con la forma de mantener el contacto entre los elementos y, por consiguiente, con el tipo de movimiento relativo que impone entre los mismos.

En concreto, se define elemento, barra, miembro o eslabón a cada una de las partes en que puede descomponerse un mecanismo de modo que verifique las dos siguientes condiciones simultáneamente: poseer movimiento relativo respecto al resto de los elementos y mantener respecto a ellos una discontinuidad de tipo físico. De acuerdo con esta defini-

ción, una correa es un elemento ya que, aunque unas partes de la misma tengan movimiento relativo respecto a otras, no existe en ella discontinuidad física. Por otro lado, varios sólidos rígidamente unidos entre sí, también constituyen un único elemento.

El número de variables independientes necesarias para definir la posición de un sólido libre respecto de una referencia fija es denominado número de grados de libertad de dicho sólido. Cada una de estas variables está asociada a un tipo de movimiento concreto del sólido. En el espacio, un sólido posee seis grados de libertad, es decir, puede realizar seis movimientos independientes entre sí: tres traslaciones y tres giros. El movimiento plano es una restricción del movimiento espacial, en el que un sólido posee tres grados de libertad: dos traslaciones y un giro. Existe otro tipo de movimiento en el que un sólido posee también tres grados de libertad, aunque a diferencia del anterior, todos ellos son de rotación. Es el denominado movimiento esférico, el cual será tratado más adelante.

Par cinemático o simplemente par, es la unión entre los distintos elementos de un mecanismo, que restringe algunos grados de libertad del movimiento relativo entre los elementos que une. De nuevo aparece el concepto de número de grados de libertad, aunque ahora aplicado al par cinemático, y aún volverá a serlo a otro concepto, el de mecanismo.

En función de las distintas características que pretendan resaltarse de los elementos o de los pares cinemáticos pueden hacerse varias clasificaciones de los mismos. En la bibliografía se describen numerosas clasificaciones, sin embargo aquí sólo van a reflejarse unas cuantas.

1.6.1. Varias clasificaciones de los elementos

- a) Atendiendo al *número de pares* que posean los elementos, éstos pueden clasificarse en monarios, binarios, ternarios, cuaternarios, *n*-arios (figura 1.29):

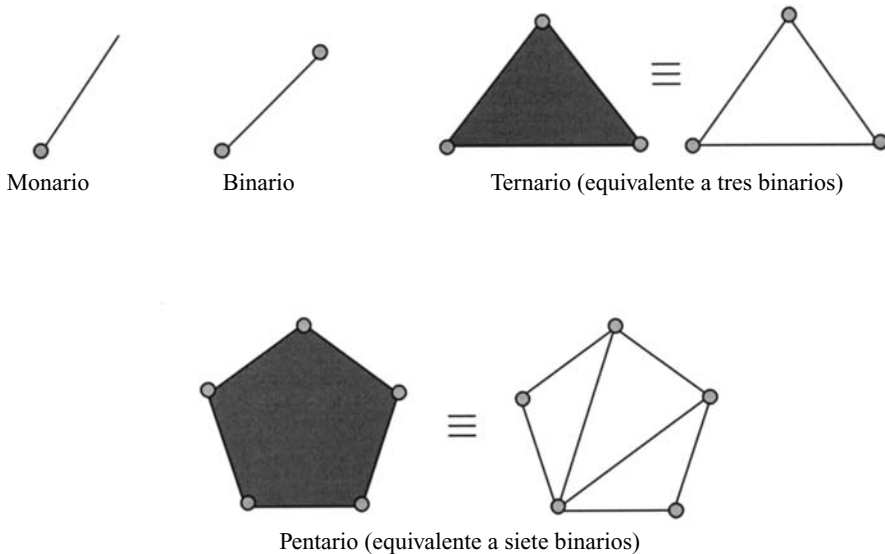


FIGURA 1.29. Tipos de elementos según el número de pares.

b) *Por su naturaleza*, los elementos pueden clasificarse en:

- Elementos rígidos. Cada elemento es un sólido rígido sin solución de continuidad o bien está formado por la unión de varios sólidos rígidos sin posibilidad de movimiento relativo entre sí.
- Elementos unirrigidos. Son aquellos que sólo son rígidos cuando los esfuerzos que sobre ellos se aplican tienen una determinada dirección. Ejemplo de este tipo de elementos son los cables, cadenas y correas.
- Elementos flexibles. Se caracterizan porque las deformaciones que experimentan son de una magnitud comparable a la de sus propios movimientos o de alguna de sus dimensiones.

c) *Según el tipo de movimiento* y su grado de rotabilidad, los elementos se clasifican en:

- Manivelas: giran completamente alrededor de un eje fijo.
- Balancines: oscilan alrededor de un eje fijo.
- Bielas, acopladores o barras flotantes: giran alrededor de un eje instantáneo de rotación.

1.6.2. *Varias clasificaciones de los pares cinemáticos*

a) *Por el número de elementos* (figura 1.30) que se unen en el par, se tendrán pares binarios, ternarios, cuaternarios, y en general, si se unen n elementos en el par se denominarán n -arios.

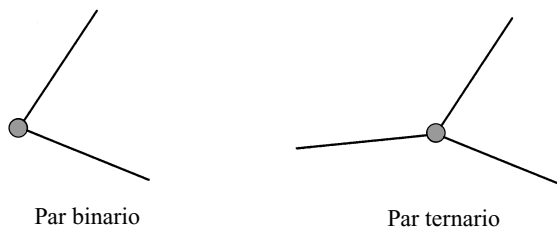


FIGURA 1.30. Tipos de pares según el número de elementos.

b) *Por tipo de cierre* o modo de asegurar el contacto entre los elementos adyacentes, los pares se clasifican en:

- Cierre de forma (figura 1.31a): cuando es la forma de las superficies en contacto la que garantiza la unión entre los elementos.
- Cierre de fuerza (figura 1.31b): cuando la causa de que las superficies de los elementos se mantengan en contacto es una fuerza.

- Cierre de cadena (figura 1.31c): cuando es la disposición de los elementos del mecanismo la que garantiza el contacto.

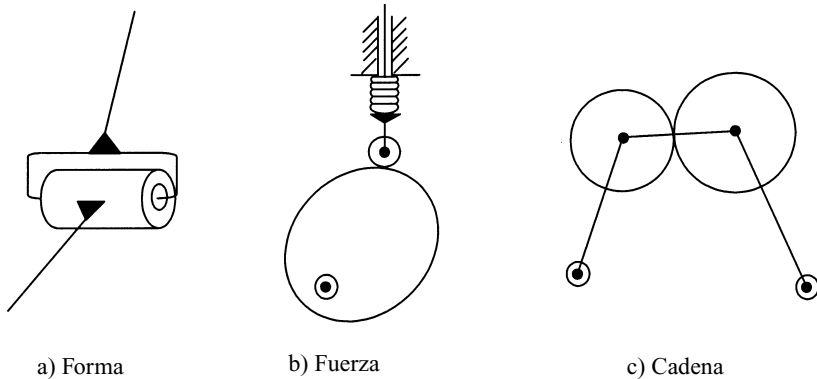


FIGURA 1.31. Tipos de cierre.

- c) *Por la clase*, los pares se clasifican en clase I, II, ...V, según permitan 1, 2,...5 grados de libertad respectivamente en el movimiento relativo entre los dos elementos que se unen a través de él. Como se sabe, el número de grados de libertad del movimiento relativo de un elemento respecto de otro es de seis en el espacio, y de tres en el plano; por lo cual, en este último caso sólo hay pares de las clases I y II. Los pares más utilizados en las disposiciones constructivas de los mecanismos son los de las clases I, II y III. Dentro de cada clase, los pares se clasifican (figura 1.32) según el tipo de unión y los grados de libertad (gdl en dicha figura) permitidos. Así, el par de rotación **R** permite un giro, el par prismático **P** una traslación, el par cilíndrico **C** una traslación y un giro, al igual que el par de leva **L**, el par esférico **E** tres giros, y el par plano **P₁** dos traslaciones y un giro.
- d) *Por el contacto*, los pares pueden clasificarse en inferiores y superiores. Esta clasificación fue inicialmente concebida por Reuleaux, y la diferenciación que hacía entre pares inferiores y superiores era algo imprecisa. Posteriormente, Hartenberg y Denavit interpretaron que la esencia de los conceptos de par inferior y superior está en la menor y mayor (respectivamente) dificultad con la que pueden establecerse las ecuaciones de la ligadura cinemática que constituye el par. Es evidente que un par de leva es más complicado de expresar analíticamente que un par de traslación o un par cilíndrico. Por esta razón, el par de leva es considerado como par superior.

1.6.3. Representación de mecanismos

La representación de mecanismos se realiza a través de los *diagramas estructurales* y de los *diagramas cinemáticos*. Los primeros simplemente representan los elementos y los pares cinemáticos, sin tener en cuenta característica dimensional alguna. Se utilizan en la



PARES	N.º de GDL resgringidos	DENOMINACIÓN DEL PAR	
CLASE I	5	 Par de rotación: R	 Par prismático: P
CLASE II	4	 Par cilíndrico: C	 Par de leva: L
CLASE III	3	 Par esférico: E	 Par plano: P_L

FIGURA 1.32. Pares más utilizados según su clase.

síntesis estructural para trabajar con cadenas cinemáticas e inversiones (conceptos que veremos a continuación). Los diagramas cinemáticos son también representaciones simplificadas del mecanismo que, aunque poseen mayor información que los diagramas estructurales, pueden omitir detalles irrelevantes desde un punto de vista cinemático. Los diagramas cinemáticos representan el tipo y secuencia de las conexiones entre elementos, es decir, la información que da el diagrama estructural, y además las posiciones y orientaciones de los pares cinemáticos, esto es, la geometría esencial del mecanismo. Otros parámetros y otro tipo de dimensiones geométricas, como espesores, secciones, detalles constructivos, etc., no son representados en estos diagramas.

Una característica tanto de los diagramas cinemáticos como de los diagramas estructurales es la *notación simbólica*, la cual permite representar de manera simplificada los distintos tipos de pares cinemáticos. Asimismo, los elementos son numerados correlativamente, empezando por el elemento fijo, al que asignaremos el número uno (otros autores le asignan el cero).

1.7. Cadena cinemática

Se llama cadena cinemática a un conjunto de elementos unidos entre sí mediante pares cinemáticos de modo que es posible el movimiento relativo entre sus elementos. Obsérvese que no se hace referencia alguna a la presencia de un elemento fijo en la cadena.

Se dice que una cadena cinemática es abierta (figura 1.33a) cuando alguno de sus elementos se une al conjunto mediante un único par cinemático. Por tanto, la cadena abierta debe poseer necesariamente algún elemento monario (caso de la garra de un robot). La cadena cinemática es cerrada (figura 1.33b) cuando todos los elementos de la misma se unen al conjunto por más de un par cinemático. Dicha cadena no tiene elementos monarios.

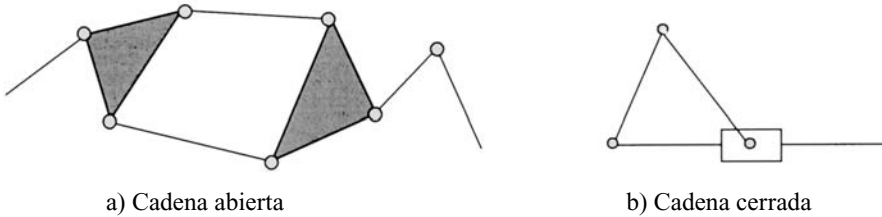


FIGURA 1.33. Cadenas cinemáticas.

Para definir la capacidad de movimiento de una cadena cinemática se utiliza el concepto de movilidad, que se representa por M . Por tal se entiende el número de parámetros independientes que es necesario definir para que quede fijada la posición de la cadena, esto es, la de todos los elementos que la componen. En la figura 1.34 se representan las conocidas cadenas de Watt y Stephenson, constituidas ambas por seis elementos (dos ternarios y cuatro binarios) y siete pares binarios.

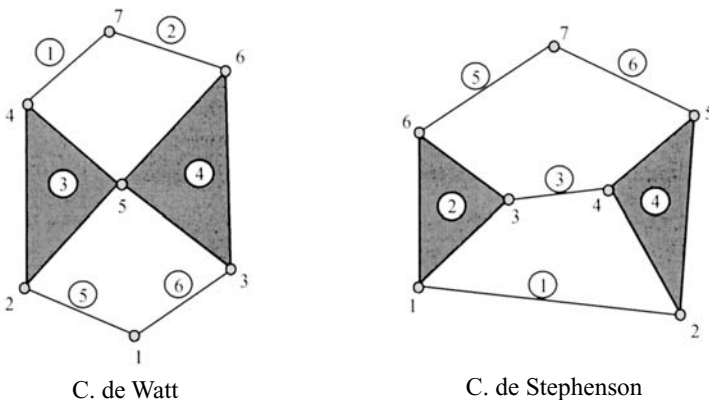


FIGURA 1.34. Cadenas cinemáticas.

Una forma útil de representar el número y tipo de elementos y pares de una cadena cinemática se consigue mediante la denominada configuración estructural de una cadena

cinemática. Por tal se entiende el conjunto de barras y pares que la forman. Cuando todos los pares de una cadena son del mismo tipo (por ejemplo R), se la representa por:

$$(n_2, p_2, n_3, p_3, n_4, p_4, \dots)$$

siendo n_2, n_3, n_4, \dots el número de elementos binarios, ternarios, cuaternarios, ... y p_2, p_3, p_4, \dots el número de pares binarios, ternarios, cuaternarios, etc. Las cadenas de Watt y Stephenson, poseen la misma configuración estructural (4,7,2,0).

1.8. Mecanismos e inversiones

Aunque ya se ha definido anteriormente mecanismo, otra manera sencilla de definirlo es a partir del concepto de cadena cinemática. Así pues, mecanismo es una cadena cinemática en la que se ha fijado uno de sus elementos. Al elemento fijo se le denomina soporte, bastidor o bancada.

A los distintos mecanismos que pueden obtenerse de una cadena al ir fijando cada uno de sus elementos se les denominan inversiones. En principio, una cadena cinemática con N elementos posee N inversiones. Sin embargo, para que realmente adquieran el carácter de inversión deben ser topológicamente (estructuralmente) diferentes. Para que dos inversiones sean topológicamente diferentes deben tener algún elemento distinto o una secuencia diferente de conexiones entre elementos. Unos ejemplos aclararán mejor este aspecto. En la figura 1.35 se presenta la cadena de Stephenson, así como sus inversiones, y en la figura 1.36 la cadena de Watt y sus inversiones.

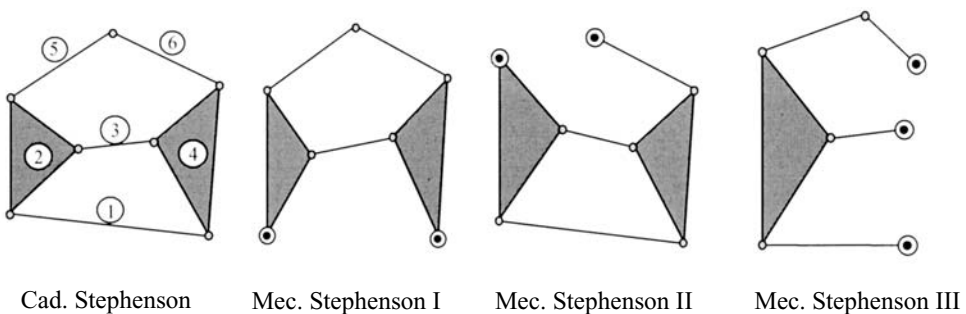


FIGURA 1.35. Cadena de Stephenson y sus inversiones.

El mecanismo de Stephenson I se obtiene al fijar los elementos 1 o 3 en su cadena. El mecanismo de Stephenson II se obtiene al fijar los elementos 5 o 6, y el mecanismo de Stephenson III se obtiene al fijar los elementos 2 o 4.

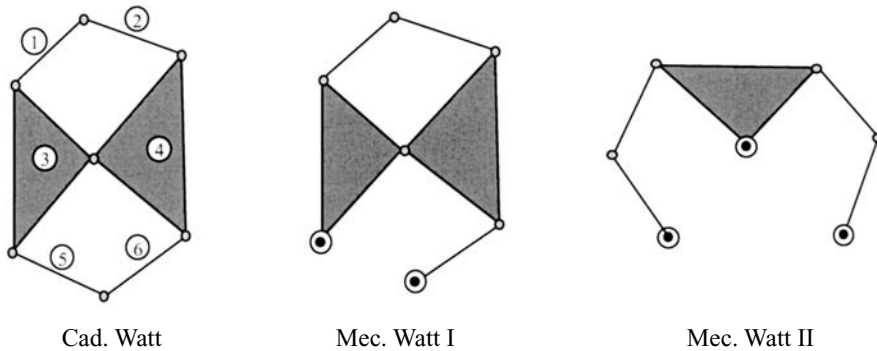


FIGURA 1.36. Cadena de Watt y sus inversiones.

El mecanismo de Watt I se obtiene al fijar los elementos 1 o 2 o 5 o 6 en su cadena, y el mecanismo de Watt II al fijar los elementos 3 o 4. Debe notarse aquí, que las inversiones I y III de la cadena de Stephenson se corresponden con los mecanismos solución del aparejo de labranza representados en la figura 1.22.

Finalmente, se denominan grados de libertad de un mecanismo y se representa por G al número de parámetros independientes que es necesario definir para determinar la posición de todos sus elementos. En realidad, es el mismo concepto de movilidad, pero aplicado a un mecanismo en vez de a una cadena cinemática. Así pues, la relación entre movilidad y grados de libertad en el plano es:

$$M = G + 3 \tag{1.1}$$

Y, en el espacio,

$$M = G + 6 \tag{1.2}$$

Ejemplo de aplicación 1.1. En la figura 1.37 se presenta el mecanismo de Wanzler consistente en un rodillo giratorio 2 alrededor de su centro geométrico. Sobre dicho rodillo se han practicado dos guías perpendiculares sobre las que deslizan los elementos 3 y 4. El elemento flotante 5 está unido mediante pares de rotación a los elementos 3 y 4, así como al elemento 6, el cual se traslada según una guía vertical. Se ha asignado el número 1 al elemento fijo. Se pide:

1. Obtener la cadena cinemática de la que proviene el mecanismo.
2. Obtener el resto de las inversiones de dicha cadena cinemática.

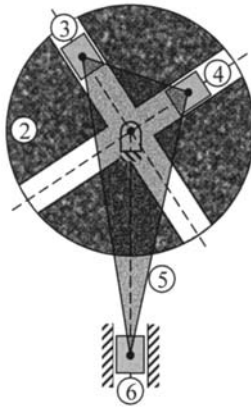


FIGURA 1.37. Mecanismo de Wanzler.

Solución:

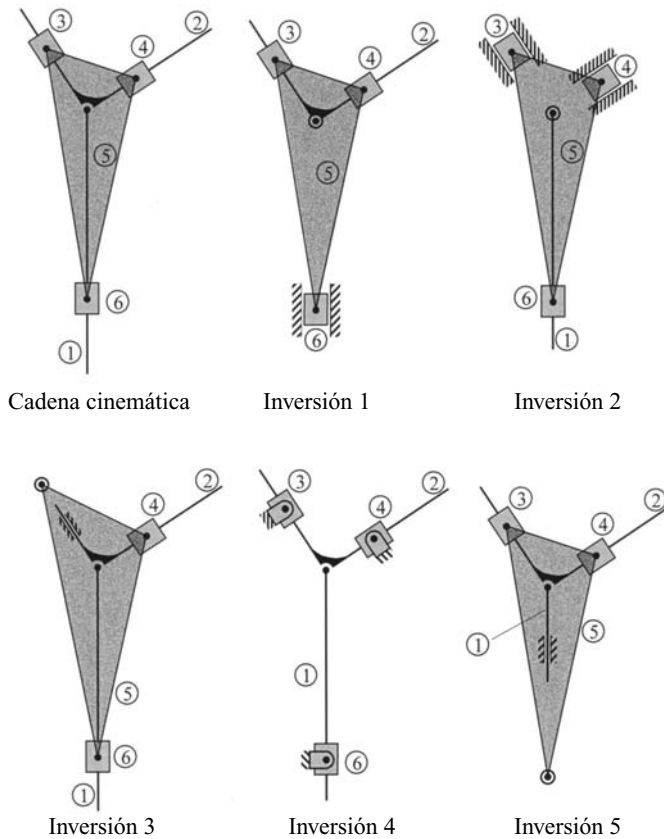


FIGURA 1.38. Cadena cinemática e inversiones.

La inversión 1 se ha obtenido al fijar el elemento 1: es el mecanismo de Wanzler. La inversión 2 se ha obtenido al fijar el elemento 2. La inversión 3 se obtiene fijando, bien el elemento 3, bien el elemento 4. Las inversiones 4 y 5 se han obtenido al fijar los elementos 5 y 6, respectivamente.

1.9. Criterios de Grübler y Malishev

Para poder conocer el movimiento de cualquier elemento o punto de un mecanismo es necesario conocer previamente la ley de variación de sus grados de libertad (gdl a partir de ahora). En la práctica, esto supone que un mecanismo debe llevar tantos accionamientos como gdl tenga. De ahí la necesidad de disponer de un procedimiento para determinar el número de gdl de un mecanismo. Para mecanismos muy sencillos resulta fácil determinar sus gdl mediante simple inspección. En el caso de mecanismos más complicados se necesita ya de un procedimiento sistemático. A continuación, se presenta el denominado criterio de Grübler para determinar el número de gdl de un mecanismo en el plano. Posteriormente, se realizará la correspondiente extensión al espacio obteniendo de esta manera la denominada fórmula de Malishev.

Supongamos un mecanismo formado por N elementos rígidos conectados mediante P_I pares clase I y P_{II} pares clase II.

El número total de gdl de todos los elementos del mecanismo liberados de todo tipo de restricción es: $3N$.

El número de gdl que se restringen al fijar el elemento fijo es: 3. El número de gdl que restringen P_I pares clase I es: $2P_I$. El número de gdl que restringen P_{II} pares clase II es: P_{II} .

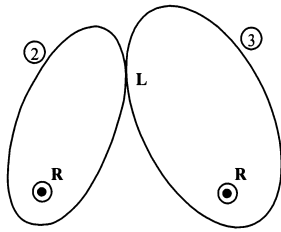
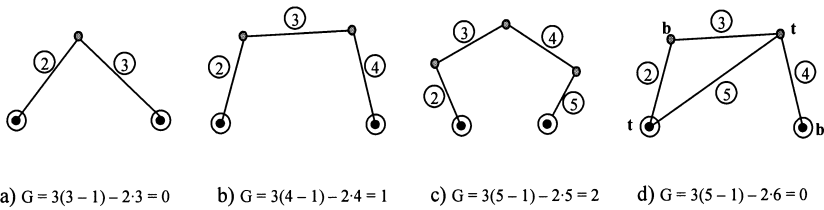
Por tanto, el número de gdl de un mecanismo será:

$$G = 3(N - 1) - 2P_I - P_{II} \quad [1.3]$$

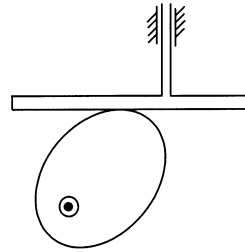
Ésta es la denominada fórmula de Grübler para el caso plano.

Ejemplos de aplicación:

El ejemplo de la figura 1.39d tiene dos pares de rotación binarios (señalados con b) y otros dos ternarios (señalados con t). Un par de rotación ternario equivale a dos pares de rotación binarios desde el punto de vista de gdl restringidos. En efecto, si en la figura 1.40a se toma como referencia el elemento i , éste restringe 2 gdl al elemento j (un par binario clase I) y otros 2 al elemento k (otro par binario clase I). Por otro lado, el par ternario de la figura 1.40a puede representarse de otra manera (figura 1.40b), diferenciando las uniones de j con i y de k con i , con el objeto de reflejar más claramente la citada equivalencia. En resumen, el ejemplo de la figura 1.39d tiene un total de seis pares clase I: dos provienen de los binarios y cuatro de los ternarios. Por otro lado, si se consideran los elementos 2, 3 y 5 como un único elemento rígido, se llega al mismo resultado (equivalente al caso de la figura 1.39a).

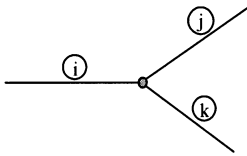


e) $G = 3(3 - 1) - 2 \cdot 2 - 1 = 1$

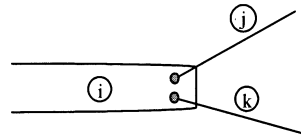


f) ídem del anterior

FIGURA 1.39. Ejemplos de cálculo de gdl.



a) Par de rotación ternario.



b) Dos pares de rotación binarios.

FIGURA 1.40. Uniones equivalentes en gdl.

En el ejemplo 1.39e hay dos pares clase I (los de rotación, señalados con R), y un par clase II (el de leva, señalado con L).

Finalmente, es habitual la siguiente clasificación de los mecanismos atendiendo a su número de gdl:

- $G < 0$, estructura hiperestática.
- $G = 0$, estructura isostática.
- $G = 1$, mecanismo desmodrómico.
- $G = 2$, mecanismo diferencial.
- $G = n > 2$, mecanismo con n gdl.

En el caso de un mecanismo desmodrómico, la posición de sus elementos depende exclusivamente de una única coordenada generalizada. Es decir, el movimiento tiene una forma predeterminada y puede estudiarse independientemente de las fuerzas que lo produ-

cen. Dichas fuerzas sólo influirán en sus velocidades y aceleraciones, no en la forma de las trayectorias, las cuales dependen exclusivamente de la geometría del mecanismo. A veces, el concepto de desmodromía se aplica a mecanismos de varios gdl, en tanto en cuanto dichos gdl estén ligados por ecuaciones de manera que sólo haya una única variable independiente. Éste es el caso en que todos los gdl son funciones concretas de la variable tiempo.

La extensión del criterio de Grübler a mecanismos espaciales se conoce como criterio de Malishev. La forma de obtener su correspondiente ecuación es similar a la de Grübler sin más que considerar que en el espacio un sólido posee 6 gdl, que un par clase I restringe 5 gdl, un par clase II restringe 4 gdl, y así sucesivamente hasta llegar al par clase V que restringe 1 gdl. Teniendo en cuenta todo esto, se llega a la fórmula de Malishev para el caso más general de los mecanismos espaciales:

$$G = 6(N - 1) - 5P_I - 4P_{II} - 3P_{III} - 2P_{IV} - P_V \quad [1.4]$$

1.10. Limitaciones de los criterios de Grübler y Malishev

Los criterios de Grübler y Malishev no son métodos infalibles en la detección del número de gdl de un mecanismo. La razón estriba en que dichos criterios no tienen en cuenta todos los condicionantes. En concreto, hay uno, la geometría dimensional del mecanismo, que no interviene en las citadas fórmulas, lo cual provoca tres tipos de inconsistencias en las mismas: las restricciones redundantes, los grados de libertad inoperantes y las posiciones singulares.

1.10.1. Restricciones redundantes

Desde un punto de vista cinemático, un mecanismo es un conjunto de restricciones geométricas entre los distintos elementos que lo constituyen. La particular geometría de un mecanismo puede hacer que algunas de sus restricciones geométricas sean equivalentes, es decir, que realicen la misma función. Dichas restricciones son redundantes o pasivas, por lo cual pueden ser eliminadas sin que se altere el número de gdl real del mecanismo. A un mecanismo libre de restricciones redundantes puede aplicársele, sin temor a errar, las fórmulas de Grübler y Malishev. Ante un mecanismo con restricciones redundantes puede actuarse de dos maneras: bien obtener el mecanismo equivalente libre de restricciones redundantes, bien añadir un término de corrección (P_R) a las citadas fórmulas que represente el número de restricciones redundantes en el mecanismo:

$$G = 6(N - 1) - 5P_I - 4P_{II} - 3P_{III} - 2P_{IV} - P_V + P_R \quad [1.5]$$

La obtención del término P_R es a menudo complicada, por lo que, hasta cierto punto, la corrección realizada tiene un carácter formal.

A continuación se presentan varios casos de mecanismos con restricciones redundantes clasificados según los siguientes tres grupos:

- a) *Restricciones redundantes en el plano.* Son consecuencia de dimensiones particulares y de formas geométricas concretas de los elementos. También aparecen para determinadas disposiciones relativas entre articulaciones y cuando se dan ciertas orientaciones entre deslizaderas.

El mecanismo representado en la figura 1.41a tiene 0 gdl, según el criterio de Grübler, y realmente es así. De hecho, el elemento tres posee dos centros instantáneos de rotación (CIR), lo cual es incompatible con su movimiento. Sin embargo, este mismo mecanismo con las dimensiones y disposiciones relativas de sus pares particularizadas según la figura 1.41b posee 1 gdl. Dicho mecanismo posee una restricción redundante, la cual es suministrada por cualquiera de las barras verticales. Es decir, cualquiera de las tres barras verticales puede ser eliminada sin que el mecanismo resultante sea alterado en su posibilidad de movimiento. Ello es debido a que dichas tres barras son paralelas y tienen la misma longitud.

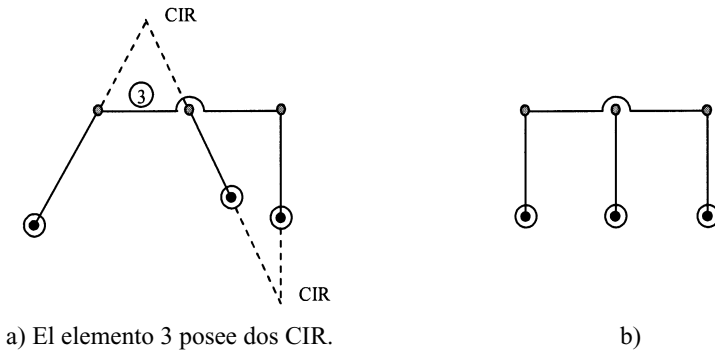


FIGURA 1.41. Restricción redundante.

El mecanismo de la figura 1.42 tiene, según el criterio de Grübler, -1 gdl (hiperestaticidad de grado 1). Sin embargo, puede observarse mediante simple inspección visual que dicho mecanismo constituye un conjunto de doble biela (elementos 4 y 6) con una única manivela (elemento 5) que realmente tiene 1 gdl. En efecto, el movimiento absoluto de traslación de los elementos 2 y 3 se consigue con dos cualesquiera de las deslizaderas 4, 6 y 8. Luego una de ellas es redundante y puede ser eliminada del mecanismo. Ahora, el número total de pares clase I es 7 y, por tanto, $G = 1$. Otra manera de que la fórmula de Grübler proporcione el número correcto de gdl es añadir el término $P_R = 2$ a la misma. *La restricción redundante se produce por el paralelismo de las deslizaderas 4, 6 y 8; basta que una de ellas, por ejemplo, que la deslizadera 6 no fuera paralela a la guía de los pares 4 y 8, entonces el mecanismo sería una estructura hiperestática tal y como resulta de la fórmula.*

Otro caso de restricción redundante es el de las cuñas (figuras 1.43a y b). Dicho mecanismo tiene 1 gdl; sin embargo, al aplicarle la fórmula de Grübler resulta: $G = 3(3 - 1) - 2 \cdot 3 = 0$ gdl. En efecto, al elemento 3 se le está privando de

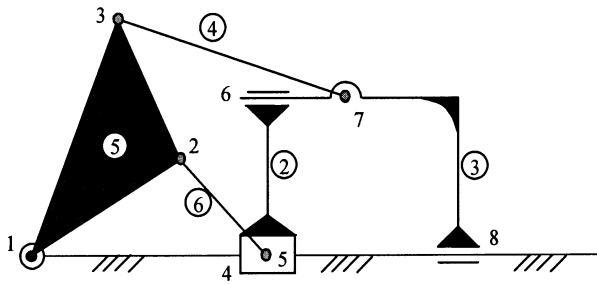


FIGURA 1.42. Restricción redundante con deslizaderas.

la posibilidad de girar por partida doble: de un lado, a través de la unión con el elemento fijo, y, de otro, mediante la deslizadera rígida del elemento 2. La restricción redundante se elimina (sin que se altere el movimiento general del mecanismo) sustituyendo el par inferior P, más restrictivo, por un par superior L (figura 1.43c) menos restrictivo. Al aplicarle ahora la fórmula, resulta $G = 3(3 - 1) - 2 \cdot 2 - 1 = 1$. Esta circunstancia se da siempre en *lazos cerrados constituidos por elementos binarios que no tengan más que pares prismáticos*.

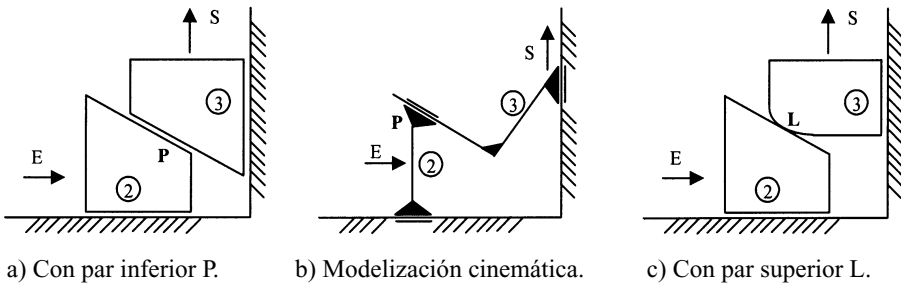


FIGURA 1.43. Mecanismo de cuñas.

Una variante del caso anterior aparece cuando en el lazo hay un par de rotación (cuadrilátero de la figura 1.44). La fórmula de Gröbler da 1 gdl para este mecanismo y, en efecto, posee 1 gdl. Sin embargo, la movilidad de sus elementos no es la que aparentemente pudiera esperarse. Así, el elemento 2 no rota por estar ligado al elemento fijo mediante un par prismático. El 3 y el 4 tampoco, pues están unidos al elemento 2 de igual manera. Por tanto, el elemento 4 permanece inmóvil ya que además de no poder rotar posee una articulación fija. Así pues, si el elemento 4 se convierte en elemento fijo, el mecanismo resultante es equivalente al anteriormente analizado en la figura 1.43b.

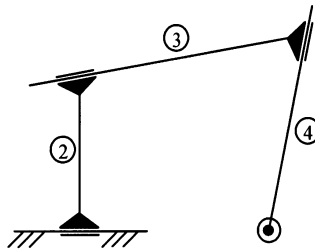


FIGURA 1.44. Cuadrilátero PPRR.

Otro caso es el mecanismo de la figura 1.45, en el que si se contabiliza como par de leva el contacto entre los cilindros, resulta $G = 3(3 - 1) - 2 \cdot 2 - 1 = 1$ gdl. Si además se impone la condición de rodadura entre ambos, el mecanismo quedaría con 0 gdl, y sin embargo posee 1 gdl. ¿Dónde se encuentra la restricción redundante en este caso? Obsérvese que el par de leva transmite el movimiento de un perfil al otro a través de la fuerza normal entre ambas superficies. En el caso particular de dos cilindros que giran alrededor de sus centros, los cuales se encuentran a una distancia igual a la suma de sus radios, la fuerza en el contacto es nula. Ello es debido a que las velocidades absolutas de cada uno de los cilindros en el punto de contacto tienen la misma dirección (tangente a los cilindros), por lo cual, en ausencia de rozamiento, no hay transmisión de movimiento y los dos cilindros pueden girar independientemente uno de otro (sistema con 2 gdl). Por tanto, respondiendo a la pregunta anterior: el par de leva es una restricción pasiva o redundante ($P_R = 1$) dado que no supone una ligadura entre ambos cilindros. Por otro lado, la cinemática de dos cilindros rodantes es equivalente a la del engrane rueda-piñón en que el contacto entre ambos es un par de leva sin rodadura.

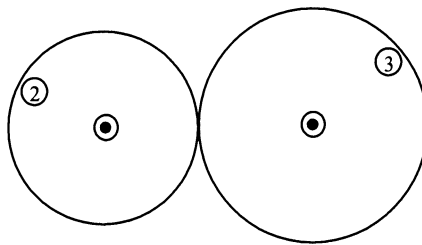


FIGURA 1.45. Cilindros rodantes con condición de rodadura en el contacto.

- b) *Subestructuras en el mecanismo.* Las restricciones redundantes pueden afectar localmente a un grupo de elementos del mecanismo, de manera que dicho grupo constituya una estructura que se comporte igual que un único elemento.

Aplicando la fórmula de Grübler al mecanismo de la figura 1.46a, se obtiene $G = 0$ gdl, y sin embargo se mueve (la parte inferior del mismo). *Esto es debido a que hay un grupo de elementos dentro del mecanismo que constituyen una estructura*

hiperestática, la cual resta gdl al conjunto. En estos casos, en vez de utilizar la ecuación [1.5], es preferible detectar por simple inspección este grupo de elementos que constituye un sólido rígido y tratarlo como un único elemento (figura 1.46b).

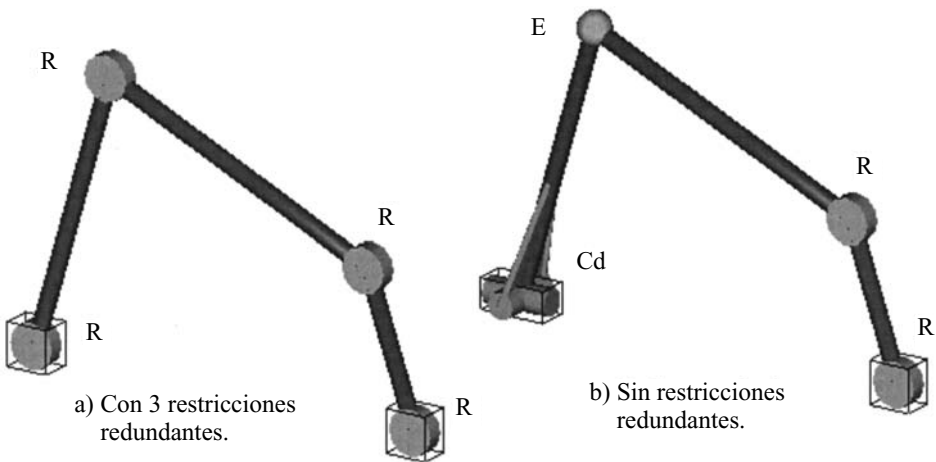


a) Estructura en mecanismo.

b) Modelo corregido.

FIGURA 1.46

c) *Restricciones redundantes en el espacio*. El ejemplo más popular de restricciones redundantes en el movimiento tridimensional está constituido por la familia de los mecanismos planos. En principio cualquier mecanismo plano debería cumplir el criterio más general de movilidad representado por la fórmula de Malishev. Sin embargo, piénsese por ejemplo en el cuadrilátero articulado plano (1 gdl) considerado como espacial (figura 1.47a); aplicando la fórmula de Malishev resulta: $G = 6(4 - 1) - 5 \cdot 4 = -2$, es decir, una estructura hiperestática. Si se comparan las fórmulas de Grübler y Malishev, puede apreciarse que la diferencia comienza ya en los coeficientes 3 y 6 que se aplican a N (número de elementos móviles del mecanismo). Esto quiere decir que de los 6 gdl de un sólido en el espacio, la fórmula de Grübler sólo permite 3 (2 de traslación en el plano del movimiento y 1 de giro alre-



a) Con 3 restricciones redundantes.

b) Sin restricciones redundantes.

FIGURA 1.47. Cuadriláteros en el espacio.

dedor de un eje perpendicular a dicho plano), considerando restringidos los tres restantes (una traslación y dos giros). Precisamente los mecanismos planos se caracterizan porque poseen restricciones redundantes en sus gdl restringidos. Por eso, verifican la fórmula de Grübler y no la de Malishev. Volviendo al caso del cuadrilátero articulado plano, el movimiento de sus elementos es posible porque sus pares de rotación están restringiendo con una triple redundancia ($P_R = 3$) los gdl que permitirían el movimiento espacial de sus barras. *Esto es así, porque los ejes de los cuatro pares de rotación son paralelos entre sí.* En caso de que alguno de ellos no lo fuera, el cuadrilátero perdería su movilidad. El mecanismo de la figura 1.47b representa un cuadrilátero con movimiento plano pero sin restricciones redundantes. Para ello, dos de los cuatro pares de rotación (R) del cuadrilátero de la figura 1.47a han sido sustituidos por un par esférico (E) y una junta cardan (Cd). Ahora dicho mecanismo sí verifica la fórmula de Malishev.

Finalmente, pueden utilizarse las fórmulas de Grübler y Malishev para obtener el número mínimo de elementos de un mecanismo desmodrómico de cadena cerrada con pares de rotación exclusivamente:

- En el plano: $1 = 3(N - 1) - 2N$; $N = 4$ (cuadrilátero). Téngase en cuenta que, en este caso, el número de pares clase I es igual al número de elementos de la cadena, $P_1 = N$.
- En el espacio, se obtendría de igual manera: $1 = 6(N - 1) - 5N$; $N = 7$.

Otro caso importante de restricciones redundantes en el espacio es la familia de los mecanismos esféricos. Dichos mecanismos se caracterizan porque todos sus elementos poseen movimiento esférico; un sólido posee movimiento esférico cuando todos sus puntos se mueven sobre superficies esféricas concéntricas. Es fácil darse cuenta de que un sólido con movimiento esférico posee restringidos sus 3 gdl de traslación. En efecto, a lo largo del movimiento del sólido hay un punto del mismo que siempre ocupa la misma posición: el centro de las superficies esféricas por las cuales discurren las trayectorias de los puntos del sólido. Por tanto, un elemento con movimiento esférico posee 3 gdl: los tres giros. Es un caso análogo al de un sólido con movimiento plano; sólo difieren en los tipos de gdl restringidos en uno y otro caso.

El mecanismo con movimiento esférico más conocido es la junta Cardan o cuadrilátero articulado esférico (figura 1.48). Su principal aplicación es transmitir movimiento entre dos ejes que se cortan. El punto O es el centro de las superficies esféricas sobre las que se encuentran las trayectorias de todos los puntos del mecanismo. Éste es también el caso del cuadrilátero de la figura 1.49a, donde se representan las trayectorias de los vértices del triángulo flotante. Obsérvese cómo la posición del punto O no varía. De hecho, si se articulara dicho punto mediante una rótula esférica al elemento fijo, el movimiento del mecanismo no se vería alterado pues las tres restricciones añadidas son redundantes. En la figura 1.18 se representó otra modelización de la junta Cardan, donde el centro O de las superficies esféricas es el centro de la cruceta. El criterio de Malishev asigna a la junta Cardan $G = -2$ gdl; sin embargo, realmente tiene 1 gdl. Esto quiere decir que posee tres

restricciones redundantes ($P_R = 3$). De nuevo los pares R contienen más restricciones que las estrictamente necesarias para obligar a que todos los elementos de la junta tengan movimiento esférico. El mecanismo de la figura 1.49b representa un cuadrilátero con movimiento esférico pero sin restricciones redundantes. Para ello, tres de los cuatro pares de rotación (R) del cuadrilátero de la figura 1.49a han sido sustituidos por pares cilíndricos (C). En ambos casos, *la clave para conseguir que ambos mecanismos sean esféricos es que todos los ejes de los pares pasen por un punto fijo (el punto O).*

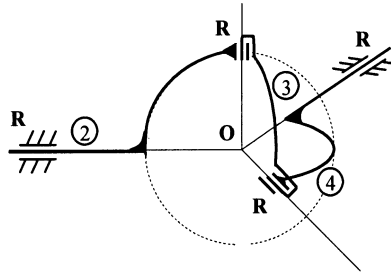
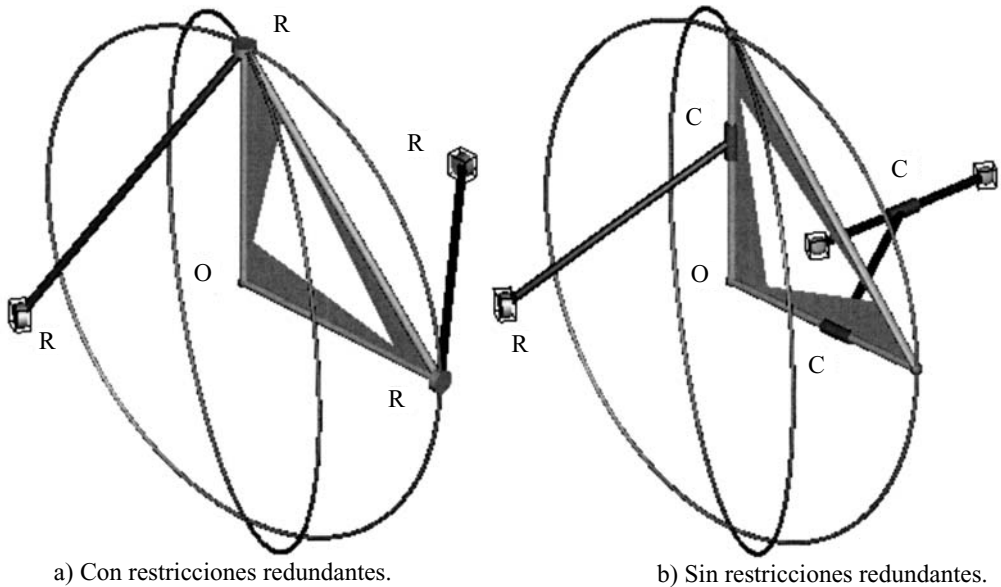


FIGURA 1.48. Junta Cardan.

Los cuadriláteros plano y esférico poseen una gran similitud. De hecho, el primero puede verse como un caso particular del último, sin más que considerar que el punto O de corte de los ejes de rotación se encuentra en el infinito. Además, para determinar el número de gdl de un mecanismo esférico puede utilizarse también la fórmula de Grübler.



a) Con restricciones redundantes.

b) Sin restricciones redundantes.

FIGURA 1.49. Cuadriláteros esféricos.

1.10.2. Grados de libertad inoperantes

Se dice que un mecanismo posee 1 gdl inoperante cuando un elemento del mismo puede moverse sin alterar la posición del resto de sus elementos. Desde un punto de vista práctico, los gdl inoperantes no tienen interés, ya que no influyen en el movimiento general del mecanismo. Las fórmulas de Grübler y Malishev no tienen la capacidad de detectar cuáles de los gdl obtenidos son inoperantes y cuáles no. Por esta razón, suele introducirse en las mismas un término corrector, G_p , que descuenta el número de gdl inoperantes del mecanismo:

$$G = 6(N - 1) - 5P_I - 4P_{II} - 3P_{III} - 2P_{IV} - P_V + P_R - G_p \quad [1.6]$$

En la figura 1.50 se representa un mecanismo plano de leva. Según la fórmula de Grübler se obtiene $G = 2$. Sin embargo, si lo que interesa es la posición del seguidor 4, ésta es función exclusiva de la posición de la leva 2. Es decir, la rotación del elemento 3 no afecta al movimiento oscilatorio del elemento de salida 4. Incluso, podrían soldarse los elementos 3 y 4, y el movimiento de salida sería el mismo. En este sentido, puede decirse que el mecanismo sólo posee 1 gdl, puesto que la posición del rodillo 3 está definida por 1 gdl inoperante. La existencia de este gdl inoperante es debida a que la distancia del centro del rodillo al punto de contacto con la leva permanece constante para cualquier posición.

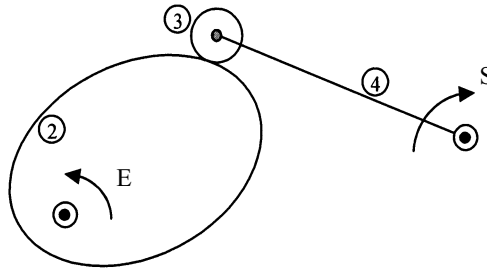


FIGURA 1.50. Mecanismo con 1 gdl inoperante.

La barra 3 del mecanismo de la figura 1.51a puede trasladarse sin alterar las posiciones de los elementos 2 y 4. Por tanto, el mecanismo tiene 1 gdl inoperante. En este caso, *el gdl inoperante se produce porque los pares prismáticos tienen la misma orientación*. Este hecho se evita en el mecanismo de la figura 1.51b, el cual tiene 1 gdl que no es inoperante. Téngase en cuenta que en ambos mecanismos se verifica que la velocidad angular de todos sus elementos es la misma. En el mecanismo de la figura 1.51a es nula, mientras que en el mecanismo de la figura 1.51b no. Esto puede observarse fácilmente sin más que plantear la velocidad del punto A en ambos casos.

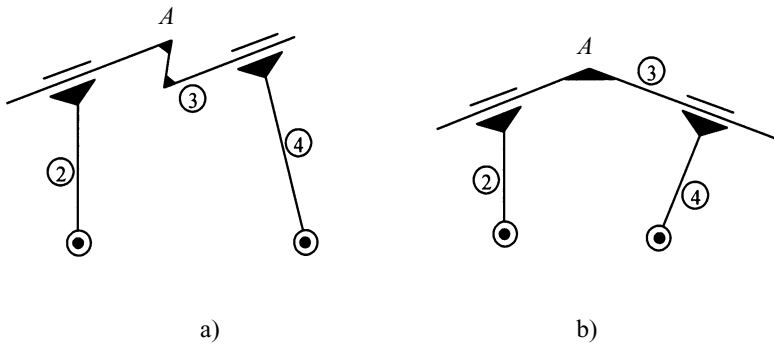


FIGURA 1.51. Mecanismos con (a) y sin (b) gdl inoperante.

En la dirección de los automóviles suele utilizarse el mecanismo espacial REER (figura 1.52) constituido por cuatro elementos conectados por dos pares de rotación y dos rótulas esféricas. Aplicando al mismo el criterio de Malishev, se obtiene: $G = 6(4 - 1) - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2$ gdl. Sin embargo, uno de ellos es el giro de la barra 3 sobre su propio eje, el cual es 1 gdl inoperante ya que no afecta al movimiento general del mecanismo. La presencia de este tipo de gdl inoperantes está ligada a la existencia de algún elemento binario con pares esféricos exclusivamente, en el mecanismo.

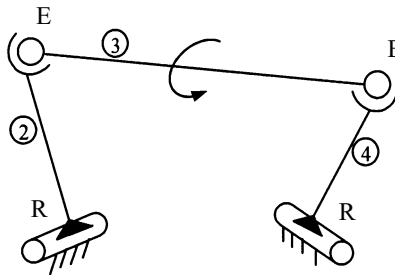


FIGURA 1.52. Mecanismo REER.

1.10.3. Singularidades

Un mecanismo, a lo largo de su movimiento, puede alcanzar configuraciones geométricas en las que se produce una alteración local o global, instantánea o permanente en el número de gdl del mismo. A dichas configuraciones se las conoce como posiciones singulares y pueden provocar una pérdida de control o un bloqueo en el movimiento del mecanismo. Es evidente que este tipo de circunstancias tampoco pueden ser detectadas por las fórmulas de Grübler y Malishev, las cuales simplemente determinan la movilidad del ciclo de movimiento del mecanismo. Las posiciones singulares no sólo dependen de las dimensiones del mecanismo, sino también de la configuración geométrica que adquiere en ese instante. Por esta razón, la detección de las mismas debe estar basada en las ecuaciones

del movimiento del mecanismo. Concretamente, en el capítulo 3 será presentado un método basado en las ecuaciones de velocidad del mecanismo.

Un ejemplo representativo de posición singular se explica en la secuencia de movimientos del mecanismo de biela-manivela de 1 gdl de la figura 1.53. La posición singular es la primera de las tres que aparecen en cada una de las secuencias de las figuras 1.53a y 1.53b, y en la que las barras están alineadas. En dicha posición, el movimiento del mecanismo no está definido, ya que para un giro a izquierdas del elemento de entrada el mecanismo puede seguir dos configuraciones distintas: las dadas por las secuencias de las figuras 1.53a y 1.53b. Esto es debido a que el mecanismo adquiere 1 gdl instantáneo adicional, propiciado por la configuración geométrica que tiene el mecanismo en dicha posición.

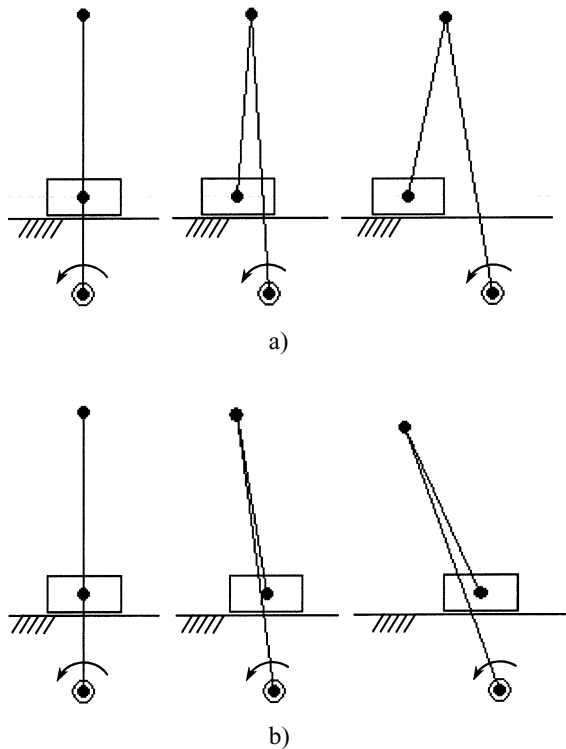


FIGURA 1.53. Distintas configuraciones a partir de una posición singular.

1.11. Leyes de formación de cadenas cinemáticas planas y cerradas con pares R

En este apartado se desarrolla el concepto de síntesis de número, al que ya se aludió en el punto 1.4.2. Nociones sobre diseño de mecanismos. La síntesis de número tiene por

objeto la obtención de todas las cadenas cinemáticas de una movilidad dada, que pueden obtenerse con un determinado número de elementos. Éste es un problema aún no resuelto para el caso de las cadenas espaciales. Sin embargo, el caso de las cadenas planas que se va a exponer a continuación está bastante más definido.

Sea una cadena cinemática plana y cerrada con pares de rotación, que posee la siguiente configuración estructural:

$$(n_2, p_2, n_3, p_3, n_4, p_4, \dots) \quad [1.7]$$

El número total N de elementos de la cadena será:

$$N = n_2 + n_3 + n_4 + \dots \quad [1.8]$$

El número total equivalente P de pares binarios de la cadena será:

$$P = p_2 + 2p_3 + 3p_4 + \dots \quad [1.9]$$

Por tanto, su movilidad M será:

$$M = 3N - 2P \quad [1.10]$$

Partiendo de estas premisas puede llegarse a las siguientes conclusiones:

- a) Cualquier inversión de esta cadena con un número impar de gdl posee un número par de elementos, y viceversa.

En efecto, sea $G = (2g + 1)$ un número impar de gdl del mecanismo, donde g es un número entero positivo. Llevando este valor a la fórmula de Grübler se obtiene:

$$2g + 1 = 3(N - 1) - 2P \quad [1.11]$$

Reordenando la ecuación se llega a

$$2(g + P + 2) = 3N \quad [1.12]$$

De donde se deduce que $3N$ es un número par, por tanto, N debe ser par. De igual manera puede demostrarse la proposición inversa.

- b) El mayor orden posible que puede alcanzar un elemento es $N/2$.

En efecto, considérese que el mecanismo posee 1 gdl. Dicho mecanismo va a ser construido siguiendo unas pautas que garanticen la presencia de un elemento con el mayor orden i posible. Para ello, al elemento fijo de la figura 1.54a se le articularán i barras. Con ello se garantiza el máximo orden para dicho elemento (i en este caso). A continuación, hay que conectar las i barras de forma que haya transmisión de movimiento entre todas ellas, el mecanismo resultante sea cerrado y tenga 1 gdl. La única forma posible es la representada en la figura 1.54b. Final-

mente, teniendo en cuenta que el número N de elementos del mecanismo es $2i$, resulta:

$$i = N/2 \quad [1.13]$$

Sólo queda comprobar que el mecanismo así construido tiene 1 gdl. En efecto, el mecanismo posee $2i$ elementos ($i + 2$) pares binarios e $(i - 2)$ pares ternarios; aplicando la fórmula de Grübler resulta: $G = 3(2i - 1) - 2(i + 2) - 2 \cdot 2(i - 2) = 1$.

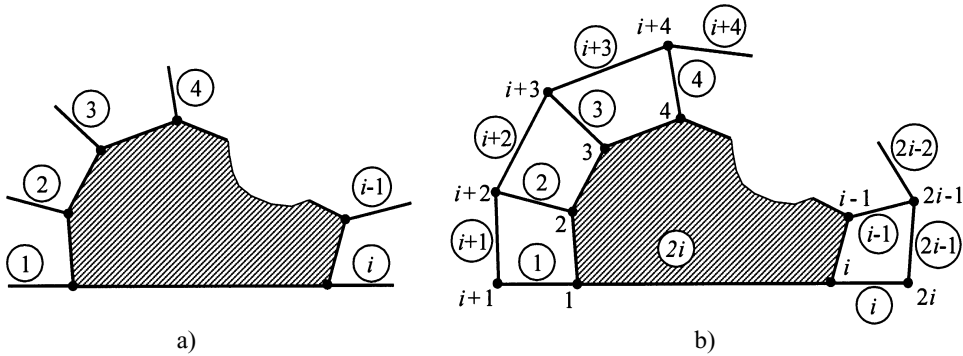


FIGURA 1.54. Construcción del mecanismo con el elemento de mayor orden.

A partir de los anteriores razonamientos es fácil concluir que para el caso de un mecanismo de G gdl, $i = (N - G + 1)/2$ es el mayor orden posible que puede alcanzar un elemento; en cualquier caso siempre es menor que $N/2$.

- c) Una cadena con pares múltiples (ternarios o mayor) puede transformarse en otra con pares binarios exclusivamente sin alterar su número de elementos N , ni su número total equivalente de pares binarios P , ni por tanto, su movilidad M .

Para ello, cada par ternario se transforma en un elemento ternario de acuerdo con el esquema representado en la figura 1.55:

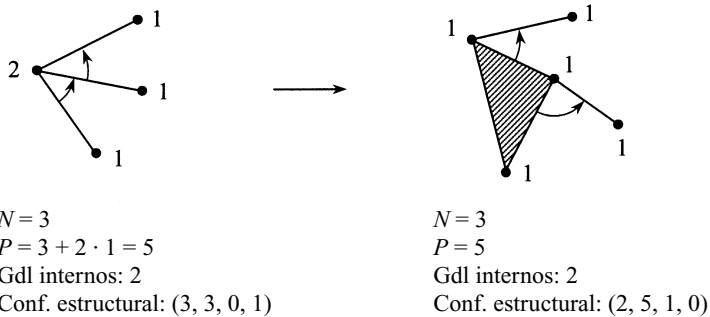


FIGURA 1.55. Transformación de un par ternario.

De la misma manera, un par cuaternario se transforma en un elemento cuaternario (figura 1.56), y así sucesivamente.

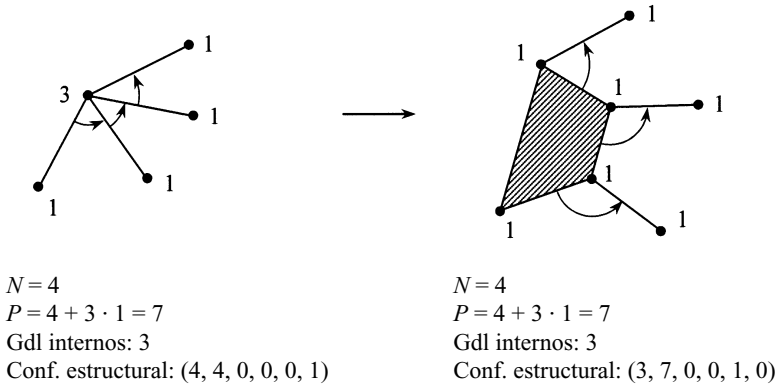


FIGURA 1.56. Transformación de un par cuaternario.

En la figura 1.57 se representa un ejemplo de este tipo de transformaciones:

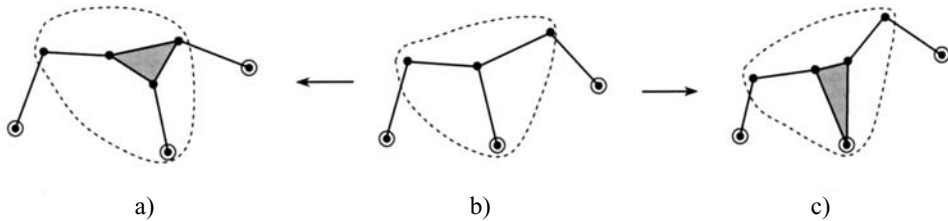


FIGURA 1.57. Variantes en la transformación de un par ternario.

Como puede observarse, la transformación del par ternario en el mecanismo original (figura 1.57b) no es única (mecanismos de las figuras 1.57a y 1.57c) y, sin embargo, todos ellos poseen 6 elementos, un total equivalente de 7 pares binarios y 1 gdl.

Estas transformaciones pueden operar también en sentido contrario, es decir, transformando elementos ternarios, cuaternarios y de mayor orden, en sus correspondientes pares.

- d) Si todos los pares de la cadena son binarios, la movilidad M de la misma es independiente del número de elementos ternarios.

El número total de pares del mecanismo puede contarse a través de sus elementos (2 pares por cada elemento binario, 3 pares por cada elemento ternario y así sucesivamente), sabiendo que cada par es contado dos veces. Por tanto,

$$2P = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots \tag{1.14}$$

Sustituyendo [1.8] y [1.14] en [1.10] resulta:

$$M = n_2 - n_4 - 2n_5 - 3n_6 \dots \quad [1.15]$$

Expresando esta ecuación de una forma más compacta,

$$M = n_2 - \sum_{j=4}^c (j - 3)n_j \quad [1.16]$$

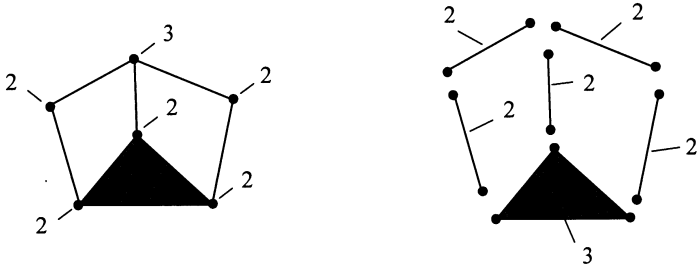
donde c es el orden más alto de los elementos de la cadena.

A partir de esta expresión no sólo se concluye la afirmación anteriormente indicada, sino también que una cadena de estas características no puede constituirse sin elementos binarios, y concretamente sin un mínimo de 4. Esta última afirmación es cierta, incluso aunque la cadena incluyera pares múltiples (ternarios, cuaternarios,...). En efecto, una cadena con pares binarios exclusivamente se puede transformar en otra con pares múltiples e igual N , P y M , tal y como se ha indicado en el apartado anterior; y esta transformación conlleva siempre un aumento del número de elementos binarios.

- e) La relación entre el número y tipo de pares, y el número y tipo de elementos es la siguiente:

$$2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \dots = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots \quad [1.17]$$

En efecto, el miembro de la izquierda representa el número que se obtiene contando los elementos de la cadena a partir de sus pares (2 elementos por cada par binario, 3 elementos por cada par ternario y así sucesivamente). Dicho número coincide con el miembro de la derecha, el cual se obtiene contando los pares de la cadena a partir de sus elementos (2 pares por cada elemento binario, 3 pares por cada elemento ternario, y así sucesivamente). La ecuación [1.17] es, pues, evidente. No obstante, en la figura 1.58 se representa un ejemplo con el objeto de aclarar estos extremos:



a) N.º elementos en los pares:
 $2p_2 + 3p_3 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13.$

b) N.º pares en los elementos:
 $2n_2 + 3n_3 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13.$

FIGURA 1.58. Ejemplo probatorio de la ecuación [1.17].

Ejemplo de aplicación 1.2. Obtener todos los mecanismos con pares de rotación de 6 elementos y 1 gdl que pueden obtenerse a partir de las cadenas cinemáticas posibles, las cuales serán igualmente obtenidas.

Puesto que $G = 1$, su movilidad será $M = 4$; por tanto, de acuerdo con [1.16]: $n_2 \geq 4$.

Por otro lado, el elemento de orden máximo es $i = N/2 = 6/2 = 3$. Luego sólo hay elementos binarios (n_2) y ternarios (n_3) en la cadena.

De acuerdo con las normas de transformación entre pares y elementos del mismo orden expuestas en el anterior apartado c), si sólo hay elementos binarios y ternarios en la cadena, tampoco habrá más que pares binarios y ternarios. Por tanto, la configuración estructural será: (n_2, p_2, n_3, p_3) .

Además, las ecuaciones a tener en cuenta son:

- 1) De acuerdo con [1.8]: $6 = n_2 + n_3$
- 2) De acuerdo con [1.17]: $2p_2 + 3p_3 = 2n_2 + 3n_3$
- 3) De acuerdo con [1.10]: $4 = 3 \cdot 6 - 2(p_2 + 2p_3)$

Resultando un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas. Expresando n_2 , n_3 y p_2 en función de p_3 queda:

$$\begin{aligned} n_2 &= 4 + p_3 \\ n_3 &= 2 - p_3 \\ p_2 &= 7 - 2p_3 \end{aligned}$$

De cualquiera de estas tres ecuaciones puede deducirse que $p_3 \leq 2$. Dando los valores posibles a p_3 (2, 1 y 0) se obtienen las distintas soluciones del problema, las cuales se representan en la figura 1.59.

p_3	n_2	n_3	p_2	Conf. estruc.	Cadenas cinemáticas	Inversiones
2	6	0	3	(6, 3, 0, 2)		
1	5	1	5	(5, 5, 1, 1)		
0	4	2	7	(4, 7, 2, 0)		

FIGURA 1.59. Solución del problema.

El diagrama estructural de las cadenas cinemáticas es muy fácil de obtener. Se parte de una cualquiera de ellas y mediante transformaciones de pares en elementos y viceversa (según el apartado c) se obtienen las restantes. De las 4 cadenas obtenidas (figura 1.59) resultan 10 inversiones distintas, las cuales ya fueron representadas en la figura 1.21 como posibles soluciones al diseño de un aparejo de labranza.

1.12. Métodos para la obtención de mecanismos

En este apartado se van a analizar otras alternativas para la generación de mecanismos. Todas ellas parten de un mecanismo dado.

1.12.1. Adición de elementos

Una forma de obtener mecanismos distintos a partir de uno dado, consiste en unir a éste diferentes grupos de elementos. El grupo de elementos más sencillo es la díada. Se denomina díada R, P, H, C, L a una pareja de elementos unidos mediante un par R (rotación), P (prismático), H (helicoidal), C (cilíndrico), L (leva), respectivamente. Generalmente, las díadas se unen al mecanismo mediante pares R. Esta unión puede realizarse tanto en pares ya existentes en el mecanismo como en otros puntos del mismo. En concreto, una díada R puede unirse a un mecanismo de tres maneras distintas:

- a) De modo que los elementos de la díada tengan movilidad y no se modifique el número de gdl del mecanismo (figura 1.60):

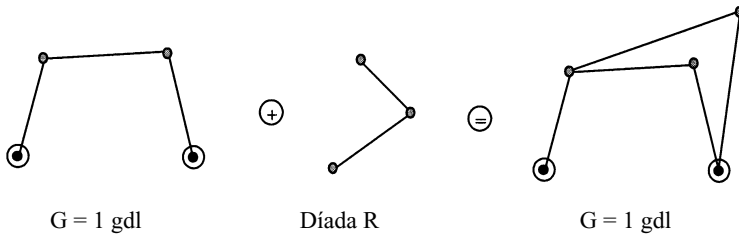


FIGURA 1.60. Primera forma.

- b) De modo que los elementos de la díada no tengan movilidad (figura 1.61):

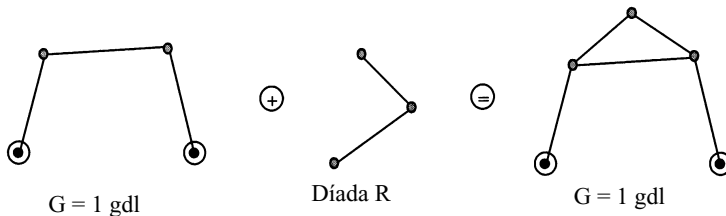


FIGURA 1.61. Segunda forma.

c) De modo que los elementos de la díada tengan movilidad, pero aumenten el número de gdl del mecanismo (figura 1.62):

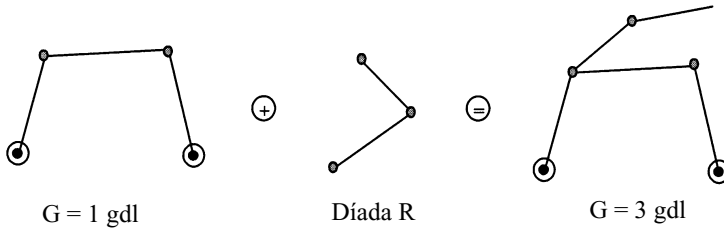
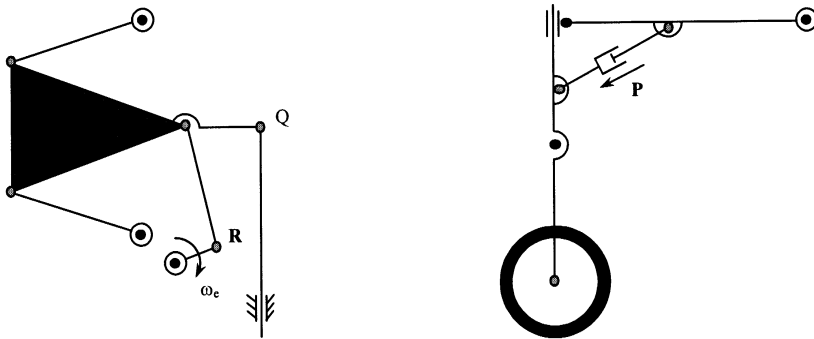


FIGURA 1.62. Tercera forma.

En general, la primera de las formas es la más interesante. De esta manera, a partir de un mecanismo dado se obtiene uno nuevo con el mismo número de gdl. Una aplicación muy común de algunas díadas es su utilización como elementos de entrada del mecanismo; es decir, elementos donde se colocan los accionamientos. Para ello, una vez diseñado el mecanismo, y en caso de no haber elementos con capacidad de llevar el movimiento de entrada, basta con detectar aquellos elementos más adecuados del mismo a los que añadir la díada. Dos ejemplos típicos son (figura 1.63):



a) Diagrama cinemático de “la bomba de petróleo de Minesota”; mecanismo con 1 gdl, en virtud de la trayectoria cuasi-rectilínea del punto Q del acoplador.

b) Diagrama cinemático de un tren de aterrizaje.

FIGURA 1.63. Accionamientos mediante díadas R y P, respectivamente.

Evidentemente, a un mecanismo pueden añadirse grupos de elementos más numerosos. Un procedimiento basado en la adición de grupos de elementos, unidos exclusivamente mediante pares R, es el denominado método de Assur. Dicho método se fundamenta en que los grupos de barras que se unen a la cadena primitiva no modifican su movilidad inicial. Por tanto, la ecuación que rige los grupos de Assur es:

$$3n - 2p = 0 \quad [1.18]$$

siendo n y p , el número de elementos y pares del grupo de Assur, respectivamente. En p se incluyen los pares que conectan el grupo con la cadena.

En efecto, esté constituida la cadena primitiva por N elementos, P_I pares clase I y P_{II} pares clase II. Su movilidad será:

$$M = 3N - 2P_I - P_{II} \tag{1.19}$$

Después de añadir el grupo de Assur, la movilidad seguirá siendo M :

$$M = 3(N + n) - 2(P_I + p) - P_{II} \tag{1.20}$$

Igualando las ecuaciones [1.19] y [1.20] se obtiene la ecuación [1.18]. En esta ecuación, puesto que p es un número entero, n debe ser un número par. En la figura 1.64 se representan los primeros grupos de Assur:

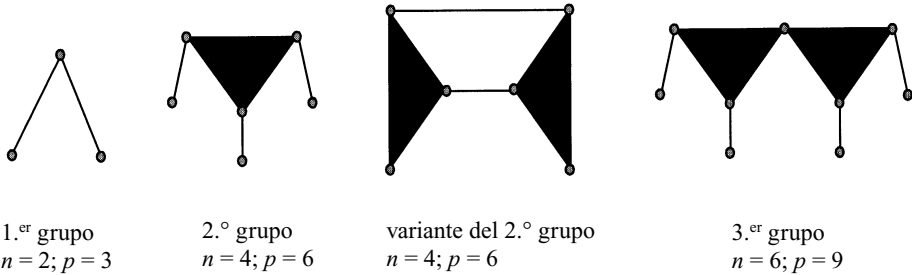


FIGURA 1.64. Grupos de Assur.

1.12.2. Degeneración

La modificación sustancial de las dimensiones de los elementos y/o pares de un mecanismo proporciona otros mecanismos denominados degenerados de éste. En el ejemplo representado en la figura 1.65, la barra 4 experimenta un incremento de longitud tal que el par de rotación adquiere la dirección del punto del infinito indicada. Como consecuencia de ello, dicho par de rotación degenera en un par prismático.

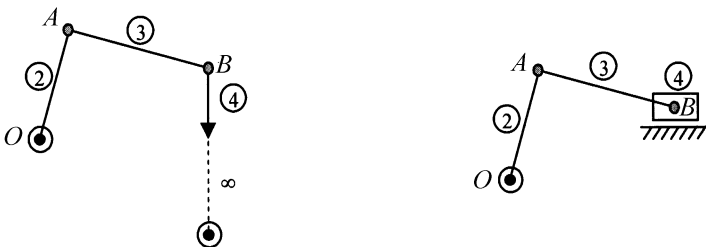


FIGURA 1.65. Degeneración de una longitud.

En la figura 1.66a se representa la excéntrica de un mecanismo de biela-manivela típico de las prensas. Aunque a primera vista no lo parezca, la unión entre los elementos 2 y 3 se materializa a través de un par R (figura 1.66b). En este caso, la degeneración consiste en que el eje de dicho par R ha sufrido una expansión hasta alcanzar el actual radio de la excéntrica.

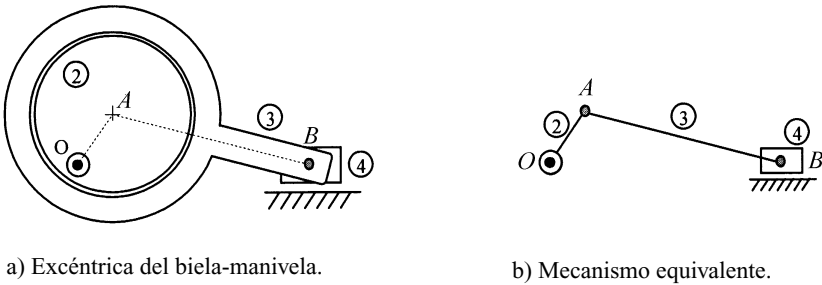


FIGURA 1.66. Degeneración de un par R.

1.12.3. Equivalencia

Se trata de un método sumamente útil para el análisis cinemático de mecanismos planos con pares superiores. Consiste en sustituir el par de leva por un mecanismo equivalente con pares inferiores. En general, dicha sustitución tiene un carácter limitado, sólo válida para:

- Velocidades y aceleraciones.
- La posición considerada. Para otra posición, el mecanismo equivalente cambia.

Consideremos el mecanismo de la figura 1.67a:

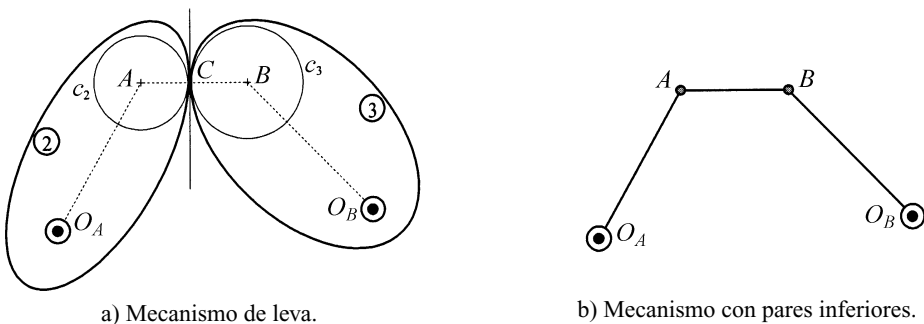


FIGURA 1.67. Mecanismos equivalentes.

Donde:

- C , es el punto de contacto de las levas en esa posición.
- c_2 , es la circunferencia osculatriz del perfil de la leva 2 en el punto de contacto.
- A , es el centro de curvatura de c_2 .
- c_3 , es la circunferencia osculatriz del perfil de la leva 3 en el punto de contacto.
- B , es el centro de curvatura de c_3 .

El mecanismo equivalente, en ese instante, está formado por barras articuladas en los centros de curvatura de los perfiles en el punto de contacto y en las articulaciones fijas de las levas (figura 1.67b). La justificación va a realizarse en dos pasos. En primer lugar, se sustituyen los perfiles por sus correspondientes circunferencias oscultrices. Esto es correcto durante tres posiciones consecutivas (infinitamente próximas), puesto que estas últimas poseen con los primeros un contacto de segundo orden. Es decir, el perfil y su correspondiente circunferencia oscultriz tienen en común 3 puntos consecutivos. En segundo lugar, si se analiza el movimiento relativo entre dos círculos en contacto permanente, se observa que el centro de uno de ellos es el centro de curvatura de la trayectoria del centro del otro (figura 1.68), y viceversa. Puede considerarse que dichos centros se encuentran unidos mediante una barra imaginaria, la cual mantiene el contacto permanentemente. En el caso de la equivalencia que nos ocupa, las funciones de esa barra imaginaria son realizadas por el elemento AB de la figura 1.67b, con la salvedad de que hay que cambiar el carácter permanente por el de instantáneo.

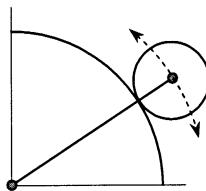


FIGURA 1.68. Movimiento relativo entre dos círculos en contacto permanente.

Hay que indicar que este mecanismo equivalente así obtenido no es único. Puede escogerse cualquier pareja de puntos: A del elemento 2 y B de 3, tal que uno sea el centro de curvatura de la trayectoria del otro, en el movimiento relativo. La validez para velocidades y aceleraciones se justifica por ser mecanismos equivalentes para tres posiciones consecutivas (infinitamente próximas).

Una extrapolación de estos conceptos a otras particularizaciones de contactos entre perfiles da lugar a los mecanismos de las figuras 1.69 y 1.70. En el caso de que la leva sea un disco excéntrico (figura 1.70b), la equivalencia es válida para cualquier posición, y para sobreaceleraciones de cualquier orden. La razón es que la distancia d entre el centro geométrico de la excéntrica y el pie del seguidor es siempre la misma, esto es, el radio de la propia excéntrica. Otra forma de argumentarlo es que la circunferencia osculadora es permanentemente la misma: el perfil de la excéntrica.

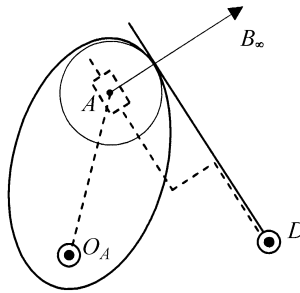
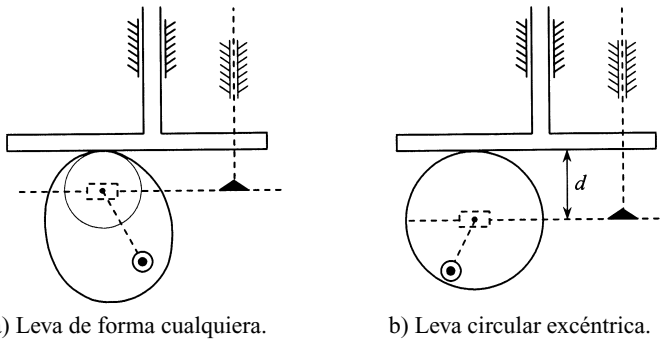


FIGURA 1.69. Equivalencia de una leva con seguidor de pie plano oscilante: mecanismo equivalente a trazos.



a) Leva de forma cualquiera.

b) Leva circular excéntrica.

FIGURA 1.70. Equivalencia de una leva con seguidor de pie plano de traslación.

El mecanismo de la figura 1.71 contiene la misma restricción de distancia d que los mecanismos de la figura 1.70b; por ello, también es equivalente a ambos a lo largo de todo el movimiento.

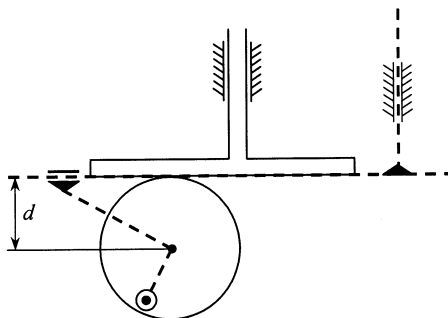


FIGURA 1.71. Otro mecanismo equivalente (a trazos) a los de la figura 1.70b.

Otro caso de equivalencia (figura 1.72) en cualquier posición y para cualquier orden de derivadas de la velocidad es:

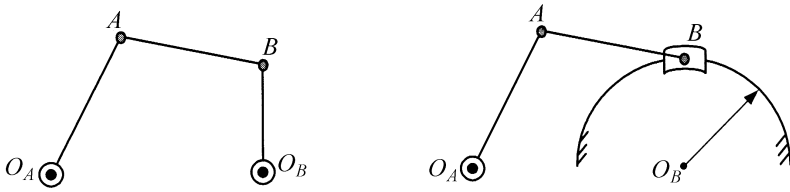


FIGURA 1.72. Equivalencia entre cuadriláteros.

1.12.4. Inversión

Ya se ha visto anteriormente la inversión cinemática como un procedimiento para obtener mecanismos de una misma cadena cinemática. Realmente, las construcciones físicas de estas inversiones pueden diferir notablemente. Sólo después de obtener sus diagramas cinemáticos su similitud se hace más clara. Un ejemplo de este hecho queda patente al comparar dos de las inversiones de la cadena RRPP (figura 1.73a): el mecanismo de yugo escocés (figura 1.73b) y la junta Oldham (figura 1.73c).

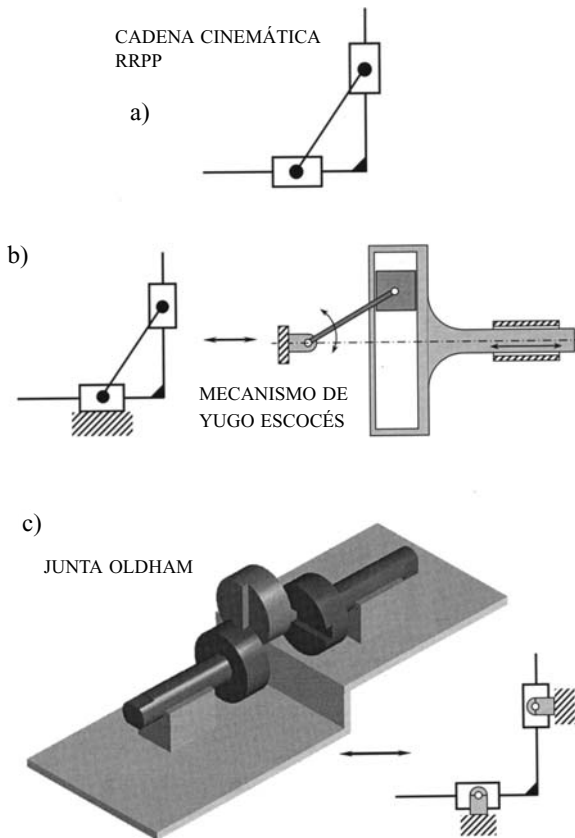


FIGURA 1.73. Cadena RRPP (a) y dos de sus inversiones (b y c).

Es obvio que el movimiento absoluto de las distintas inversiones de un mecanismo es distinto; por ello, pueden verse a las distintas inversiones de una cadena cinemática como alternativas de diseño, o simplemente como aplicaciones distintas. Sin embargo, el movimiento relativo entre los diferentes elementos de la cadena es el mismo para cualquiera de las inversiones. Esta propiedad es muy utilizada tanto en el análisis cinemático de mecanismos como en la síntesis dimensional.

Ejercicios propuestos

1. Aplíquese el criterio de Gröbler a los mecanismos de la figura 1.74. Razónese, en su caso, la no coincidencia con el número de gdl verdadero de cada mecanismo. Indíquese, asimismo, si alguna parte del mecanismo carece de movilidad.

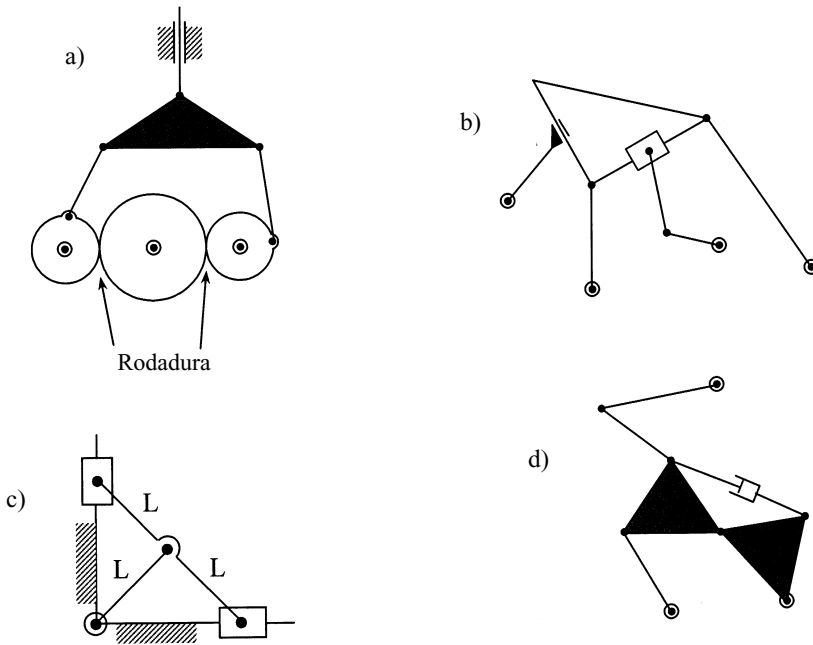


FIGURA 1.74. Varios mecanismos.

2. Obtener todas las cadenas cinemáticas de 7 elementos y 2 gdl con pares R. Obtener también todas las inversiones posibles de cada una de ellas.
3. En la figura 1.75a se representa un mecanismo de leva con seguidor de pie plano, donde *O* es el centro de la circunferencia oscultriz de la leva en el punto de contacto. Los mecanismos 1.75a y 1.75b son equivalentes. ¿Cuáles son las limitaciones de esta equivalencia? ¿Son los mecanismos 1.75a y 1.75c equivalentes en el mismo sentido? ¿Por qué?

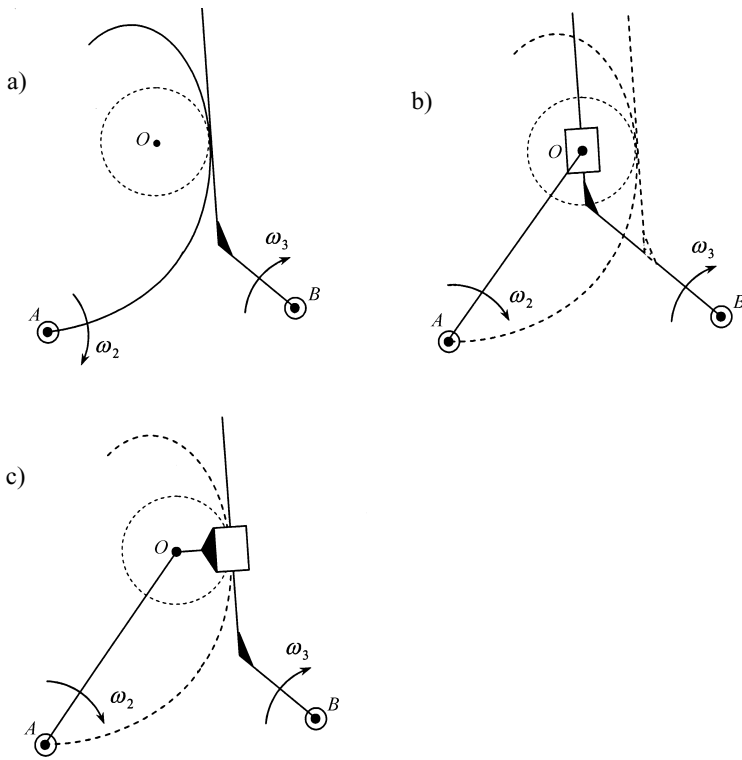


FIGURA 1.75. Mecanismos objeto del problema.

4. En la figura 1.76 se muestra un mecanismo cuya finalidad es la elevación y sustentación de la plataforma superior de un remolque para el transporte de automóviles. Se pide:



FIGURA 1.76. Identificación del mecanismo del problema.

- 1) El diagrama estructural del mecanismo considerando como elemento fijo la plataforma inferior del remolque, ¿qué tipo de díada se emplea para accionar el mecanismo?
- 2) Mediante la aplicación del criterio de Grübler obtener el número de grados de libertad del mecanismo.
- 3) La cadena cinemática y todas sus inversiones.
- 4) Los análisis (cinemáticos, estáticos, dinámicos...) necesarios para diseñar el mecanismo. Razonar la respuesta.

2

Geometría del movimiento plano

2.1. Introducción

En este capítulo se van a introducir una serie de conceptos teóricos, a partir de los cuales se obtienen las propiedades cinemáticas de los elementos de un mecanismo. El movimiento de cada uno de estos elementos está definido por las restricciones geométricas impuestas por los pares cinemáticos que le conectan al resto del mecanismo. La geometría del movimiento de un elemento genérico será idealizada mediante el plano móvil asociado al mismo. Las principales características de un plano móvil son el Centro Instantáneo de Rotación, las curvas polares y sus circunferencias notables. Asimismo, se analizarán las propiedades de los campos de velocidades y aceleraciones. Una aplicación de interés es la obtención del centro de curvatura de la trayectoria de un punto del plano móvil, mediante el teorema de Hartmann. Pero todavía de mayor utilidad práctica son las propiedades de los perfiles conjugados, las cuales se hacen patentes a través de la ecuación de Euler-Savary generalizada.

Estas propiedades no se exponen aquí simplemente para obtener un cuerpo geométrico perfecto a partir de unos pocos axiomas, sino que a pesar de su carga teórica pueden tener aplicación directa al diseño de mecanismos. Éste es el caso de la obtención de mecanismos que generan trayectorias con tramos cuasi-rectilíneos que será visto más adelante en el capítulo 4.

Los mecanismos planos desempeñan un papel importante en el ámbito industrial. De hecho, las aplicaciones prácticas de mecanismos planos son mayoría frente a las de mecanismos espaciales. Incluso, algunos mecanismos espaciales se originan a partir de una cadena cinemática plana, a la que se permite salir de su plano mediante 1 gdl de rotación, y así acceder a una región del espacio. Éste es el caso típico de numerosos robots (figura 2.1). Por otro lado, los mecanismos planos son los más sencillos de analizar, diseñar y fabricar, así como de controlar sus movimientos.

Por último, resulta didáctico estudiar previamente la cinemática del movimiento plano, ya que muchos de sus conceptos, propiedades y teoremas, tienen su correspondiente extensión en el movimiento tridimensional.

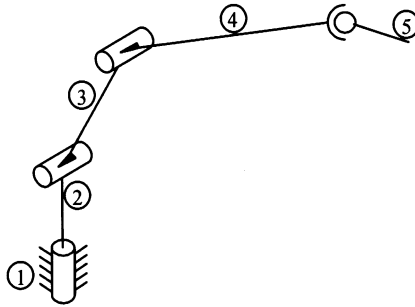


FIGURA 2.1. Diagrama cinemático de un robot con 6 gdl. Los elementos 2, 3, y 4 constituyen una cadena cinemática plana.

2.2. Estudio del movimiento continuo de una figura plana en su plano

Se dice que un mecanismo tiene movimiento plano cuando las trayectorias de todos sus puntos son paralelas a un determinado plano fijo. Asimismo, su diagrama cinemático es una representación plana, lo cual no significa, obviamente, que el mecanismo real se encuentre contenido en un plano. Generalmente, la finalidad de un mecanismo se centra en el movimiento de un elemento determinado. Aún en el caso en que esto no sea así, el estudiar el movimiento del mecanismo implica analizar el de cada uno de sus elementos. A esto es a lo que se hace referencia con el título de este apartado. Para estudiar el movimiento de una figura plana en su plano, basta con estudiar el movimiento de un segmento cualquiera AB de la misma. En efecto, cualquier punto C de la misma vendría definido por la condición de que no varíe su posición relativa respecto a dicho segmento AB .

En la figura 2.2 puede verse el segmento AB en dos posiciones: A_1B_1 y A_2B_2 correspondientes a los instantes t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$. Las posiciones de cualquier punto C se determinan fácilmente a partir de las de A y B . También aparecen representadas las trayectorias de A y B . Hay un punto concreto, P_{12} , del sólido rígido AB , tal que sus posiciones en t_1 y t_2 son coincidentes. Dicho punto se obtiene como intersección de las mediatrices a los segmentos A_1A_2 y B_1B_2 y se denomina *Polo* o *Centro de rotación de las posiciones 1 y 2*. Es decir, se puede pasar de la posición 1 a la 2 a través de un giro alrededor del punto P_{12} , en vez de seguir la trayectoria real.

En efecto, puesto que

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= A_2B_2 \\ P_{12}A_1 &= P_{12}A_2 \\ P_{12}B_1 &= P_{12}B_2 \end{aligned}$$

Los triángulos $A_1P_{12}B_1$ y $A_2P_{12}B_2$ deben ser iguales, con lo que queda demostrado. Si en vez de considerar las posiciones 1 y 2 se hubieran considerado las posiciones 1 y 3 o 1 y 4, los polos de rotación hubieran sido P_{13} o P_{14} respectivamente, en general, distintos de P_{12} .

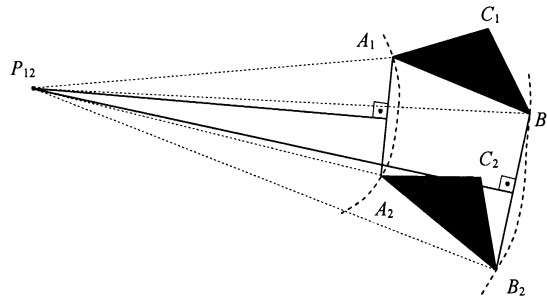


FIGURA 2.2. Polo de rotación, P_{12} , de las posiciones 1 y 2 del plano móvil.

Cuando la posición 2 va acercándose a la posición 1, los segmentos A_1A_2 y B_1B_2 van tendiendo, cada vez más, a las tangentes a las trayectorias de los puntos A y B en A_1 y B_1 , respectivamente. Así pues, en un movimiento infinitesimal (dos posiciones consecutivas infinitamente próximas), el polo de rotación que en este caso se denomina *centro instantáneo de rotación* [históricamente, parece entrecerse en alguna de las construcciones atribuidas a Descartes. A Isaac Newton se le escapó por muy poco cuando estudiaba la forma general de construir tangentes a curvas definidas por propiedades cinemáticas. Finalmente, fue descubierto por Johann Bernoulli en 1742] o *polo de velocidades*, se obtiene mediante la intersección de las normales a las trayectorias (en la práctica, a los vectores velocidad) de dos puntos cualesquiera del sólido rígido. Como consecuencia de este proceso de paso al límite que ha conducido al Centro Instantáneo de Rotación (CIR a partir de ahora), se deducen las siguientes propiedades de este punto:

- Puesto que en un dt su posición no varía, la velocidad de este punto en el instante considerado es nula.
- Al ser dos posiciones consecutivas, el giro equivalente entre dichas posiciones alrededor del CIR es verdaderamente el movimiento real infinitesimal. Puede considerarse, por tanto, que el movimiento del plano es una secuencia de rotaciones diferenciales alrededor de las sucesivas posiciones del CIR.
- De la anterior propiedad se deriva que:
 - La distribución de velocidades en un instante concreto es la misma que la que tendría el sólido rígido en rotación permanente alrededor de dicho punto.
 - La velocidad angular del sólido rígido, ω , es el cociente entre la rotación diferencial y el tiempo en llevarla a cabo ($\omega = d\varphi/dt$). Igualmente, es la relación entre la magnitud velocidad de cualquier punto A del plano (v_A) y su correspondiente distancia al CIR (r_A), es decir, $\omega = (r_A d\varphi)/(r_A dt) = v_A/r_A$.
 - La magnitud del vector velocidad en un punto del sólido rígido es el cociente entre el arco diferencial recorrido por el mismo y el tiempo en llevarlo a cabo, y su dirección es perpendicular al segmento que le une con el CIR.

Un caso de particular interés es aquel en que todos los puntos del sólido rígido tienen la misma velocidad \vec{v} . En esta situación, el CIR se encuentra en un punto del infinito del

plano. La velocidad angular del sólido será entonces: $\omega = v/\infty$, es decir, $\omega = 0$. Se dice, entonces, que el plano móvil se encuentra en una *posición de traslación pura*. Éste es el caso del elemento 3 del mecanismo de la siguiente figura:

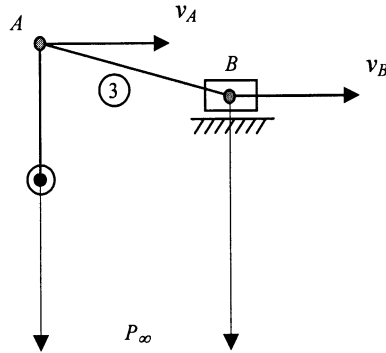


FIGURA 2.3. Posición de traslación pura del elemento 3.

El CIR de un plano móvil está asociado a una determinada posición, o instante considerado, del movimiento de dicho plano. Es un punto del plano móvil que, en general, varía su posición en cada instante. El lugar geométrico de los puntos del plano móvil que han sido CIR (han tenido velocidad nula) en algún instante, se denomina *ruleta* o *curva polar móvil*.

Considérese, ahora, un plano de referencia fijo en el que se mueve el plano móvil. El lugar geométrico de los puntos del plano fijo que han coincidido en algún instante con un centro instantáneo de rotación se denomina *base* o *curva polar fija*.

A continuación se va a analizar la evolución de la posición del CIR sobre la base y la ruleta. Uno podría imaginar dicha evolución como el movimiento de un punto inmaterial que traza simultáneamente dos trayectorias: una sobre el plano fijo, la base, y otra sobre el plano móvil, la ruleta. Dicho punto inmaterial, al cual se denominará *punto matemático*, no pertenece a ninguno de los dos planos considerados hasta ahora. Téngase en cuenta que la base y la ruleta están permanente en contacto precisamente en la posición que ocupa el punto matemático. Por tanto, podría considerarse que el movimiento de este punto queda reflejado por “la estela que deja el contacto” entre dichas dos curvas.

Sea una posición del plano móvil 2, representada por su ruleta, la cual “toca” la base, solidaria al plano fijo 1, según la siguiente figura:

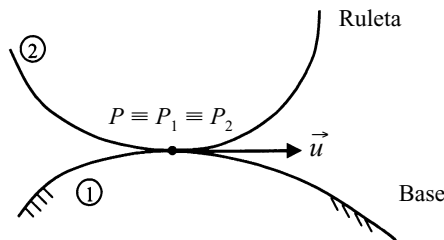


FIGURA 2.4. Base y ruleta del movimiento de un plano.

En dicha figura se pueden diferenciar tres puntos distintos que ocupan una misma posición, la del CIR:

- P_1 : punto del plano fijo que ocupa la posición del CIR. Tiene velocidad nula como cualquier punto del plano fijo.
- P_2 : punto del plano móvil que tiene velocidad nula. Es realmente el CIR.
- P : punto matemático. Tiene velocidad distinta de cero.

De ahora en adelante, a los puntos pertenecientes a un determinado plano se les asignará como subíndice el número de dicho plano.

La velocidad del punto matemático es aquella con la que el CIR cambia de posición, tanto en la base como en la ruleta. Por ello, se la denomina *velocidad de cambio de polo* o *velocidad de sucesión* y se la representa por \vec{u} .

De todo lo anterior puede concluirse lo siguiente:

1. La base y la ruleta son curvas tangentes entre sí, en todo instante, ya que al ser trazadas simultáneamente por el punto matemático, ambas deben de ser tangentes a la velocidad de cambio de polo.
2. La velocidad de deslizamiento de la ruleta sobre la base en cada instante, es nula, ya que los puntos P_1 y P_2 tienen la misma velocidad. Por ello, la ruleta posee un movimiento de rodadura pura sobre la base [probado por primera vez por Cauchy en 1827].
3. El movimiento de un elemento plano en su plano queda totalmente definido por el movimiento de rodadura de sus polares. Por ello, si dicho elemento es parte constituyente de un mecanismo, las restricciones cinemáticas que sobre él imponen el resto de los elementos del mecanismo son equivalentes a la condición de rodadura de las polares. Así, en el caso de que las polares sean unas curvas relativamente sencillas, el análisis cinemático del elemento puede llevarse a cabo sobre sus polares.

En relación con esta última conclusión, el único dato que resta para conocer completamente la cinemática del plano móvil a través del movimiento de sus polares, es la velocidad de cambio de polo. Un procedimiento sencillo, aunque no general, para calcular esta velocidad, consiste en materializar las líneas cuya intersección definen permanentemente la posición del CIR. En la siguiente figura se representa un ejemplo de aplicación de este método sobre un mecanismo de biela-manivela:

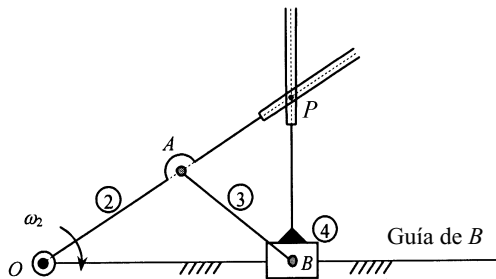


FIGURA 2.5. Materialización del CIR del elemento 3.

El CIR se encuentra en la intersección de las líneas: OA y BP . Materializando el punto como una partícula que puede moverse simultáneamente sobre dichas líneas, las ecuaciones a plantear son:

$$\vec{u} = \vec{v}_a^2 + \vec{v}_r^2 = \vec{v}_a^4 + \vec{v}_r^4 \quad [2.1]$$

donde los subíndices indican el carácter de arrastre o relativo de las velocidades, y los superíndices, el elemento del mecanismo al que se refiere el movimiento de la partícula.

Este concepto de materialización del CIR es susceptible de ser programado fácilmente en un computador para obtener la base y la ruleta de ciertos elementos de un mecanismo. Así, en la figura 2.6 se representan gráficamente las curvas polares de los planos acopladores de dos sencillos mecanismos:

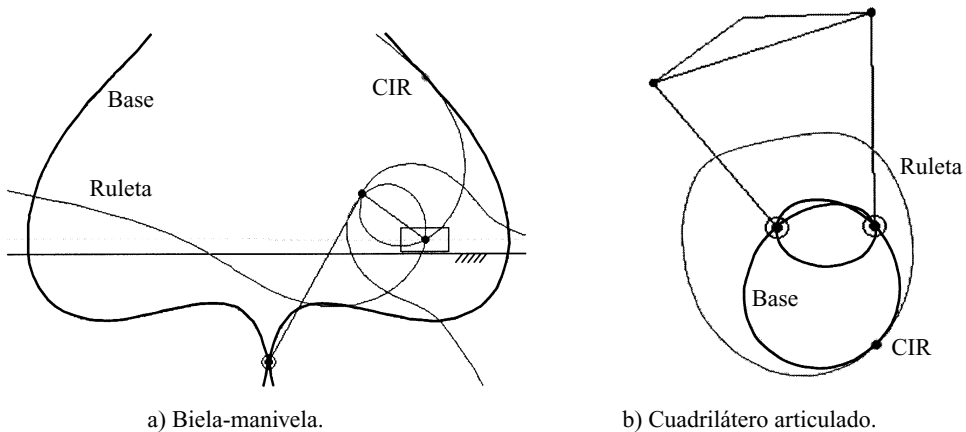


FIGURA 2.6. Curvas polares.

Generalmente, en los textos de Mecánica Fundamental se explican procedimientos analíticos para la obtención de las curvas polares. Sin embargo, hay casos en los que dichas curvas pueden obtenerse muy fácilmente dada la simplicidad de las mismas, tal y como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo de aplicación 2.1. En el mecanismo de la figura 2.7, obtener la base y la ruleta de la barra 3 cuya longitud es L .

Para obtener la ruleta, hay que referir el CIR P al elemento móvil 3. En cualquier posición del mecanismo, P “ve” bajo 90° a los extremos A y B de la barra. Por tanto, el lugar geométrico de las sucesivas posiciones de P , es decir, la ruleta, es una circunferencia de diámetro AB (figura 2.8).

Por otro lado, obsérvese que para cualquier posición del mecanismo, la distancia entre P y el punto fijo O permanece constante. Por tanto, la base es una circunferencia de centro O y radio $OP = L$ (figura 2.8).

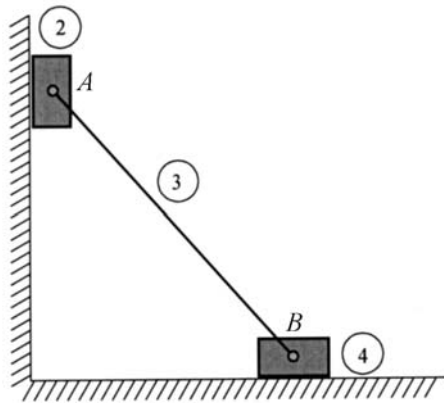


FIGURA 2.7. Mecanismo RRPP.

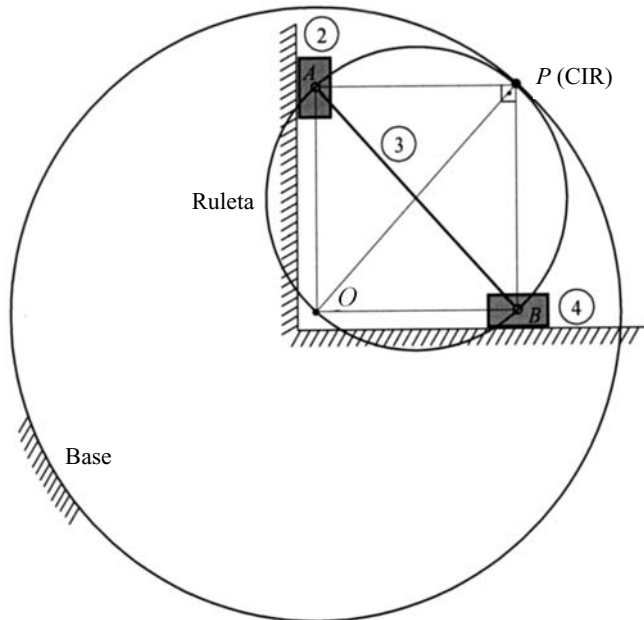


FIGURA 2.8. Curvas polares del elemento 3.

Téngase de nuevo en cuenta este mecanismo para realizar algunas consideraciones de interés. Puede observarse que el punto medio C de la barra 3 (figura 2.9a) se encuentra permanentemente en la intersección de las diagonales AB y OP . Puede deducirse, por tanto, que la trayectoria del punto C es una circunferencia de radio $L/2$ y centro O . Por consiguiente, si se articula una nueva barra al punto C del mecanismo por un extremo, y al punto fijo O por el otro, el mecanismo resultante (figura 2.9b) no verá alterado su movi-

miento. Esta restricción añadida es, en consecuencia, una restricción redundante a otras a las que está sometido el mecanismo original. Obsérvese que aunque el nuevo mecanismo sigue teniendo 1 gdl, la fórmula de Grübler da 0 gdl.

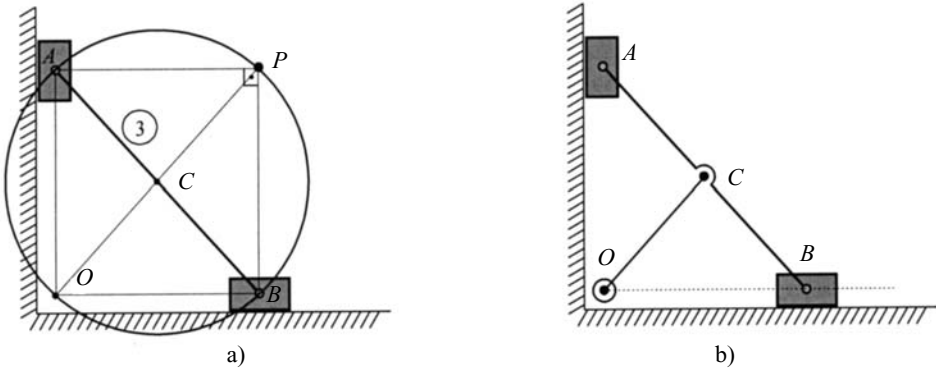


FIGURA 2.9. Aplicación de una restricción redundante.

Si ahora se libera al mecanismo de la figura 2.9b de la deslizadera articulada en A, el mecanismo resultante (figura 2.10a) sigue teniendo 1 gdl, continúa moviéndose igual que el anterior, pero ya no posee restricciones redundantes; es un mecanismo de biela-manivela. Nótese cómo hasta el momento, todos los mecanismos obtenidos son cinemáticamente equivalentes. Por tanto, las curvas polares correspondientes a sus elementos AB siguen siendo las mismas de la figura 2.8.

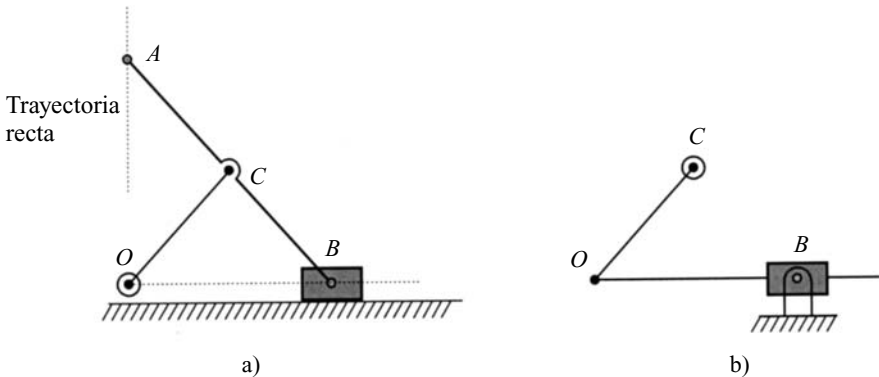


FIGURA 2.10. Inversiones de una misma cadena.

Considérese la inversión del mecanismo de la figura 2.10a, obtenida al fijar el elemento AB (figura 2.10b). Puesto que se ha invertido el movimiento, lo mismo ocurre con las curvas polares del nuevo acoplador: la antigua base es ahora la nueva ruleta y viceversa (figura 2.11).

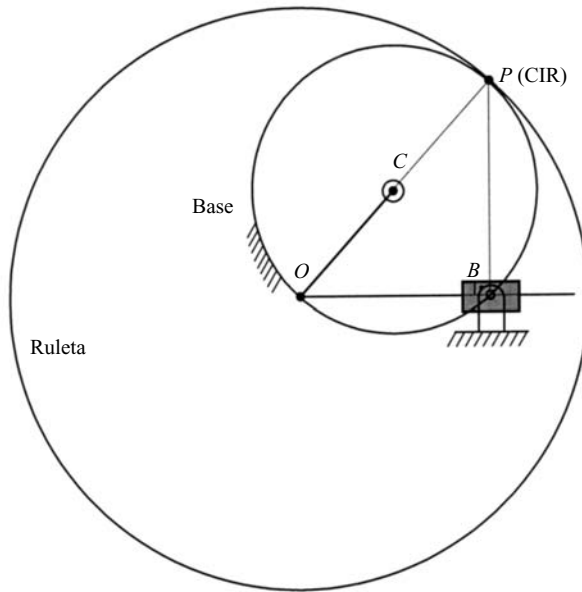


FIGURA 2.11. Curvas polares de la inversión.

2.3. Teoremas, propiedades y formulación del campo de velocidades de un plano móvil

El conocimiento del CIR puede emplearse ventajosamente para, dada la velocidad de un punto, determinar la de otro cualquiera del plano móvil.

En efecto, sea \vec{v}_A la velocidad de un punto A de un plano móvil, A_v el extremo de la misma, P la posición del CIR en ese instante, y B la posición de un punto cualquiera del mencionado plano. quede todo ello representado en la siguiente figura:

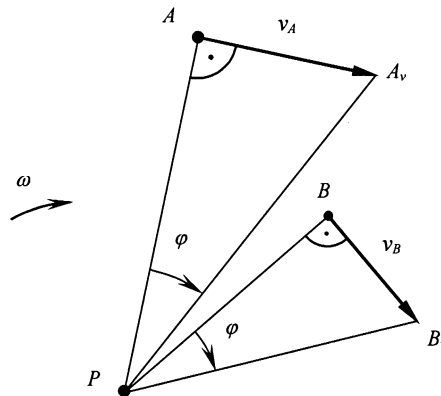


FIGURA 2.12. Semejanza de triángulos.

De acuerdo con una de las anteriores propiedades del CIR:

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = \omega \tag{2.2}$$

Si se expresa la velocidad angular ω , en función de un ángulo φ :

$$\omega = \operatorname{tg} \varphi \tag{2.3}$$

Y teniendo en cuenta que los triángulos PAA_v y PBB_v son rectángulos, se verificará:

$$\varphi = \operatorname{ang}(\overline{AP}, \overline{PA_v}) = \operatorname{ang}(\overline{BP}, \overline{PB_v}) \tag{2.4}$$

Con lo cual se demuestra que dichos triángulos PAA_v y PBB_v son semejantes. Por tanto, para calcular v_B basta con llevar φ sobre PB en el mismo sentido que indica la velocidad de A , y donde se corte con la perpendicular por B a PB , allí estará el extremo de la velocidad de B , B_v .

2.3.1. Teorema de Burmester

A partir de estos razonamientos, se va a pasar a demostrar el denominado teorema de Burmester, que se enuncia de la siguiente manera: “la figura formada por los extremos de las velocidades de puntos de un plano móvil es semejante a la figura original (formada por dichos puntos), siendo $\sqrt{1 + \omega^2}$ la razón de semejanza de sus lados, y encontrándose girada un ángulo φ respecto de la original”.

En efecto, sean tres puntos A, B y C pertenecientes a un plano móvil cuyo CIR es P (figura 2.13) en ese instante, y supónganse conocidas las velocidades de dichos tres puntos.

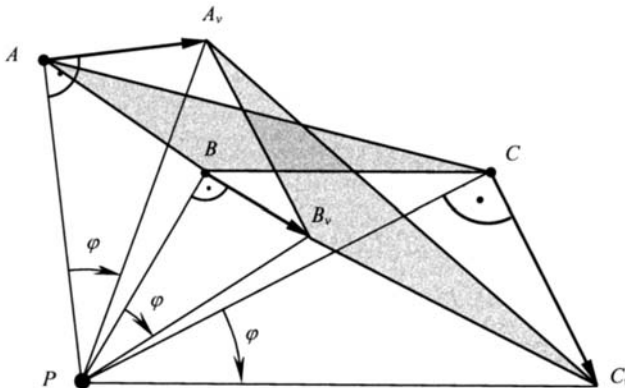


FIGURA 2.13. Relativa a la demostración del teorema de Burmester.

Los triángulos PAB y PA_vB_v son semejantes ya que poseen dos lados proporcionales $\left(\frac{\overline{PA_v}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB_v}}{\overline{PB}}\right)$, pues:

$$\frac{\overline{PA_v}}{\overline{PA}} = \frac{(\overline{PA}^2 + \overline{AA_v}^2)^{1/2}}{\overline{PA}} = (1 + \omega^2)^{1/2} \quad [2.5]$$

$$\frac{\overline{PB_v}}{\overline{PB}} = \frac{(\overline{PB}^2 + \overline{BB_v}^2)^{1/2}}{\overline{PB}} = (1 + \omega^2)^{1/2} \quad [2.6]$$

Que forman el mismo ángulo, $\text{ang}(APB) = \text{ang}(A_vPB_v)$, ya que

$$\text{ang}(APB) = \text{ang}(APB_v) - \varphi = (\varphi + \text{ang}(A_vPB_v) - \varphi = \text{ang}(A_vPB_v) \quad [2.7]$$

Por tanto,

$$\frac{\overline{PA_v}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB_v}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{A_vB_v}}{\overline{AB}} = (1 + \omega^2)^{1/2} \quad [2.8]$$

De igual manera puede demostrarse que los triángulos PAC y PBC son semejantes a PA_vC_v y PB_vC_v , respectivamente, y con la misma relación de proporcionalidad [2.8]. Por tanto, puede escribirse

$$\frac{\overline{A_vB_v}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_vC_v}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_vC_v}}{\overline{BC}} = (1 + \omega^2)^{1/2} \quad [2.9]$$

Esto implica una relación de semejanza entre los triángulos ABC y $A_vB_vC_v$, los cuales están girados un ángulo φ (uno respecto de otro) como puede verse en la figura 2.13.

Una consecuencia directa de este teorema es la siguiente: “si los puntos A , B y C del sólido están alineados, también lo estarán los extremos de sus velocidades”.

En relación con esto, existe otro importante teorema conocido con el nombre de *teorema de las velocidades proyectadas*, que se enuncia de la siguiente manera: “todos los puntos de una línea recta de un plano móvil tienen la misma componente de velocidad según dicha recta”. Aunque ésta es una deducción directa de la hipótesis de sólido rígido (si las componentes fueran distintas, el sólido se deformaría), puede demostrarse también de la siguiente manera. Sean A y B dos puntos de un sólido rígido, y P su CIR en ese instante (figura 2.14):

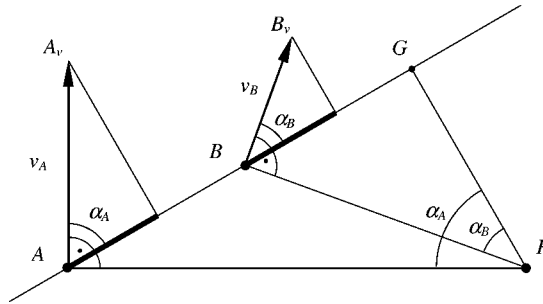


FIGURA 2.14. Componentes de velocidad sobre una recta AB del sólido rígido.

De la figura 2.14 se desprende que

$$v_A \cdot \cos \alpha_A = \omega \cdot \overline{PA} \cdot \cos \alpha_A = \omega \cdot \overline{PG} = \omega \cdot \overline{PB} \cdot \cos \alpha_B = v_B \cdot \cos \alpha_B \quad [2.10]$$

En la figura 2.15 se muestra un resumen gráfico de esta propiedad. Para realizar la construcción, se ha considerado como dato de partida la velocidad del punto A. Todos los puntos de la recta DA poseen la misma componente de velocidad sobre dicha recta, y es la magnitud de la velocidad del punto A. La componente de velocidad de los puntos G y H sobre la recta AG se obtiene al proyectar la magnitud de la velocidad de A sobre dicha recta. Por último, la proyección de las velocidades de los puntos B y C sobre la recta AB es nula, al igual que la del punto A.

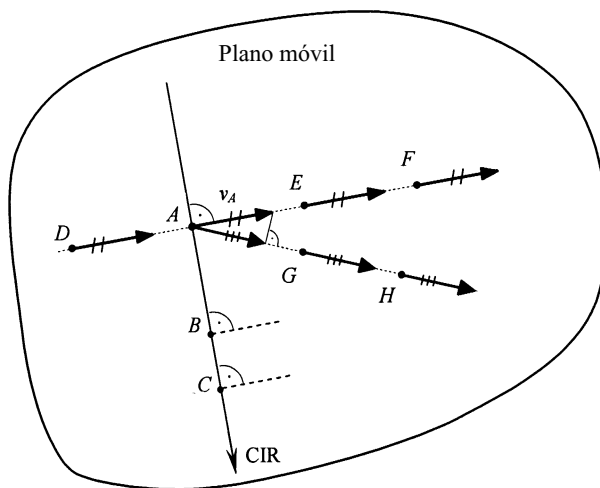


FIGURA 2.15. Construcción a partir de la velocidad del punto A.

Ejemplo de aplicación 2.2. Aplicar el teorema de las velocidades proyectadas al mecanismo de la figura 2.16 para obtener la velocidad del punto D .

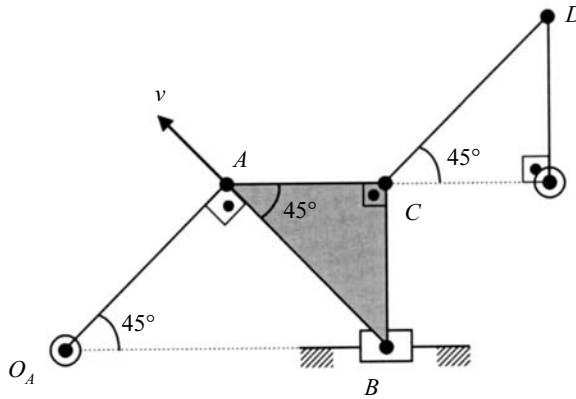


FIGURA 2.16. Entrada del mecanismo por el nudo A .

En la siguiente figura queda representada gráficamente la solución:

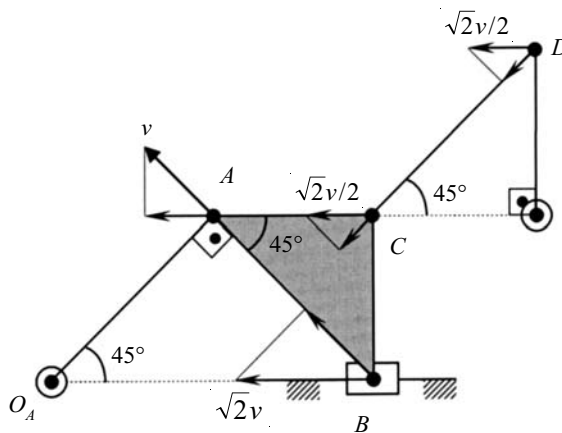


FIGURA 2.17. Solución.

Obsérvese que la solución sigue siendo la misma cuando el problema se plantea para el mecanismo de la figura 2.18. Ello es debido a que las orientaciones de los elementos coinciden con las de sus correspondientes en el mecanismo original.

Aquellos mecanismos como los de las figuras 2.17 y 2.18 que poseen la misma topología y la misma orientación (elemento a elemento) se denominan isógonos (Hernández, 2003). Los elementos ternarios o de orden superior deben ser convertidos en sus equivalentes de barras, constituidos exclusivamente por elementos binarios, para analizar sus

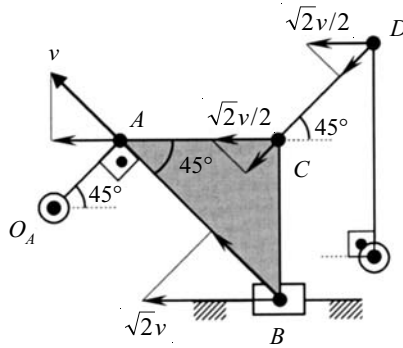


FIGURA 2.18. Mecanismo isógono.

correspondientes orientaciones. Una propiedad cinemática resultante de la aplicación del teorema de las velocidades proyectadas a los pares de rotación (o nudos) de los mecanismos isógonos es la siguiente:

Los mecanismos isógonos poseen idéntico cinema de velocidades nodales siempre que se les aplique la misma velocidad nodal de entrada.

Merece la pena resaltar que los mecanismos isógonos no son mecanismos semejantes, es decir, mecanismos cuyas dimensiones guardan una proporción, en cuyo caso esta propiedad es obvia. Esta propiedad se hace todavía más evidente en los mecanismos isógonos con pares de rotación exclusivamente. Sus correspondientes matrices jacobianas (concepto que será presentado más adelante) pueden expresarse de tal manera que sus términos dependen exclusivamente de la orientación de las barras del mecanismo (Hernández, 2003).

2.3.2. Campo de velocidades

A continuación, se va a formular analíticamente el campo de velocidades de un sólido rígido con movimiento plano. Sean A y B dos puntos cualesquiera de un plano móvil que se mueve con una velocidad angular ω . Sitúese un sistema de referencia S móvil con su origen en el punto A , y que se mantiene paralelo a sí mismo durante todo el movimiento. Considérese, ahora, el movimiento de arrastre y relativo del punto B respecto a dicho sistema S (figura 2.19).

Siguiendo la misma notación indicial que en la ecuación [2.1], la velocidad del punto B puede expresarse de la siguiente manera:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_a^S + \vec{v}_r^S \tag{2.11}$$

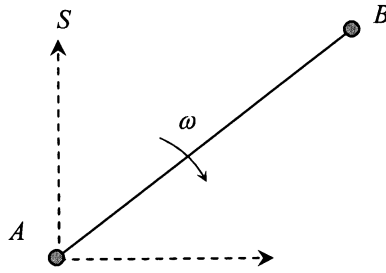


FIGURA 2.19. Movimiento de B relativo al sistema S.

Como el sistema S no gira ($\omega_s = 0$), el movimiento de arrastre será una traslación en la que todos los puntos del plano se mueven con la velocidad del punto A :

$$\vec{v}_a^S = \vec{v}_A \tag{2.12}$$

Por otra parte, los puntos del plano móvil tienen respecto al sistema S un movimiento circular de rotación. Por tanto,

$$\vec{v}_r^S = \vec{\omega}_r \wedge \vec{AB} = (\vec{\omega} - \vec{\omega}_s) \wedge \vec{AB} = \vec{\omega} \wedge \vec{AB} \tag{2.13}$$

De esta forma, la velocidad de un punto cualquiera B de un plano móvil, en función de la de otro A , puede expresarse como

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB} \tag{2.14}$$

La siguiente figura representa gráficamente la anterior ecuación:

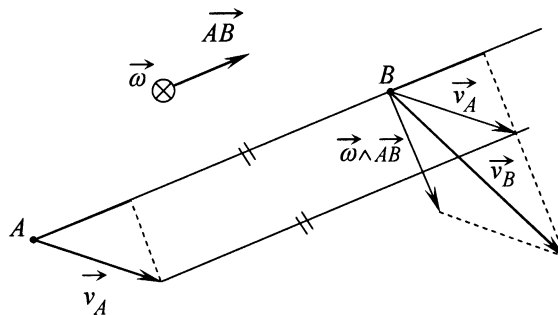


FIGURA 2.20. Composición gráfica de la ecuación [2.14].

La componente $\vec{\omega} \wedge \vec{AB}$ suele expresarse como \vec{v}_{BA} y es la diferencia entre las velocidades de los puntos B y A :

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \wedge \vec{AB} \tag{2.15}$$

2.3.3. *Imagen de velocidades*

A continuación, va a llevarse a un origen común O , los vectores velocidad de los puntos A , B y C del plano móvil. Si se unen los extremos de estos tres vectores, se obtiene un triángulo $A'B'C'$ semejante al triángulo ABC . Esta construcción es denominada *imagen de velocidades* y queda reflejada en la siguiente figura:

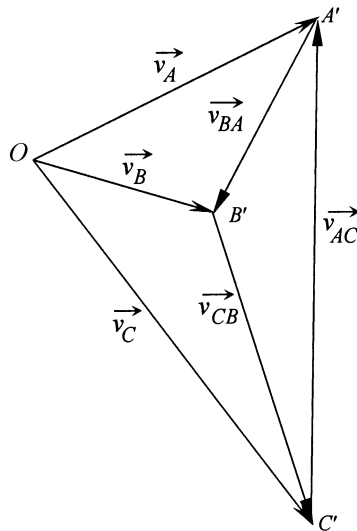


FIGURA 2.21. Imagen de velocidades.

En efecto, la formulación del campo de velocidades permite expresar las velocidades de estos tres puntos de la siguiente manera:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \tag{2.16}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB} \tag{2.17}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC} \tag{2.18}$$

Donde \vec{v}_{BA} , \vec{v}_{CB} y \vec{v}_{AC} son precisamente los tres lados del triángulo $A'B'C'$. Por tanto, sus lados son perpendiculares y proporcionales (ecuación [2.15]) a los del triángulo ABC , siendo ω la razón de semejanza.

Esta construcción gráfica de la imagen de velocidades es muy utilizada en cinemática gráfica. Es otro método para, dadas las velocidades de dos puntos, calcular la de un tercero. Para ello, se construye la imagen de velocidades a partir de las velocidades conocidas. A continuación, en dicha construcción, se determina el punto homólogo a aquel cuya velocidad se pretende calcular. Uniendo este punto con el origen, se obtendrá el vector velocidad buscado. Lógicamente, el punto O es el homólogo del CIR ya que es el único punto de la imagen de velocidades que tiene velocidad nula.

Ejemplo de aplicación 2.3. Calcular la velocidad del punto C_3 (punto C del plano móvil 3) y la posición del CIR mediante la imagen de velocidades. Se parte del conocimiento de la velocidad de la rótula A (figura 2.22).

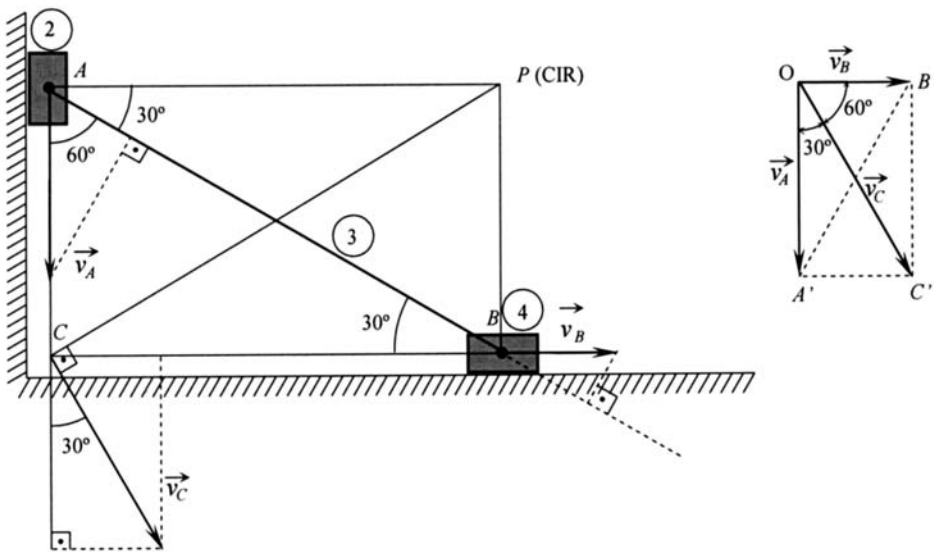


FIGURA 2.22. Aplicación de la imagen de velocidades.

2.4. Teorema de Aronhold-Kennedy o de los tres centros

El concepto de centro instantáneo de rotación o polo de velocidades puede ser generalizado al movimiento relativo entre dos planos móviles. Hasta ahora se han considerado dos planos: uno móvil y otro fijo. El CIR era aquel punto del plano móvil cuya velocidad era nula. Esto implica que éste es el único punto del plano móvil que tiene la misma velocidad que el punto del plano fijo que ocupa su misma posición.

Con mayor generalidad, se puede definir centro instantáneo de rotación del movimiento relativo del plano móvil 3 respecto del plano móvil 2, y será representado por P_{23} , a un punto del plano móvil 3 que tiene la misma velocidad absoluta (o relativa respecto de otro plano móvil) que el punto del plano móvil 2 que coincide con él. Es decir, es un punto que

posee la misma velocidad como perteneciente a cualquiera de los dos planos. Es evidente, a partir de esta definición, que P_{23} coincide con P_{32} .

Los conceptos de base y ruleta son también extensibles al movimiento relativo, aunque en este caso ambas curvas, a las que llamaremos simplemente polodias o curvas polares, son móviles. El movimiento relativo entre ambos planos puede seguirse estudiando como la rodadura de una curva polar sobre la otra.

El teorema de Aronhold-Kennedy establece que los tres centros instantáneos de rotación correspondientes al movimiento relativo entre tres planos móviles, son colineales. Este teorema es independiente de que dichos planos estén conectados o no mediante pares cinemáticos.

En efecto, considérense los planos 1, 2 y 3 en movimiento relativo (figura 2.23). Sean P_{12} y P_{13} dos de los tres CIR considerados. Obviamente, estos puntos pueden estar situados, o no, dentro de los contornos físicos de sus correspondientes elementos. Sin pérdida de generalidad y por simplicidad, el movimiento relativo entre estos tres planos puede ser analizado considerando que uno de ellos es fijo (p. ej., el 1).

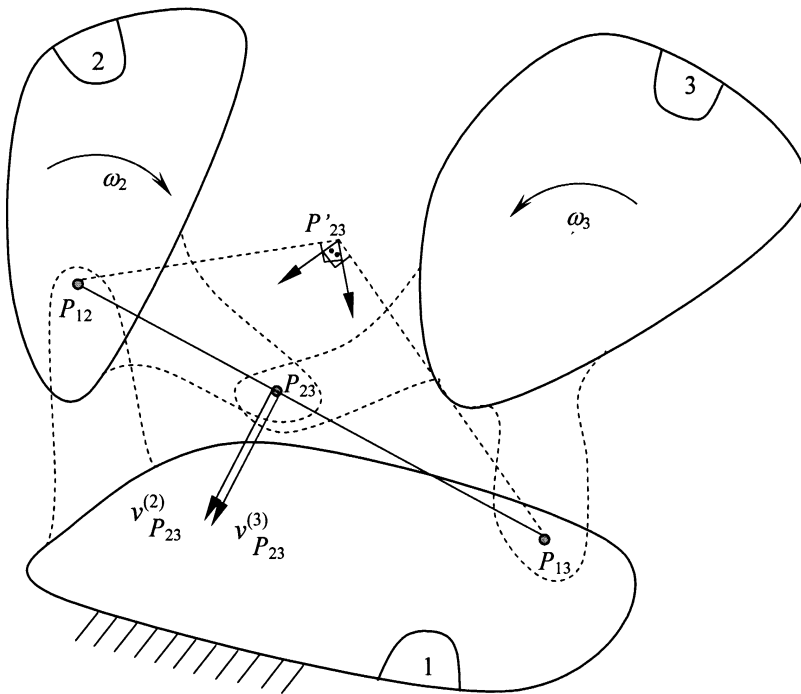


FIGURA 2.23. Teorema de los tres centros.

Supóngase, en contra del teorema de Aronhold-Kennedy, que P_{23} no estuviera sobre la recta $P_{12}P_{13}$, sino por ejemplo en P'_{23} . Su velocidad sería por una parte perpendicular a $P_{12}P'_{23}$ y por otra perpendicular a $P_{13}P'_{23}$, no coincidiendo ambas direcciones. Como por hipótesis P_{23} debe tener la misma velocidad como perteneciente al plano 2 que como per-

teneciente al plano 3, el punto deberá estar sobre la recta $P_{12}P_{13}$, y el módulo de su velocidad deberá verificar:

$$v_{P_{23}} = \omega_2 \cdot \overline{P_{12}P_{23}} = \omega_3 \cdot \overline{P_{13}P_{23}} \quad [2.19]$$

Reordenando la anterior ecuación:

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\overline{P_{13}P_{23}}}{\overline{P_{12}P_{23}}} \quad [2.20]$$

Observando la figura 2.23 puede concluirse que si P_{23} cae entre P_{12} y P_{13} , $\vec{\omega}_2$ y $\vec{\omega}_3$ tienen distinto sentido, mientras que si cae fuera, tienen el mismo sentido.

De acuerdo con los razonamientos anteriores, en un mecanismo hay tantos CIR como combinaciones de dos elementos puedan formarse. Así, si el mecanismo tiene N elementos, el número total de polos será $N(N - 1)/2$.

En algunos casos, los polos pueden ser fácilmente identificables por simple inspección de la geometría del movimiento de sus planos. A estos polos así detectables se les denomina *polos primarios*. Una clasificación de los mismos es la siguiente:

1. Todos los pares de rotación que existan en el mecanismo. En efecto, pues un plano está en rotación pura respecto a otro alrededor del par de rotación que les conecta. Asimismo, la velocidad del punto que define la posición del par es la misma respecto a un plano que respecto al otro.
2. El punto del infinito cuya dirección es perpendicular a la de traslación de un par prismático. El movimiento relativo es una traslación pura.
3. El punto de contacto en un par de rodadura.
4. En un par de leva, el polo se encuentra en la normal a las superficies en el punto de contacto, ya que la velocidad relativa entre ambas superficies en dicho punto tiene la dirección de la tangente.

Un sencillo procedimiento para obtener los polos de velocidad de un mecanismo (sin realizar el análisis de velocidades) es el denominado *diagrama del círculo*, el cual consiste en lo siguiente:

1. Se divide una circunferencia en tantas partes como elementos tiene el mecanismo. Cada una de estas marcas sobre la circunferencia representa un elemento del mecanismo. Todas las posibles cuerdas entre dichas marcas representan los polos del mecanismo.
2. Se trazan las cuerdas correspondientes a los polos primarios.
3. Para buscar un polo desconocido, se procede a localizar una cuerda que cierre a la vez dos triángulos. El polo se obtiene mediante la intersección de dos rectas definidas por sendas parejas de cuerdas pertenecientes a sendos triángulos. De este modo, se va progresando hasta calcular todos los polos.

Ejemplo de aplicación 2.4. Obtener todos los polos de velocidad del mecanismo de la figura 2.24a mediante el método del diagrama del círculo:

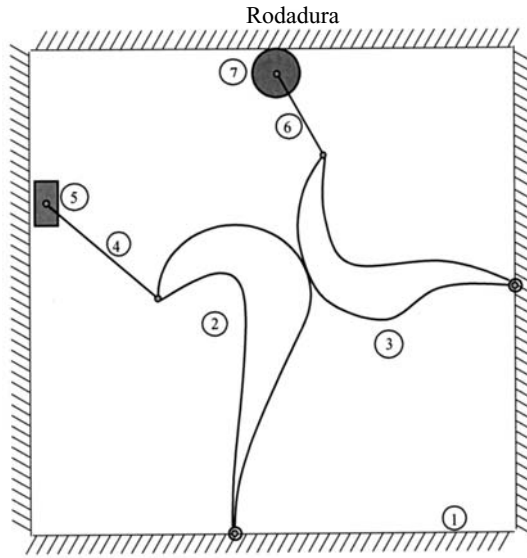


FIGURA 2.24 a). Mecanismo a resolver.

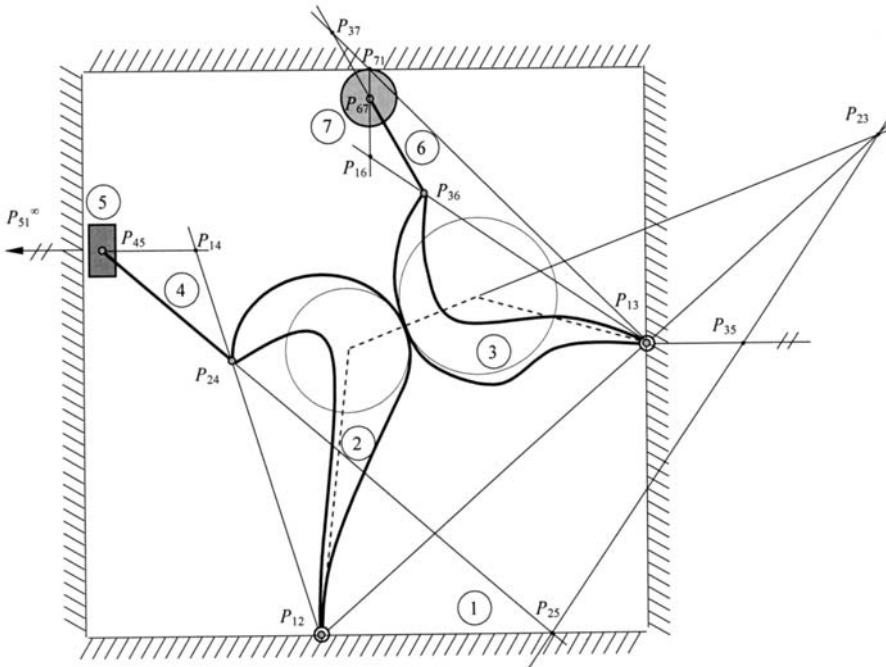


FIGURA 2.24 b). Obtención de los polos.

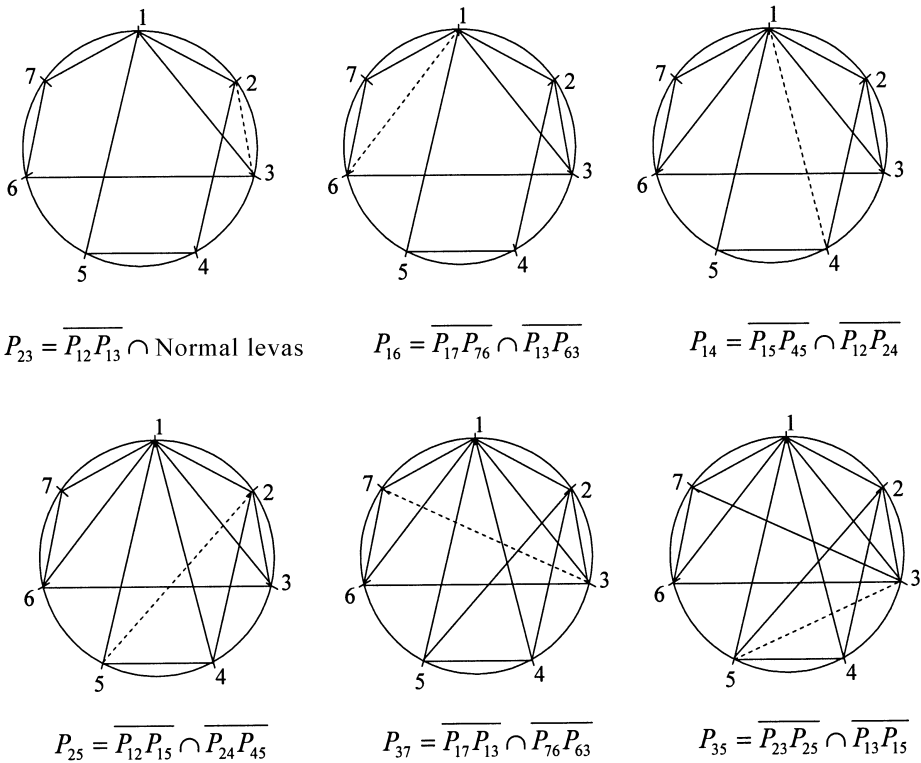


FIGURA 2.24 c). Método del diagrama del círculo.

La figura 2.24c muestra la obtención de los seis primeros polos mediante el diagrama del círculo. En la figura 2.24b están representados todos los polos del mecanismo.

Este procedimiento es muy utilizado para calcular los polos de velocidad en mecanismos de 1 gdl. No obstante, no siempre garantiza la obtención de todos los polos pudiendo ocurrir que llegado a un punto no se pueda progresar más. Por otro lado, este método puede colaborar de manera eficaz en la resolución del problema de velocidades.

2.5. Campo de aceleraciones. Imagen de aceleraciones

Igual que en el caso del campo de velocidades, considérense dos puntos A y B del plano móvil y una referencia S con las mismas características que las de la figura 2.19. La aceleración de B puede expresarse de la siguiente manera:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_a^S + \vec{a}_r^S + \vec{a}_{cor}^S \tag{2.21}$$

Donde

$$\vec{a}_a^S = \vec{a}_A \quad (\text{ya que } \vec{\omega}_S = \vec{0} \text{ y } \vec{\alpha}_S = \vec{0}) \tag{2.22}$$

$$\vec{a}_r^S = \vec{\omega}_r \wedge (\vec{\omega}_r \wedge \vec{AB}) + \vec{\alpha}_r \wedge \vec{AB} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AB}) + \vec{\alpha} \wedge \vec{AB} \quad [2.23]$$

$$\vec{a}_{cor}^S = 2 \vec{\omega}_S \wedge \vec{v}_r^S = \vec{0} \quad [2.24]$$

Por tanto,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AB}) + \vec{\alpha} \wedge \vec{AB} \quad [2.25]$$

A las componentes de la ecuación [2.25] se las suele expresar como:

$$\vec{a}_{BA} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AB}) + \vec{\alpha} \wedge \vec{AB} \quad [2.26]$$

$$\vec{a}_{BA}^N = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AB}) \quad [2.27]$$

$$\vec{a}_{BA}^T = \vec{\alpha} \wedge \vec{AB} \quad [2.28]$$

Es decir,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^N + \vec{a}_{BA}^T \quad [2.29]$$

La componente \vec{a}_{BA}^N representa la diferencia de aceleraciones entre los puntos A y B del sólido. Tiene, a su vez, dos componentes (figura 2.25). La primera de ellas, \vec{a}_{BA}^N , tiene la dirección AB y el sentido de B a A (independientemente del sentido de $\vec{\omega}$). La segunda, \vec{a}_{BA}^T , tiene la dirección perpendicular a AB y el sentido que define $\vec{\alpha}$.

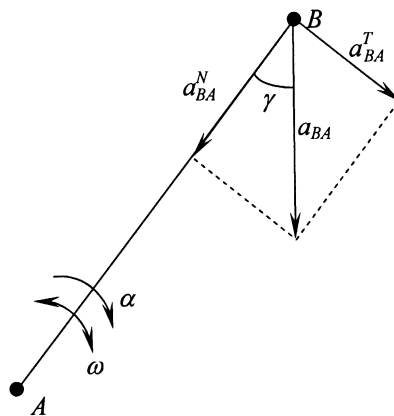


FIGURA 2.25. Componentes de \vec{a}_{BA} .

En un instante determinado, el ángulo γ que forma la componente diferencia de aceleraciones con el radio vector definido por dichos dos puntos es constante para cualquier pareja de puntos del plano y su valor es:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a_{BA}^T}{a_{BA}^N} = \frac{\alpha \cdot \overline{AB}}{\omega^2 \cdot \overline{AB}} = \frac{\alpha}{\omega^2} \quad [2.30]$$

Una vez formulado analíticamente el campo de aceleraciones se va a construir la *imagen de aceleraciones*. Para ello se va a proceder de igual manera que en el caso de la imagen de velocidades. Esto es, se llevará a un origen común O los vectores aceleración de tres puntos A, B y C del sólido (figura 2.26). Uniendo los extremos de estos vectores se obtiene un triángulo $A''B''C''$ semejante al triángulo ABC original:

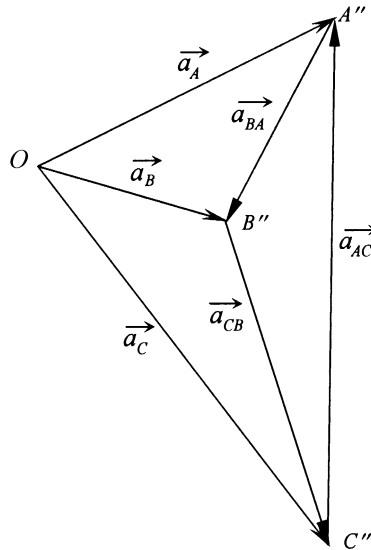


FIGURA 2.26. Imagen de aceleraciones.

Teniendo en cuenta que

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \quad [2.31]$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} \quad [2.32]$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC} \quad [2.33]$$

El triángulo $A''B''C''$, cuyos lados son \vec{a}_{BA} , \vec{a}_{CB} y \vec{a}_{AC} , es semejante al triángulo ABC ya que sus lados forman un ángulo γ con sus homólogos AB, BC y CA .

En este caso, el origen de la imagen de aceleraciones es el homólogo del punto del plano móvil que tiene aceleración nula. Por lo demás, la utilización de la imagen de aceleraciones es similar a la de velocidades.

Por último, puede demostrarse que para aceleraciones también hay un teorema que guarda un gran paralelismo con el de Burmester. Tal teorema establece que si se unen los extremos de los vectores aceleración de una serie de puntos del plano móvil se obtiene otra figura semejante a la original con una relación de proporcionalidad de valor $[(1 - \omega^2)^2 + \alpha^2]^{0.5}$ y girada un ángulo ψ , tal que $tg\psi = \alpha / (1 - \omega^2)$.

Aceleración del CIR. Sea A un punto cualquiera del plano móvil 2 y XOY una referencia fija:

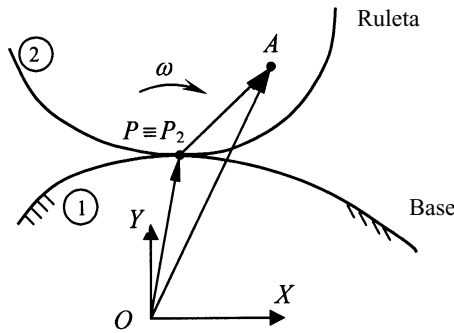


FIGURA 2.27. Posición de un punto A del plano móvil 2.

Dicho punto posee una velocidad:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{PA} \tag{2.34}$$

Expresión válida para cualquier posición del plano, o instante considerado: donde P es el punto matemático cuya trayectoria es la base en el plano fijo, y la ruleta en el plano móvil. La aceleración de A puede obtenerse derivando la expresión anterior:

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{PA} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{PA}}{dt} \tag{2.35}$$

Por otro lado,

$$\frac{d\vec{PA}}{dt} = \frac{d(\vec{OA} - \vec{OP})}{dt} = \vec{v}_A - \vec{v}_P \tag{2.36}$$

En la expresión anterior, si se hace que el punto A tienda a ser el CIR P_2 quedaría:

$$\vec{a}_{CIR} = \vec{a}_{P_2} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{PP_2} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_{P_2} - \vec{v}_P) = -\vec{\omega} \wedge \vec{u} \quad [2.37]$$

La dirección de esta aceleración es perpendicular a la velocidad de cambio de polo y el sentido es el que hace tender a separarse el punto de contacto de la ruleta respecto del de la base.

2.6. Teorema de Hartmann

Antes de enunciar y demostrar este teorema, se va a realizar un breve preámbulo cinemático que facilitará su entendimiento.

Sea A un punto de un plano móvil 2 que se mueve dejando su trayectoria impresa en el plano fijo 1. Considérese, además, otro plano al que se le asignará el nº 3, cuyo movimiento viene definido por el movimiento de la normal y la tangente a la trayectoria del punto A . Obsérvese que el movimiento del plano 3 está completamente definido (se conoce el movimiento de un segmento), a diferencia del movimiento del plano 2, del que sólo se conoce la trayectoria del punto A (figura 2.28).

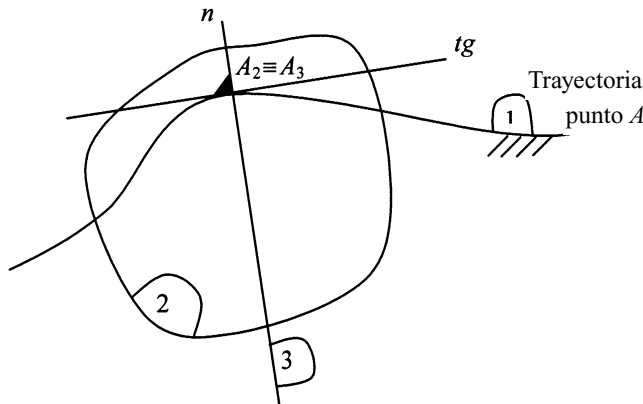


FIGURA 2.28. Trayectoria del punto A.

De acuerdo con lo anterior puede afirmarse lo siguiente:

- El polo P_{21} estará sobre la normal a la trayectoria de A .
- El punto A pertenece tanto al plano 2 como al 3. Puede decirse que entre dichos dos planos existe un par cinemático de rotación situado en el punto A . Luego A es el polo P_{23} .
- De acuerdo con el teorema de Aronhold-Kennedy, si P_{21} y P_{23} están permanentemente sobre la normal, P_{13} también lo estará. Téngase en cuenta que, siendo P_{13} el CIR de 3, se encuentra permanentemente en la normal que es una recta de 3, enton-

ces dicha normal es la ruleta de 3. La ruleta de 3 rueda sin deslizar sobre su base tal como aparece en la figura 2.29. En dicha figura aparece el plano 3 en los instantes t y $t + \Delta t$. De esta manera queda más clara la diferencia de movimientos entre los planos 2 y 3. En concreto, puede observarse que los segmentos $A_2^{t+\Delta t}B_2^{t+\Delta t}$ y $A_3^{t+\Delta t}B_3^{t+\Delta t}$, de igual longitud, eran coincidentes en el instante t .

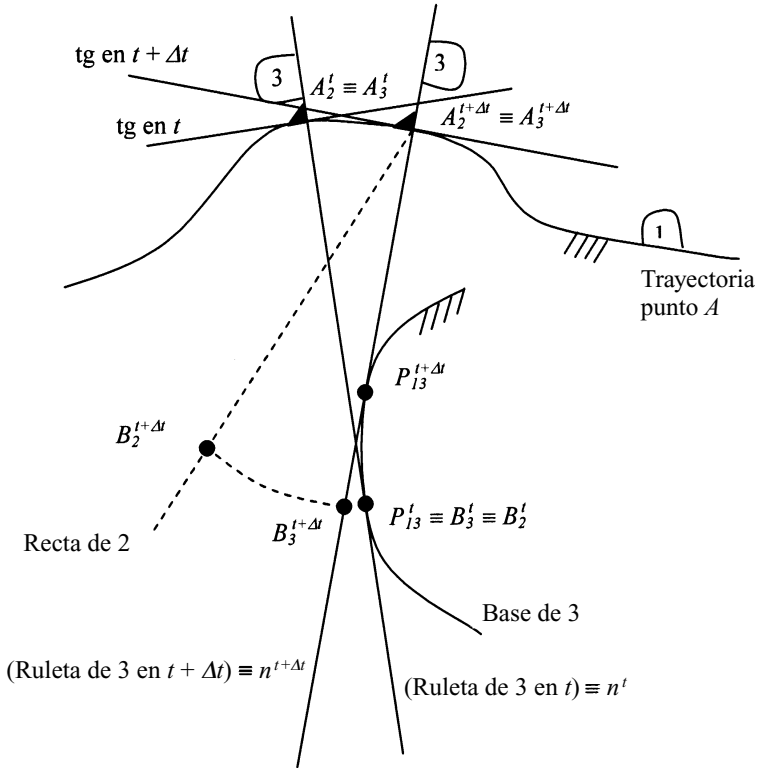


FIGURA 2.29. Plano móvil 3 en los instantes t y $t + \Delta t$.

Puesto que el movimiento del plano 3 es completamente conocido, puede determinarse la posición de su polo P_{13} . En efecto, el movimiento del plano 3 puede representarse por el movimiento de la normal a la trayectoria del punto A (figura 2.30). Durante un tiempo infinitesimal dt , la trayectoria recorrida por el punto A es el arco diferencial A^tA^{t+dt} de la circunferencia osculadora a dicha trayectoria, por lo que el movimiento del plano 3 es un giro diferencial alrededor del punto O_A . Ahora bien, como el movimiento infinitesimal de un plano móvil es un giro diferencial alrededor de su CIR, O_A es el CIR de 3, P_{13} , en ese instante. Además, O_A es el centro de la circunferencia osculadora, luego es el centro de curvatura de la trayectoria de A en ese instante. Por tanto, la base de 3 es al mismo tiempo el lugar geométrico de los centros de curvatura de la trayectoria de A , es decir, la envolvente de las normales a la trayectoria de A , esto es, la *evolva* de la trayectoria de A .

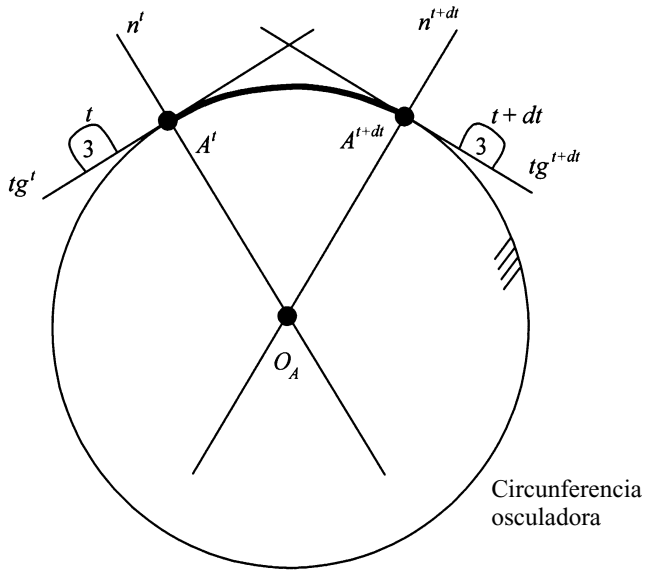


FIGURA 2.30. Movimiento diferencial del plano 3.

En resumen:

El centro de curvatura de la trayectoria de un punto es el CIR del plano asociado a la normal a la trayectoria de dicho punto.

Por otro lado, hay que indicar que, así como se conoce completamente el movimiento del plano 3, del plano 2 sólo se sabe la velocidad del punto A . Por tanto, es necesario algún dato adicional para calcular P_{12} ; dicho dato podría ser la velocidad de algún otro punto de 2 (p. ej., el punto C en la figura 2.31).

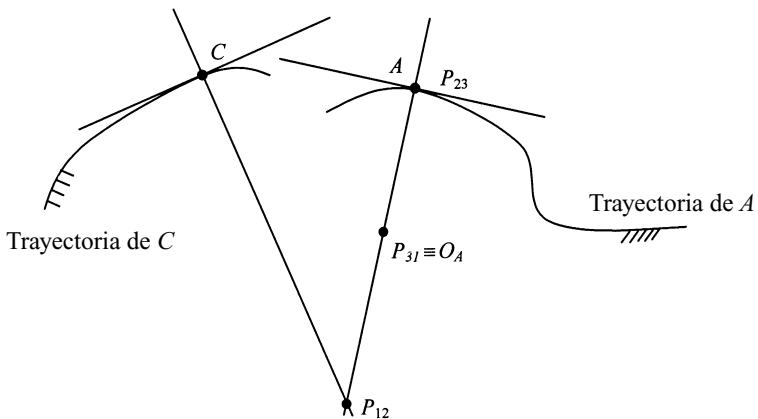


FIGURA 2.31. Obtención del CIR del plano 2.

Finalizados estos preliminares cinemáticos, considérese un punto cualquiera A de un plano móvil cuyo CIR se encuentra posicionado en P (figura 2.32); el teorema de Hartmann establece lo siguiente:

El extremo del vector velocidad de un punto, el centro de curvatura de su trayectoria y el extremo de la componente paralela a la velocidad del punto, del vector velocidad de cambio de polo, están alineados.

Gráficamente:

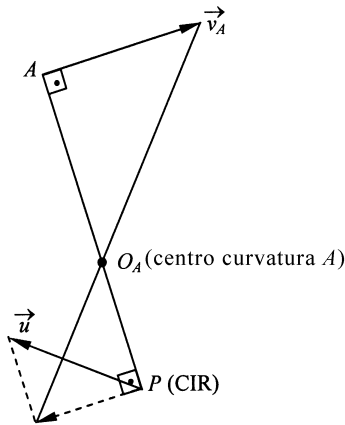


FIGURA 2.32. Representación gráfica del teorema de Hartmann.

La demostración de este teorema se va a apoyar en una extensión del teorema de Burmester que establece que “no sólo se encuentran alineados los extremos de las velocidades de puntos colineales de un sólido rígido, sino también los extremos de sus componentes normales a la línea que une dichos puntos”.

Esto queda claramente reflejado en la siguiente figura:

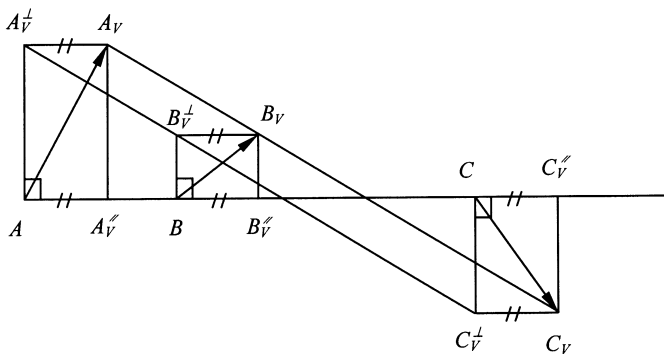


FIGURA 2.33. Alineamiento de las componentes normales.

Donde A_V^\perp y A_V^\parallel son los extremos de las componentes perpendicular y paralela de la velocidad de A. Puesto que $AA_V^\parallel = BB_V^\parallel = CC_V^\parallel$, la línea $A_V^\perp B_V^\perp C_V^\perp$ se obtiene de trasladar la línea $A_V B_V C_V$ una cantidad $A_V^\perp A_V = AA_V^\parallel$.

Esta propiedad se sigue cumpliendo aunque los puntos A, B y C no pertenezcan al mismo plano, incluso aunque no sean puntos materiales, basta con que estén permanentemente alineados. Esto es evidente, ya que si un punto B_3 , como el de la deslizadera de la figura 2.34, se traslada sobre la línea AC del plano 2, su componente de velocidad perpendicular a AC debe ser igual que la de B_2 . Como la de B_2 cumplía lo anterior, la de B_3 también.

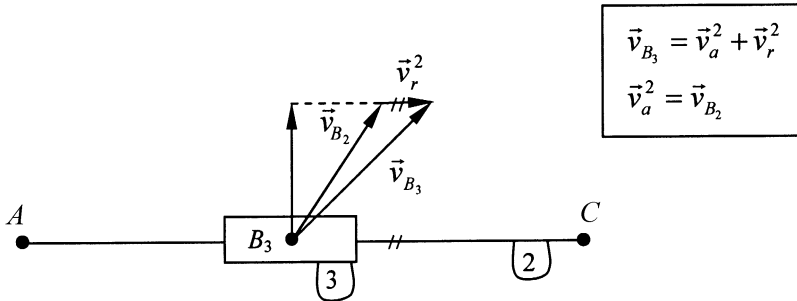


FIGURA 2.34. Igualdad de las componentes normales a la línea de deslizamiento AC.

Las ideas expuestas hasta ahora pueden ser reflejadas sintéticamente en la siguiente figura:

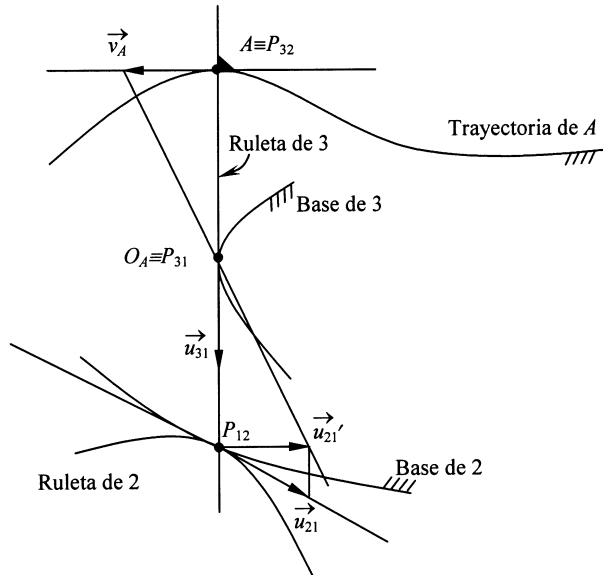


FIGURA 2.35. Explicación gráfica del teorema de Hartmann.

Los puntos matemáticos P_{21} , P_{31} y P_{32} están permanentemente alineados, luego los extremos de las componentes de sus velocidades perpendiculares a $P_{21}P_{31}$ están alineados. La velocidad de P_{21} es \vec{u}_{21} , y su componente perpendicular es \vec{u}_{21}^\perp . P_{31} ocupa permanentemente el centro de curvatura de la trayectoria de A , esto es, O_A . La velocidad de P_{31} (\vec{u}_{31}) se encuentra sobre la recta $P_{21}P_{31}$, por lo cual su componente perpendicular es nula. P_{32} coincide permanentemente con el punto A , por lo que su velocidad será \vec{v}_A . Queda, pues, demostrado el teorema Hartmann.

2.7. Fórmula de Euler-Savary

La fórmula de Euler-Savary puede decirse que es la expresión analítica del teorema de Hartmann. Para su obtención, se va a apoyar en la figura 2.36. En ella aparecen representados la base y la ruleta de un plano móvil mediante sus circunferencias osculadoras, por lo que la equivalencia cinemática sólo es válida para dicha posición. En este apartado y en el siguiente, al plano móvil se le ha asignado el número 1, y al fijo el 0.

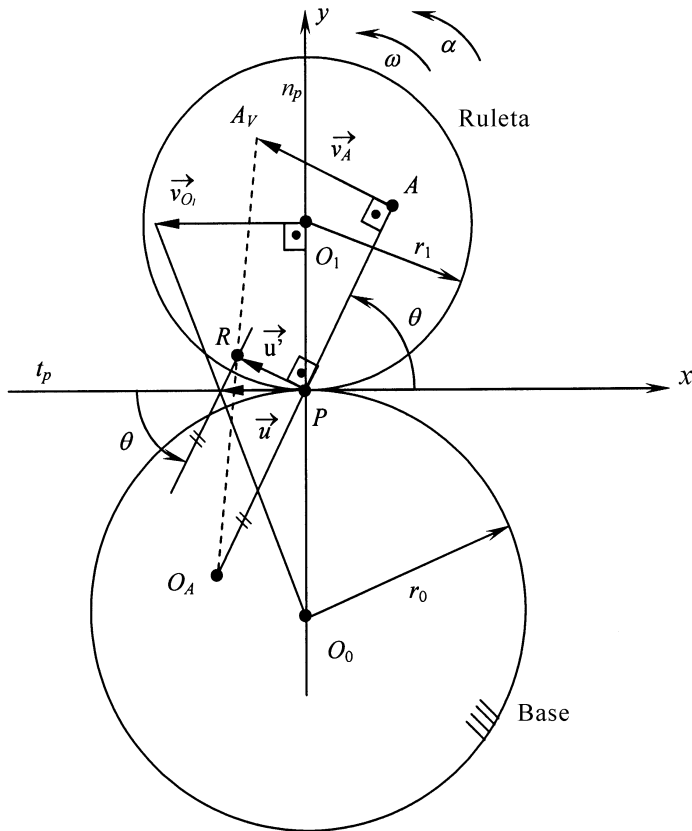


FIGURA 2.36. Geometría relativa a la fórmula de Euler-Savary.

El resto de los parámetros cinemáticos que aparecen son:

- $A \rightarrow$ punto cualquiera del plano móvil 1,
- $P \rightarrow$ CIR,
- $n_p \rightarrow$ normal a las polodias; se denomina normal polar,
- $t_p \rightarrow$ tangente a las polodias; se denomina tangente polar,
- $O_1, r_1 \rightarrow$ centro y radio de la circunferencia osculadora de la ruleta,
- $O_0, r_0 \rightarrow$ centro y radio de la circunferencia osculadora de la base,
- $\omega, \alpha \rightarrow$ velocidad y aceleración angulares del plano.

También se ha tomado una referencia móvil solidaria a la ruleta, con el origen de coordenadas en el polo y los ejes x e y coincidentes con t_p y n_p , respectivamente. En cuanto al sentido, el criterio que se adopta es el siguiente: el sentido positivo de las ordenadas es hacia O_1 y el de abscisas en el sentido que hace positivo al sistema de referencia. Asimismo, θ es un ángulo positivo que define la posición del radio vector \overline{PA} .

La velocidad de O_1 será:

$$v_{O_1} = \omega \cdot r_1 \tag{2.38}$$

Si se considera a la circunferencia osculadora de la ruleta rodando permanentemente sobre la circunferencia osculadora de la base, la magnitud de la velocidad de cambio de polo verificará, según la semejanza de triángulos de la figura 2.36, la ecuación:

$$\frac{v_{O_1}}{u} = \frac{\overline{O_1O_0}}{\overline{PO_0}} \tag{2.39}$$

Dicha ecuación también es válida para el instante considerado debido al contacto de 2º orden entre polodias y circunferencias osculadoras. Desarrollando la ecuación [2.39]:

$$\frac{\omega \cdot r_1}{u} = \frac{r_1 + r_0}{r_0} \Rightarrow \frac{\omega}{u} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} \tag{2.40}$$

Este cociente de velocidades es una característica geométrica del plano móvil que adquiere un valor concreto para esa posición del plano. Considérese, ahora, un punto A del plano móvil cuya velocidad $v_A = \omega \cdot \overline{PA}$. El teorema de Hartmann implica la alineación de los puntos A_V, R y O_A , donde este último es el centro de curvatura de la trayectoria de A . De la semejanza de los triángulos $A_V O_A A$ y $RO_A P$ se deduce:

$$\frac{v_A}{u'} = \frac{\overline{O_A P} + \overline{PA}}{\overline{O_A P}} \tag{2.41}$$

Operando:

$$\frac{\omega \cdot \overline{PA}}{u'} = \frac{\overline{O_A P} + \overline{PA}}{\overline{O_A P}} \Rightarrow \frac{\omega}{u} = \frac{\overline{O_A P} + \overline{PA}}{\overline{O_A P} \cdot \overline{PA}} \cdot \text{sen } \theta \quad [2.42]$$

Reordenando los términos de la ecuación se obtiene:

$$\frac{\omega}{u} = \left(\frac{1}{\overline{O_A P}^*} + \frac{1}{\overline{PA}^*} \right) \cdot \text{sen } \theta \quad [2.43]$$

Esta expresión es conocida como ecuación de Euler-Savary [presentada por Euler en la academia de ciencias de San Petersburgo en 1765 para el caso particular de perfiles circulares, y posteriormente generalizada por Felix Savary en 1830]. El asterisco (*) significa que $\overline{O_A P}$ y \overline{PA} deben ser considerados segmentos orientados, esto es, longitudes con sentidos. Por ejemplo, el sentido de $\overline{O_A P}^*$ es de O_A hacia P y el de \overline{PA}^* de P hacia A . Si coinciden ambos sentidos, $\overline{O_A P}$ y \overline{PA} tendrán el mismo signo, si no, lo tendrán distinto. En concreto, para saber el signo de cada segmento seguiremos el siguiente convenio: se adopta como positivo el sentido de P a A , con lo que \overline{PA} siempre es positivo; para obtener el signo de cualquier otro segmento, se comparará si tiene, o no, el mismo sentido que \overline{PA} . Esto es coherente con el convenio anterior en el que θ medía la posición del radio vector \overline{PA} .

De las ecuaciones [2.40] y [2.43] se obtiene:

$$\left(\frac{1}{\overline{O_A P}^*} + \frac{1}{\overline{PA}^*} \right) \cdot \text{sen } \theta = \frac{1}{r_0^*} + \frac{1}{r_1^*} \quad [2.44]$$

Que es otra forma de expresar la ecuación de Euler-Savary. La determinación de los signos de r_0^* y r_1^* es igual a la de $\overline{O_A P}^*$ y \overline{PA}^* , sin más que asociar O_1 a A y O_0 a O_A .

Por último, de la aplicación de la fórmula de Euler-Savary (o del teorema de Hartmann) se establece el siguiente corolario: el centro de curvatura de cualquier punto del plano móvil situado en la tangente polar se encuentra en el polo P .

2.8. Circunferencia de las inflexiones

A continuación se va a obtener el lugar geométrico de los puntos del plano móvil que no tienen aceleración normal por encontrarse su trayectoria en un punto de inflexión, es decir, en un punto de radio de curvatura infinito. Haciendo $\overline{O_A P}^* = \infty$ y $\overline{PA}^* = r$ en la fórmula de Euler-Savary [2.44], se obtiene:

$$\frac{1}{r} \cdot \text{sen } \theta = \frac{1}{r_0^*} + \frac{1}{r_1^*} \quad [2.45]$$

Teniendo en mente el significado del asterisco (*), de ahora en adelante se prescindirá de él por comodidad. Haciendo

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{\delta} \quad [2.46]$$

Queda

$$r = \delta \text{ sen } \theta \quad [2.47]$$

Expresando esta ecuación en coordenadas cartesianas ($x = r \cdot \cos\theta$; $y = r \cdot \text{sen}\theta$) resulta,

$$x^2 + \left(y - \frac{\delta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \quad [2.48]$$

Que es la ecuación de una circunferencia (figura 2.37) de diámetro δ , tangente a la velocidad de cambio de polo en el polo, y que se denomina *circunferencia de las inflexiones* o *de De la Hire* [en honor al autor, que la obtuvo en 1706].

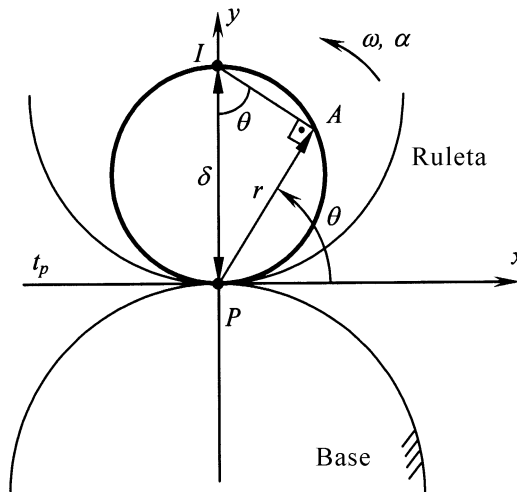


FIGURA 2.37. Circunferencia de las inflexiones.

Los puntos de esta circunferencia sólo tienen aceleración tangencial, por lo que tanto las velocidades como las aceleraciones de todos sus puntos pasan por el punto I (figura 2.37);

este punto que se encuentra sobre dicha circunferencia y al que le corresponde el valor de $\theta = \pi/2$ recibe el nombre de *polo* o *centro de inflexiones*. La velocidad del polo de inflexiones es:

$$v_I = \omega \cdot \delta \quad [2.49]$$

Pero de acuerdo con [2.40] y [2.46] resulta:

$$u = \omega \cdot \delta \quad [2.50]$$

Por lo que $v_I = u$; es decir, coincide con la velocidad de cambio de polo. Obsérvese que la aceleración del CIR también pasa por I (figura 2.38):

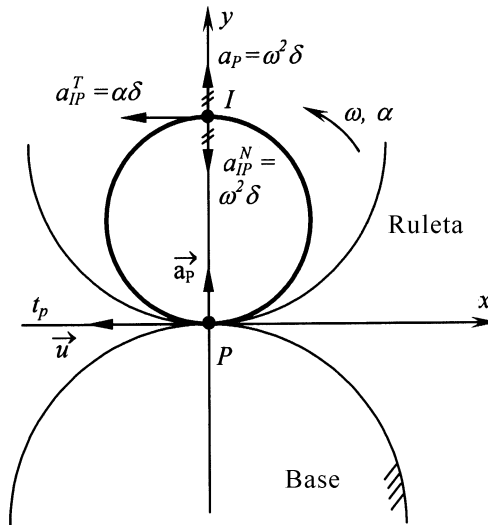


FIGURA 2.38. Aceleraciones de los polos de velocidades e inflexiones.

Teniendo en cuenta el módulo de la aceleración del CIR, $a_p = \omega \cdot u$, y como $u = \omega \cdot \delta$, se obtiene:

$$a_p = \omega^2 \delta \quad [2.51]$$

que coincide con el módulo de la componente a_{IP}^N . Si se plantea la aceleración de I en función de la del CIR:

$$\vec{a}_I = \vec{a}_p + \vec{a}_{IP}^N + \vec{a}_{IP}^T \quad [2.52]$$

De acuerdo con la figura 2.38, para que \vec{a}_I tenga exclusivamente componente tangencial deberá cumplirse:

$$-\vec{a}_{IP}^N = \vec{a}_P \quad [2.53]$$

Y, por tanto,

$$\vec{a}_I = \vec{a}_{IP}^T \quad [2.54]$$

Pero, quizás, la conclusión más importante es que, para que se cumpla [2.53], el sentido de \vec{a}_P debe de ser siempre desde P hacia I .

Hay ocasiones en que el valor de δ sale negativo según el convenio utilizado en la fórmula de Euler-Savary (figura 2.39):

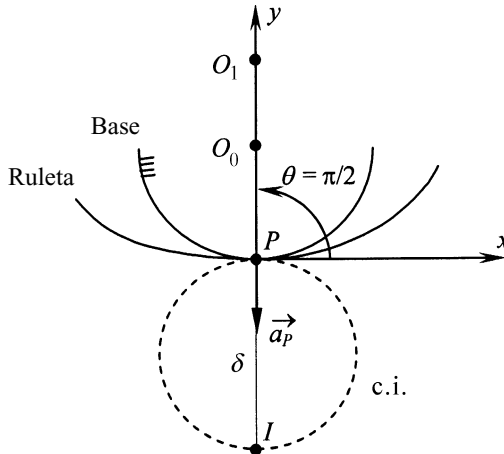


FIGURA 2.39. Caso en que δ es negativo.

Aplicando la fórmula de Euler-Savary a O_1 , y teniendo en cuenta que O_0 es el centro de curvatura de su trayectoria, resulta:

$$\left(\frac{1}{\overline{O_0P}^*} + \frac{1}{\overline{PO_1}^*} \right) \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{r_0^*} + \frac{1}{r_1^*} = \frac{1}{-r_0} + \frac{1}{r_1} \quad [2.55]$$

Donde $\overline{O_0P}^* = r_0^* = -r_0$ con $r_0 > 0$, y $\overline{PO_1}^* = r_1^* = r_1$ con $r_1 > 0$. Como $r_1 > r_0$ se verificará: $\frac{1}{-r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{-\delta}$, con $\delta > 0$. Esto significa que la circunferencia de las inflexiones debe estar al otro lado de O_1 , lo que es congruente con la dirección de \vec{a}_P .

Considérese, ahora, que el movimiento representado en la anterior figura 2.38 se invierte, es decir, el plano móvil pasa a ser fijo y viceversa. Entonces, el papel de las polares cambia: la antigua base (actual ruleta) gira con velocidad $-\omega$ sobre la antigua ruleta (actual base) y la velocidad de cambio de polo no cambia de sentido (figura 2.40).

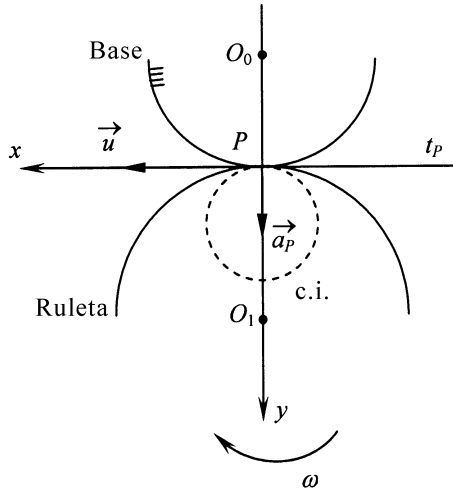


FIGURA 2.40. Inversión del movimiento.

La circunferencia de las inflexiones es simétrica de la antigua respecto de la tangente polar. Obsérvese la coherencia con el sentido de \vec{a}_p .

Recordando de nuevo la fórmula de Euler-Savary:

$$\left(\frac{1}{O_A P^*} + \frac{1}{P A^*} \right) \text{sen } \theta = \frac{1}{\delta^*}$$

Los puntos O_A y A relacionados mediante esta expresión se llaman *puntos conjugados*. Como en la fórmula de Euler-Savary hay una simetría de los puntos O_A y A respecto de P , cada uno de ellos es el centro de curvatura de la trayectoria del otro en el correspondiente movimiento relativo. En la figura 2.41 se representan el movimiento directo (punto A móvil) y el inverso (O_A móvil).

En efecto, de la semejanza de triángulos se verifica:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_A}{AO_A} &= \frac{u'}{O_A P} \\ \frac{v_{O_A}}{AO_A} &= \frac{u'}{AP} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_A \cdot \overline{O_A P} = v_{O_A} \cdot \overline{AP}$$

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_{O_A}}{O_A P} = \text{tg } \varphi \quad \text{c.q.d.}$$

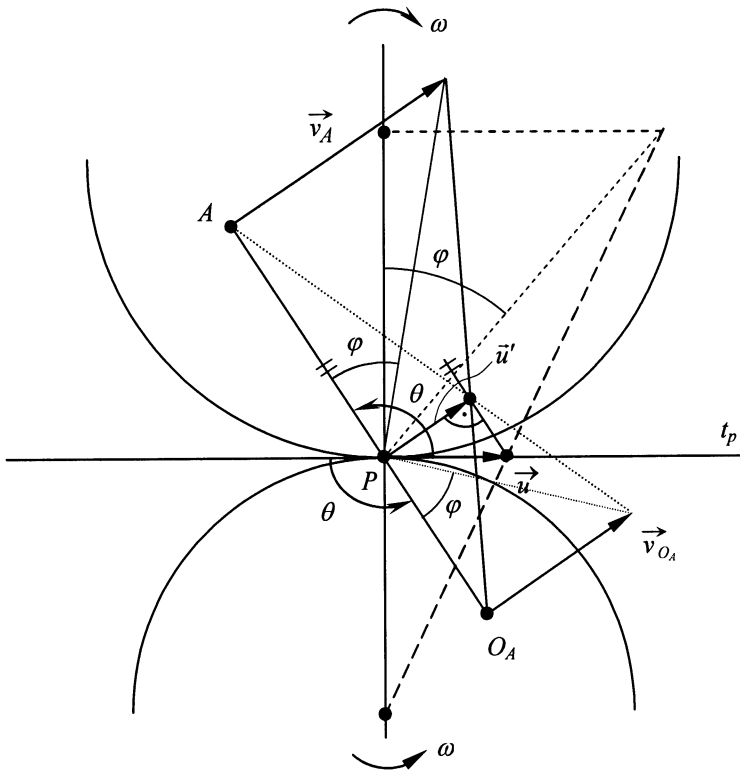


FIGURA 2.41. Movimientos directo (ω) e inverso ($-\omega$).

Finalmente, se va obtener una última forma de expresar la fórmula de Euler-Savary. Sea la figura:

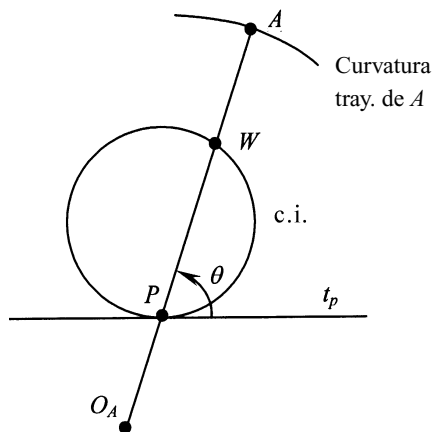


FIGURA 2.42. Datos de partida.

Donde W es la intersección de la normal a la trayectoria de A y la circunferencia de las inflexiones. Aplicando la fórmula de Euler-Savary a los puntos A y W simultáneamente, y sabiendo que sus radios vectores tienen el mismo ángulo de posición θ :

$$\frac{1}{\overline{O_A P^*}} + \frac{1}{\overline{P A^*}} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\overline{P W^*}} \quad [2.56]$$

Teniendo en cuenta que

$$\overline{O_A P^*} = \overline{O_A A^*} - \overline{P A^*} \quad [2.57]$$

$$\overline{P W^*} = \overline{P A^*} - \overline{W A^*} \quad [2.58]$$

La ecuación [2.56] queda:

$$\frac{1}{\overline{O_A A^*} - \overline{P A^*}} + \frac{1}{\overline{P A^*}} = \frac{1}{\overline{P A^*} - \overline{W A^*}} \quad [2.59]$$

Operando resulta:

$$\left(\overline{P A^*}\right)^2 = \overline{P A^*}^2 = \overline{O_A A^*} \cdot \overline{W A^*} \quad [2.60]$$

Que es otra forma de expresar la fórmula de Euler-Savary. Puesto que el primer miembro de la ecuación es positivo, O_A y W siempre deben de estar al mismo lado de A para que $\overline{O_A A^*}$ y $\overline{W A^*}$ tengan el mismo sentido y, por tanto, el mismo signo. Por esta razón, cuando el punto A se encuentra fuera de la circunferencia de las inflexiones, $\overline{P A^*}$ tiene el mismo sentido que $\overline{O_A A^*}$ y $\overline{W A^*}$. Las figuras 2.42 y 2.43a muestran las dos situaciones posibles. En ambos casos la trayectoria del punto A es cóncava respecto del polo. Por el contrario, cuando el punto A cae dentro de la circunferencia de las inflexiones, $\overline{W A^*}$ y $\overline{O_A A^*}$ tienen sentido opuesto a $\overline{P A^*}$ (figura 2.43b). En este caso la trayectoria del punto A es convexa respecto del polo.

El posicionamiento del centro de gravedad en relación con la circunferencia de las inflexiones puede aplicarse al estudio de la estabilidad de cuerpos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

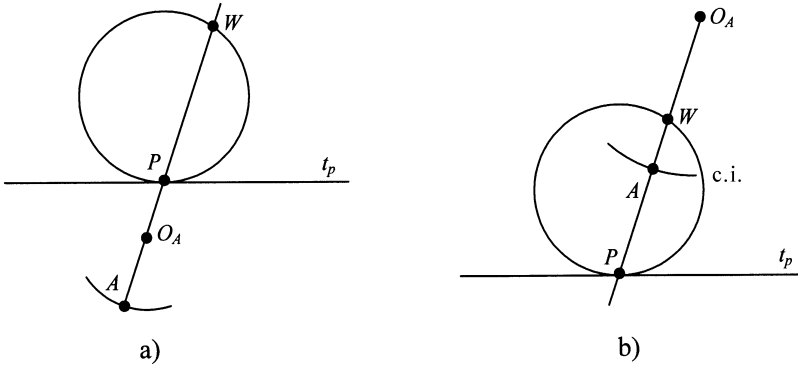


FIGURA 2.43. Posiciones de A respecto a la circunferencia de las inflexiones.

Ejemplo de aplicación 2.5. Analizar la estabilidad de un cilindro rodante achaflnado en los laterales, de radio R, sobre una pista recta (figura 2.44) en función de la posición de su centro de gravedad G. Considerar los casos en que la distancia PG sea R; 3R/2 y R/2.

El diámetro de la circunferencia de las inflexiones se obtiene a partir de la ecuación [2.46]:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\delta}; \quad \delta = R$$

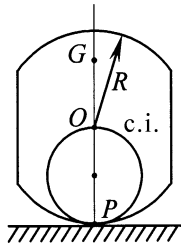


FIGURA 2.44. Cilindro rodante.

Para que la posición sea de equilibrio estable, G debe encontrarse en un mínimo de su trayectoria respecto de la horizontal. Es decir, debe ser convexa respecto del punto de apoyo P. Teniendo en cuenta la posición de G respecto de la circunferencia de las inflexiones se obtienen los siguientes casos (figura 2.45).

Todo ello concuerda con el hecho de que la posición más estable es la de menor energía potencial, es decir, aquella en la que el centro de gravedad G se encuentra más bajo.

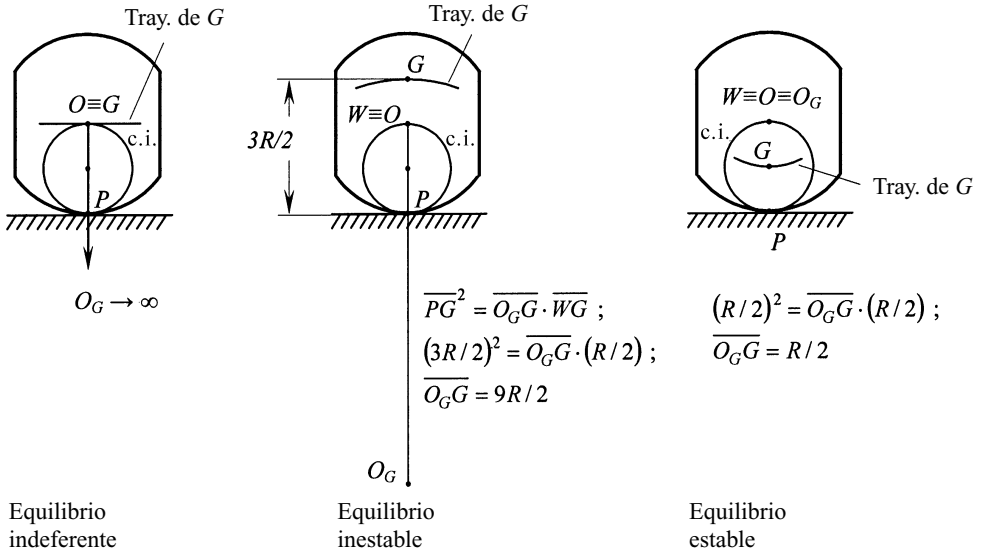


FIGURA 2.45. Análisis de la estabilidad de un cilindro rodante.

2.9. Construcciones gráficas

A continuación se presentan dos construcciones gráficas basadas en la fórmula de Euler-Savary, cuyo objeto es la obtención de puntos de interés en relación con el plano móvil:

1.^a construcción: datos: A, W, P ; incógnita: O_A ; pasos de la construcción (figura 2.46):

1. Se trazan por A y P dos rectas arbitrarias que se cortan en R .
2. Se traza por P una paralela a WR .
3. Por la intersección de ésta con AR (punto Q) se traza una paralela a PR que corta a PA en O_A .

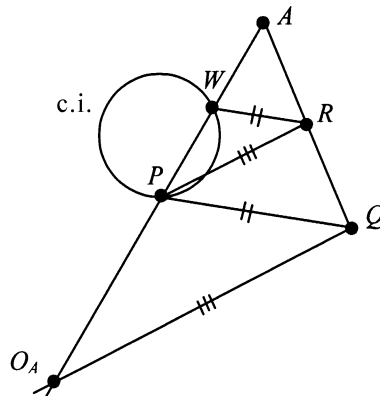


FIGURA 2.46. 1.^a construcción.

En efecto, de la semejanza de triángulos PAQ y WAR se obtiene:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{WA}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{RA}} \quad [2.61]$$

Asimismo, de la semejanza entre los triángulos PAR y O_AAQ se obtiene:

$$\frac{\overline{O_AA}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{RA}} \quad [2.62]$$

De [2.61] y [2.62] se llega a $\overline{PA}^2 = \overline{O_AA} \cdot \overline{WA}$, que es la fórmula de Euler-Savary, con lo cual queda demostrada la construcción.

Si lo que se conoce es O_A y la incógnita es W , la construcción es la misma sólo que se comienza por trazar dos rectas arbitrarias por O_A y A cuya intersección es el punto Q . El resto de la construcción es análoga, pero en orden inverso.

2.ª construcción: cálculo de la circunferencia de las inflexiones a partir de los centros de curvatura O_A y O_B de los puntos A y B del plano móvil; pasos de la construcción (figura 2.47):

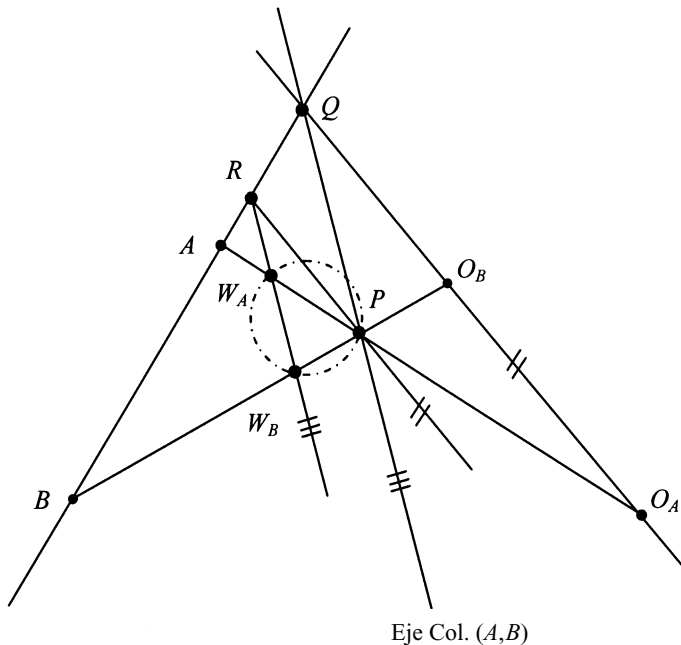


FIGURA 2.47. 2.ª construcción.

1. El polo P se obtiene como intersección de las rectas AO_A y BO_B .
2. Se realiza la construcción anterior para las parejas de puntos conjugados (A, O_A) y (B, O_B) . Sin embargo, en vez de trazar rectas arbitrarias a partir de A y O_A , y de B

y O_B , se trazan concretamente las rectas AB y $O_A O_B$ que se cortan en el punto Q . La recta que une este punto con el polo P se denomina *eje de colineación*. Siguiendo con la construcción se obtienen fácilmente W_A y W_B que junto con P determinan la circunferencia de las inflexiones.

El eje de colineación PQ está asociado no sólo a una pareja de puntos A y B del plano móvil, sino más concretamente a sus correspondientes normales $O_A A$ y $O_B B$ como se verá en el siguiente epígrafe.

2.10. Teorema de Bobillier

El teorema de Bobillier establece que “la bisectriz del ángulo que forman las normales a la trayectoria de dos puntos de un plano móvil coincide con la bisectriz del ángulo que forman la tangente polar y el eje de colineación correspondiente a dichas normales”. La construcción gráfica se muestra en la figura 2.48:

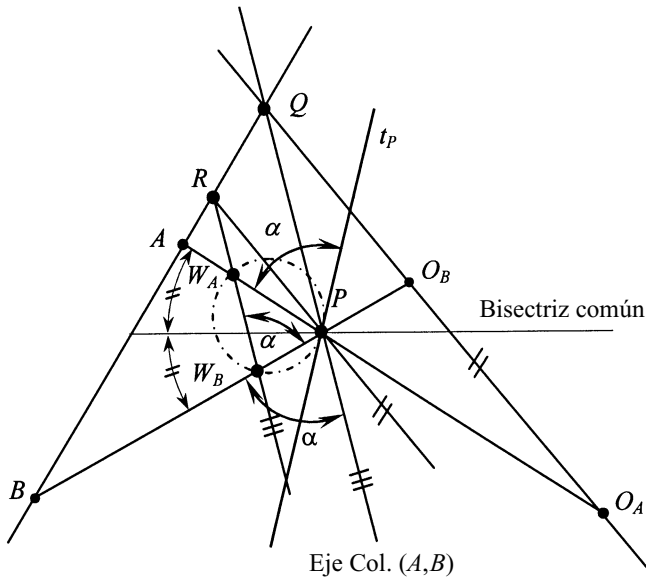


FIGURA 2.48. Construcción de Bobillier.

Se parte de dos parejas de puntos conjugados (A, O_A) y (B, O_B) . En primer lugar, se obtendrá la circunferencia de las inflexiones de acuerdo con la 2.ª construcción del apartado anterior. A continuación se traza la tangente polar, t_P . Se verifica la siguiente igualdad angular: $t_P P W_A = P W_B W_A = \alpha$, ya que P y W_B son dos puntos de la circunferencia que abarcan el mismo arco de circunferencia, $P W_A$. Por otro lado, los ángulos $W_A W_B P$ y $W_B P E_C$ son iguales por ser ángulos alternos internos. Luego los ángulos $t_P P W_A$ y $W_B P E_C$ son iguales y, por tanto, la bisectriz del ángulo $O_A P O_B$ es la misma que la del ángulo $t_P P E_C$.

En la construcción de Bobillier se observa que, dadas dos normales de un plano móvil y conocida su tangente polar, sólo hay un eje de colineación. Esta es la razón de lo dicho al final del epígrafe anterior.

Como aplicación del teorema de Bobillier, la denominada *construcción de Aronhold* permite, dados dos pares de puntos conjugados (A, O_A) y (B, O_B) , obtener el centro de curvatura de un tercero C perteneciente al mismo plano. La aplicación de esta construcción al acoplador de un cuadrilátero articulado permite obtener el centro de curvatura del punto de acoplador. En la figura 2.49 se ha realizado dicha construcción para el cuadrilátero articulado $O_A C B O_B$. En resumen los pasos son los siguientes:

1. Obtención del eje de colineación de los puntos A y B .
2. Aplicación del teorema de Bobillier: tangente polar.
3. Aplicación del teorema de Bobillier: eje de colineación de los puntos B y C .
4. Intersección del eje de colineación de los puntos B y C con la línea BC : Q_{BC}^∞ .
5. Centro de curvatura O_C : intersección de las líneas CP y $O_B Q_{BC}^\infty$.

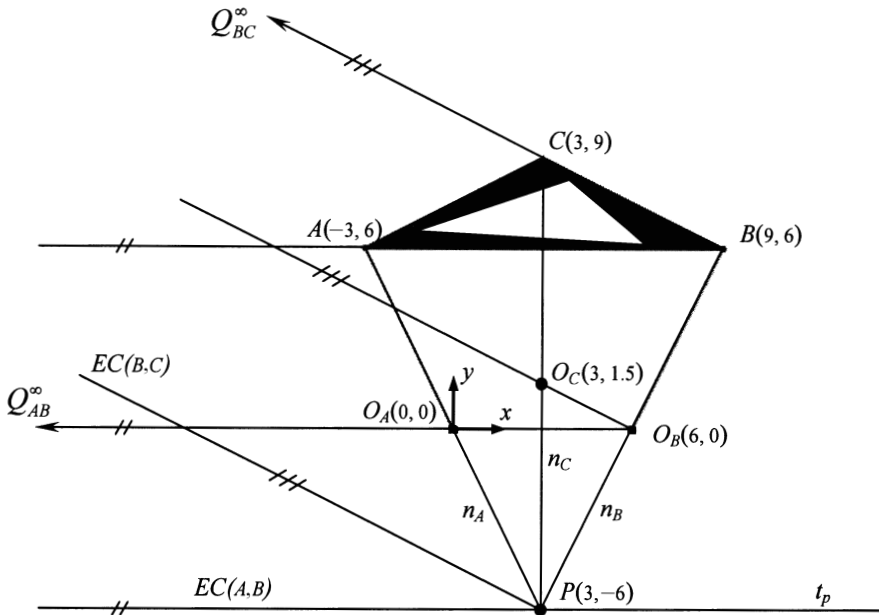


FIGURA 2.49. Construcción de Aronhold.

Una aplicación práctica de la construcción de Aronhold son los denominados *mecanismos con paradas*. Estos mecanismos se utilizan para generar movimientos intermitentes; o simplemente para obtener un paro total del elemento de salida durante un determinado rango del movimiento continuo del elemento de entrada. Para ello, se suele partir de un cuadrilátero como el de la figura 2.49, cuyo punto de acoplador genera un tramo cuasi-circular. Si se articula una díada R en el punto de acoplador C , de manera que la articulación intermedia coincida con O_C , el mecanismo de Stephenson resultante (figura 2.50a)

posee una barra ($O_C D$) que permanece quieta mientras el punto C genera el tramo de trayectoria cuasi-circular indicado en la figura 2.50b.

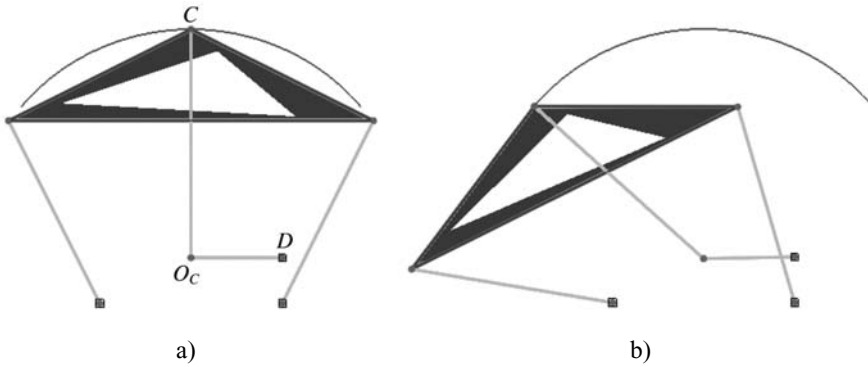


FIGURA 2.50. Mecanismo de barras con parada del elemento $O_C D$.

Ejemplo de aplicación 2.6. En la figura 2.51 se representa el diagrama cinemático de una transmisión mixta mediante engranajes y barras. Los elementos 3 y 4 se encuentran articulados en B . El elemento 4 se modeliza mediante un disco que rueda sin deslizar sobre una pista circular fija. En el instante considerado, la velocidad del punto B del disco tiene dirección horizontal positiva y módulo $3v$. Se pide:

1. Coordenadas respecto de la referencia fija (A_0, x, y) del centro de curvatura B_0 de la articulación B .
2. Tangente polar del elemento 3.
3. Circunferencia de las inflexiones del elemento 3: centro y diámetro.

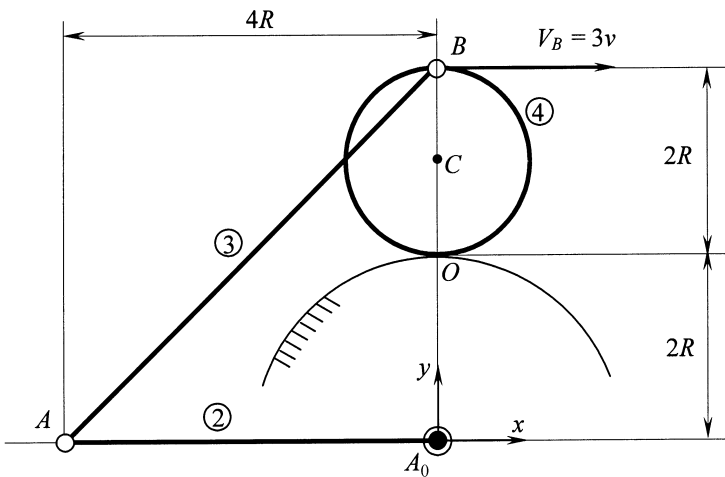


FIGURA 2.51. Diagrama cinemático del mecanismo.

1. Pasos para el cálculo de B_0 (figura 2.52):

- a) En primer lugar, se procede a hallar la velocidad de sucesión u_{41} . Para ello resulta obvio que P_{41} coincide con O . También es fácil obtener v_C mediante el campo de velocidades. A continuación, se aplica el teorema de Hartmann al punto C para hallar la velocidad de sucesión u_{41} . Para ello, téngase en cuenta que el centro de curvatura de C es A_0 . La velocidad de sucesión u_{41} y su componente paralela coinciden, ya que la tangente polar está en su misma dirección.
- b) Ahora se aplica el teorema de Hartmann al punto B obteniendo así $B_0(\theta, R)$.

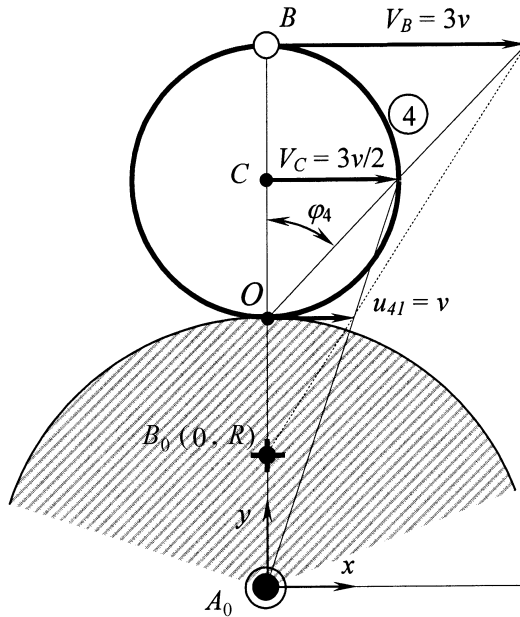


FIGURA 2.52. Obtención de B_0 .

2. La tangente polar del elemento 3 se representa en la figura 2.53. El razonamiento para su obtención es el siguiente:

El polo P_{31} coincide con el punto A_0 . El punto A pertenece a la tangente polar puesto que su centro de curvatura coincide con el polo. Consecuentemente, la recta AA_0 coincide con la tangente polar, es decir, con el eje x .

Otra forma de obtenerla es a través de la aplicación del teorema de Bobillier a la pareja de puntos conjugados (A, A_0) , (B, B_0) y a su correspondiente eje de colineación.

3. Circunferencia de las inflexiones de 3 (figura 2.53):

Aplicando el teorema de Hartmann al punto B como perteneciente a 3, se calcula $u_{31} = v$. Sabiendo que la velocidad del polo de inflexiones coincide con u_{31} , se trata de hallar un punto del plano móvil que tenga esa velocidad y que esté en la normal polar.

$$\frac{3v}{4R} = \frac{v}{\delta_3} \rightarrow \delta_3 = \frac{4}{3}R$$

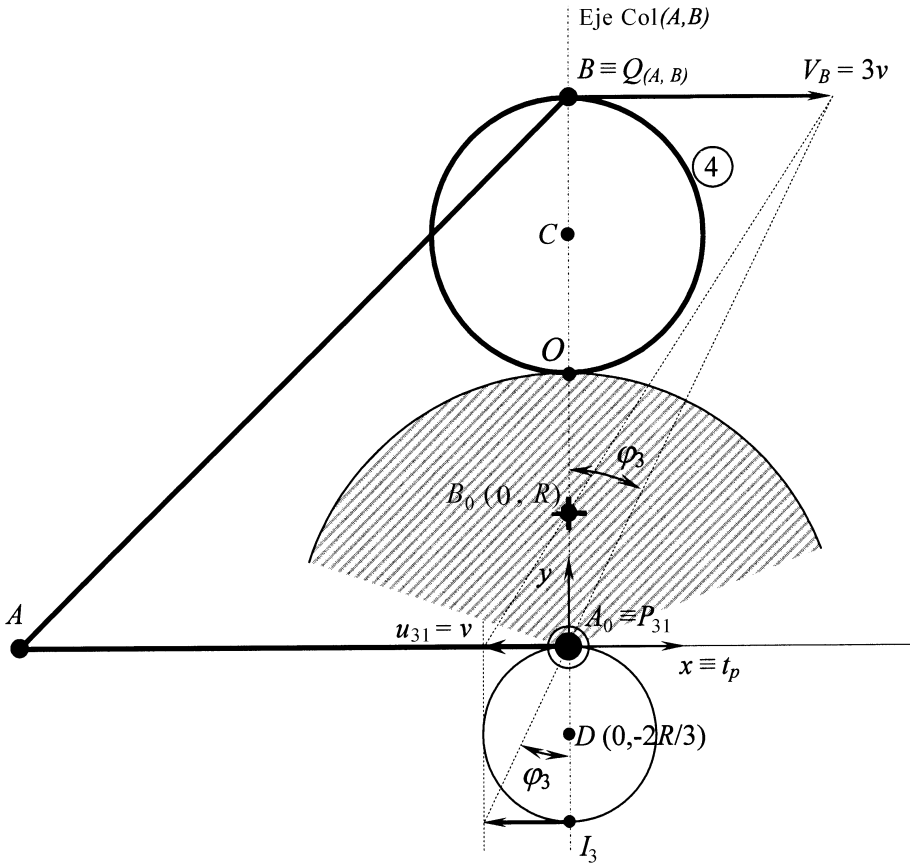


FIGURA 2.53. Circunferencia de las inflexiones de 3.

2.11. Circunferencia de Bresse. Polo de aceleraciones

Sea A un punto cualquiera del plano móvil. La aceleración del punto A en función de la aceleración \vec{a}_p del CIR es:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_p + \vec{a}_{AP}^N + \vec{a}_{AP}^T \tag{2.63}$$

También puede expresarse en función de sus componentes de aceleración normal y tangencial absolutas:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t \tag{2.64}$$

Según la descomposición vectorial representada en la siguiente figura,

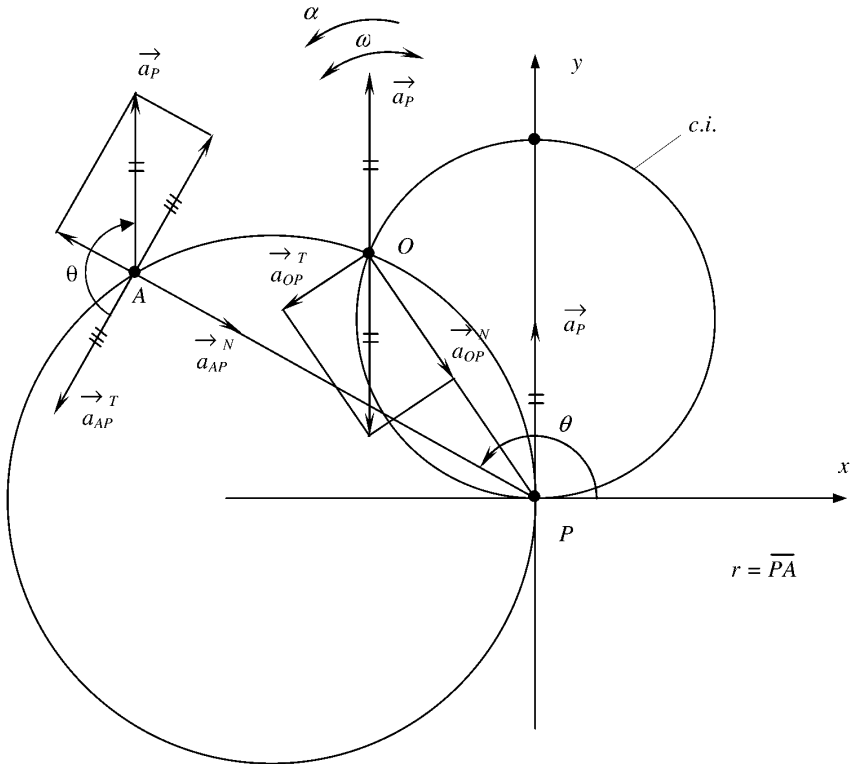


FIGURA 2.54. Obtención de la circunferencia de Bresse.

La aceleración tangencial absoluta del punto A puede expresarse como:

$$a_A^t = a_p \cdot \cos \theta + \alpha \cdot r \tag{2.65}$$

Considérese ahora el lugar geométrico de los puntos del plano móvil cuya aceleración tangencial es nula, esto es:

$$\omega \cdot u \cdot \cos \theta + \alpha \cdot r = 0 \tag{2.66}$$

$$\omega^2 \cdot \delta \cdot \cos \theta + \alpha \cdot r = 0 \tag{2.67}$$

$$r = -\frac{\omega^2}{\alpha} \cdot \delta \cdot \cos \theta \tag{2.68}$$

que es la ecuación de una circunferencia que pasa por el punto P y tiene su diámetro

$$b = \frac{\omega^2}{\alpha} \cdot \delta \text{ sobre } t_P,$$

$$r = -b \cdot \cos \theta \quad [2.69]$$

En coordenadas cartesianas ($x = r \cdot \cos \theta$; $y = r \cdot \sen \theta$)

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad [2.70]$$

A esta circunferencia se le denomina *circunferencia de Bresse* y su diámetro, a diferencia del diámetro de las inflexiones, depende de la velocidad y aceleración angular.

Si la aceleración angular α tuviera sentido contrario, resultaría la ecuación:

$$r = \frac{\omega^2}{\alpha} \cdot \delta \cdot \cos \theta \quad [2.71]$$

Y la circunferencia quedaría situada a la derecha de P .

Las circunferencias de Bresse y de las inflexiones se cortan en un punto O cuya aceleración es nula y que será, por tanto, el *polo de aceleraciones* (figura 2.54). Si $\alpha = 0$ (ω estacionaria) la circunferencia de Bresse degenerará en la recta $\cos \theta = 0$, es decir, la normal polar. En este caso, el polo de aceleraciones y el de inflexiones coinciden.

A continuación, se presenta un ejemplo (figura 2.55) con las circunferencias de Bresse y de las inflexiones para una posición concreta del plano acoplador de un cuadrilátero articulado:

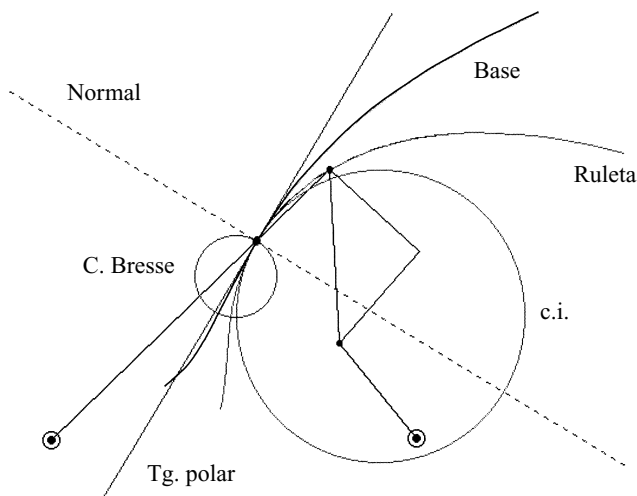


FIGURA 2.55. Circunferencia de las inflexiones y de Bresse.

2.12. Perfiles conjugados, generalización de la fórmula de Euler-Savary

En este apartado se va a analizar el movimiento de una curva o perfil solidariamente unido al plano móvil (plano 2). En el transcurso del tiempo, el perfil móvil ocupará una serie de posiciones respecto del plano fijo (plano 1). La envolvente de todas esas sucesivas posiciones es otra curva o perfil que pertenece al plano fijo. La característica común entre el perfil móvil y su envolvente es la condición permanente de contacto y tangencia (figura 2.56). Al perfil móvil y a su envolvente se les denomina *perfiles conjugados*.

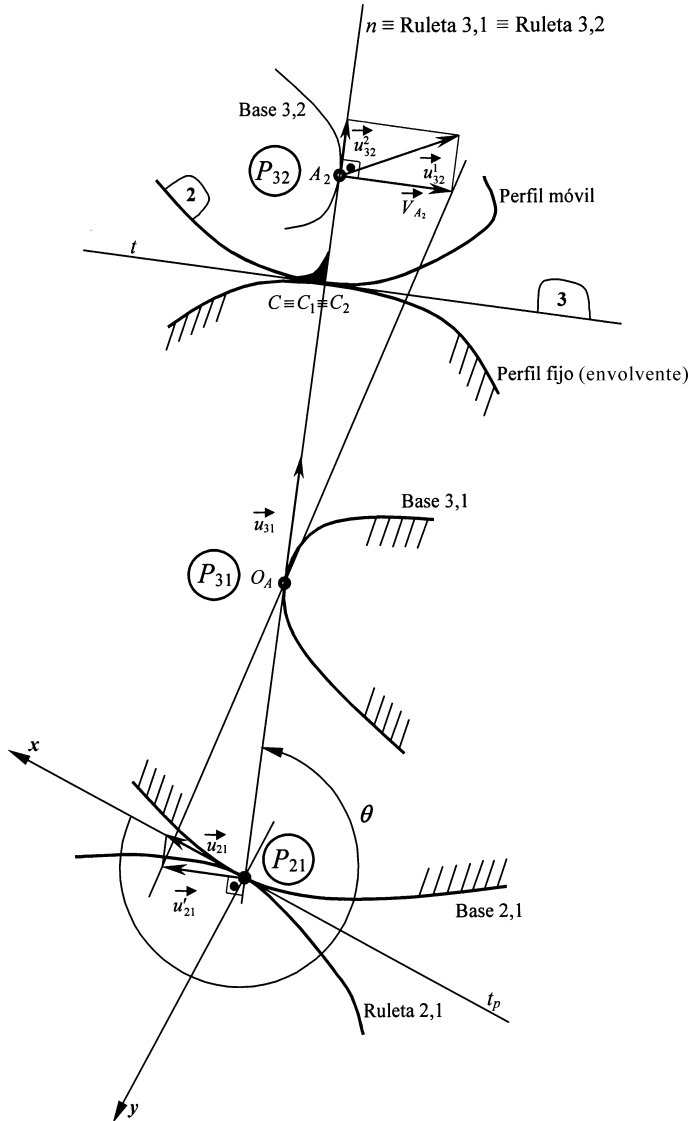


FIGURA 2.56. Geometría cinemática relativa a un perfil solidario con el plano móvil.

Obsérvese el punto de contacto entre los dos perfiles; en él pueden distinguirse tres puntos cuyo movimiento es distinto. Por una parte, está el punto matemático C asociado al contacto, que se mueve sobre el perfil fijo y el móvil, y cuya velocidad tiene la dirección de la tangente. Por otra parte, está el punto C_1 del plano fijo, que coincide en ese instante con el punto de contacto y cuya velocidad es nula. Además, está el punto C_2 del plano móvil. La velocidad de este punto, denominada *velocidad de deslizamiento*, ha de tener la dirección de la tangente para que los dos perfiles mantengan constantemente su tangencia; de otra manera, bien el perfil móvil penetraría en el fijo, bien se separarían. Por ello, el CIR P_{21} deberá estar en la perpendicular a esta velocidad o, lo que es lo mismo, en la normal a los perfiles.

Un caso particular de perfiles conjugados son las polodias. En este caso, la velocidad de deslizamiento entre ambos es nula, lo que determina que el polo de velocidades se encuentre, en ese instante, en el punto de contacto.

Considérese la posición particular del perfil móvil solidario al plano 2 cuyas polodias, en ese instante, contactan en el CIR P_{21} . Asimismo, en ese instante, el perfil móvil, en el punto de contacto con el perfil fijo, tendrá su centro de curvatura en la normal común a los dos perfiles; en concreto, en la posición A_2 . El perfil fijo, por otra parte, tendrá su centro de curvatura situado también sobre la normal común a los dos perfiles, y en el punto O_A .

Defínase un nuevo plano móvil (plano 3), asociado al movimiento de la normal y la tangente a los perfiles conjugados en el punto de contacto. En este instante, se puede distinguir un nuevo punto situado en el punto de contacto y perteneciente al plano 3. Su movimiento es igual que el del punto matemático C , ya que debe situarse siempre en el punto de contacto entre los dos perfiles. Por tanto, el CIR del movimiento del plano 3 respecto del plano 1 deberá estar situado en la normal común a ambos perfiles.

Considerando el movimiento diferencial del plano 3 (ya analizado en el teorema de Hartmann), se deduce que el CIR absoluto del mismo, P_{31} , deberá estar en el centro de la circunferencia osculadora del perfil fijo, O_A . A lo largo del tiempo, este CIR recorrerá la evoluta (lugar geométrico de los centros de curvatura) de la envolvente; y por tanto, ésta será la base del movimiento relativo entre los planos 3 y 1, siendo la normal su ruleta. Analizando el movimiento relativo entre los planos 3 y 2, se llegará a una conclusión similar a la anterior: el CIR P_{32} coincidirá, en este caso, con el centro de curvatura del perfil móvil (punto A). La base del movimiento del plano 3 respecto del plano 2 será, por tanto, la evoluta del perfil móvil, y su correspondiente ruleta, la normal a los perfiles conjugados.

Por otro lado, los tres puntos matemáticos P_{31} , P_{21} y P_{32} están permanentemente alineados sobre la normal a los dos perfiles. De acuerdo con la extensión del teorema de Burmester estudiada en el apartado 2.6, los extremos de las componentes de velocidad normales a la recta que les une estarán asimismo en línea recta. La velocidad de sucesión de $P_{21}(\vec{u}_{21})$ tendrá la dirección de la tangente polar. Asimismo, la velocidad de sucesión de $P_{31}(\vec{u}_{31})$ tendrá la dirección de su tangente polar, que coincide con la normal común a los perfiles, por lo que su componente perpendicular será nula. Por lo que respecta a la velocidad absoluta del punto matemático $P_{32}(\vec{u}_{32}^1)$, puede expresarse como suma de dos componentes: una de arrastre con el plano 2 y otra relativa a éste. La velocidad de arrastre será la velocidad del punto del plano 2 que coincide en ese instante con P_{32} , es decir, el

punto A_2 . La componente relativa (\vec{u}_{32}^2), es la velocidad con que el punto matemático P_{32} se mueve respecto del plano 2, la cual tiene la dirección de la normal. Por tanto, la componente normal de \vec{u}_{32}^1 será \vec{v}_{A_2} .

De todo lo dicho anteriormente puede comprobarse que el extremo de la velocidad del punto A_2 , el punto O_A y el extremo de la componente perpendicular a la línea $\overline{AO_A}$ de \vec{u}_{21} (\vec{u}'_{21}), deben estar alineados. Recordando el teorema de Hartmann (establece que el extremo de la velocidad de un punto, su centro de curvatura y el extremo de la componente paralela a la velocidad del punto de la velocidad de sucesión, deben estar alineados), se llega a la conclusión de que el punto O_A es el centro de curvatura de la trayectoria del punto A_2 .

Aplicando la fórmula de Euler-Savary a la pareja de puntos conjugados A_2 y O_A , resulta:

$$\left(\frac{1}{\overline{O_A P_{21}}} + \frac{1}{\overline{P_{21} A_2}} \right) \cdot \text{sen } \theta = \frac{\omega_{21}}{u_{21}} = \frac{1}{\delta_{21}} \tag{2.72}$$

donde θ es el ángulo de posición del radio vector $\overline{P_{21} A_2}$ (es decir, de la normal a los perfiles), ω_{21} es la velocidad angular absoluta del plano 2, y δ_{21} es el diámetro de la circunferencia de las inflexiones correspondiente al movimiento absoluto del plano 2.

Esta expresión es la conocida *fórmula de Euler-Savary generalizada*, que relaciona los centros de curvatura de dos perfiles conjugados y que establece lo siguiente: “el centro de curvatura de la trayectoria del centro de curvatura de un perfil solidario a un plano móvil, es el centro de curvatura de su envolvente”. La fórmula de Euler-Savary, estudiada en un apartado anterior se puede considerar como un caso particular de ésta, cuando el perfil móvil degenera en un punto y su envolvente en la trayectoria de dicho punto.

A continuación se va a particularizar este estudio al caso en que el perfil móvil sea una recta.

2.13. Circunferencia de los retrocesos: teoremas de Aronhold

En el caso en que el perfil móvil sea una recta, su centro de curvatura estará en el infinito, por lo que la distancia $\overline{P_{21} A_2}$ tenderá a infinito, quedando la expresión anterior [2.72]:

$$\overline{O_A P_{21}} = \delta_{21} \cdot \text{sen } \theta; \text{ o simplemente: } \overline{O_A P} = \delta \cdot \text{sen } \theta \tag{2.73}$$

El ángulo θ define la posición angular de PA . Pero, en este caso, es PO_A la posición angular a referir, la cual adopta los valores de θ o $\theta + \pi$ dependiendo de la posición de A respecto del polo. En cualquier caso, la ecuación [2.73] representa una circunferencia tangente en el polo a la tangente polar. Pero, ¿a qué lado de la misma queda dicha circunferencia? Puesto que el punto A queda fuera de la circunferencia de inflexiones, la posición relativa de los distintos puntos sobre la normal es una de las dos alternativas de la figura 2.57.

En ambas, $\overline{O_A A}$, $\overline{W A}$ y $\overline{P A}$ tienen el mismo sentido, y además O_A debe de estar situado en oposición a W respecto del polo para que se cumpla la ecuación de Euler-Savary $\overline{P A}^2 = \overline{O_A A} \cdot \overline{W_A A}$. Por tanto, la expresión [2.73] representa una circunferencia simétrica de la circunferencia de las inflexiones respecto de la tangente polar (figura 2.58), que se denomina *circunferencia de los retrocesos, cuspidal* o *de Aronhold*.

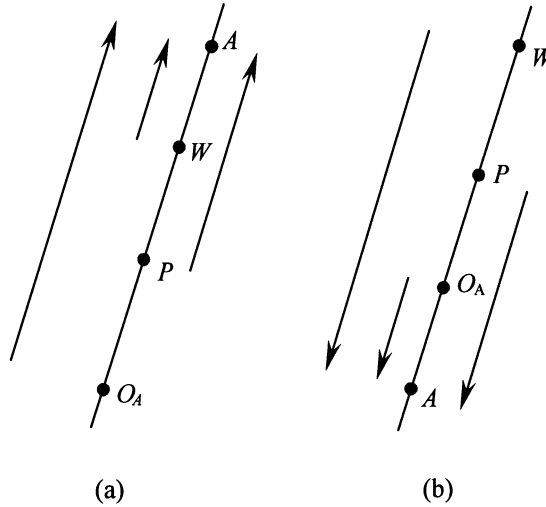


Figura 2.57. Alternativas para la posición de A.

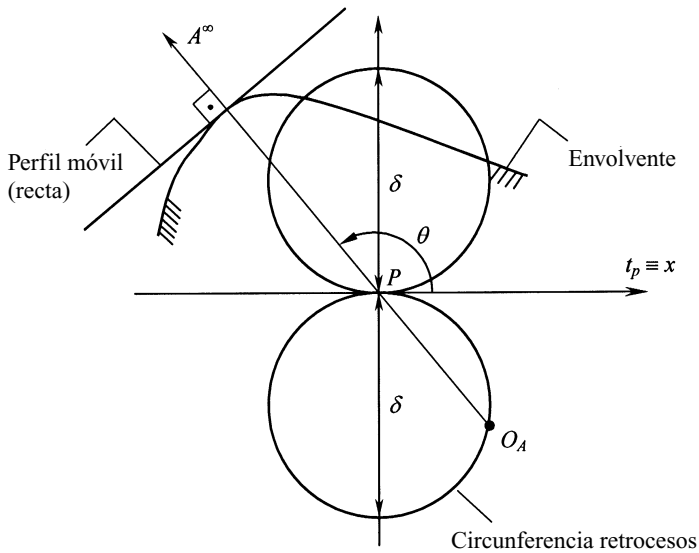


Figura 2.58. Circunferencia de los retrocesos.

De acuerdo con todo lo anteriormente expuesto, puede concluirse que la *circunferencia de los retrocesos* es el lugar geométrico de los centros de curvatura de las envolventes a rectas solidarias con el plano móvil.

Por otro lado, según lo indicado en el apartado anterior, el centro de curvatura de la envolvente a un perfil móvil es el centro de curvatura de la trayectoria del centro de curvatura de dicho perfil móvil. Puesto que los centros de curvatura de los perfiles móviles rectos se encuentran en el infinito, la circunferencia de los retrocesos será el lugar geométrico de los centros de curvatura de las trayectorias de los puntos del infinito del plano móvil.

Véase, a continuación, por qué a esta circunferencia se le denomina circunferencia cuspidal o de los retrocesos. Cuando se estudió la circunferencia de las inflexiones, al punto *I* de la misma, situado diametralmente opuesto al CIR, se le llamó polo o centro de inflexiones. Al punto simétrico de éste respecto de la tangente polar, punto *J*, se le conoce como *centro o polo cuspidal, o de los retrocesos*. Cualquier recta del plano móvil que en ese instante pase por *J* tendrá el punto de contacto con su envolvente en *C*, punto de corte de la recta móvil con la normal trazada sobre ella desde el CIR (figura 2.59). Debido a que el ángulo recto *PCJ* abarca media circunferencia, el punto *C* está situado en la propia circunferencia. Es decir, en el punto *C* coinciden el punto de contacto de la envolvente y su centro de curvatura. Por tanto, estamos ante un punto cuspidal o de retroceso, caracterizado porque su radio de curvatura es nulo.

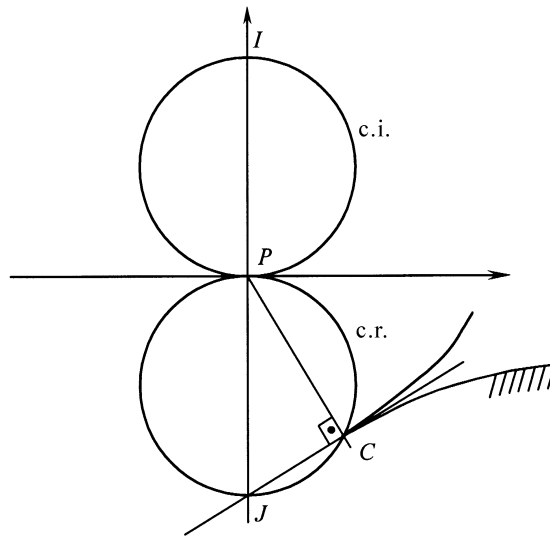


FIGURA 2.59. Polo cuspidal *J*.

Asimismo, el punto matemático de contacto entre la envolvente y la recta móvil, en *C*, tiene velocidad nula. En efecto, en la rama de acercamiento, la velocidad del punto matemático apunta hacia la cúspide *C*, mientras que, cuando se aleja por la otra rama, el sentido de la velocidad es el contrario (figura 2.60a). Por tanto, su velocidad ha teni-

do que pasar por un valor nulo en la cúspide. Otro punto en las mismas circunstancias es el CIR. Siguiendo el razonamiento inverso, puesto que el CIR experimenta una detención instantánea y su trayectoria está generada cinemáticamente, debe pasar por un punto cuspidal.

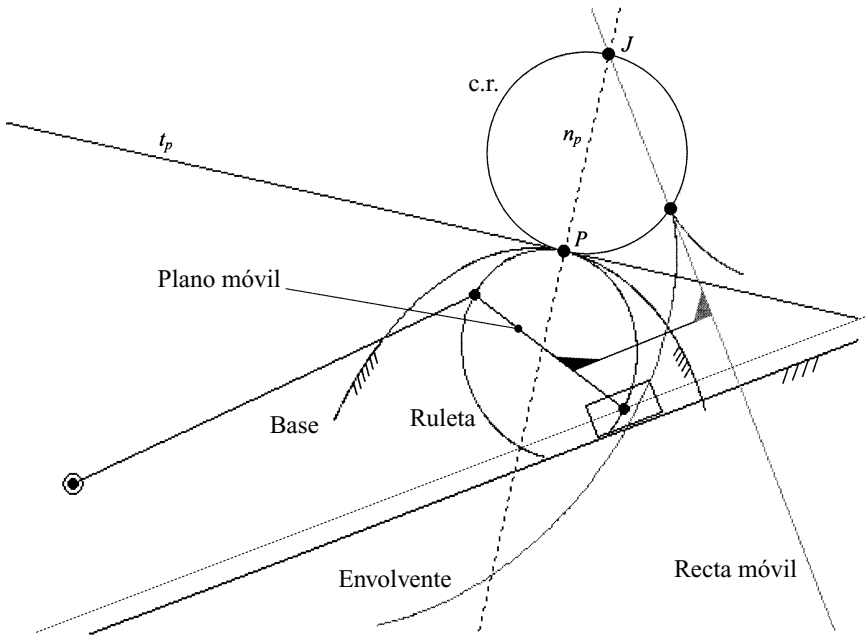


FIGURA 2.60. Puntos cuspidales de primera (a) y segunda especie (b).

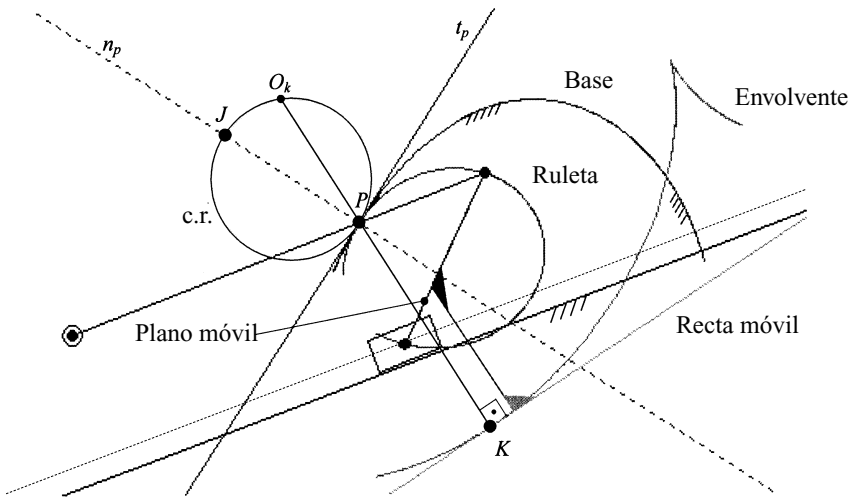
Estos puntos pueden ser de primera y de segunda especie. Los primeros son aquellos que tienen una rama a cada lado de la tangente en el punto cuspidal; es decir, la recta móvil al pasar por un punto cuspidal de primera especie no invierte su sentido de giro (figura 2.60a). Los de segunda especie son aquellos que tienen las dos ramas al mismo lado de la citada tangente (figura 2.60b); por tanto, la recta móvil al pasar por un punto cuspidal de segunda especie invierte su sentido de giro.

De todo este desarrollo se concluye que la circunferencia cuspidal es el lugar geométrico de los puntos de retroceso de las envolventes a rectas solidarias al plano móvil, que en el instante considerado están en contacto con dichas rectas. Para ilustrar este concepto, considérese el plano acoplador del mecanismo de biela-manivela de la figura 2.61. El movimiento de este plano está definido por la rodadura de la ruleta sobre la base. En un instante, la ruleta estará en la posición 1 y la circunferencia de los retrocesos será la representada en la figura 2.61a. Si una recta solidaria al plano móvil pasa por el centro de retrocesos en ese instante, su envolvente tendrá un punto cuspidal en el punto de contacto con dicha recta móvil. En un instante posterior del movimiento, la ruleta se encuentra en la posición 2 y la circunferencia de los retrocesos ha cambiado (figura 2.61b). En dicha posición, el centro de curvatura del punto K de la envolvente en contacto con la recta móvil, se halla situado sobre la actual circunferencia de los retrocesos (punto O_K).

Considérese, ahora, el movimiento inverso. En este caso, la envolvente se convierte en el nuevo perfil móvil y la recta en la nueva envolvente a las sucesivas posiciones del mismo. Por ello, el centro de curvatura de la trayectoria del centro de curvatura del nuevo perfil móvil, se encontrará en el centro de curvatura de la nueva envolvente, es decir, en el infinito ya que ésta es una recta. Así, la antigua circunferencia de los retrocesos se ha convertido en la nueva circunferencia de las inflexiones del movimiento inverso, como cabía esperar al tratarse de dos circunferencias simétricas respecto de la tangente polar (figura 2.62).



a) Posición 1.



b) Posición 2.

FIGURA 2.61. Circunferencias de los retrocesos correspondientes a las posiciones 1 y 2.

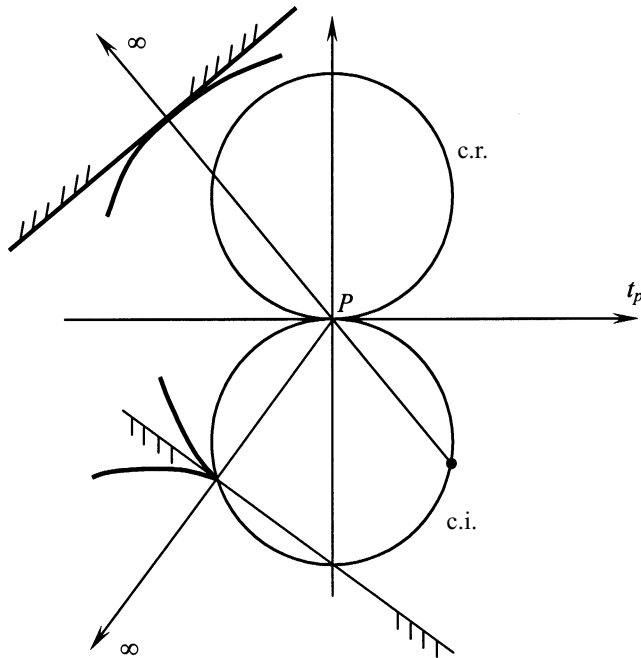


FIGURA 2.62. Movimiento inverso.

De los anteriores razonamientos, se deduce que la circunferencia de las inflexiones es el lugar geométrico de los centros de curvatura en el contacto, de curvas solidarias con el plano móvil, cuyas envolventes son rectas. También se puede decir que la circunferencia de las inflexiones es el lugar geométrico de los puntos de retroceso (en el contacto) de curvas solidarias al plano móvil cuyas envolventes son rectas.

Los contenidos expresados hasta el momento dentro de este apartado se resumen en los conocidos teoremas de Aronhold. El primero de ellos establece que la circunferencia de los retrocesos es el lugar geométrico de los centros de curvatura (en el punto de contacto) de las envolventes a rectas solidarias al plano móvil. A este primer teorema se le suele añadir un corolario que establece que, si una recta solidaria con el plano móvil pasa siempre por un punto fijo, dicho punto pertenece a la circunferencia de los retrocesos. En efecto, obsérvese (figura 2.63) que el plano 3 posee una recta r que permanentemente pasa por el punto O . A su vez dicho plano posee otra recta s a una distancia d de r , cuya envolvente es precisamente una circunferencia de radio d y centro O . Luego O pertenece a la circunferencia de los retrocesos del movimiento absoluto del plano móvil 3.

Esta característica facilita la obtención de puntos de la circunferencia de las inflexiones a partir del conocimiento de puntos de la circunferencia de los retrocesos sin más que considerar su simetría respecto del CIR.

El segundo teorema de Aronhold establece que la circunferencia de las inflexiones es el lugar geométrico de los centros de curvatura (en el punto de contacto) de las curvas solidarias al plano móvil cuyas envolventes son rectas.

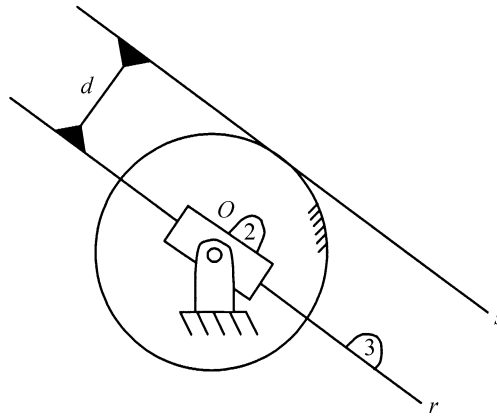


FIGURA 2.63. Corolario del primer teorema de Aronhold.

Aplicación: el contenido de estos dos últimos apartados es útil en el estudio de diversos sistemas mecánicos como los engranajes y las levas. En los primeros ayuda a estudiar qué perfiles de dientes pueden engranar entre sí y permite justificar el tallado de perfiles de evolvente mediante cremallera. Por lo que respecta a las levas, permite profundizar en el análisis cinemático de perfiles con forma cualquiera.

Ejemplo de aplicación 2.7. Sea el mecanismo de biela-manivela de la figura 2.64. Se pide para el elemento 3, en la posición indicada, lo siguiente:

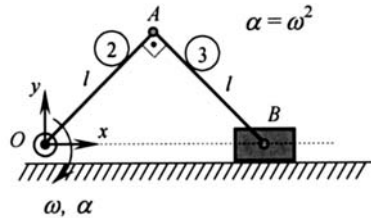


FIGURA 2.64. Datos geométricos del mecanismo.

1. Velocidad y aceleración angulares.
2. Circunferencia de las inflexiones.
3. ¿Qué puntos se pueden identificar a priori como pertenecientes a dicha circunferencia?
4. Obtener la tangente polar mediante el teorema de Bobillier. Comprobar la coherencia del resultado.
5. Circunferencia de los retrocesos.
6. Velocidad de sucesión.
7. Aceleración del CIR.
8. Circunferencia de Bresse.

9. Polo de aceleraciones.
10. Base y ruleta.
11. Obtener la circunferencia de las inflexiones en cualquier posición del plano 3.

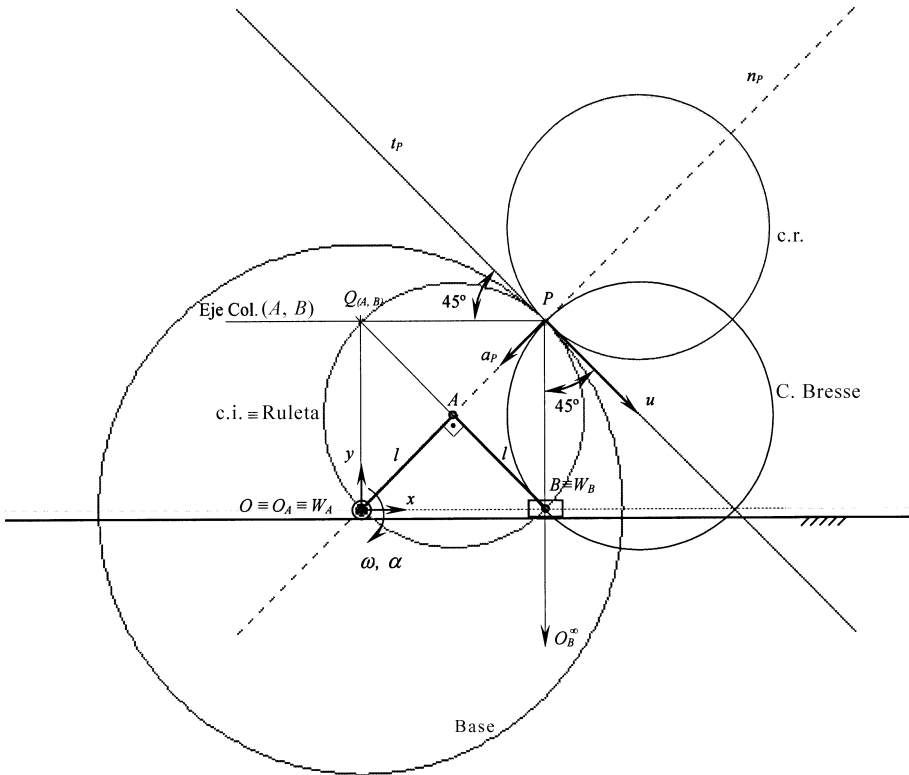


FIGURA 2.65. Solución gráfica al problema.

Solución:

1. $\omega_3 = \omega$ (sentido antihorario); $\alpha_3 = \alpha = \omega^2$ (sentido antihorario).
2. Ver figura 2.65.
3. El polo P , el punto B ya que su trayectoria es una recta, e incluso el punto O dado que verifica la fórmula de Euler-Savary [2.60].
- 4 y 5. Ver figura 2.65.
6. $u = \omega \delta = 2\omega l$ (figura 2.65).
7. $a_p = \omega u = 2\omega^2 l$ (figura 2.65).
8. $b = \omega^2 \delta / \alpha = 2l$ (figura 2.65).

9. Punto B , intersección de las circunferencias de Bresse y de las inflexiones.
10. Del ejemplo de aplicación 2.1.
11. Dado que la base y la ruleta son dos circunferencias, de la ecuación [2.46] se deduce que la c.i. tiene su diámetro constante a lo largo del movimiento, e igual al de la ruleta. Es más, dadas las peculiaridades de este problema, la c.i. coincide en todo instante con la ruleta. Por tanto, los puntos del plano 3 que están en la c.i. son siempre los mismos a lo largo del movimiento, por lo que sus radios de curvatura tienden permanentemente a infinito. Es decir, las trayectorias de los puntos de la ruleta son rectas, al igual que la del punto B .

Ejemplo de aplicación 2.8. Sea el mecanismo plano de la figura 2.66 en el que se considera que existe rodadura en el punto C , se pide:

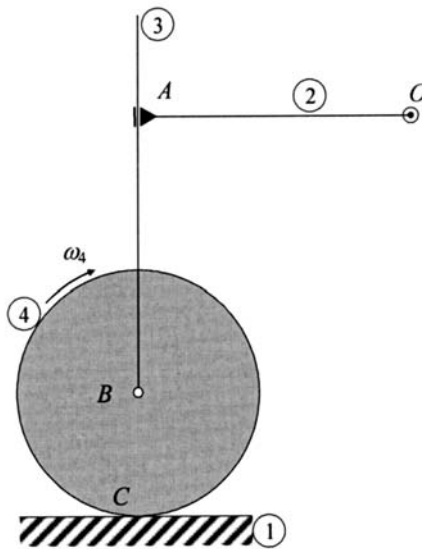


FIGURA 2.66. Mecanismo con rodadura en C .

1. Representar la circunferencia de los retrocesos del elemento 4.
2. Indicar 2 parejas de puntos conjugados del elemento 3.
3. Representar la circunferencia de las inflexiones del elemento 3.
4. Tomando $\omega_4 = 1 \text{ rad/s}$, representar la velocidad de sucesión del polo P_{41} y del polo P_{31} .

Solución:

- 1, 3 y 4. Ver figura 2.67.
 2. (O, D_3) y (B, O_B) .

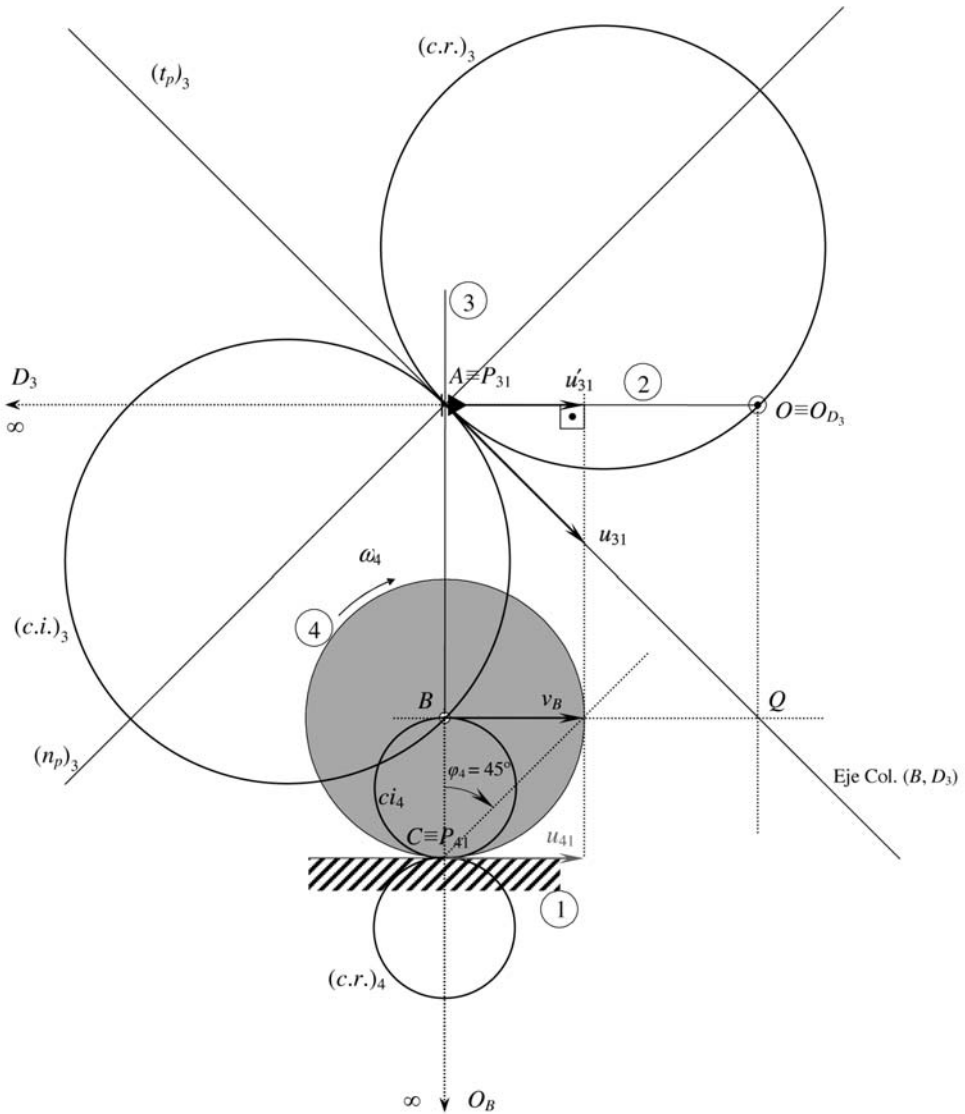


FIGURA 2.67. Solución gráfica.

Ejercicios propuestos

1. Determinar, en el mecanismo de la figura 2.68, la velocidad de sucesión absoluta del polo P_{24} .

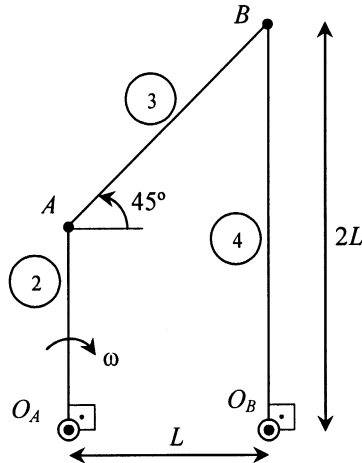


FIGURA 2.68. Cuadrilátero articulado del ejercicio 1.

2. Se va a rediseñar el mecanismo biela-manivela de la figura 2.69. La nueva posición de la articulación fija de la manivela se encuentra ahora en O_M . Determinar la nueva posición M de la articulación móvil de la manivela, de manera que el nuevo acoplador posea las mismas características cinemáticas instantáneas que el anterior.

Diseño inicial: $O_A AB$. Diseño nuevo: $O_M MB$.

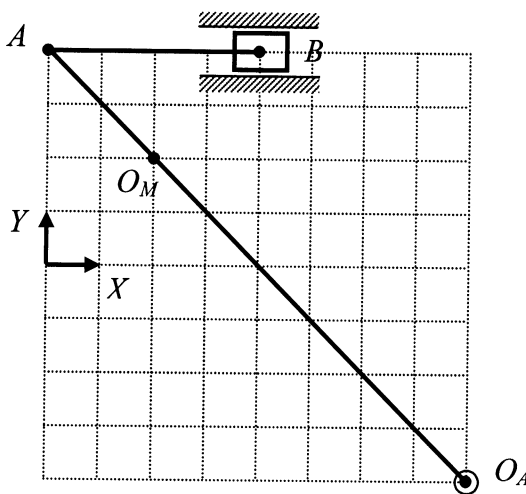


FIGURA 2.69. Biela-manivela del ejercicio 2.

3. En el mecanismo de la figura 2.70, el elemento 3 está biarticulado a la deslizadera 4 y al disco 2 de radio R , el cual rueda sin deslizar sobre una pista circular de radio $2R$. En el instante representado en dicha figura, el disco 2 tiene una velocidad angular $\omega_2 = 1 \text{ rad/s}$ en sentido horario. Obtener gráficamente:

1. La circunferencia de inflexiones y la circunferencia de retrocesos de los elementos 2 y 3.
2. La velocidad de cambio de polo de los elementos 2 y 3.
3. La recta r del elemento 3 desliza permanentemente sobre el perfil p , contactando en dicho instante en el punto D . Calcular el centro de curvatura del perfil p en dicho punto de contacto.

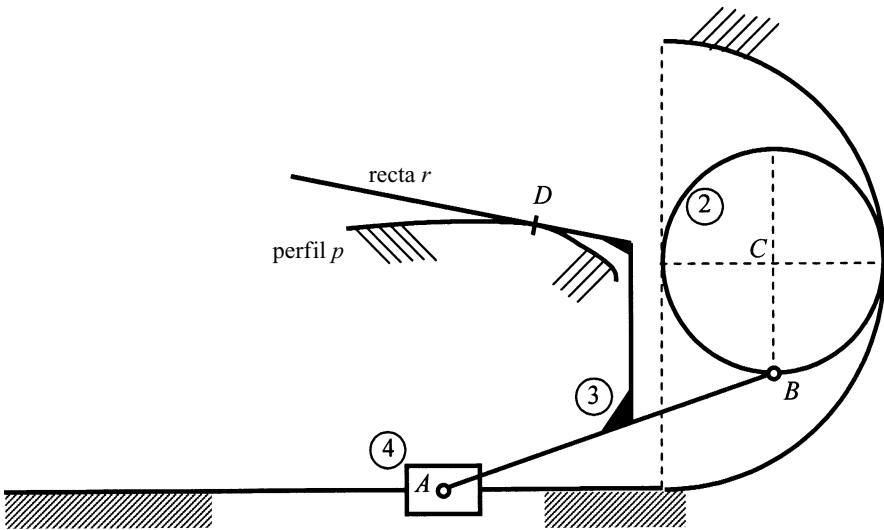


FIGURA. 2.70. Mecanismo del ejercicio 3.

4. Se tiene el mecanismo de la figura 2.71a para transporte de material. Debido a las grandes cargas a que está sometido el mecanismo, se ha pensado en colocar una guía a fin de minimizar las deformaciones originadas, tal y como se dispone en la figura 2.71b. El movimiento entre las superficies dentadas se modeliza mediante la rodadura pura entre dos pistas circulares.

La guía es de geometría compleja, por lo que para su fabricación es necesario obtener los centros de curvatura en algunos puntos de la misma. Se pide:

1. Determinar el centro de curvatura de la guía para el punto de contacto entre el rodillo y la guía en la posición de la figura.

Al inicio del movimiento y para evitar inercias, es deseable que el cuerpo a arrastrar esté situado en un punto de aceleración nula de la paleta. Se pide:

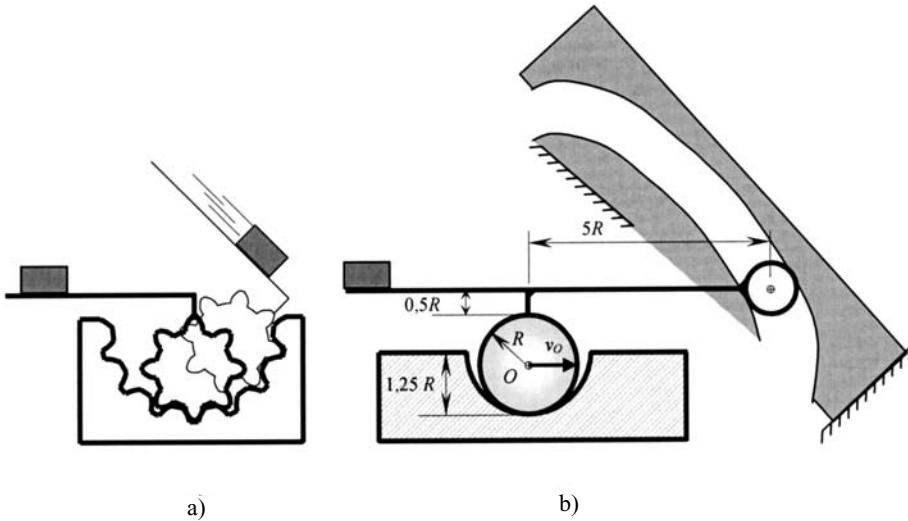


FIGURA 2.71. Mecanismo del ejercicio 4.

2. Situar dicho punto de aceleración nula, y posicionar en el mismo al elemento a arrastrar. La aceleración angular a la que se mueve el engranaje es de $\alpha = -\omega^2$, donde ω es la velocidad angular del mismo.

Nota: el perfil de la guía será la envolvente a las sucesivas posiciones del círculo.

3

Análisis cinemático de mecanismos planos

3.1. Introducción: problemas generales del análisis cinemático de mecanismos

El análisis cinemático constituye una etapa fundamental dentro del proceso de diseño de un mecanismo. De hecho, la síntesis dimensional se apoya en el análisis cinemático, sobre todo como herramienta de comprobación. Por otro lado, la obtención de las fuerzas de inercia, necesarias para la realización del análisis dinámico, requiere el conocimiento de las aceleraciones, las cuales sólo estarán disponibles una vez realizado el correspondiente análisis cinemático.

En general, los problemas que resuelve el análisis cinemático de mecanismos se reducen a tres: *problemas de posición, cálculo de velocidades y aceleraciones, y análisis en posiciones sucesivas*. A su vez, los problemas de posición se subdividen en: *problema directo e inverso*. Finalmente, el problema directo tiene dos variantes: el *problema de posición inicial* y el *problema de desplazamientos finitos (o posiciones sucesivas)*.

El problema de posición directo consiste en obtener la posición de todos los elementos del mecanismo, del cual se conocen todas sus dimensiones, la posición del elemento fijo y las posiciones de los elementos de entrada (definidas por los grados de libertad del mecanismo). Lógicamente, ésta es la primera tarea que hay que realizar antes de enfrentarse a cualquier tipo de análisis. Pese a la aparente sencillez que parece desprenderse de su enunciado, es un problema de difícil resolución debido al carácter no lineal del mismo, lo cual indica que el problema tiene múltiples soluciones. La figura 3.1 muestra las cuatro posibles soluciones al problema de posición inicial de un mecanismo de biela-manivela. En efecto, con centro en A y radio AB , el arco de circunferencia corta la recta de la deslizadera en dos puntos. A su vez, el triángulo acoplador puede situarse simétricamente a uno y otro lado del segmento AB . Esto hace previsible suponer que para mecanismos más complejos el número de posibles soluciones será mayor, y por tanto más costosa la búsqueda de la solución deseada.

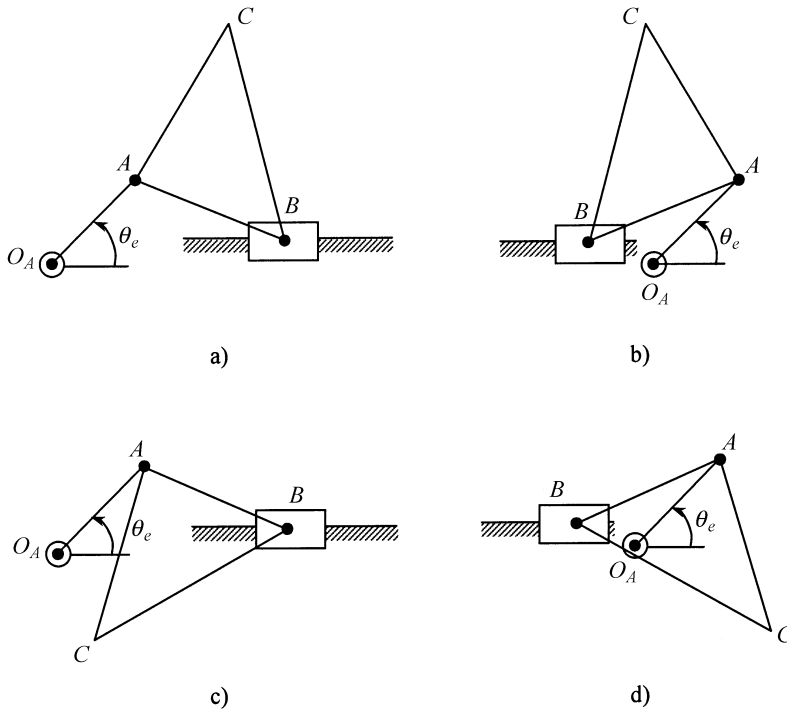


FIGURA 3.1. Soluciones al problema de posición inicial de un biela-manivela.

El problema de posición inverso, como su nombre indica, consiste en obtener la posición de todos los elementos del mecanismo, del cual se conoce su dimensionamiento, la posición del elemento fijo y la posición (o el valor de alguno de los grados de libertad) del elemento de salida. Tanto el problema directo como el inverso se resuelven mediante los mismos métodos y poseen un nivel similar de dificultad.

El problema de posición inicial tiene por objeto la obtención de todas las soluciones posibles, mientras que el problema de desplazamientos finitos se interesa por una sola de ellas. Los métodos de resolución para uno y otro son, en general, distintos. La necesidad de obtener todas las soluciones se plantea cuando la única solución obtenida puede no ser la óptima y se necesitan otras alternativas. Éste es el caso de los manipuladores que se mueven en entornos con obstáculos, o simplemente cuando se están analizando las capacidades del mecanismo, para lo cual se requiere conocer todas sus posibilidades de ensamblado.

El problema de desplazamientos finitos consiste en obtener las sucesivas posiciones de los elementos de un mecanismo cuando el(los) elemento(s) de entrada se mueve(n) según una secuencia dada. Cuando los incrementos de desplazamiento del elemento de entrada sean pequeños, se utiliza la posición anterior como estimación de partida en cada nueva iteración. De esta manera la convergencia mejora notablemente y la solución busca-

da se alcanza con el menor coste computacional. Con la resolución del problema de desplazamientos finitos se obtienen las trayectorias de los puntos notables del mecanismo, así como los rangos de movimiento angular de los elementos con punto fijo y los rangos lineales en los émbolos o pares prismáticos. El conocimiento de la rotabilidad de los elementos de un mecanismo permite elegir, tanto la localización de los accionamientos, como el tipo de los mismos.

Hay que indicar que tanto el problema de desplazamientos finitos como el de posición inicial podrían haber sido formulados para el problema inverso de forma análoga a como lo han sido para el problema directo.

El siguiente problema de análisis cinemático, y que evidentemente requiere la resolución previa del problema de posición, es el del cálculo de velocidades y aceleraciones. Dado que éste es un problema lineal, su resolución será más sencilla que la de los anteriores. El cálculo de velocidades y aceleraciones consiste en conocida la posición de un mecanismo, y para una(s) velocidad(es) y aceleración(es) del (de los) elemento(s) de entrada, calcular las velocidades y aceleraciones de los restantes elementos y puntos del mecanismo. Constituye el paso inmediato anterior al análisis dinámico de mecanismos. En este capítulo se expondrán tanto métodos gráficos como analíticos para el análisis de velocidades y aceleraciones. Los métodos gráficos son, básicamente, de utilidad docente y se aplican a una posición concreta, es decir, no genérica, del mecanismo.

El último de los problemas de análisis cinemático puede considerarse una combinación del problema de desplazamientos finitos y el cálculo de velocidades y aceleraciones. En efecto, el análisis en posiciones sucesivas consiste en calcular las posiciones, velocidades y aceleraciones a lo largo de un ciclo de desplazamiento del (de los) elemento(s) de entrada del mecanismo. Los métodos analíticos son los más adecuados para la resolución de este problema ya que se adecuan fácilmente a su implementación en computador. De este modo, el comportamiento del mecanismo puede estudiarse a través de la representación de sus variables cinemáticas a lo largo de un ciclo del movimiento. Al final de este capítulo se expone un método analítico basado en las ecuaciones de cierre de los lazos del mecanismo.

Como resumen de lo expuesto en este capítulo, se presenta en la figura 3.2 una clasificación de los problemas generales del análisis cinemático de mecanismos:

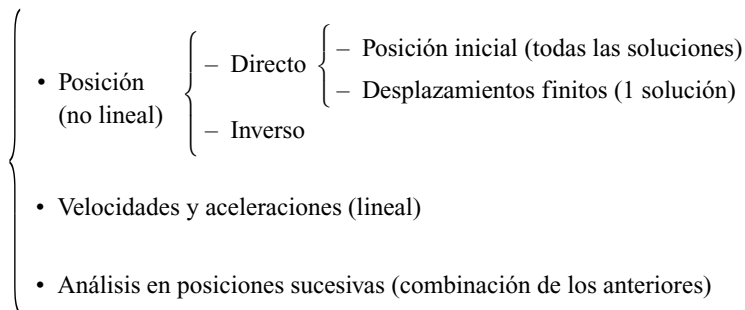


FIGURA 3.2. Problemas generales del análisis cinemático de mecanismos.

3.2. Métodos de resolución para los problemas de posición

3.2.1. Revisión de los métodos de resolución de los problemas de posición

Un método de resolución tiene dos etapas: el planteamiento y la resolución propiamente dicha. La clasificación de los métodos de resolución del problema de posición directo que aquí se presenta está basada en el tipo de planteamiento que hacen. Según esto, pueden clasificarse en métodos gráficos, analíticos y de computación matricial.

Dentro de los métodos gráficos, o más bien grafo-analíticos, se pueden establecer a su vez tres subgrupos. Los dos primeros se encuadran en lo que se podría denominar métodos gráficos clásicos. En el primer subgrupo se encuentran los métodos de descomposición diádica, también conocidos como métodos RC (regla y compás), ya que pueden obtener la posición del mecanismo mediante intersecciones de estos dos elementos de dibujo. En el segundo subgrupo están los procedimientos de interpolación gráfica o de falsas posiciones (Kozhevnikov, 1981). Los métodos gráficos clásicos se apoyan en la existencia de algún lazo cuadrilátero en el mecanismo, lo cual sucede en la mayoría de los mecanismos sencillos. En la actualidad, los métodos gráficos clásicos poseen un carácter casi exclusivamente docente, razón por la cual serán expuestos en el próximo apartado.

Los métodos que forman el tercer subgrupo utilizan el denominado enfoque modular; descomponen el mecanismo en bloques de elementos más simples, susceptibles de ser analizados independientemente para, con posterioridad, ensamblar sus resultados. Estos módulos pueden ser analizados mediante técnicas analíticas o procedimientos numéricos. Dentro de este subgrupo existen dos líneas de desarrollo; en la primera, el mecanismo se considera constituido por un grupo de elementos primarios al que añaden sucesivos módulos que son, precisamente, los anteriormente denominados grupos de Assur. En la segunda línea, los módulos están constituidos por bloques de elementos sencillos de analizar y muy utilizados en la industria.

Los métodos analíticos se caracterizan por realizar un planteamiento analítico, independientemente de cual sea el procedimiento de resolución (en muchos casos numérico). Estos métodos toman como punto de partida las ecuaciones de cierre de los lazos independientes del mecanismo. En este sentido, no son métodos generales. La aplicación del computador a los métodos analíticos se concreta en programas de propósito particular. Estos programas son códigos rígidamente estructurados que sólo permiten el análisis del tipo de mecanismo para el que han sido programados. Una vez planteadas las ecuaciones no lineales que gobiernan el problema de posición del mecanismo, hay tres métodos (Nielsen, 1999) que obtienen todas las soluciones: los métodos de continuación polinomial, los métodos de eliminación y las bases de Gröbner. El primero y el tercero son claramente métodos numéricos. El segundo, aunque es analítico, desemboca en un polinomio de una variable que casi siempre hay que resolver numéricamente. Estos tres métodos conllevan una cantidad ingente de operaciones, por lo que no se emplean en mecanismos que trabajan en tiempo real. Cuando sólo se desea obtener una solución (problema de posiciones sucesivas) se emplea el algoritmo de Newton-Raphson, que es mucho más rápido que los anteriores.

Por último se encuentran los métodos generales de computación matricial. Por tales se entiende aquellos procedimientos que dan lugar a programas de computador de carácter general, basados en algoritmos sistemáticos que permiten el análisis cinemático automatizado de mecanismos con cualquier grado de complejidad y cualquier número de elementos. Dentro de estos métodos existen dos enfoques: el más extendido, basado en los sistemas multicuerpo, y otro más particular, desarrollado a partir del Método de los Elementos Finitos.

Los programas basados en sistemas multicuerpo modelizan el mecanismo mediante un conjunto de coordenadas que definen unívocamente la posición de todos sus elementos. A continuación, las ecuaciones de restricción provenientes de los pares cinemáticos se aplican sobre los elementos del mecanismo, dando lugar a un sistema no lineal de ecuaciones. Para la resolución de dicho sistema, la primera fase es el ensamblado del mecanismo, es decir, la obtención de una de las soluciones del problema de posición inicial. Para ello, se hace necesaria la asistencia de un método computacional estable. Una vez ensamblado el mecanismo, se realiza un chequeo para comprobar la existencia de restricciones redundantes en el modelo. Posteriormente, se eliminan las ecuaciones derivadas de las restricciones redundantes, para lo cual puede utilizarse el método de la eliminación gaussiana con pivotamiento total. En estas condiciones ya es posible realizar el análisis de desplazamientos finitos mediante la resolución del sistema no lineal de ecuaciones. Para ello se aplica el algoritmo de Newton-Raphson, utilizando como estimación de partida la posición ensamblada del mecanismo previamente calculada.

Un análisis más detallado de los métodos de computación matricial excedería los objetivos de este texto, por lo cual se remite al lector a otras referencias (Haugh, 1989; García de Jalón, 1994).

3.2.2. *Métodos gráficos clásicos*

Los métodos gráficos son poco precisos y laboriosos, por lo que, de aplicarse, sólo tiene sentido para mecanismos sencillos. Estas dificultades, junto con la disponibilidad de computadores, hacen que sean los métodos analíticos y los métodos generales de computación matricial los más utilizados. No obstante, los métodos gráficos poseen un valor docente, por su carácter intuitivo en la comprensión del movimiento del mecanismo; además, en ellos subyace el fundamento de otros métodos analíticos. El resultado final será el dibujo del mecanismo a una determinada escala. Para ello se parte del conocimiento de las posiciones del elemento fijo y de los elementos de entrada. A partir de aquí, y mediante construcciones gráficas adecuadas, se llega a la definición de la posición del resto de los elementos.

Los dos métodos que van a presentarse en este apartado se ilustrarán sobre un sencillo ejemplo: el mecanismo de seis barras de Stephenson III (figura 3.3). Dicho mecanismo posee cuatro articulaciones móviles: A , B , C y P ; y tres fijas: A_0 , B_0 y C_0 . El método de resolución es distinto dependiendo de la barra que se utilice como elemento de entrada. Así, en el caso en que la barra de entrada sea A_0A o B_0B , se utilizará la descomposición diádica; si fuera la barra C_0C se utilizará el método de interpolación o de falsas posiciones.

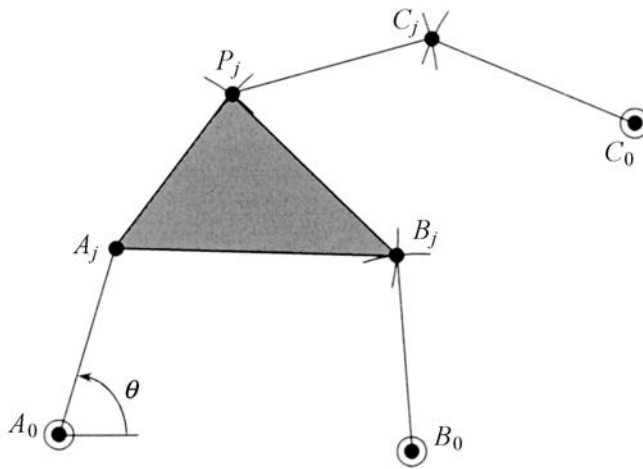


FIGURA 3.3. Mecanismo de Stephenson III.

A) Descomposición diádica (A_0A es la barra de entrada)

La posición j se construye de la siguiente manera:

1. Se construye el cuadrilátero $A_0A_jB_jP_j$ mediante intersecciones de arcos a partir de la posición conocida A_0A .
2. Se obtiene el punto C_j de la diada R mediante la intersección de los arcos de circunferencia de centros C_0 y P_j y radios C_0C y PC respectivamente.

B) Interpolación (C_0C es la barra de entrada)

La posición inicial llevará el subíndice 1. El procedimiento (figura 3.4), ahora, es:

1. Se traza un arco con centro C_j y radio CP .
2. Se dibujan unas cuantas posiciones sucesivas de P a partir del cuadrilátero articulado A_0ABB_0 , de manera que se prevea la intersección de este tramo de trayectoria con el arco trazado anteriormente. En dicha intersección estará P_j .

Los arcos de circunferencia intersectan en dos puntos, por lo que siempre hay más de una solución. El usuario, mediante inspección, deberá seleccionar la que mejor se ajuste a su problema.

El mecanismo de Stephenson III se compone de dos lazos independientes. En el primer caso, inicialmente se resuelve un lazo, el correspondiente al cuadrilátero articulado. A continuación, y apoyándose en el lazo resuelto, se resuelve el segundo lazo. La solución puede dibujarse directamente mediante regla y compás, tal como se indica en la figu-

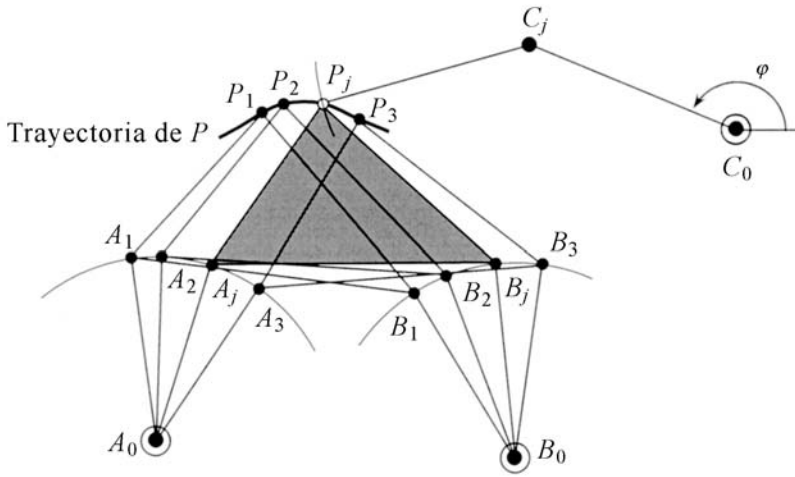


FIGURA 3.4. Método de interpolación.

ra 3.3. El proceso de resolución es directo. Desde un punto de vista analítico, las incógnitas cinemáticas pueden expresarse una en función de otra, de forma encadenada, hasta llegar al grado de libertad que define la posición de la barra de entrada. En este caso, se dice que los dos lazos, así como su correspondiente sistema de ecuaciones, están *débilmente acoplados*.

Sin embargo, en el segundo caso, para que la solución pueda ser dibujada se debe hacer uso de algún tipo de interpolación. Desde un punto de vista analítico, las ecuaciones correspondientes a los dos lazos están completamente acopladas, de manera que el problema no se resuelve si no lo hacen los dos lazos simultáneamente. Se dice, entonces, que los lazos del mecanismo están *fuertemente acoplados*. El sistema de ecuaciones resultante es, en este caso, más complejo.

3.2.3. Método Geométrico-Iterativo

Como colofón a los métodos de resolución de los problemas de posición, en este subpartado se esboza someramente un procedimiento general basado en fundamentos puramente geométricos (Hernández, 2002; Petuya, 2002). Por esta razón, y dado su carácter didáctico, es por lo que se incluye aquí.

En primer lugar, los elementos, los pares cinemáticos y los actuadores que constituyen el mecanismo se transforman en una serie de nudos relacionados entre sí mediante restricciones geométricas (de distancia o angulares). Un algoritmo establece el orden en que deben ser aplicadas estas restricciones geométricas que modelizan el mecanismo. Esto es lo que se denomina una *secuencia de iteración*. A continuación, se aplica de forma iterativa dicha secuencia de iteración. Como se puede ver, en este método no aparecen las ecuaciones

ciones de posición. Sin embargo, puede intuirse que su función está siendo desempeñada por la secuencia de iteración.

Para ver cómo funciona el método, se va a resolver de nuevo el problema de posición correspondiente al caso *B*) del apartado anterior; es decir, cuando el mecanismo de Stephenson III (figura 3.6a) tiene sus lazos fuertemente acoplados. Para ello se da una entrada de 15° en sentido antihorario a la barra OA , obteniendo ya para el nudo A su posición final A_F (figura 3.6b). A continuación se aplica la siguiente secuencia de iteración:

1. Restricción de distancia AB a partir de A_F , obteniendo el nudo B_1 (figura 3.6b).
2. Restricción de distancia BC a partir de B_1 , obteniendo el nudo C_1 (figura 3.6c).
3. Restricción de distancia EC a partir de E , obteniendo el nudo C_2 (figura 3.6d).
4. Restricción de distancia CD a partir de C_2 , obteniendo el nudo D_1 (figura 3.6e).
5. Restricción de distancia FD a partir de F , obteniendo el nudo D_2 (figura 3.6f).
6. Restricción de distancia DB a partir de D_2 , obteniendo el nudo B_2 (figura 3.6g).

Esta secuencia de restricciones geométricas es repetida sucesivas veces hasta que la convergencia es alcanzada (figura 3.6h) y la solución final obtenida (figura 3.6i). El proceso iterativo finaliza cuando el error en el cumplimiento de las restricciones de distancia E_R es menor que una tolerancia prefijada. En la figura 3.6j se representa el gráfico de convergencia del error (E_R) de la secuencia de iteración.

Para mostrar la capacidad de este método, en la figura 3.5 se presenta la resolución del problema de posiciones sucesivas del conocido mecanismo de un grado de libertad denominado *máquina andante de Chébyshev*. En dicha figura también aparecen las trayectorias de algunas de sus articulaciones. Este mecanismo simula el movimiento de las patas de un animal. Para realizar el análisis, una de las “patas” del mecanismo es considerada el elemento fijo. El movimiento se introduce por un accionamiento rotativo continuo fijado a una de las manivelas del doble paralelogramo articulado situado sobre el “cuerpo”. Este mecanismo posee la complejidad añadida de poseer varios elementos con hasta cuatro pares de rotación alineados.

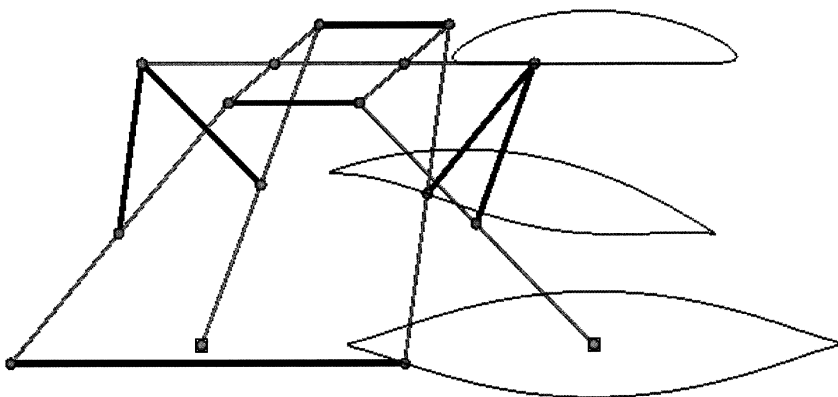


FIGURA 3.5. Máquina andante de Chébyshev.

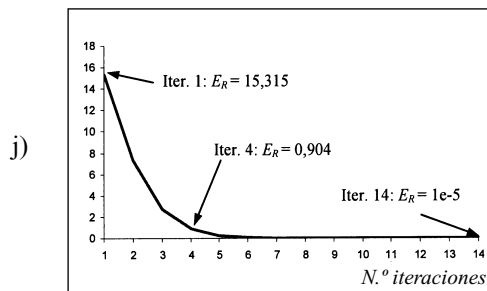
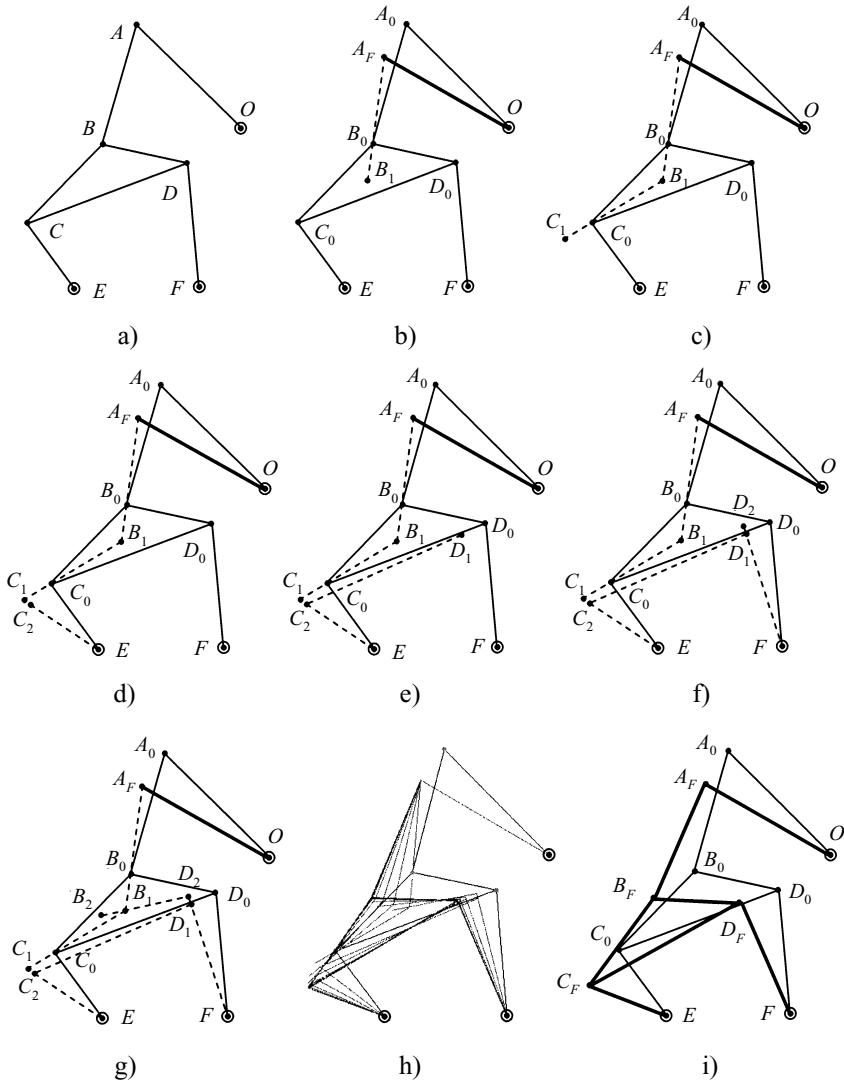


FIGURA 3.6. Método Geométrico-iterativo aplicado al mecanismo de Stephenson III.

3.3. Rotabilidad de mecanismos

El estudio del rango de movimientos de los elementos de un mecanismo es uno de los tópicos que más interés suscita en los ingenieros diseñadores de mecanismos. En muchas ocasiones, la fuente de potencia que se aplica al elemento de entrada es un motor de rotación continua, por ello es necesaria la búsqueda de aquellos elementos que dan vueltas completas respecto del elemento fijo.

Para conocer la rotabilidad de los elementos de un mecanismo hay que resolver previamente el problema de desplazamientos finitos; como se sabe, éste es un problema no lineal que requiere, en general, métodos iterativos de resolución. Sin embargo, hay mecanismos simples como el cuadrilátero articulado en los que puede analizarse de manera sencilla su rotabilidad. Por esta razón, por las muchas aplicaciones directas del cuadrilátero articulado y porque la mayoría de los problemas básicos encontrados en cualquier mecanismo aparecen de una manera más simple y fácil de entender en un cuadrilátero articulado, es por lo que a continuación se expone el estudio de rotabilidad de este mecanismo seguido por Grashof en 1883.

3.3.1. Criterio de Grashof

Sean a , b , c y d las magnitudes de los lados de un cuadrilátero articulado ordenados de menor a mayor. En estas condiciones, son posibles solamente tres maneras de efectuar la conexión entre ellos (figura 3.7).

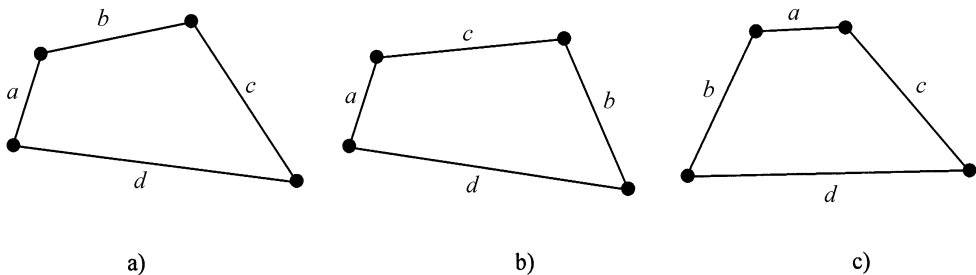


FIGURA 3.7. Cuadriláteros articulados posibles.

El estudio completo de rotabilidad supone analizar el movimiento relativo de cada una de las barras respecto a todas las demás: a/b , a/c , a/d , b/c , b/d y c/d ; y esto, para cada mecanismo, es decir, dieciocho casos en total. Sin embargo, estos dieciocho casos pueden quedar reducidos a seis, al convertir los mecanismos de las figuras 3.7b y 3.7c en el mecanismo de la figura 3.7a. Esta conversión es fácil de hacer sin más que añadir unas barras a' , b' , y c' de longitudes a , b y c , respectivamente, a los mencionados mecanismos de las figuras 3.7b y 3.7c, tal y como se indica en la figura 3.8.

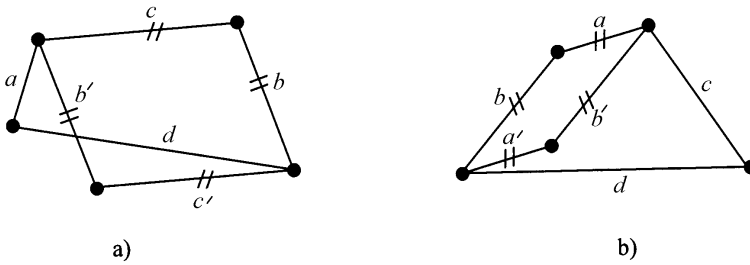


FIGURA 3.8. Equivalencia de cuadriláteros.

En efecto, los lados opuestos de un paralelogramo articulado permanecen siempre paralelos; puesto que $c-b'-c'-b$ en la figura 3.8a es un paralelogramo, dará igual estudiar el cuadrilátero $a-c-b-d$ que el $a-b'-c'-d$, siendo este último coincidente con el cuadrilátero de la figura 3.7a. Un razonamiento análogo puede hacerse a partir del paralelogramo $b-a'-b'-a$ de la figura 3.8b. En conclusión, *la rotabilidad de un cuadrilátero articulado es independiente del orden de conexión de sus barras*.

Ahora se analizará bajo qué condiciones una barra cualquiera puede dar vueltas completas alrededor de otra. Sea un cuadrilátero articulado con unas longitudes de barras cualesquiera: l_1, l_2, l_3 y l_4 . Para que una de ellas, por ejemplo l_1 , dé vueltas completas respecto a otra, por ejemplo l_2 , será necesario que se verifiquen las dos siguientes condiciones geométricas:

- I. *Que la suma de ambas ($l_1 + l_2$) sea menor que la suma de las dos restantes: $l_3 + l_4$.* Esta condición queda representada en la figura 3.9a y garantiza que no haya una posición límite de apertura de las barras l_1 y l_2 como en la figura 3.9b.
- II. *Que la diferencia entre ambas sea mayor que la diferencia entre las dos restantes.* Esta condición queda representada en la figura 3.9c y garantiza que no haya una posición límite de cierre de las barras l_1 y l_2 como en la figura 3.9d. En efecto, para plegar la barra l_1 sobre la barra l_2 se tiene que cerrar el triángulo de la figura 3.9c, lo cual supone que $l_2 - l_1 + l_3 > l_4$; que, a su vez, lleva a la condición anteriormente indicada: $l_2 - l_1 > l_4 - l_3$.

Conocidas, ahora, las condiciones bajo las cuales una barra puede dar vueltas completas alrededor de otra, se analizarán los seis casos del cuadrilátero de la figura 3.7a:

1.º Giro completo de a sobre b :

- Condición I: $a + b < c + d$; que resulta evidente puesto que $a < b < c < d$.
- Condición II: $b - a > d - c$; o lo que es lo mismo: $a + d < b + c$.

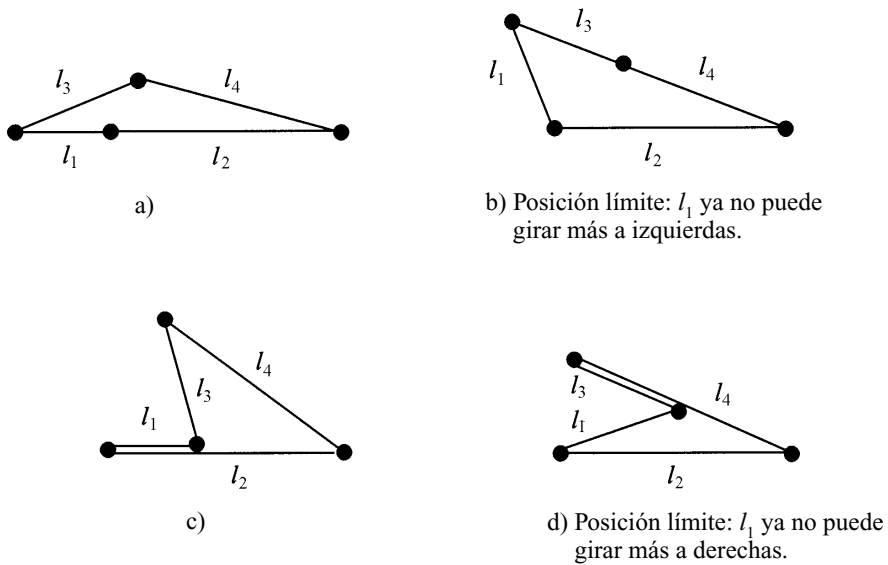


FIGURA 3.9. Condiciones geométricas para una rotación completa.

2.º Giro completo de a sobre c :

- Condición I: $a + c < d + b$; que resulta evidente, puesto que $a < b$, y $c < d$.
- Condición II: $c - a > d - b$; o, lo que es lo mismo: $a + d < b + c$.

3.º Giro completo de a sobre d :

- Condición I: $a + d < b + c$.
- Condición II: $d - a > c - b$; o lo que es lo mismo: $b + d > a + c$; que resulta evidente puesto que $b > a$, y $d > c$.

4.º Giro completo de b sobre c :

- Condición I: $b + c < a + d$.
- Condición II: $c - b > d - a$; o, lo que es lo mismo: $c + a > d + b$; que resulta imposible ya que $c < d$ y $a < b$.

5.º Giro completo de b sobre d :

- Condición I: $b + d < a + c$; que es imposible, ya que $b > a$ y $d > c$.

6.º Giro completo de c sobre d :

- Condición I: $c + d < a + b$; que es imposible, ya que $c > a$ y $d > b$.

Por tanto, son imposibles las rotaciones b/c , b/d y c/d ; sólo la barra a puede dar vueltas completas respecto de las demás; y para que así sea, la única condición que debe verificarse es:

$$a + d < b + c \quad [3.1]$$

Por tanto, la *ley de Grashof* se enuncia del siguiente modo:

Sólo la barra más corta de un cuadrilátero articulado puede dar vueltas completas respecto de todas las demás (y viceversa), si se verifica que la suma de longitudes de la barra más corta y de la más larga, es menor que la suma de las otras dos.

En función del cumplimiento o no de la ley de Grashof, se puede establecer la siguiente clasificación de los cuadriláteros articulados:

Caso 1: si el mecanismo cumple la ley de Grashof, se obtienen las tres posibilidades siguientes:

1. Si a es el elemento fijo \rightarrow doble manivela (figura 3.10):

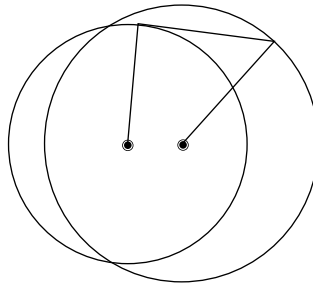


FIGURA 3.10. Doble manivela.

2. Si a es el opuesto al fijo \rightarrow doble balancín (figura 3.11):

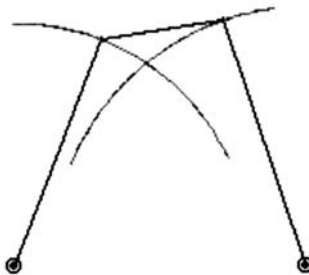


FIGURA 3.11. Doble balancín.

3. Si a es adyacente al fijo \rightarrow manivela-balancín (a manivela, figura 3.12):

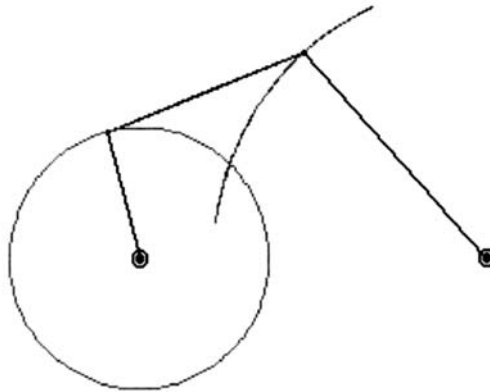


FIGURA 3.12. Manivela-balancín.

Caso 2: si el mecanismo no verifica la ley de Grashof, las cuatro posibles inversiones son de doble balancín (figura 3.13):

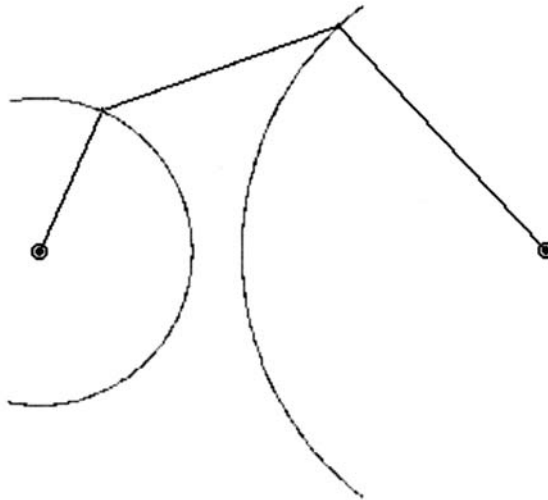


FIGURA 3.13. Doble balancín.

Caso 3: si el mecanismo cumple la ley de Grashof en el límite: $a + d = b + c$; este caso resulta equivalente al caso 1, sólo que en determinadas posiciones estos mecanismos se encuentran con todas las barras alineadas. Se les denominan *mecanismos de transición*, y pueden obtenerse las siguientes variantes (figura 3.14):

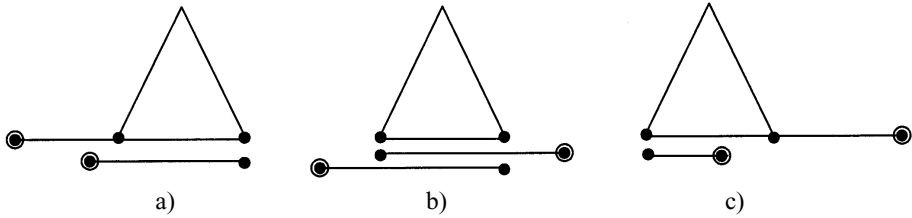


FIGURA 3.14. Variantes de los mecanismos de transición.

Si, además, se cumple que $a = b$ y $c = d$, el cuadrilátero puede adquirir las dos siguientes disposiciones:

1. *Paralelogramo articulado*: doble manivela (figura 3.15):

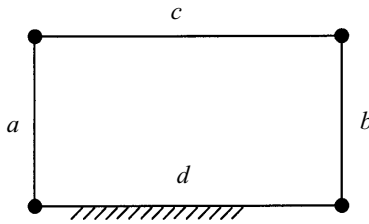
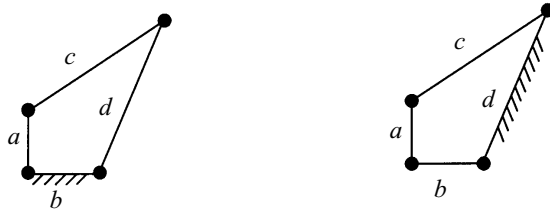


FIGURA 3.15. Paralelogramo articulado.

2. *Cuadrilátero cometa*, con las dos siguientes inversiones (figura 3.16):



a) Doble manivela.

b) Manivela-balancín.

FIGURA 3.16. Inversiones del mecanismo cometa.

En el caso de que todos los lados sean iguales, la trayectoria de cualquier punto del plano acoplador degenera en 3 circunferencias (figura 3.17):

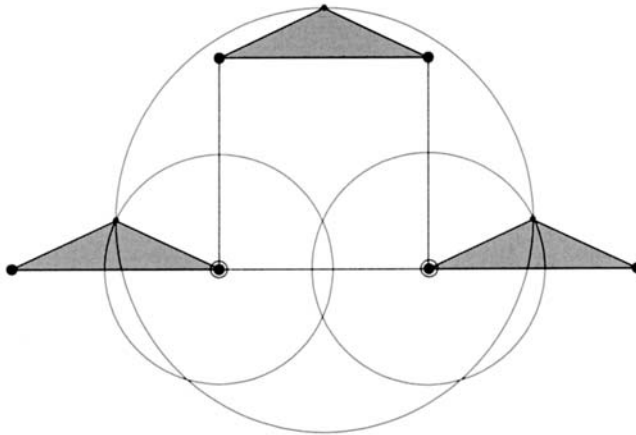


FIGURA 3.17. Curva de acoplador ($a = b = c = d$).

3.3.2. Configuraciones, ramas de una trayectoria y posiciones de indeterminación

En este epígrafe se van a analizar con mayor profundidad algunos tipos de cuadriláteros articulados que surgen de la anterior clasificación. Considérese un cuadrilátero articulado que cumpla la ley de Grashof (figura 3.18). Para una posición concreta de la manivela A_0A , existen dos configuraciones posibles: la configuración abierta A_0ABB_0 que da lugar al arco superior de la articulación móvil B y la configuración cruzada $A_0AB'B_0$ que da lugar al arco inferior. Estos arcos son simétricos respecto de la línea A_0B_0 . Para pasar de una configuración a la otra es necesario desmontar alguna de las juntas del mecanismo.

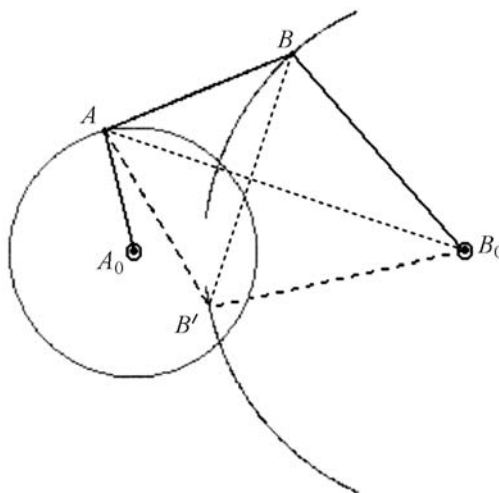


FIGURA 3.18. Configuraciones abierta y cruzada.

Como consecuencia de esto, cualquier punto del acoplador de un cuadrilátero articulado que cumpla la ley de Grashof origina una trayectoria con dos ramas o circuitos, en virtud de sus dos configuraciones posibles. En la figura 3.19 se representa la curva trazada por un punto del acoplador del cuadrilátero de la figura anterior. Dicha curva está constituida por dos ramas (circuitos) generadas simultáneamente en sendas configuraciones.

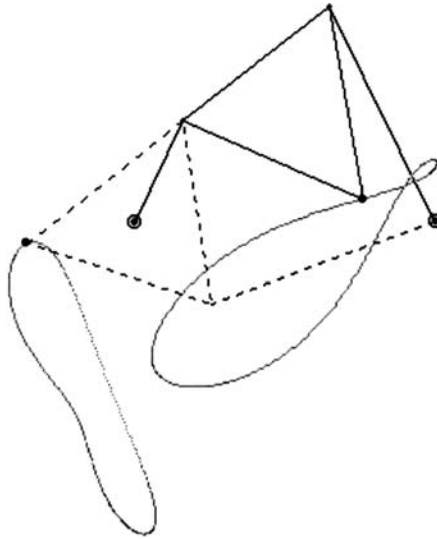


FIGURA 3.19. Curva de acoplador con dos circuitos.

Cuando el cuadrilátero no cumple la ley de Grashof, se puede pasar de la posición A_0ABB_0 a la $A_0AB'B_0$ (figura 3.20) de forma natural sin desarticular ninguna junta; ambas configuraciones se conectan como indica la continuidad de los arcos.

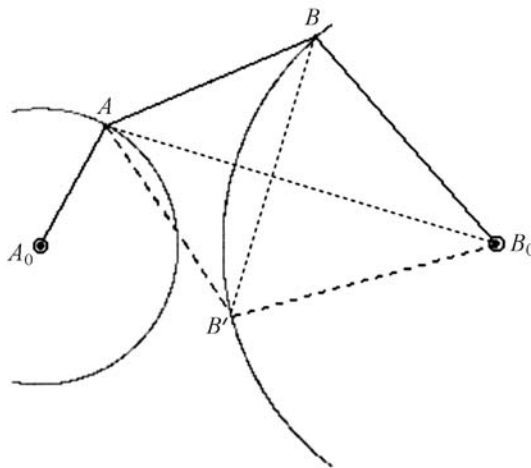


FIGURA 3.20. Conexión entre las configuraciones abierta y cerrada.

Como consecuencia de esto, cualquier punto del acoplador de un cuadrilátero articulado que no cumpla la ley de Grashof origina una trayectoria con un único circuito. En la figura 3.21 se representa la curva trazada por un punto del acoplador del cuadrilátero de la figura anterior. Dicha curva está constituida por un único circuito, por el que discurre el punto de acoplador en las dos configuraciones.

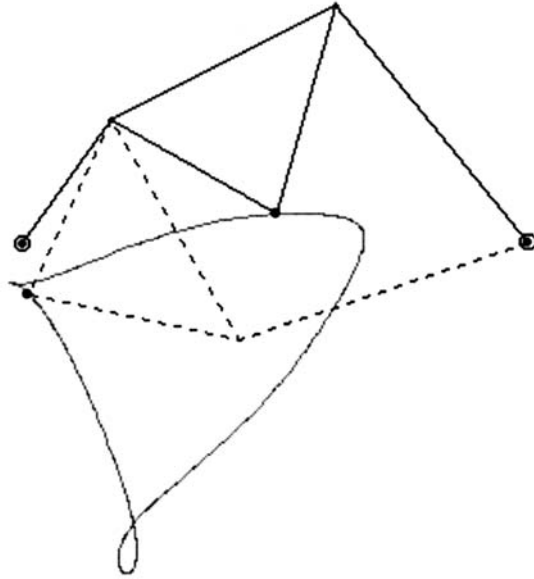


FIGURA 3.21. Curva de acoplador con un único circuito.

Cuando se cumple la ley de Grashof en el límite (caso de los mecanismos de transición), el cuadrilátero puede alcanzar una posición, denominada *posición de indeterminación*, en la que todas sus barras se encuentran alineadas (figura 3.22). Esto es debido a que la suma de las longitudes de dos de ellas es igual a la suma de las dos restantes. Justo a través de esta posición, el cuadrilátero puede pasar de una configuración a la otra sin ser desmontado (figura 3.23). La posición de indeterminación se caracteriza porque en ella el movimiento del cuadrilátero no está determinado; es como si tuviera un grado de libertad extra. Es decir, si se gira la manivela en un sentido, las otras barras (o alguna de ellas) pueden girar hacia cualquiera de los dos sentidos (figuras 3.24a y 3.24b).

En consecuencia, cualquier punto del acoplador puede seguir dos direcciones distintas (marcadas a trazos en la figura 3.22), lo que implica la existencia de un punto doble o de bifurcación en su trayectoria (punto *T* de la figura 3.22).

Hay que indicar que el plegamiento de barras es un signo habitual en las posiciones de indeterminación de los mecanismos. Sin embargo, no es una condición necesaria, como puede verse en el mecanismo de 1 gdl representado en la figura 3.25. En ella se muestra la posición de indeterminación (figura 3.25a) y sus dos posibilidades de movimiento (figuras 3.25b y 3.25c).

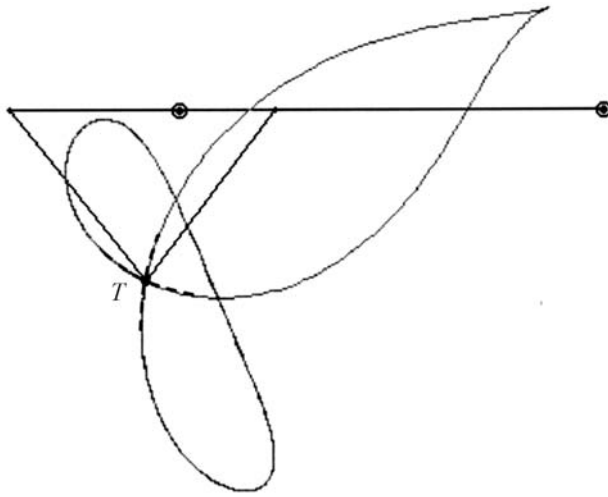


FIGURA 3.22. Posición de indeterminación.

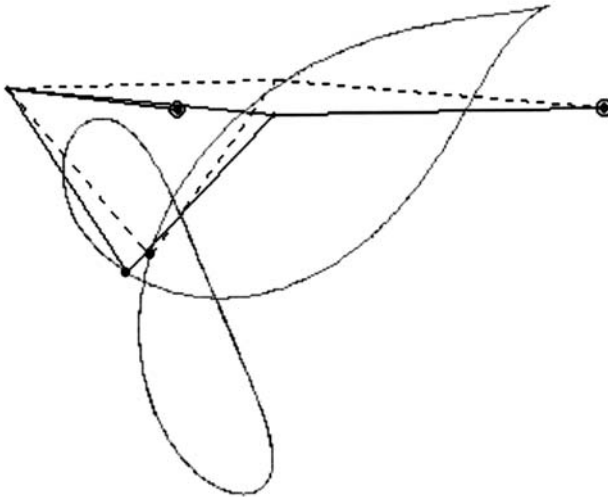


FIGURA 3.23. Convergencia de las configuraciones abierta y cruzada hacia la posición de indeterminación.

Un caso particular de mecanismo de transición es el anteriormente citado paralelogramo articulado, el cual posee dos posiciones de indeterminación. En la figura 3.26 se representa la trayectoria de un mecanismo de este tipo. Mientras las barras se mantienen paralelas, el punto de acoplador traza una circunferencia; cuando éste alcanza las posiciones C_1 o C_2 , el cuadrilátero se encuentra en una posición de indeterminación a partir de la cual, las barras pueden cambiar de configuración dejando de ser paralelas e iniciando el trazado del otro circuito. Así,

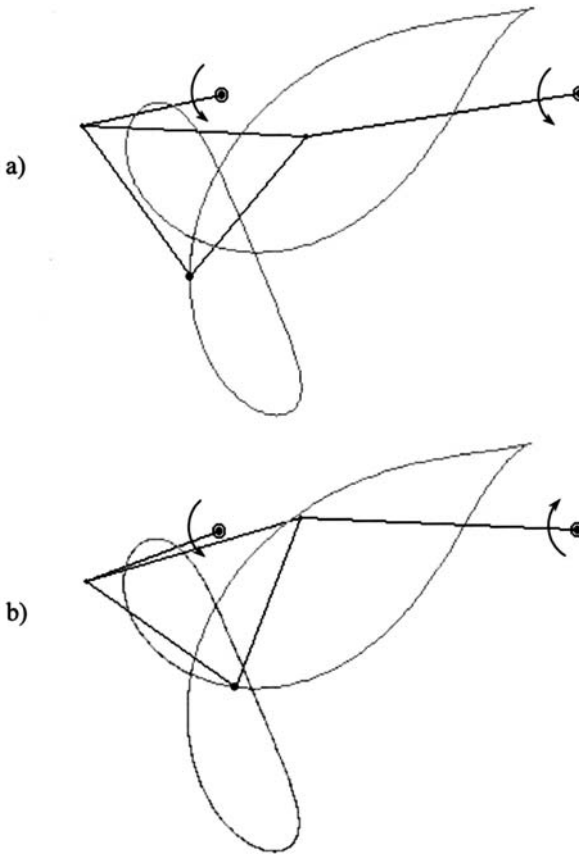


FIGURA 3.24. Posibilidades de movimiento a partir de la posición de indeterminación.

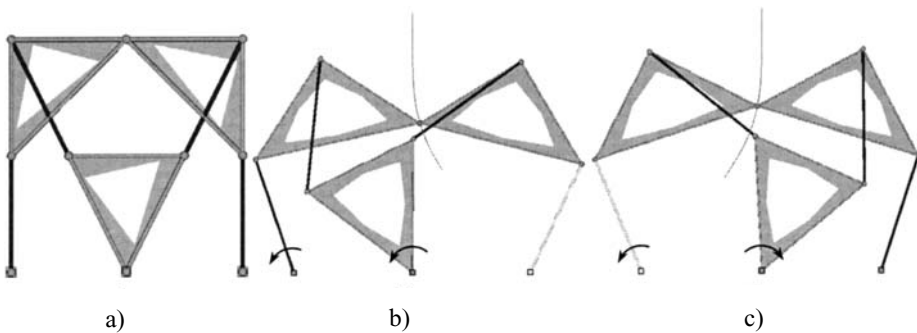


FIGURA 3.25. Posición de indeterminación y bifurcación.

la trayectoria completa es una circunferencia más un circuito que se cruza en el punto doble E ; ambos circuitos se cortan, a su vez, en cuatro puntos: C_1 , C_2 , F y G . De los cinco puntos dobles resultantes, dos son debidos a posiciones de indeterminación (Hernández, 1994).

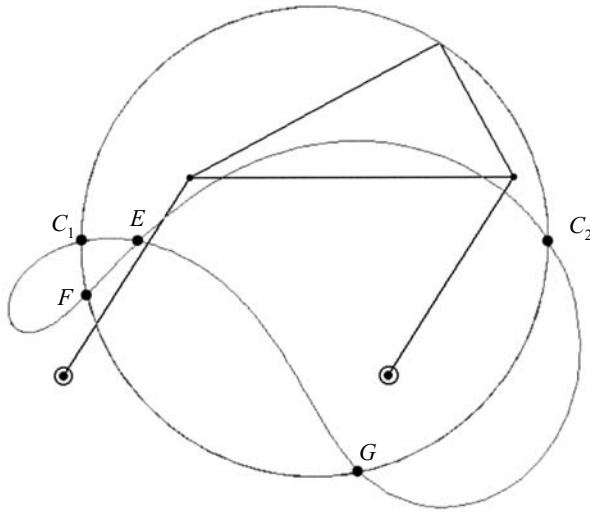


FIGURA 3.26. Trayectoria de un punto de acoplador de un paralelogramo articulado.

El paralelogramo articulado es un mecanismo de gran aplicación en la industria. Puede utilizarse en sus dos configuraciones posibles: paralelogramo y antiparalelogramo. En la configuración paralelogramo, las barras del mecanismo se mantienen permanentemente paralelas dos a dos. Para mantener esta configuración existen varias alternativas: una de ellas consiste en articular acopladores adicionales (figuras 3.27a y 3.27b), otra constituyendo un cuadrilátero adicional (figura 3.27c).

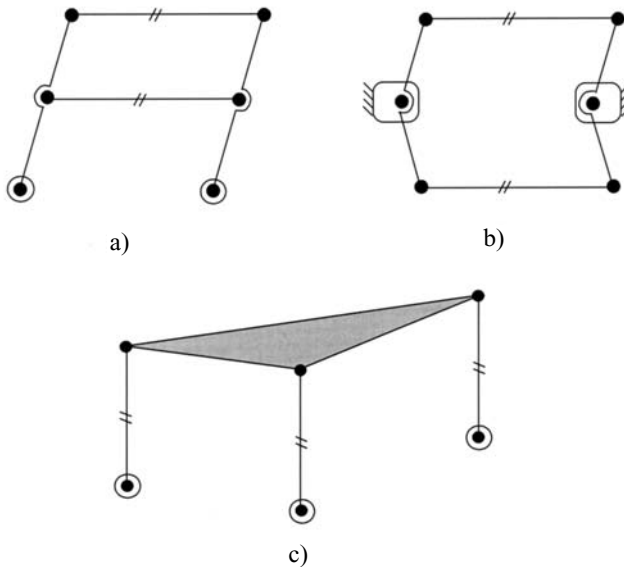


FIGURA 3.27. Mecanismos en configuración paralelogramo permanente.

Una disposición constructiva para mantener de forma continua la configuración antiparalelogramo sería la siguiente (figura 3.28):

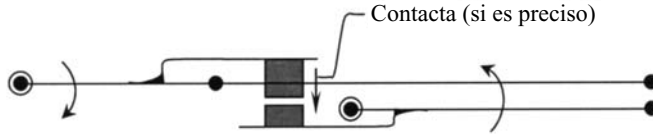


FIGURA 3.28. Disposición para mantener la configuración antiparalelogramo.

Ejemplo de aplicación 3.1. Sea un cuadrilátero articulado de transición A_0ABB_0 que se encuentra en una posición en que todas sus barras están alineadas (figura 3.29). Como se sabe, ésta es una posición de indeterminación en la que el mecanismo adquiere 1 gdl extra. Obtener algebraicamente los CIR del acoplador en dicha posición para las dos posibilidades de movimiento.

Conocidas las direcciones de las velocidades de los puntos A y B del acoplador, el CIR en dicha posición (punto P) se encuentra en la línea de las articulaciones fijas. Considérese situado a una distancia x (desconocida) del punto A . Este problema se puede abordar aplicando al acoplador AB las tres siguientes construcciones gráficas (figura 3.29):

1. El triángulo formado por los vértices P (CIR), A y el extremo de la velocidad de A , y el formado por los vértices P , B y el extremo de la velocidad de B , son semejantes:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{x}{c-x}$$

2. El teorema de Hartmann al punto A :

$$\frac{V_A}{u'} = \frac{a}{x-a}$$

3. El teorema de Hartmann al punto B :

$$\frac{V_B}{u'} = \frac{b}{c-x+b}$$

De estas tres ecuaciones se obtiene la siguiente:

$$(a-b)x^2 - 2acx + ac(b+c) = 0$$

Aplicando la anterior ecuación al mecanismo de dimensiones $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ y $d = 3$, resultan los dos valores siguientes: $x_1 = 2(-1 + \sqrt{3})$, y $x_2 = -2(1 + \sqrt{3})$. La primera

solución es un valor positivo y se corresponde con la disposición de la figura 3.29. La segunda solución es un valor negativo, por lo que el CIR P se encontrará a la izquierda de A (figura 3.30).

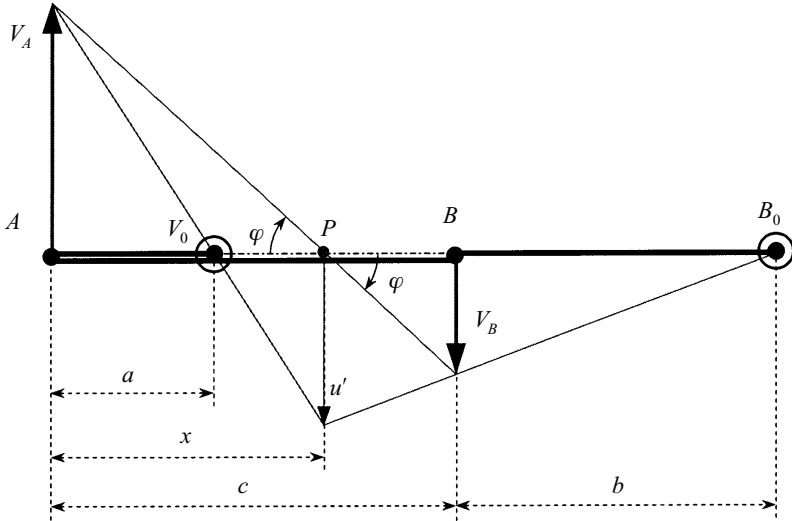


FIGURA 3.29. Planteamiento del CIR en un mecanismo de transición.

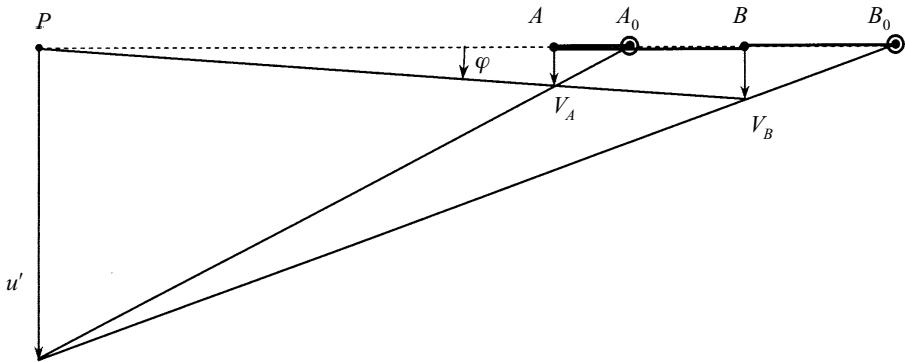


FIGURA 3.30. Segundo CIR.

Otra forma de resolver este problema consiste en aplicar la ecuación de Euler-Savary en su forma [2.60] a los puntos A y B . De esta manera se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$\overline{PA}^2 = \overline{A_0A} \cdot \overline{W_A A}$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{B_0B} \cdot \overline{W_B B}$$

Téngase en cuenta, además, que $W_A \equiv W_{B'}$, ya que las normales a los puntos A y B son coincidentes.

3.3.3. Puntos muertos

Considérese el mecanismo de la figura 3.31, en el cual la barra de longitud b es, en este caso, el elemento de entrada. Durante el movimiento se alcanza la posición ($O_A A B O_B$), en la que las barras de longitudes a y c se alinean. En este instante, la barra b ya no puede seguir girando en el sentido en que lo estaba haciendo. Por esta razón, dicha posición es conocida como *posición de bloqueo*. El mecanismo ha llegado a una posición límite. Para que el movimiento continúe hay que cambiar el elemento de entrada, por ejemplo, a la barra de longitud a . Así, la barra de longitud b inicia su movimiento pero retrocediendo por el mismo camino. Puede verse que cuando la entrada viene dada por la barra a , la barra b alcanza su posición límite en dicha posición de alineamiento; por eso, también se la conoce como *posición de punto muerto*. Finalmente, dicha posición límite es conocida también como *configuración estacionaria* (Hunt, 1978), debido a que la variable posicional de la barra b alcanza un valor estacionario (máximo o mínimo) a lo largo del movimiento.

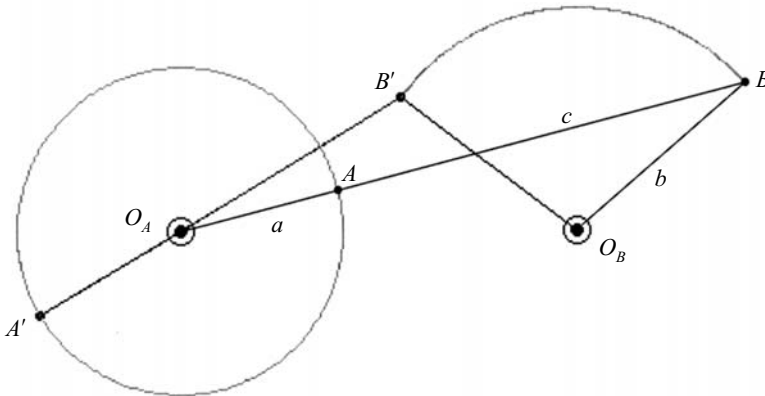


FIGURA 3.31. Puntos muertos de un mecanismo de manivela (a)-balancín (b).

A lo largo de un ciclo de movimiento de este cuadrilátero manivela (a)-balancín (b) pueden observarse dos puntos muertos: $O_A A B O_B$ (con las barras a y c desplegadas) y $O_A A' B' O_B$ (con las barras a y c plegadas).

Por otro lado, si se considera el movimiento continuo del mecanismo cuando la manivela a es conductora con una velocidad angular ω_a finita, se observa que en las posiciones de punto muerto la velocidad angular de la barra b , ω_b , es nula. En efecto, es fácil comprobar que B y B' son los correspondientes CIR del plano acoplador en dichas posiciones. Por ello, en las inmediaciones del punto muerto la relación de velocidades ω_a/ω_b aumenta

notablemente. Así, un mecanismo puede funcionar como amplificador de velocidades, de desplazamientos o, incluso, de esfuerzos (como se verá más adelante) en las cercanías de los puntos muertos.

Si el mecanismo fuera de doble balancín, tendría un total de cuatro puntos muertos (figuras 3.32a, 3.32b, 3.32c y 3.32d), mientras que si fuera de doble manivela no tendría ninguno. En este último caso no existen posiciones límite del movimiento (figura 3.10).

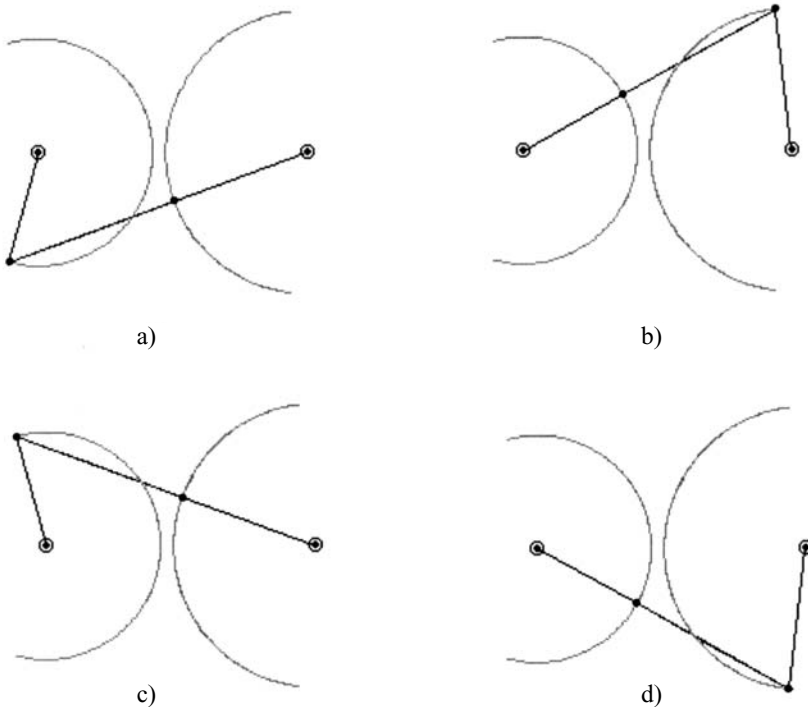


FIGURA 3.32. Puntos muertos en un mecanismo de doble balancín.

Estas posiciones son fáciles de analizar en un cuadrilátero articulado. Sin embargo, no son exclusivas del mismo, sino que pueden aparecer en cualquier mecanismo. Además, aunque el alineamiento de barras es habitual en dichas posiciones, tampoco es una condición necesaria. En efecto, considérese el mecanismo de la figura 3.33 en una posición para la cual se representa su campo de velocidades nodales. Dicha posición es de bloqueo cuando se pretende accionar el mecanismo mediante la barra 2. Esto es debido a que el CIR de 5, P_{15} , coincide con la articulación que une los elementos 2 y 5, por lo cual el elemento 2 tiene dos puntos con velocidad nula: P_{15} y P_{12} . Desde un punto de vista físico, la fuerza que la barra 5 transmite al elemento 6 es perpendicular a la velocidad de la articulación P_{56} . Para evitar el bloqueo habría que cambiar la entrada a la barra 3 o a la barra 4.

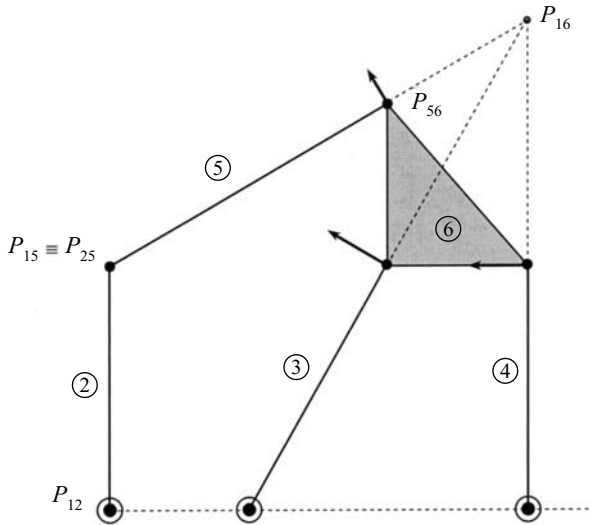


FIGURA 3.33. Posición de bloqueo.

Ejemplo de aplicación 3.2. Se desea accionar el paralelogramo articulado A_0ABB_0 mediante un motor de rotación continua situado en E_0 , de manera que la barra A_0A oscile entre θ_1 y θ_2 . Calcular las dimensiones de la diada E_0ED para que se verifique dicha condición.

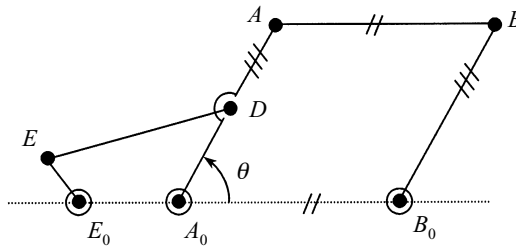


FIGURA 3.34. Datos del problema: $\theta_1 = 60^\circ$, $\theta_2 = 120^\circ$, $E_0A_0 = 4$ cm y $A_0D = 3$ cm.

Las posiciones límite de la barra A_0D vienen dadas por los puntos muertos del cuadrilátero E_0EDA_0 (figura 3.35). Como la barra $E_0E = a$ debe ser manivela, dichas posiciones serán:

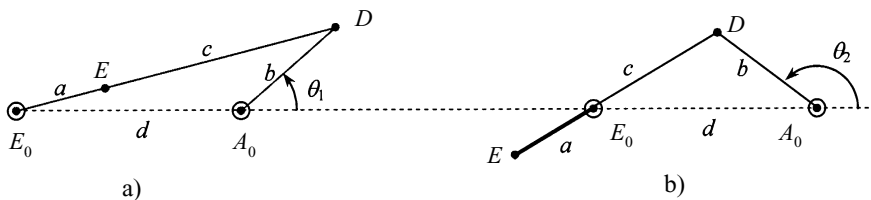


FIGURA 3.35. Posiciones límite.

Por tanto, se considerará al cuadrilátero RRRP como un cuadrilátero RRRR en el que dos de sus lados (l_1 y l_4) tienen longitud infinita. La excentricidad e del mecanismo RRRP vale:

$$e = l_1 - l_4 \quad [3.2]$$

Entonces el criterio de Grashof puede ser escrito ahora:

$$l_{\min} + l_1^\infty < l' + l_4^\infty \quad [3.3]$$

Teniendo en cuenta [3.2],

$$l_{\min} + e < l' \quad [3.4]$$

donde l_{\min} es la longitud de la barra que puede dar vueltas completas.

2. *Mecanismos RRPP.* En este caso, la degeneración del cuadrilátero RRRR lleva a dos de los cuatro pares al infinito. Consecuentemente, tres de las cuatro barras tienen longitud infinita y sólo el lado entre pares R del mecanismo RRPP tiene longitud finita (figura 3.37a). Por tanto, este mecanismo siempre cumple la ley de Grashof y el elemento situado entre pares R dará vueltas completas respecto a todas las demás. Otra forma de verlo queda indicada en la figura 3.37b mediante una serie de posiciones sucesivas de la barra AB .

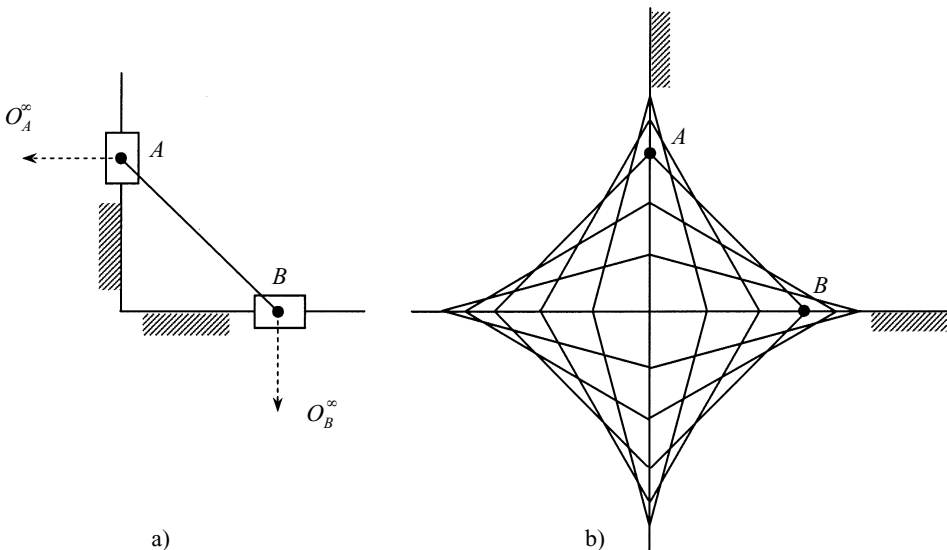


FIGURA 3.37. Mecanismo RRPP.

3. *Mecanismos RPRP*. En este caso todas las barras tienen longitud infinita, por tanto, ninguna barra puede dar vueltas respecto de las demás. Esto puede comprobarse por simple inspección en cada mecanismo concreto de este tipo.

3.4. Ángulo de transmisión

Hasta ahora se ha estudiado el rango de movimientos de los elementos de un mecanismo; se está en condiciones de detectar las manivelas y balancines de mecanismos sencillos, así como sus posiciones límite. Sin embargo, todavía no se dispone de un indicador que mida la calidad en la transmisión de movimientos entre los distintos elementos de un mecanismo. Dicho indicador sería enormemente útil durante el proceso de diseño.

En efecto, considérese las tres situaciones (a, b y c) de la figura 3.38; ¿en cuál de ellas es más propicia la transmisión de movimiento?

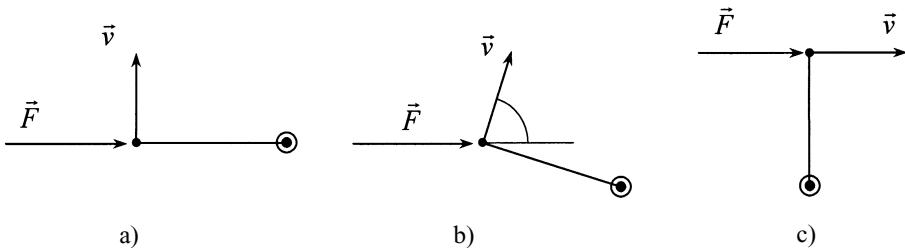


FIGURA 3.38. Posiciones en la transmisión del movimiento.

Obviamente, en la posición de la figura 3.38c, ya que la fuerza se proyecta plenamente sobre la dirección del movimiento. La transmisión de movimiento según la figura 3.38b también es posible, aunque menos eficaz que la anterior. Por último, la transmisión según la figura 3.38a no es posible.

La transmisión de movimiento en un mecanismo tiene que ver con la transmisión de fuerzas entre sus distintos elementos. La fuerza (o momento) resultante en el elemento de salida depende tanto de la geometría del mecanismo y de la fuerza (o momento) en el elemento de entrada, como de las restantes fuerzas (estáticas y dinámicas) aplicadas y de las fuerzas de inercia. No obstante, para conocer de forma aproximada como es la transmisión de fuerza y movimiento en operaciones a baja velocidad, puede utilizarse una simplificación que se concreta en un indicador muy útil denominado *ángulo de desviación* (δ). Se define éste como el ángulo menor entre la dirección de la fuerza estática aplicada entre el elemento transmisor y el de salida, y la velocidad absoluta del elemento de salida en el punto de conexión con el elemento transmisor.

Considérese un cuadrilátero articulado en una posición dada, como el de la figura 3.39. Defínase, a continuación, las barras conductora (E), transmisora (T) y conducida (S); en la hipótesis de que no haya fuerzas exteriores aplicadas en la barra 3, y las fuerzas de inercia y de rozamiento en las rótulas sean despreciables, la fuerza F_{34} tendrá la dirección de las

articulaciones AB . Es decir, las fuerzas actuantes en el elemento transmisor serán dos fuerzas colineales, iguales y opuestas. Por tanto, el ángulo de desviación será:

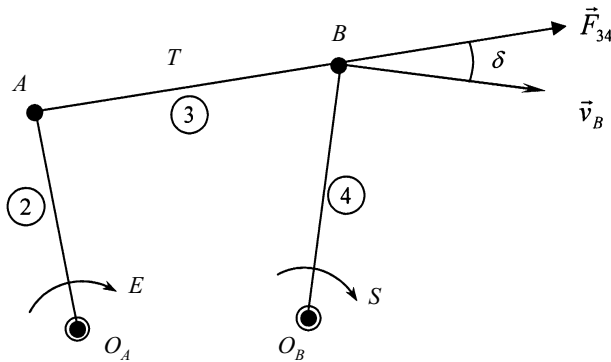


FIGURA 3.39. Ángulo de desviación.

Otro indicador equivalente al anterior para medir la calidad en la transmisión del movimiento, todavía mucho más utilizado, es el denominado *ángulo de transmisión* μ . Se define éste como el menor ángulo entre el vector diferencia de velocidades de los puntos de conexión de la barra transmisor con las barras conductora y conducida, y la dirección de la velocidad absoluta de la barra de salida; ambos vectores tomados en el punto de transmisión. Para la posición del cuadrilátero articulado de la figura 3.40 se ha representado el ángulo de transmisión.

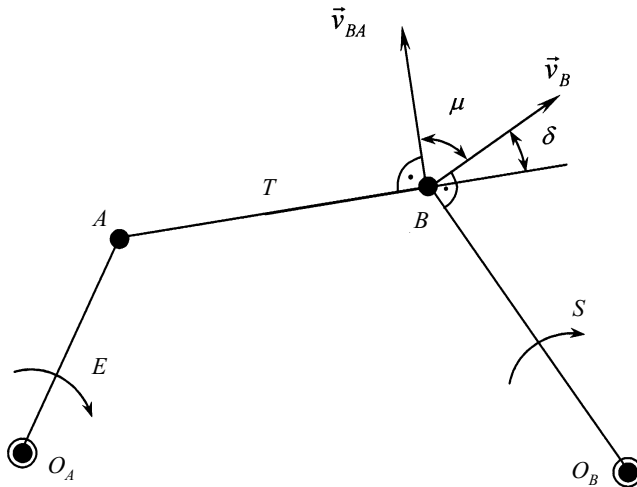


FIGURA 3.40. Ángulo de transmisión.

De la figura anterior se desprende que:

$$\delta + \mu = 90^\circ$$

[3.5]

Otros ejemplos de ángulos de transmisión son (figura 3.41):

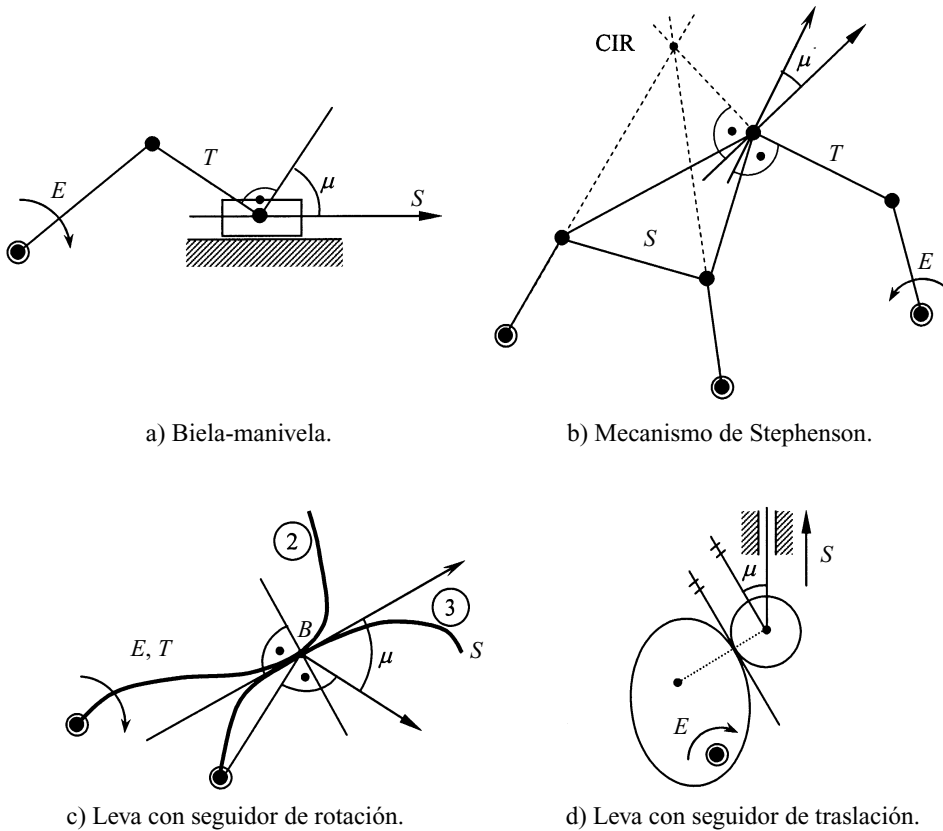


FIGURA 3.41. Ángulos de transmisión en otros mecanismos.

En el caso de la figura 3.41c sólo hay elemento de entrada y elemento de salida. Puede sustituirse la diferencia de velocidades entre los puntos A y B del elemento de transmisión por la diferencia de velocidades entre los puntos de contacto: $\vec{v}_{B_3} - \vec{v}_{B_2}$, que es la velocidad de deslizamiento entre los perfiles.

El valor más favorable del ángulo de transmisión es 90° . Por el contrario, el más desfavorable es 0° , que es el que hace imposible el movimiento, y que corresponde a una posición de bloqueo. Se recomienda al lector que compruebe este hecho con algunas de las posiciones de bloqueo anteriormente mostradas, como es el caso de la figura 3.33. Cuando se obtienen valores de μ superiores a 90° , se suele trabajar con sus ángulos complementarios; por ejemplo, 105° y 75° son ángulos de transmisión equivalentes.

Durante el movimiento de un mecanismo, el ángulo de transmisión varía. En la figura 3.42 se representa la evolución del ángulo de transmisión del cuadrilátero articulado de la mis-

ma figura, a lo largo de un ciclo completo de movimiento. Desde el punto de vista del diseñador, una regla general consiste en evitar mecanismos que alcancen ángulos de transmisión menores que 30° o 45° , dependiendo del tipo de aplicación. Valores pequeños de μ pueden provocar acciones de bloqueo, que la influencia de las holguras sea más significativa y, en definitiva, que la transmisión de la fuerza sea menos efectiva.

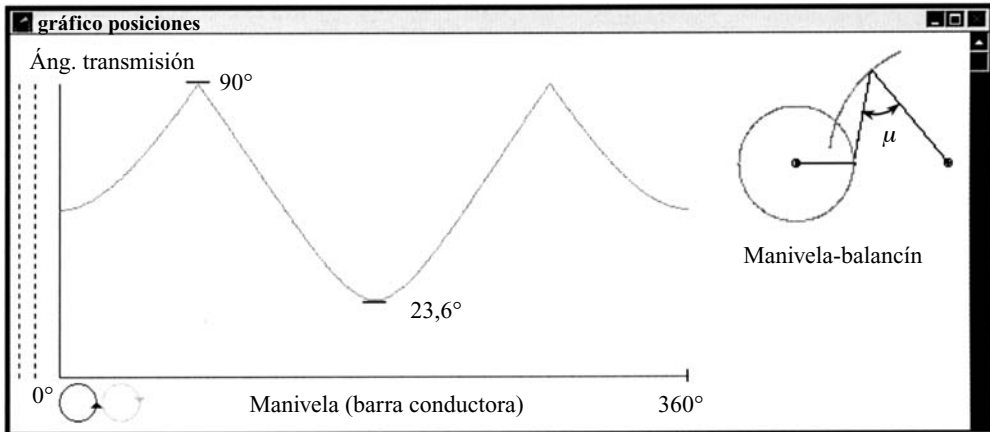


FIGURA 3.42. Ángulo de transmisión.

Finalmente, en los mecanismos de leva suele utilizarse el concepto de *ángulo de presión* para medir la calidad en la transmisión de esfuerzos entre leva y seguidor. Dicho concepto es equivalente al ángulo de desviación.

Ejemplo de aplicación 3.3. Obtener los valores máximo y mínimo del ángulo de transmisión en un cuadrilátero articulado (figura 3.43).

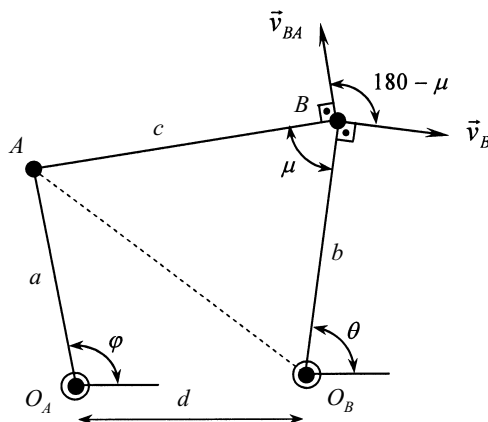


FIGURA 3.43. Ángulo de transmisión.

Las dos expresiones del segmento AO_B llevan a la ecuación:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi = b^2 + c^2 - 2bc \cos \mu$$

Hallando los valores estacionarios del ángulo de transmisión ($\frac{d\mu}{d\varphi} = 0$) resulta:

$$\frac{2ad \operatorname{sen} \varphi}{2bc \operatorname{sen} \mu} = 0$$

Por tanto, siempre que μ sea distinto de 0° o 180° , la solución será: $\operatorname{sen} \varphi = 0$. Es decir, $\varphi = 0^\circ$ y $\varphi = 180^\circ$. La representación gráfica de estas soluciones es (figura 3.44):

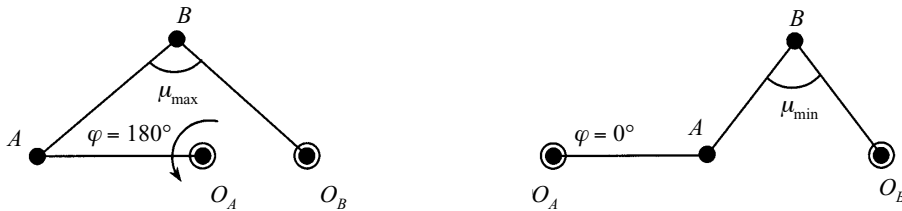


FIGURA 3.44. Representación gráfica de la solución.

Las soluciones μ_{\min} y μ_{\max} definen el rango de variación del ángulo de transmisión para un ciclo completo del movimiento del mecanismo. Por tanto, se está en condiciones de decir si la transmisión de movimiento es admisible o no.

El hecho anterior de descartar como posible solución los valores de $\mu = 0^\circ$ y $\mu = 180^\circ$ ha llevado a obtener una manivela en la barra $O_A A$. Obsérvese que las dos posiciones de la figura 3.44 representan las condiciones para que la barra $O_A A$ dé vueltas completas. En caso de no haber descartado esta solución, pueden darse dos situaciones. Una primera en que la barra $O_A A$ sea balancín, con lo que los valores de $\mu = 0^\circ$ y $\mu = 180^\circ$ serían entonces posiciones de punto muerto (figuras 3.8b y 3.8d). Otra en que la barra $O_A A$ sea manivela, con lo que los valores de $\mu = 0^\circ$ y $\mu = 180^\circ$ serían entonces posiciones de indeterminación.

3.5. Ventaja mecánica

Otro indicador de la calidad de un mecanismo es su capacidad para transmitir fuerzas y momentos. Más concretamente, ¿cómo se puede determinar la relación entre la fuerza aplicada al elemento de entrada y la obtenida en el de salida?

Si se supone que el mecanismo es un sistema conservativo (no hay pérdida de energía por rozamientos) y que el efecto de las fuerzas de inercia es despreciable, entonces la potencia de entrada es igual a la de salida (figura 3.45).

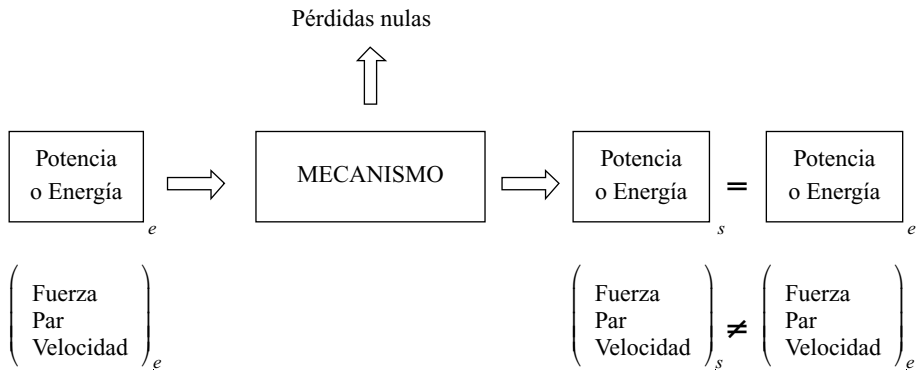


FIGURA 3.45. Esquema de la transmisión de potencia, fuerza y velocidad en un mecanismo.

En la figura 3.46 se representan las principales relaciones entre potencia, fuerza, momento y velocidad:

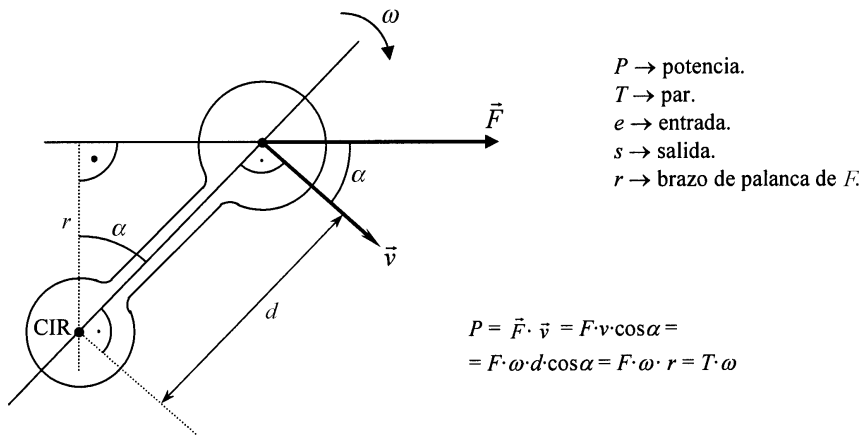


FIGURA 3.46. Nomenclatura relativa al elemento de un mecanismo.

Por tanto, la condición de igualdad de potencias a la entrada y a la salida puede expresarse de la siguiente manera:

$$P_e = T_e \cdot \omega_e = T_s \cdot \omega_s = P_s \quad [3.6]$$

$$P_e = F_e \cdot v_e = F_s \cdot v_s = P_s \quad [3.7]$$

Se define *ventaja mecánica*, al cociente entre los módulos de la fuerza de salida y de la fuerza de entrada:

$$VM = \frac{F_s}{F_e} \quad [3.8]$$

Teniendo en cuenta que $T_e = F_e \cdot r_e$ y $T_s = F_s \cdot r_s$, donde r_e y r_s son los brazos de palanca de las fuerzas, y que $v_e = \omega_e \cdot r_e$ y $v_s = \omega_s \cdot r_s$, se verificará:

$$VM = \frac{T_s}{r_s} \cdot \frac{r_e}{T_e} \rightarrow VM = \left(\frac{T_s}{T_e}\right) \left(\frac{r_e}{r_s}\right) \tag{3.9}$$

o bien,

$$VM = \left(\frac{\omega_e}{\omega_s}\right) \left(\frac{r_e}{r_s}\right) \tag{3.10}$$

De esta ecuación se observa que la ventaja mecánica depende del producto de dos factores:

1. El inverso de la relación de transmisión.
2. Cociente de los brazos de palanca de las fuerzas de entrada y salida.

Puesto que la relación de transmisión puede ser expresada enteramente en términos de distancias (basado en la posición del CIR del movimiento relativo entre los elementos de entrada y salida), la ventaja mecánica puede ser expresada enteramente en términos de cocientes de distancias. Por tanto, puede concluirse que es una característica puramente geométrica.

Por último, hay que indicar que la ecuación [3.10] puede obtenerse, igualmente, utilizando los principios de la estática.

Ejemplo de aplicación 3.4. Obténgase el factor de multiplicación de una fuerza F_e sobre la pared mediante la utilización del siguiente mecanismo.

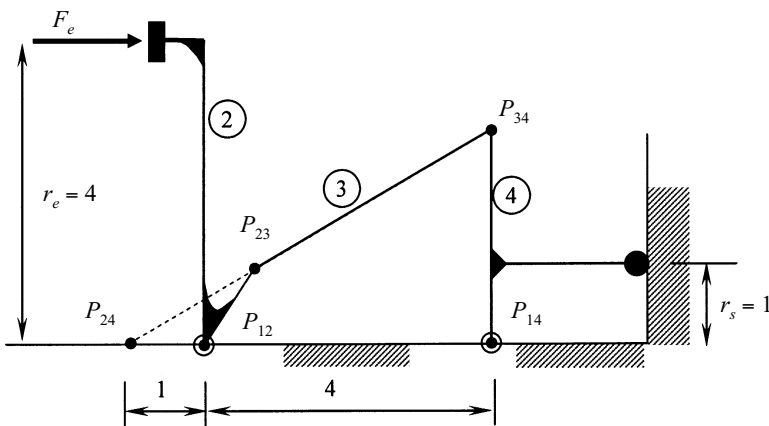


FIGURA 3.47. Ejemplo de ventaja mecánica.

El inverso de la relación de transmisión se obtiene a partir de la ecuación:

$$v_{P_{24}} = \omega_e \cdot \overline{P_{12}P_{24}} = \omega_s \cdot \overline{P_{14}P_{24}} \Rightarrow \frac{\omega_e}{\omega_s} = \frac{\overline{P_{14}P_{24}}}{\overline{P_{12}P_{24}}}$$

Por tanto, la ventaja mecánica puede expresarse de la siguiente manera:

$$VM = \frac{\overline{P_{14}P_{24}}}{\overline{P_{12}P_{24}}} \cdot \frac{r_e}{r_s}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior los datos numéricos del mecanismo resulta:

$$VM = \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{1} = 20 \Rightarrow F_s = 20 F_e$$

Obsérvese que cuando $\overline{P_{12}P_{24}} \rightarrow 0$, $VM \rightarrow \infty$. Precisamente, esta situación se da en los puntos muertos del mecanismo. En este caso concreto, cuando P_{12} , P_{23} , y P_{34} están alineados.

3.6. Métodos gráficos para el cálculo de velocidades y aceleraciones

3.6.1. Método de Hall y Ault o del punto auxiliar

Hasta aquí, los problemas de velocidades y aceleraciones se han venido resolviendo mediante el planteamiento de los campos de velocidades y aceleraciones, el método de las velocidades relativas, y, en ocasiones utilizando el concepto de centro instantáneo de rotación. Sin embargo, hay mecanismos en los cuales resulta difícil determinar los polos de velocidades, y los métodos citados no son suficientes. El método de Hall y Ault, también denominado método del punto auxiliar, resuelve alguno de estos mecanismos. El quid de este método estriba en la elección de un punto de un elemento del mecanismo que permite plantear una ecuación vectorial de velocidad y otra de aceleración resueltas gráficamente.

Considérese el elemento flotante ternario i de una parte de un mecanismo (figura 3.48), así como los elementos j , k y l que se articulan en él. En esta figura se supone que los pares en Q , R y S son exclusivamente de rotación. También, se consideran conocidas las velocidades y aceleraciones absolutas de los puntos A , B y C , pertenecientes a los elementos j , k y l , respectivamente.

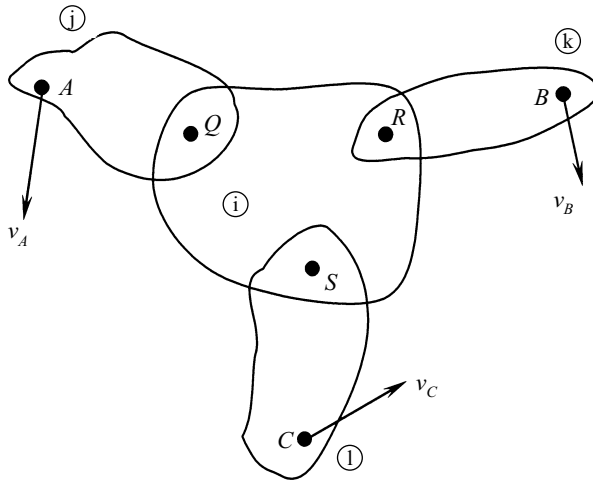


FIGURA 3.48. Elemento genérico *i*, ternario.

Las ecuaciones de velocidad que resuelven esta parte del mecanismo son:

$$\begin{matrix} ? & M & ? \\ v_Q = v_Q + v_{QA} & & \\ ? & D & \perp QA \end{matrix} \quad [3.11]$$

$$\begin{matrix} ? & M & ? & ? & \omega_i \overline{RQ} \\ v_R = v_B + v_{RB} = v_Q + v_{RQ} & & & & \\ ? & D & \perp RB & ? & \perp RQ \end{matrix} \quad [3.12]$$

$$\begin{matrix} ? & M & ? & ? & \omega_i \overline{SQ} \\ v_S = v_C + v_{SC} = v_Q + v_{SQ} & & & & \\ ? & D & \perp SC & ? & \perp SQ \end{matrix} \quad [3.13]$$

donde *M* y *D* representan un módulo y una dirección conocidos.

Las ecuaciones [3.11], [3.12] y [3.13] constituyen un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas: $\vec{v}_Q, \vec{v}_R, \vec{v}_S, \omega_i, \omega_j, \omega_l$ y ω_k . Dicho sistema no se puede resolver gráficamente. Por ello, se va a determinar un punto auxiliar del elemento *i*, X_i , tal que se encuentre en la intersección de las líneas *AQ* y *BR* (figura 3.49). La velocidad de este punto en función de las velocidades de *Q* y *R* puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} ? & ? & ? \\ v_{X_i} = v_Q + v_{X_i Q} & & \\ ? & ? & \perp QX_i \end{matrix} \quad [3.14]$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 ? & ? & ? & & & & \\
 v_{X_i} = v_R + v_{X_i,R} & & & & & & \\
 ? & ? & \perp RX_i & & & &
 \end{array} \tag{3.15}$$

Expresando las velocidades de Q y R en función de las velocidades de los puntos A y B , respectivamente, resultará:

$$\begin{array}{cccccccc}
 ? & ? & ? & M & ? & ? & M & ? \\
 v_{X_i} = v_Q + v_{X_i,Q} = v_A + v_{QA} + v_{X_i,Q} = v_A + (v_{QA} + v_{X_i,Q}) & & & & & & & \\
 ? & ? & \perp QX_i & D & \perp QA & \perp QX_i & D & \perp QA
 \end{array} \tag{3.16}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 ? & ? & ? & M & ? & ? & M & ? \\
 v_{X_i} = v_R + v_{X_i,R} = v_B + v_{RB} + v_{X_i,R} = v_B + (v_{RB} + v_{X_i,R}) & & & & & & & \\
 ? & ? & \perp RX_i & D & \perp RB & \perp RX_i & D & \perp RB
 \end{array} \tag{3.17}$$

Los términos entre paréntesis de la ecuación [3.16] tienen la misma dirección, por lo que pueden agruparse en una única incógnita. De la misma manera puede razonarse con los términos de la ecuación [3.17]. Así, los sistemas [3.16] y [3.17] pueden resolverse gráficamente obteniendo: v_{X_i} , $(v_{QA} + v_{X_i,Q})$ y $(v_{RB} + v_{X_i,R})$. Sin embargo, a partir de las incógnitas agrupadas $(v_{QA} + v_{X_i,Q})$ no se pueden obtener sus componentes v_{QA} y $v_{X_i,Q}$, dado que QA y X_iQ tienen la misma dirección. Por análogas razones, tampoco se pueden obtener v_{RB} y $v_{X_i,R}$.

En resumen, la base del método del punto auxiliar consiste en localizar el punto X_i (perteneciente al plano i), de forma que coincidan las direcciones QA y QX_i , además de las direcciones RB y RX_i . Por consiguiente, el punto X_i , se encontrará en la intersección de las rectas QA y RB (figura 3.49).

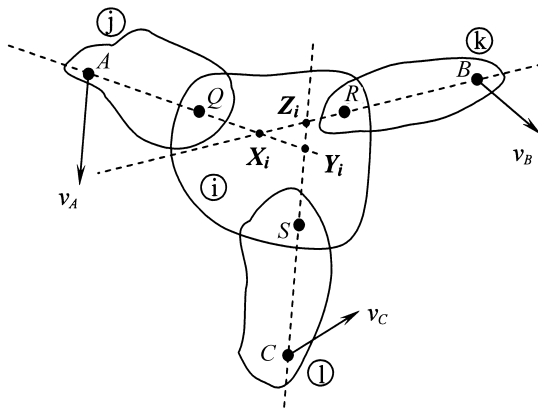


FIGURA 3.49. Determinación de los puntos auxiliares.

De la misma forma que se han planteando las ecuaciones a partir de los puntos Q y R , se pueden plantear a partir de los puntos Q y S o R y S , hallándose los puntos auxiliares Y_i y Z_i , respectivamente (figura 3.49).

Igualando [3.16] y [3.17] se obtiene la velocidad del punto auxiliar X_i (figura 3.50).

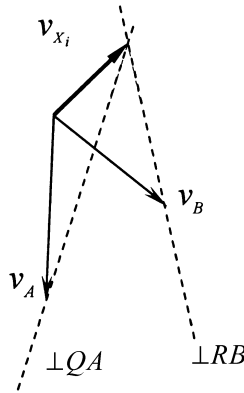


FIGURA 3.50. Resolución gráfica de la velocidad del punto auxiliar.

Para determinar las restantes incógnitas del problema ($\omega_i, \omega_j, \omega_l$ y ω_k), es necesario establecer una nueva ecuación de velocidades que relacione X_i con otro punto del plano i de manera que no coincidan las direcciones de las incógnitas. Por esta razón, la aplicación del método del punto auxiliar exige que el elemento i sea por lo menos ternario. De esta forma, se puede escribir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 ? & M & ? & M & ? & & \\
 v_S = v_{X_i} + v_{SX_i} = v_C + v_{SC} & & & & & & [3.18] \\
 ? & D & \perp SX_i & D & \perp SC & &
 \end{array}$$

Obteniéndose v_{SX_i}, v_{SC} y, por tanto, v_S . Dividiendo v_{SX_i} entre SX_i se obtiene la velocidad angular del elemento i, ω_i . Volviendo a las ecuaciones [3.16] y [3.17] se resuelve el problema de las velocidades en su totalidad.

Del mismo modo que se ha resuelto el problema de velocidades, se puede resolver el problema de aceleraciones, utilizando el mismo punto auxiliar. Se recuerda que las componentes normales de las aceleraciones están todas determinadas una vez resuelto el problema de velocidades. Por tanto, sólo quedan por determinar las componentes tangenciales, las cuales tienen la misma dirección que las velocidades. Esto explica la similitud en la resolución de los problemas de velocidades y aceleraciones mediante el método del punto auxiliar. Las ecuaciones de aceleraciones correspondientes a las ecuaciones [3.16] y [3.17] de velocidades son:

$$\begin{array}{ccccccc}
 ? & ? & ? & M & \omega_j^2 \cdot \overline{QA} & ? & \omega_j^2 \cdot \overline{X_iQ} \\
 a_{X_i} = a_Q + a_{X_iQ} = a_A + a_{QA}^N + (a_{QA}^T + a_{X_iQ}^T) + a_{X_iQ}^N & & & & & & \\
 ? & ? & ? & D & //RB & \perp QA & //X_iQ
 \end{array} \quad [3.19]$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 ? & ? & ? & M & \omega_k^2 \cdot \overline{RB} & ? & \omega_k^2 \cdot \overline{X_iR} \\
 a_{X_i} = a_R + a_{X_iR} = a_B + a_{RB}^N + (a_{RB}^T + a_{X_iR}^T) + a_{X_iR}^N & & & & & & \\
 ? & ? & ? & D & //RB & \perp RB & //X_iR
 \end{array} \quad [3.20]$$

Iguando [3.19] y [3.20] se obtiene únicamente la aceleración del punto auxiliar a_{X_i} . A continuación, se plantea la ecuación de aceleraciones entre el punto auxiliar X_i y el par cinemático del elemento i , todavía no utilizado:

$$\begin{array}{cccccccc}
 ? & M & ? & M & \omega_i^2 \cdot \overline{SX_i} & ? & M & ? & M & \omega_i^2 \cdot \overline{SC} & ? \\
 a_S = a_{X_i} + a_{SX_i} = a_{X_i} + a_{SX_i}^N + a_{SX_i}^T = a_C + a_{SC} = a_C + a_{SC}^N + a_{SC}^T & & & & & & & & & & \\
 ? & D & ? & D & //SX_i & \perp SX_i & D & ? & D & //SC & \perp SC
 \end{array} \quad [3.21]$$

De la ecuación anterior se obtienen α_i , α_j y \vec{a}_S ; volviendo a las ecuaciones [3.19] y [3.20] se llega a α_j y α_k .

Hasta aquí se ha considerado un mecanismo constituido exclusivamente por pares de rotación. Sin embargo, el desarrollo del método del punto auxiliar también se aplica a mecanismos que incluyen pares prismáticos.

Sea la parte de un mecanismo (figura 3.51) cuyos elementos se conectan mediante pares de rotación y un par prismático S que se desliza sobre la guía ED .

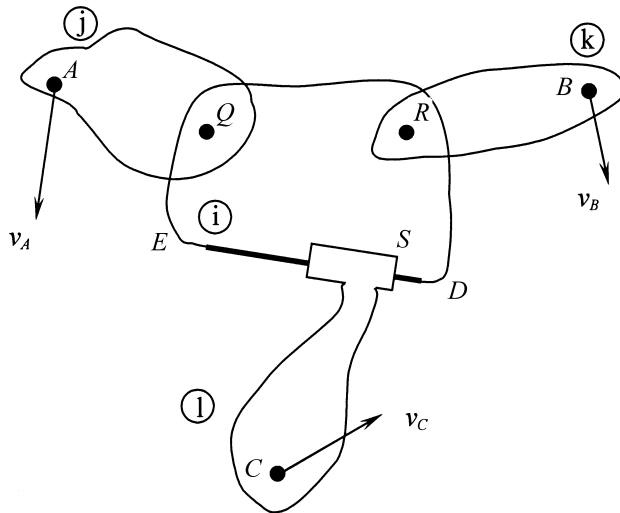


FIGURA 3.51. Método del punto auxiliar con pares prismáticos.

En este caso, el punto auxiliar X_i debe de situarse sobre la línea que pasando por C es perpendicular a ED (figura 3.52):

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 ? & ? & ? & ? & ? & M & ? & ? & M & & ? \\
 v_{X_i} = v_a^l + v_r^l = v_{X_i} + v_r^l = v_C + v_{iC} + v_r^l = v_C + (v_{X_iC} + v_r^l) & & [3.22] \\
 ? & ? & //ED & ? & ? & D & \perp CX & //ED & D & & //ED
 \end{array}$$

De esta forma, como X_iC es perpendicular a la guía ED , los términos incógnita v_{X_iC} y v_r^l pueden agruparse en una única incógnita cuya dirección será paralela a ED .

Formalmente, se debe de definir un sistema móvil S_i , solidario al elemento l , con su origen en el punto C de velocidad conocida. La velocidad angular de este sistema coincide con la del elemento i .

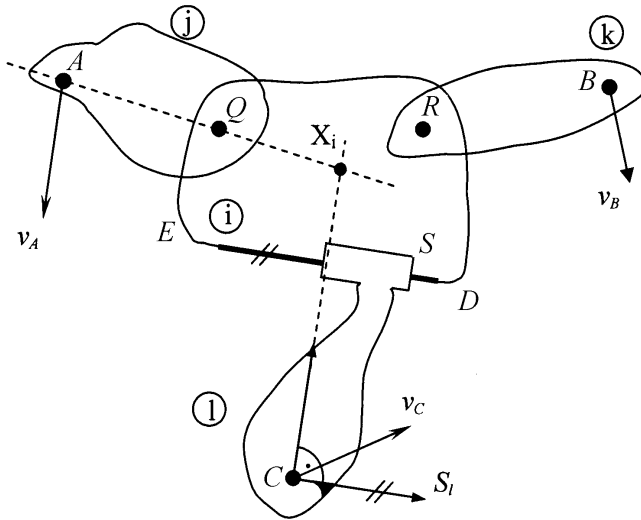


FIGURA 3.52. Determinación del punto auxiliar con pares prismáticos.

Para obtener v_{X_i} puede igualarse la ecuación [3.22] con, por ejemplo, la ecuación [3.16], quedando el sistema:

$$\begin{array}{cccc}
 ? & M & \left(\begin{array}{cc} ? & ? \\ v_{QA} & v_{X_iQ} \end{array} \right) & = v_C + \left(\begin{array}{cc} ? & ? \\ v_{X_iC} & v_r^l \end{array} \right) \\
 ? & D & \left(\begin{array}{cc} \perp QA & \perp QA \end{array} \right) & \quad \quad \quad \left(\begin{array}{cc} //ED & //ED \end{array} \right)
 \end{array} \quad [3.23]$$

Gráficamente (figura 3.53), se obtiene:

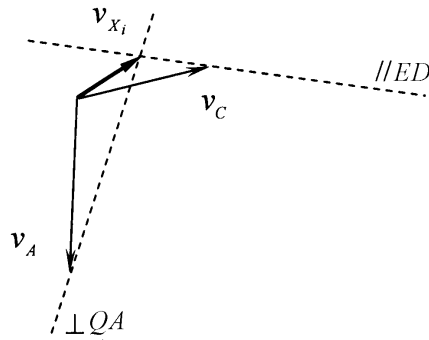


FIGURA 3.53. Resolución gráfica de la velocidad del punto auxiliar.

Planteando ahora la velocidad del par no utilizado del elemento i a partir de la velocidad del punto auxiliar, de un lado, y de la velocidad de B , de otro, se obtendrá la velocidad angular del elemento i :

$$\begin{array}{ccccccc}
 ? & M & ? & M & ? & & \\
 v_R = v_{X_i} + v_{RX_i} = v_B + v_{RB} & & & & & & [3.24] \\
 ? & D & \perp RX & D & \perp RB & &
 \end{array}$$

Para aceleraciones se procede de la misma manera, sin más que añadir la componente de la aceleración de Coriolis en el planteamiento del movimiento relativo entre los elementos i y l . Las ecuaciones resultantes son las siguientes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 ? & ? & ? & M & \omega_j^2 \cdot \overline{QA} & ? & \omega_i^2 \cdot \overline{XQ} \\
 a_{X_i} = a_Q + a_{X_iQ} = a_A + a_{QA}^N + (a_{QA}^T + a_{X_iQ}^T) + a_{X_iQ}^N & & & & & & [3.25] \\
 ? & ? & ? & D & //QA & \perp QA & //XQ
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 ? & ? & ? & 2\omega_l \cdot v_r^l & M & \omega_1^2 \cdot \overline{XC} & ? & ? & 2\omega_l \cdot v_r^l \\
 a_{X_i} = a_a^l + a_r^l + a_{cor}^l = a_C + a_{XC}^N + (a_{XC}^T + a_r^l) + a_{cor}^l & & & & & & & & [3.26] \\
 ? & ? & //ED & \perp ED & D & //XC & //ED & //ED & \perp ED
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 ? & M & \omega_i^2 \cdot \overline{QX} & ? & M & \omega_i^2 \cdot \overline{RB} & ? \\
 a_R = a_{X_i} + a_{RX_i}^N + a_{RX_i}^T = a_B + a_{RB}^N + a_{RB}^T & & & & & & [3.27] \\
 ? & D & //RX & \perp RX & D & //RB & \perp RB
 \end{array}$$

Ejemplo de aplicación 3.5. Determinar las velocidades y aceleraciones de todos los puntos del mecanismo en la posición siguiente (figura 3.54):

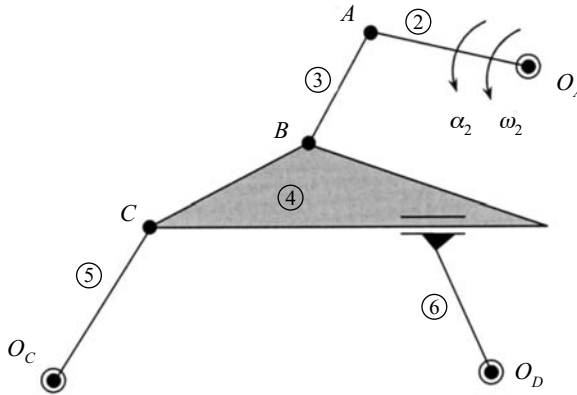


FIGURA 3.54. Mecanismo del ejemplo de aplicación 3.5.

Aplicando la fórmula de Grübler para mecanismos planos, se determina el número de grados de libertad del mecanismo: $G = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$.

Puesto que este problema no puede ser resuelto mediante el método de velocidades relativas, se aplicará el método del punto auxiliar.

Se observa que B es el primer punto de velocidad desconocida ya que:

$$\begin{array}{ccccc}
 ? & \omega_2 \cdot \overline{OA} & ? & & \\
 v_B = & v_A & + & v_{BA} & \\
 ? & \perp OA & & \perp AB &
 \end{array} \quad [3.28]$$

A partir de B se conecta el elemento ternario 4 que posee un punto C cuya velocidad es de dirección conocida: $\perp O_C C$.

$$\begin{array}{c}
 ? \\
 v_C \\
 \perp O_C C
 \end{array}$$

En la figura 3.55 se representan los puntos auxiliares pertenecientes al elemento ternario 4. Se elige, por ejemplo, el punto auxiliar Y_4 para resolver el problema. Las ecuaciones resultantes serán:

$$\begin{array}{cccc}
 ? & ? & ? & M \\
 v_{Y_4} = v_B + v_{Y_4 B} = v_A + \begin{pmatrix} v_{BA} + v_{Y_4 B} \\ \perp BA \quad \perp Y_4 B \end{pmatrix} & (\perp BA = \perp Y_4 B) & & \\
 ? & ? & \perp Y_4 B & D
 \end{array} \quad [3.29]$$

$$\begin{array}{cccc}
 ? & ? & ? & 0 \\
 v_{Y_4} = v_a^S + v_r^S = v_{O_D} + \begin{pmatrix} v_{Y_6 O_D} + v_r^S \\ \perp O_D Y_6 \quad // CD \end{pmatrix} & (\perp O_C Y_6 = // CD) & & \\
 ? & & &
 \end{array} \quad [3.30]$$

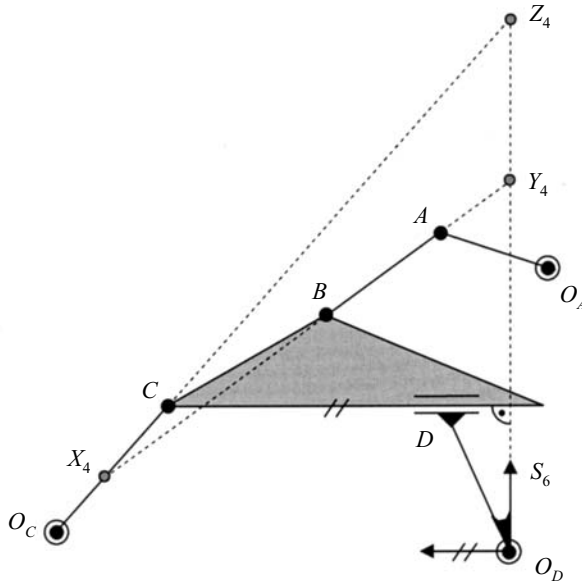


FIGURA 3.55. Determinación de los puntos auxiliares.

Igualando [3.29] y [3.30] se resuelve gráficamente la velocidad del punto auxiliar Y_4 . Sin embargo, al ser los demás vectores incógnitas colineales resulta imposible resolver completamente el problema. Por tanto, saliendo del elemento 4 por el tercer punto (C), se determina la velocidad angular de dicho elemento:

$$\begin{matrix} ? & M & ? \\ v_C & = v_{Y_4} + v_{CY_4} & (\text{dir. } O_C C \neq \text{dir. } CY_4) \\ \perp O_C D & D & \perp CY_4 \end{matrix} \quad [3.31]$$

$$\omega_4 = \frac{v_{CY_4}}{CY_4} \quad [3.32]$$

La velocidad angular del elemento 6 es la misma que la del elemento 4, ya que el movimiento relativo entre dichos elementos es únicamente de traslación.

Volviendo a las ecuaciones [3.29] y [3.30] con la velocidad angular del elemento 4 conocida, se hallan las restantes incógnitas y se resuelve así el problema de las velocidades.

Para aceleraciones el planteamiento es similar:

$$\begin{matrix} ? & ? & ? & \omega_2^2 \overline{O_A A} & \alpha_2 \overline{O_A A} & \omega_3^2 \overline{AB} & \left(\begin{matrix} ? & ? \\ \perp BA & \perp Y_4 B \end{matrix} \right) & \omega_4^2 \overline{YB} \\ a_{Y_4} = a_B + a_{Y_4 B} = & a_A^N & + & a_A^T & + & a_{BA}^N & + & \left(a_{BA}^T + a_{Y_4 B}^T \right) & + & a_{Y_4 B}^N \\ ? & ? & ? & // O_A A & \perp O_A A & // BA & & // Y_4 B \end{matrix} \quad [3.33]$$

$$\begin{matrix} ? \\ ? \end{matrix} a_{Y_4} = a_a^{S_6} + a_r^{S_6} + a_{cor}^{S_6} = \begin{matrix} \omega_6^2 \overline{O_D Y} \\ // O_D Y \end{matrix} a_{Y_6}^N + \begin{pmatrix} ? & ? \\ a_{Y_6 D}^T + a_r^{S_6} \\ // \perp O_D Y & // CD \end{pmatrix} + \begin{matrix} 2\omega_6 v_r^{S_6} \\ a_c^{S_6} \\ \perp CD \end{matrix} \quad [3.34]$$

Igualando [3.33] y [3.34] se halla la aceleración absoluta del punto auxiliar Y_6 . Ahora, para determinar la aceleración angular del sistema S_6 (que resulta ser también la aceleración angular del elemento 4), se utiliza el tercer punto del elemento ternario 4 (punto C).

$$\begin{matrix} ? \\ ? \end{matrix} a_C = \begin{matrix} \omega_5^2 \overline{O_C C} \\ // O_C C \end{matrix} a_C^N + \begin{matrix} ? \\ \perp O_C C \end{matrix} a_C^T = \begin{matrix} M \\ D \end{matrix} a_{Y_4} + \begin{matrix} ? \\ \perp CY_4 \end{matrix} a_{CY_4}^T + \begin{matrix} \omega_5^2 \overline{CY_4} \\ // CY_4 \end{matrix} a_{CY_4}^N \quad [3.35]$$

Una vez resuelta esta ecuación, las aceleraciones angulares de los elementos 4 y 5 se obtienen a partir de:

$$\alpha_4 = \frac{a_{CY_4}^T}{CY_4} \quad [3.36]$$

$$\alpha_5 = \frac{a_C^T}{O_C C} \quad [3.37]$$

La aceleración angular del elemento 6 es igual a la aceleración angular del elemento 4. Con estos nuevos datos se vuelve a las ecuaciones [3.33] y [3.34] y se determinan así las incógnitas restantes, entre ellas, la aceleración angular del elemento 3.

3.6.2. Coeficientes de influencia

El concepto de coeficiente de influencia resulta básico para la explicación del método de Hirschhorn, que será expuesto en el siguiente epígrafe. También resulta de gran utilidad para los métodos analíticos de análisis cinemático que serán expuestos en la parte final de este capítulo.

Considérese un mecanismo plano de 1 gdl. La posición de cualquier punto o elemento del mecanismo es función de la variable φ que define la posición del elemento de entrada. Dicha variable es la coordenada generalizada del sistema.

A partir de la figura 3.56 se deduce:

$$\varphi_j = f_j(\varphi) \quad [3.38]$$

$$S_K = \bar{f}_K(\varphi) \quad [3.39]$$

Donde φ_j es el ángulo de posición del elemento j y S_K la longitud recorrida por el punto K sobre su trayectoria. En general, las funciones f_j y \bar{f}_K serán no lineales respecto de la variable φ .

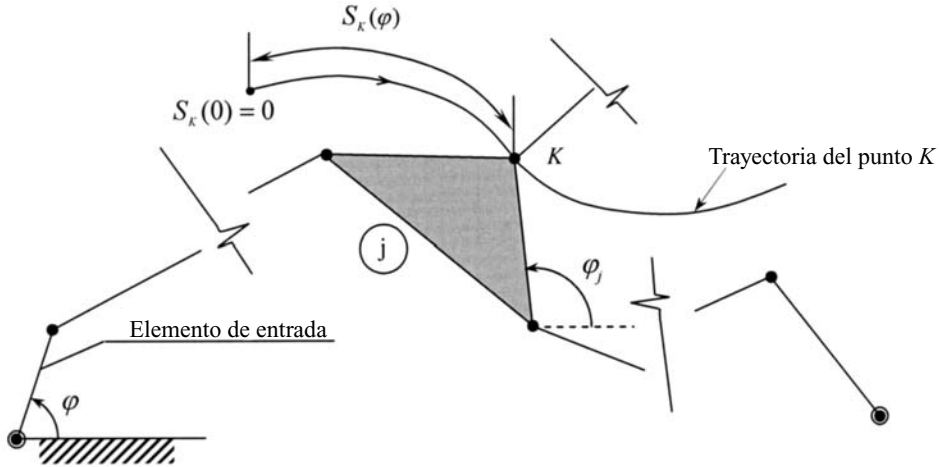


FIGURA 3.56. Coordenada generalizada φ en un mecanismo desmodrómico.

Derivando respecto del tiempo las expresiones anteriores resulta:

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \frac{df_j}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \tag{3.40}$$

$$\frac{dS_K}{dt} = \frac{d\bar{f}_K}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \tag{3.41}$$

donde $\frac{d\varphi}{dt}$ es la velocidad angular ω del elemento de entrada.

Las expresiones [3.40] y [3.41] pueden expresarse también:

$$\omega_j = g_j \cdot \omega \tag{3.42}$$

$$v_K = \bar{g}_K \cdot \omega \tag{3.43}$$

donde g_j y \bar{g}_K son dos funciones que dependen exclusivamente de la coordenada generalizada φ , denominadas coeficientes de influencia de velocidad:

$$g_j(\varphi) = \frac{df_j}{d\varphi} \tag{3.44}$$

$$\bar{g}_K(\varphi) = \frac{d\bar{f}_K}{d\varphi} \quad [3.45]$$

Para una posición determinada del mecanismo, φ adquiere un valor concreto y las funciones g_j y \bar{g}_K toman valores fijos, convirtiéndose en constantes. Así, de acuerdo con las relaciones [3.42] y [3.43], la velocidad angular de un elemento cualquiera j , o la velocidad lineal de un punto K mantienen una relación de proporcionalidad con la velocidad ω del elemento de entrada. En el caso de que φ sea un ángulo, el coeficiente g_j es adimensional, mientras que \bar{g}_K tiene dimensión de longitud.

Derivando de nuevo las ecuaciones [3.42] y [3.43] respecto del tiempo, resulta:

$$\alpha_j = \frac{dg_j}{d\varphi} \cdot \omega^2 + g_j \cdot \alpha \quad [3.46]$$

$$a_K^t = \frac{d\bar{g}_K}{d\varphi} \cdot \omega^2 + \bar{g}_K \cdot \alpha \quad [3.47]$$

Estas ecuaciones pueden expresarse también:

$$\alpha_j = h_j \cdot \omega^2 + g_j \cdot \alpha \quad [3.48]$$

$$a_K^t = \bar{h}_K \cdot \omega^2 + \bar{g}_K \cdot \alpha \quad [3.49]$$

donde:

$$h_j = \frac{dg_j}{d\varphi} \quad [3.50]$$

$$\bar{h}_K = \frac{d\bar{g}_K}{d\varphi} \quad [3.51]$$

Son dos funciones que dependen exclusivamente de la coordenada generalizada φ , las cuales se denominan coeficientes de influencia de aceleración. Como anteriormente, si φ es una magnitud angular, h_j es adimensional y \bar{h}_K es una longitud. Se observa cómo para aceleraciones no se verifica la proporcionalidad que se daba en velocidades.

3.6.3. Método de Hirschhorn

El método de Hirschhorn, también conocido como método de las aceleraciones normales o método de cambio de entrada, sólo es aplicable a mecanismos desmodrómicos. Se

basa en que la aceleración normal absoluta de un punto de un mecanismo desmodrómico es independiente de la aceleración angular del elemento de entrada. El método posee dos fases relativamente diferenciadas: una correspondiente al cálculo de velocidades y otra al cálculo de aceleraciones.

En el apartado anterior, se demostró que la relación entre la velocidad de entrada de un mecanismo de un grado de libertad y la velocidad de salida del mismo depende únicamente de la variable que define la posición del elemento de entrada (ecuaciones [3.42] y [3.43]). Por tanto, para una posición dada, la relación entrada/salida es constante.

La idea del método de Hirschhorn consiste en realizar un cambio del elemento de entrada, de manera que ahora, con el nuevo elemento de entrada, las velocidades y aceleraciones puedan ser calculadas.

En síntesis, los pasos que sigue el método son los siguientes:

1. Se elige un nuevo elemento de entrada j con el que pueda resolverse el mecanismo (figura 3.57), y se le aplica una velocidad de entrada supuesta $\tilde{\omega}_j$ (o \tilde{v}_j si el elemento se traslada).

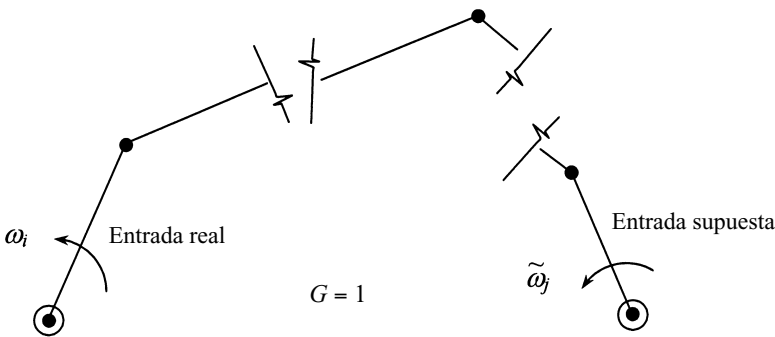


FIGURA 3.57. Método de Hirschhorn para velocidades.

2. Se realiza el análisis completo con la entrada supuesta $\tilde{\omega}_j$, obteniendo valores ficticios de velocidades que se indicarán con el símbolo ($\tilde{\quad}$). Se obtienen, así, todas las velocidades angulares $\tilde{\omega}_{elem}$ y todas las velocidades lineales \tilde{v}_{punto} . Y, en concreto, se obtiene la velocidad angular (o lineal) ficticia del elemento de entrada original $\tilde{\omega}_i$ (o \tilde{v}_i), lo cual permite obtener el factor de escala E entre el campo de velocidades reales y el campo de velocidades ficticias:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\omega}_j = cte \cdot \tilde{\omega}_i \\ \omega_j = cte \cdot \omega_i \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\omega_j}{\tilde{\omega}_j} = \frac{\omega_i}{\tilde{\omega}_i} = E \rightarrow \omega_j = E \cdot \tilde{\omega}_j \quad [3.52]$$

De esta forma, el verdadero campo de velocidades se obtiene a partir de

$$\forall \text{ punto } P, \quad v_P = E \cdot \tilde{v}_P \quad [3.53]$$

$$\forall \text{ elemento}, \quad \omega_{elem} = E \cdot \tilde{\omega}_{elem} \quad [3.54]$$

3. Se inicia el cálculo de aceleraciones con la entrada real hasta llegar a un punto en el que no sea posible progresar. De esta forma, la aceleración de dicho punto queda a falta de conocer una de sus componentes. A continuación, se plantea la aceleración del punto en cuestión como descomposición en una aceleración normal absoluta y una aceleración tangencial absoluta:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_p^n + \vec{a}_p^t \quad [3.55]$$

De esta ecuación se conocen las direcciones de $\vec{a}_p^n (\perp v_p)$ y de $\vec{a}_p^t (// v_p)$.

4. En este paso se tratará de obtener el módulo de \vec{a}_p^n . Para ello, se realiza de nuevo un cambio de entrada (el mismo que se utilizó en velocidades). Puesto que ahora se conocen las velocidades reales, se tomarán como datos de la nueva entrada (figura 3.58): la velocidad real ω_j (o v_j en su caso) y una aceleración ficticia $\tilde{\alpha}_j$ (o \tilde{a}_j en su caso).

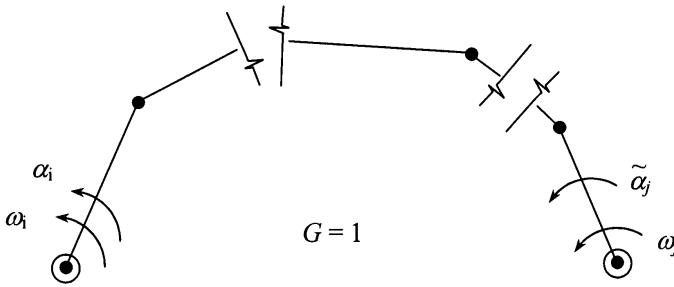


FIGURA 3.58. Método de Hirschhorn para aceleraciones.

Una vez resuelto el problema de aceleraciones, se utiliza la propiedad ya indicada de que la aceleración normal absoluta de un punto de un mecanismo desmódrómico es independiente de la aceleración del elemento de entrada (figura 3.59).

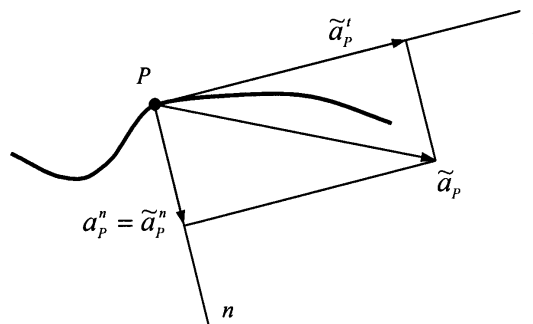


FIGURA 3.59. Composición de aceleraciones.

5. Se vuelve al punto 3, continuando con la resolución del problema con la entrada original ω_i (o v_i) y α_i (o a_i); sin embargo, ahora se dispone de una ecuación adicional:

$$a_p = a_p^n + a_p^t, \text{ que permitirá resolver el problema.}$$

$\perp v_p \quad // v_p$

Ejemplo de aplicación 3.6. Determinar las velocidades y aceleraciones de todos los puntos del mecanismo en la posición siguiente (figura 3.60):

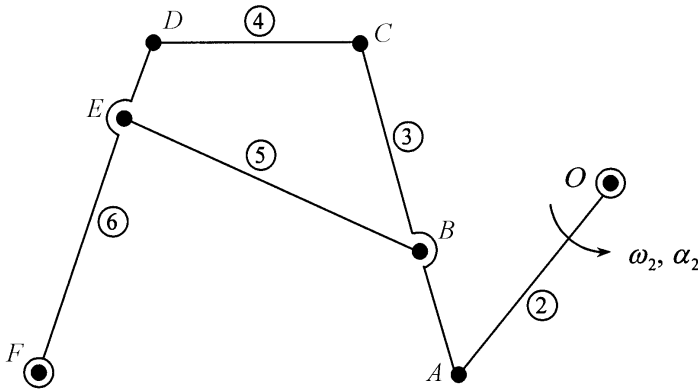


FIGURA 3.60. Mecanismo del ejemplo de aplicación 3.6.

Se podría pensar en plantear un punto auxiliar en el elemento 4 o en el 5, pero no es posible ya que son elementos binarios. Por tanto, se procede a realizar un cambio de entrada al elemento 6 (figura 3.61):

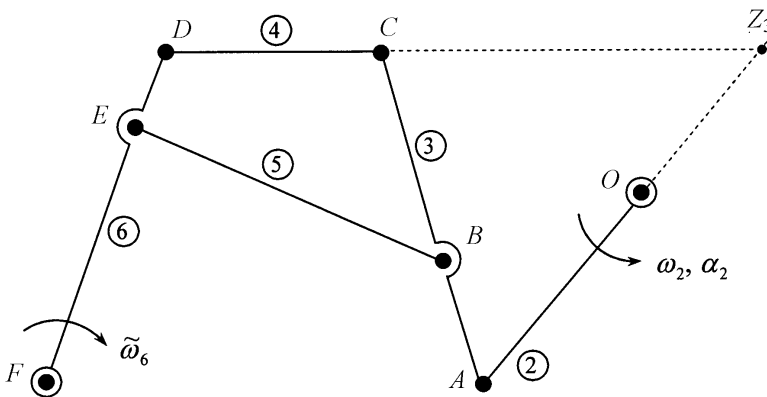


FIGURA 3.61. Cambio de entrada al elemento 6.

Se plantea un punto auxiliar Z_3 :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_{Z_3} &= \tilde{v}_D + \left(\begin{array}{cc} ? & ? \\ \perp FD & \perp CD \end{array} \right) \\ \tilde{v}_{Z_3} &= \left(\begin{array}{cc} ? & ? \\ \perp OA & \perp Z_3A \end{array} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{v}_{Z_3} \quad [3.56]$$

$$\tilde{v}_B = \tilde{v}_E + \tilde{v}_{BE} = \tilde{v}_{Z_3} + \tilde{v}_{BZ_3} \Rightarrow \tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_5, \tilde{v}_B \quad [3.57]$$

Volviendo a C ,

$$\tilde{v}_C = \tilde{v}_D + \tilde{v}_{CD} = \tilde{v}_{Z_3} + \tilde{v}_{CZ_3} \Rightarrow \tilde{\omega}_4, \tilde{v}_C \quad [3.58]$$

Planteando la velocidad de A ,

$$\tilde{v}_A = \tilde{v}_D + \tilde{v}_{AD} \Rightarrow \tilde{\omega}_2, \tilde{v}_A \quad [3.59]$$

Ahora se calcula el factor de escala E (con su correspondiente signo):

$$E = \frac{\omega_2}{\tilde{\omega}_2} \quad [3.60]$$

A continuación, se calculan las velocidades angulares reales de todas las barras así como las velocidades reales de todas las articulaciones,

$$\omega_i = E \cdot \tilde{\omega}_i \text{ y } v_i = E \cdot \tilde{v}_i \quad [3.61]$$

Para el cálculo de aceleraciones se comienza por el elemento de entrada real hasta llegar a un punto en que no se pueda progresar más; punto B en este caso:

$$a_B = a_A + a_{BA}^N + a_{BA}^T = a_B^N + a_B^T \quad [3.62]$$

Si se conociera el radio de curvatura de la trayectoria de B , ρ_B , se podría resolver esta ecuación y, por tanto, el problema. Sin embargo, el radio de curvatura será, en general, desconocido. Por ello, se proseguirá según este método. Como a_B^n sólo depende de la distribución de velocidades verdaderas, se toma como elemento de entrada el elemento 6 con datos, ω_6 y $\tilde{\alpha}_6$, y se sigue resolviendo:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_{Z_3} &= \tilde{a}_D^t + a_D^n + a_{CD}^n + a_{Z_3C}^n + \begin{pmatrix} ? & ? \\ \tilde{a}_{CD}^T & \tilde{a}_{Z_3C}^T \\ \perp DC & \perp DC \end{pmatrix} \\ \tilde{a}_{Z_3} &= a_A^n + a_{Z_3A}^n + \begin{pmatrix} ? & ? \\ \tilde{a}_A^t & \tilde{a}_{Z_3A}^T \\ \perp OA & \perp OA \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{a}_{Z_3} \quad [3.63]$$

$$\tilde{a}_B = \tilde{a}_E^t + \tilde{a}_E^n + \tilde{a}_{BE}^n + \tilde{a}_{BE}^T = \tilde{a}_{Z_3} + \tilde{a}_{BZ_3}^n + \tilde{a}_{BZ_3}^T \Rightarrow \tilde{a}_B \quad [3.64]$$

Una vez obtenida la aceleración ficticia del punto B , ésta se descompone en sus componentes normal y tangencial (figura 3.62).

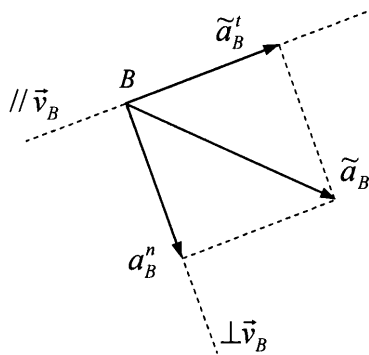


FIGURA 3.62. Componentes de aceleración.

Al haberse utilizado un campo real de velocidades, la componente normal de la aceleración de B es verdadera. Éste es el único dato que se utiliza de todos los hallados mediante el cambio de entrada. A continuación se introduce su valor en la ecuación [3.62] obteniendo las aceleraciones reales α_3 y \vec{a}_B . A partir de estos valores, el problema de aceleraciones ya puede ser resuelto fácilmente, aplicando las ecuaciones del campo de aceleraciones.

3.7. Métodos analíticos

Los métodos analíticos realizan el planteamiento, manipulación y resolución de las ecuaciones que definen la posición, velocidad y derivadas sucesivas de los elementos y puntos de interés de un mecanismo, para unos valores determinados de la variable de entrada y de sus derivadas. No obstante, hay que indicar que el calificativo de analítico dado a estos métodos hace referencia exclusiva al planteamiento y no a la resolución. De hecho, cuando el mecanismo alcanza un determinado nivel de complejidad, el método de resolución es siempre numérico, tal y como se indicó en el subapartado 3.2.1.

Los métodos analíticos multiplican su utilidad cuando se utilizan en conjunción con un computador. Una vez resuelto un mecanismo analíticamente, la programación en computador es directa. Así, la realización de análisis repetitivos es una tarea que se realiza con gran rapidez, lo cual es muy útil para el cálculo del mecanismo en posiciones sucesivas.

En ocasiones, es preferible trabajar con los coeficientes de influencia; particularmente, si el análisis cinemático se utiliza como base para el cálculo dinámico. Por ello, en este apartado se ofrecerá también una alternativa que contemple este enfoque.

El desarrollo de este apartado se iniciará con el análisis de mecanismos de 1 gdl con uno y dos lazos para finalizar con mecanismos de varios gdl con múltiples lazos.

3.7.1. Mecanismos de un lazo

Dada la sencillez del planteamiento analítico en estos mecanismos, no hay mejor enfoque que la explicación del procedimiento sobre un mecanismo concreto.

Sea el mecanismo de 1 gdl de la figura 3.63:

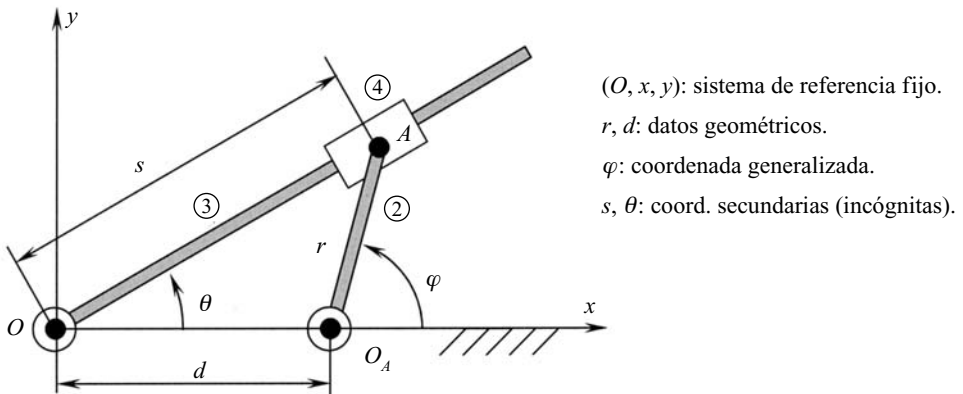


FIGURA 3.63. Cuadrilátero RRRP.

Se ha adoptado un sistema de referencia fijo (O, x, y); en general, el origen de coordenadas suele hacerse coincidir con alguna de las articulaciones fijas. A continuación, se elige

el gdl de entrada del mecanismo: es la coordenada generalizada. El resto de las variables son las incógnitas del problema, también denominadas coordenadas secundarias. Dentro de ellas cabe distinguir las variables pasivas y las variables de salida. Las primeras controlan la posición de las articulaciones intermedias que transmiten el movimiento. Las segundas controlan la posición de las articulaciones tomadas como salida útil del mecanismo.

El proceso de análisis cinemático es el siguiente:

1. *Problema de posición.* El mecanismo está constituido por un único lazo cuya ecuación de cierre viene representada gráfica y vectorialmente en la figura 3.64.

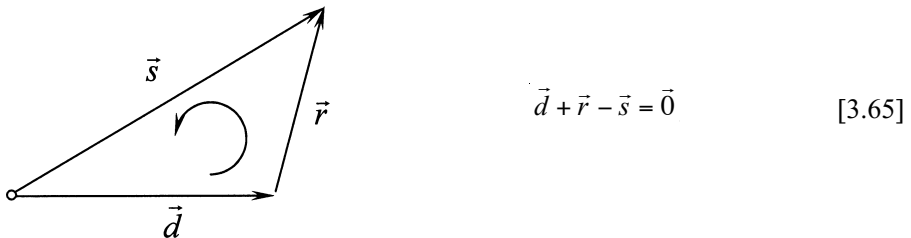


FIGURA 3.64. Ecuación de cierre.

La ecuación vectorial se desdobra en las dos siguientes ecuaciones escalares:

$$d + r \cos \varphi - s \cos \theta = 0 \quad [3.66]$$

$$r \operatorname{sen} \varphi - s \operatorname{sen} \theta = 0 \quad [3.67]$$

Las cuales constituyen un sistema *no lineal* de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se trata de expresar las coordenadas secundarias en función de la coordenada generalizada. Cuando el mecanismo es complejo, la resolución del sistema requiere un procedimiento numérico. Sin embargo, siempre hay que considerar la posibilidad de resolución analítica puesto que es mucho más sencilla; precisamente en este caso es factible.

En efecto, reorganizando las dos anteriores ecuaciones:

$$s \cos \theta = d + r \cos \varphi \quad [3.68]$$

$$s \operatorname{sen} \theta = r \operatorname{sen} \varphi \quad [3.69]$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$s^2 = d^2 + r^2 + 2dr \cos \varphi \quad [3.70]$$

Tomando el valor positivo de s y llevándolo a [3.68] y a [3.69] se obtiene:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{r}{s} \operatorname{sen} \varphi \quad [3.71]$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{d + r \operatorname{cos} \varphi}{s} \quad [3.72]$$

En la resolución de estas ecuaciones conviene utilizar la función arcotangente de doble argumento ($\operatorname{Atan2}[y, x] = \tan^{-1}[y/x]$; p. ej., $\operatorname{Atan2}[-1, -1] = 225^\circ$) para garantizar que, además de obtener todas las soluciones, éstas se encuentran correctamente situadas en su cuadrante. En este caso, el valor de θ sería:

$$\theta = \operatorname{Atan2}(r \operatorname{sen} \varphi, d + r \operatorname{cos} \varphi) \quad [3.73]$$

2. *Cálculo de velocidades.* Con el problema anterior resuelto, los datos de partida ahora son: d, r, φ, s, θ y $\dot{\varphi}$ (velocidad del elemento de entrada); y las nuevas incógnitas: $\dot{s}, \dot{\theta}$. Las ecuaciones de cierre en velocidades se obtienen al derivar respecto del tiempo las ecuaciones de posición:

$$-r\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi - \dot{s} \operatorname{cos} \theta + s\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta = 0 \quad [3.74]$$

$$r\dot{\varphi} \operatorname{cos} \varphi - \dot{s} \operatorname{sen} \theta - s\dot{\theta} \operatorname{cos} \theta = 0 \quad [3.75]$$

De hecho, a ellas también se llega planteando la velocidad del punto A directamente. Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede expresarse matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{cos} \theta & s \operatorname{sen} \theta & -r \operatorname{sen} \varphi \\ -\operatorname{sen} \theta & -s \operatorname{cos} \theta & r \operatorname{cos} \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [3.76]$$

Dejando las incógnitas a la izquierda,

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{cos} \theta & s \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & -s \operatorname{cos} \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \dot{\varphi} \begin{Bmatrix} r \operatorname{sen} \varphi \\ -r \operatorname{cos} \varphi \end{Bmatrix} \quad [3.77]$$

Que como puede observarse es un sistema *lineal* de ecuaciones algebraicas. Recuerde-se que ya al inicio de este capítulo se indicó que el problema de velocidades era lineal.

Aplicando la regla de Cramer resulta:

$$\dot{s} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{\varphi} r \operatorname{sen} \varphi & s \operatorname{sen} \theta \\ -\dot{\varphi} r \operatorname{cos} \varphi & -s \operatorname{cos} \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\operatorname{cos} \theta & s \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & -s \operatorname{cos} \theta \end{vmatrix}} = \dot{\varphi} r \operatorname{sen}(\theta - \varphi) \quad [3.78]$$

$$\dot{\theta} = \frac{\begin{vmatrix} -\cos \theta & \dot{\varphi} r \operatorname{sen} \varphi \\ -\operatorname{sen} \theta & -\dot{\varphi} r \cos \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\cos \theta & s \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & -s \cos \theta \end{vmatrix}} = \frac{\dot{\varphi} r}{s} \cos(\theta - \varphi) \quad [3.79]$$

Para un valor concreto de $\dot{\varphi}$, los correspondientes valores de \dot{s} y $\dot{\theta}$ son fácilmente calculables mediante las expresiones anteriores. Asimismo, de ellas pueden obtenerse los valores de los siguientes coeficientes de influencia:

$$\frac{\dot{s}}{\dot{\varphi}} = \frac{ds}{d\varphi} = r \operatorname{sen}(\theta - \varphi) = \bar{g}_s(\varphi) \quad [3.80]$$

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} = \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{r}{s} \cos(\theta - \varphi) = g_\theta(\varphi) \quad [3.81]$$

Obsérvese que en este apartado la notación de los coeficientes de influencia es ligeramente distinta a la adoptada en el punto 3.6.2. Aquí, por simplicidad, se adopta como subíndice del coeficiente de influencia a la propia variable que define la posición del elemento o del punto en cuestión.

El análisis de velocidades puede realizarse también de forma genérica a través de los coeficientes de influencia. De hecho, si en el sistema [3.77] se pasa $\dot{\varphi}$ al miembro de la izquierda resulta:

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta & s \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & -s \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{g}_s(\varphi) \\ g_\theta(\varphi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \operatorname{sen} \varphi \\ -r \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad [3.82]$$

3. *Cálculo de aceleraciones.* Una vez resueltos los dos problemas anteriores, los datos de partida para el cálculo de aceleraciones son: d , r , φ , s , θ , $\dot{\varphi}$, \dot{s} , $\dot{\theta}$ y la aceleración de entrada $\ddot{\varphi}$. Derivando las ecuaciones de cierre en velocidades [3.74] y [3.75], se obtienen las ecuaciones de cierre en aceleraciones:

$$-r\ddot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \ddot{s} \cos \theta + 2\dot{s}\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta + s\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta + s\dot{\theta}^2 \cos \theta = 0 \quad [3.83]$$

$$r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen} \varphi - \ddot{s} \operatorname{sen} \theta - 2\dot{s}\dot{\theta} \cos \theta - s\ddot{\theta} \cos \theta + s\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta = 0 \quad [3.84]$$

A estas ecuaciones se hubiera llegado, igualmente, planteando la aceleración del punto A . Organizando [3.83] y [3.84] matricialmente se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta & s \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & -s \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\ddot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi + r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - 2\dot{s}\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta - s\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -r\ddot{\varphi} \cos \varphi + r\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen} \varphi + 2\dot{s}\dot{\theta} \cos \theta - s\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta \end{Bmatrix} \quad [3.85]$$

Que, como puede observarse, es de nuevo un sistema lineal y con la misma matriz de coeficientes que en el cálculo de velocidades. Aplicando de nuevo la regla de Cramer se obtendrían expresiones explícitas para \ddot{s} y $\ddot{\theta}$.

Sin embargo, puede desarrollarse un procedimiento más sencillo para el cálculo de aceleraciones. Se parte de las expresiones [3.80] y [3.81] puestas de la siguiente manera:

$$\dot{s} = \bar{g}_s(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \tag{3.86}$$

$$\dot{\theta} = g_\theta(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \tag{3.87}$$

Derivando dichas expresiones respecto del tiempo se obtiene:

$$\ddot{s} = \frac{d\bar{g}_s}{dt} \dot{\varphi} + \bar{g}_s \ddot{\varphi} = \frac{d\bar{g}_s}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 + \bar{g}_s \ddot{\varphi} = \bar{h}_s \dot{\varphi}^2 + \bar{g}_s \ddot{\varphi} \tag{3.88}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{dg_\theta}{dt} \dot{\varphi} + g_\theta \ddot{\varphi} = \frac{dg_\theta}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 + g_\theta \ddot{\varphi} = h_\theta \dot{\varphi}^2 + g_\theta \ddot{\varphi} \tag{3.89}$$

De estas expresiones sólo queda por conocer los coeficientes de influencia de aceleración \bar{h}_s y h_θ , los cuales pueden obtenerse al derivar totalmente respecto de la variable independiente las expresiones de \bar{g}_s y g_θ :

$$\bar{h}_s(\varphi) = \frac{d\bar{g}_s}{d\varphi} = r \cos(\theta - \varphi) \cdot \left[\frac{d\theta}{d\varphi} - 1 \right] = g_\theta (g_\theta - 1) s \tag{3.90}$$

$$h_\theta(\varphi) = \frac{dg_\theta}{d\varphi} = \frac{-r \operatorname{sen}(\theta - \varphi) \cdot \left[\frac{d\theta}{d\varphi} - 1 \right] s - \frac{ds}{d\varphi} r \cos(\theta - \varphi)}{s^2} = \frac{\bar{g}_s - 2g_\theta \bar{g}_s}{s} \tag{3.91}$$

4. *Cálculo de la posición, velocidad y aceleración de determinados puntos de interés.* A partir de aquí se consideran resueltos los tres anteriores problemas, conociéndose las variables cinemáticas secundarias hasta las segundas derivadas.

Considérese un punto P cualquiera del elemento 4 (deslizadera):

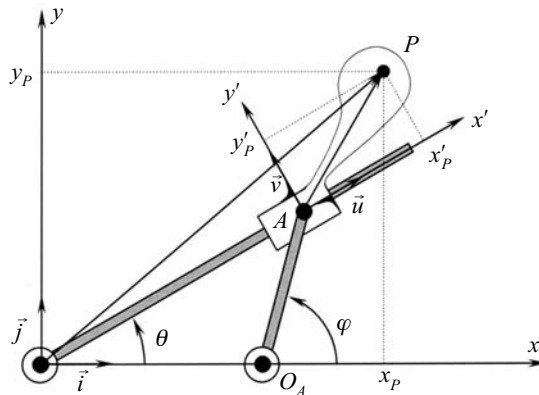


FIGURA 3.65. Posicionamiento del punto P del elemento 4.

Además del sistema de referencia fijo (O, x, y), se ha definido un sistema de referencia móvil solidario al elemento 4 (A, x', y'). Las coordenadas del punto P_4 referidas al sistema de referencia fijo son (x_p, y_p) y las referidas al sistema móvil son (x'_p, y'_p) . Estas últimas no varían con el tiempo cuando el mecanismo se mueve.

a) La posición del punto P puede expresarse vectorialmente de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{OP_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP_4} \quad [3.92]$$

Por componentes:

$$x_p = s \cos \theta + x'_p \cos \theta - y'_p \sin \theta \quad [3.93]$$

$$y_p = s \sin \theta + x'_p \sin \theta + y'_p \cos \theta \quad [3.94]$$

b) La velocidad del punto P_4 es:

$$\vec{v}_{P_4} = \frac{d\overrightarrow{OP_4}}{dt} = v_{P_4}^x \vec{i} + v_{P_4}^y \vec{j} \quad [3.95]$$

Por componentes:

$$v_{P_4}^x = \dot{s} \cos \theta - s \dot{\theta} \sin \theta - x'_p \dot{\theta} \sin \theta - y'_p \dot{\theta} \cos \theta \quad [3.96]$$

$$v_{P_4}^y = \dot{s} \sin \theta + s \dot{\theta} \cos \theta + x'_p \dot{\theta} \cos \theta - y'_p \dot{\theta} \sin \theta \quad [3.97]$$

En función de sus correspondientes coeficientes de influencia:

$$v_{P_4}^x = \bar{g}_{P_4}^x(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \quad [3.98]$$

$$v_{P_4}^y = \bar{g}_{P_4}^y(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \quad [3.99]$$

Cuyas expresiones se obtienen de igualar las ecuaciones [3.96] y [3.97] a las ecuaciones [3.98] y [3.99], respectivamente:

$$\bar{g}_{P_4}^x = \bar{g}_s \cos \theta - s g_\theta \sin \theta - x'_p g_\theta \sin \theta - y'_p g_\theta \cos \theta \quad [3.100]$$

$$\bar{g}_{P_4}^y = \bar{g}_s \sin \theta + s g_\theta \cos \theta + x'_p g_\theta \cos \theta - y'_p g_\theta \sin \theta \quad [3.101]$$

c) La aceleración del punto P_4 se obtiene diferenciando la ecuación [3.95]:

$$\bar{a}_{P_4} = \left(\ddot{\varphi} \bar{g}_{P_4}^x + \dot{\varphi}^2 \bar{h}_{P_4}^x \right) \cdot \bar{i} + \left(\ddot{\varphi} \bar{g}_{P_4}^y + \dot{\varphi}^2 \bar{h}_{P_4}^y \right) \cdot \bar{j} \quad [3.102]$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{P_4}^x = \frac{d\bar{g}_{P_4}^x}{d\varphi} &= \bar{h}_s \cos \theta - 2\bar{g}_s g_\theta \sin \theta - s h_\theta \sin \theta - s g_\theta^2 \cos \theta - x'_p h_\theta \sin \theta - x'_p g_\theta^2 \cos \theta \\ &- y'_p h_\theta \cos \theta + y'_p g_\theta^2 \sin \theta \end{aligned} \quad [3.103]$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_{P_4}^y = \frac{d\bar{g}_{P_4}^y}{d\varphi} &= \bar{h}_s \sin \theta + 2\bar{g}_s g_\theta \cos \theta + s h_\theta \cos \theta - s g_\theta^2 \sin \theta + x'_p h_\theta \cos \theta - x'_p g_\theta^2 \sin \theta \\ &- y'_p h_\theta \sin \theta - y'_p g_\theta \cos \theta \end{aligned} \quad [3.104]$$

5. *Matrices jacobianas.* Antes de finalizar este apartado es necesario hacer alguna observación relativa al proceso de cálculo anteriormente descrito. Las ecuaciones escalares de cierre [3.66] y [3.67] pueden ser expresadas genéricamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi, s, \theta) &= 0 \\ f_2(\varphi, s, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad [3.105]$$

Donde φ , s y θ constituyen un conjunto completo de coordenadas lagrangianas; φ es la variable de entrada, gdl del mecanismo o coordenada generalizada; s y θ las coordenadas secundarias o incógnitas. La matriz jacobiana del sistema [3.105] es:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & s \sin \theta & -r \sin \varphi \\ -\sin \theta & -s \cos \theta & r \cos \varphi \end{bmatrix} \quad [3.106]$$

Y la matriz jacobiana del sistema [3.105] respecto de las coordenadas secundarias es:

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & s \sin \theta \\ -\sin \theta & -s \cos \theta \end{bmatrix} \quad [3.107]$$

Que precisamente es la matriz de coeficientes de los sistemas matriciales [3.77] y [3.85] correspondientes a los problemas de velocidades y aceleraciones, respectivamente. Esta matriz aparece nuevamente si se utiliza el método de Newton-Raphson para resolver numéricamente el sistema no lineal [3.105].

6. *Análisis de singularidades.* Como ya se anticipó en el punto 1.10.3, un mecanismo puede alcanzar configuraciones geométricas en las que se produce una alteración local o global, instantánea o permanente en el número de gdl del mismo. A dichas configuraciones se las conoce como posiciones singulares y pueden provocar un bloqueo o una pérdida de control en el movimiento del mecanismo. Las posiciones singulares no sólo dependen de las dimensiones del mecanismo, sino también de la configuración geométrica que adquiere en ese instante. Por esta razón, la detección de las mismas debe de estar basada en las ecuaciones del movimiento del mecanismo.

En efecto, la posición del mecanismo de la figura 3.63 está definida por tres coordenadas lagrangianas (φ, s y θ), las cuales se encuentran relacionadas a través del sistema no lineal de dos ecuaciones [3.105]. Por tanto, se ha definido una coordenada generalizada φ , siendo las dos restantes coordenadas secundarias. Es decir, el sistema tiene 1 gdl. Esto es así, siempre y cuando las 2 ecuaciones del sistema [3.105] sean independientes. El análisis de su independencia se realiza a través del jacobiano $|J|$ del sistema de ecuaciones respecto de todas las coordenadas lagrangianas. El rango del jacobiano indica cuántas ecuaciones son independientes. Por tanto, el número de gdl del mecanismo es el número de coordenadas lagrangianas menos el rango del jacobiano. Volviendo al mecanismo de la figura 3.63, puede comprobarse que el rango de $|J|$ es 2 a lo largo de su ciclo de movimiento. Por tanto, el mecanismo tiene 1 gdl en cualquier posición. Sin embargo, esto no siempre es así en otros mecanismos.

Considérese el cuadrilátero articulado de la figura 3.66.

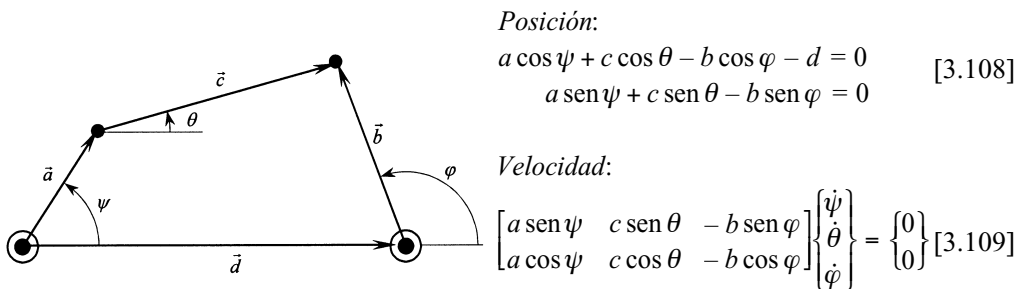
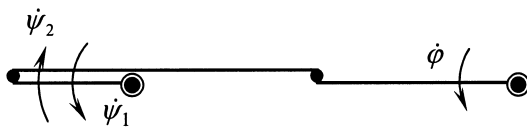


FIGURA 3.66. Ecuaciones de posición y velocidad.

En este mismo capítulo ya se han estudiado las posiciones de indeterminación, en las cuales las barras del mecanismo se encuentran alineadas (figura 3.67). Analícense, ahora, desde el punto de vista del jacobiano.

Se observa cómo al sustituir las condiciones [3.110] en el sistema de ecuaciones de posición [3.108], la segunda ecuación se anula, quedando solamente la ecuación [3.111]. De nuevo, al llevar [3.110] al sistema de ecuaciones de velocidad [3.109], la primera ecuación (y, por tanto, su jacobiano) se anula, quedando sólo la ecuación [3.112]. Por consiguiente, en esa posición el cuadrilátero tiene 2 gdl. Ello concuerda con lo visto en el punto 3.3.2. Allí se llegó a la conclusión de que para el mismo valor de $\dot{\varphi}$ son posibles dos tipos de movimiento: $\dot{\psi}_1$ contrario a las agujas del reloj y $\dot{\psi}_2$ a favor. Sin embargo, la posibilidad de movimiento no es tan amplia como representa la ecuación [3.112]. Existen restriccio-



$$\varphi = \psi = 180^\circ \text{ y } \theta = 0^\circ \quad [3.110]$$

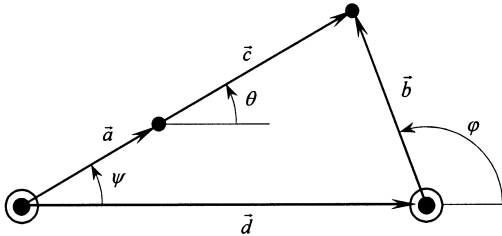
$$\text{Posición: } -a + c + b - d = 0 \quad [3.111]$$

$$\text{Velocidad: } -a\dot{\psi} + c\dot{\theta} = -b\dot{\varphi} \quad [3.112]$$

FIGURA 3.67. Posición de indeterminación.

nes geométricas adicionales definidas por el teorema de Hartmann (o por la ecuación de Euler-Savary) que reducen la indeterminación del movimiento del plano acoplador a dos posibilidades concretas, cada una con sus correspondientes centros instantáneos de rotación (ejemplo de aplicación 3.1).

Siguiendo con el cuadrilátero articulado de la figura 3.66, considérese la posición de bloqueo de la figura 3.68 cuando la entrada viene dada mediante de la coordenada φ :



Posición de bloqueo: $\psi = \theta$

$$\begin{bmatrix} a \operatorname{sen} \psi & c \operatorname{sen} \theta \\ a \operatorname{cos} \psi & c \operatorname{cos} \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \dot{\varphi} b \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{cos} \varphi \end{Bmatrix} \quad [3.113]$$

FIGURA 3.68. Cuadrilátero articulado en posición de bloqueo.

El cálculo de velocidades está regido por la ecuación matricial [3.113]. Dicha ecuación matricial constituye un sistema lineal de ecuaciones algebraicas cuya resolución proporciona los valores numéricos de las incógnitas. Este sistema tiene una única solución cuando la matriz de coeficientes (la matriz jacobiana de las coordenadas secundarias \mathbf{J}_S) es regular. En caso contrario, el sistema está indeterminado y el mecanismo se encuentra en una posición singular. Este es el caso de la figura 3.68. Al ser $\psi = \theta$ en esta posición, el jacobiano $|\mathbf{J}_S|$ se anula. El sistema [3.113] sólo es compatible cuando $\dot{\varphi} = 0$. Es decir, en esta posición, la velocidad del elemento de entrada no puede ser elegida como ocurriría en otra posición cualquiera del mecanismo, sino que el propio sistema de ecuaciones indica que debe ser nula. Por esta razón, el mecanismo está en una posición de bloqueo. Asumiendo $\dot{\varphi} = 0$ y siendo el jacobiano $|\mathbf{J}_S|$ nulo, el sistema [3.113] admite una solución distinta de la trivial. Eligiendo cualquiera de las ecuaciones de [3.113] se obtiene:

$$\dot{\psi} = -\frac{c}{a} \dot{\theta} \quad [3.114]$$

Que junto con $\dot{\varphi} = 0$ constituye la gama de soluciones posibles para dicha posición.

La matriz jacobiana J_s depende del elemento o elementos de entrada del mecanismo. Esto quiere decir que con otras entradas este tipo de singularidad no existiría.

3.7.2. Método numérico para la resolución del problema de posición

Hasta el momento, las soluciones dadas han sido de carácter analítico. No obstante, ya se ha indicado que cuando el sistema no lineal de ecuaciones de posición alcanza un cierto nivel de complejidad, es necesario utilizar un procedimiento numérico de resolución. Para ello se ha elegido el método iterativo de Newton-Raphson. Este método puede encontrarse desarrollado en cualquier texto de Análisis Numérico. No obstante, en este apartado va a exponerse una versión del mismo adaptada al problema de posición y a la notación que se está empleando.

Sea el siguiente sistema no lineal de ecuaciones que define la posición de los elementos de un mecanismo:

$$\begin{aligned} f_1(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi) &= 0 \\ f_2(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi) &= 0 \end{aligned} \tag{3.115}$$

Donde φ es la coordenada generalizada (dato) y $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ el vector de variables secundarias, es decir, las incógnitas del problema. Por simplificar el desarrollo, a partir de aquí se utilizará la notación compacta en la que una letra en negrita representa un vector o una matriz.

El sistema anterior puede ser expresado en forma matricial compacta de la siguiente manera:

$$f(s) = 0 \tag{3.116}$$

Supóngase que se conoce una solución aproximada s_j de la verdadera s . Si se sustituye en [3.116], ahora $f(s_j)$ ya no será el vector nulo. Al valor que resulta se le denomina *residuo* y da una medida de la aproximación de s_j a la solución verdadera.

Para obtener una solución más aproximada s_{j+1} que la anterior s_j , puede desarrollarse el residuo $f(s_j)$ en serie de Taylor en torno a s_j y limitada a dos términos:

$$f(s_{j+1}) = f(s_j) + (J_s)_j(s_{j+1} - s_j) \tag{3.117}$$

donde $(J_s)_j = \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_j$ es la matriz jacobiana del sistema [3.115] respecto de las coordenadas secundarias y particularizada para s_j .

Igualando el nuevo residuo al vector nulo es previsible que se obtenga un nuevo valor \mathbf{s}_{j+1} más próximo al exacto. De esta forma se obtiene el sistema lineal de ecuaciones:

$$(\mathbf{J}_S)_j \Delta \mathbf{s}_j = -\mathbf{f}(\mathbf{s}_j) \quad [3.118]$$

donde:

$$\Delta \mathbf{s}_j = \mathbf{s}_{j+1} - \mathbf{s}_j \quad [3.119]$$

El proceso se repite de forma iterativa hasta que se alcance un nivel de precisión suficiente, establecido a través de un determinado criterio de convergencia. Cabe destacar como criterios de convergencia los siguientes:

1. La norma euclídea del residuo:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{s}_{j+1})\|_2 \leq \varepsilon_r \|\mathbf{f}(\mathbf{s}_0)\|_2 \quad [3.120]$$

Es decir, el proceso acaba en la iteración $(j + 1)$ si se verifica la desigualdad [3.120]; ε_r es la tolerancia relativa del residuo.

2. La norma euclídea del valor incremental del vector de incógnitas:

$$\|\Delta \mathbf{s}_j\|_2 \leq \varepsilon_s \|\mathbf{s}_{j+1} - \mathbf{s}_0\|_2 \quad [3.121]$$

donde ε_s es la tolerancia relativa de las variables.

El proceso iterativo se inicia suponiendo un valor para el vector de incógnitas \mathbf{s}_0 . Este supuesto inicial puede estimarse mediante un dibujo a escala, analíticamente tras simplificar las ecuaciones o, incluso, de forma intuitiva. Ahora bien, cuanto más cerca de la solución se encuentre este supuesto, antes se llegará a la convergencia. Es más, puede que el proceso no converja si el punto de partida no está cerca de la solución.

En la figura 3.69 se expone un diagrama de flujo del método de Newton-Raphson.

3.7.3. Mecanismos con varios lazos

Cuando un mecanismo está constituido por varios lazos, el planteamiento de las ecuaciones de cierre ya no es obvio. ¿Cómo pueden determinarse cuáles de ellas son independientes? Preguntado de otra manera: ¿cuál es la clave para plantear correctamente el número justo de ecuaciones independientes?

Estas preguntas pueden ser respondidas con ayuda de la *teoría de grafos*. La estructura de un mecanismo puede asociarse a un grafo. Si la cadena a la que pertenece el mecanismo

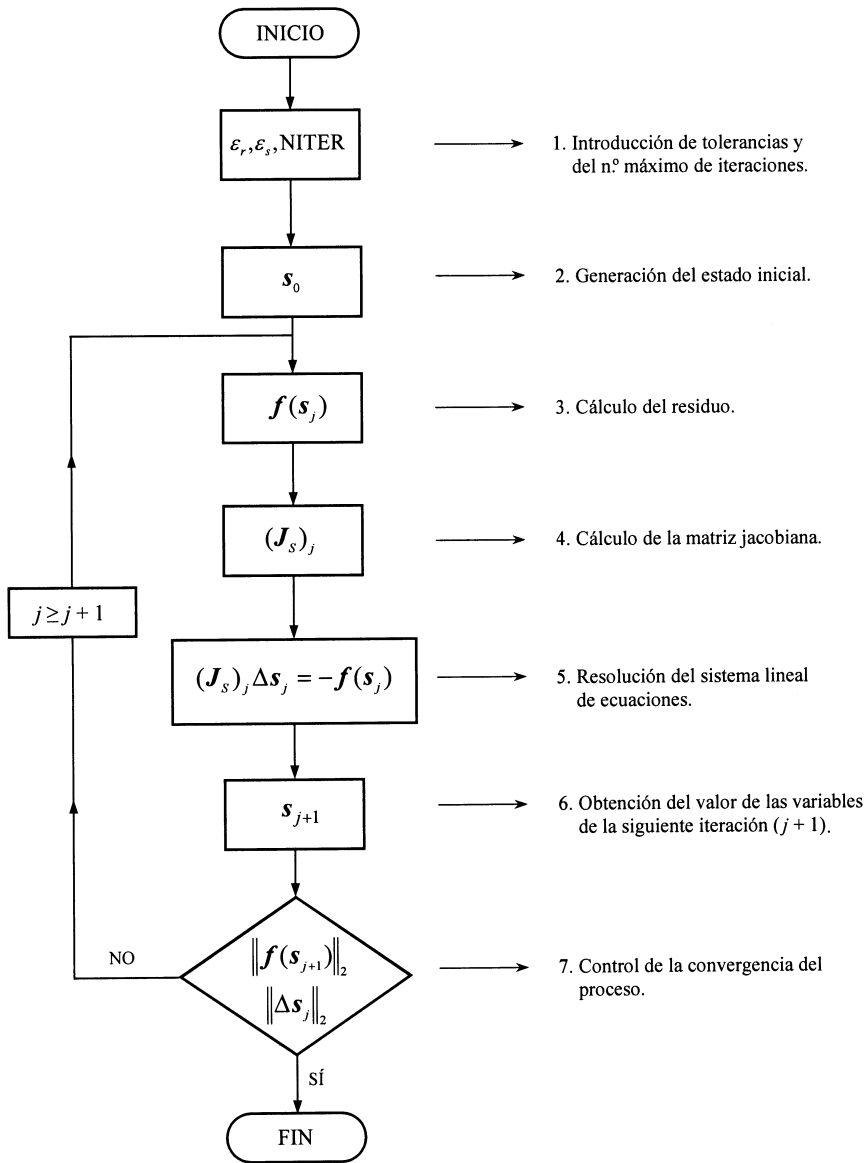


FIGURA 3.69. Organigrama del proceso numérico de resolución.

es cerrada, su correspondiente grafo estará constituido por *lazos*. Por definición, un lazo (o circuito) es cerrado y no posee lados repetidos. Asimismo, un lazo se define como *simple* cuando no puede englobar a más de un polígono, sólo al suyo propio; se dice que es *independiente* de otros lazos del mismo grafo, cuando su ecuación vectorial de cierre no puede ser expresada en función de las ecuaciones vectoriales de cierre de los otros lazos.

En un grafo plano, el número de lazos simples L_s es igual al número de lazos independientes L_i . En primer lugar, se demostrará que L_i no puede ser inferior a L_s , lo cual es cierto si todo conjunto de lazos simples constituye un conjunto de lazos independientes. Esto puede comprobarse con sólo ordenar las ecuaciones vectoriales de cierre de cada lazo simple, de manera que cada ecuación incluya algún nuevo lado. Por ejemplo, siguiendo el criterio de ordenación 1, 2, 3 y 4 en el grafo de la figura 3.70, se observa que cada sucesivo lazo contiene al menos un lado distinto de los existentes en los lazos previos.

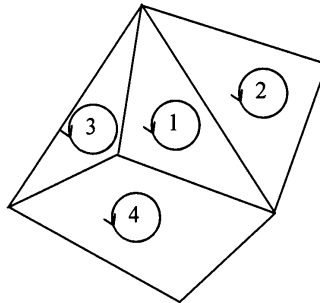


FIGURA 3.70. Lazos simples de un grafo.

Por otro lado, L_i tampoco puede ser superior a L_s , ya que cualquier lazo perteneciente a un conjunto completo de lazos independientes puede ser construido mediante la superposición de los lazos simples que engloba.

En conclusión, los lazos simples de un grafo plano constituyen un conjunto completo de lazos independientes; por ello, las ecuaciones de cierre correspondientes a los lazos simples de un mecanismo constituyen uno de los posibles sistemas que definen unívocamente la posición de los elementos de dicho mecanismo.

Estas ideas pueden completarse estudiando la influencia del número de lazos independientes en la movilidad del mecanismo. Considérese, para ello, la conocida fórmula de Euler:

$$j = N + L - 1 \tag{3.122}$$

Donde L es el número de lazos simples del mecanismo, N el número de elementos, y j es el número de conexiones (número total equivalente de pares binarios). Téngase en cuenta que en el plano:

$$j = P_I + P_{II} \tag{3.123}$$

Y, en el espacio:

$$j = P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} + P_V \tag{3.124}$$

A continuación, se presenta una demostración informal de la ecuación de Euler. En efecto, en una cadena cinemática cerrada de un lazo, el número de pares es igual al número de elementos; si se añade un segundo lazo al primero (figura 3.71), el número de pares

se iguala al número de elementos más uno. Añadiendo un tercer lazo a los dos anteriores, el número de pares se iguala al número de elementos más dos. De esta forma, conectando L lazos se llega a la fórmula de Euler.

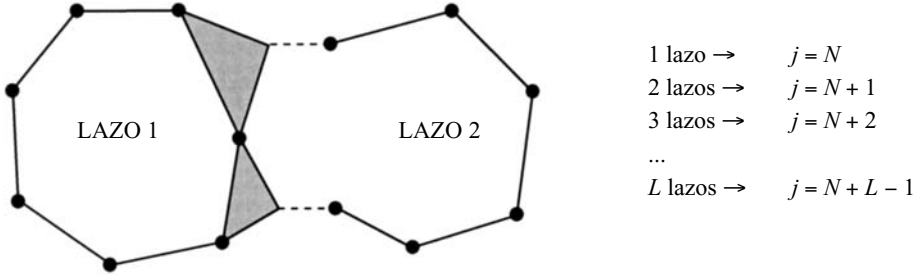


FIGURA 3.71. Obtención de la fórmula de Euler.

Llevando ahora [3.122] a la fórmula de Grübler resulta:

$$G = 3(j - L) - 2P_I - P_{II} \tag{3.125}$$

Para el caso espacial la anterior ecuación se convierte en:

$$G = 6(j - L) - 5P_I - 4P_{II} - 3P_{III} - 2P_{IV} - P_V \tag{3.126}$$

Estas breves ideas permiten establecer las ecuaciones de posición de cualquier mecanismo, por complejo que éste sea. No obstante, para explicar el procedimiento de análisis cinemático de un mecanismo con varios lazos se utilizará un mecanismo más sencillo; en concreto, el mecanismo de retorno rápido de la figura 3.72:

(O, x, y) : sistema de referencia fijo.

r, d_1, d_2 : datos geométricos.

φ : coordenada generalizada.

s_1, s_2, s_3, θ : coord. secundarias.

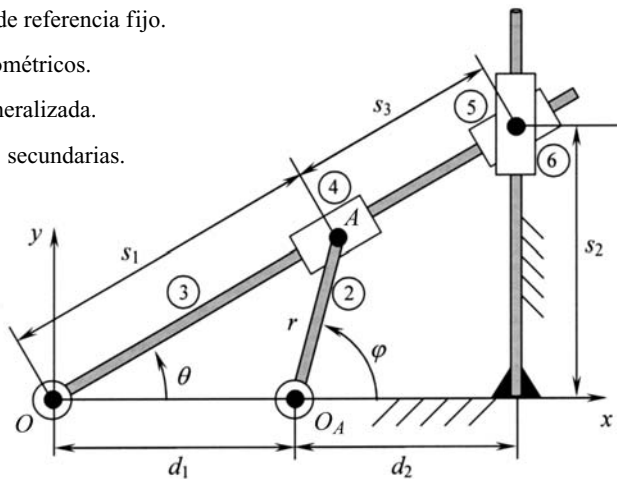


FIGURA 3.72. Mecanismo de retorno rápido (1 gdl).

1. *Problema de posición.* El mecanismo posee dos lazos independientes, que son los lazos simples indicados en la figura 3.73:

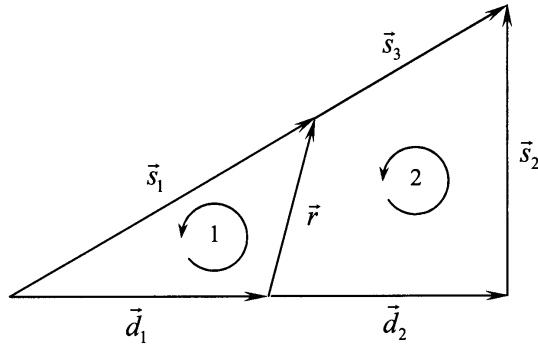


FIGURA 3.73. Lazos simples del mecanismo.

Teniendo en cuenta que $P_I = 7$, $P_{II} = 0$, $j = 7$, $N = 6$, aplicando la ecuación [3.122] se obtiene $L = 2$, que es otra forma de corroborar que dicho mecanismo posee dos lazos simples.

Las ecuaciones vectoriales de cierre de los dos lazos son:

$$\vec{d}_1 + \vec{r} - \vec{s}_1 = \vec{0} \tag{3.127}$$

$$\vec{d}_2 + \vec{s}_2 - \vec{s}_3 - \vec{r} = \vec{0} \tag{3.128}$$

Antes de proceder con un método numérico de resolución, merece la pena intentar una vía más sencilla como es un método analítico. Esta vía es factible en los mecanismos débilmente acoplados, como es el caso del mecanismo que nos ocupa.

En efecto, la primera ecuación vectorial coincide con la ecuación de cierre del mecanismo del ejemplo anterior. Por ello, apoyándose en los resultados de las ecuaciones [3.70], [3.71] y [3.72] podrá escribirse:

$$s_1^2 = d_1^2 + r^2 + 2d_1r \cos \varphi \tag{3.129}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{r}{s_1} \text{sen } \varphi \tag{3.130}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{d_1 + r \text{cos } \varphi}{s_1} \tag{3.131}$$

Las ecuaciones escalares correspondientes a la ecuación de cierre del segundo lazo son:

$$d_2 - s_3 \cos \theta - r \cos \varphi = 0 \quad [3.132]$$

$$s_2 - s_3 \sin \theta - r \sin \varphi = 0 \quad [3.133]$$

Llevando la ecuación [3.131] a la [3.132] y reordenando, resulta:

$$s_3 = s_1 \cdot \frac{d_2 - r \cos \varphi}{d_1 + r \cos \varphi} \quad [3.134]$$

La última incógnita, s_2 , se obtiene al llevar [3.130] y [3.134] a la ecuación [3.133], dando lugar a la expresión:

$$s_2 = \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 + r \cos \varphi} \right) \cdot r \sin \varphi \quad [3.135]$$

En la hipótesis de un mecanismo fuertemente acoplado no habría más remedio que utilizar un procedimiento numérico de resolución. En caso de utilizar el método de Newton-Raphson anteriormente expuesto, el primer paso sería obtener el sistema no lineal que define la posición del mecanismo. Dicho sistema puede extraerse de las ecuaciones vectoriales [3.127] y [3.128]:

$$f_1 = d_1 + r \cos \varphi - s_1 \cos \theta = 0 \quad [3.136]$$

$$f_2 = r \sin \varphi - s_1 \sin \theta = 0 \quad [3.137]$$

$$f_3 = d_2 - s_3 \cos \theta - r \cos \varphi = 0 \quad [3.138]$$

$$f_4 = s_2 - s_3 \sin \theta - r \sin \varphi = 0 \quad [3.139]$$

El vector de incógnitas es:

$$\mathbf{s} = [s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad \theta] \quad [3.140]$$

La matriz jacobiana respecto de las coordenadas secundarias es:

$$\mathbf{J}_S = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s_1} & \frac{\partial f_3}{\partial s_2} & \frac{\partial f_3}{\partial s_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_4}{\partial s_1} & \frac{\partial f_4}{\partial s_2} & \frac{\partial f_4}{\partial s_3} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & 0 & 0 & s_1 \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & 0 & -s_1 \cos \theta \\ 0 & 0 & -\cos \theta & s_3 \sin \theta \\ 0 & 1 & -\sin \theta & -s_3 \cos \theta \end{bmatrix} \quad [3.141]$$

Así pues, obteniendo la solución del sistema lineal de ecuaciones [3.145] quedará resuelto el problema de velocidades.

3. *Cálculo de aceleraciones.* En este caso, como se disponen de las expresiones explícitas de \dot{s} , bastará con derivarlas nuevamente con respecto al tiempo. Si no se dispusieran de ellas, habría que proceder de forma genérica, tal y como se expondrá en el siguiente apartado.

Ejemplo de aplicación 3.7. Obténgase la ecuación matricial de posición del mecanismo de Stephenson, de acuerdo con la notación de la figura 3.74a. Estudiar analíticamente la posición de bloqueo del mecanismo de Stephenson de la figura 3.33 para las dimensiones concretas que se especifican en la figura 3.74b. Asimismo, considérese dicho mecanismo en la posición de la figura 3.74c. Comprobar analíticamente si se trata de una posición singular e indicar de qué tipo.

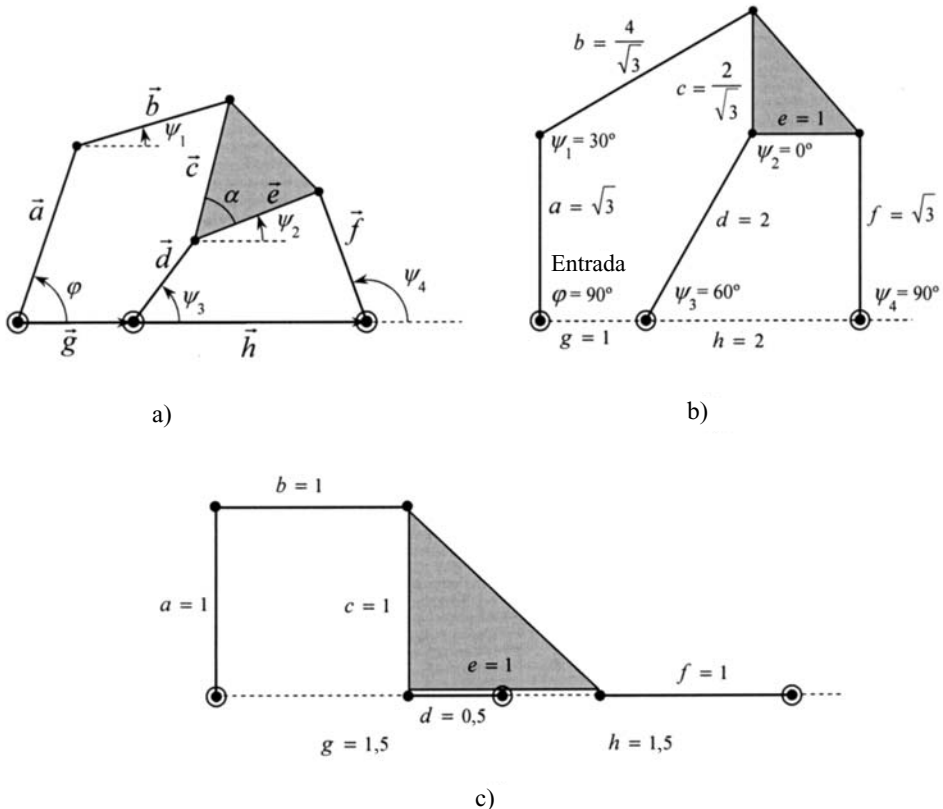


FIGURA 3.74. Configuraciones del mecanismo de Stephenson.

Planteando las ecuaciones de cierre de los lazos simples del mecanismo y derivándolas, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a \operatorname{sen} \varphi & b \operatorname{sen} \psi_1 & -c \operatorname{sen}(\psi_2 + \alpha) & -d \operatorname{sen} \psi_3 & 0 \\ -a \operatorname{cos} \varphi & -b \operatorname{cos} \psi_1 & c \operatorname{cos}(\psi_2 + \alpha) & d \operatorname{cos} \psi_3 & 0 \\ 0 & 0 & e \operatorname{sen} \psi_2 & d \operatorname{sen} \psi_3 & -f \operatorname{sen} \psi_4 \\ 0 & 0 & -e \operatorname{cos} \psi_2 & -d \operatorname{cos} \psi_3 & f \operatorname{cos} \psi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \\ \dot{\psi}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Particularizando las variables de este sistema para la configuración de la figura 3.74b, resulta la siguiente matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que el rango de esta matriz es 4, y como el sistema tiene 5 coordenadas lagrangianas, el mecanismo posee 1 gdl en dicha configuración. Ahora bien, considerando la matriz jacobiana de las coordenadas secundarias, la cual se obtiene eliminando la columna correspondiente a la coordenada generalizada (1.^a columna), se observará que el determinante se anula, y por tanto el mecanismo se encuentra en una posición de bloqueo.

Considérese ahora el mecanismo en la posición de la figura 3.74c. Los términos de la matriz jacobiana adquieren los siguientes valores:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Puede observarse que la tercera fila está compuesta de ceros. El rango de esta matriz resulta ser 3. Este hecho implica que el mecanismo ha adquirido un grado de libertad adicional en dicha posición y se encuentra, por tanto, en una posición de indeterminación.

3.7.4. Procedimiento general para mecanismos con 1 gdl

Hasta ahora, el procedimiento de análisis cinemático ha sido expuesto mediante ejemplos, estudiando las posibles variantes que surgían en cada caso. Al hilo de las explicaciones, se han realizado ciertas generalizaciones y se han apostillado notas de interés. En este subapartado se va a exponer un procedimiento general de análisis cinemático, válido para cualquier mecanismo de 1 gdl y fácilmente extrapolable a mecanismos de varios gdl.

Sea φ el gdl o coordenada generalizada del mecanismo, y $s = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]$ el vector de coordenadas secundarias o incógnitas.

1. *Problema de posición.* Las ecuaciones de cierre correspondientes a un conjunto completo de lazos independientes del mecanismo dan lugar a un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas como el representado en [3.115]:

$$\begin{aligned}
 f_1(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi) &= 0 \\
 f_2(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi) &= 0 \\
 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 f_n(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi) &= 0
 \end{aligned}$$

Si hubiese alguna restricción adicional en el movimiento del mecanismo (algún enlace), habría que incluir su correspondiente expresión analítica en el anterior sistema. Conviene recordar que, si el número de ecuaciones es bajo, merece la pena inspeccionar el mecanismo por si estuviera débilmente acoplado. Si así fuera, resultaría más sencillo acometer el proceso de resolución de una forma analítica, despejando incógnitas de ecuación en ecuación. En caso contrario, deberá utilizarse un método numérico tipo Newton-Raphson, en cuyo caso se procederá según los pasos de la figura 3.69. Una vez resuelto el problema de posición, se dispondrá de la expresión analítica de los términos de la matriz jacobiana (también de la expresión numérica) y de los valores numéricos del vector de incógnitas s .

2. *Cálculo de velocidades.* Si se dispusiera de las expresiones explícitas de s , bastaría con derivarlas respecto del tiempo. En caso contrario, hay que derivar las ecuaciones de posición [3.115] respecto del tiempo, igual que se hizo en el apartado anterior, obteniendo la ecuación [3.145]:

$$\mathbf{J}_S \dot{s} = -\mathbf{J}_E \dot{\varphi}$$

De esta ecuación matricial se conocen los términos de la matriz jacobiana y el miembro de la derecha. Así pues, dicha ecuación matricial constituye un sistema lineal de ecuaciones algebraicas del que, operando, se obtienen los valores numéricos de las incógnitas \dot{s} .

Una alternativa de la expresión anterior es la siguiente:

$$\mathbf{J}_S \frac{\dot{s}}{\dot{\varphi}} = -\mathbf{J}_E \rightarrow \mathbf{J}_S \mathbf{g}_s(\varphi) = -\mathbf{J}_E \tag{3.147}$$

Donde $\mathbf{g}_s(\varphi)$ es el vector de coeficientes de influencia de velocidad. El valor numérico de este vector puede obtenerse, ahora, resolviendo el sistema de ecuaciones [3.147].

3. *Cálculo de aceleraciones.* Igual que en el problema anterior, si se dispone de la expresión explícita de $\dot{\mathbf{s}}$, simplemente bastaría con derivarla respecto del tiempo para obtener $\ddot{\mathbf{s}}$. Si de lo que se dispone es de las expresiones analíticas de los coeficientes de velocidad, entonces $\dot{\mathbf{s}}$ puede expresarse:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{g}_s \cdot \dot{\varphi} \quad [3.148]$$

Derivando de nuevo respecto del tiempo:

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{g}_s \cdot \ddot{\varphi} + \frac{d\mathbf{g}_s}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}^2 = \mathbf{g}_s \cdot \ddot{\varphi} + \mathbf{h}_s \cdot \dot{\varphi}^2 \quad [3.149]$$

Sin embargo, si \mathbf{g}_s se ha obtenido numéricamente a través de [3.147], tal derivación no es posible. En estas circunstancias hay que buscar otras expresiones para la obtención de las aceleraciones. Derivando de nuevo la ecuación [3.145] respecto del tiempo, resulta:

$$\frac{d\mathbf{J}_S}{dt} \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_S \ddot{\mathbf{s}} = -\mathbf{J}_E \ddot{\varphi} - \frac{d\mathbf{J}_E}{dt} \dot{\varphi} \quad [3.150]$$

Operando y teniendo en cuenta [3.148], se llega a:

$$\mathbf{J}_S \ddot{\mathbf{s}} = -\frac{d\mathbf{J}_S}{d\varphi} \mathbf{g}_s \dot{\varphi}^2 - \mathbf{J}_E \ddot{\varphi} - \frac{d\mathbf{J}_E}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 \quad [3.151]$$

Reorganizando,

$$\mathbf{J}_S \ddot{\mathbf{s}} = -\left(\frac{d\mathbf{J}_S}{d\varphi} \mathbf{g}_s + \frac{d\mathbf{J}_E}{d\varphi}\right) \dot{\varphi}^2 - \mathbf{J}_E \ddot{\varphi} \quad [3.152]$$

En la que son conocidas las expresiones analíticas de los términos de la matriz jacobiana \mathbf{J}_S y del vector \mathbf{J}_E al derivar las ecuaciones de posición [3.115]. Por tanto, el miembro de la derecha de la ecuación [3.152] es completamente conocido.

Si resultase más conveniente trabajar con los coeficientes de influencia, comparando la ecuación [3.152], con [3.149] se llega, de un lado, a la conocida expresión [3.147] y, de otro, a la siguiente:

$$\mathbf{J}_S \mathbf{h}_s = -\left(\frac{d\mathbf{J}_S}{d\varphi} \mathbf{g}_s + \frac{d\mathbf{J}_E}{d\varphi}\right) \quad [3.153]$$

La obtención de los coeficientes de influencia de aceleración pasa, de nuevo, por resolver un sistema lineal de ecuaciones en que la matriz de los coeficientes vuelve a ser la matriz jacobiana de las coordenadas secundarias.

Por fin, llevado este resultado a la ecuación [3.149], se obtienen las aceleraciones \ddot{s} .

3.7.5. Procedimiento general para mecanismos multi-lazo con varios gdl

En este subapartado se va a generalizar el procedimiento descrito en el punto anterior para mecanismos con varios gdl. También se establecerá aquí una clasificación de las singularidades en mecanismos, así como un método para el análisis de las mismas.

Sea $\varphi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_F]$ el vector de coordenadas generalizadas o variables de entrada del mecanismo, y $s = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]$ el vector de coordenadas secundarias o incógnitas. Si el mecanismo no es redundante, el número de variables de entrada es igual al número de variables de salida. Por tanto, el mecanismo tendrá F gdl de entrada, F variables de salida y $(n - F)$ variables pasivas.

1. *Problema de posición.* A partir de un conjunto completo de lazos independientes del mecanismo se obtiene el siguiente sistema no lineal de n ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_1(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_F) &= 0 \\ f_2(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_F) &= 0 \\ \dots & \\ f_n(s_1, s_2, \dots, s_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_F) &= 0 \end{aligned} \tag{3.154}$$

Una vez especificados los valores de las variables de entrada, el sistema [3.154] se convierte en un sistema no lineal de n ecuaciones con n incógnitas que puede ser resuelto analítica o numéricamente. Este sistema es del todo análogo al expresado en [3.115]. El hecho de que haya múltiples coordenadas generalizadas no lo hace diferente pues todas ellas son conocidas.

2. *Cálculo de velocidades.* Una vez resuelto el problema de posición, las ecuaciones de velocidad se obtienen derivando respecto del tiempo las ecuaciones de posición [3.154]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_F} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} & \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_F} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_F \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{3.155}$$

Separando las variables de entrada de las variables secundarias y expresando el resultado en notación compacta, resulta la ecuación matricial:

$$\mathbf{J}_S \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{J}_E \dot{\boldsymbol{\varphi}} \quad [3.156]$$

donde:

$$\mathbf{J}_S = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad [3.157]$$

es la matriz jacobiana de las coordenadas secundarias, y

$$\mathbf{J}_E = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_F} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_F} \end{bmatrix} \quad [3.158]$$

es la matriz jacobiana de las variables de entrada.

La ecuación matricial [3.156] constituye un sistema lineal de ecuaciones algebraicas del que se conocen las dos matrices jacobianas y el vector de velocidades de entrada; de su resolución se obtienen los valores numéricos de las incógnitas $\dot{\mathbf{s}}$.

3. *Cálculo de aceleraciones.* Una vez calculadas las velocidades, las ecuaciones de aceleración se obtienen derivando respecto del tiempo las ecuaciones de velocidad [3.156]. Para ello hay que tener en cuenta que las matrices jacobianas dependen tanto de las coordenadas generalizadas como de las coordenadas secundarias:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial s_1} \dot{s}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial s_n} \dot{s}_n + \frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial \varphi_F} \dot{\varphi}_F \right] \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_S \ddot{\mathbf{s}} = \\ & - \left[\frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial s_1} \dot{s}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial s_n} \dot{s}_n + \frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial \varphi_F} \dot{\varphi}_F \right] \dot{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{J}_E \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \quad [3.159]$$

Reordenando y expresando el sistema de forma más compacta, resulta:

$$\mathbf{J}_S \ddot{\mathbf{s}} = - \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial s_j} \dot{s}_j + \sum_{i=1}^F \frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial \varphi_i} \dot{\varphi}_i \right] \dot{\boldsymbol{\varphi}} - \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial s_j} \dot{s}_j + \sum_{i=1}^F \frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial \varphi_i} \dot{\varphi}_i \right] \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{J}_E \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad [3.160]$$

Éste es un sistema lineal de ecuaciones donde, igual que en el sistema de ecuaciones de velocidad [3.156], la matriz de coeficientes vuelve a ser \mathbf{J}_S . En el miembro de la derecha aparecen las matrices \mathbf{J}_E , $\frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial s_j}$, $\frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial \varphi_i}$, $\frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial s_j}$, $\frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial \varphi_i}$, cuyos términos se conocen explícitamente, y \dot{s} , que se ha obtenido de [3.156], bien explícitamente (rara vez), bien numéricamente (lo habitual). Por tanto, las aceleraciones del mecanismo se obtienen resolviendo el sistema [3.160].

Otra expresión de este sistema se obtiene despejando \dot{s} en [3.156] y sustituyendo su valor en [3.160]:

$$\mathbf{J}_S \ddot{\mathbf{s}} = \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j \dot{s}_j + \sum_{i=1}^F \mathbf{B}_i \dot{\varphi}_i \right] \dot{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{J}_E \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad [3.161]$$

donde:

$$\mathbf{A}_j = \frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial s_j} [\mathbf{J}_S]^{-1} \mathbf{J}_E - \frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial s_j} \quad [3.162]$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial \varphi_i} [\mathbf{J}_S]^{-1} \mathbf{J}_E - \frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial \varphi_i} \quad [3.163]$$

Como puede apreciarse, el sistema [3.161] tiene una cierta similitud con el sistema más simple [3.152] correspondiente a los mecanismos de 1 gdl.

4. *Análisis de singularidades.* La posición del mecanismo está gobernada por el sistema de n ecuaciones [3.154] que relacionan $(n + F)$ coordenadas lagrangianas, de las cuales F son generalizadas y n secundarias. Este punto de partida asume implícitamente la independencia funcional entre las n ecuaciones del sistema [3.154]. No obstante, esta circunstancia está regida por el rango de la matriz jacobiana del sistema. En este análisis aparecen tres matrices jacobianas cuya degeneración da lugar a tres tipos de singularidades:

- a) *Incremento de la movilidad.* El número de gdl del sistema es igual al número de coordenadas lagrangianas menos el número de ecuaciones independientes; el número de ecuaciones independientes es igual al rango de la matriz jacobiana del sistema [3.154] respecto de todas las coordenadas lagrangianas; por tanto:

$$G = n + F - \text{rango}(\mathbf{J}) \quad [3.164]$$

Si las n ecuaciones son independientes, el rango de \mathbf{J} es n y por tanto $G = F$, que es lo que se conoce como gdl de ciclo completo. Sin embargo, es posible que el mecanismo a lo largo de su movimiento se encuentre posiciones tales que el rango de esta matriz disminuya. En estas posiciones el mecanismo incrementa instan-

táneamente su número de gdl, estando ante lo que previamente se denominó posición de indeterminación, y que desde un punto de vista más general se denomina *singularidad de incremento de movilidad*. Hay que indicar que pueden encontrarse mecanismos que encadenen una serie de posiciones de indeterminación, de forma que el incremento de movilidad adquiera la condición de permanente. También, el rango de la matriz jacobiana puede disminuir en más de uno, con lo que el incremento del número de gdl del mecanismo en tal posición puede ser superior a 1.

- b) *Singularidad en el problema directo*. Este tipo de singularidad no altera el número de gdl de ciclo completo del mecanismo, sin embargo afecta localmente a su movilidad. Para detectarla se parte de la ecuación de velocidades expresada según la ecuación [3.156] que se reproduce a continuación:

$$\mathbf{J}_S \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{J}_E \dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

El mecanismo alcanza una singularidad de este tipo cuando el determinante de la matriz \mathbf{J}_S se anula:

$$|\mathbf{J}_S| = 0 \quad [3.165]$$

En esta posición el mecanismo puede tener una entrada $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ nula, que sin embargo permite un movimiento no nulo en los elementos dependientes de las variables $\dot{\mathbf{s}}$. A veces se consigue eliminar las variables pasivas, de forma que las componentes de $\dot{\mathbf{s}}$ sean exclusivamente variables de salida. De esta manera queda un sistema que relaciona directamente las variables de salida con las de entrada. Por otro lado, el sistema lineal [3.156] debe ser compatible, por lo que la matriz de coeficientes \mathbf{J}_S debe tener el mismo rango que la matriz ampliada. Ello obliga a que exista una dependencia lineal entre las variables de entrada $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$. En los mecanismos de 1 gdl esto significaba una posición de bloqueo ($\dot{\boldsymbol{\varphi}} = 0$).

- c) *Singularidad en el problema inverso*. El mecanismo alcanza una singularidad de este tipo cuando el rango de \mathbf{J}_E sea menor que F . En el caso de que \mathbf{J}_E sea una matriz cuadrada, la singularidad ocurre cuando el determinante de la matriz \mathbf{J}_E se anula:

$$|\mathbf{J}_E| = 0 \quad [3.166]$$

En esta posición el mecanismo puede tener una salida $\dot{\mathbf{s}}$ nula, que sin embargo permite una entrada $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ no nula. Por otro lado, el sistema lineal [3.156] debe ser compatible, por lo que la, ahora, matriz de coeficientes \mathbf{J}_E debe tener el mismo rango que la matriz ampliada. Ello obliga a que exista una dependencia lineal entre las variables de salida en $\dot{\mathbf{s}}$.

Ejemplo de aplicación 3.8. El mecanismo de la figura 3.75 es un manipulador paralelo plano de 3 grados de libertad cuyos accionamientos son los émbolos situados en cada una de sus tres “patas”. En consecuencia, los parámetros de entrada son las longitudes l_1 ,

l_2 y l_3 correspondientes a las distancias entre las articulaciones \overline{OA} , \overline{DB} y \overline{EC} , respectivamente. Los parámetros de salida son aquellos que definen la posición de la plataforma; para este caso se adoptan x_A , y_A y θ . Las variables pasivas son las posiciones angulares de cada una de las patas: φ_1 , φ_2 y φ_3 . La plataforma móvil es un triángulo equilátero de lado h . Asimismo, las articulaciones fijas O , D y E están en los vértices de otro triángulo equilátero de lado r . Se pide la resolución de los problemas de posición (directo e inverso), cálculo de velocidades y análisis de singularidades.

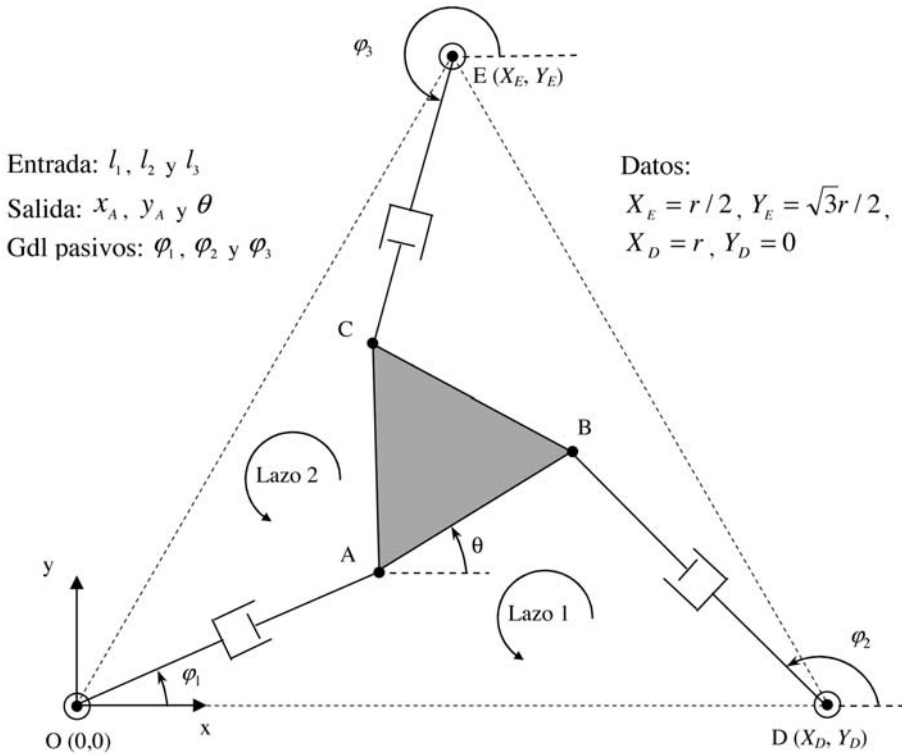


FIGURA 3.75. Manipulador paralelo.

Teniendo en cuenta que este mecanismo posee 8 elementos, 9 pares clase I y 0 pares clase II, su movilidad será $G = 3(8 - 1) - 2 \cdot 9 = 3$. Por otro lado, de la aplicación de la fórmula de Euler resulta que el mecanismo tiene $L = j - N + 1 = 9 - 8 + 1 = 2$ lazos independientes. Las ecuaciones vectoriales de cierre de estos lazos son:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} \tag{3.167}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC} \tag{3.168}$$

Puede comprobarse fácilmente que el lazo $DBCED$ se obtiene sumando los dos anteriores.

Proyectando las ecuaciones [3.167] y [3.168] según los ejes x e y , se obtiene:

$$x_A + h \cos \theta = r + l_2 \cos \varphi_2 \quad [3.169]$$

$$y_A + h \operatorname{sen} \theta = l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \quad [3.170]$$

$$x_A + h \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{r}{2} + l_3 \cos \varphi_3 \quad [3.171]$$

$$y_A + h \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} r + l_3 \operatorname{sen} \varphi_3 \quad [3.172]$$

Que es un sistema de 4 ecuaciones con 7 coordenadas lagrangianas ($x_A, y_A, \theta, l_2, l_3, \varphi_2, \varphi_3$). Como el manipulador tiene 3 gdl hay que especificar el valor de 3 variables; las 4 restantes se obtienen con las ecuaciones [3.169]-[3.172]. Sin embargo, lo que se busca es la relación entre las variables de entrada (l_1, l_2, l_3) y las de salida (x_A, y_A, θ). Para ello, hay que añadir a las ecuaciones anteriores otras relaciones que incluyan la variable de entrada l_1 que todavía no ha aparecido:

$$x_A = l_1 \cos \varphi_1 \quad [3.173]$$

$$y_A = l_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \quad [3.174]$$

El siguiente paso consiste en la eliminación de las variables pasivas del sistema de ecuaciones [3.169] y [3.174]. Así, entre [3.173] y [3.174] se elimina φ_1 :

$$x_A^2 + y_A^2 = l_1^2 \quad [3.175]$$

Entre [3.169] y [3.170] se elimina φ_2 :

$$(x_A + h \cos \theta - r)^2 + (y_A + h \operatorname{sen} \theta)^2 = l_2^2 \quad [3.176]$$

Y entre [3.171] y [3.172] se elimina φ_3 :

$$\left(x_A + h \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{r}{2} \right)^2 + \left(y_A + h \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} r \right)^2 = l_3^2 \quad [3.177]$$

1. *Resolución del problema inverso.* Los datos de este problema son las variables que definen la posición de la plataforma (x_A, y_A, θ), y las incógnitas son las longitudes de cada

uno de los actuadores (l_1, l_2, l_3). En este manipulador, la resolución del problema inverso es inmediata a partir de las ecuaciones [3.175], [3.176] y [3.177].

2. *Resolución del problema de posición directo.* Los datos de este problema son las variables que definen las longitudes de los actuadores (l_1, l_2, l_3) y las incógnitas los parámetros que definen la posición de la plataforma (l_1, l_2, l_3).

De [3.175] y [3.176] resulta:

$$2(h \cos \theta - r) \cdot x_A + 2h \operatorname{sen} \theta \cdot y_A - 2h \cos \theta \cdot r + l_1^2 - l_2^2 + h^2 + r^2 = 0 \quad [3.178]$$

De [3.175] y [3.177] resulta:

$$\begin{aligned} & \left[2h \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - r \right] \cdot x_A + \left[2h \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} r \right] \cdot y_A - \\ & - hr \left[\cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right] + l_1^2 - l_3^2 + h^2 + r^2 = 0 \end{aligned} \quad [3.179]$$

En conclusión, el sistema resultante para el problema de posición directo está constituido por las ecuaciones [3.175], [3.178] y [3.179] que presentan la siguiente forma:

$$x_A^2 + y_A^2 = l_1^2$$

$$a_1 x_A + b_1 y_A + c_1 = 0 \quad [3.180]$$

$$a_2 x_A + b_2 y_A + c_2 = 0 \quad [3.181]$$

Donde los términos a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 dependen únicamente de la variable θ . Por tanto, aplicando Cramer al sistema [3.180] y [3.181] en las variables x_A, y_A se obtiene:

$$x_A = x_A(\theta) \quad [3.182]$$

$$y_A = y_A(\theta) \quad [3.183]$$

Llevando [3.182] y [3.183] a la ecuación [3.175] se obtiene una ecuación en $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$. Realizando el cambio:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad [3.184]$$

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad [3.185]$$

Resulta un polinomio en t que da las soluciones del problema de posición directo. Deshaciendo los cambios para cada una de las soluciones obtenidas, el problema directo queda resuelto.

3. *Cálculo de velocidades.* El sistema no lineal de ecuaciones [3.175], [3.178] y [3.179] tiene la forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_A, y_A, \theta, l_1, l_2, l_3) &= 0 \\ f_2(x_A, y_A, \theta, l_1, l_2, l_3) &= 0 \\ f_3(x_A, y_A, \theta, l_1, l_2, l_3) &= 0 \end{aligned} \tag{3.186}$$

Derivando estas ecuaciones respecto del tiempo, reordenando las variables y expresando el resultado en forma matricial queda:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_A} & \frac{\partial f_1}{\partial y_A} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_A} & \frac{\partial f_2}{\partial y_A} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_A} & \frac{\partial f_3}{\partial y_A} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{bmatrix}}^{\mathbf{J}_S} \begin{Bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = - \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l_1} & \frac{\partial f_1}{\partial l_2} & \frac{\partial f_1}{\partial l_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial l_1} & \frac{\partial f_2}{\partial l_2} & \frac{\partial f_2}{\partial l_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial l_1} & \frac{\partial f_3}{\partial l_2} & \frac{\partial f_3}{\partial l_3} \end{bmatrix}}^{\mathbf{J}_E} \begin{Bmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \end{Bmatrix} \tag{3.187}$$

Donde los términos de \mathbf{J}_S valen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_A} &= 2x_A; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_A} = 2y_A; \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_A} &= 2(h \cos \theta - r); \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_A} = 2h \operatorname{sen} \theta \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} &= -2hx_A \operatorname{sen} \theta + 2hy_A \cos \theta + 2hr \operatorname{sen} \theta \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_A} &= 2h \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - r; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y_A} = 2h \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} r \\ \frac{\partial f_3}{\partial \theta} &= -2hx_A \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + 2hy_A \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - hr \left[\sqrt{3} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

Y la expresión de la matriz \mathbf{J}_E es:

$$\mathbf{J}_E = \begin{bmatrix} -2l_1 & 0 & 0 \\ 2l_1 & -2l_2 & 0 \\ 2l_1 & 0 & -2l_3 \end{bmatrix} \quad [3.188]$$

Definiendo las velocidades de entrada y resolviendo el sistema lineal de ecuaciones [3.187], se obtienen de forma directa las componentes de velocidad de la plataforma.

También puede obtenerse un sistema equivalente a [3.187] planteando directamente las ecuaciones de velocidad de los puntos A , B y C de la plataforma.

4. Análisis de singularidades.

a) Singularidad en el problema inverso. El jacobiano de la matriz \mathbf{J}_E vale:

$$|\mathbf{J}_E| = -8 l_1 l_2 l_3 \quad [3.189]$$

Que sólo se anula cuando alguna de las distancias l_1 , l_2 , l_3 es cero, lo cual es físicamente imposible.

b) Incremento de la movilidad. La expresión de la matriz jacobiana es:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_S : \mathbf{J}_E] \quad [3.190]$$

Puesto que $|\mathbf{J}_E| \neq 0$, el rango de \mathbf{J} es 3. De acuerdo con la ecuación [3.154], el número de gdl para cualquier posición del mecanismo es 3. Por tanto, no existe este tipo de singularidad.

c) Singularidad en el problema directo. Se trata de obtener la condición por la cual $|\mathbf{J}_S|$ se anula. Introduciendo las relaciones:

$$h \cos \theta = x_B - x_A; \quad h \sin \theta = y_B - y_A; \quad r = X_D; \quad \frac{r}{2} = X_E; \quad \frac{\sqrt{3} r}{2} = Y_E$$

$$h \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = x_C - x_A; \quad h \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = y_C - y_A$$

en $|\mathbf{J}_S|$ y realizando una serie de operaciones elementales de filas y columnas resulta:

$$|\mathbf{J}_S| = \begin{vmatrix} -y_A & x_A & 0 \\ -y_B & x_B - X_D & y_B X_D \\ -(y_C - Y_E) & x_C - X_E & -Y_E x_C + X_E y_C \end{vmatrix} \quad [3.191]$$

La condición $|\mathbf{J}_S| = 0$ significa que las tres rectas siguientes:

$$-y_A \cdot x + x_A \cdot y = 0 \tag{3.192}$$

$$-y_B \cdot x + (x_B - X_D) \cdot y + y_B X_D = 0 \tag{3.193}$$

$$-(y_C - Y_E) \cdot x + (x_C - X_E) \cdot y + (-Y_E x_C + X_E y_C) = 0 \tag{3.194}$$

Constituidas con los términos de cada una de las filas de $|J_s|$ se cortan en un punto. La recta [3.192] pasa por los puntos O y A ; la recta [3.193] pasa por los puntos D y B ; la recta [3.194] pasa por los puntos E y C . En conclusión, existe una singularidad en el problema directo si las rectas OA , DB y EC se cortan en punto.

Como muestra analicemos un caso particular de esta condición; por ejemplo, el caso en que:

$$y_A = y_B = 0 \tag{3.195}$$

Que corresponde a la configuración geométrica de la figura 3.76:

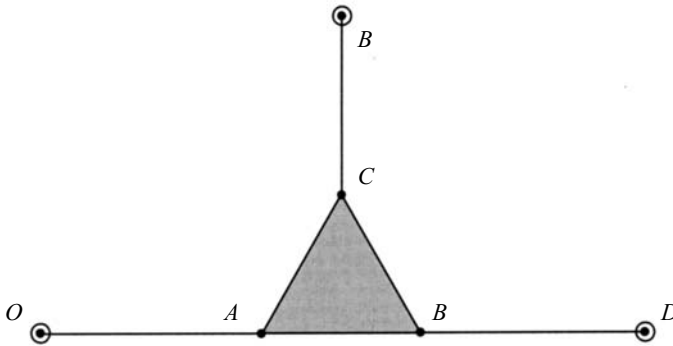


FIGURA 3.76. Caso de singularidad en el problema directo.

En este tipo de singularidad se sabe que las variables de entrada guardan una determinada relación. Para la posición de la figura 3.76, esta relación se obtiene llevando las condiciones [3.195] al sistema [3.187] particularizado, de donde resulta:

$$\dot{l}_1 + \dot{l}_2 = 0$$

Ejercicios propuestos

1. A partir del posicionamiento de los polos de velocidad del mecanismo de la figura 3.77, indicar qué elementos se encuentran en posición de bloqueo. Razonar la respuesta.

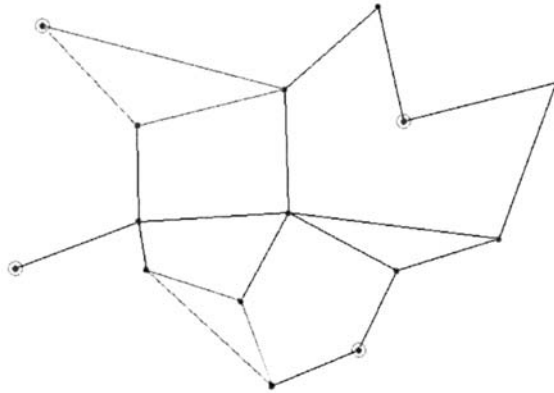


FIGURA 3.77. Mecanismo de barras articuladas.

2. En la figura 3.78 se presenta el diagrama cinemático de un mecanismo de tren de aterrizaje. Dicho mecanismo es accionado mediante un actuador hidráulico no representado y que empuja a la deslizadera 2. Se pide:

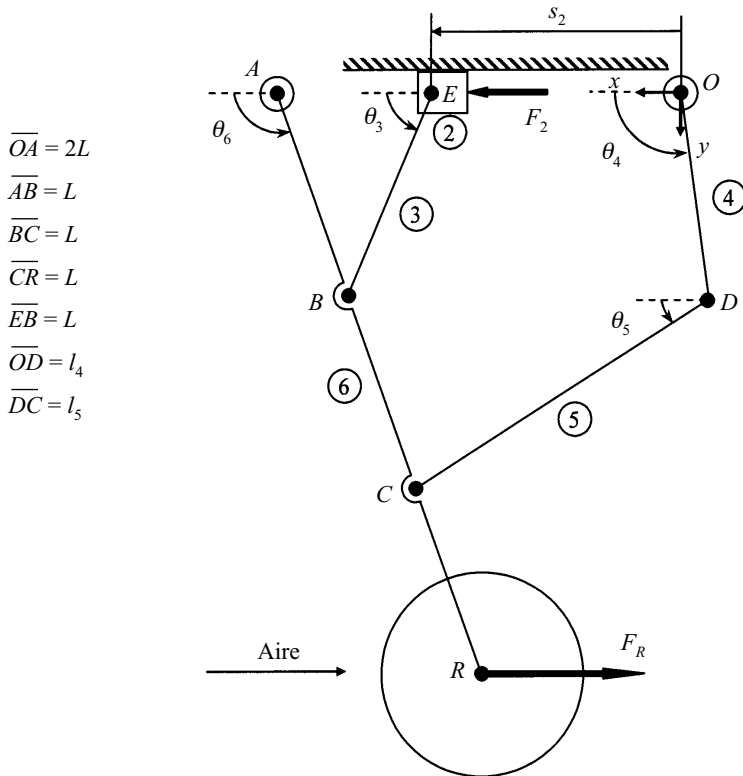
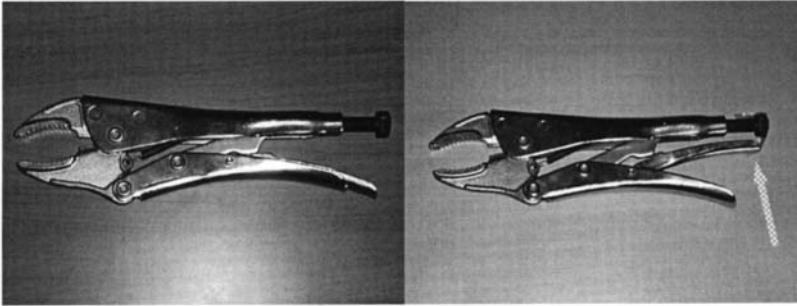


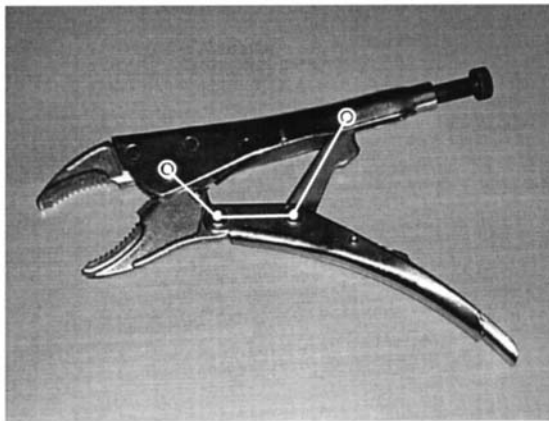
FIGURA 3.78. Tren de aterrizaje.

- a) Obtener las ecuaciones de posición y las ecuaciones de velocidad del mecanismo a partir de los parámetros de la figura 3.78, donde s_2 es la variable de entrada.
 - b) El tren de aterrizaje se acciona mediante una fuerza F_2 que permite vencer la fuerza resultante F_R de resistencia al aire aplicada sobre el eje de la rueda. Obténgase la ventaja mecánica del mecanismo. Dibujar las posiciones de los polos que aparezcan en la expresión de la ventaja mecánica.
 - c) Obténgase en función de la longitud L , las longitudes l_4 y l_5 para que las posiciones plegada ($\theta_6 = 150^\circ$) y desplegada ($\theta_6 = 90^\circ$) del tren de aterrizaje coincidan con las posiciones de bloqueo del mecanismo.
3. Realícese el estudio del diseño de los alicates ajustables de la figura 3.79 desde el punto de vista de la ventaja mecánica.



a) Posición cerrada (bloqueada).

b) Posición intermedia (desbloqueada).



c) Posición abierta.

FIGURA 3.79. Alicates ajustables.

4. Obténgase para el mecanismo desmodrómico, en la posición representada en la figura 3.80, las velocidades y aceleraciones de todos los puntos señalados median-

te los métodos gráficos de análisis cinemático. Se considera que existe rodadura en los puntos G y B .

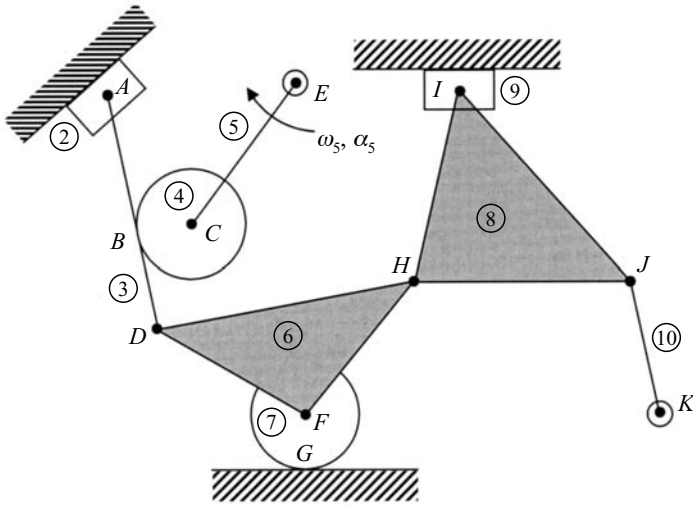


FIGURA 3.80. Mecanismo del problema 4.

5. Ídem para los mecanismos de la figura 3.81.

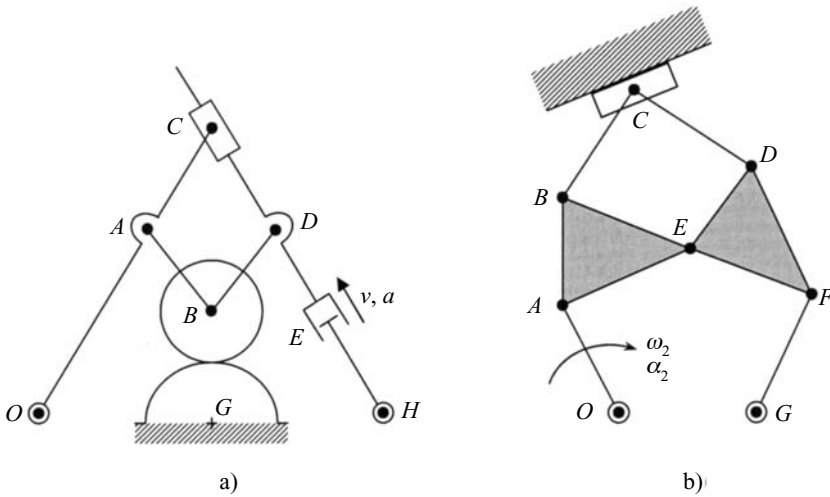


FIGURA 3.81. Mecanismos del problema 5.

6. El diagrama cinemático de la figura 3.82 representa un dispositivo mecánico para la generación de cargas variables y, por tanto, para inducir vibraciones. El mecanismo se encuentra en una posición genérica. Aplicando los métodos gráficos de análisis

cinemático, y para los datos cinemáticos del elemento 2, obtener las velocidades y aceleraciones de los puntos A y B . Para este problema, el muelle entre los elementos 4 y 6 tiene el único propósito de mantener el cierre de los pares de leva.

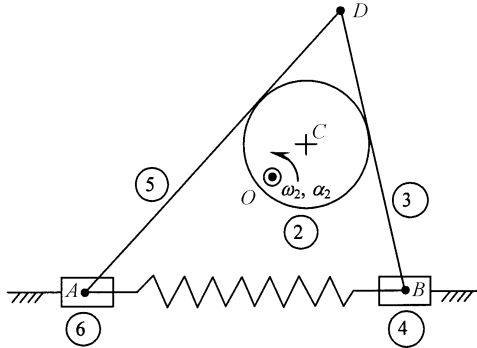


FIGURA 3.82. Mecanismo del problema 6.

7. Considérese la máquina con movimiento alternativo horizontal de retorno rápido, conocida como limadora y representada en la figura 3.83. Sobre el carnero va montado en uno de sus extremos la herramienta cortante, cuya posición viene definida por la variable x . El movimiento alternativo viene generado por una manivela $O_B B$ cuya posición angular φ define la coordenada generalizada del mecanismo. Las características geométricas adicionales de la máquina vienen representadas en el diagrama cinemático de la figura 3.83. Se pide:

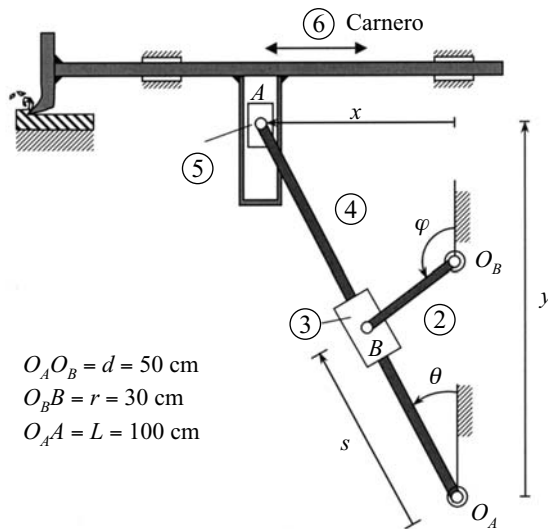


FIGURA 3.83. Mecanismo de retorno rápido.

- 1) Calcular la carrera (rango de movimiento) de la herramienta en función de los datos del problema.
- 2) Resolución del problema de posición del mecanismo: expresar x , y , s y θ en función de φ , y de los datos geométricos.
- 3) Resolución del problema de velocidades: expresar \dot{x} , \dot{y} , \dot{s} y $\dot{\theta}$ en función de φ , x , y , s y θ , y la velocidad de entrada $\dot{\varphi}$.
- 4) Realizar el análisis de singularidades del mecanismo.

4

Síntesis dimensional de mecanismos planos

4.1. Introducción

Anteriormente (capítulo 1), se establecieron dentro del proceso de síntesis de mecanismos dos etapas bien diferenciadas: síntesis estructural y síntesis dimensional (por este orden). En la primera de ellas se trata de determinar, una vez definida la función objetivo, qué tipo de mecanismo es el más adecuado para cumplirla: ¿un mecanismo de levas? ¿un tren de engranajes? ¿un mecanismo de barras? Estas preguntas eran respondidas en una subetapa dentro de la síntesis estructural denominada síntesis de tipo.

A continuación, pero todavía dentro de la etapa de síntesis estructural, quedan preguntas por responder como: ¿Cuántos elementos debería tener el mecanismo? ¿Cuántos grados de libertad son requeridos? ¿Qué configuración estructural es la más adecuada? La obtención de las distintas cadenas cinemáticas con un determinado número de elementos y un determinado número de grados de libertad constituye la respuesta a estas preguntas y es el objeto de la que se denominó síntesis de número en el capítulo 1.

Una vez determinado el mecanismo concreto a utilizar, se inicia la etapa de síntesis dimensional, cuyo objeto es la determinación de las dimensiones significativas del mecanismo para que realice una tarea previamente especificada. Por mecanismo concreto se entiende: todo aquel que tenga definida su configuración topológica aunque no sus dimensiones, como por ejemplo, una biela-manivela, un cuadrilátero articulado o una leva de rotación con seguidor de pie plano. Son dimensiones significativas: las distancias entre rótulas, la forma del perfil de una leva, los diámetros, las excentricidades, etc. Es decir, las dimensiones que definen el comportamiento cinemático del mecanismo, y que en su momento se denominó geometría esencial. Como se verá, algunos planteamientos de síntesis dimensional parten de las ecuaciones de posición del mecanismo, en las cuales aparecen como parámetros a determinar las dimensiones del mismo.

En general, éste es un capítulo con muchas oportunidades para los programas de ordenador MECAN4 y BIEMAN, a los que se aludió en el prólogo de este texto por sus capaci-

dades en el diseño de mecanismos basados en los bloques cuadrilátero articulado y biela-manivela.

4.1.1. Tipos de síntesis dimensional

Dentro de la síntesis dimensional puede establecerse una clasificación basada en el tipo de tarea que debe cumplir el mecanismo. Así se tiene:

1. *Generación de función.* Tiene por objeto la obtención de mecanismos que satisfagan una relación funcional prescrita que coordine las características cinemáticas del movimiento (desplazamiento, ángulos, velocidades, aceleraciones...) entre las barras de entrada y de salida.

Se trata de diseñar un mecanismo que, mientras el elemento de entrada se mueva según la variable x , el de salida lo haga según la función $y = f(x)$, dentro del rango de movimientos del elemento de entrada: $x_0 \leq x \leq x_{n+1}$ (figura 4.1). A veces, la función prescrita no puede ser generada exactamente por el mecanismo, o simplemente es suficiente con que el mecanismo verifique dicha función $y = f(x)$ en un determinado número de puntos, denominados puntos de precisión: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ... $P_j(x_j, y_j)$, ... $P_n(x_n, y_n)$.

La diferencia entre la función generada y la prescrita recibe el nombre de error estructural y se representa por $E = y_g - y$. Esta función de error es nula en los puntos de precisión.

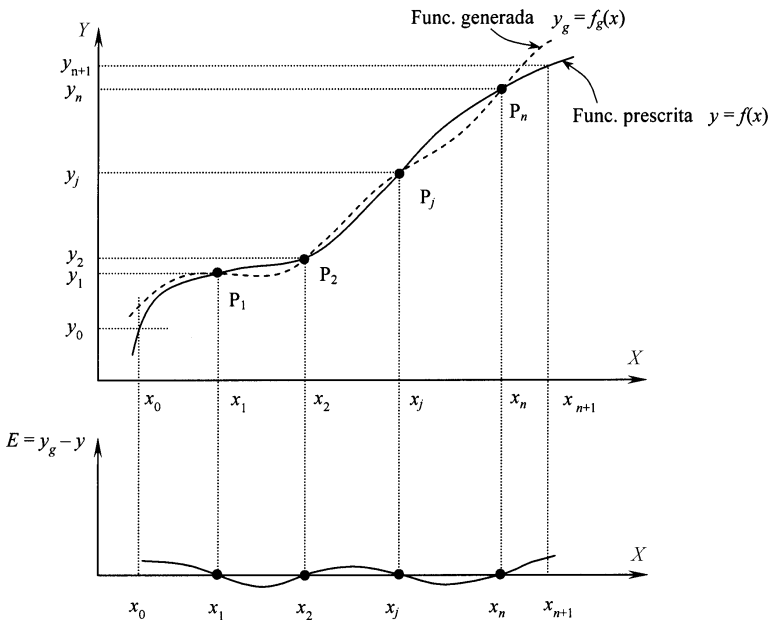


FIGURA 4.1. Generación de función.

Frecuentemente las variables de entrada y salida, en vez de ser magnitudes lineales, son magnitudes angulares. En la figura 4.2 se representa una coordinación angular entre el elemento de entrada de longitud r_a y el de salida de longitud r_b :

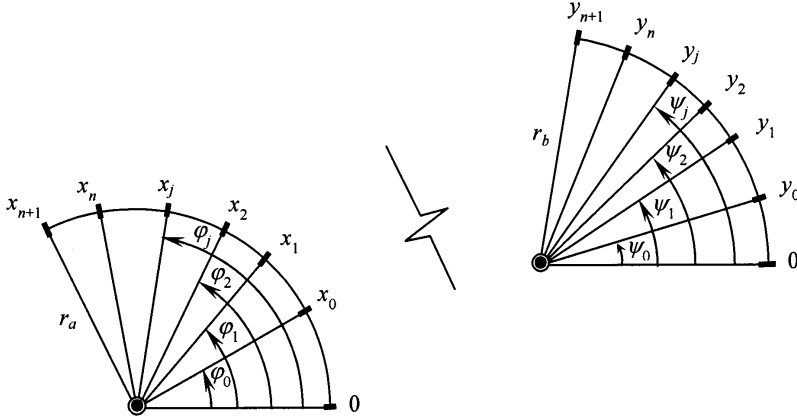


FIGURA 4.2. Generación de función con magnitudes angulares.

El subíndice j indica la posición prescrita j del mecanismo; $\Delta\varphi$, Δx , $\Delta\psi$, Δy son los rangos de las variables φ , x , ψ , y , respectivamente, en los que se especifica la generación de función:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_{n+1} - \varphi_0 \\ \Delta x &= x_{n+1} - x_0 \\ \Delta\psi &= \psi_{n+1} - \psi_0 \\ \Delta y &= y_{n+1} - y_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Como la relación existente entre las variables lineales y angulares es una relación lineal, se verificará:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_j - \varphi_0}{x_j - x_0} &= \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{1}{r_a} \\ \frac{\psi_j - \psi_0}{y_j - y_0} &= \frac{\Delta\psi}{\Delta y} = \frac{1}{r_b} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donde: φ_0 , ψ_0 , x_0 , y_0 son los valores de las variables a partir de los cuales se refieren las correspondientes posiciones φ_j , ψ_j , x_j , y_j de los puntos de precisión. Dados x_0 y x_{n+1} , pueden obtenerse a través de la función a generar, y_0 e y_{n+1} . A continuación, pueden elegirse los extremos de los rangos angulares (φ_0 , φ_{n+1}) y (ψ_0 , ψ_{n+1}) donde ubicar los puntos de precisión. A veces es más práctico elegir (φ_0 , $\Delta\varphi$) y (ψ_0 , $\Delta\psi$). En resumen, las posiciones

angulares correspondientes a los puntos de precisión se despejan de la ecuación [4.2], resultando:

$$\varphi_j = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}(x_j - x_0) + \varphi_0 \quad [4.3]$$

$$\psi_j = \frac{\Delta\psi}{\Delta y}(y_j - y_0) + \psi_0 \quad [4.4]$$

En los diseños es típico elegir $\Delta\varphi$ y $\Delta\psi$ entre 60° y 120° , para que tanto la barra de entrada como la de salida no tengan que rebasar la línea de articulaciones fijas dentro del rango en que se desea generar la función.

2. *Generación de trayectorias.* El objetivo o función a desempeñar consiste en que un punto de un elemento flotante (figura 4.3) de un mecanismo trace una trayectoria previamente especificada. Si la trayectoria deseada está definida mediante puntos de precisión a los que, además, se les hace corresponder con una serie de posiciones del elemento de entrada, a esta síntesis se la denomina *generación de trayectorias con restricción del elemento de entrada* (figura 4.3).

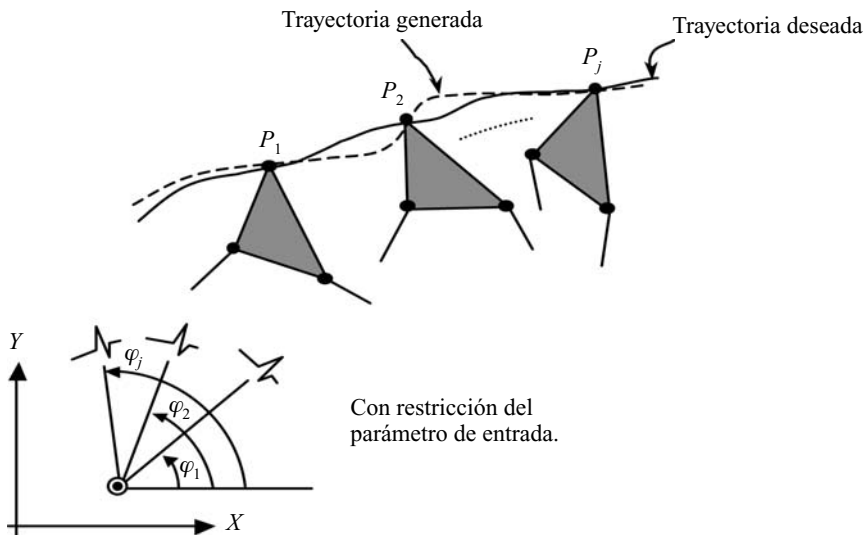


FIGURA 4.3. Generación de trayectorias.

3. *Guiado de sólido rígido.* Su objetivo es que un elemento flotante de un mecanismo se sitúe según una secuencia de posiciones preestablecida (figura 4.4). En este caso, también se da la posibilidad de *guiado de sólido rígido con restricción del elemento de entrada*.

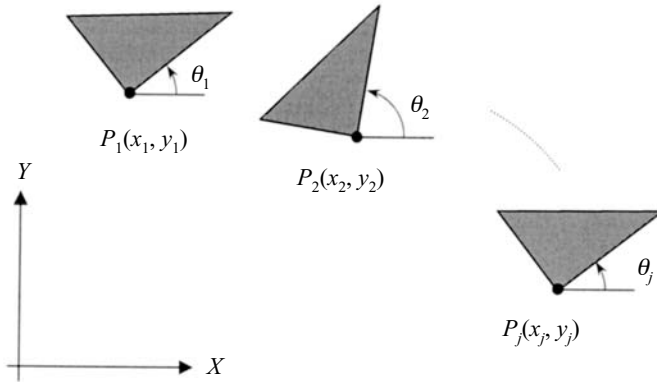


FIGURA 4.4. Guiado de sólido rígido.

4.2. Síntesis de generación de funciones

El método que va a presentarse para generar la función deseada, hará uso del cuadrilátero articulado como medio de explicación. Sin embargo, es totalmente válido para cualquier mecanismo cuya relación entrada-salida puede ser expresada mediante una relación funcional entre dos variables. Obsérvese que de la afirmación anterior se desprende que los mecanismos a los que se está aludiendo son desmodrómicos. La relación funcional puede expresarse de la siguiente manera:

$$f_1(a_1, a_2, \dots, a_n, \varphi, \psi) = 0 \quad [4.5]$$

Donde: φ y ψ son las variables de entrada y salida respectivamente, y a_1, a_2, \dots, a_n son los parámetros dimensionales. En principio, el mecanismo cuya ecuación de posición es [4.5] puede coordinar hasta n puntos de precisión (φ_i, ψ_i) para sus variables de entrada y salida. Sustituyendo cada uno de estos puntos en la ecuación [4.5] se obtienen n ecuaciones con n incógnitas, las variables a_1, a_2, \dots, a_n que definen las dimensiones del mecanismo. Como se vio en el capítulo 3 estas ecuaciones no son lineales y exigen (en general) una técnica de resolución numérica.

4.2.1. Relación funcional entrada-salida para un cuadrilátero articulado: Ecuación de Freudenstein

Esta ecuación relaciona las posiciones de los elementos de entrada y salida de un cuadrilátero articulado. Para obtener dicha ecuación se utilizará un procedimiento fácilmente extrapolable a cualquier tipo de mecanismo. De hecho, al final de este epígrafe se aplicará también al mecanismo de biela-manivela.

Sea el cuadrilátero articulado de la figura 4.5:

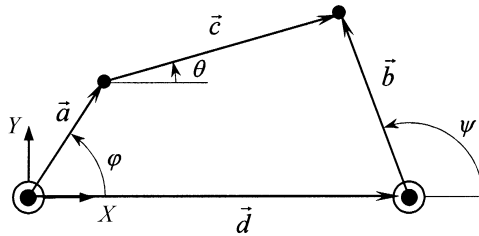


FIGURA 4.5. Polígono vectorial de cierre.

La ecuación vectorial de cierre es:

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \quad [4.6]$$

Esta ecuación puede descomponerse según las direcciones x e y :

$$a \cos \varphi + c \cos \theta = d + b \cos \psi \quad [4.7]$$

$$a \sin \varphi + c \sin \theta = b \sin \psi \quad [4.8]$$

A continuación se elimina θ entre ambas ecuaciones. Para ello se despejan los términos en θ en cada ecuación, se elevan al cuadrado ambas y se suman; reordenando y agrupando términos se obtiene el siguiente resultado:

$$c^2 = d^2 + b^2 + a^2 - 2ab \cos(\psi - \varphi) - 2ad \cos \varphi + 2db \cos \psi \quad [4.9]$$

Dividiendo la anterior ecuación por $2ab$ queda:

$$(d/a) \cdot \cos \psi - (d/b) \cdot \cos \varphi + (d^2 + b^2 + a^2 - c^2)/2ab = \cos(\psi - \varphi) \quad [4.10]$$

Siendo esta última expresión, la denominada *ecuación de Freudenstein*. También puede escribirse de la siguiente manera:

$$K_1 \cos \psi - K_2 \cos \varphi + K_3 = \cos(\psi - \varphi) \quad [4.11]$$

Con

$$K_1 = d/a \quad [4.12]$$

$$K_2 = d/b \quad [4.13]$$

$$K_3 = (d^2 + b^2 + a^2 - c^2)/2ab \quad [4.14]$$

De esta forma, la ecuación [4.10] no lineal en las variables de diseño a, b, c, d , se convierte ahora en una ecuación lineal en K_1, K_2, K_3 .

Operando de la misma manera, pueden obtenerse las relaciones (ψ, θ) y (φ, θ) :

$$R_1 \cos\psi - R_2 \cos\theta + R_3 = \cos(\psi - \theta) \quad [4.15]$$

$$P_1 \cos\varphi + P_2 \cos\theta - P_3 = \cos(\varphi - \theta) \quad [4.16]$$

Con

$$R_1 = d/c; R_2 = d/b; R_3 = (d^2 + c^2 + b^2 - a^2)/2bc \quad [4.17]$$

$$P_1 = d/c; P_2 = d/a; P_3 = (d^2 + c^2 + a^2 - b^2)/2ac \quad [4.18]$$

Siguiendo el mismo procedimiento, pueden obtenerse ecuaciones análogas a la de Freudenstein en otros mecanismos. Así, para el caso del mecanismo de biela-manivela representado en la figura 4.6:

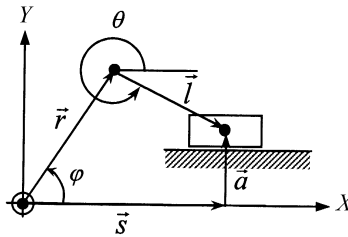


FIGURA 4.6. Mecanismo de biela-manivela.

La ecuación de cierre es:

$$\vec{r} + \vec{l} = \vec{s} + \vec{a} \quad [4.19]$$

Realizando la descomposición de esta ecuación según abscisas y ordenadas:

$$r \cos \varphi + l \cos \theta = s \quad [4.20]$$

$$r \operatorname{sen} \varphi + l \operatorname{sen} \theta = a \quad [4.21]$$

Operando de forma análoga al caso anterior resulta:

$$s^2 = l^2 - r^2 - a^2 + 2rs \cos \varphi + 2ar \operatorname{sen} \varphi \quad [4.22]$$

Ecuación que puede expresarse de la siguiente manera:

$$s^2 = T_1 s \cos \varphi + T_2 \operatorname{sen} \varphi - T_3 \quad [4.23]$$

Donde:

$$T_1 = 2r; T_2 = 2ar; T_3 = r^2 + a^2 - l^2 \quad [4.24]$$

4.2.2. Síntesis de generación de funciones con tres puntos de precisión

Considérese inicialmente la resolución de este problema por medio de un cuadrilátero articulado. Se trata de obtener las longitudes de los lados a , b , c , d para tres posiciones dadas: $P_1(\varphi_1, \psi_1)$, $P_2(\varphi_2, \psi_2)$, $P_3(\varphi_3, \psi_3)$. Sustituyendo en la ecuación de Freudenstein las tres parejas de valores, se obtendrá el siguiente sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} K_1 \cos \psi_1 - K_2 \cos \varphi_1 + K_3 &= \cos(\psi_1 - \varphi_1) \\ K_1 \cos \psi_2 - K_2 \cos \varphi_2 + K_3 &= \cos(\psi_2 - \varphi_2) \\ K_1 \cos \psi_3 - K_2 \cos \varphi_3 + K_3 &= \cos(\psi_3 - \varphi_3) \end{aligned} \quad [4.25]$$

Puesto en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos \psi_1 & -\cos \varphi_1 & 1 \\ \cos \psi_2 & -\cos \varphi_2 & 1 \\ \cos \psi_3 & -\cos \varphi_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\psi_1 - \varphi_1) \\ \cos(\psi_2 - \varphi_2) \\ \cos(\psi_3 - \varphi_3) \end{Bmatrix} \quad [4.26]$$

Este sistema puede ser resuelto mediante la regla de Cramer u otro procedimiento, obteniéndose los valores de las incógnitas K_i . A partir de estos valores y de las relaciones [4.12]-[4.14], se obtiene un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas (a , b , c , d). Eligiendo un valor para una de ellas, las otras tres quedan determinadas. El tamaño del mecanismo depende del valor elegido para el primero de los lados. Sin embargo, la solución obtenida (K_1 , K_2 , K_3) es independiente del tamaño del mecanismo ya que todos los cuadriláteros dimensionalmente semejantes verifican las mismas relaciones angulares. Es decir, considerando dos soluciones posibles de este problema, (a_1 , b_1 , c_1 , d_1) y (a_2 , b_2 , c_2 , d_2), se verifica:

$$\lambda = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \quad [4.27]$$

donde λ es el factor de escala entre los dos cuadriláteros.

Nótese que a y b pueden resultar negativos. Cuando esto ocurre, significa que el sentido del vector que representa la barra en cuestión es el contrario (figura 4.7).

Hay que realizar otra aclaración. El procedimiento garantiza que el mecanismo pueda ser ensamblado en las posiciones de diseño $P_1(\varphi_1, \psi_1)$, $P_2(\varphi_2, \psi_2)$, $P_3(\varphi_3, \psi_3)$. Sin embargo, puede ocurrir que dichas posiciones pertenezcan a distintas configuraciones. Como se sabe, si el cuadrilátero cumple el criterio de Grashof, no se puede pasar de una configuración a otra sin desmontar el mecanismo. En este caso, el diseño no sería válido.

Como se indicó en el apartado 4.1, otra relación funcional entrada-salida, distinta de la que relaciona los ángulos φ y ψ , es la que relaciona las longitudes de los arcos descritos

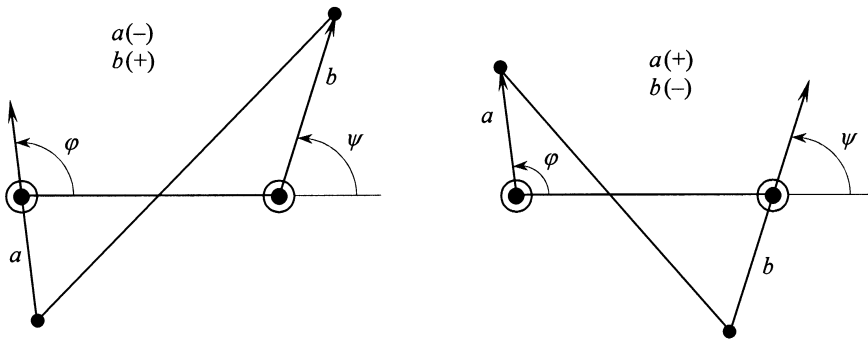


FIGURA 4.7. Interpretación de los valores negativos de a y b .

por los puntos extremos de las barras con punto fijo (figura 4.8). Es decir, la relación $y = f(x)$ a través de los puntos de precisión $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$.

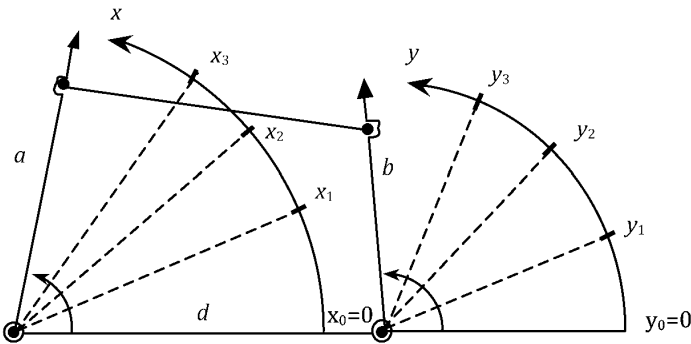


FIGURA 4.8. Relación entre variables lineales en un cuadrilátero articulado.

Las relaciones funcionales $y = f(x), \psi = \psi(\varphi)$ son equivalentes, y puede pasarse de una a otra a través de las ecuaciones [4.3] y [4.4] que en este caso pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} x \\ \psi &= \frac{\Delta\psi}{\Delta y} y \end{aligned} \tag{4.28}$$

4.2.3. Generalización para m puntos de precisión

A continuación se va a generalizar este procedimiento para cualquier mecanismo de 1 gdl. Tal como se indicó en el punto 4.2, para ciertos mecanismos puede obtenerse una

relación funcional no lineal entre la variable de entrada φ y la de salida ψ como la expresada por la ecuación [4.5]. No obstante, en determinadas ocasiones es posible linealizar dicha ecuación siguiendo un procedimiento análogo al de Freudenstein. Cuando se consigue, la relación funcional entrada-salida puede expresarse en función de m parámetros de diseño K_i , según la siguiente ecuación:

$$K_1 f_1(\varphi, \psi) + K_2 f_2(\varphi, \psi) + \dots + K_m f_m(\varphi, \psi) = g(\varphi, \psi) \quad [4.29]$$

O, de forma abreviada,

$$\sum_{i=1}^m K_i f_i(\varphi, \psi) = g(\varphi, \psi) \quad [4.30]$$

Dado que hay m parámetros de diseño, puede realizarse una síntesis de generación de función de hasta m parejas de puntos $P_i(\varphi_i, \psi_i)$. En caso de no poder linealizar la ecuación de posición [4.5], lo único que cambia es el método de resolución del sistema de ecuaciones.

4.2.4. Selección de los puntos de precisión

En principio, la función deseada $y = f(x)$, y la generada $y_g = f_g(x)$, sólo coinciden en los puntos de precisión. La variación del error estructural depende de donde se hayan colocado los puntos de precisión dentro del rango de variación de la variable x . Se trata, por tanto, de seleccionar los n puntos de precisión x_i dentro del rango Δx , de manera que el error estructural ($E = y_g - y$) sea minimizado. Puede demostrarse que ello se consigue mediante “el espaciado óptimo de Chebyshev”, el cual distribuye los puntos de precisión de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$x_i = \frac{1}{2}(x_0 + x_{n+1}) - \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_0) \cos \frac{\pi(2i-1)}{2n} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad [4.31]$$

Siendo (x_0, x_{n+1}) los extremos del rango $\Delta x = x_{n+1} - x_0$ donde se encuentran los n puntos de precisión x_i , tal y como se dispuso en la figura 4.1.

4.2.5. Aumento del número de puntos de precisión

El número de puntos de precisión puede aumentarse introduciendo en la ecuación de Freudenstein (o en la del mecanismo que se esté utilizando) nuevos parámetros de diseño que hagan el papel de incógnitas. El problema estriba en que, al aumentar el número de parámetros en la ecuación, ésta deja de ser lineal, con lo que el procedimiento de cálculo es más complejo y costoso.

A modo de ejemplo, se pueden conseguir cinco puntos de precisión, sin más que introducir como parámetros de diseño los ángulos que definen los inicios de los intervalos φ_0 y ψ_0 (figura 4.9).

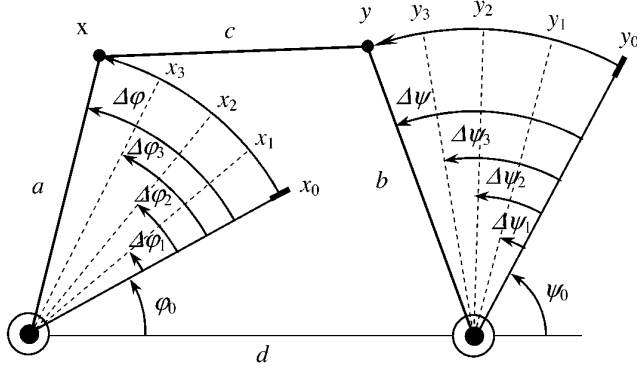


FIGURA 4.9. Aumento del número de puntos de precisión.

Ahora, la ecuación de Freudenstein adopta la forma:

$$K_1 \cos(\Delta\psi + \psi_0) - K_2 \cos(\Delta\varphi + \varphi_0) + K_3 = \cos(\Delta\psi - \Delta\varphi + \psi_0 - \varphi_0) \quad [4.32]$$

Donde los parámetros de diseño son: K_1, K_2, K_3, φ_0 y ψ_0 .

Ejemplo de aplicación 4.1. Diseñar un cuadrilátero articulado que genere la función $y = \sqrt{x}$ en el intervalo: $0 \leq x \leq 2$.

De acuerdo con los datos del problema, los extremos y el rango de la variable x son:

$$x_0 = 0 \quad ; \quad x_4 = 2 \quad ; \quad \Delta x = 2$$

Utilizando el espaciado de Chebyshev para obtener los puntos de precisión:

$$x_1 = \frac{1}{2}(0 + 2) - \frac{1}{2}(2 - 0) \cos \frac{\pi(2 \cdot 1 - 1)}{2 \cdot 3} = 0,13397$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(0 + 2) - \frac{1}{2}(2 - 0) \cos \frac{\pi(2 \cdot 2 - 1)}{2 \cdot 3} = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(0 + 2) - \frac{1}{2}(2 - 0) \cos \frac{\pi(2 \cdot 3 - 1)}{2 \cdot 3} = 1,86603$$

Los correspondientes valores de y son:

$$y_0 = 0; \quad y_1 = 0,36602; \quad y_2 = 1; \quad y_3 = 1,36603; \quad y_4 = 1,41421; \quad \Delta y = 1,41421$$

Para ubicar las anteriores parejas de puntos en sus correspondientes intervalos angulares, inicialmente se eligen los siguientes valores:

$$\varphi_0 = 45^\circ; \quad \Delta\varphi = 60^\circ; \quad \psi_0 = 0^\circ; \quad \Delta\psi = 60^\circ$$

A partir de ellos, las coordenadas lineales (x_i, y_i) de los puntos de precisión se transforman en sus correspondientes coordenadas angulares (φ_i, ψ_i) mediante las ecuaciones [4.3] y [4.4]:

$$\varphi_1 = \frac{60^\circ}{2}(0,13397 - 0) + 45^\circ = 49,0191^\circ$$

$$\varphi_2 = \frac{60^\circ}{2}(1 - 0) + 45^\circ = 75^\circ$$

$$\varphi_3 = \frac{60^\circ}{2}(1,86603 - 0) + 45^\circ = 100,9809^\circ$$

$$\psi_1 = \frac{60^\circ}{1,41421}(0,36602 - 0) = 15,52895^\circ$$

$$\psi_2 = \frac{60^\circ}{1,41421}(1 - 0) = 42,42651^\circ$$

$$\psi_3 = \frac{60^\circ}{1,41421}(1,36603 - 0) = 57,95559^\circ$$

Despejando los parámetros de diseño en la ecuación [4.26]:

$$\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & -\cos \varphi_1 & 1 \\ \cos \psi_2 & -\cos \varphi_2 & 1 \\ \cos \psi_3 & -\cos \varphi_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \cos(\psi_1 - \varphi_1) \\ \cos(\psi_2 - \varphi_2) \\ \cos(\psi_3 - \varphi_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2,55857 \\ -1,43046 \\ 2,36105 \end{Bmatrix}$$

Adoptando para el elemento fijo $d = 10$ unidades, el resto de los lados se obtienen de las ecuaciones [4.12]-[4.14]:

$$a = -3,90843 \text{ un.}$$

$$b = -6,99076 \text{ un.}$$

$$c = 5,92456 \text{ un.}$$

En la figura 4.10 se representa el mecanismo a escala:

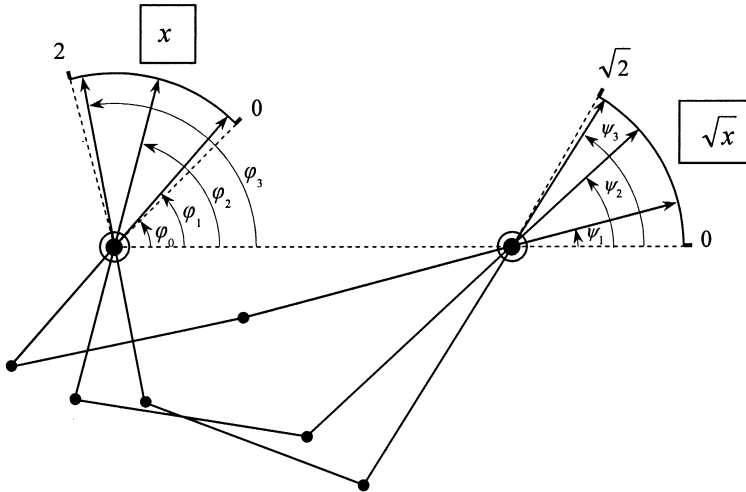


FIGURA 4.10. Cuadrilátero solución del ejemplo 4.1.

4.3. Síntesis de generación de trayectorias

Inicialmente, se presentará la generación de trayectorias con tramos cuasi-rectilíneos. Ésta es una aplicación habitual en el diseño de mecanismos, cuyo fundamento se encuentra en las bases del movimiento plano, expuestas en el capítulo 2. A continuación, se expone una metodología para construir trayectorias a partir de puntos de precisión. Será estudiada tanto desde un punto de vista gráfico como analítico. Finalmente, se incluye una propiedad de los cuadriláteros articulados mediante la que se obtienen los denominados mecanismos cognados, y que es de gran importancia para obtener distintas alternativas de diseño.

4.3.1. Generación de tramos cuasi-rectilíneos

En este subapartado se describe la propiedad de un punto del acoplador para generar trayectorias con tramos aproximadamente rectilíneos, y su aplicación a casos prácticos de diseño. La demostración completa en torno a esta propiedad exige desarrollos matemáticos complejos que aportan poco conceptualmente, y que podrían desviar la atención del lector. Por esta razón, no todos ellos han sido incluidos aquí. Un mayor detalle de las demostraciones matemáticas puede encontrarse en las referencias clásicas (Hall, 1961; Hain, 1967; Dijksman, 1976).

1. *Cúbica de curvatura estacionaria.* Este epígrafe podría estar perfectamente ubicado dentro del capítulo 2 de geometría cinemática del movimiento plano. Sin embargo, tie-

ne una aplicación muy específica en la síntesis de generación de trayectorias. En dicho capítulo se explicó la forma de obtener radios de curvatura de puntos del plano móvil a partir de la fórmula de Euler-Savary o del teorema de Hartmann. El conocimiento del radio de curvatura permite obtener la circunferencia osculadora de la trayectoria del punto considerado. Ya se estudió cómo una curva y su circunferencia osculadora poseían un contacto de segundo orden (igualdad hasta la segunda derivada), lo cual supone tres puntos de contacto infinitamente próximos. La búsqueda de un contacto de orden superior (cuatro o más puntos de contacto), entre la trayectoria de un punto y su circunferencia osculadora conduce hacia aquellos puntos de la trayectoria en los que su radio de curvatura es estacionario para una posición dada. Es decir,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad [4.33]$$

El lugar geométrico de los puntos del plano móvil que cumplen esta propiedad es una curva que recibe el nombre de *cúbica de curvatura estacionaria* (c.c.e.), dado que, como se verá, es un polinomio de grado tres.

Puede demostrarse que dicho lugar geométrico puesto en coordenadas polares, según la referencia (ya utilizada en el capítulo 2) de la figura 4.11, tiene la expresión:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{A \cdot \cos \theta} + \frac{1}{B \cdot \text{sen} \theta} \quad [4.34]$$

donde A y B son dos parámetros que dependen de la geometría del movimiento, y que adquieren un valor concreto para una determinada posición del plano móvil.

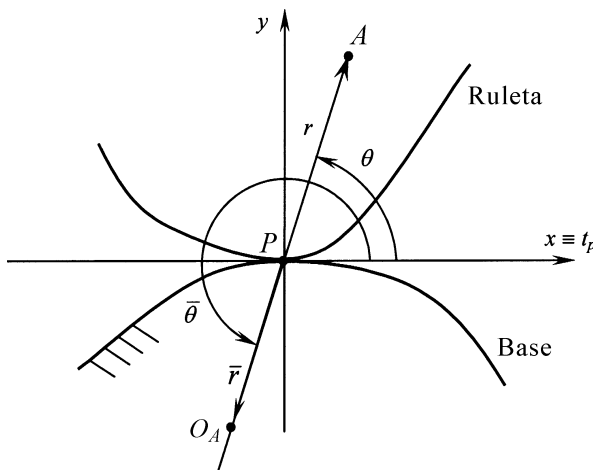


FIGURA 4.11. Sistema de referencia de la c.c.e.

En coordenadas cartesianas:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{A r \cos \theta} + \frac{1}{B r \operatorname{sen} \theta} \quad [4.35]$$

$$(x^2 + y^2) \left(\frac{1}{Ax} + \frac{1}{By} \right) = 1 \quad [4.36]$$

De [4.36] se deduce que dicha curva algebraica es una cúbica. Utilizando las coordenadas paramétricas α y β , se obtiene otra interesante forma de representar esta curva:

$$\alpha = \frac{x^2 + y^2}{x} \quad [4.37]$$

$$\beta = \frac{x^2 + y^2}{y} \quad [4.38]$$

Que substituyendo en [4.36] da lugar a la recta:

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} = 1 \quad [4.39]$$

Las ecuaciones [4.37] y [4.38] representan dos haces de circunferencias de diámetros α y β sobre los ejes x e y , respectivamente:

$$\left(x - \frac{\alpha}{2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad [4.40]$$

$$x^2 + \left(y - \frac{\beta}{2} \right)^2 = \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 \quad [4.41]$$

A partir de la cúbica en coordenadas paramétricas, ecuaciones [4.37]-[4.39], se va a describir un procedimiento gráfico para obtener puntos de la cúbica.

Se toma un punto cualquiera v de la recta [4.39] de coordenadas (α_v, β_v) . Los valores de estos parámetros se llevan a las circunferencias [4.40] y [4.41]. Estas circunferencias intersectan en puntos de la cúbica. En la figura 4.12 puede verse dicha construcción gráfica. En realidad, basta trazar la línea \overline{ZT} y en la intersección con la recta perpendicular a la misma que pasa por el polo P , se encontrará el punto $V(x_v, y_v)$ de la cúbica. En efecto, al ser \overline{PZ} y \overline{PT} diámetros de las circunferencias, V ve bajo un ángulo de 90° a \overline{PZ} y \overline{PT} , luego \overline{VZ} y \overline{VT} están alineados.

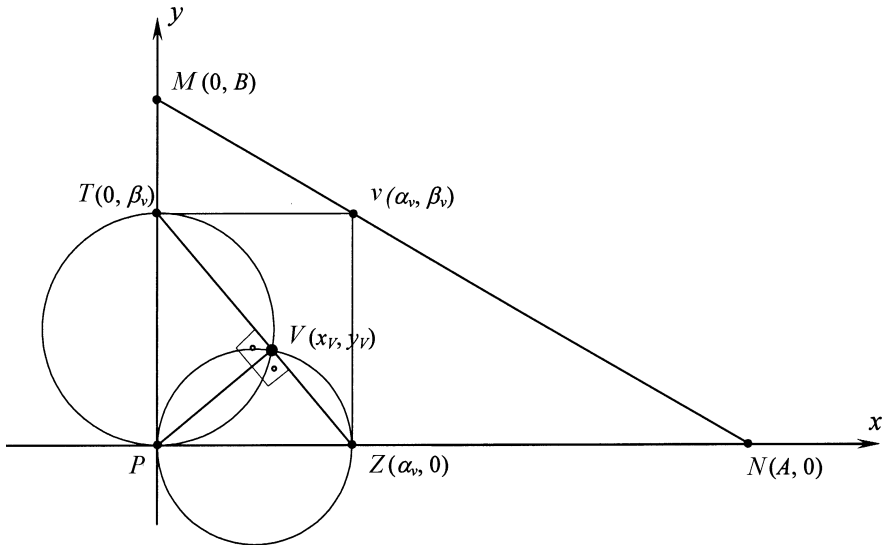


FIGURA 4.12. Obtención de puntos de la c.c.e.

2. *Cúbica de centros de curvatura estacionarios.* Los centros de curvatura de aquellos puntos que poseen curvatura estacionaria constituyen, asimismo, un lugar geométrico estacionario. Dicho lugar geométrico puede determinarse a partir de las ecuaciones de la cúbica estacionaria [4.34] y de la fórmula de Euler-Savary [2.44] que aquí se reproduce:

$$\left(\frac{1}{\overline{O_A P}^*} + \frac{1}{\overline{PA}^*} \right) \cdot \text{sen } \theta = \frac{1}{\delta^*}$$

Ésta es una ecuación algebraica en la que los términos con (*) tienen un módulo y un signo que depende de su orientación. En concreto, se asumió el criterio de adoptar \overline{PA}^* siempre positivo, y $\overline{O_A P}^*$ positivo si coincide con el sentido de \overline{PA}^* y negativo en caso contrario. Para la situación representada en la figura 4.11, el segmento orientado \overline{PA}^* es igual a la coordenada polar r y $\overline{O_A P}^*$ es un segmento positivo que se puede escribir $\overline{O_A P}^* = \bar{r}$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de Euler-Savary, queda:

$$\frac{1}{\bar{r}} + \frac{1}{r} = \frac{1}{\delta^* \cdot \text{sen } \theta} \tag{4.42}$$

Llevando [4.34] a [4.42] resulta:

$$\frac{1}{\bar{r}} + \frac{1}{A \cdot \cos \theta} + \frac{1}{B \cdot \text{sen } \theta} = \frac{1}{\delta^* \cdot \text{sen } \theta} \tag{4.43}$$

La posición de O_A viene definida por las coordenadas polares \bar{r} y $\bar{\theta}$ (ver figura 4.11). Teniendo en cuenta que, en este caso, $\bar{\theta} = \theta + \pi$, queda:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{A \cdot \cos \bar{\theta}} + \frac{1}{\bar{B} \cdot \sin \bar{\theta}} \quad [4.44]$$

Donde:

$$\frac{1}{\bar{B}} = \frac{1}{B} - \frac{1}{\delta^*} \quad [4.45]$$

Se puede comprobar que a esta ecuación [4.44] se llega, igualmente, en el caso de que $\overline{O_A P^*}$ esté orientado en sentido contrario a $\overline{PA^*}$.

La ecuación [4.44] es similar a la ecuación [4.34], siendo la única diferencia el coeficiente \bar{B} . Es también una cúbica que se denomina *cúbica de centros de curvatura estacionarios* (c.c.c.e.). Para la obtención de puntos de esta curva puede realizarse la misma construcción que se explicó anteriormente para la obtención de puntos de la c.c.e. En la figura 4.13 se muestra una construcción gráfica en la que se indica cómo obtener el centro de curvatura de un determinado punto de la cúbica de curvatura estacionaria.

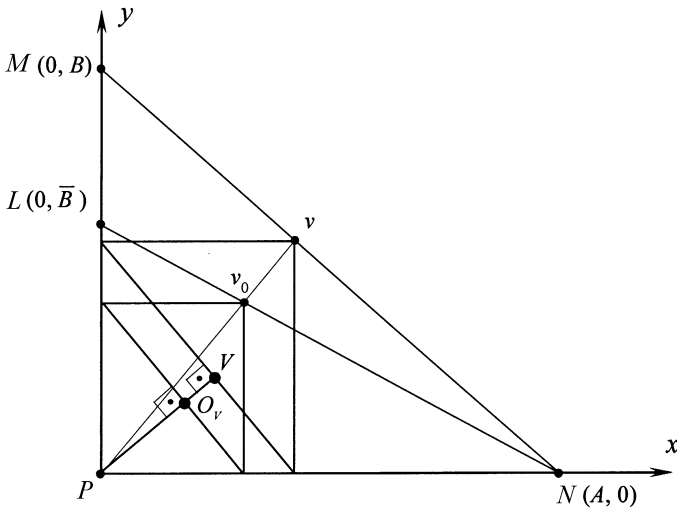


FIGURA 4.13. Obtención de puntos de la c.c.c.e.

La intersección de \overline{vP} con \overline{NL} da lugar al punto v_0 cuyas coordenadas paramétricas definen las coordenadas cartesianas del centro de curvatura O_v . Esto es debido a que, por ser paralelas las diagonales principales de los rectángulos, éstos son semejantes, y por tanto sus diagonales secundarias son coincidentes. A partir de v_0 y aplicando la construcción de la figura 4.12, se obtiene O_v .

3. *Propiedades de las cúbicas.* Ambas curvas poseen las mismas propiedades ya que la forma de sus ecuaciones es la misma. Sus propiedades más importantes son:

1. Poseen un punto doble en el polo P cuyas tangentes son precisamente los ejes coordenados.
2. Cada cúbica posee una asíntota. En efecto, si se expresa la curva en polares y se hace tender r hacia infinito se obtiene:

$$0 = \frac{1}{A \cos \theta} + \frac{1}{B \sin \theta} \rightarrow \operatorname{tg} \theta = -\frac{A}{B}$$

En conclusión:

$$\text{Pendiente de la c.c.e: } \operatorname{tg} \theta = -\frac{A}{B} \quad [4.46]$$

$$\text{Pendiente de la c.c.c.e: } \operatorname{tg} \bar{\theta} = -\frac{A}{B} \quad [4.47]$$

La figura 4.14 muestra la c.c.e. y la c.c.c.e correspondientes a una posición concreta del plano acoplador de un cuadrilátero articulado:

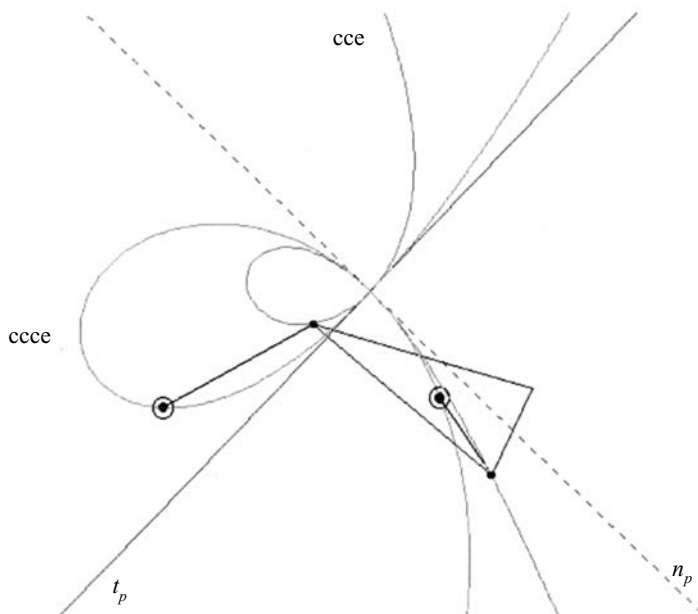


FIGURA 4.14. Cúbicas.

4. *Punto de Ball*. Hay un punto de la c.c.e. que presenta un especial interés práctico. Es aquel punto cuya curvatura no sólo es estacionaria, sino que además es nula. Dicho punto se conoce con el nombre de *punto de Ball* y está situado en la intersección de la c.c.e. con la circunferencia de las inflexiones.

El punto de Ball, K , tiene su centro de curvatura en el infinito, y por lo tanto, la normal a la trayectoria de dicho punto, recta \overline{PK} , es la asíntota de la c.c.e. Así pues, una forma sencilla de obtener el punto de Ball consiste en obtener la intersección de una recta que pasando por P es paralela a la asíntota de la c.c.e., y la circunferencia de las inflexiones (figura 4.15). Como no existe más que una dirección asíntótica, sólo existe un punto de Ball.

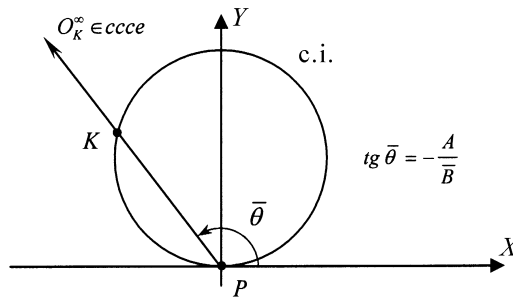


FIGURA 4.15. Obtención del punto de Ball.

A continuación se presenta un procedimiento gráfico (figura 4.16) para la obtención del punto de Ball en el plano acoplador de un cuadrilátero articulado:

1. Las articulaciones móviles A y B son puntos de la c.c.e. y sus correspondientes centros de curvatura O_A y O_B son puntos de la c.c.c.e.
2. A partir de estas dos parejas de puntos conjugados se obtiene la circunferencia de las inflexiones.
3. A partir de O_A y O_B se obtienen dos puntos a_0 y b_0 de la recta en coordenadas paramétricas, cuya pendiente es $-\frac{\bar{B}}{A}$.
4. Trazamos una recta perpendicular a la anterior por el polo P . Su pendiente será, por tanto, $\frac{A}{\bar{B}}$.
5. Una recta simétrica a la anterior respecto de la tangente polar tiene por pendiente $-\frac{A}{\bar{B}}$, justo la misma que la asíntota de la c.c.c.e. La intersección de esta recta con la circunferencia de las inflexiones da lugar al punto de Ball, K .

De la trayectoria de un punto de Ball puede esperarse un tramo cuasi-rectilíneo. Esto es debido a que, en general, las trayectorias cambian su curvatura siguiendo una transición

suave. En la práctica, es probable que en las cercanías del punto de Ball se tengan grandes radios de curvatura.

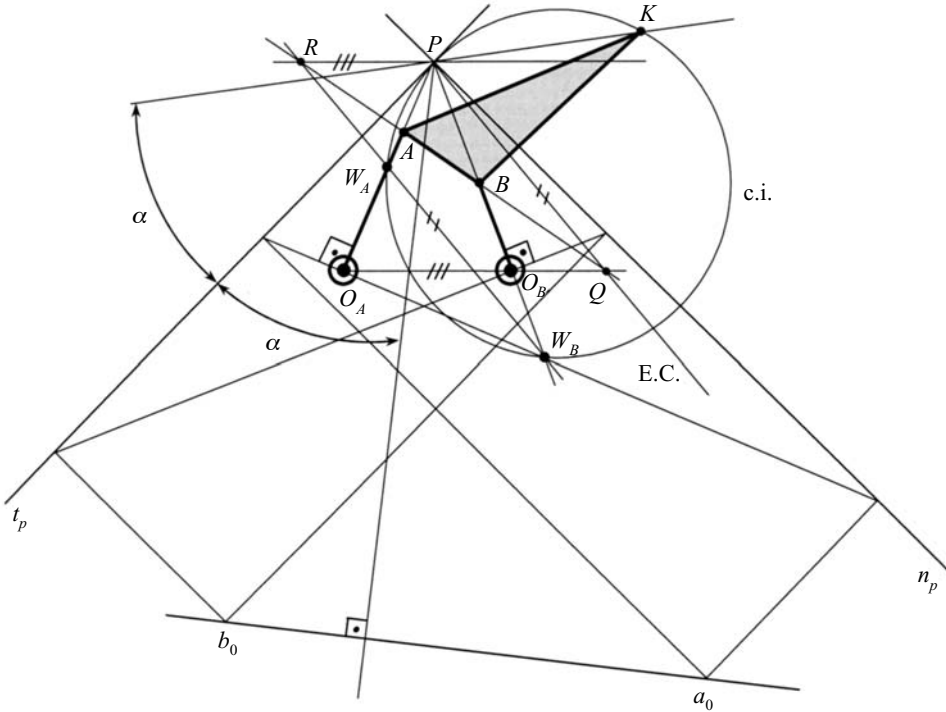


FIGURA 4.16. Método gráfico para la obtención del punto de Ball.

En la figura 4.17 se representa la posición de un punto de Ball en el acoplador de un cuadrilátero articulado. Puede comprobarse que se encuentra ubicado en la intersección de la circunferencia de las inflexiones y la c.c.e.

A continuación se representa la trayectoria generada por el anterior punto de Ball de la figura 4.17 que como puede observarse posee un tramo cuasi-rectilíneo (figura 4.18).

5. Posición cicloidal. Aplicaciones prácticas. El diseño de un mecanismo queda extraordinariamente simplificado cuando alguna de las cúbicas (o las dos) degeneran en el producto de una circunferencia por una recta. Estas degeneraciones ocurren, en general, en posiciones particulares del mecanismo que pueden producirse varias veces a lo largo de un ciclo del movimiento. Concretamente, existe una posición del plano móvil, denominada *posición cicloidal*, en que las dos cúbicas degeneran. Un plano móvil pasa por una posición cicloidal cuando el diámetro δ de la circunferencia de las inflexiones permanece estacionario en dicha posición. Esta denominación tiene su origen en la analogía existente con el movimiento cicloidal, en el que por ser las polodias circunferencias, el valor de δ es constante para todo el movimiento.

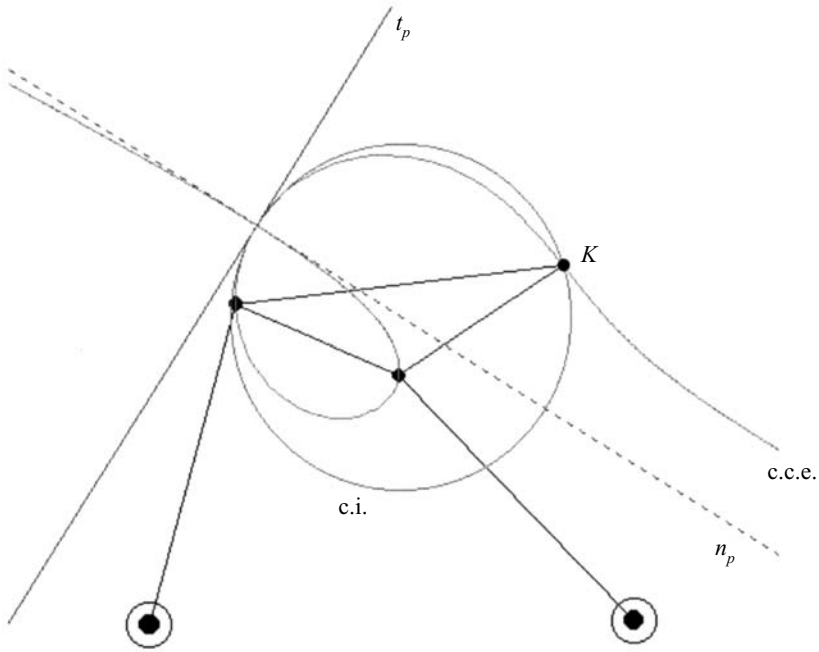


FIGURA 4.17. Posición de un punto de Ball.

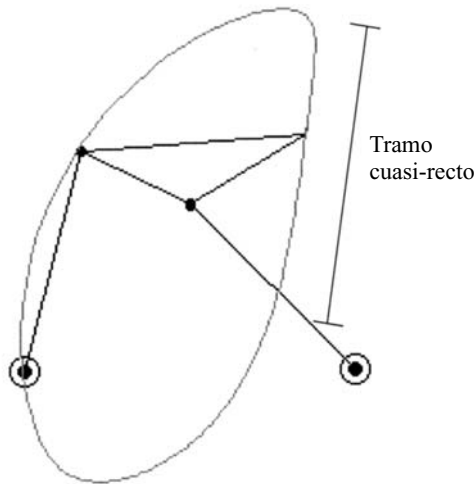


FIGURA 4.18. Trayectoria con tramo cuasi-recto de un punto de Ball.

Puede demostrarse que la estacionariedad de δ implica:

$$\frac{1}{A} = 0 \quad [4.48]$$

Despejando $\frac{1}{A}$ de la ecuación de la cúbica resulta:

$$\frac{1}{A} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{B \cdot \text{sen } \theta} \right) \cdot \cos \theta = 0 \quad [4.49]$$

Las soluciones de la ecuación [4.49] son:

$$\cos \theta = 0 \quad [4.50]$$

$$r = B \cdot \text{sen } \theta \quad [4.51]$$

La ecuación [4.50] implica $\theta = \frac{\pi}{2}$, que es la normal polar. La ecuación [4.51] representa una circunferencia de diámetro B , tangente a la tangente polar en el CIR.

De igual manera, la c.c.c.e. degenera en la normal polar y en una circunferencia, $\bar{r} = \bar{B} \cdot \text{sen } \theta$, tangente a la tangente polar en el CIR. Así pues, en la posición cicloidal, B , \bar{B} y δ^* son los diámetros de tres circunferencias tangentes en el CIR. En este caso, la dirección de la asíntota a la c.c.c.e. tiene por pendiente $\pm\infty$, es decir, la dirección de la normal polar, por lo que el punto de Ball coincide con el polo de inflexiones I . Este hecho simplifica notablemente el diseño de un cuadrilátero articulado con un tramo aproximadamente rectilíneo. Un ejemplo es el caso de las grúas portuarias (figura 4.19), muy utilizadas en los muelles para la carga y descarga de barcos. En la figura 4.20 se muestra su construcción cinemática en una posición cicloidal. La trayectoria del punto de acoplador posee un tramo aproximadamente recto, cuyos extremos definen el rango de movimientos de la grúa.



FIGURA 4.19. Grúa portuaria.

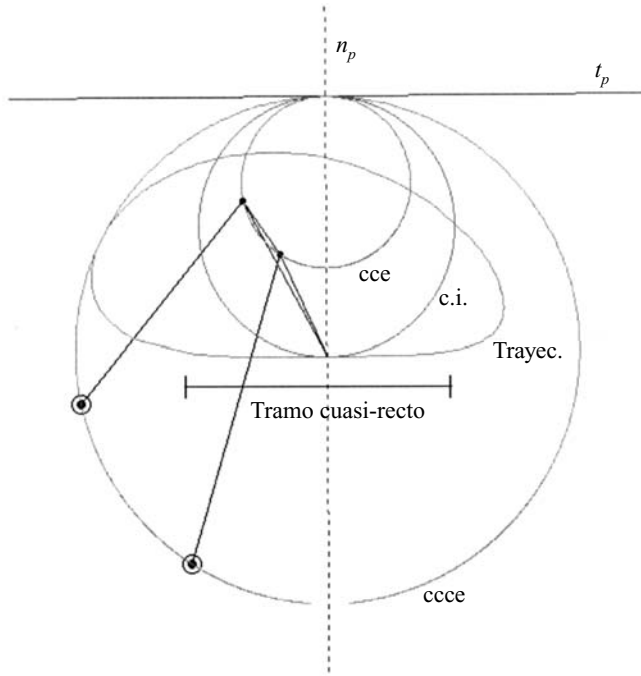


FIGURA 4.20. Construcción cinemática de una grúa portuaria.

A continuación se indica la metodología para obtener un cuadrilátero articulado en posición cicloidal (figura 4.21):

1. Se construye un cuadrilátero articulado cualquiera $O_R R S O_S$ de forma que su acoplador \overline{RS} sea paralelo al elemento fijo $O_R O_S$. Esto es condición suficiente para que dicho cuadrilátero se encuentre en posición cicloidal.
2. Las circunferencias que pasan por P, R y S de diámetro B , y por P, O_R y O_S de diámetro \overline{B} , son la c.c.e. y la c.c.c.e, respectivamente (sin olvidar que la normal polar también forma parte ellas). Dichas circunferencias son tangentes entre sí, y a la tangente polar en el polo.
3. Utilizando la ecuación [4.45] se obtiene el diámetro de la circunferencia de las inflexiones. Alternativamente, puede obtenerse algún punto de la misma mediante alguna de las construcciones gráficas vistas en el capítulo 2. La punta de la grúa se situará en el polo de inflexiones que, en la posición cicloidal, coincide con el punto de Ball.

En efecto:

1. A partir de R, S, O_R y O_S se obtiene el polo P .
2. Por P se traza una paralela a \overline{RS} , obteniéndose el eje de colineación E.C.

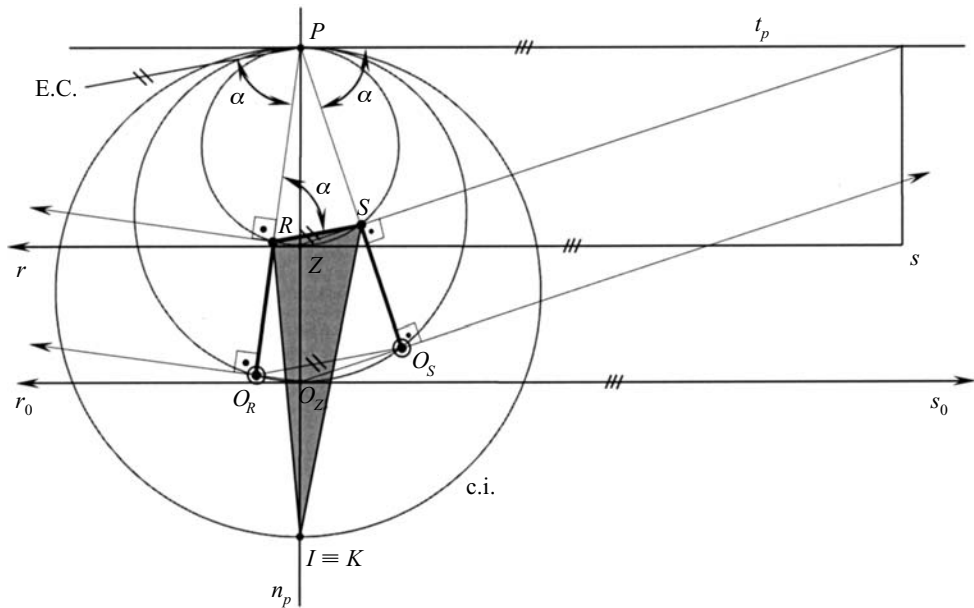


FIGURA 4.21. Cuadrilátero articulado en posición cicloidal.

3. Aplicando el teorema de Bobillier se obtienen la tangente (t_p) y la normal polar (n_p).
4. Las circunferencias PRS y $PO_R O_S$ son tangentes en el polo a la tangente polar ya que el ángulo PRS (de valor α por alternos internos) es igual al ángulo $t_p PS$, por lo que abarcan el mismo arco de circunferencia PS . El mismo razonamiento se puede hacer con la otra circunferencia.
5. Las intersecciones de la normal polar con las dos circunferencias serán, respectivamente, Z y O_Z .
6. Con R, S, t_p y n_p se hace la construcción correspondiente al cálculo de los parámetros A y B de la cúbica. Se observa que las normales a \overline{PR} y \overline{PS} pasan por Z . Luego $\overline{r_s}$ será paralelo a t_p , lo que implica que $A = \infty$, es decir, se encuentra en posición cicloidal. Además $\overline{PZ} = B$.
7. Con O_R, O_S, t_p y n_p se hace la misma construcción obteniendo $A = \infty$ y $\overline{PO_Z} = \overline{B}$.

Otros casos particulares de posiciones cicloidales del cuadrilátero articulado son los mecanismos de Roberts y de Chebyshev (figura 4.22).

4.3.2. Curvas de acoplador del cuadrilátero articulado: posibilidades y limitaciones en la síntesis de generación de trayectorias

Antes de aplicar cualquier procedimiento a un mecanismo para que genere una determinada trayectoria es necesario conocer las capacidades que el mismo posee para ello. El principal mecanismo que va a utilizarse en la generación de trayectorias es el cuadrilátero

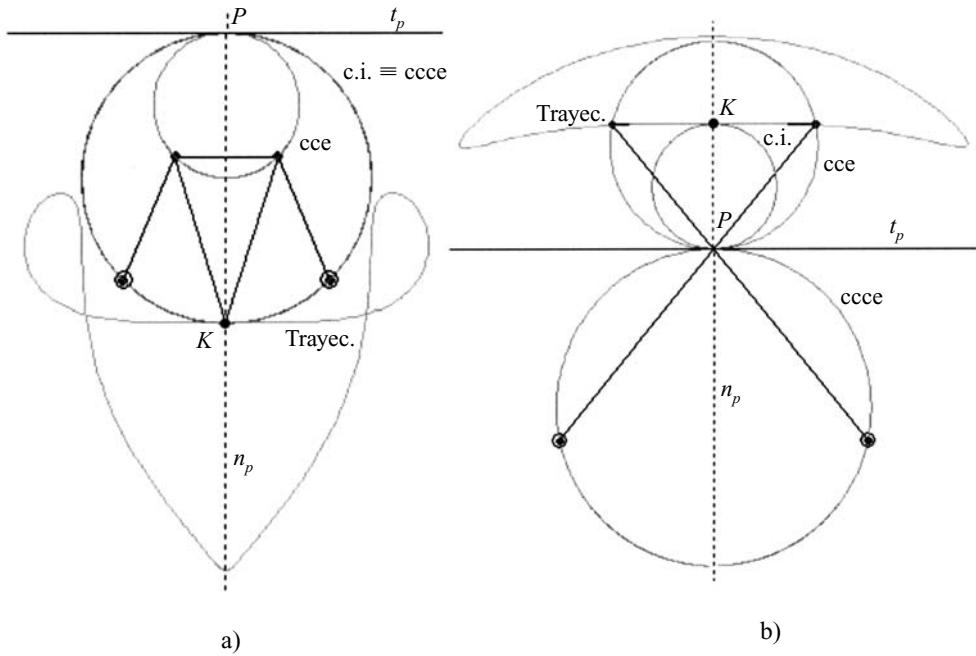


FIGURA 4.22. Mecanismos de Roberts (a) y Chebyshev (b).

articulado, de ahí la necesidad de estudiar sus curvas de acoplador. El análisis de esta curva puede hacerse a partir de la expresión analítica de la trayectoria de un punto genérico $P(x, y)$ de su acoplador (figura 4.23).

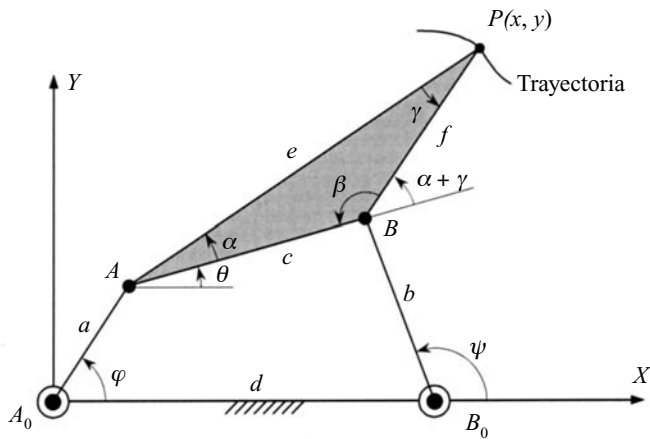


FIGURA 4.23. Obtención de la ecuación de la curva de acoplador.

Las coordenadas de las articulaciones móviles $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ pueden expresarse:

$$x_A = x - e \cos(\alpha + \theta) \quad [4.52]$$

$$y_A = y - e \sin(\alpha + \theta) \quad [4.53]$$

$$x_B = x - f \cos(\alpha + \theta + \gamma) \quad [4.54]$$

$$y_B = y - f \sin(\alpha + \theta + \gamma) \quad [4.55]$$

Las trayectorias de A y B son dos circunferencias:

$$x_A^2 + y_A^2 = a^2 \quad [4.56]$$

$$(x_B - d)^2 + y_B^2 = b^2 \quad [4.57]$$

Sustituyendo [4.52] y [4.53] en [4.56], y [4.54] [4.55] en [4.57], resulta:

$$(x - e \cos(\alpha + \theta))^2 + (y - e \sin(\alpha + \theta))^2 = a^2 \quad [4.58]$$

$$(x - f \cos(\alpha + \theta + \gamma) - d)^2 + (y - f \sin(\alpha + \theta + \gamma))^2 = b^2 \quad [4.59]$$

Desarrollando y posteriormente reordenado las ecuaciones [4.58] y [4.59], queda:

$$2A \cos(\alpha + \theta) + 2B \sin(\alpha + \theta) = M \quad [4.60]$$

$$2C \cos(\alpha + \theta) + 2D \sin(\alpha + \theta) = N \quad [4.61]$$

Donde:

$$A = ex \quad [4.62]$$

$$B = ey \quad [4.63]$$

$$C = f(y \sin \gamma + (x - d) \cos \gamma) \quad [4.64]$$

$$D = f(y \cos \gamma - (x - d) \sin \gamma) \quad [4.65]$$

$$M = x^2 + y^2 + e^2 - a^2 \quad [4.66]$$

$$N = (x - d)^2 + y^2 + f^2 - b^2 \quad [4.67]$$

Mediante la regla de Cramer se despeja $\cos(\alpha + \theta)$ y $\sin(\alpha + \theta)$ en el sistema [4.60] [4.61]. Después, aplicando la identidad $\cos^2(\alpha + \theta) + \sin^2(\alpha + \theta) = 1$, se consigue eliminar $(\alpha + \theta)$ quedando:

$$U^2 + V^2 = W^2 \quad [4.68]$$

Que es la ecuación de la curva de acoplador en la denominada forma de Roberts, y donde:

$$U = \begin{vmatrix} A & M \\ C & N \end{vmatrix} = ex((x-d)^2 + y^2 + f^2 - b^2) - f(y \operatorname{sen} \gamma + (x-d) \operatorname{cos} \gamma)(x^2 + y^2 + e^2 - a^2) \quad [4.69]$$

$$V = \begin{vmatrix} M & B \\ N & D \end{vmatrix} = f(y \operatorname{cos} \gamma - (x-d) \operatorname{sen} \gamma)(x^2 + y^2 + e^2 - a^2) - ey((x-d)^2 + y^2 + f^2 - b^2) \quad [4.70]$$

$$W = 2 \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 2ef(dy \operatorname{cos} \gamma - (x(x-d) + y^2) \operatorname{sen} \gamma) \quad [4.71]$$

U y V son funciones de grado 3 y W es de grado 2. Por tanto, de la ecuación [4.68] se deduce que la curva de acoplador es de orden seis o séxtica; concretamente, es una séxtica tricircular. Esto quiere decir que contiene a los puntos circulares o cíclicos I y J triplemente. Los puntos circulares son puntos imaginarios del infinito que pertenecen a todas las circunferencias del plano (Hunt, 1978).

Si se analiza el corte de una circunferencia con esta curva de acoplador, de acuerdo con el teorema de Bézout, se obtienen: $2 \times 6 = 12$ puntos de intersección. Seis de ellos corresponden a los puntos cíclicos (por ser triples). Por tanto, sólo un máximo de seis pertenecen al campo real. Por esta razón, no se puede imponer una síntesis de generación de trayectorias con más de seis puntos de precisión sobre una circunferencia.

Análogamente, la intersección de una recta con esta curva de acoplador da lugar, según el teorema de Bézout, a $1 \times 6 = 6$ puntos de corte. Por tanto, no se puede imponer una síntesis con más de seis puntos de precisión alineados.

En ambos casos, aunque por distintas razones, se produce la misma limitación en las curvas de acoplador del cuadrilátero articulado: no pueden especificarse más de seis puntos de precisión en línea recta o sobre una circunferencia.

Una vez definido el punto del mecanismo que tiene que generar la trayectoria, hay que analizar la capacidad que el mecanismo posee para pasar por los puntos de precisión, y averiguar el número máximo de puntos de precisión que el diseñador puede exigir al mecanismo. De acuerdo con el sistema de referencia utilizado en la figura 4.23, la familia de curvas de acoplador depende de seis parámetros: a, b, c, d, e, f (γ es función de c, e, f). En un sistema de referencia más general (figura 4.24), la ecuación que define la posición del punto de acoplador $P(x, y)$ puede expresarse en función de nueve parámetros (los anteriores más $x_{A_0}, y_{A_0}, \lambda$):

$$f(x, y, x_{A_0}, y_{A_0}, \lambda, a, b, c, d, e, f) = 0 \quad [4.72]$$

De esta ecuación a la dada en [4.68] puede pasarse sin más que aplicar una simple transformación de coordenadas (giro más traslación). Evidentemente, podrían haberse utilizado otros parámetros diferentes, aunque equivalentes, a los de la figura 4.24.

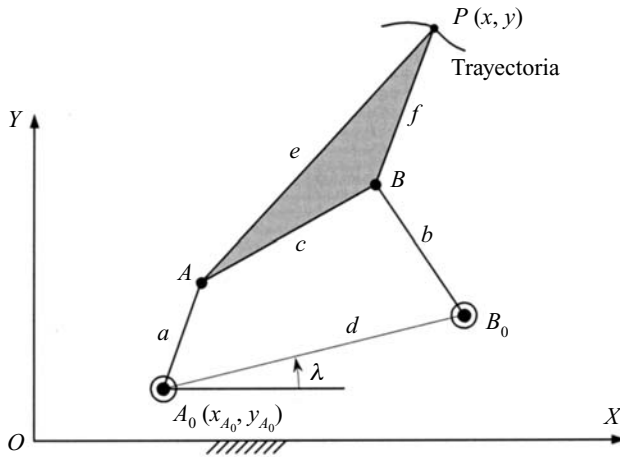


FIGURA 4.24. Parámetros de diseño en la curva de acoplador de un cuadrilátero articulado.

El número máximo de puntos de precisión coincide con el número de parámetros de diseño: nueve en este caso. El proceso se desarrolla sustituyendo las coordenadas de los nueve puntos de precisión en la ecuación [4.72]. De esta manera se obtiene un sistema no lineal de nueve ecuaciones con nueve incógnitas: $x_{A_0}, y_{A_0}, \lambda, a, b, c, d, e, f$. De las múltiples soluciones de este sistema no lineal, algunas no serán admisibles por resultar alguno de los parámetros con valor imaginario y/o infinito; otras, simplemente, por no ajustarse a las condiciones reales de diseño.

En la siguiente tabla (figura 4.25) se representan las posibles relaciones de diseño en un cuadrilátero articulado:

Punto Precisión	Ecuaciones de Diseño	Parámetros a elegir	Parámetros Incógnita
1	1	8	1
2	2	7	2
3	3	6	3
4	4	5	4
5	5	4	5
6	6	3	6
7	7	2	7
8	8	1	8
9	9	0	9

FIGURA 4.25. Relación entre puntos de precisión y parámetros de diseño.

En dicha tabla se observa que, si se especifican nueve puntos de precisión en la trayectoria del punto de acoplador, resulta un sistema definido con un número finito de posibles soluciones. En cualquier otro caso, la elección de parámetros de diseño abre la posibilidad de, en teoría, infinitas soluciones.

4.3.3. Método analítico para la generación de trayectorias con puntos de precisión

A continuación, se va a plantear para el cuadrilátero articulado un procedimiento analítico basado en la técnica de los números complejos. Como se verá, resulta de aplicación sencilla y eficaz en la síntesis con tres puntos de precisión.

Sea (OXY) la referencia fija; sean \vec{r}_1 y \vec{r}_j los vectores de posición de los puntos de precisión P_1 y P_j (con $j = 2, 3$) respectivamente; \vec{z}_{A_0} , \vec{z}_{B_0} , \vec{z}_a , \vec{z}_b , \vec{z}_e y \vec{z}_f los vectores que definen de una forma relativa las posiciones de las articulaciones en la posición de partida del mecanismo; $\vec{\delta}_{1j}$ el vector de posición del punto P_j respecto de P_1 ; y sean φ_{1j} , θ_{1j} y ψ_{1j} los ángulos girados por los vectores \vec{z}_a , \vec{z}_e (o \vec{z}_f) y \vec{z}_b respectivamente, desde la posición 1 a la j , todo ello de acuerdo con la figura 4.26.

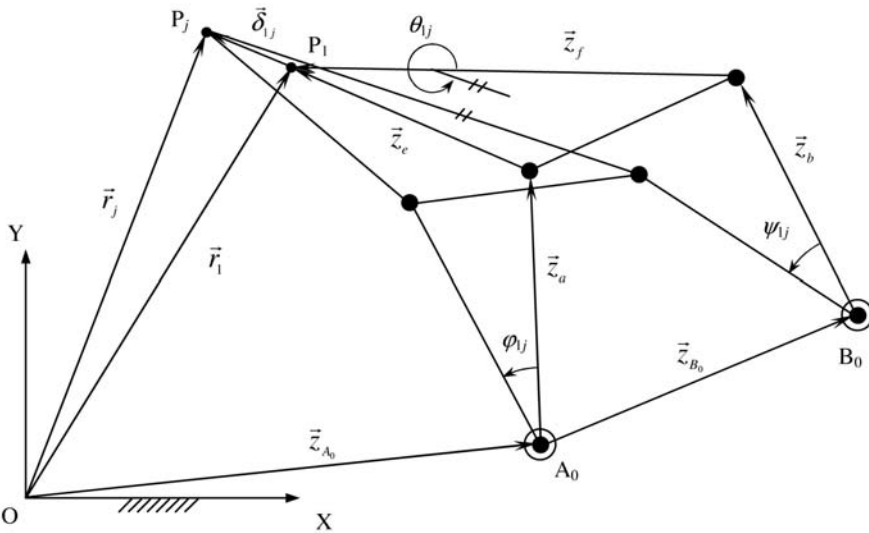


FIGURA 4.26. Paso de la posición 1 a la posición j .

Las ecuaciones de posición del punto P_1 del acoplador pueden escribirse de las dos siguientes maneras:

$$\vec{r}_1 = \vec{z}_{A_0} + \vec{z}_a + \vec{z}_e \tag{4.73}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{z}_{A_0} + \vec{z}_{B_0} + \vec{z}_b + \vec{z}_f \tag{4.74}$$

Cuando P_1 pasa a ocupar la posición P_j , el vector complejo \vec{z}_a pasa a ser $\vec{z}_a \cdot e^{i\varphi_{1j}}$, ya que el módulo no ha variado y únicamente ha girado un ángulo φ_{1j} . Análogamente, \vec{z}_b pasa a valer $\vec{z}_b \cdot e^{i\psi_{1j}}$ después del giro. Los vectores complejos \vec{z}_e y \vec{z}_f giran ambos el mismo ángulo θ_{1j} , por pertenecer al mismo sólido rígido. Por tanto, las ecuaciones de posición del punto P del acoplador en la posición j son:

$$\vec{r}_j = \vec{z}_{A_0} + \vec{z}_a \cdot e^{i\varphi_{1j}} + \vec{z}_e \cdot e^{i\theta_{1j}} \quad [4.75]$$

$$\vec{r}_j = \vec{z}_{A_0} + \vec{z}_{B_0} + \vec{z}_b \cdot e^{i\psi_{1j}} + \vec{z}_f \cdot e^{i\theta_{1j}} \quad [4.76]$$

Restando miembro a miembro la ecuación [4.75] de la [4.77] y la [4.76] de la [4.78], resulta:

$$\vec{\delta}_{1j} = \vec{r}_j - \vec{r}_1 = \vec{z}_a \cdot (e^{i\varphi_{1j}} - 1) + \vec{z}_e \cdot (e^{i\theta_{1j}} - 1) \quad [4.77]$$

$$\vec{\delta}_{1j} = \vec{r}_j - \vec{r}_1 = \vec{z}_b \cdot (e^{i\psi_{1j}} - 1) + \vec{z}_f \cdot (e^{i\theta_{1j}} - 1) \quad [4.78]$$

Para $j = 2$ y $j = 3$, las ecuaciones [4.77] y [4.78] se convierten en:

$$\vec{\delta}_{12} = \vec{z}_a \cdot (e^{i\varphi_{12}} - 1) + \vec{z}_e \cdot (e^{i\theta_{12}} - 1) \quad [4.79]$$

$$\vec{\delta}_{12} = \vec{z}_b \cdot (e^{i\psi_{12}} - 1) + \vec{z}_f \cdot (e^{i\theta_{12}} - 1) \quad [4.80]$$

$$\vec{\delta}_{13} = \vec{z}_a \cdot (e^{i\varphi_{13}} - 1) + \vec{z}_e \cdot (e^{i\theta_{13}} - 1) \quad [4.81]$$

$$\vec{\delta}_{13} = \vec{z}_b \cdot (e^{i\psi_{13}} - 1) + \vec{z}_f \cdot (e^{i\theta_{13}} - 1) \quad [4.82]$$

Agrupando las ecuaciones [4.79] y [4.81], de un lado, y [4.80] y [4.82], de otro, se obtienen dos sistemas de ecuaciones en los que los vectores $\vec{\delta}_{12}$ y $\vec{\delta}_{13}$ son conocidos, pues dependen directamente de las coordenadas de los puntos P_1 , P_2 y P_3 .

Puesto que la síntesis es de tres puntos de precisión, de acuerdo con la tabla de la figura 4.25, se podrán especificar los valores de seis parámetros. En concreto, eligiendo los valores de φ_{12} , φ_{13} , ψ_{12} , ψ_{13} , θ_{12} y θ_{13} , y resolviendo por la regla de Cramer el sistema [4.79]-[4.81] se obtiene:

$$\vec{z}_a = \frac{\begin{vmatrix} \vec{\delta}_{12} & (e^{i\theta_{12}} - 1) \\ \vec{\delta}_{13} & (e^{i\theta_{13}} - 1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (e^{i\varphi_{12}} - 1) & (e^{i\theta_{12}} - 1) \\ (e^{i\varphi_{13}} - 1) & (e^{i\theta_{13}} - 1) \end{vmatrix}} \quad [4.83]$$

$$\vec{z}_e = \frac{\begin{vmatrix} (e^{i\varphi_{12}} - 1) & \vec{\delta}_{12} \\ (e^{i\varphi_{13}} - 1) & \vec{\delta}_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (e^{i\varphi_{12}} - 1) & (e^{i\theta_{12}} - 1) \\ (e^{i\varphi_{13}} - 1) & (e^{i\theta_{13}} - 1) \end{vmatrix}} \quad [4.84]$$

Haciendo lo mismo con el sistema [4.80]-[4.82] se obtiene:

$$\bar{z}_b = \frac{\begin{vmatrix} \bar{\delta}_{12} & (e^{i\theta_{12}} - 1) \\ \bar{\delta}_{13} & (e^{i\theta_{13}} - 1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (e^{i\psi_{12}} - 1) & (e^{i\theta_{12}} - 1) \\ (e^{i\psi_{13}} - 1) & (e^{i\theta_{13}} - 1) \end{vmatrix}} \quad [4.85]$$

$$\bar{z}_f = \frac{\begin{vmatrix} (e^{i\psi_{12}} - 1) & \bar{\delta}_{12} \\ (e^{i\psi_{13}} - 1) & \bar{\delta}_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (e^{i\psi_{12}} - 1) & (e^{i\theta_{12}} - 1) \\ (e^{i\psi_{13}} - 1) & (e^{i\theta_{13}} - 1) \end{vmatrix}} \quad [4.86]$$

Finalmente, los vectores \vec{z}_{A_0} y \vec{z}_{B_0} que definen la posición de las articulaciones fijas se obtienen de las ecuaciones [4.73] y [4.74], respectivamente.

4.3.4. Métodos gráficos para la generación de trayectorias con puntos de precisión

Los métodos que van a describirse en este apartado son de aplicación exclusiva al cuadrilátero articulado. Todos ellos están basados en el denominado *concepto de la inversión* que se expone a continuación.

Sea el cuadrilátero articulado de la figura 4.27 en dos posiciones. Para un observador solidario al acoplador las articulaciones A_1 y B_1 son fijas, mientras que, por ejemplo, la articulación B_0 se mueve respecto de él según una rotación alrededor de B_1 . Supóngase que se posiciona el punto B'_0 de forma que el triángulo $A_1P_1B'_0$ sea igual al triángulo $A_2P_2B_0$. El punto B'_0 se encontrará sobre la circunferencia de radio B_1B_0 ya que, en realidad, lo que se ha hecho es dibujar la posición de B_0 respecto a un observador situado en el acoplador A_1B_1 .

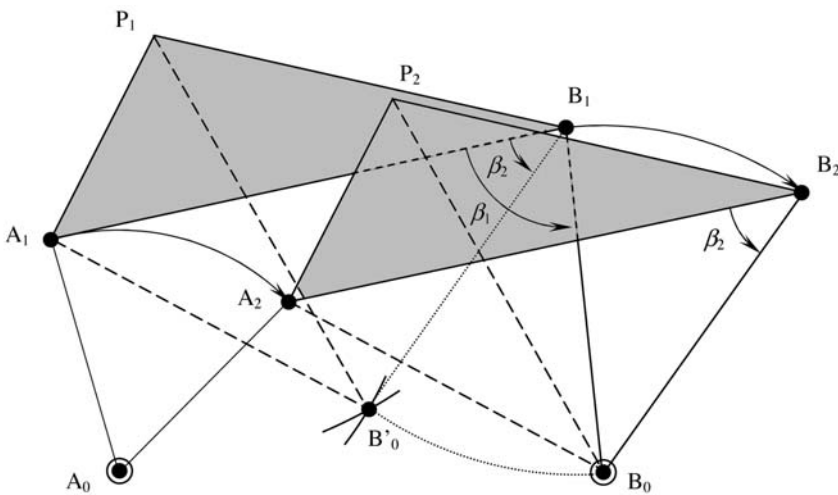


FIGURA 4.27. Concepto de la inversión.

Repitiendo este razonamiento para otra posición se obtendrá otro punto B''_0 de manera que B_1 sea el centro de la circunferencia que pasa por B_0, B'_0 y B''_0 .

1. *Tres puntos de precisión.* Sean P_1, P_2 y P_3 los tres puntos de precisión por los que se desea que pase el punto P del acoplador. Se adoptarán como datos de partida las posiciones de las articulaciones fijas A_0 y B_0 , la longitud a ($A_0 A$) de la manivela y la longitud e (AP) del acoplador (total seis parámetros). Se procede entonces del siguiente modo (figura 4.28):

1. Con centro en A_0 , se traza una circunferencia de radio a .
2. Con centro en P_1, P_2 y P_3 , y radio e , se trazan tres arcos de circunferencia que se cortan con la anterior circunferencia en tres puntos A_1, A_2 y A_3 .
3. Se construyen los triángulos $A_1 P_1 B'_0$ y $A_1 P_1 B''_0$ iguales a $A_2 P_2 B_0$ y a $A_3 P_3 B_0$ respectivamente, obteniendo los puntos B'_0 y B''_0 .
4. Se obtiene el centro de la circunferencia que pasa por los puntos B_0, B'_0 y B''_0 , que es la articulación móvil B en la posición 1: B_1 .

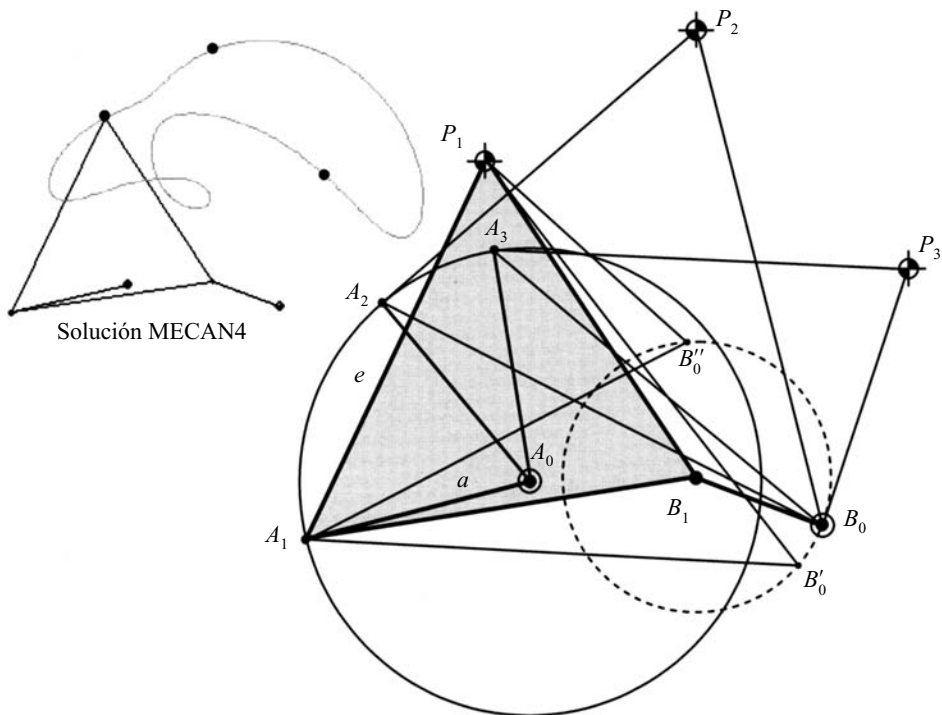


FIGURA 4.28. Tres puntos de precisión.

En la figura 4.28 (parte superior izquierda) también aparece una solución obtenida con MECAN4.

2. *Cuatro puntos de precisión.* Este caso es una variante del anterior. El procedimiento hará uso tanto del concepto de la inversión como de otro denominado *reducción de posiciones*, y que permite incrementar el número de puntos de precisión.

Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 los cuatro puntos de precisión. Se eligen como datos: la posición de las articulaciones fijas A_0 y B_0 y la longitud e (AP) del acoplador (total cinco parámetros). Los pasos a seguir son los siguientes (figura 4.29):

1. Se posiciona el punto B_0 en cualquiera de las seis posibles mediatrices a los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 ; por ejemplo, en la correspondiente al segmento P_1P_4 . La idea del concepto reducción de posiciones es hacer que B_0 sea el centro de rotación de las posiciones 1 y 4 del plano acoplador.

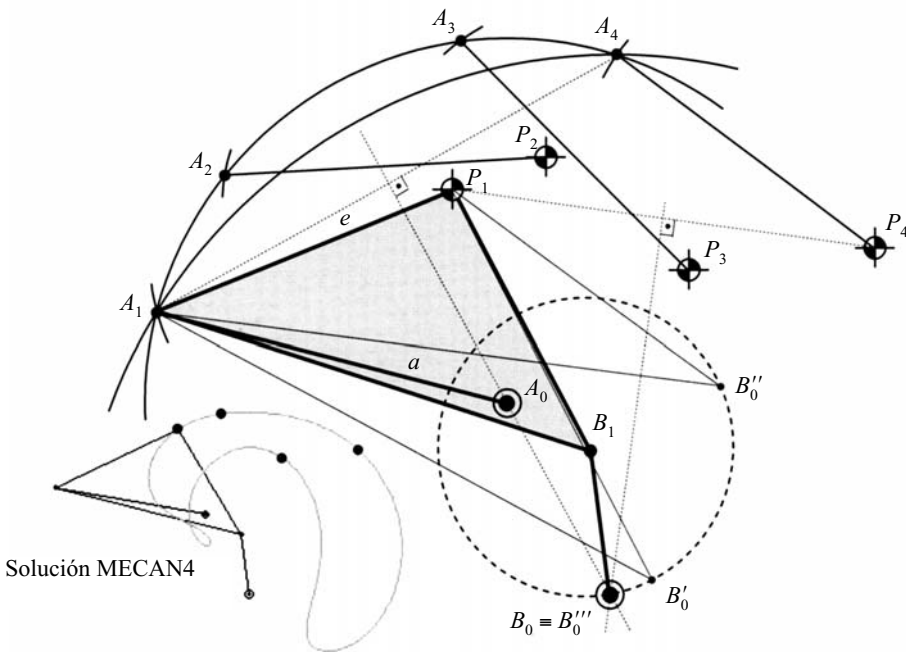


FIGURA 4.29. Cuatro puntos de precisión.

2. Con centro en B_0 y radio arbitrario, se traza un arco de circunferencia.
3. Con centro en P_1 y P_4 y radio e (valor supuesto) se trazan dos arcos que cortan al anterior en los puntos A_1 y A_4 .
4. Se traza la mediatriz al segmento A_1A_4 . Evidentemente, esta mediatriz pasa por B_0 . Sobre la misma se posiciona A_0 , quedando definida, por tanto, la longitud a (A_0A) de la manivela.
5. Mediante la intersección de la circunferencia trazada con centro en A_0 y radio a (A_0A) y los arcos trazados con radio e (AP) y centros P_2 y P_3 , se determinan las posiciones A_2 y A_3 .

6. Se construyen los triángulos $A_1P_1B'_0$ y $A_1P_1B''_0$ iguales a $A_2P_2B_0$ y a $A_3P_3B_0$ respectivamente, obteniendo los puntos B'_0 y B''_0 .
7. Se obtiene el centro de la circunferencia que pasa por los puntos B_0 , B'_0 y B''_0 . Este centro es el punto B_1 correspondiente a la articulación B en la posición 1.

La importancia del procedimiento estriba en haber situado la posición de B_0 en la intersección de las mediatrices a los segmentos A_1A_4 y P_1P_4 . De esta manera, B_0 coincide con el centro de rotación P_{14} de las posiciones 1 y 4 del acoplador. Por tanto, si se obtiene B'''_0 construyendo el triángulo $A_1P_1B'''_0$ igual al triángulo $A_4P_4B_0$, se encontrará que ocupa la misma posición que B_0 . En resumen, se ha conseguido pasar de cuatro puntos B_0 , B'_0 , B''_0 y B'''_0 a tres, $B_0 \equiv B'''_0$, B'_0 y B''_0 , con lo que ahora queda ya unívocamente definido el centro B_1 de la circunferencia.

En la figura 4.29 (parte inferior izquierda) también aparece una solución dada por MECAN4.

3. *Cinco puntos de precisión.* Este método puede aplicarse también a la síntesis de cinco puntos de precisión. En este caso sería necesario reducir dos posiciones. En la figura 4.30 se presenta un ejemplo con 5 puntos de precisión según la secuencia ordenada P_1 , P_2 , P_3 , P_4 y P_5 , realizado con el programa MECAN4.

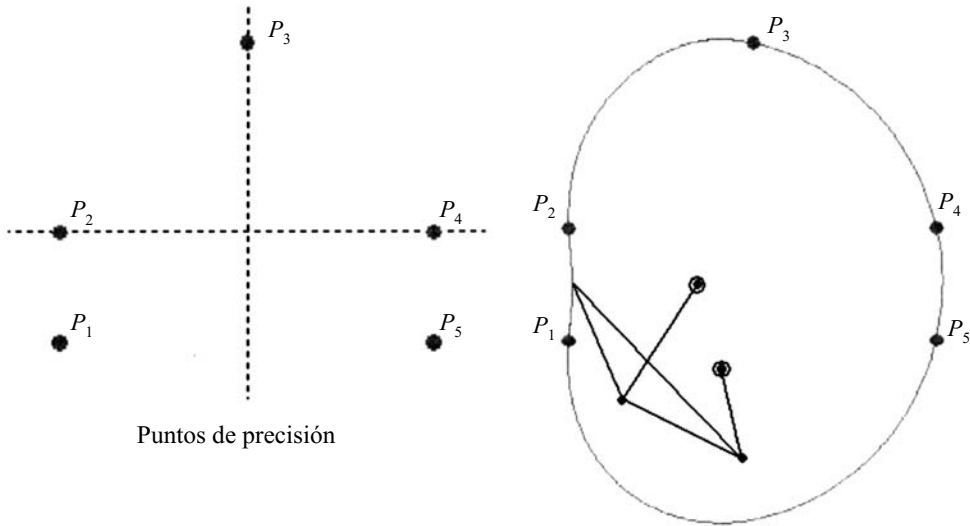


FIGURA 4.30. Generación de trayectorias con 5 puntos de precisión.

4.3.5. Errores de orden y de rama

Los errores de orden y de rama aparecen en todos los tipos de síntesis: generación de función, de trayectorias y de guiado de sólido rígido (que se verá al final del capítulo).

Para el lector será mucho más fácil entender estos dos defectos si se explican aquí, para el caso particular de la generación de trayectorias con puntos de precisión.

El error de orden se comete cuando la solución alcanzada incumple la secuencia ordenada de puntos de precisión impuesta por la síntesis. Por ejemplo, la solución dada al problema de la figura 4.30 no comete error de orden, ya que sigue la secuencia impuesta: P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 . En la figura 4.31a se presenta otra solución al problema anterior, que tampoco comete error de orden, aunque puede ser una solución menos óptima ya que el paso del punto P_4 al P_5 se hace mediante un bucle excesivamente largo. Sin embargo, la solución dada al mismo problema en la figura 4.31b, sí comete error de orden, ya que sigue una secuencia distinta (P_1, P_3, P_5, P_4 y P_2) a la impuesta en la síntesis.

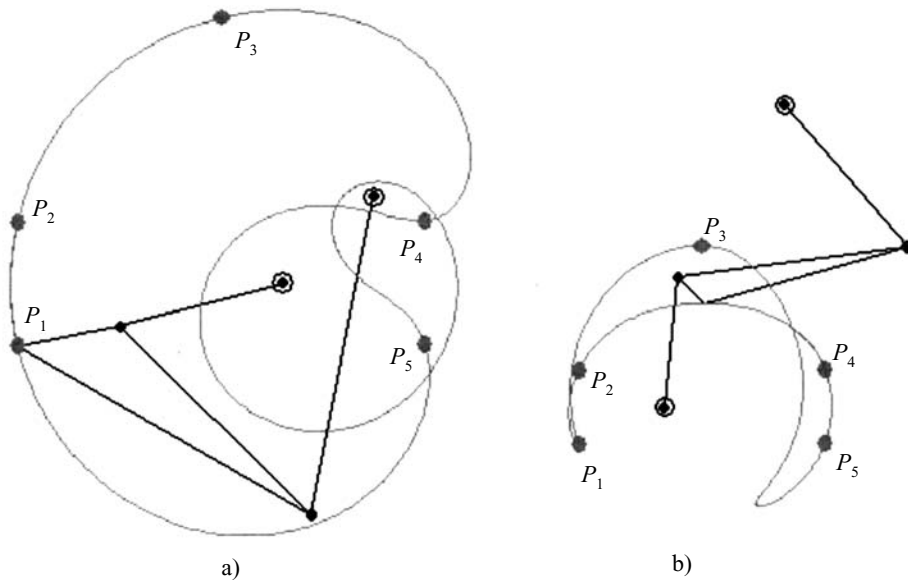


FIGURA 4.31. Soluciones sin (a) y con (b) error de orden, dibujadas a distinta escala.

El error de rama o de circuito se comete cuando la trayectoria de la solución alcanzada está compuesta por más de un circuito, y los puntos de precisión se encuentran repartidos entre dichos circuitos. Como se sabe, a cada circuito le corresponde una configuración distinta del mecanismo, no pudiendo pasar de una a otra sin desmontarlo. Por ello, en la práctica, el mecanismo sólo puede pasar por los puntos de precisión que se encuentran en el circuito correspondiente a la configuración geométrica en la que se encuentra. En la figura 4.32 se presenta otra solución al problema de la figura 4.30, que como puede observarse tiene defecto de rama. En ella aparecen las dos configuraciones del cuadrilátero articulado. El circuito correspondiente a la configuración abierta contiene a los puntos P_1, P_2 y P_3 . Mientras que el circuito correspondiente a la configuración cruzada contiene a los puntos P_4 y P_5 .

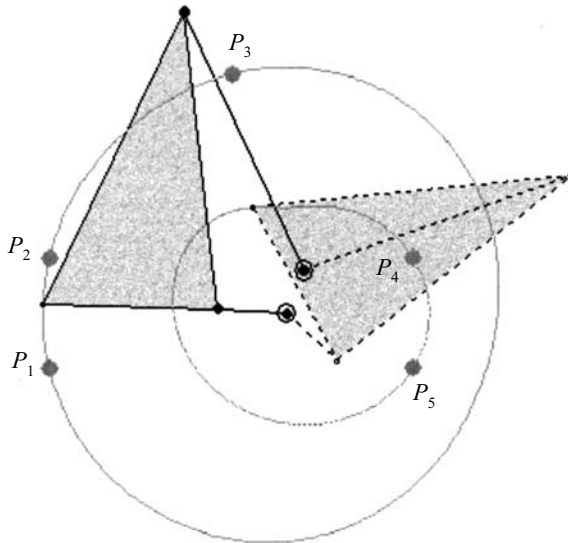


FIGURA 4.32. Solución con error de rama.

Finalmente, hay que indicar que tanto el defecto de orden como el de rama son inevitables. Lo único que puede hacerse es intentar la búsqueda de otras soluciones de entre las múltiples que tiene la síntesis.

4.3.6. Mecanismos cognados, teorema de Roberts-Chebyshev

Se conocen como mecanismos cognados o emparentados a aquellos que realizan la misma función; por ejemplo: generar la misma relación funcional entre el ángulo de entrada y el de salida, la misma trayectoria, el mismo guiado de un sólido, etc.

Los mecanismos cognados constituyen interesantes alternativas de diseño capaces de sustituir al mecanismo original. Por ejemplo, cuando al final de un proceso de diseño se ha obtenido un determinado mecanismo, puede ocurrir que los índices que miden la calidad de su movimiento (ángulo de transmisión, relación de longitudes entre barras, etc.) no sean admisibles. Sin embargo, estos índices pueden ser aceptables en alguno de sus cognados.

Inicialmente este término fue aplicado a los mecanismos de cuatro barras que se obtienen mediante la aplicación del teorema de Roberts-Chebyshev. Dicho teorema se enuncia de la siguiente manera: “existen tres cuadriláteros articulados diferentes que trazan la misma curva de acoplador”. Fue descubierto casi simultáneamente, pero de forma independiente, por Roberts (1875) y por Chebyshev (1878), de ahí el nombre.

La construcción geométrica que, a partir de uno de ellos, lleva a los otros dos se describe a continuación. Sea el cuadrilátero articulado de la figura 4.33.

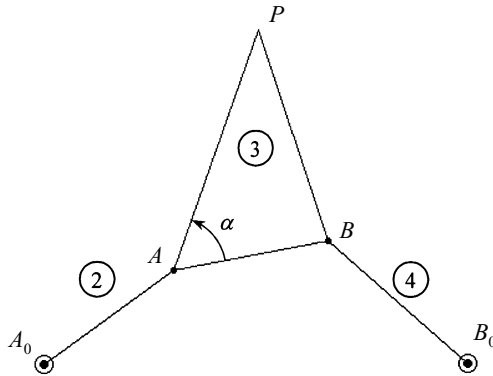


FIGURA 4.33. Cuadrilátero articulado.

A partir de él se construirá el mecanismo articulado de diez barras (representado en la figura 4.34) de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Las barras $A'P$ y A_0A' son iguales y paralelas a A_0A y AP , respectivamente.
2. Las barras $B'P$ y B_0B' son iguales y paralelas a B_0B y BP , respectivamente.
3. El triángulo $PA'C'$ es semejante al BAP .
4. El triángulo $B'PC''$ es semejante al BAP .
5. Las barras $C'C_0$ y C_0C'' son iguales y paralelas a PC'' y $C'P$, respectivamente.

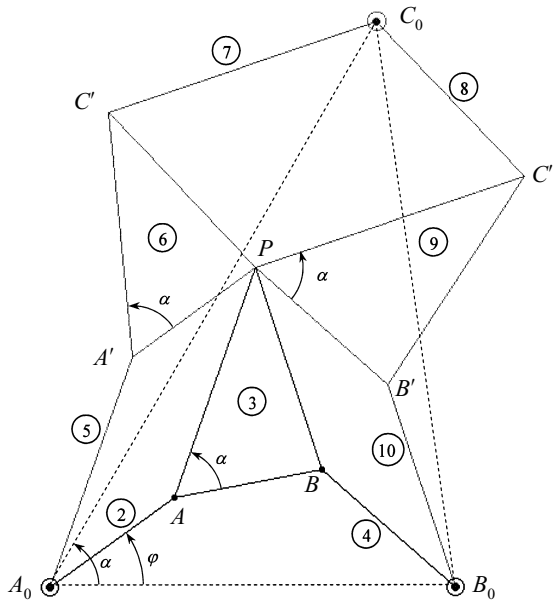


FIGURA 4.34. Construcción geométrica de los cognados.

De esta forma se obtiene fácilmente la posición del punto C_0 que es la restante articulación fija de los dos cuadriláteros cognados: $A_0A'PC'C_0$ (elementos 5, 6 y 7) y $B_0B'PC''C_0$ (elementos 8, 9 y 10). Se demostrará también, la relación de semejanza entre los triángulos ABP y $A_0B_0C_0$, condición de la que puede obtenerse C_0 de una forma más sencilla. En la figura 4.35 se muestran cada uno de los cuadriláteros de forma independiente, pero generando todos la misma trayectoria.

En efecto, considérese el mecanismo de la figura 4.34, en el que ahora la articulación C_0 está libre. Tanto de la propia construcción como de la aplicación del criterio de Grübler ($G = 3(N - 1) - 2P = 3 \cdot (10 - 1) - 2 \cdot 13 = 1$) puede comprobarse que tiene un único grado de libertad. Más adelante se demostrará que el punto C_0 permanece inmóvil mientras varía el ángulo de entrada φ . Por tanto, si C_0 se articula al elemento fijo, el movimiento del mecanismo de diez barras no varía. Sin embargo, si se aplica el criterio de Grübler al nuevo mecanismo, resultará ($G = 3 \cdot (10 - 1) - 2 \cdot 14 = -1$) una estructura hiperestática de grado 1. Esto indica que la articulación añadida en C_0 es una restricción redundante, y que se mueve en virtud de las especiales dimensiones con que se ha construido.

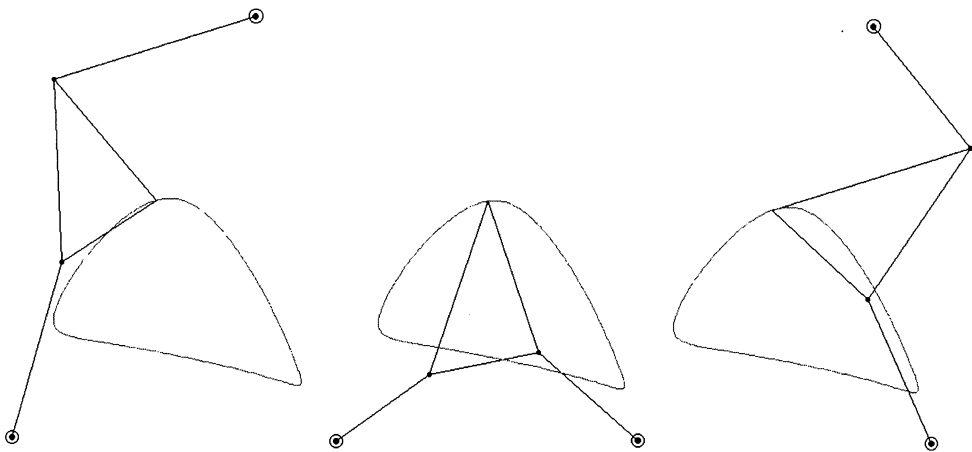


FIGURA 4.35. Cognados con la misma trayectoria.

En estas condiciones (C_0 articulado al elemento fijo) se observa que el mecanismo se compone de tres cuadriláteros (2-3-4, 5-6-7 y 8-9-10), articulados en el punto P de sus correspondientes acopladores (figura 4.34). Dicha articulación es, en realidad, innecesaria, ya que el punto P como perteneciente a cualquiera de los tres cuadriláteros, tiene ya una trayectoria definida. Por lo tanto, los tres cuadriláteros articulados deben generar la misma curva de acoplador (ver figura 4.35).

A continuación se demostrará la anterior afirmación de que el punto C_0 (no articulado al elemento fijo) permanece inmóvil a lo largo del ciclo de movimiento del mecanismo de la figura 3.34.

En efecto, considérese la ecuación vectorial de cierre:

$$\overrightarrow{A_0C_0} = \overrightarrow{A_0A'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C_0} \quad [4.87]$$

Donde:

$$\overrightarrow{A_0A'} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \cdot e^{i\alpha} \quad [4.88]$$

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'P} \cdot \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'P}} \cdot e^{i\alpha} = \overrightarrow{A_0A} \cdot \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'P}} \cdot e^{i\alpha} \quad [4.89]$$

$$\overrightarrow{C'C_0} = \overrightarrow{PC''} = \overrightarrow{PB'} \cdot \frac{\overline{PC''}}{\overline{PB'}} \cdot e^{i\alpha} = \overrightarrow{BB_0} \cdot \frac{\overline{PC''}}{\overline{PB'}} \cdot e^{i\alpha} \quad [4.90]$$

Puesto que los tres acopladores son semejantes se verificará:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'P}} = \frac{\overline{PC''}}{\overline{PB'}} \quad [4.91]$$

Por tanto, la ecuación [4.87] puede expresarse de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{A_0C_0} = (\overrightarrow{A_0A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_0}) \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \cdot e^{i\alpha} = \overrightarrow{A_0B_0} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \cdot e^{i\alpha} \quad [4.92]$$

Del resultado de esta ecuación se deduce que:

1. $\overrightarrow{A_0C_0}$ es un vector constante en magnitud y dirección ya que no contiene variable alguna. Por tanto, C_0 es un punto fijo, independiente de la posición del mecanismo.
2. Los triángulos $A_0C_0B_0$ y APB son semejantes pues poseen un ángulo igual, α , y dos lados proporcionales:

$$\frac{\overline{A_0C_0}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{A_0B_0}}{\overline{AB}}$$

Volviendo a la figura 4.34, puede observarse que los elementos 2, 6 y 8 se mantienen permanentemente paralelos. Lo mismo puede decirse de los elementos 4, 9 y 7 y de 5, 3 y 10. Por tanto, se verificará:

$$\omega_2 = \omega_6 = \omega_8 \quad [4.93]$$

$$\alpha_2 = \alpha_6 = \alpha_8 \quad [4.94]$$

$$\omega_4 = \omega_9 = \omega_7 \quad [4.95]$$

$$\alpha_4 = \alpha_9 = \alpha_7 \quad [4.96]$$

$$\omega_5 = \omega_3 = \omega_{10} \quad [4.97]$$

$$\alpha_5 = \alpha_3 = \alpha_{10} \quad [4.98]$$

El mecanismo de biela-manivela puede considerarse un cuadrilátero articulado degenerado, debido a que una de sus dimensiones se ha hecho infinita. Por ello, si se le aplica la construcción de la figura 4.34 se obtiene un solo cognado. En la figura 4.36a se representa un mecanismo de biela-manivela y su correspondiente cognado obtenido con el programa BIEMAN. En las figuras 4.36b y 4.36c se encuentran dichos cognados generando la misma trayectoria.

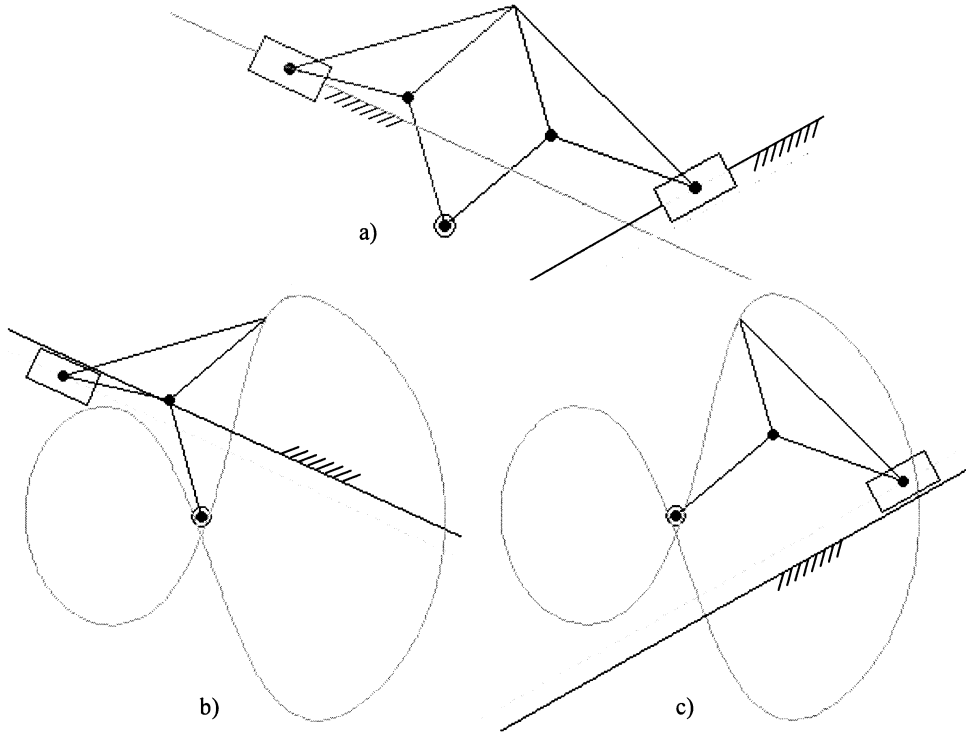


FIGURA 4.36. Cognados de un mecanismo de biela-manivela.

4.4. Síntesis de guiado de sólido rígido

En este punto, el objetivo es el posicionamiento del acoplador. En primer lugar, se presentará un método para obtener un elemento que se traslade a lo largo de todo el ciclo

de movimiento del mecanismo. Después se expondrán diversos métodos gráficos para colocar el acoplador en una serie de posiciones de precisión.

4.4.1. Generación de un elemento con movimiento de traslación

A partir de la construcción de los mecanismos cognados (figura 4.34) puede conseguirse un mecanismo que tenga una barra con movimiento de traslación. Para ello (figura 4.37), se traslada el cognado $C_0C''B'B_0$ hasta hacer coincidir C_0 con A_0 , resultando el cuadrilátero $A_0C'''B''B'_0$. Teniendo en cuenta el paralelismo de las barras A_0C''' y C_0C'' en esta posición, y puesto que A_0A se mueve permanentemente con la misma rotación angular que C_0C'' , si se hacen solidarias las barras A_0A y A_0C''' (elemento A_0AC'''), los puntos de acoplador P y P' no sólo trazarán la misma trayectoria, sino que lo harán de forma acompasada; es decir, ocupando las mismas posiciones relativas a dicha trayectoria y con la misma velocidad. De esta manera, la distancia PP' siempre permanece constante. Es más, si los puntos de acoplador P y P' fueran articulados mediante una barra, ésta en modo alguno afectaría a la movilidad del mecanismo y tendría además, un movimiento de traslación permanente ($\omega = 0$).

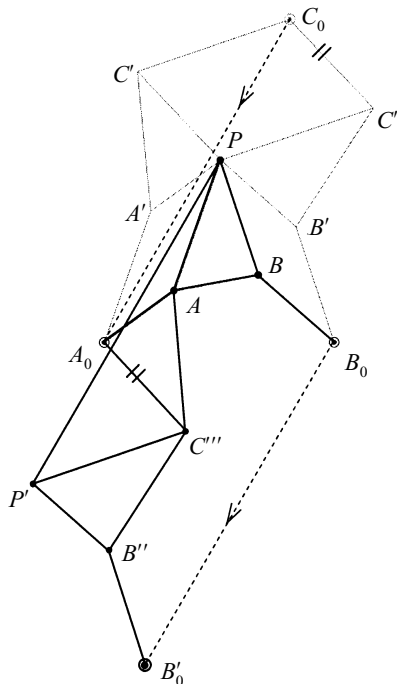


FIGURA 4.37. Construcción del movimiento de traslación.

La barra PP' constituye una restricción redundante ya que la distancia PP' se mantendrá constante independientemente de que se ponga o no la barra. Si se decide incluir la

barra PP' , el mecanismo puede simplificarse quitando la restricción equivalente B'_0B'' . Igualmente pueden eliminarse las barras $B''P'$ y $B''C'''$ ya que no influyen en el movimiento del mecanismo (figura 4.38).

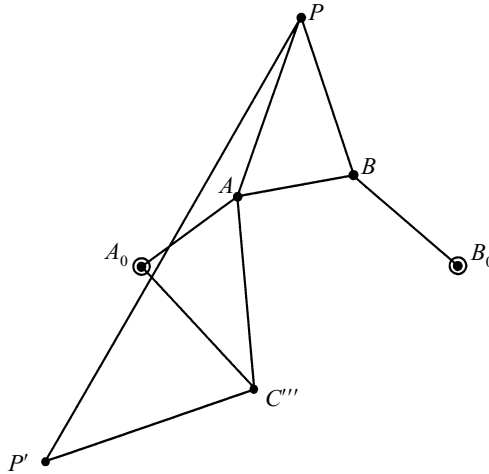


FIGURA 4.38. Elemento PP' con movimiento de traslación.

En la figura 4.39 queda patente el movimiento paralelo de la barra PP' :

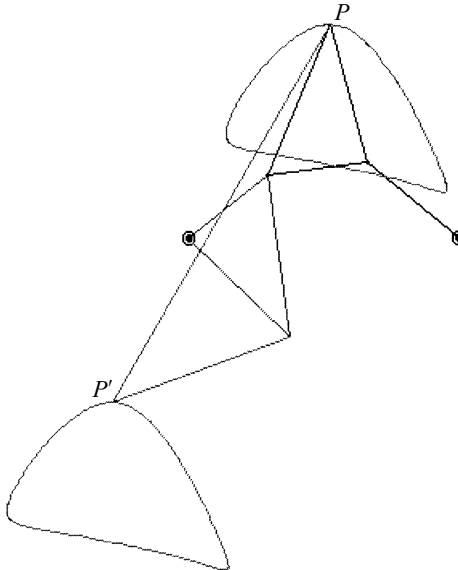


FIGURA 4.39. Movimiento paralelo de la barra PP' .

4.4.2. Métodos gráficos

El guiado de sólido rígido tiene por objeto el diseño de mecanismos cuyas funciones objetivo están directamente relacionadas con el posicionamiento de alguno de sus acopladores. Los procedimientos gráficos que van a ser descritos en este apartado se apoyan de nuevo en el concepto de la inversión y en la reducción de posiciones.

La primera construcción es una síntesis de tres posiciones de biela. Se trata de obtener un cuadrilátero articulado A_0ABB_0 , que sitúe las articulaciones móviles de su acoplador en las siguientes posiciones: A_1B_1 , A_2B_2 y A_3B_3 (figura 4.40). La solución a este problema es directa ya que por tres puntos puede trazarse siempre una determinada circunferencia. Por tanto, los centros de las circunferencias que pasan por A_1 , A_2 y A_3 y por B_1 , B_2 y B_3 pueden tomarse como las rótulas fijas A_0 y B_0 , respectivamente, del cuadrilátero.

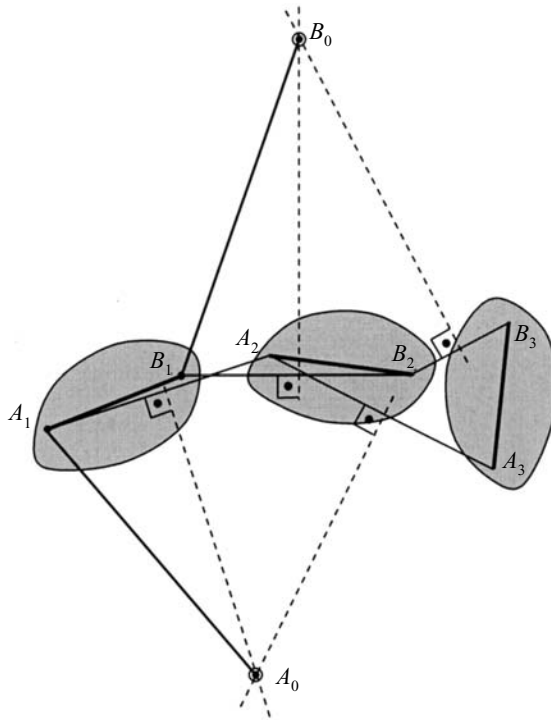


FIGURA 4.40. Guiado de tres posiciones.

La anterior solución es la única posible (con esa secuencia), si se desea que A y B sean las articulaciones móviles. Sin embargo, si las articulaciones móviles no están previamente especificadas, sino unos segmentos cualesquiera del plano acoplador, existen infinitos mecanismos que permiten situar el acoplador en dichas posiciones. Éste es el caso en que las tres posiciones del acoplador vienen definidas por los segmentos C_1D_1 , C_2D_2 y C_3D_3 .

(figura 4.41). Una posible solución es fijar, de forma arbitraria o interesada, las articulaciones móviles respecto a los puntos C y D , y operar como en el caso anterior.

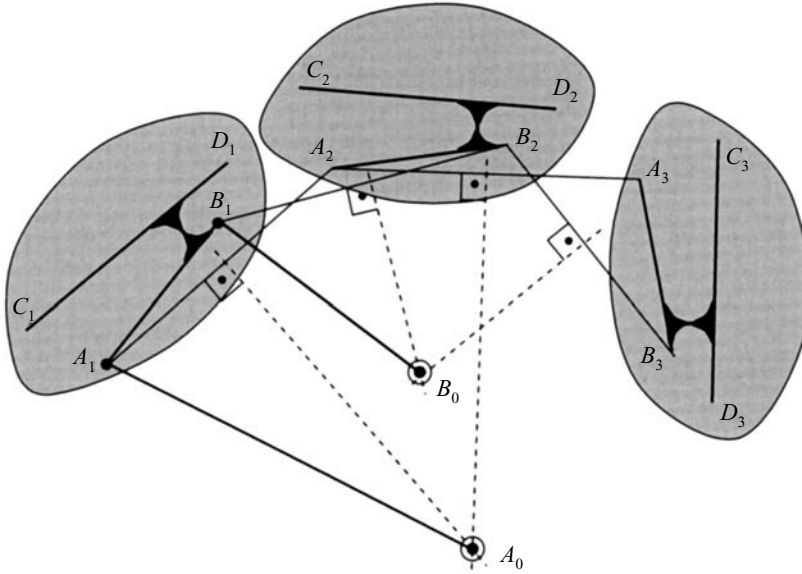


FIGURA 4.41. Guiado de tres posiciones, definidas por puntos cualesquiera del plano.

Otra variante de la síntesis de tres posiciones es aquella en que las posiciones de las articulaciones fijas A_0 y B_0 están prefijadas. Por tanto, los datos son las tres posiciones C_1D_1 , C_2D_2 y C_3D_3 del sólido rígido, y las rótulas fijas A_0 y B_0 (figura 4.42). Para realizar esta síntesis se va a utilizar el concepto de la inversión. Un observador situado en el sólido rígido verá que el punto A_0 sigue una trayectoria circular, cuyo centro es precisamente la articulación móvil. Así pues, se construyen los triángulos $C_1D_1A'_0$ y $C_1D_1A''_0$ iguales a $C_2D_2A_0$ y a $C_3D_3A_0$, respectivamente, obteniendo los puntos A'_0 y A''_0 .

El centro de la circunferencia que pasa por A_0 , A'_0 y A''_0 es precisamente la articulación móvil A en la posición 1, es decir, A_1 . Procediendo del mismo modo para B_0 , se obtiene B_1 .

En la figura 4.42 (parte inferior derecha) también aparece la solución dada por MECAN4.

Finalmente se estudiará el caso de síntesis de guiado de sólido rígido para cuatro posiciones C_1D_1 , C_2D_2 , C_3D_3 y C_4D_4 . Aplicando el método de reducción de posiciones, este problema se iguala al anterior, y se resuelve según el siguiente procedimiento (figura 4.43):

1. De los seis centros de rotación posibles P_{12} , P_{13} , P_{14} , P_{23} , P_{24} y P_{34} que existen para las cuatro posiciones C_1D_1 , C_2D_2 , C_3D_3 y C_4D_4 del plano móvil, se eligen dos, los cuales se utilizarán como articulaciones fijas. Por ejemplo: $P_{12} \equiv A_0$ y $P_{34} \equiv B_0$.
2. Se construyen los triángulos $C_1D_1A''_0$ y $C_1D_1A'''_0$ iguales a $C_3D_3A_0$ y a $C_4D_4A_0$, respectivamente, obteniendo los puntos A''_0 y A'''_0 . El centro de la circunferencia que

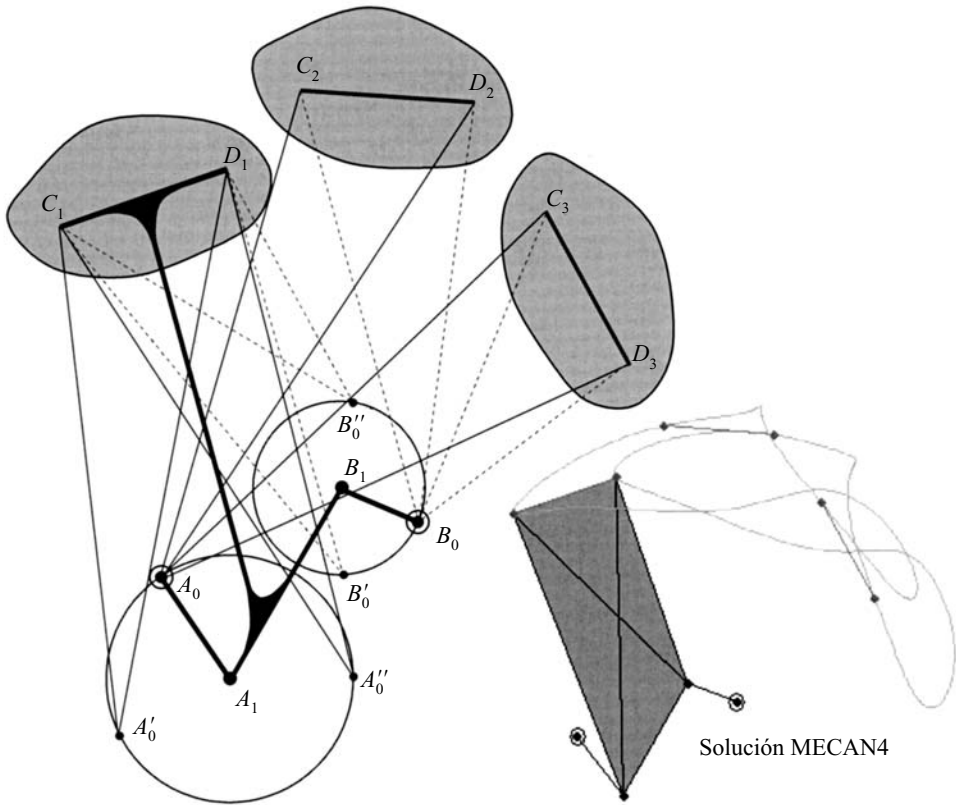


FIGURA 4.42. Síntesis de tres posiciones con los apoyos prefijados.

- pasa por A_0 (coincidente con A'_0 por ser el centro de rotación de las posiciones 1 y 2), A''_0 y A'''_0 es la articulación móvil A , en la posición 1, es decir, A_1 .
- De igual manera se construyen los triángulos $C_1D_1B'_0$ y $C_1D_1B''_0$ iguales a $C_2D_2B_0$ y a $C_3D_3B_0$, respectivamente, obteniendo los puntos B'_0 y B''_0 . El centro de la circunferencia que pasa por B_0, B'_0 y B''_0 (coincidente con B'''_0 , por ser el centro de rotación de las posiciones 3 y 4) es la articulación móvil B , en la posición 1, es decir, B_1 .

En la figura 4.43 (parte superior derecha) también aparece la solución dada por MECAN4.

4.4.3. Aplicaciones prácticas

1. *Asiento de pared plegable.* Diseñar un asiento de pared mediante un mecanismo que posea las articulaciones fijas sobre la pared y que sitúe el acoplador en las dos siguientes posiciones (figura 4.44):

1. Asiento recogido pegado a la pared.
2. Asiento desplegado perpendicular a la pared.

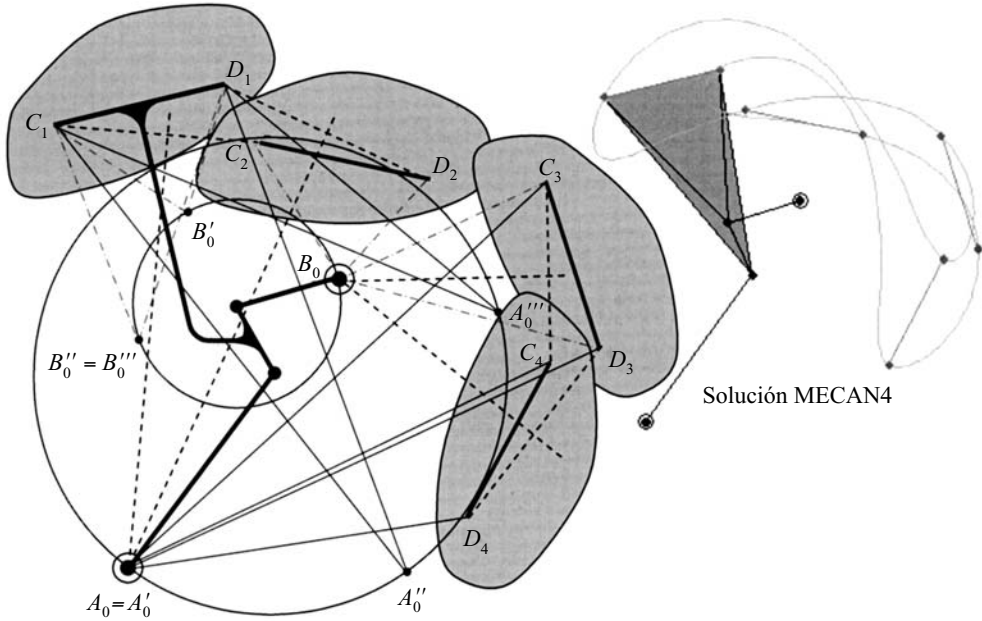


FIGURA 4.43. Guiado de cuatro posiciones del acoplador.

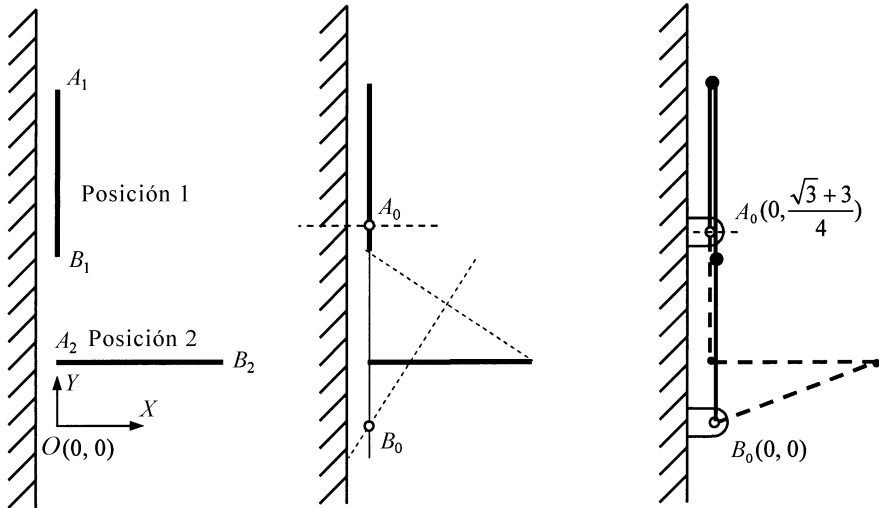


FIGURA 4.44. Síntesis de una silla de pared.

Datos: $A_1(0, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1)$, $B_1(0, 1)$, $A_2(0, 0,5)$ y $B_2(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0,5)$.

El mecanismo ha de cumplir la condición de que ningún elemento interfiera con la pared durante el movimiento.

La solución se representa en la figura 4.44.

2. *Trasvase de paquetes.* Se trata de diseñar un mecanismo cuadrilátero articulado para trasladar paquetes de una cinta transportadora a otra. En la figura 4.45 se muestran las posiciones de las articulaciones fijas.

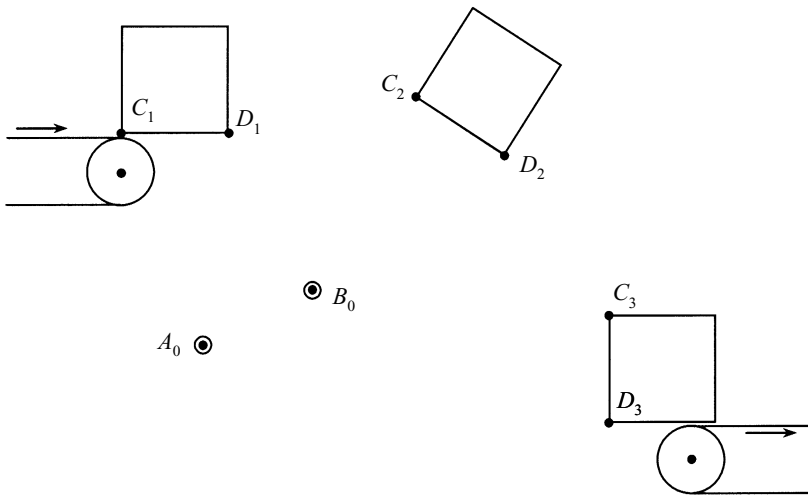


FIGURA 4.45. Diseño para trasvase de paquetes.

Aplicando el método de guiado de sólido rígido con tres posiciones de precisión se obtiene el diseño de la figura 4.46.

Sin embargo, este diseño tiene algunas desventajas. De hecho, entre la segunda y la tercera posición de precisión existe una posición de bloqueo, lo cual imposibilita la entrada por cualquiera de las barras con punto fijo. Incluso, sería bastante complejo plantear un accionamiento hidráulico mediante una diáda P.

En la figura 4.47 se presenta una solución dada por el programa MECAN4. Después de varios tanteos en el posicionamiento de las articulaciones fijas, se ha conseguido un diseño en el que una de las barras es manivela. Por lo tanto, la entrada puede ser accionada mediante un motor de rotación continua. La figura 4.48 muestra una secuencia del giro de la manivela. Por otro lado, el acoplador va y viene por el mismo sitio prácticamente, evitando cualquier colisión con las cintas u otros elementos del entorno. Además, precisamente las posiciones extremas 1 y 3 son los límites del movimiento del acoplador.

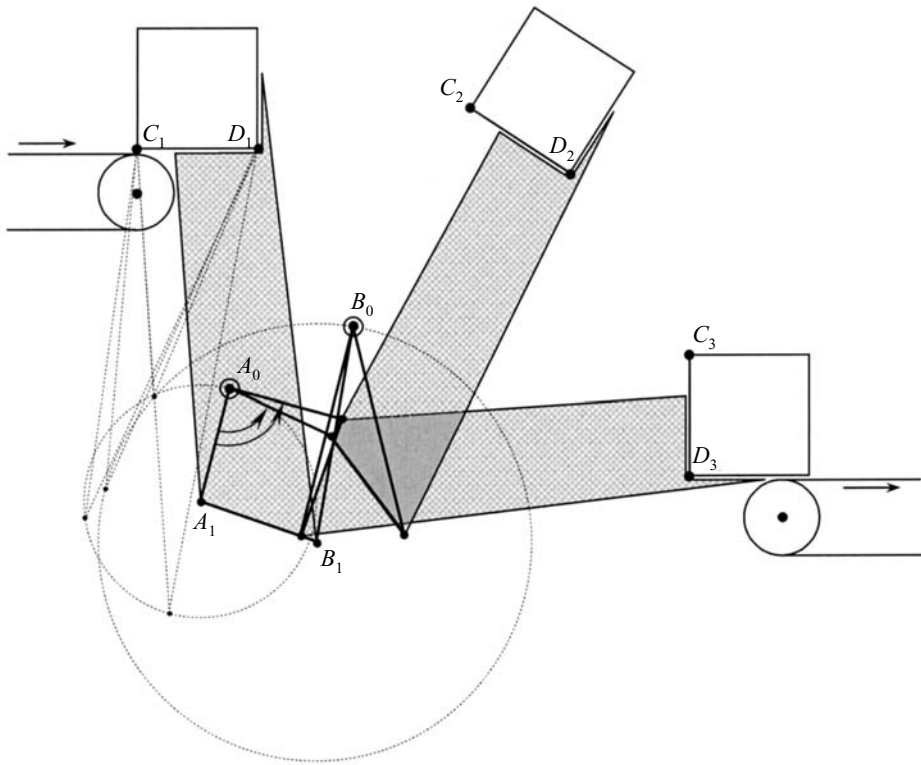


FIGURA 4.46. Diseño para trasvase de paquetes.

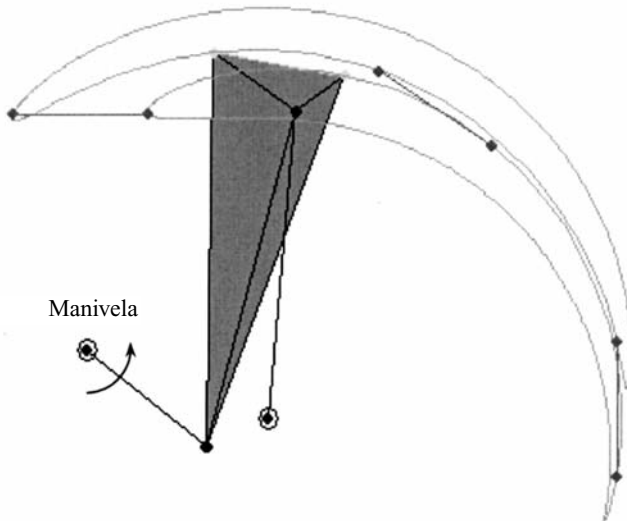


FIGURA 4.47. Diseño mejorado.

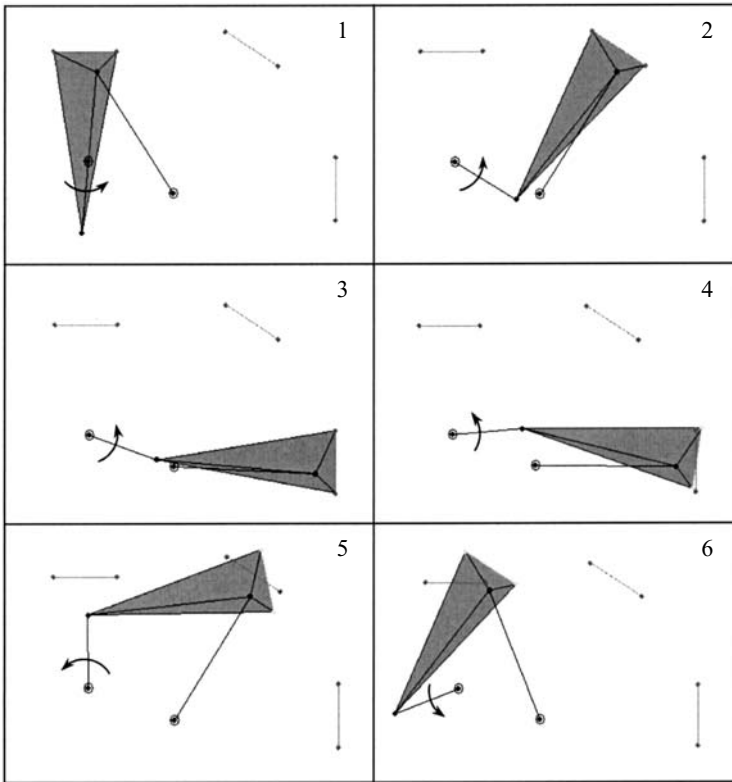


FIGURA 4.48. Posiciones sucesivas para un giro completo de la manivela.

3. *Transformación rampa-escalera* (Erdman, 1997; idea original de Wandzel, Kivi y Feist). Se pretende diseñar un mecanismo que facilite el acceso al almacén de un supermercado. En principio se accedía a dicho almacén por medio de dos peldaños, pero esto originaba problemas cuando los empleados pretendían acceder con un carro de carga. Para solucionar este problema se ha pensado en utilizar un mecanismo como el de la figura 4.49. Dicho mecanismo permite dos posibilidades: la primera (figura 4.49) mantiene la anterior configuración escalera, mientras que la segunda (figura 4.50) permite acceder por medio de una rampa.

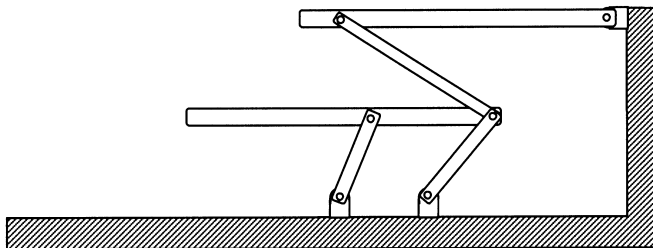


FIGURA 4.49. Configuración escalera.

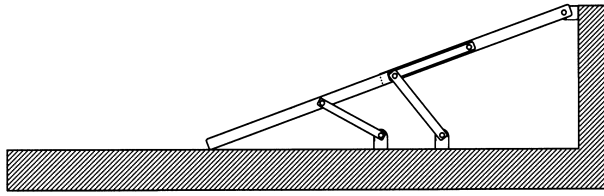


FIGURA 4.50. Configuración rampa.

Es evidente que un problema de diseño tiene múltiples soluciones que, además, pueden alcanzarse por diferentes caminos. Concretamente, para resolver este problema se va a apoyar en la solución gráfica de la figura 4.51, en la que aparece el mecanismo en las dos configuraciones exigidas. Los pasos para alcanzar las dimensiones del mecanismo solución pueden ser los siguientes:

1. Considérense como datos, las posiciones de los extremos O, A, B .
2. Se traza una línea horizontal por el punto medio del segmento AB que define la cota del primer escalón.
3. Se toma la articulación C (en la configuración escalón) de forma que CB sea aproximadamente un tercio de OA .
4. Se toma la articulación D sobre la línea horizontal del primer escalón de forma que el ángulo EDC sea ligeramente menor que 90° .
5. Se obtiene D' mediante el siguiente doble despliegue:
 - a) Con centro en C y radio CD , arco hasta la horizontal, obteniendo D'' .
 - b) Con centro en B y radio BD'' , arco hasta cortar a la línea OB , obteniendo D' .
6. La articulación fija O_D se obtiene mediante la intersección de la mediatriz DD' con OA .
7. Se toma E , a partir de D , sobre la horizontal del primer escalón, de forma que ED sea igual a OD' . Téngase en cuenta que $O \equiv E'$. Hay que comprobar, además, que la dimensión ED sea suficiente para el apoyo de un pie.
8. La articulación fija O_E se obtiene mediante la intersección de la mediatriz EE' con OA .

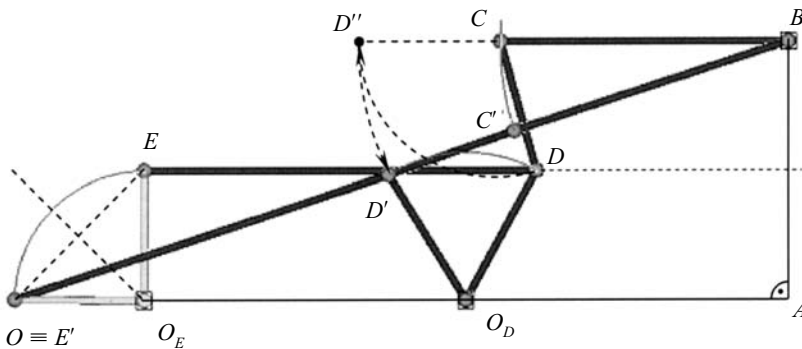


FIGURA 4.51. Solución gráfica.

En la figura 4.52 se presenta una secuencia de posiciones (realizadas con el programa GIM), donde se muestra como el mecanismo diseñado se despliega desde la configuración escalera a la configuración rampa.

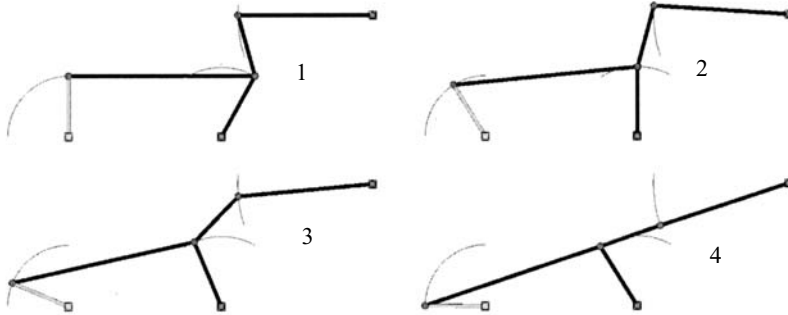


FIGURA 4.52. Secuencia de posiciones del mecanismo solución.

Se deja al lector que generalice el diseño para tres o más escalones.

4.5. Proyecto de mecanismo de elevación

Tanto este apartado como el punto anterior tienen como objeto mostrar la utilidad práctica de los conceptos desarrollados a lo largo de este capítulo. Para ello se propone la realización del diseño mecánico que se expone a continuación.

Se pretende diseñar un mecanismo de elevación para un vehículo de transporte en planta. En este caso, no se desea que el mecanismo de elevación sea de los que disponen de una guía vertical. Durante el movimiento de ascenso, la pala debe permanecer aproximadamente horizontal. Las articulaciones fijas deben situarse en el cuerpo del vehículo. El mecanismo debe tener un solo grado de libertad.

Éste es un caso típico de guiado de sólido rígido con movimiento de traslación rectilíneo. El primer paso consiste en sintetizar un cuadrilátero articulado con un tramo cuasi-rectilíneo. En principio se tienen dos opciones: utilizar varios puntos de precisión en línea recta o un punto de Ball. Para evitar defectos de orden y/o de rama, se optará por la segunda opción. Además, por simplicidad se utilizará una posición cicloidal.

Tómense, por ejemplo, 6 unidades para el diámetro de la c.c.e., y 12 unidades para el de la circunferencia de las inflexiones. De acuerdo con la ecuación:

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{B} - \frac{1}{\delta}$$

el diámetro de la c.c.e. será de 12 unidades. Se tratará aquí con unidades sin especificación, teniendo presente que obtenido un mecanismo, la adecuación de su tamaño a su ubicación real es cuestión de mera proporcionalidad. Orientando el cuadrilátero para que la trayectoria de su punto de acoplador sea vertical, se obtiene el siguiente diseño (figura 4.53):

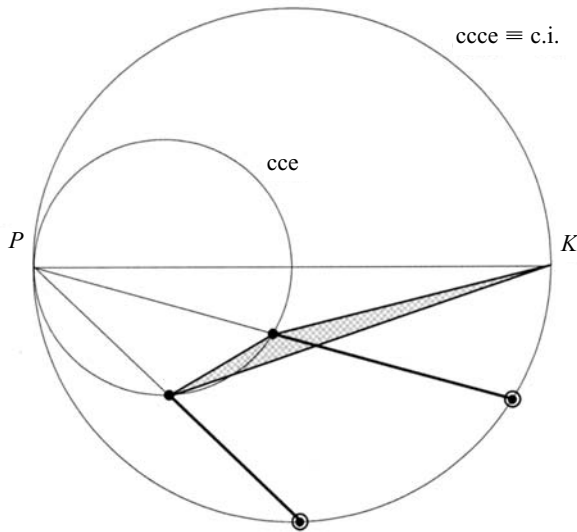


FIGURA 4.53. Punto de Ball en posición cicloidal.

A continuación se construyen los cognados de este cuadrilátero (figura 4.54):

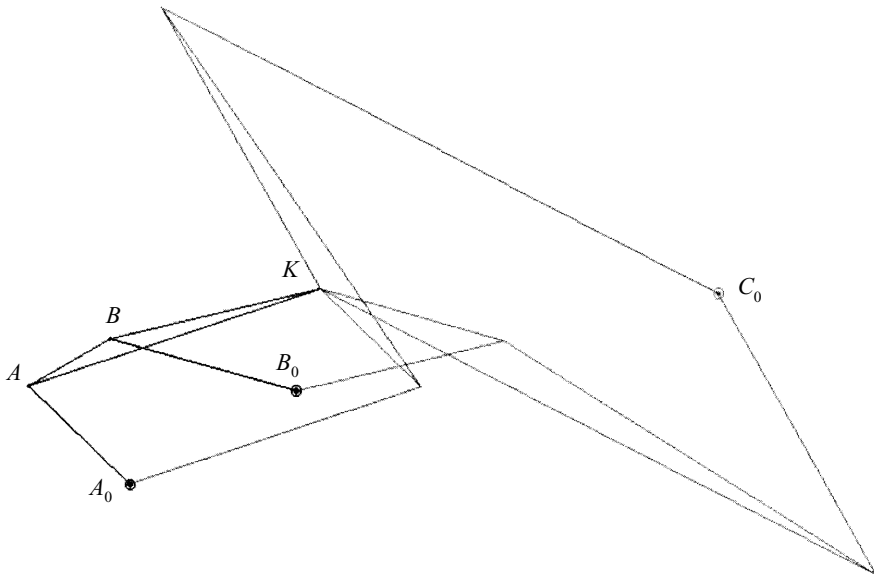


FIGURA 4.54. Cognados.

Utilizando los conceptos explicados en el apartado 4.4.1, se obtiene el mecanismo de la figura 4.55 a partir de la traslación del cognado inferior según la dirección definida por las articulaciones C_0A_0 . Dicho mecanismo posee un elemento (KK') con movimiento de traslación.

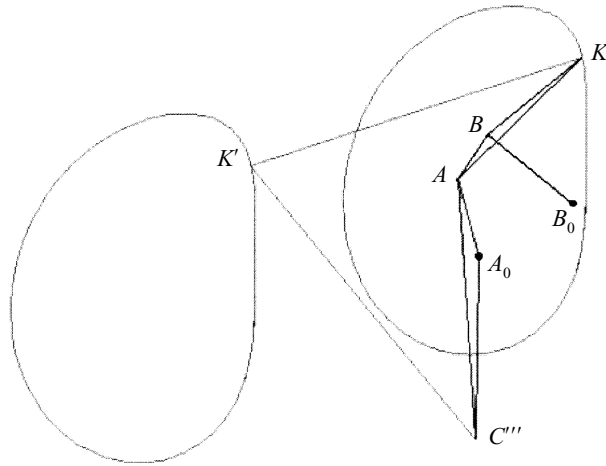


FIGURA 4.55. Mecanismo con un elemento que se traslada.

Sin embargo, la barra KK' es excesivamente larga para ubicarla en el vehículo, por lo cual se procederá a reducir su longitud. Para ello, se va a obtener un cuadrilátero semejante a $AKK'C'''$, pero de menor tamaño. Con esto se garantizará el paralelismo a lo largo de todo el movimiento, entre el cuadrilátero $AKK'C'''$ y el resultante de menor tamaño que, en este caso, es el $AEFD$ (figura 4.56):

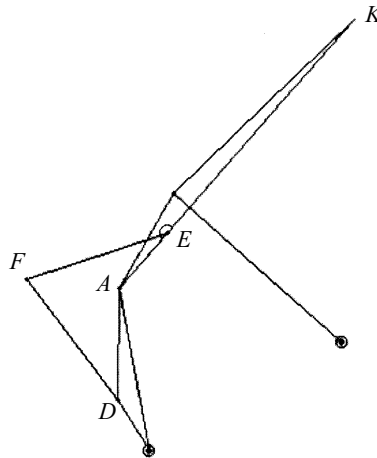


FIGURA 4.56. Mecanismo resultante de la reducción del lazo $AKK'C'''$.

Ahora, la barra que lleva el movimiento de traslación es EF . Por tanto, hay que llevar el movimiento paralelo de esta barra a un elemento articulado en el punto K , que es quien tiene el movimiento rectilíneo. Esta operación puede realizarse añadiendo una díada R a las barras EF y EK , de manera que el conjunto constituya un paralelogramo articulado, en el que la nueva barra GK tiene ahora un movimiento de traslación rectilíneo (figura 4.57).

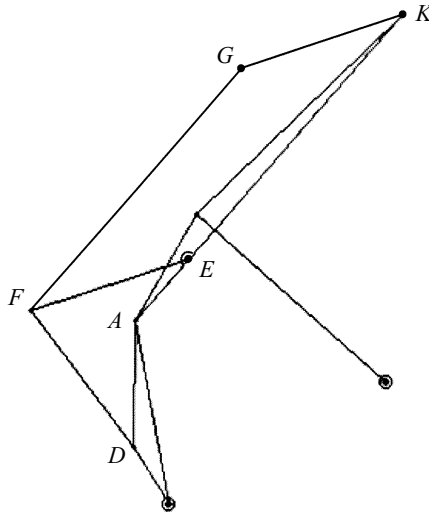


FIGURA 4.57. Mecanismo con movimiento rectilíneo paralelo del elemento GK.

Por último, se construye la pala del mecanismo de elevación (elemento GKL con base KL horizontal), que obviamente tiene movimiento de traslación vertical, por ser solidaria a GK . En la figura 4.58 se representa el movimiento de ascensión de la pala.

El programa MECAN4 tiene una opción para realizar diseños semejantes al descrito en este apartado.

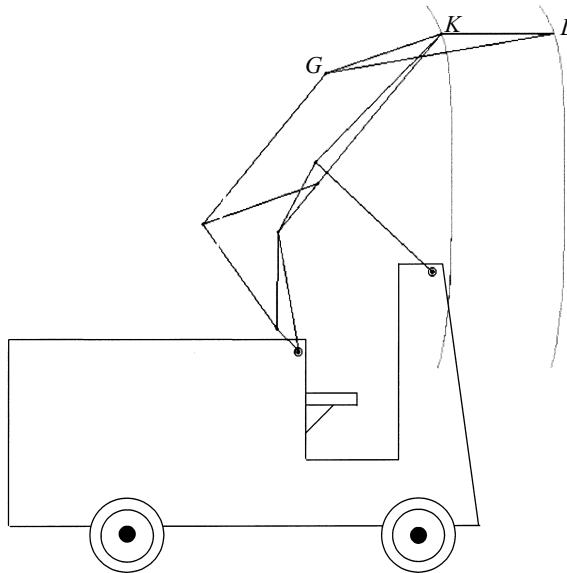


FIGURA 4.58. Movimiento de ascenso de la pala.

Ejercicios propuestos

1. Dadas las rectas canónicas de la figura 4.59 correspondientes a las c.c.e. en coordenadas paramétricas, obtener utilizando el método gráfico, los puntos del plano móvil correspondientes a los puntos señalados en dichas rectas. ¿Qué forma particular adopta la cúbica en el caso b)? ¿Por qué?

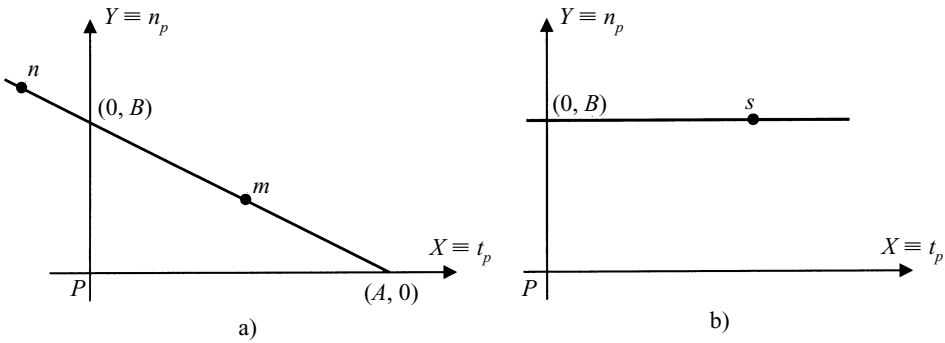


FIGURA 4.59. Rectas canónicas relativas al problema 1.

2. Sea el mecanismo de biela-manivela de la figura 4.60. Obtener y representar para la posición de la figura, la c.c.e. del elemento 3.

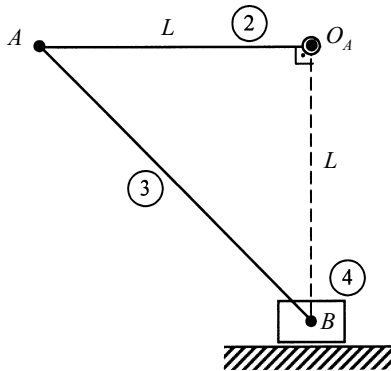


Figura 4.60. Mecanismo de biela-manivela del problema 2.

3. Dado el cuadrilátero articulado de la figura 4.61 donde $O_A A = AB = BO_B$, se pide:
 - 1) Obtener gráficamente los cognados de dicho cuadrilátero.
 - 2) Tomando como base el cuadrilátero dado, obtener un mecanismo en el que uno de sus elementos tenga un movimiento de traslación.

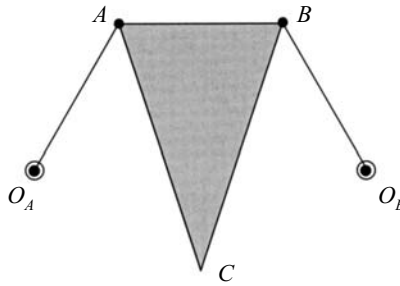


FIGURA 4.61. Cuadrilátero articulado del problema 3.

4. Se desea aplicar un movimiento intermitente a la cinta transportadora de la figura 4.62. Dicha cinta abastece de piezas a una máquina que realiza una operación de taladrado sobre cada una de ellas. Mientras transcurre la operación, la cinta debe permanecer inmóvil. A continuación, la cinta posiciona una nueva pieza en la máquina, a la vez que sale de ella la que acaba de ser taladrada.

Se pretende conseguir el movimiento intermitente mediante un cuadrilátero articulado, accionado por un motor de corriente alterna al que será necesario intercalarle un reductor. Asimismo, será necesario un volante de inercia para evitar que la manivela del cuadrilátero se embale durante el período en que trabaja en vacío. El avance es producido por el punto de acoplador al empujar los pivotes de la parte baja de la cinta durante el recorrido de su tramo quasi-rectilíneo, que debe corresponderse con la distancia entre pivotes. Durante el resto del movimiento, el cuadrilátero no debe tocar elemento alguno de la cinta, estando situado necesariamente, entre la misma y el suelo.

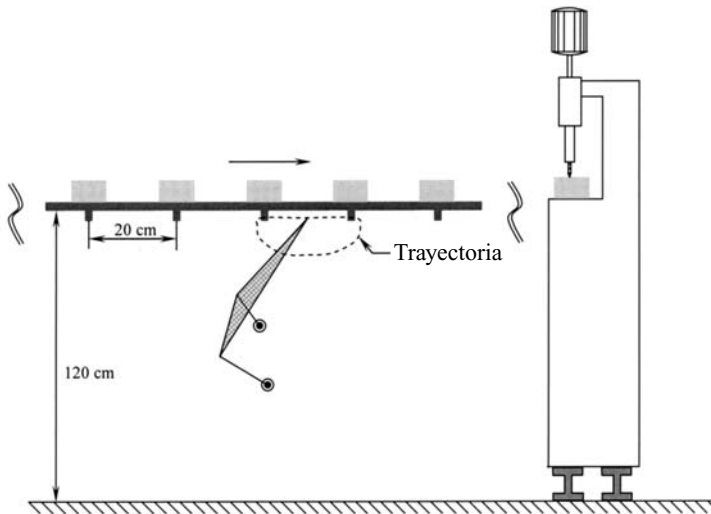


FIGURA 4.62. Dispositivo cinta transportadora.

5. Se pretende diseñar un dispositivo de cierre y apertura de una puerta de garaje (figura 4.63). Para ello se va a utilizar un cuadrilátero articulado a cuyo elemento acoplador será solidaria la puerta del garaje. Las posiciones de precisión requeridas para dicha puerta serán: abierta (lo más pegada posible al techo) y cerrada (perfectamente encajada en el hueco de la entrada del garaje).

Obviamente, durante el movimiento, la puerta no podrá contactar con parte alguna del cubículo. Además, se exige que invada lo menos posible la vía exterior para evitar accidentes con los transeúntes.

Estúdiese otra alternativa de diseño mediante un mecanismo biela-manivela.

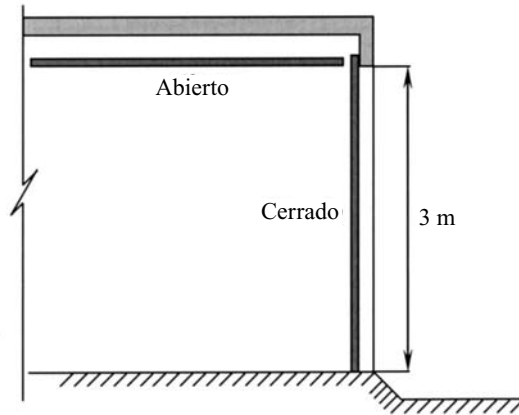


FIGURA 4.63. Posiciones de la puerta de garaje.

6. Se quiere diseñar un pupitre plegable para utilizar en una sala de conferencias. El propietario no desea el típico diseño de orejeta lateral desplegable desde la silla, ya que la zona para apoyo de libros u hojas es muy reducida. Por ello propone un esquema como el indicado en la figura 4.64.

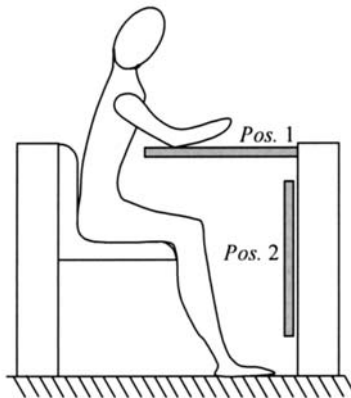


FIGURA 4.64. Pupitre con dos posiciones extremas.

Se definen dos posiciones para la zona de apoyo: plegada y desplegada. Los apoyos del mecanismo estarán situados sobre el respaldo del asiento precedente. Las dimensiones del pupitre y la altura a la que se situará el mismo serán tales que permitan trabajar de forma confortable. Ténganse en cuenta las posibles interferencias de la tabla.

- Se va a diseñar el mecanismo de un limpiaparabrisas de un camión. Se desea que las escobillas giren en sentidos opuestos mediante la utilización de dos cuadriláteros articulados ligados según la figura 4.65.

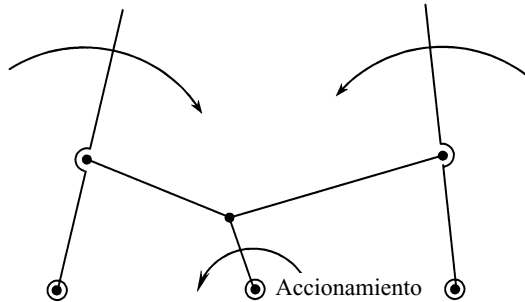


FIGURA 4.65. Mecanismo de limpiaparabrisas.

El movimiento viene dado por un motor rotativo continuo acoplado directamente a la barra central si es manivela, o de lo contrario mediante una diada acoplada a dicha barra central. El rango de movimientos del limpiaparabrisas es el indicado en la figura 4.66. Se deberá tener especial atención en evitar las posibles interferencias entre los limpiaparabrisas. Utilizando la síntesis de generación de función, diseñar el mecanismo pedido.

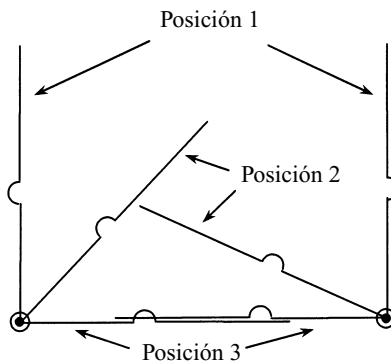


FIGURA 4.66. Posiciones impuestas de las escobillas.

5

Cinemática de mecanismos espaciales

5.1. Introducción

Hasta el momento, los métodos de análisis cinemático han sido expuestos de forma restringida en un contexto de movimiento plano. Efectivamente, la mayoría de los mecanismos industriales son planos; sin embargo, existen aplicaciones que requieren un movimiento tridimensional y que, por tanto, deben ser realizadas por mecanismos espaciales. En tales mecanismos, los puntos de sus elementos ya no se mueven en planos paralelos como en el caso de los mecanismos planos. Por esta razón, la proyección sobre un único plano, de las trayectorias, velocidades y aceleraciones de los puntos de un sólido con movimiento tridimensional no revela su verdadero movimiento. Así pues, los métodos gráficos expuestos en temas anteriores no son válidos para el análisis cinemático de mecanismos espaciales, debiéndose utilizar herramientas específicas de carácter analítico o numérico para su tratamiento. En la medida en que sea posible, se establecerá un paralelismo, o bien una extrapolación, entre los conceptos de la Cinemática plana y la espacial.

Como es conocido, un sólido libre en el plano posee 3 grados de libertad, dos de traslación y uno de rotación. En cambio, un sólido libre en el espacio tiene 6 grados de libertad, tres de ellos son de traslación y los tres restantes de rotación. Un caso particular de mecanismos espaciales son los mecanismos esféricos, los cuales se caracterizan porque todos sus puntos se mueven sobre superficies esféricas concéntricas. Se recuerda aquí que en el capítulo 1, apartado 1.10, ya fueron introducidas las principales características del movimiento esférico. Un sólido con movimiento esférico posee, igual que el movimiento plano, 3 grados de libertad, aunque en este caso los tres son de rotación. Entre estos dos tipos de movimientos existe una gran analogía. Mediante la trigonometría esférica pueden extrapolarse algunas de las principales características de los mecanismos planos a los mecanismos esféricos, como son: el criterio de Grashof, la ecuación de Euler-Savary, las configuraciones estacionarias, etc. A lo largo del texto han aparecido algunos mecanismos esféricos. Sin duda, el más conocido de todos es la junta universal.

El primer análisis de un mecanismo se centra en la detección de su número de grados de libertad. Aunque la fórmula de Malishev es una buena herramienta, obvia las características geométricas y dimensionales del mecanismo, por lo que está expuesta a la comisión de fallos. Precisamente, la mayoría de los mecanismos espaciales utilizados en la industria se caracterizan por tener unas dimensiones muy particulares que permiten simplificar sus ecuaciones de posición, sin menoscabar sus posibilidades de movimiento. En definitiva, se hace necesario el análisis de la matriz jacobiana tal y como se expuso en el capítulo 3. Allí se vio cómo dicho análisis permite determinar las configuraciones singulares, de las cuales, en general, los mecanismos huyen.

Un tipo muy particular de mecanismos espaciales son aquellos que derivan de una cadena cinemática abierta; son los denominados robots o manipuladores serie. Mecánicamente, un robot está constituido por un conjunto de elementos conectados en serie mediante pares cinemáticos; en la práctica, pares clase I, y más concretamente de rotación y prismáticos. El aspecto físico de los robots industriales guarda un cierto parecido con el brazo humano; por esta razón, algunas partes del mismo son designadas con términos como hombro, codo o muñeca. En la figura 5.1 se muestra la estructura típica de un robot.

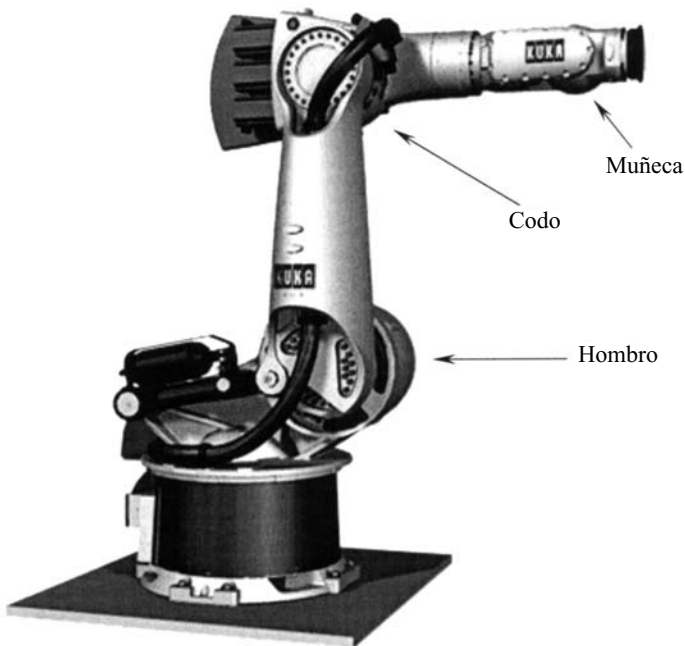


FIGURA 5.1. Robot KUKA (Cortesía de KUKA Roboter GmbH).

En contraposición a la disposición en serie de los elementos articulados de un robot, se encuentran los mecanismos espaciales de cinemática paralela. Son los denominados manipuladores paralelos: mecanismos de cadena cerrada con varios grados de libertad, caracterizados porque todos sus actuadores se apoyan en el elemento fijo y se conectan en

paralelo con un elemento flotante, la plataforma. Son mecanismos más rígidos que los robots, por lo que pueden soportar, en proporción, cargas superiores. Su estructura cinemática les permite alcanzar una mayor precisión y más altas velocidades y aceleraciones que sus oponentes, los robots serie. Por el contrario, su cinemática es más compleja, y su calibración todavía está lejos de ser un problema resuelto satisfactoriamente. Los manipuladores paralelos son muy utilizados en las nuevas generaciones de máquina herramienta, en aeronáutica, en dispositivos quirúrgicos, y en las plataformas de simulación de vehículos. En la figura 5.2 se muestra un moderno modelo de manipulador paralelo para realizar operaciones de mecanizado.

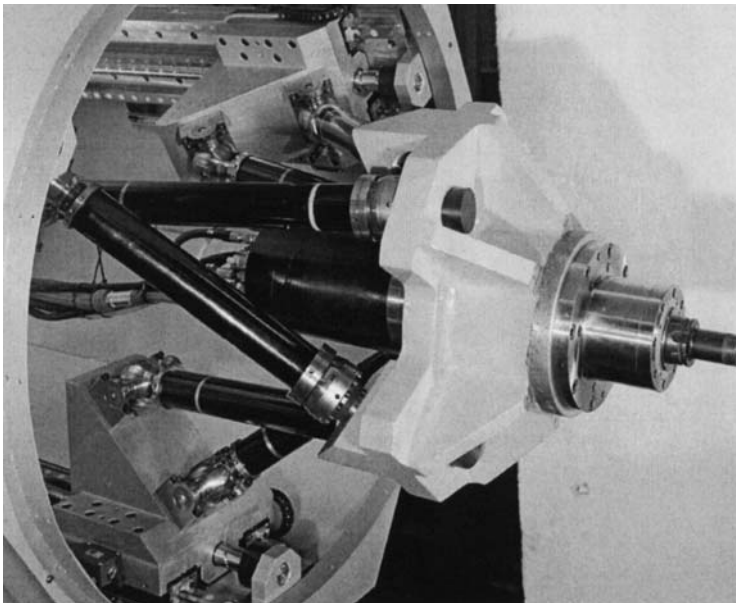


FIGURA 5.2. Manipulador paralelo para mecanizado (Cortesía de Fatronik).

La necesidad de una mayor productividad industrial, así como la demanda de movimientos complejos en ambientes peligrosos (altas temperaturas, toxicidad y radiación) exigen una gran variedad de robots. Sin embargo, para ciertas tareas altamente repetitivas y de escasa complejidad, es un lujo la utilización de robots, dada su excesiva cualificación y precio. Hay que sopesar, por tanto, la elección de un mecanismo espacial de lazo cerrado con un grado de libertad o a lo sumo ajustable, frente a un robot industrial dotado de varios grados de libertad controlados y con un sistema sensorial.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En primer lugar, se expone la herramienta matemática necesaria para representar posiciones, orientaciones y objetos en el espacio. Se han dedicado bastantes recursos a explicar el método matricial basado en los sistemas de referencia locales y las matrices de transformación, y a su especial aplicación a los manipuladores de cadena abierta. Sin embargo, no se ha dejado de lado la utilización del método geométrico, ni el análisis de los mecanismos espaciales de cadena cerrada. Final-

mente, se estudian los problemas relacionados con la matriz jacobiana, como son: el cálculo de velocidades, y el análisis de las posiciones singulares siguiendo el procedimiento expuesto en el capítulo 3.

5.2. Posiciones, orientaciones y objetos

Las funciones que realizan los mecanismos espaciales están directamente relacionadas con la localización de objetos, como el elemento terminal de un robot, la plataforma de un manipulador paralelo o cualquier otro elemento con el que pueda interactuar. En este apartado se van a especificar las características que definen la localización de un cuerpo en el espacio. Parte de ellas corresponden a la posición de un punto en el espacio; las restantes vienen dadas por la orientación o disposición angular del sólido. Ambas características, posición y orientación, se encuentran integradas en una única entidad: el sistema de referencia.

1. *Definición de una posición.* Un punto cualquiera de un sólido define su posición. Un punto en el espacio posee tres grados de libertad. Establecido un sistema de coordenadas, la posición de un punto quedará definida mediante un vector de tres componentes, que son las coordenadas del punto referidas a dicho sistema (figura 5.3).

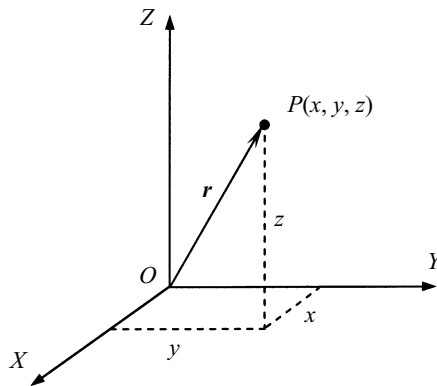


FIGURA 5.3. Representación de la posición de un punto en coordenadas cartesianas.

En este tipo de problemas, aparte del sistema de coordenadas absoluto, existen muchos otros solidarios a los distintos elementos del mecanismo. Por este motivo cada vector deberá ser etiquetado en relación con el sistema de coordenadas respecto del cual se define la posición del punto: $i\mathbf{r}$ si está referido al sistema i . La representación de la figura 5.3 se ha realizado en un sistema de coordenadas cartesiano. Otros tipos de sistemas de representación utilizan las coordenadas cilíndricas y las esféricas (figura 5.4).

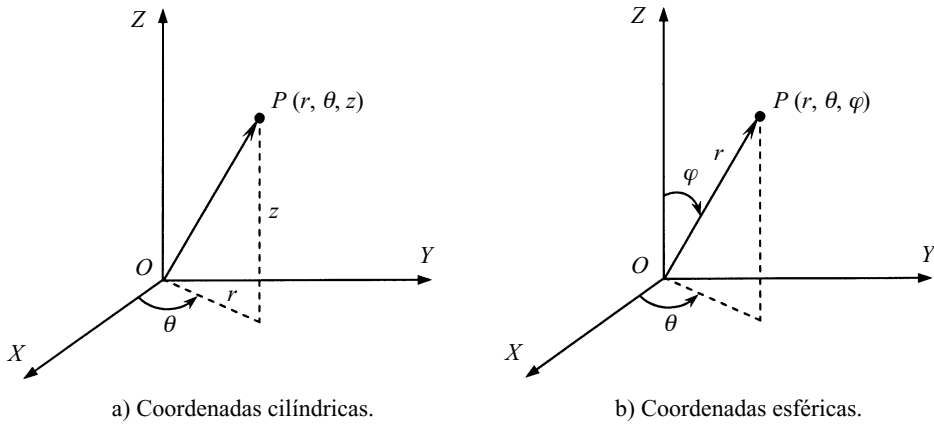


FIGURA 5.4. Otras representaciones de la posición de un punto.

2. *Definición de una orientación.* La localización de un sólido en el espacio requiere no sólo la representación de uno de sus puntos, sino también su orientación. Una orientación en el espacio viene definida por tres grados de libertad. Por ejemplo, cuando al extremo final de un robot se le ordena mecanizar una superficie no basta con indicarle los puntos sobre los que tiene que trabajar, sino que también hay que especificar la orientación espacial de la herramienta. Para describir la orientación de un cuerpo respecto de un determinado sistema de referencia, se sitúa solidariamente al cuerpo un sistema de coordenadas y se define la orientación espacial de este último respecto del primero (figura 5.5).

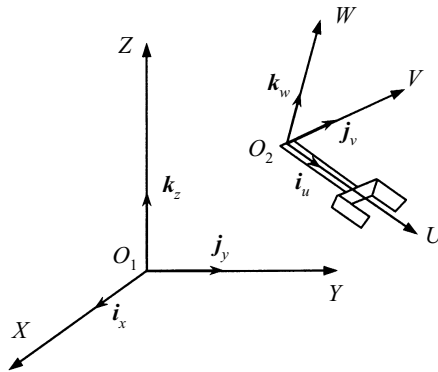


FIGURA 5.5. Representación de la orientación de la garra de un robot respecto del sistema de referencia OXYZ.

La forma más clara y directa para describir la orientación del sistema de coordenadas $(OUVW)_2$ es expresar sus vectores unitarios en función de la base canónica del sistema de referencia $(OXYZ)_1$. Esto da lugar a tres ternas de componentes (una por cada vector unitario) que dispuestas en columnas como términos de una matriz, constituyen la denomina-

da *matriz de rotación*. Formalmente debería llamarse matriz de orientación. Sin embargo, al coincidir con la matriz de rotación, adquiere su nombre. Dicha matriz será tratada en detalle a continuación, y constituye la forma más utilizada para representar la orientación de un objeto respecto de un sistema de referencia.

En resumen, las posiciones de puntos son descritas mediante vectores, y las orientaciones de sólidos mediante sistemas de coordenadas solidarios.

3. *Definición de un objeto*. Para definir completamente la localización de un cuerpo en el espacio se necesitan seis grados de libertad o, lo que es lo mismo, una posición y una orientación. Por sencillez, el punto del cuerpo elegido para definir la posición es, precisamente, el origen de coordenadas del sistema solidario al cuerpo. Pues bien, el conjunto formado por la posición del origen más la orientación del sistema de coordenadas es lo que define el concepto de *sistema de referencia* (figura 5.6). Éste puede considerarse un conjunto de cuatro vectores que definen la posición \mathbf{r} y orientación $(\mathbf{i}_u, \mathbf{j}_v, \mathbf{k}_w)$ del mismo, es decir, su localización. En resumen, un sistema de referencia contiene los elementos necesarios para describir la posición y la orientación de un objeto respecto de un sistema de coordenadas.

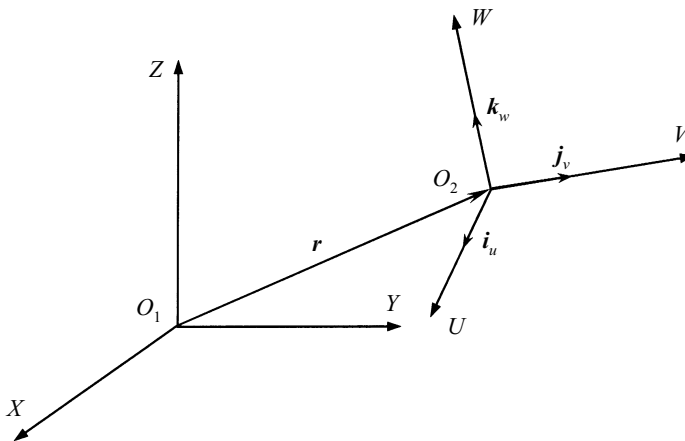


FIGURA 5.6. Sistema de referencia.

5.3. Representación de la orientación

En este apartado se va a establecer la relación entre las orientaciones de dos sistemas de referencia. Para ello pueden utilizarse las siguientes alternativas:

- La matriz de rotación.
- La composición de rotaciones básicas.
- La pareja ángulo y eje de giro.

- Los ángulos de Euler.
- Los cuaterniones.

De entre todas ellas, la más importante y utilizada es la matriz de rotación. En este texto se expondrán las cuatro primeras, sugiriendo al lector otras referencias (Barrientos, 1997) en caso de inclinarse por la utilización de los cuaterniones.

Puesto que en este apartado sólo se va a analizar la orientación de sistemas de coordenadas, por simplicidad se supondrá que todos ellos tienen la misma posición, es decir, el mismo origen de coordenadas que el sistema al que serán referidos.

5.3.1. Matriz de rotación

Considérense los sistemas de referencia 1 y 2 siguientes: $(OXYZ)_1$ y $(OUVW)_2$ ambos coincidentes en la situación de partida. Considérese, también, un objeto solidario al sistema de referencia 2. A continuación, el sistema 2 sufre un cambio en su orientación como consecuencia de una rotación. En esta situación considérese un punto cualquiera P del sólido cuya posición viene definida por un vector r (figura 5.7). Expresando este vector en función de la base canónica del sistema 1 resulta:

$$r = r_x i_x + r_y j_y + r_z k_z = {}^1r \tag{5.1}$$

Haciendo lo propio para el sistema 2:

$$r = r_u i_u + r_v j_v + r_w k_w = {}^2r \tag{5.2}$$

Donde 1r y 2r representan el mismo punto P , pero en las bases canónicas de los sistemas de coordenadas 1 y 2 respectivamente. Se trata de obtener la expresión de este punto P referida al sistema 1, cuando se conoce la orientación del sistema 2 (i_u, j_v, k_w) respecto del sistema 1 (i_x, j_y, k_z) .

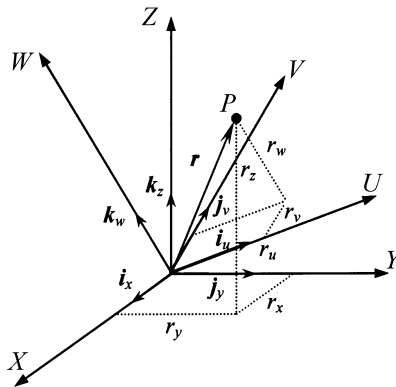


FIGURA 5.7. Posición de un punto P en los sistemas de referencia 1 y 2.

Las componentes de \mathbf{r} según el sistema de referencia 1 son las proyecciones de dicho vector según los ejes OX , OY y OZ :

$$r_x = \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{r}; r_y = \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{r}; r_z = \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{r} \quad [5.3]$$

Haciendo uso de la definición de producto escalar y teniendo en cuenta la ecuación [5.2] resulta:

$$r_x = \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u r_u + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v r_v + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w r_w \quad [5.4]$$

$$r_y = \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u r_u + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v r_v + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w r_w \quad [5.5]$$

$$r_z = \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u r_u + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v r_v + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w r_w \quad [5.6]$$

Expresado de forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{Bmatrix} \quad [5.7]$$

En función de los cosenos directores de los ejes OU , OV y OW respecto del sistema $(OXYZ)_1$:

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c(U,X) & c(V,X) & c(W,X) \\ c(U,Y) & c(V,Y) & c(W,Y) \\ c(U,Z) & c(V,Z) & c(W,Z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{Bmatrix} \quad [5.8]$$

Teniendo en cuenta que los cosenos directores de los ejes OU , OV y OW son las componentes de los vectores unitarios \mathbf{i}_u , \mathbf{j}_v y \mathbf{k}_w respecto de los ejes OX , OY y OZ , respectivamente, dicha matriz puede expresarse también:

$$\begin{bmatrix} c(U,X) & c(V,X) & c(W,X) \\ c(U,Y) & c(V,Y) & c(W,Y) \\ c(U,Z) & c(V,Z) & c(W,Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} = {}_1^2\mathbf{R} \quad [5.9]$$

Donde ${}^1_2\mathbf{R}$ es la forma compacta de expresar esta matriz, cuyos términos definen la orientación del sistema 2 respecto del sistema 1. Obsérvese que la expresión [5.7] representa una transformación de coordenadas entre ambos sistemas. Por tanto, ${}^1_2\mathbf{R}$ es, también, la *matriz de cambio de coordenadas* del sistema 2 al sistema 1. Por otro lado, el objeto y el sistema 2 (ambos solidarios) han sido sometidos a una rotación, a resultados de la cual, un punto genérico P del objeto de coordenadas (r_u, r_v, r_w) ha alcanzado una nueva posición de coordenadas (r_x, r_y, r_z) , ambas respecto del sistema 1 que ha permanecido inmóvil. Téngase en cuenta que en la posición de partida, las coordenadas de P eran (r_u, r_v, r_w) ,

tanto respecto del sistema 2 como del sistema 1. Por consiguiente, la matriz ${}^1_2\mathbf{R}$ representa, no sólo la rotación de un sistema a partir de otro, sino también la rotación de un vector de posición. Ambas circunstancias determinan la razón por la cual dicha matriz se denomina *matriz de rotación*, que es su acepción más conocida.

En conclusión, de lo anterior se desprenden tres posibles interpretaciones (o aplicaciones) de esta matriz:

1. Representar la orientación de un sistema de coordenadas $(OUVW)_2$ respecto de otro $(OXYZ)_1$.
2. Definir la transformación o cambio de coordenadas entre dos sistemas de coordenadas: $(OUVW)_2$ y $(OXYZ)_1$ en este caso.
3. Girar un vector de posición ${}^1\mathbf{r}$ mediante la transformación: ${}^1\mathbf{r}' = \mathbf{R} {}^1\mathbf{r}$. En este caso ${}^1\mathbf{r}$ y ${}^1\mathbf{r}'$ están referidos al sistema de referencia 1; por esta razón, \mathbf{R} no lleva asociado subíndice o superíndice alguno.

Como se ha indicado anteriormente, la especificación de una orientación supone 3 grados de libertad. Por ello, aunque la matriz de rotación tiene nueve términos, existen seis ecuaciones que los relacionan:

$$\mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_u = 1; \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{j}_v = 1; \mathbf{k}_w \cdot \mathbf{k}_w = 1; \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{j}_v = 0; \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{k}_w = 0; \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{k}_w = 0 \quad [5.10]$$

Para la obtención de la relación inversa de la ecuación [5.7] puede seguirse un planteamiento análogo, el cual daría lugar a la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{j}_y & \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{k}_z \\ \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{j}_y & \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{k}_z \\ \mathbf{k}_w \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{k}_w \cdot \mathbf{j}_y & \mathbf{k}_w \cdot \mathbf{k}_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} \quad [5.11]$$

Teniendo en cuenta que los productos escalares son conmutativos, puede observarse que la matriz de rotación de la transformación inversa es, precisamente, la traspuesta de la matriz de rotación de la transformación directa. En efecto, sea la ecuación [5.7] en forma compacta:

$${}^1\mathbf{r} = {}^1_2\mathbf{R} {}^2\mathbf{r} \quad [5.12]$$

Igualmente, la ecuación [5.11] se puede expresar:

$${}^2\mathbf{r} = {}^1_2\mathbf{R}^T {}^1\mathbf{r} \quad [5.13]$$

En consecuencia,

$${}^1_2\mathbf{R}^{-1} = {}^1_2\mathbf{R}^T \quad [5.14]$$

Por tanto, la matriz de rotación es una matriz ortonormal. Ahora bien, la matriz de rotación de la ecuación [5.11] define la orientación del sistema $(OXYZ)_1$ respecto del sistema $(OUVW)_2$. Es decir,

$${}^2r = {}^2R {}^1r \tag{5.15}$$

Teniendo en cuenta [5.13], [5.14] y [5.15] resulta:

$${}^2R = {}^1R^{-1} = {}^1R^T \tag{5.16}$$

A partir de la expresión de la matriz de rotación en cualquiera de sus formas [5.7] o [5.8], es fácil deducir las expresiones de las matrices de rotación que representan las rotaciones del sistema $(OUVW)_2$ alrededor de cada uno de los ejes coordenados del sistema $(OXYZ)_1$. En efecto, la matriz de rotación de un ángulo α alrededor del eje OX , $R_{\alpha,X}$, resulta (figura 5.8):

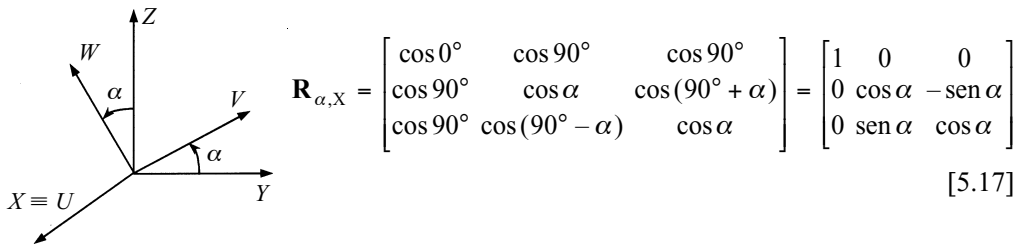


FIGURA 5.8. Matriz básica de rotación $R_{\alpha,X}$.

De la misma manera pueden obtenerse la matriz de rotación de un ángulo φ alrededor del eje OY , y la matriz de rotación de un ángulo θ alrededor del eje OZ , es decir, $R_{\varphi,Y}$, y $R_{\theta,Z}$ respectivamente (ver figura 5.9).

A las matrices [5.17], [5.18] y [5.19] se las denomina *matrices básicas de rotación*.

5.3.2. Composición de rotaciones básicas

A veces, la orientación de un sistema de referencia $(OUVW)_2$ respecto de otro $(OXYZ)_1$ viene representada mediante una composición de rotaciones básicas del sistema 2 alrededor de los ejes coordenados del sistema fijo 1. Un caso concreto es el representado por la matriz de rotación siguiente:

$${}^1R = R_{(\alpha,\varphi,\theta),(XYZ,Z)} = R_{\theta,Z} R_{\varphi,Y} R_{\alpha,X} \tag{5.20}$$

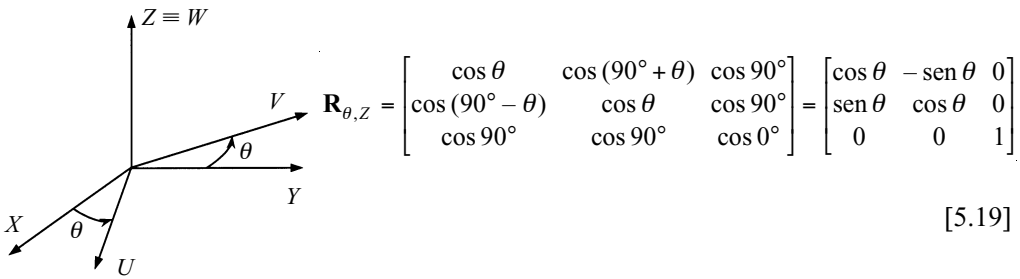
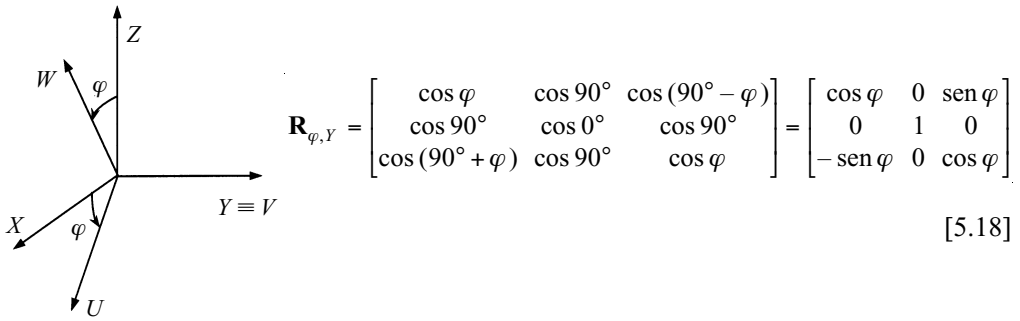


FIGURA 5.9. Matrices básicas de rotación $\mathbf{R}_{\varphi,Y}$ y $\mathbf{R}_{\theta,Z}$.

Que se obtiene de girar un ángulo α alrededor del eje OX , seguido de una rotación angular φ alrededor del eje OY y, finalmente, de un giro θ alrededor del eje OZ . Esta convención de rotaciones es conocida como *roll* (giro), *pitch* (elevación) y *yaw* (desviación), respectivamente, y es muy utilizada en ingeniería aeronáutica. Dado que el producto de matrices no es conmutativo, se debe ser especialmente cuidadoso al establecer la secuencia de las rotaciones.

Aunque la expresión [5.20] resulta bastante evidente, se va a demostrar a modo de ejercicio. En efecto, sea ${}^2\mathbf{r}$ el vector que define la posición de un punto P del cuerpo solidario al sistema 2. Después de la primera transformación, las coordenadas respecto del sistema 1 son: $\mathbf{R}_{\alpha,X} {}^2\mathbf{r}$. Considérese ahora un sistema de referencia auxiliar $(OUVW)_{2A}$ con igual orientación que el sistema 1 de forma que se podrá escribir:

$${}^{2A}\mathbf{r} = \mathbf{R}_{\alpha,X} {}^2\mathbf{r} \quad [5.21]$$

A continuación se le aplica la segunda transformación al sistema 2A de forma que las nuevas coordenadas de P respecto del sistema 1 serán: $\mathbf{R}_{\varphi,Y} {}^{2A}\mathbf{r}$. Considerando otro sistema de referencia auxiliar $(OUVW)_{2B}$ orientado igual que 1, se podrá escribir:

$${}^{2B}\mathbf{r} = \mathbf{R}_{\varphi,Y} {}^{2A}\mathbf{r} \quad [5.22]$$

Por último, realizando la tercera transformación al sistema 2B resulta:

$${}^1\mathbf{r} = \mathbf{R}_{\theta,Z} {}^2\mathbf{B}\mathbf{r} \quad [5.23]$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores se obtiene:

$${}^1\mathbf{r} = \mathbf{R}_{\theta,Z} \mathbf{R}_{\varphi,Y} \mathbf{R}_{\alpha,X} {}^2\mathbf{r} = \mathbf{R}_{(\alpha,\varphi,\theta)(X,Y,Z)} {}^2\mathbf{r} = {}^1_2\mathbf{R} {}^2\mathbf{r} \quad [5.24]$$

Obsérvese que en el proceso de obtención de la matriz [5.20] puede considerarse que el sistema 1 permanece fijo mientras que el sistema 2 se mueve. Además, se ha visto como los giros del sistema 2 están definidos en relación al sistema “fijo” (o en coordenadas globales).

A veces interesa componer las rotaciones refiriéndolas al sistema “móvil” 2. Por ejemplo, se define una orientación mediante las siguientes rotaciones: giro de un ángulo α respecto del eje OU , de un ángulo φ respecto del eje OV y de un ángulo θ respecto del eje OW . En este caso, la matriz de rotación adquiere la expresión:

$${}^1_2\mathbf{R} = \mathbf{R}_{(\alpha,\varphi,\theta),(U,V,W)} = \mathbf{R}_{\alpha,U} \mathbf{R}_{\varphi,V} \mathbf{R}_{\theta,W} \quad [5.25]$$

Puede observarse que en este caso las rotaciones básicas se postmultiplican, mientras que en [5.20] se premultiplican.

Cuando las rotaciones se refieren al sistema móvil 2 (también denominado local por ser solidario al objeto) hay que proceder de forma recurrente desde la situación final a la inicial. Pero antes de exponer el razonamiento, considérense una serie de sistemas de referencia auxiliares. Después de la primera rotación, el sistema local 2 queda orientado de una determinada manera respecto del sistema 1; esta orientación quedará recogida ubicando un sistema de referencia auxiliar fijo $(OUVW)_{1A}$ coincidente con el sistema local 2 en dicha posición. A continuación, se realiza la segunda rotación y de nuevo se recoge esta nueva orientación del sistema 2 mediante otro sistema de referencia auxiliar fijo $(OUVW)_{1B}$. A continuación, se realiza la tercera rotación del sistema 2 alrededor de su eje OW . De acuerdo con esta última transformación, la relación entre las coordenadas de un punto P del objeto referidas al sistema 2, y las coordenadas de dicho punto referidas al sistema 1B será:

$${}^1\mathbf{B}\mathbf{r} = \mathbf{R}_{\theta,W} {}^2\mathbf{r} \quad [5.26]$$

Ahora bien, el sistema 1B se ha obtenido al girar el sistema 1A un ángulo φ respecto del eje OV ; luego la posición ${}^1\mathbf{B}\mathbf{r}$ de P referida al sistema 1B y la posición ${}^1\mathbf{A}\mathbf{r}$ de P referida al sistema 1A, están relacionadas mediante la ecuación:

$${}^1\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{R}_{\varphi,V} {}^1\mathbf{B}\mathbf{r} \quad [5.27]$$

Siguiendo un razonamiento análogo, puede escribirse:

$${}^1\mathbf{r} = \mathbf{R}_{\alpha,U} {}^1A\mathbf{r} \quad [5.28]$$

Relacionando las ecuaciones [5.26], [5.27] y [5.28] resulta:

$${}^1\mathbf{r} = \mathbf{R}_{\alpha,U} \mathbf{R}_{\varphi,V} \mathbf{R}_{\theta,W} {}^2\mathbf{r} \quad [5.29]$$

Que coincide con la composición de rotaciones de la ecuación [5.25], como se quería demostrar.

Ejemplo de aplicación 5.1. Aplíquese a la posición (1,0,0) la siguiente composición de rotaciones:

1. En el sistema de referencia fijo: giro de 90° alrededor de OZ, 90° alrededor de OX y 90° alrededor de OY.
2. En el sistema de referencia móvil: giro de 90° alrededor de OW, 90° alrededor de OU y 90° alrededor de OV.

Obténgase la matriz de rotación respecto del sistema de referencia fijo (OXYZ)₁ en ambos casos. Compruébese que no se obtiene el mismo resultado.

Para el caso 1, la representación gráfica de los giros es (figura 5.10):

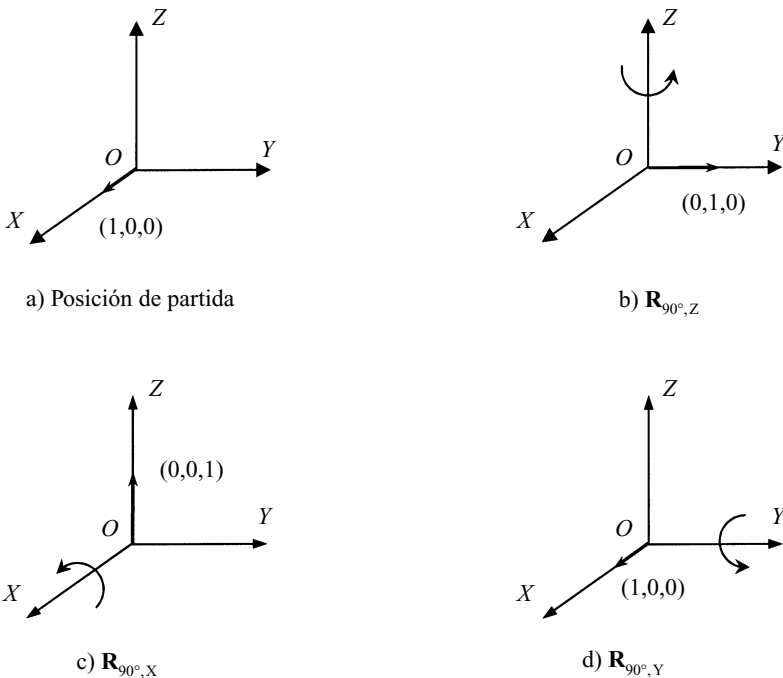


FIGURA 5.10. Composición de rotaciones en coordenadas globales.

Para el caso 1, la expresión matricial de los giros es:

$$\mathbf{R}_{90^\circ, Z} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ & 0 \\ \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{90^\circ, X} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ \\ 0 & \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{90^\circ, Y} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \operatorname{sen} 90^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Es decir, la posición resultante del vector (1, 0, 0) después de los tres giros es:

$${}^1\mathbf{r} = \mathbf{R}_{90^\circ, Y} \mathbf{R}_{90^\circ, X} \mathbf{R}_{90^\circ, Z} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matriz de rotación respecto del sistema de referencia fijo es:

$${}^1_2\mathbf{R} = \mathbf{R}_{90^\circ, Y} \mathbf{R}_{90^\circ, X} \mathbf{R}_{90^\circ, Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el caso 2, la representación gráfica de los giros viene dada en la figura 5.11. La representación del vector en los distintos sistemas de referencia al final de las transformaciones es:

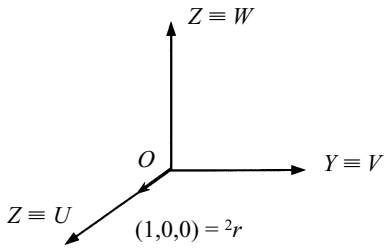
$$\begin{array}{ll} \text{S. Global: } {}^1\mathbf{r} (-1, 0, 0) & \text{S. Local: } {}^2\mathbf{r} (1, 0, 0) \\ \text{S. Auxiliar: } {}^{1B}\mathbf{r} (0, 0, -1) & \text{S. Auxiliar: } {}^{1A}\mathbf{r} (0, 1, 0) \end{array}$$

En cuanto a la expresión matricial de los giros, cuando la transformación se realiza en coordenadas locales hay que empezar por la última transformación:

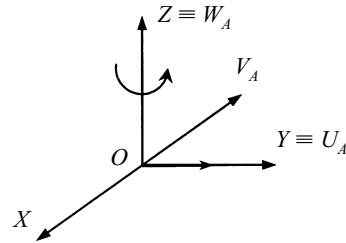
$$3.^{\text{a}} \text{ rotación: } {}^{1B}\mathbf{r} = \mathbf{R}_{90^\circ, V} {}^2\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \operatorname{sen} 90^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$2.^a \text{ rotación: } {}^1A \mathbf{r} = \mathbf{R}_{90^\circ, U} {}^1B \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\text{sen } 90^\circ \\ 0 & \text{sen } 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

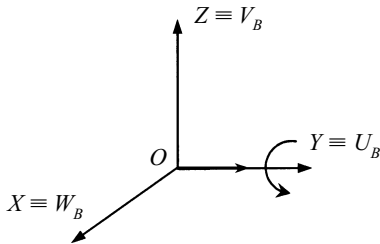
$$1.^a \text{ rotación: } {}^1 \mathbf{r} = \mathbf{R}_{90^\circ, W} {}^1A \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\text{sen } 90^\circ & 0 \\ \text{sen } 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



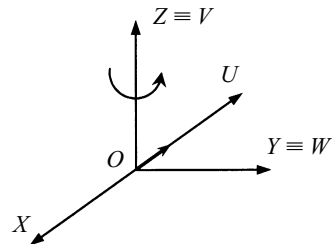
a) Posición de partida



b) $\mathbf{R}_{90^\circ, W}$



c) $\mathbf{R}_{90^\circ, U}$



d) $\mathbf{R}_{90^\circ, V}$

FIGURA 5.11. Composición de rotaciones en coordenadas locales.

Es decir, la posición resultante del vector después de los tres anteriores giros es:

$${}^1 \mathbf{r} = \mathbf{R}_{90^\circ, W} \mathbf{R}_{90^\circ, U} \mathbf{R}_{90^\circ, V} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de rotación respecto del sistema de referencia fijo es:

$${}^1_2\mathbf{R} = \mathbf{R}_{90^\circ, W} \mathbf{R}_{90^\circ, U} \mathbf{R}_{90^\circ, V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, cabe indicar que cualquier composición de matrices de rotación puede interpretarse como realizada respecto del sistema de referencia fijo o como realizada respecto del sistema de referencia móvil. Por ejemplo, la siguiente composición:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \operatorname{sen} \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Puede verse como:

- a) Una rotación de un ángulo φ respecto del eje OY seguida de una rotación de un ángulo θ respecto del eje OZ , ambas respecto del sistema de referencia fijo (OXYZ).
- b) Una rotación de un ángulo θ respecto del eje OW seguida de una rotación de un ángulo φ respecto del eje OV , ambas respecto del sistema de referencia móvil (OUVW).

Siguiendo con el ejemplo anterior, la composición en coordenadas locales realizada en último lugar puede verse como la siguiente concatenación en coordenadas globales:

- 1.º Rotación de 90° alrededor del eje OY .
- 2.º Rotación de 90° alrededor del eje OX .
- 3.º Rotación de 90° alrededor del eje OZ .

Es decir,

$${}^1_2\mathbf{R} = \mathbf{R}_{90^\circ, Z} \mathbf{R}_{90^\circ, X} \mathbf{R}_{90^\circ, Y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resulta, pues, la misma matriz. Sin embargo, analizando cada rotación por separado, los resultados parciales son distintos. Esto puede verse gráficamente en la figura 5.12, cuyo resultado (figura 5.12d) es coincidente con el de la figura 5.11d.

5.3.3. Ángulo y eje de rotación

La orientación del sistema de referencia móvil $(OUVW)_2$ respecto del fijo $(OXYZ)_1$ también puede expresarse mediante un giro β alrededor de un eje pasante por

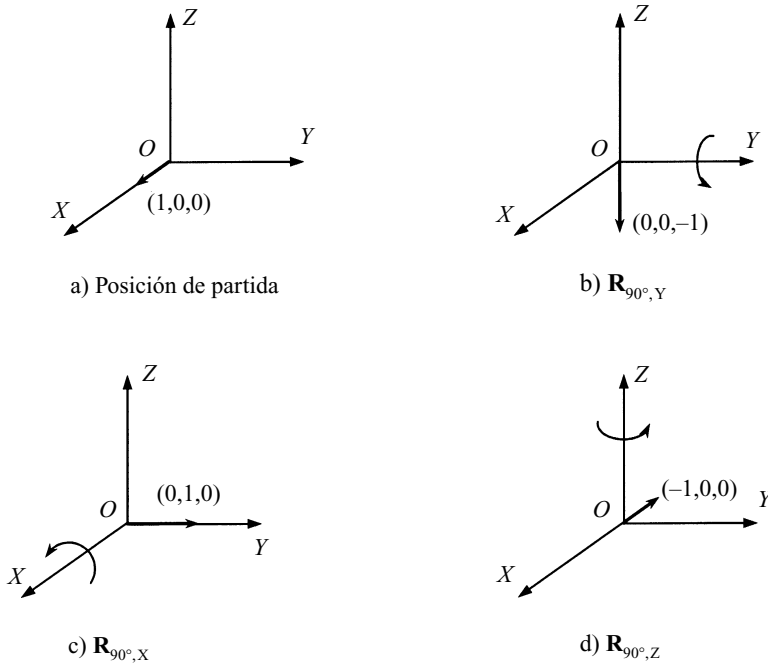


FIGURA 5.12. Composición de rotaciones en coordenadas globales.

el origen de coordenadas O cuya dirección viene dada por el vector $s = [s_x, s_y, s_z]$. La relación entre ambos sistemas puede ser expresada matemáticamente mediante la ecuación [5.12]:

$${}^1r = {}^2R {}^2r$$

Donde ahora,

$${}^2R = R_{\beta, s} \tag{5.30}$$

La matriz $R_{\beta, s}$ que define la orientación del sistema local 2 respecto del global 1 puede obtenerse mediante dos procedimientos diferentes. El primero de ellos se describe a continuación según los siguientes pasos. En primer lugar, se hace coincidir el eje s con uno de los ejes coordenados del sistema 1 mediante rotaciones básicas; a continuación, se realiza el giro del ángulo β alrededor de dicho eje; y, finalmente, se deshacen los giros básicos iniciales. En la figura 5.13 se representa una secuencia concreta de rotaciones de acuerdo con el procedimiento descrito. El orden de las rotaciones está indicado mediante subíndices.

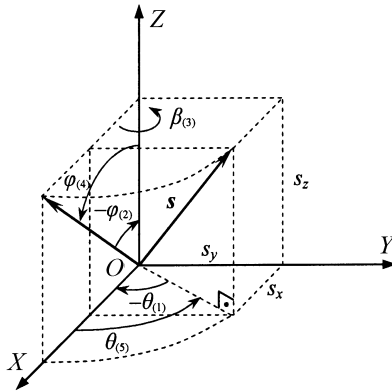


FIGURA 5.13. Orientación mediante rotación sobre un eje cualquiera.

En efecto, en primer lugar se gira el vector s un ángulo $-\theta$ alrededor del eje OZ , hasta llevarlo sobre el plano XZ . A continuación se gira un ángulo $-\varphi$ alrededor del eje OY hasta hacerle coincidir con el eje OZ . En este momento se realiza el giro β especificado. Finalmente, se deshacen las rotaciones básicas φ y θ (en este orden) inicialmente realizadas. De acuerdo con la secuencia de rotaciones expuesta resulta:

$$\beta, s = R_{\theta, Z} R_{\varphi, Y} R_{\beta, Z} R_{-\varphi, Y} R_{-\theta, Z} =$$

$$\begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi & 0 & s\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\varphi & 0 & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi & 0 & -s\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ s\varphi & 0 & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & s\theta & 0 \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.31]$$

Se utilizarán las expresiones $c\theta$ y $s\theta$ en vez de $\cos \theta$ y $\sin \theta$ respectivamente, dependiendo del espacio físico disponible.

De la figura 5.13 se deduce que:

$$\text{sen } \theta = \frac{s_y}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \quad [5.32]$$

$$\text{cos } \theta = \frac{s_x}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \quad [5.33]$$

$$\text{sen } \varphi = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}} \quad [5.34]$$

$$\text{cos } \varphi = \frac{s_z}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}} \quad [5.35]$$

La segunda forma de obtener [5.30] consiste en realizar un cambio de coordenadas a un nuevo sistema $(OUVW)_3$, donde el eje OW , por ejemplo, coincida con s (figura 5.14). A continuación se gira el ángulo β alrededor de este eje OW , y posteriormente se deshace el cambio de coordenadas.

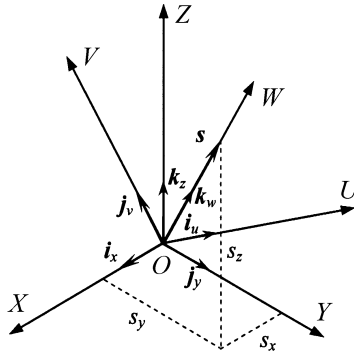


FIGURA 5.14. Disposición del sistema $(OUVW)_3$ en función de s .

En primer lugar, hay que obtener la matriz del citado cambio de coordenadas. Si se hace coincidir el eje OW con el eje s , su correspondiente vector unitario será:

$$k_w = \frac{s_x}{s} i_x + \frac{s_y}{s} j_y + \frac{s_z}{s} k_z \tag{5.36}$$

Donde:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \tag{5.37}$$

El eje OU puede elegirse de forma que esté contenido en el plano OXY , estando dada su dirección por el siguiente producto vectorial:

$$k_z \wedge s k_w = \begin{vmatrix} i_x & j_y & k_z \\ 0 & 0 & 1 \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} = -s_y i_x + s_x j_y \tag{5.38}$$

Normalizando:

$$i_u = \frac{-s_y}{s_{xy}} i_x + \frac{s_x}{s_{xy}} j_y \tag{5.39}$$

Con

$$s_{xy} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \quad [5.40]$$

Para que el sistema de referencia $(OUVW)_3$ sea positivo se adopta:

$$\mathbf{j}_v = \mathbf{k}_w \wedge \mathbf{i}_u = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{j}_y & \mathbf{k}_z \\ s_x & s_y & s_z \\ -s_y & s_x & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{s \ s_{xy}} \quad [5.41]$$

Operando,

$$\mathbf{j}_v = -\frac{s_x s_z}{s \ s_{xy}} \mathbf{i}_x - \frac{s_y s_z}{s \ s_{xy}} \mathbf{j}_y + \frac{s_{xy}}{s} \mathbf{k}_z \quad [5.42]$$

Por tanto, la matriz de cambio de coordenadas, según [5.7] resulta:

$${}^1_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\frac{s_y}{s_{xy}} & -\frac{s_x s_z}{s \ s_{xy}} & \frac{s_x}{s} \\ \frac{s_x}{s_{xy}} & -\frac{s_y s_z}{s \ s_{xy}} & \frac{s_y}{s} \\ 0 & \frac{s_{xy}}{s} & \frac{s_z}{s} \end{bmatrix} \quad [5.43]$$

Y la ecuación que establece el cambio de coordenadas entre el sistema fijo y el sistema 3 es:

$${}^1\mathbf{r} = {}^1_3\mathbf{R} \ {}^3\mathbf{r} \quad [5.44]$$

A continuación, se gira el objeto referido al sistema 3 un ángulo β alrededor del eje coordenado OW :

$${}^3\mathbf{r}' = \mathbf{R}_{\beta, W} \ {}^3\mathbf{r} \quad [5.45]$$

Finalmente, las coordenadas ${}^3\mathbf{r}'$ del punto P vuelven a referirse al sistema fijo mediante el cambio de coordenadas:

$${}^1\mathbf{r}' = {}^1_3\mathbf{R} \ {}^3\mathbf{r}' \quad [5.46]$$

De [5.44], [5.45] y [5.46] se obtiene:

$${}^1\mathbf{r}' = {}^1_3\mathbf{R} \ \mathbf{R}_{\beta, W} \ {}^1_3\mathbf{R}^T \ {}^1\mathbf{r} \quad [5.47]$$

Por lo que, teniendo en cuenta la tercera interpretación de la matriz de rotación (giro de un vector, p. 291), se deduce:

$$\mathbf{R}_{\beta,s} = \mathbf{R}_{\beta,W} \mathbf{R}_{\beta,W}^T \quad [5.48]$$

5.3.4. Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler ϕ, θ, ψ constituyen un conjunto completo de coordenadas generalizadas que definen la orientación de un cuerpo. En realidad, es una composición de rotaciones básicas alrededor de los ejes coordenados. La más conocida es la denominada WWV (figura 5.15) consistente en la siguiente secuencia: giro de un ángulo ϕ alrededor del eje OW ($\mathbf{R}_{\phi,W}$), giro de un ángulo θ alrededor del eje local OV ($\mathbf{R}_{\theta,V}$) y, por último, una rotación de un ángulo ψ alrededor del eje local OW ($\mathbf{R}_{\psi,W}$). Puesto que los sistemas $(OXYZ)_1$ y $(OUVW)_2$ son coincidentes al inicio, la primera rotación da igual definirla respecto del eje local OW ($\mathbf{R}_{\phi,W}$) que respecto del eje global OZ ($\mathbf{R}_{\phi,Z}$). La matriz de rotación resultante es:

$$\mathbf{R}_{\phi,\theta,\psi} = \mathbf{R}_{\phi,W} \mathbf{R}_{\theta,V} \mathbf{R}_{\psi,W} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \quad [5.49]$$

Dada la dualidad existente entre las rotaciones respecto de los ejes fijos y las rotaciones respecto de los ejes móviles, la matriz de rotación de los ángulos de Euler WWV equivale a la siguiente secuencia: giro de un ángulo ψ alrededor del eje Z , giro de un ángulo θ alrededor del eje Y , y giro de un ángulo ϕ alrededor del eje Z .

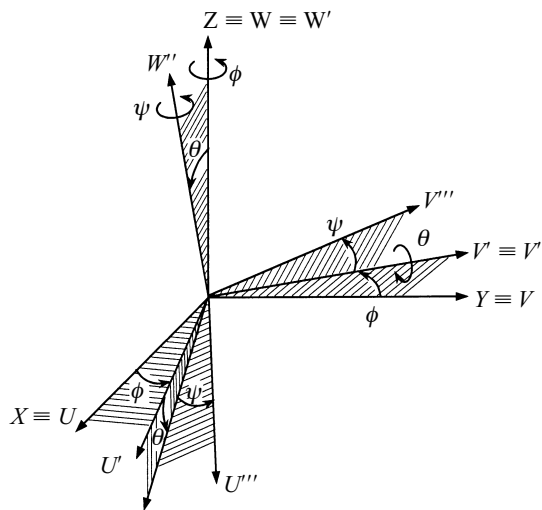


FIGURA 5.15. Secuencia de rotación euleriana WWV.

5.3.5. Relación entre la matriz de rotación y los restantes métodos de orientación espacial

A continuación se van a obtener las relaciones de paso (directas e inversas) entre la matriz de rotación:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}$$

Y los siguientes métodos de orientación espacial anteriormente vistos.

1. *Composición de rotaciones XYZ respecto del sistema fijo.* Para obtener la relación directa basta con igualar, término a término, la matriz de rotación y la matriz [5.20] resultando:

$$u_x = \cos\theta \cos\varphi \quad [5.50]$$

$$v_x = \cos\theta \sin\varphi \sin\alpha - \sin\theta \cos\alpha \quad [5.51]$$

$$w_x = \cos\theta \sin\varphi \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha \quad [5.52]$$

$$u_y = \sin\theta \cos\varphi \quad [5.53]$$

$$v_y = \sin\theta \sin\varphi \sin\alpha + \cos\theta \cos\alpha \quad [5.54]$$

$$w_y = \sin\theta \sin\varphi \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha \quad [5.55]$$

$$u_z = -\sin\varphi \quad [5.56]$$

$$v_z = \cos\varphi \sin\alpha \quad [5.57]$$

$$w_z = \cos\varphi \cos\alpha \quad [5.58]$$

La relación inversa se obtiene despejando α , φ y θ en función de los términos de la matriz de rotación. Obsérvese que ahora se tiene un sistema de nueve ecuaciones con tres incógnitas; es, por tanto, un sistema redundante pero compatible.

De la ecuación [5.56] resulta:

$$\sin\varphi = -u_z \quad [5.59]$$

De las ecuaciones [5.50] y [5.53] se obtiene:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u_y}{u_x} \quad [5.60]$$

Por último, dividiendo [5.57] entre [5.58] queda:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_z}{w_z} \quad [5.61]$$

Las ecuaciones [5.59], [5.60] y [5.61] dan lugar a múltiples soluciones, de las cuales sólo algunas son compatibles con las restantes ecuaciones del sistema: [5.51], [5.52], [5.54] y [5.55]. Además, pueden producirse indeterminaciones (p. ej., $u_x = u_y = 0$ en la ecuación [5.60]) en cuyo caso habrá que buscar ecuaciones alternativas entre las ecuaciones no utilizadas.

2. *Eje y ángulo de rotación.* La relación directa se obtiene igualando los términos de la matriz de rotación a los términos resultantes del producto de matrices [5.31] o también a los términos resultantes del producto de matrices [5.48]. Téngase en cuenta que la especificación de s requiere sólo dos parámetros, los que definen su dirección, ya que dicho vector suele expresarse normalizado:

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1 \quad [5.62]$$

Teniendo en cuenta esta relación, los términos de la matriz de rotación resultan ser:

$$u_x = s_x^2 (1 - \cos\beta) + \cos\beta \quad [5.63]$$

$$u_y = s_x s_y (1 - \cos\beta) + s_z \operatorname{sen}\beta \quad [5.64]$$

$$u_z = s_x s_z (1 - \cos\beta) - s_y \operatorname{sen}\beta \quad [5.65]$$

$$v_x = s_x s_y (1 - \cos\beta) - s_z \operatorname{sen}\beta \quad [5.66]$$

$$v_y = s_y^2 (1 - \cos\beta) + \cos\beta \quad [5.67]$$

$$v_z = s_y s_z (1 - \cos\beta) + s_x \operatorname{sen}\beta \quad [5.68]$$

$$w_x = s_x s_z (1 - \cos\beta) + s_y \operatorname{sen}\beta \quad [5.69]$$

$$w_y = s_y s_z (1 - \cos\beta) - s_x \operatorname{sen}\beta \quad [5.70]$$

$$w_z = s_z^2 (1 - \cos\beta) + \cos\beta \quad [5.71]$$

La relación inversa consiste en expresar el ángulo β y las componentes del vector s en función de los términos de \mathbf{R} . Para ello, sumando las ecuaciones [5.63], [5.67] y [5.71] resulta:

$$\cos\beta = \frac{u_x + v_y + w_z - 1}{2} \quad [5.72]$$

Restando las ecuaciones [5.68] y [5.70] queda:

$$s_x = \frac{v_z - w_y}{2 \operatorname{sen}\beta} \quad [5.73]$$

Restando las ecuaciones [5.69] y [5.65] se obtiene:

$$s_y = \frac{w_x - u_z}{2 \operatorname{sen}\beta} \quad [5.74]$$

Restando las ecuaciones [5.64] y [5.66] resulta:

$$s_z = \frac{u_y - v_x}{2 \operatorname{sen} \beta} \quad [5.75]$$

Esta relación inversa también puede obtenerse, haciendo uso del concepto de valor y vector propio. En efecto, si se aplica la matriz de rotación al propio eje s , resulta el mismo:

$$\mathbf{R} \mathbf{s} = \mathbf{s} \quad [5.76]$$

Así pues, si se resuelve el problema de valores y vectores propios siguiente:

$$\mathbf{R} \mathbf{s} = \lambda \mathbf{s} \quad [5.77]$$

Uno de los valores propios debe de ser la unidad ($\lambda = 1$) y su correspondiente vector propio, el eje de rotación s .

3. *Ángulos de Euler.* La relación directa se obtiene igualando término a término, la matriz de rotación a la matriz [5.49]:

$$u_x = \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi \quad [5.78]$$

$$u_y = \operatorname{sen} \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \operatorname{sen} \psi \quad [5.79]$$

$$u_z = -\operatorname{sen} \theta \cos \psi \quad [5.80]$$

$$v_x = -\cos \phi \cos \theta \operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \phi \cos \psi \quad [5.81]$$

$$v_y = -\operatorname{sen} \phi \cos \theta \operatorname{sen} \psi + \cos \phi \cos \psi \quad [5.82]$$

$$v_z = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \quad [5.83]$$

$$w_x = \cos \phi \operatorname{sen} \theta \quad [5.84]$$

$$w_y = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad [5.85]$$

$$w_z = \cos \theta \quad [5.86]$$

La relación inversa se obtiene despejando ϕ , θ , ψ en función de los términos de la matriz de rotación. El procedimiento es totalmente análogo al descrito en el punto 1: "Composición de rotaciones XYZ respecto del sistema fijo".

5.4. Representación de un objeto: matrices de transformación

En este apartado se va a introducir un operador matemático capaz de expresar la localización de un objeto respecto de un sistema de referencia.

5.4.1. Transformaciones entre sistemas de referencia con la misma orientación

Considérese la posición de un punto genérico P de un objeto, definida por un vector 2r respecto de un sistema $(OUVW)_2$ solidario a dicho objeto. Se pretende, ahora, expresar la

posición del punto P respecto de un sistema $(OXYZ)_1$ con la misma orientación que el sistema 2 (figura 5.16). El sistema 2 difiere del sistema 1 exclusivamente en una traslación, la cual puede ser expresada por el vector ${}^1_2\mathbf{d}$ que define la posición del origen O_2 del sistema 2 respecto del sistema 1.

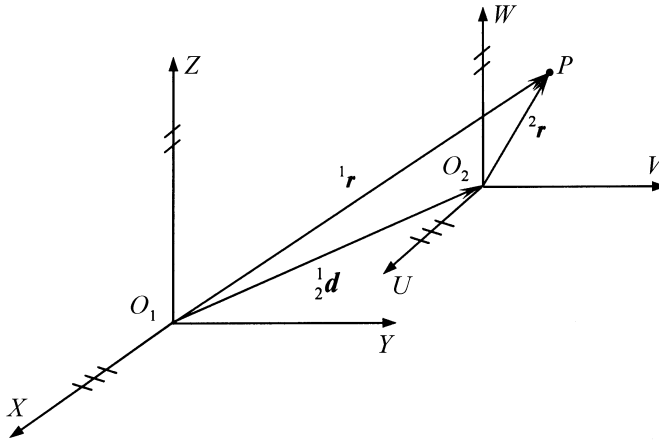


FIGURA 5.16. Transformación entre sistemas igualmente orientados.

La posición del punto P respecto del sistema de referencia 1 puede ser expresada mediante la suma:

$${}^1\mathbf{r} = {}^1_2\mathbf{d} + {}^2\mathbf{r} \tag{5.87}$$

Nótese que ésta es una ecuación general, válida para obtener las coordenadas ${}^1\mathbf{r}$ respecto del sistema 1, de cualquier punto solidario al sistema 2, de coordenadas ${}^2\mathbf{r}$ respecto al mismo; y esto es así en virtud de que los sistemas 1 y 2 tienen la misma orientación. De acuerdo con la nomenclatura establecida, la ecuación [5.87] puede ser expresada explícitamente:

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{Bmatrix} \tag{5.88}$$

5.4.2. Transformaciones entre sistemas de referencia cualesquiera

Considérese, ahora, el caso general de un sistema de referencia móvil $(OUVW)_2$ solidario al objeto, cuya posición y orientación es distinta de la del sistema de referencia fijo $(OXYZ)_1$. Sea ${}^1_2\mathbf{d}$ el vector que define la posición del origen del sistema 2 respecto del sis-

tema 1, y ${}^1_2\mathbf{R}$ la matriz de rotación que define la orientación del sistema 2 respecto del sistema 1. Sean ${}^1\mathbf{r}$ y ${}^2\mathbf{r}$ los vectores que definen la posición del punto P del objeto respecto de los sistemas 1 y 2 respectivamente (figura 5.17):

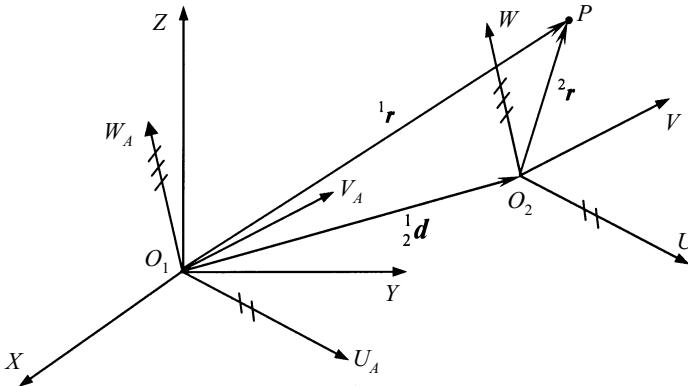


FIGURA 5.17. Sistema de referencia 2 girado y trasladado respecto del sistema 1.

El vector ${}^1\mathbf{r}$ puede expresarse en función de ${}^2\mathbf{r}$ siguiendo los siguientes pasos:

1. Inicialmente, ambos sistemas de coordenadas son coincidentes.
2. A continuación, se realiza un cambio de orientación del sistema 2, a un sistema de referencia auxiliar $(OUVW)_A$ con la misma orientación que 2, pero cuyo origen de coordenadas coincide con O_1 . Las coordenadas del punto P del objeto respecto del sistema fijo 1 son, ahora: ${}^1_2\mathbf{R}^2\mathbf{r}$.
3. Se traslada el sistema de referencia auxiliar una cantidad vectorial ${}^1_2\mathbf{d}$ hasta hacer coincidir su origen con O_2 . Las nuevas coordenadas del punto P del objeto respecto del sistema fijo 1 son: ${}^1_2\mathbf{R}^2\mathbf{r} + {}^1_2\mathbf{d}$.

Por tanto, la ecuación matricial resultante será:

$${}^1\mathbf{r} = {}^1_2\mathbf{R}^2\mathbf{r} + {}^1_2\mathbf{d} \tag{5.89}$$

Esta ecuación constituye una representación de la posición y de la orientación de un sistema de referencia respecto de otro; es lo que se conoce como localización de un sistema respecto de otro. Sin embargo, no es una representación homogénea, ya que la rotación se expresa mediante un producto matricial, y la traslación mediante una suma vectorial. Lo deseable sería una representación conjunta de la posición y de la orientación; es decir, una representación única y compacta mediante un operador matricial del tipo:

$${}^1\mathbf{r} = {}^1_2\mathbf{T}^2\mathbf{r} \tag{5.90}$$

Pues bien, para expresar la ecuación [5.89] en la forma de la ecuación [5.90], basta con añadir la identidad, $1 = 1$, a la ecuación [5.89]:

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{r} &= {}^1\mathbf{R} {}^2\mathbf{r} + {}^1_2\mathbf{d} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

De forma que ambas constituyan un sistema de ecuaciones matriciales cuya expresión en forma compacta es:

$$\begin{Bmatrix} {}^1\mathbf{r} \\ - \\ 1 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^1_2\mathbf{R} & {}^1_2\mathbf{d} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} {}^2\mathbf{r} \\ - \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.91}$$

Esta matriz de dimensión 4×4 :

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} & {}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{5.92}$$

Es denominada *matriz de transformación homogénea* y representa la descripción de la localización del sistema de referencia 2 respecto del sistema de referencia 1. Teniendo en cuenta exclusivamente el objetivo de este texto, la matriz de transformación homogénea puede considerarse una construcción matricial para expresar, tanto la rotación como la traslación de un vector, mediante un único operador matricial. En otras aplicaciones este operador tiene una expresión más general:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{d}_{3 \times 1} \\ \mathbf{p}_{1 \times 3} & w \end{bmatrix} \tag{5.93}$$

Donde $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ es una matriz de rotación, $\mathbf{d}_{3 \times 1}$ es un vector de traslación, $\mathbf{p}_{1 \times 3}$ es una submatriz que representa una transformación de perspectiva, y w es un factor de escala. Ahora, las posiciones o puntos deben ser expresados en coordenadas homogéneas, cuya relación con las coordenadas tridimensionales cartesianas es:

$${}^1\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_x w \\ r_y w \\ r_z w \\ w \end{Bmatrix} \tag{5.94}$$

Donde se observa que los vectores de coordenadas homogéneas son de dimensión 4. Para los objetivos de este texto sólo interesan $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ y $\mathbf{d}_{3 \times 1}$, adoptando:

$$\mathbf{p}_{1 \times 3} = [0 \ 0 \ 0]; w = 1 \quad [5.95]$$

Finalmente, al igual que la matriz de rotación, la matriz de transformación homogénea puede interpretarse como:

1. La representación de la localización de un sistema de referencia $(OUVW)_2$ respecto de otro $(OXYZ)_1$:

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} & {}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Un cambio de coordenadas entre los sistemas de referencia $(OUVW)_2$ y $(OXYZ)_1$:

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{Bmatrix} = {}^1_2\mathbf{T} \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{Bmatrix} \quad [5.96]$$

3. La rotación y traslación de un vector \mathbf{a} que se transforma en otro \mathbf{a}' , estando ambos referenciados respecto del mismo sistema $(OXYZ)$. En efecto, sea \mathbf{a} un vector definido por las posiciones de los puntos: final $\mathbf{r} (r_x, r_y, r_z, 1)$ y origen $\mathbf{p} (p_x, p_y, p_z, 1)$. Los correspondientes puntos girados y trasladados serán:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{T} \mathbf{r} \quad [5.97]$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T} \mathbf{p} \quad [5.98]$$

Restando ambas ecuaciones resulta:

$$\mathbf{r}' - \mathbf{p}' = \mathbf{T} (\mathbf{r} - \mathbf{p}) \quad [5.99]$$

Es decir,

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T} \mathbf{a} \quad [5.100]$$

Aunque resulte una obviedad, conviene indicar que la matriz de transformación homogénea entre dos sistemas coincidentes es la matriz unidad de orden 4.

5.4.3. Transformaciones básicas y composición de las mismas

1. *Traslación.* Considérese que el sistema $(OUVW)_2$ se encuentra únicamente trasladado una cantidad ${}^1_2\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z, 1)$ respecto del sistema $(OXYZ)_1$. La matriz de transformación tendrá la forma:

$$\mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.101]$$

Que es la denominada *matriz homogénea básica de traslación*.

La expresión [5.88] de una traslación, expresada ahora matricialmente tendrá la forma:

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_u + d_x \\ r_v + d_y \\ r_w + d_z \\ 1 \end{Bmatrix} \quad [5.102]$$

Este producto matricial posee todas las características de la traslación.

En efecto, aplíquese de nuevo una traslación \mathbf{T}_l sobre el sistema $(OUVW)_2$. Para ello, se considerará un sistema de referencia auxiliar $(OU'V'W')$, con igual localización que el sistema 1. Las coordenadas del sistema 2 referidas a este sistema auxiliar 2' serán:

$$\begin{Bmatrix} r'_u \\ r'_v \\ r'_w \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_d \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{Bmatrix} \quad [5.103]$$

La aplicación de la nueva traslación \mathbf{T}_l al sistema auxiliar 2' dará lugar a las nuevas coordenadas del sistema móvil $(OUVW)_2$ respecto del sistema fijo 1:

$$\mathbf{T}_l \begin{Bmatrix} r'_u \\ r'_v \\ r'_w \\ 1 \end{Bmatrix} = T_l T_d \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (l_x + d_x) \\ 0 & 1 & 0 & (l_y + d_y) \\ 0 & 0 & 1 & (l_z + d_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{Bmatrix} \quad [5.104]$$

Donde, como puede verse, el producto $\mathbf{T}_l \mathbf{T}_d$ es otra matriz \mathbf{T}_{l+d} con la estructura de una matriz básica de traslación.

Por otro lado, la matriz básica de traslación \mathbf{T}_d es claramente regular, siendo muy sencillo comprobar que su inversa es:

$$\mathbf{T}_d^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & 0 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 & -d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{-d} \quad [5.105]$$

Del mismo modo, pueden comprobarse otras propiedades de la traslación como son las propiedades conmutativa, asociativa, etc.

2. *Rotación.* Considérese ahora que el sistema móvil $(OUVW)_2$ tiene el mismo origen de coordenadas, pero distinta orientación que el sistema de referencia fijo $(OXYZ)_1$. De acuerdo con [5.92] y [5.9], la matriz de transformación homogénea tendrá la forma:

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.106]$$

Igual que para la matriz de rotación, se pueden definir las siguientes matrices homogéneas básicas de rotación, alrededor de los ejes fijos OX , OY y OZ , respectivamente:

$$\mathbf{T}_{\alpha,X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.107]$$

$$\mathbf{T}_{\varphi,Y} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \text{sen } \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.108]$$

$$\mathbf{T}_{\theta,Z} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.109]$$

Todo lo indicado en aquel apartado sobre las matrices de rotación es de total aplicación para este tipo particular de matrices de transformación homogéneas.

3. *Traslación y rotación conjuntas.* Como se ha indicado anteriormente, la principal ventaja de la matriz de transformación es su capacidad de representar conjuntamente la posición (mediante el vector ${}^1_2\mathbf{d}$) y la orientación (mediante la matriz ${}^1_2\mathbf{R}$) de un sistema móvil $(OUVW)_2$ respecto de otro fijo $(OXYZ)_1$:

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} & {}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & d_x \\ u_y & v_y & w_y & d_y \\ u_z & v_z & w_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.110]$$

Las transformaciones de rotación y traslación son operaciones no conmutativas entre sí por lo que habrá que tener en cuenta el orden de realización de las mismas. Considérese, a modo de ejemplo, una rotación alrededor del eje fijo OX seguida de una traslación respecto del sistema fijo ($OXYZ$). Teniendo en cuenta que dichas transformaciones se van a realizar respecto del sistema de referencia fijo, la matriz de transformación de rotación deberá ser premultiplicada por la de traslación:

$$\mathbf{T}_d \mathbf{T}_{\alpha, X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & d_y \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.111]$$

Si se considera ahora el caso contrario, es decir, una traslación seguida de una rotación respecto del sistema fijo ($OXYZ$) con idénticos valores que en el caso anterior, se obtendrá:

$$\mathbf{T}_{\alpha, X} \mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & d_y c\alpha - d_z s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha & d_y s\alpha + d_z c\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.112]$$

Como puede observarse, el resultado es distinto.

Ejemplo de aplicación 5.2. Aplicar las transformaciones anteriores [5.111] y [5.112], particularizadas para $\alpha = 90^\circ$ y $d(0, 0, 1)$, sobre un punto P de coordenadas $r(0, 0, -1)$ y sobre un vector $a = \overrightarrow{OP}$.

Procediendo según la transformación [5.111] se obtiene:

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{T}_d \mathbf{T}_{90^\circ, X} \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad [5.113]$$

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{T}_d \mathbf{T}_{90^\circ, X} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [5.114]$$

Nótese que, a diferencia de las posiciones de puntos, la cuarta coordenada de un vector es nula, ya que un vector representa una dirección, un punto impropio o punto del infinito ($w = 0$). Puede parecer también que exista una cierta ambigüedad al asimilar las coordenadas del punto P a las del vector r cuyo extremo-origen es siempre el origen de coordenadas. Sin embargo, si la cuarta coordenada es un 1, indefectiblemente se estará tratando con una posición (con un punto), independientemente de que se refiera al mismo como r o P .

Gráficamente (figura 5.18), las transformaciones [5.113] y [5.114] resultan ser:

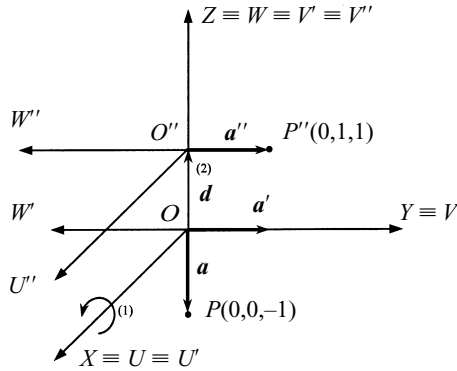


FIGURA 5.18. Transformaciones [5.113] y [5.114].

Procediendo según la transformación [5.112] se obtiene:

$$r'' = \mathbf{T}_{90^\circ, X} \mathbf{T}_d r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [5.115]$$

$$a'' = \mathbf{T}_{90^\circ, X} \mathbf{T}_d a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [5.116]$$

La representación gráfica (figura 5.19) de estas transformaciones es:

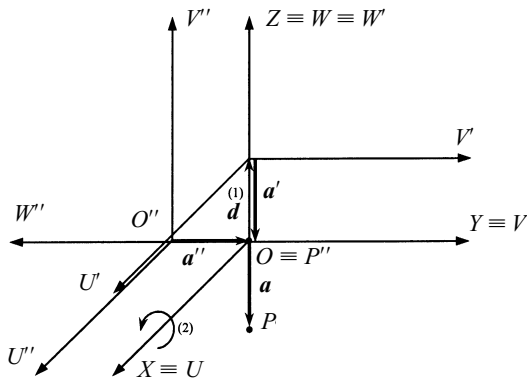


FIGURA 5.19. Transformaciones [5.115] y [5.116].

De los resultados [5.113], [5.114], [5.115] y [5.116], así como de las figuras 5.18 y 5.19 pueden extraerse las siguientes conclusiones:

1. Como se había anticipado, las posiciones de $P(0, 0, -1, 1)$ después de las transformaciones en uno y otro caso son distintas.
2. Igualmente, la posición del sistema de referencia ($OU''V''W''$) es diferente en ambos casos.
3. Sin embargo, la orientación del sistema ($OU''V''W''$) es idéntica después de las dos transformaciones, como se puede observar en [5.111] y [5.112]. Esto es debido a que ambas transformaciones incluyen la misma matriz básica de rotación.
4. Por la misma razón, los vectores a'' quedan igualmente orientados al final de ambas transformaciones.

5.4.4. Composición de matrices de transformación

Como se ha visto, las matrices de transformación pueden componerse dando lugar a otras matrices compuestas que acumulan todas las transformaciones realizadas. A continuación se indican resumidamente las reglas para determinar una matriz de transformación compuesta:

1. Si las transformaciones aplicadas sobre el sistema móvil ($OUVW$) se refieren al sistema fijo ($OXYZ$), entonces las matrices que representan las sucesivas transformaciones se van premultiplicando.
2. Si las transformaciones aplicadas sobre el sistema móvil ($OUVW$) se refieren al mismo, entonces las matrices que representan las sucesivas transformaciones se van postmultiplicando.
3. Al igual que en la composición de rotaciones, cualquier producto de matrices de transformación puede interpretarse como una secuencia de transformaciones realizadas sobre el sistema de referencia fijo o como una secuencia de transformaciones realizadas sobre el sistema de referencia móvil.

A continuación se visualizará la regla 2, que es la más utilizada. En la figura 5.20 están representados dos sistemas de referencia móviles y uno fijo: $(OUVW)_3$, referido a $(OUVW)_2$, y $(OUVW)_2$, referido al sistema fijo $(OXYZ)_1$.

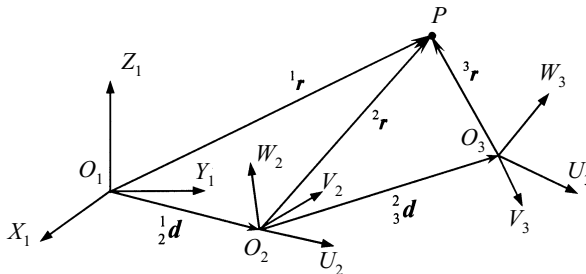


Figura 5.20. Composición de transformaciones en coordenadas locales.

Se desea obtener la relación entre las coordenadas ${}^1\mathbf{r}$ y ${}^3\mathbf{r}$ que definen la posición de un punto P con respecto a los sistemas 1 y 3 respectivamente. Para ello, ${}^2\mathbf{r}$ puede expresarse en función de ${}^3\mathbf{r}$ de la siguiente manera:

$${}^2\mathbf{r} = {}^2\mathbf{T} {}^3\mathbf{r} \quad [5.117]$$

A su vez, ${}^1\mathbf{r}$ en función de ${}^2\mathbf{r}$:

$${}^1\mathbf{r} = {}^1\mathbf{T} {}^2\mathbf{r} \quad [5.118]$$

Combinando [5.117] y [5.118]:

$${}^1\mathbf{r} = {}^1\mathbf{T} {}^2\mathbf{T} {}^3\mathbf{r} \quad [5.119]$$

Por tanto, la matriz de transformación que define directamente la localización del sistema 3 respecto del 1 será:

$${}^1\mathbf{T} = {}^1\mathbf{T} {}^2\mathbf{T} {}^3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} & {}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2_3\mathbf{R} & {}^2_3\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} {}^2_3\mathbf{R} & {}^1_2\mathbf{R} {}^2_3\mathbf{d} + {}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad [5.120]$$

5.4.5. Transformación inversa

Sea ${}^1_2\mathbf{T}$ la matriz de transformación que define la localización del sistema de referencia 2 respecto del sistema 1. A veces, es interesante invertir dicha matriz con el objeto de obtener la localización del sistema de referencia 1 respecto de 2.

En efecto:

$${}^1\mathbf{r} = {}^1_2\mathbf{T} {}^2\mathbf{r}; \quad {}^2\mathbf{r} = ({}^1_2\mathbf{T})^{-1} {}^1\mathbf{r} = {}^2_1\mathbf{T} {}^1\mathbf{r} \quad [5.121]$$

Es decir,

$${}^2_1\mathbf{T} = ({}^1_2\mathbf{T})^{-1} \quad [5.122]$$

Por otro lado, ${}^1_2\mathbf{T}$ que en su forma general se expresa según [5.110], puede representarse mediante la composición de una traslación seguida de una rotación, ambas referidas al sistema móvil, o al revés si se refieren al sistema fijo:

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} & {}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & {}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad [5.123]$$

Invirtiendo esta matriz:

$$({}^1_2\mathbf{T})^{-1} = {}^2_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & {}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad [5.124]$$

Teniendo en cuenta la ecuación [5.105] resulta:

$${}^2_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} ({}^1_2\mathbf{R})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -{}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -{}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1_2\mathbf{R}^T & -{}^1_2\mathbf{R}^T {}^1_2\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad [5.125]$$

Como puede verse, queda en función de las submatrices de ${}^1_2\mathbf{T}$.

5.4.6. Ecuaciones de transformación

Supóngase una situación como la representada en la figura 5.21 en que hay varios sistemas de referencia, cada uno de ellos localizado respecto de otro. Precisamente, el sentido de cada vector apuntando de un origen a otro es lo que define qué sistema está referido respecto de cuál. Así, por ejemplo, el sistema 3 está referido tanto a 2 como a 4.

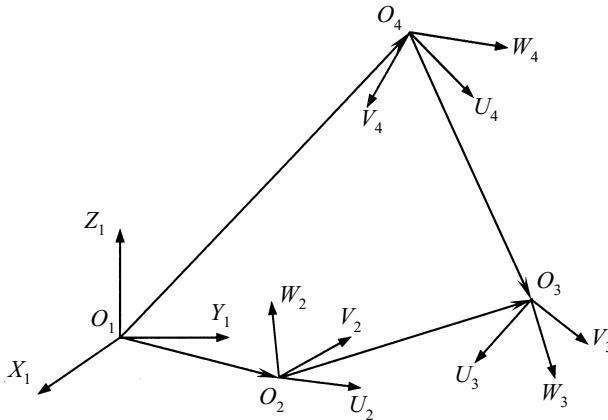


FIGURA 5.21. Composición de transformaciones en lazo cerrado.

De acuerdo con esto, la localización del sistema de referencia 3 puede ser expresada respecto del sistema fijo 1, mediante las dos siguientes composiciones de matrices de transformación:

$${}^1_3\mathbf{T} = {}^1_4\mathbf{T} {}^4_3\mathbf{T} \quad [5.126]$$

$${}^1_3\mathbf{T} = {}^1_2\mathbf{T} {}^2_3\mathbf{T} \quad [5.127]$$

Igualando ambas ecuaciones se obtiene la *ecuación de transformación*, que define el lazo establecido entre dichos sistemas de referencia:

$${}^4\mathbf{T} {}^3\mathbf{T} = {}^1\mathbf{T} {}^2\mathbf{T} \quad [5.128]$$

Cuando se desconoce alguna de las matrices de transformación, por ejemplo ${}^4\mathbf{T}$, dicha ecuación puede ser utilizada para su cálculo:

$${}^4\mathbf{T} = ({}^1\mathbf{T})^{-1} {}^1\mathbf{T} {}^2\mathbf{T} \quad [5.129]$$

Esta misma ecuación de transformación puede escribirse directamente, sin más que computar la transformación inversa cuando durante el recorrido del lazo (figura 5.21) uno se encuentra con un vector que apunta en sentido contrario al del recorrido. Es decir, siguiendo reglas similares a las de la composición de vectores.

Ejemplo de aplicación 5.3. Un robot tiene que aplicar un punto de soldadura sobre una pieza situada en una mesa. En figura 5.22 se indican las localizaciones conocidas. Calcular la localización de la pieza respecto a la garra del robot: ${}^G_P\mathbf{T}$.

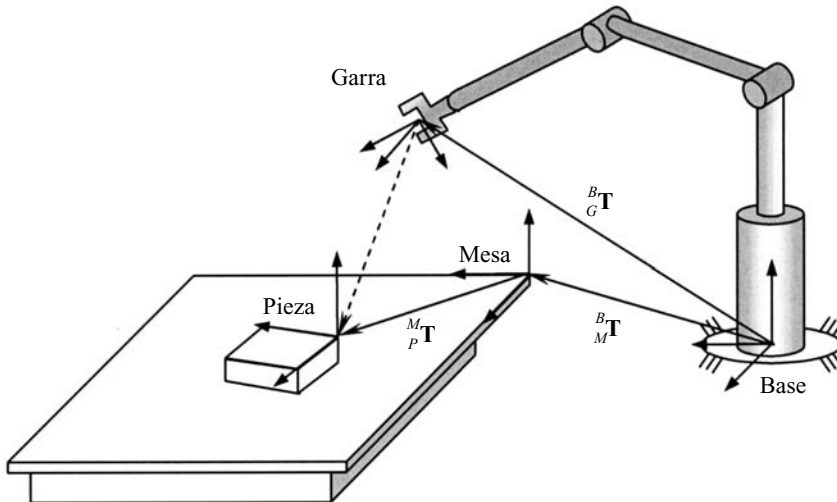


FIGURA 5.22. Localización de una pieza respecto de la garra del robot.

De acuerdo con la regla de las ecuaciones de transformación, la solución es:

$${}^G_P\mathbf{T} = ({}^B_G\mathbf{T})^{-1} {}^B_M\mathbf{T} {}^M_P\mathbf{T}$$

5.5. Método matricial

En este apartado se va a exponer un método matricial para describir la localización de todos y cada uno de los elementos que constituyen el mecanismo. Por el contrario, otros métodos sólo representan la posición del elemento de salida o del elemento útil que realiza la función objetivo. Dicho método es muy utilizado en general, pero sobre todo en los mecanismos de cadena abierta o robots, y está basado en la conocida *notación de Denavit-Hartenberg*.

Hasta el momento se han utilizado dos sistemas de referencia: uno global (OXYZ), y otro local (OUVW). Se ha indicado cómo establecer la localización espacial del sistema de referencia local respecto del global mediante las matrices de transformación homogéneas. Si al elemento $i - 1$ del mecanismo se le asigna el sistema de referencia global, y al elemento i el local, un punto P del elemento i puede ser expresado respecto del sistema asignado al elemento $i - 1$ de la siguiente manera:

$${}^{i-1}\mathbf{r} = {}^{i-1}\mathbf{T} {}^i\mathbf{r} \quad [5.130]$$

Donde ${}^i\mathbf{r}(r_u, r_v, r_w, 1)$ son las coordenadas del punto P respecto del sistema de referencia local (OUVW) $_i$, ${}^{i-1}\mathbf{r}(r_x, r_y, r_z, 1)$ son las coordenadas de P respecto del sistema de referencia global (OXYZ) $_{i-1}$ y ${}^{i-1}\mathbf{T}$ la matriz de transformación homogénea que define la localización de (OUVW) $_i$ respecto de (OXYZ) $_{i-1}$. Ésta es la idea básica implícita en el sistema de representación propuesta por Denavit y Hartenberg (1955).

Los elementos del mecanismo son numerados correlativamente desde el elemento fijo al que se le asigna el 0, hasta el elemento extremo si el mecanismo es un robot, o hasta el último elemento que vuelve a conectarse al fijo, si el mecanismo es de lazo cerrado. Cada elemento del mecanismo se une a los demás mediante, al menos, dos pares cinemáticos (excepto el elemento monario de un robot). Los pares cinemáticos más utilizados son los de rotación (R) y los prismáticos (P). Dichos pares se caracterizan por poseer un eje; en el primer caso, de rotación, y en el segundo, de deslizamiento. A cada elemento i se le van a asignar dos parámetros. El primero de ellos, a_i , es la distancia en verdadera magnitud entre los dos ejes, i e $i + 1$ del elemento i . Dicha distancia es un segmento perpendicular a ambos ejes (figura 5.23); siempre existe y es único, excepto cuando los ejes son paralelos, en cuyo caso hay infinitos.

El segundo parámetro, α_i , mide el ángulo entre los ejes de los pares del elemento i . Se encuentra representado (figura 5.23) en un plano Π paralelo al plano OXZ que contiene el eje $i + 1$ y es perpendicular al segmento que define la distancia a_i . Se denomina *longitud del elemento* a la distancia a_i , y *torsión del elemento* al ángulo α_i . La forma en que se han definido estos parámetros hace que sean independientes de las dimensiones físicas del elemento. Así, puede decirse que elementos de la misma longitud e igual torsión son cinemáticamente equivalentes.

En un par cinemático se conectan, al menos, dos elementos. En la figura 5.24 se representa una parte de una cadena cinemática compuesta por pares R.

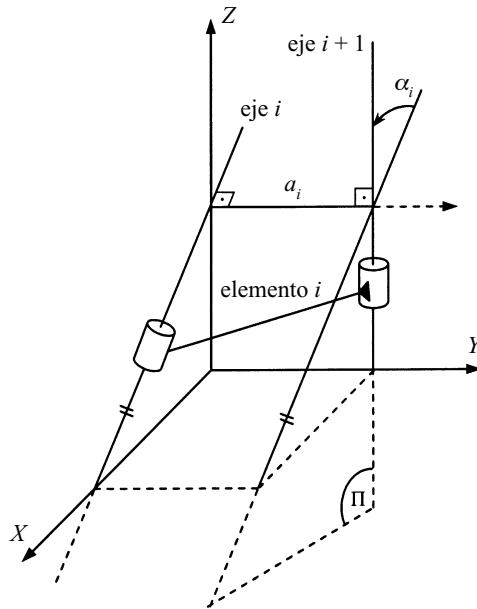


FIGURA 5.23. Parámetros del elemento i : a_i , α_i .

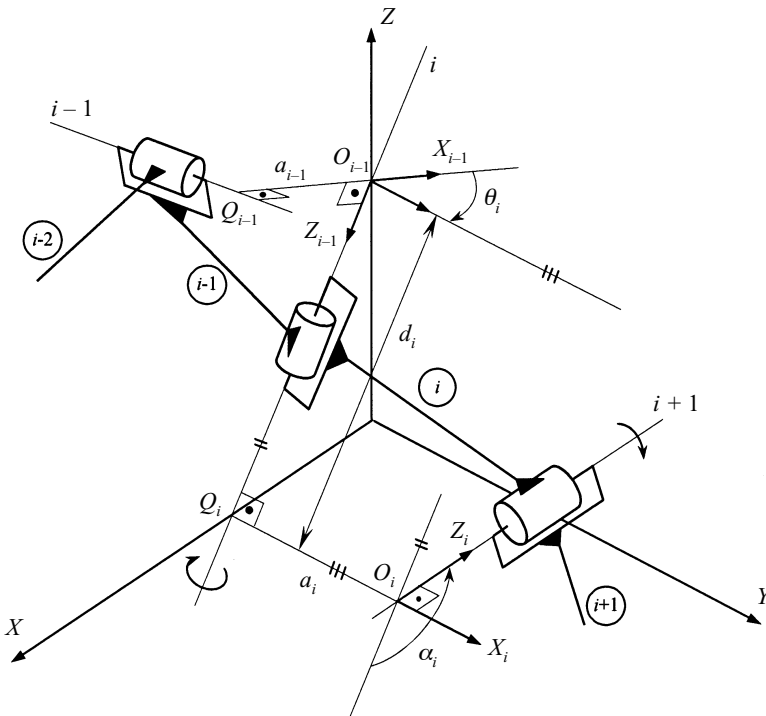


FIGURA 5.24. Parámetros de elemento y de par; sistemas de referencia elementales.

El eje i que conecta el elemento $i - 1$ con el i tiene dos pies de perpendiculares, O_{i-1} y Q_i , correspondientes a las rectas que contienen las longitudes de elemento a_{i-1} y a_i respectivamente. Pues bien, la distancia $d_i = \overline{O_{i-1}Q_i}$ (sobre el eje i) entre dichas rectas se denomina *distancia entre los elementos $i - 1$ e i* , y el ángulo θ_i formado por las mismas, *ángulo del par*. Por tanto, puede decirse que estos dos parámetros definen la posición relativa entre dichos elementos: d_i mide la distancia entre las perpendiculares según el eje del par, y θ_i el ángulo entre las perpendiculares sobre un plano normal al eje del par. Obsérvese que en el caso de un par prismático, los parámetros d_i y θ_i cambian su papel. Ahora d_i es la variable del par, y θ_i adopta un valor constante.

En el caso de manipuladores serie (robots), al no cerrarse la cadena, algunos de los parámetros de los elementos extremos (la base y el elemento terminal del robot) se encuentran indefinidos. En concreto, y de acuerdo con el convenio adoptado, para un robot de n elementos, los parámetros que están indefinidos son: d_1 , θ_1 , a_n , α_n , d_n , θ_n . Dichos parámetros quedarán completamente definidos al adoptar sistemas de referencia solidarios a los elementos fijo (elemento 0) y extremo (elemento n).

En resumen, estos cuatro parámetros definen completamente la configuración cinemática de cada elemento del mecanismo. Los parámetros de elemento (a_i y α_i) definen el elemento propiamente dicho, y los parámetros de par (d_i y θ_i) definen la posición relativa entre elementos adyacentes. En general, cuando uno se refiere a los cuatro parámetros conjuntamente, lo hace como parámetros del elemento.

Toda la descripción hecha hasta ahora ha sido pensada para pares cinemáticos de clase I (1 grado de libertad), en concreto pares R y P. Para un par cinemático de clase II como el par cilíndrico C, la adaptación es tan fácil como considerar tanto a d_i como a θ_i variables del par cinemático. Finalmente, un par que permita m grados de libertad puede ser modelizado mediante m pares de 1 grado de libertad (R o P) conectados mediante elementos de longitud nula. Por tanto, bastaría con aplicar la misma metodología.

5.5.1. Sistemas de referencia asociados a elementos

Para representar la localización de cada elemento respecto de su adyacente anterior, va a asociarse a cada elemento un sistema de referencia. La numeración de estos sistemas de referencia se corresponde con la numeración de los elementos previamente establecida. La convención adoptada para situar los ejes coordenados de cada sistema local es la siguiente (figura 5.24):

1. Se hace coincidir el eje Z_i con el eje del par $i + 1$. El origen de coordenadas O_i se sitúa sobre el eje $i + 1$ en el pie de la perpendicular que contiene a a_i . En el caso de que los ejes i e $i + 1$ sean paralelos, el origen de coordenadas se aconseja tomarlo en un punto del eje $i + 1$ que anule el parámetro d_i . Hay que indicar que el sentido del eje Z_i no está definido, por lo que tendrá que hacerlo el usuario.
2. El eje X_i coincide con la recta que contiene el segmento $\overline{Q_iO_i}$, es decir, la longitud a_i del elemento i , y se encuentra orientado según el sentido de Q_i a O_i . Si $a_i = 0$, Q_i

y O_i coinciden y el eje X_i es perpendicular al plano que contiene a Z_{i-1} y Z_i . En este caso, el sentido positivo del eje X_i se encuentra indefinido, por lo cual queda a la libre elección del usuario cualquiera de los dos posibles.

3. El eje Y_i se elige de forma que el sistema de referencia $(OXYZ)_i$ sea positivo (dextrógiro).

De nuevo, en el caso de los manipuladores serie hay que hacer algunas puntualizaciones en la elección de los sistemas de referencia solidarios a los elementos extremos. Puesto que el sistema asociado al elemento fijo (0) es inmóvil, puede adoptarse como sistema de referencia global para describir la localización del resto de los elementos del mecanismo. De acuerdo con la convención anteriormente adoptada, el eje Z_0 se encontrará a lo largo del eje del par cinemático 1. Su correspondiente origen de coordenadas podrá situarse en cualquier punto del eje 1; no obstante, su elección obedecerá preferentemente a la simplificación de datos, es decir, a anular aquellos parámetros del elemento en la medida que sea posible. Existe una mayor incertidumbre a la hora de situar el sistema de referencia n -ésimo, ya que no existe un par $n + 1$ para situar el eje Z_n . De nuevo su localización obedece a la simplificación de datos, por lo que el eje Z_n suele hacerse coincidir con Z_{n-1} , colocando su origen en cualquier punto del elemento terminal.

En resumen, los parámetros de un elemento pueden redefinirse (coherentemente con lo ya indicado) de nuevo, apoyándose en los sistemas de referencia elementales adoptados. Así, pues:

- θ_i es el ángulo formado por los ejes X_{i-1} y X_i , de X_{i-1} a X_i en sentido antihorario y desde el sentido positivo de Z_{i-1} .
- d_i es la distancia entre los ejes X_{i-1} y X_i medida a lo largo del eje Z_{i-1} .
- a_i es la distancia entre los ejes Z_{i-1} y Z_i medida a lo largo del eje X_i . Obsérvese que tal como está definida, $a_i \geq 0$.
- α_i es el ángulo formado por los ejes Z_{i-1} y Z_i , de Z_{i-1} a Z_i en sentido antihorario y desde el sentido positivo de X_i .

Y el resumen del procedimiento de asignación de los sistemas de referencia es el siguiente:

1. Identificar los ejes de los pares cinemáticos.
2. Colocar sobre el eje de cada par i el eje Z_{i-1} .
3. Calcular las rectas que contienen las mínimas distancias entre los ejes de los pares, y los puntos de intersección entre unas y otros.
4. Asignar X_i a la perpendicular común a los ejes Z_{i-1} y Z_i , dando el sentido positivo de $i - 1$ a i . Si Z_{i-1} y Z_i se cortan, X_i será la recta que pasando por el punto de corte es perpendicular al plano que contiene a Z_{i-1} y Z_i . En este caso, el sentido no está definido por lo que deberá elegirse.
5. Elegir el eje Y_i de modo que se defina un sistema de referencia positivo.
6. Situar, si fuera posible, Z_n alineado con Z_{n-1} .

Ejemplo de aplicación 5.4. Sea el mecanismo de un grado de libertad (figura 5.25) ya analizado en el capítulo 3. Aplicarle la notación de Denavit-Hartenberg obteniendo los sistemas de referencia elementales, así como el valor de los parámetros de sus elementos y de sus pares cinemáticos.

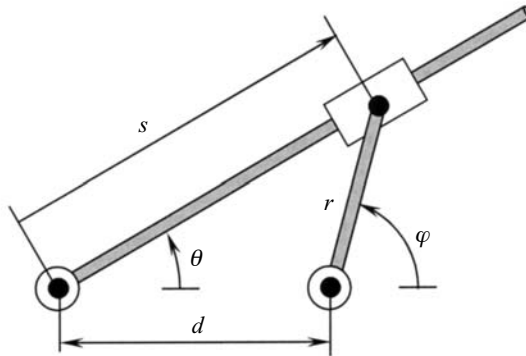


FIGURA 5.25. Cuadrilátero RRRP.

Los pasos a seguir son: numeración de los elementos, numeración de los ejes, situar los ejes Z_i y situar los ejes X_i . Dichos pasos se representan en la figura 5.26 y son explicados en la tabla de la figura 5.27.

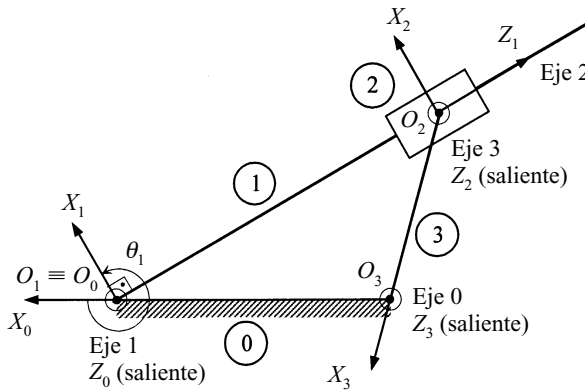


FIGURA 5.26. Sistemas de referencia elementales.

Obsérvese que después de numerar el elemento 3, como el siguiente adyacente es el elemento fijo, en vez de asignarle el 4 se le asigna el 0. Sin embargo, al ser el mecanismo de cadena cerrada, el elemento fijo no se diferencia del resto en cuanto a la sistemática de Denavit-Hartenberg.

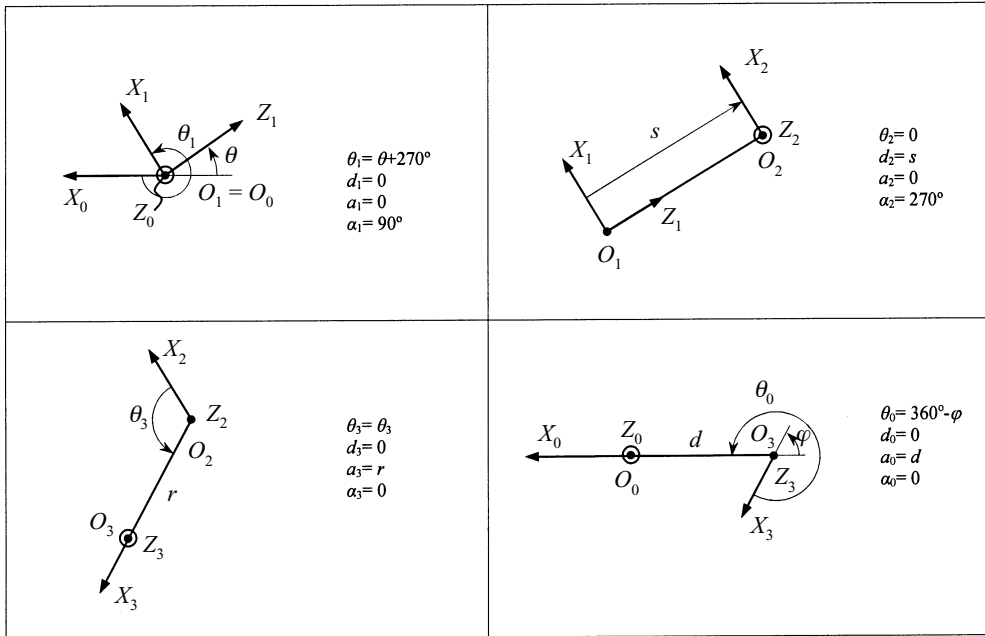


FIGURA 5.27. Parámetros de los elementos del mecanismo.

Ejemplo de aplicación 5.5. Sea el brazo Stanford, robot serie de 6 gdl representado en la figura 5.28; establecer los sistemas de referencia de elemento siguiendo la notación de Denavit-Hartenberg. Obtener, asimismo, el valor de los parámetros de los elementos y de los pares.

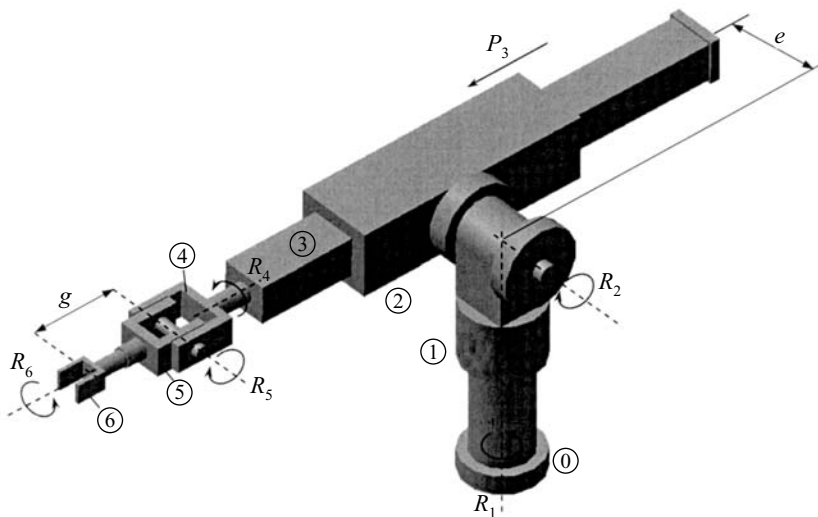


FIGURA 5.28. Numeración de los elementos y pares del robot Stanford.

Una vez numerados los elementos y los pares cinemáticos (figura 5.28) se van a localizar los sistemas de referencia (figura 5.29) según el convenio de Denavit-Hartenberg (en adelante D-H). Dada la particularidad posicional de alguno de los ejes del robot es necesario realizar las siguientes observaciones:

- Los sentidos de los ejes Z_i se eligen arbitrariamente.
- O_0 debe estar sobre el eje 1; se hará coincidir con O_1 , así $d_1 = 0$.
- O_3 está indefinido según D-H dado que Z_2 y Z_3 son coincidentes. Por simplicidad se tomará coincidente con O_4 . Obsérvese que la distancia $\overline{O_2O_3}$ considerada como variable es el grado de libertad del par prismático.
- En cuanto a la garra, según D-H la dirección de Z_6 se hace coincidir con Z_5 . También pudiera hacerse coincidir O_5 con O_6 , con lo que d_6 sería nulo; sin embargo, en este caso será colocado en un punto de la garra.
- Puesto que Z_0 y Z_1 se cortan, el sentido de X_1 se toma arbitrariamente.
- Igual ocurre con X_2 .
- Puesto que Z_2 y Z_3 coinciden, X_3 es elegido (p. ej., paralelo a X_2).
- Como Z_3 y Z_4 se cortan, el sentido de X_4 se elige; en este caso se hace coincidir con X_3 .
- Igual razonamiento para X_5 .
- X_6 se elige paralelo a X_5 .
- Finalmente, como X_0 puede elegirse arbitrariamente, se hace coincidir con X_1 .

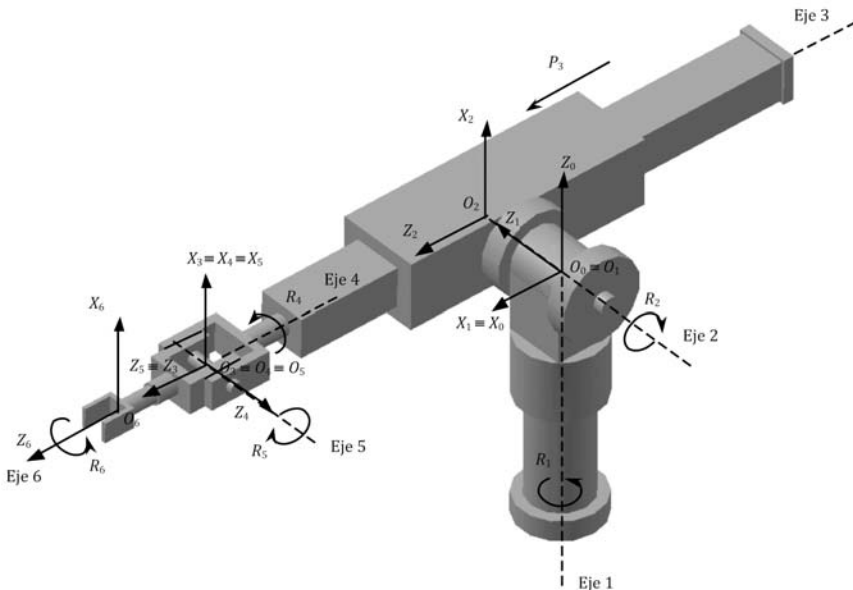


FIGURA 5.29. Sistemas de referencia elementales en el robot Stanford.

Por claridad, en la figura 5.29 se han omitido los ejes Y_i .

En la tabla de la figura 5.30 se representan los sistemas de referencia dos a dos para facilitar la obtención de los parámetros de elemento, cuyos valores se adjuntan al lado de cada figura.

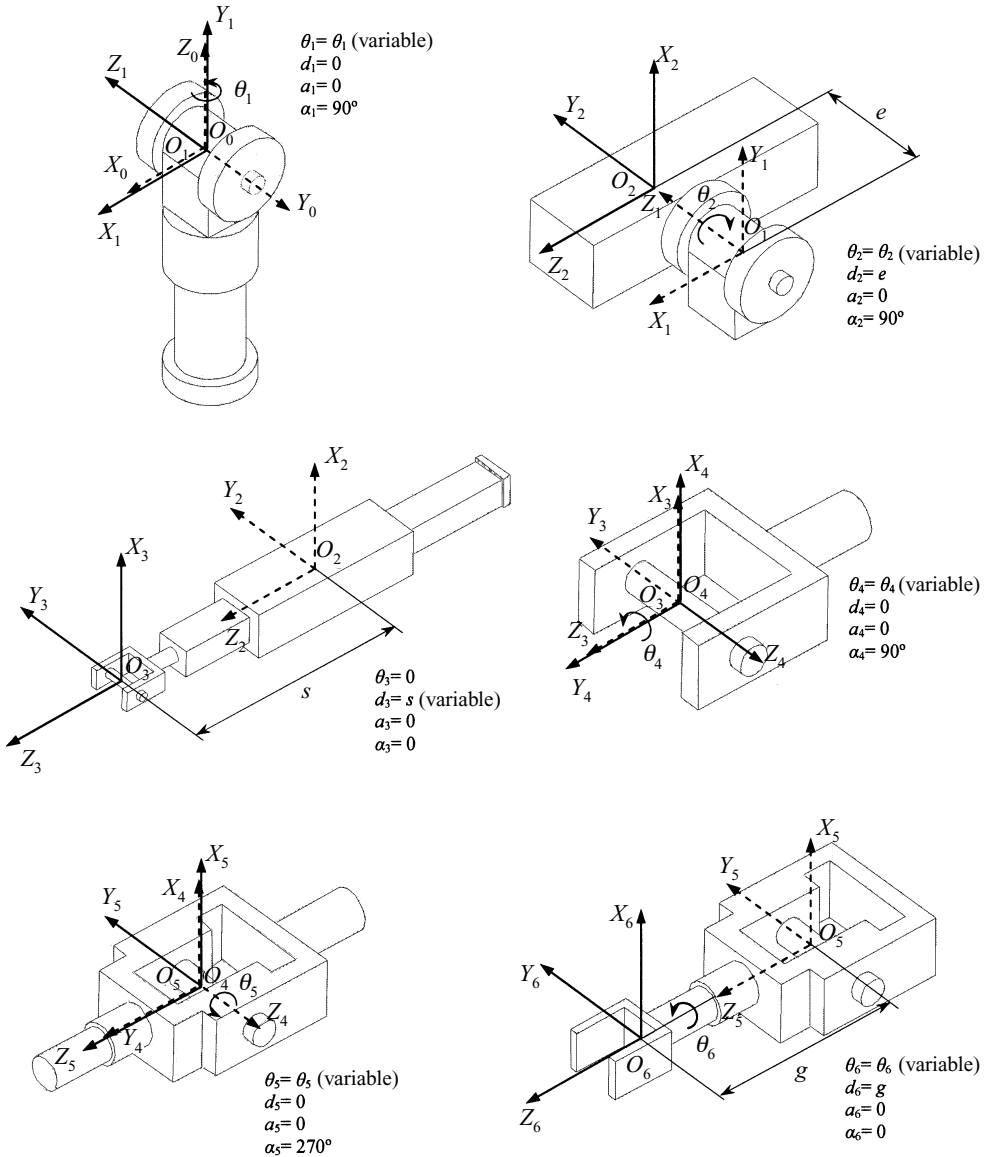


FIGURA 5.30. Parámetros de los elementos del mecanismo.

5.5.2. Matrices de transformación elementales

Una vez establecidos los sistemas de referencia elementales, se trata ahora de obtener la matriz de transformación homogénea ${}^{i-1}_i\mathbf{T}$ que relaciona el sistema de coordenadas $(OXYZ)_i$ con el sistema de coordenadas $(OXYZ)_{i-1}$. Obsérvese (figura 5.31) que un sistema de referencia móvil (OUVW), inicialmente coincidente con $(OXYZ)_{i-1}$, puede llevarse a coincidir con $(OXYZ)_i$ a través de la siguiente secuencia de movimientos:

1. Rotación alrededor de W , coincidente con Z_{i-1} en esta posición, del ángulo θ_i .
2. Traslación según el eje W de la distancia d_i .
3. Traslación según el eje U de la distancia a_i .
4. Rotación alrededor del eje U del ángulo α_i .

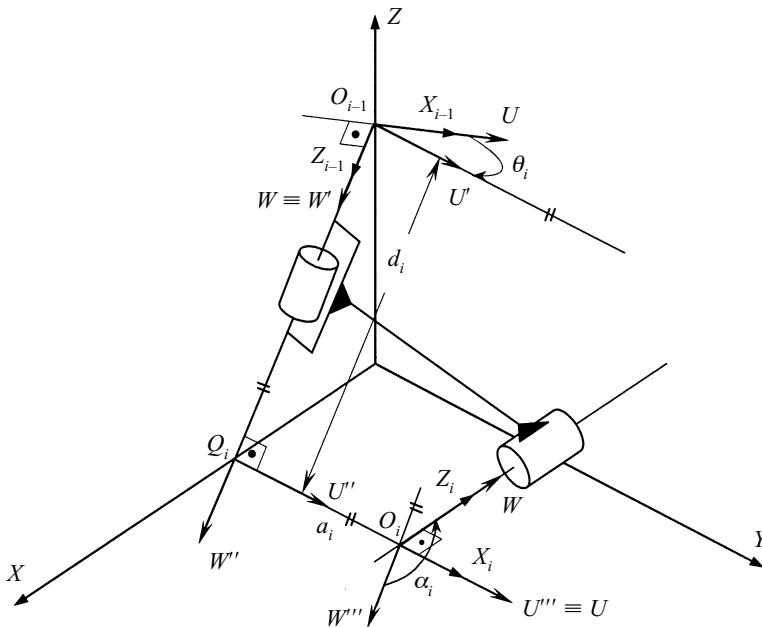


FIGURA 5.31. Secuencia de transformaciones básicas entre dos sistemas i e $i - 1$.

Teniendo en cuenta que las cuatro anteriores transformaciones básicas se han realizado respecto del sistema de referencia móvil (OUVW), la matriz ${}^{i-1}_i\mathbf{T}$ se obtendrá postmultiplicando las correspondientes matrices homogéneas básicas:

$${}^{i-1}_i\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\theta_i,W} \mathbf{T}_{d_i,W} \mathbf{T}_{a_i,U} \mathbf{T}_{\alpha_i,U} \quad [5.131]$$

Como puede observarse, esta matriz depende de los parámetros del elemento i . A las distintas matrices de este tipo que definen la localización entre elementos adyacentes se

las denomina *matrices de transformación elementales*. Recordando las expresiones de las matrices homogéneas básicas de traslación y rotación, la matriz [5.131] puede expresarse de la siguiente manera:

$${}^{i-1}_i \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.132]$$

Resultando:

$${}^{i-1}_i \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.133]$$

Donde α_i , a_i , d_i son constantes, mientras que θ_i es la variable del par de rotación i . Como se indicó anteriormente, la notación de Denavit-Hartenberg es aplicable a otros tipos de pares cinemáticos sin más que tener en cuenta sus correspondientes particularidades. En cualquier caso, la notación de Denavit-Hartenberg es una forma sistemática concreta de operar con sistemas de referencia solidarios a los distintos elementos de un mecanismo. Ello no impide que puedan utilizarse otras metodologías, o incluso compaginarlas dependiendo de las características del mecanismo a analizar. Lo verdaderamente importante radica en *la idea del paso de un sistema de referencia a otro mediante matrices de transformación homogéneas*.

Continuación del ejemplo de aplicación 5.4. Obtener las matrices de transformación elementales correspondientes al cuadrilátero plano RRRP del ejemplo de aplicación 5.4.

De acuerdo con la tabla de la figura 5.27, en este ejemplo hay cuatro sistemas de referencia elementales; sus correspondientes matrices de transformación elementales se obtendrán directamente mediante [5.133]:

$${}^0_1 \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c(\theta + 270^\circ) & -s(\theta + 270^\circ) c90^\circ & s(\theta + 270^\circ) s90^\circ & 0 \cdot c\theta_i \\ s(\theta + 270^\circ) & c(\theta + 270^\circ) c90^\circ & -c(\theta + 270^\circ) s90^\circ & 0 \cdot s\theta_i \\ 0 & s90^\circ & c90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta & 0 & -c\theta & 0 \\ -c\theta & 0 & -s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2 \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c0^\circ & -s0^\circ c270^\circ & s0^\circ s270^\circ & 0 \cdot c0^\circ \\ s0^\circ & c0^\circ c270^\circ & -c0^\circ s270^\circ & 0 \cdot s0^\circ \\ 0 & s270^\circ & c270^\circ & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.134]$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3c0^\circ & s\theta_3s0^\circ & rc\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3c0^\circ & -c\theta_3s0^\circ & rs\theta_3 \\ 0 & s0^\circ & c0^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & rc\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & rs\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.135]$$

$${}^3_0\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c(360^\circ - \varphi) & -s(360^\circ - \varphi)c0^\circ & s(360^\circ - \varphi)s0^\circ & dc(360^\circ - \varphi) \\ s(360^\circ - \varphi) & c(360^\circ - \varphi)c0^\circ & -c(360^\circ - \varphi)s0^\circ & ds(360^\circ - \varphi) \\ 0 & s0^\circ & c0^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\varphi & s\varphi & 0 & dc\varphi \\ -c\varphi & c\varphi & 0 & -ds\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.136]$$

Continuación del ejemplo de aplicación 5.5. Obtener las matrices de transformación elementales correspondientes al robot Stanford del ejemplo 5.5.

De acuerdo con la tabla de la figura 5.30, en este ejemplo hay seis sistemas de referencia elementales; sus correspondientes matrices de transformación elementales se obtendrán directamente mediante [5.133]:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1c90^\circ & s\theta_1s90^\circ & 0 \cdot c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1c90^\circ & -c\theta_1s90^\circ & 0 \cdot s\theta_1 \\ 0 & s90^\circ & c90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.137]$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2c90^\circ & s\theta_2s90^\circ & 0 \cdot c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2c90^\circ & -c\theta_2s90^\circ & 0 \cdot s\theta_2 \\ 0 & s90^\circ & c90^\circ & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.138]$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c0^\circ & -s0^\circ c0^\circ & s0^\circ s0^\circ & 0 \cdot c0^\circ \\ s0^\circ & c0^\circ c0^\circ & -c0^\circ s0^\circ & 0 \cdot s0^\circ \\ 0 & s0^\circ & c0^\circ & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.139]$$

$${}^3_4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4c90^\circ & s\theta_4s90^\circ & 0 \cdot c\theta_4 \\ s\theta_4 & c\theta_4c90^\circ & -c\theta_4s90^\circ & 0 \cdot s\theta_4 \\ 0 & s90^\circ & c90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.140]$$

$${}^4_5\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5c270^\circ & s\theta_5s270^\circ & 0 \cdot c\theta_5 \\ s\theta_5 & c\theta_5c270^\circ & -c\theta_5s270^\circ & 0 \cdot s\theta_5 \\ 0 & s270^\circ & c270^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.141]$$

$${}^5_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 c0^\circ & s\theta_6 s0^\circ & 0 \cdot c\theta_6 \\ s\theta_6 & c\theta_6 c0^\circ & -c\theta_6 s0^\circ & 0 \cdot s\theta_6 \\ 0 & s0^\circ & c0^\circ & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.142]$$

5.6. Análisis de posiciones en mecanismos de cadena cerrada

En este apartado se van a obtener las ecuaciones que relacionan las variables que definen la posición de los elementos de un mecanismo de cadena cerrada. Cuando se conoce la entrada del movimiento, dichas ecuaciones resuelven el problema de posición directo. Por el contrario, si es el movimiento del elemento útil o de salida el que se conoce, las ecuaciones de posición representan entonces el problema inverso. Como se sabe, las ecuaciones de posición son, en cualquiera de las dos formas (problema directo o inverso), no lineales. Aunque aquí será suficiente con su obtención, la resolución de las mismas puede hacerse mediante métodos analíticos y numéricos, de forma análoga a como se hizo en el capítulo 3 para mecanismos planos. A continuación, se van a presentar dos procedimientos para obtener las ecuaciones de posición en mecanismos de cadena cerrada. El primero es un método matricial basado en la formulación D-H, y el segundo es un método geométrico.

5.6.1. Ecuaciones de posición mediante el método matricial

Considérese un mecanismo de n elementos móviles. Siguiendo el método matricial, el problema cinemático ha sido subdividido en $n + 1$ subproblemas al establecer los $n + 1$ sistemas de referencia elementales (figura 5.32). Cada subproblema consiste en obtener la localización de un sistema de referencia respecto de su previo adyacente. La solución de cada subproblema viene dada por su correspondiente matriz de transformación elemental ${}^{i-1}_i\mathbf{T}$, y la solución del problema, por la relación entre dichas matrices. Nótese cómo ahora en el espacio, el cierre de los lazos del mecanismo se establecerá mediante ecuaciones matriciales, mientras que en capítulos precedentes se establecía mediante ecuaciones vectoriales.

Para un mecanismo formado exclusivamente por pares binarios, lo cual significa que sólo posee un lazo, la ecuación matricial de cierre puede establecerse directamente mediante la ecuación de transformación correspondiente a dicho lazo, como se explicó en el punto 5.4.6. La ecuación matricial del lazo de la figura 5.32 es:

$${}^0_1\mathbf{T} = ({}^n_0\mathbf{T})^{-1} ({}^{n-1}_n\mathbf{T})^{-1} \dots ({}^2_3\mathbf{T})^{-1} ({}^1_2\mathbf{T})^{-1} \quad [5.143]$$

Reordenando la ecuación anterior resulta:

$${}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} {}^2_3\mathbf{T} \dots {}^{n-1}_n\mathbf{T} {}^n_0\mathbf{T} = \mathbf{I} \quad [5.144]$$

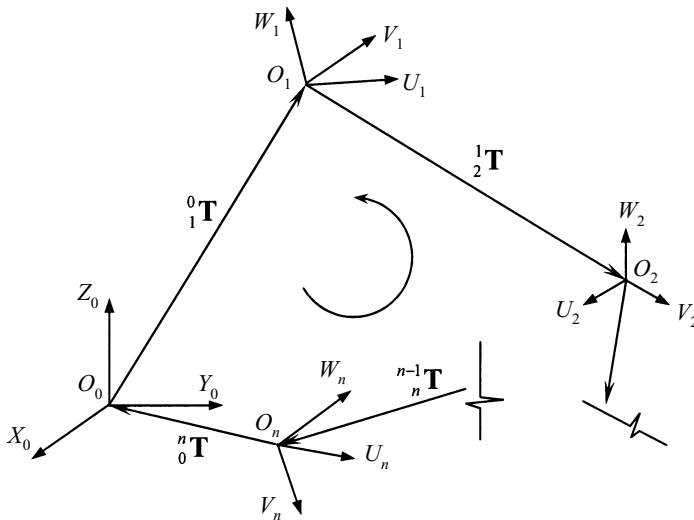


FIGURA 5.32. Sistemas de referencia elementales en un mecanismo de cadena cerrada.

Es fácil comprobar que a esta ecuación también se llega mediante la composición de matrices de transformación siguiente:

$${}^0\mathbf{r} = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{r} ; \quad {}^1\mathbf{r} = {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{r} ; \quad \dots \quad {}^n\mathbf{r} = {}^n\mathbf{T}_0 {}^0\mathbf{r} \quad [5.145]$$

Encadenando dichas relaciones se obtiene:

$${}^0\mathbf{r} = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n {}^n\mathbf{T}_0 {}^0\mathbf{r} \quad [5.146]$$

Ecuación que se corresponde con [5.144].

Para mecanismos con lazos múltiples, se obtiene una ecuación matricial tipo [5.144] para cada uno de los lazos independientes del mecanismo. El conjunto de todas ellas constituye el sistema de ecuaciones de posición del mecanismo.

Finalización del ejemplo de aplicación 5.4. Obtener las ecuaciones de posición del cuadrilátero plano RRRP del ejemplo 5.4.

Hasta el momento se han obtenido los valores de los parámetros de cada elemento (tabla de la figura 5.27), así como sus correspondientes matrices de transformación elementales: [5.133]-[5.136]. La ecuación de transformación correspondiente al lazo cerrado del mecanismo, según [5.144], será:

$${}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_0 = \mathbf{I} \quad [5.147]$$

Sustituyendo por sus valores:

$$\begin{bmatrix} s\theta & 0 & -c\theta & 0 \\ -c\theta & 0 & -s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & r c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & r s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi & s\varphi & 0 & d c\varphi \\ -s\varphi & c\varphi & 0 & -d s\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.148]$$

Operando y reordenando términos resulta:

$$\begin{bmatrix} s(\theta + \theta_3 - \varphi) & c(\theta + \theta_3 - \varphi) & 0 & d s(\theta + \theta_3 - \varphi) + r s(\theta + \theta_3) - s c\theta \\ -c(\theta + \theta_3 - \varphi) & s(\theta + \theta_3 - \varphi) & 0 & -d c(\theta + \theta_3 - \varphi) - r c(\theta + \theta_3) - s s\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.149]$$

De acuerdo con la figura 5.25 y los gráficos de la tabla de la figura 5.27, puede establecerse la siguiente relación angular:

$$\theta + \theta_3 - \varphi = 90^\circ \quad [5.150]$$

Por tanto, la ecuación matricial [5.149] queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d + r \operatorname{sen}(\varphi + 90) - s \operatorname{cos} \theta \\ 0 & 1 & 0 & -r \operatorname{cos}(\varphi + 90) - s \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.151]$$

Dejando aparte las identidades, las ecuaciones resultantes son:

$$d + r \operatorname{cos} \varphi - s \operatorname{cos} \theta = 0 \quad [5.152]$$

$$r \operatorname{sen} \varphi - s \operatorname{sen} \theta = 0 \quad [5.153]$$

Que son precisamente las ecuaciones algebraicas correspondientes al único lazo del mecanismo RRRP, y que ya se obtuvieron en el capítulo 3 como ecuaciones [3.66] y [3.67].

Evidentemente, no tiene lógica resolver un problema plano tan sencillo como éste, mediante un método matricial concebido para analizar mecanismos espaciales. Se ha hecho, en primer lugar, por una razón didáctica, ya que el método es más fácilmente comprensible al aplicarlo a un mecanismo sencillo; en segundo lugar, para reflejar que este método es particularizable al caso plano.

Ejemplo de aplicación 5.6. Aplicar el método matricial a un mecanismo espacial muy utilizado en la industria: la junta Cardan (figura 5.33). Como ya se ha indicado, se trata de

un mecanismo esférico caracterizado porque todos los ejes de los pares de rotación se cortan en el centro de las superficies esféricas. Asimismo, se verifican las siguientes condiciones geométricas: Eje 1 \perp Eje 2; Eje 2 \perp Eje 3; Eje 3 \perp Eje 0; y $\alpha = \text{ang}(\text{Eje 0}, \text{Eje 1})$. En la posición de la figura 5.33, los ejes 0, 1 y 3 están en un plano.

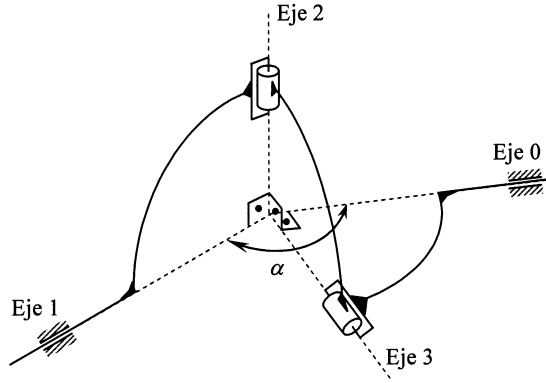


FIGURA 5.33. Junta Cardan.

Se trata de obtener las diferentes relaciones entre la rotación del eje 1 y las rotaciones de los restantes ejes.

En la figura 5.34 se han representado los sistemas de referencia elementales, basándose en la notación D-H.

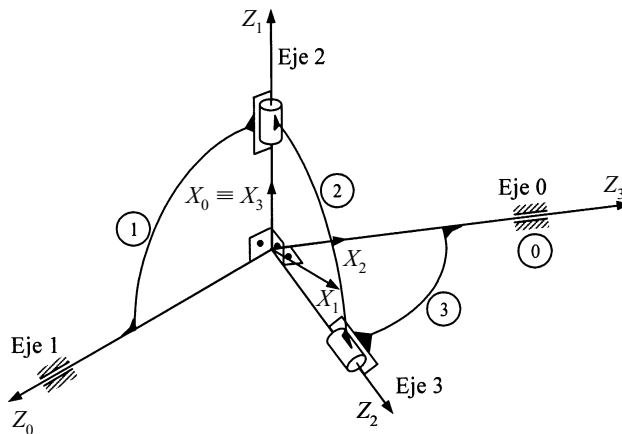
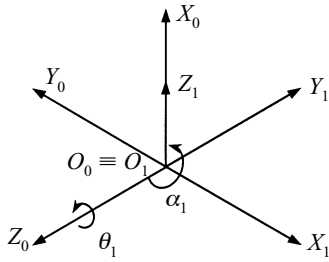


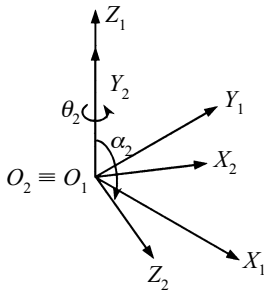
FIGURA 5.34. Sistemas de referencia elementales (se han omitido los ejes Y_i).

De acuerdo con el método matricial, los parámetros de cada elemento, así como las correspondientes matrices de transformación elementales de paso entre cada pareja de sistemas de referencia resultan ser (figuras 5.35 y 5.36):



θ_1 variable; $d_1 = 0$; $a_1 = 0$; $\alpha_1 = 270^\circ$

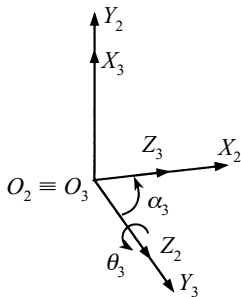
$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 c270^\circ & s\theta_1 s270^\circ & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 c270^\circ & -c\theta_1 s270^\circ & 0 \\ 0 & s270^\circ & c270^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.154]$$



θ_2 variable; $d_2 = 0$; $a_2 = 0$; $\alpha_2 = 90^\circ$

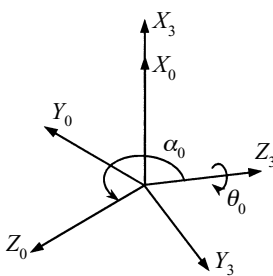
$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 c90^\circ & s\theta_2 s90^\circ & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 c90^\circ & -c\theta_2 s90^\circ & 0 \\ 0 & s90^\circ & c90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.155]$$

FIGURA 5.35. Matrices de transformación ${}^0_1\mathbf{T}$ y ${}^1_2\mathbf{T}$.



θ_3 variable; $d_3 = 0$; $a_3 = 0$; $\alpha_3 = 90^\circ$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & -c\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.156]$$



θ_0 variable; $d_0 = 0$; $a_0 = 0$; $\alpha_0 = 360^\circ - \alpha$

$${}^3_0\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_0 & -s\theta_0 c(360^\circ - \alpha) & s\theta_0 s(360^\circ - \alpha) & 0 \\ s\theta_0 & c\theta_0 c(360^\circ - \alpha) & -c\theta_0 s(360^\circ - \alpha) & 0 \\ 0 & s(360^\circ - \alpha) & c(360^\circ - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_0 & s\theta_0 c\alpha & -s\theta_0 s\alpha & 0 \\ s\theta_0 & c\theta_0 c\alpha & c\theta_0 s\alpha & 0 \\ 0 & -s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.157]$$

FIGURA 5.36. Matrices de transformación ${}^2_3\mathbf{T}$ y ${}^3_0\mathbf{T}$.

La ecuación de transformación correspondiente al único lazo de este mecanismo es:

$${}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} {}^2_3\mathbf{T} {}^3_0\mathbf{T} = \mathbf{I} \quad [5.158]$$

Ecuación matricial que puede expresarse también:

$${}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} = ({}^3_0\mathbf{T})^{-1} ({}^2_3\mathbf{T})^{-1} \quad [5.159]$$

Teniendo en cuenta que los vectores de posición son nulos en ${}^3_0\mathbf{T}$ y ${}^2_3\mathbf{T}$ se verificará:

$${}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} = ({}^3_0\mathbf{T})^T ({}^2_3\mathbf{T})^T \quad [5.160]$$

De esta manera sólo hay que hacer dos multiplicaciones matriciales cuyo resultado es:

$${}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 & c\theta_1 s\theta_2 & 0 \\ s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 & s\theta_1 s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.161]$$

$$({}^3_0\mathbf{T})^T ({}^2_3\mathbf{T})^T = \begin{bmatrix} c\theta_0 c\theta_3 & c\theta_0 s\theta_3 & s\theta_0 & 0 \\ -s\theta_0 c\alpha c\theta_3 - s\alpha s\theta_3 & -s\theta_0 c\alpha s\theta_3 + s\alpha c\theta_3 & c\theta_0 c\alpha & 0 \\ -s\theta_0 s\alpha c\theta_3 + c\alpha s\theta_3 & -s\theta_0 s\alpha s\theta_3 - c\alpha c\theta_3 & c\theta_0 s\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.162]$$

De donde resultan las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$c\theta_1 c\theta_2 = c\theta_0 c\theta_3 \quad [5.163]$$

$$-s\theta_1 = c\theta_0 s\theta_3 \quad [5.164]$$

$$c\theta_1 s\theta_2 = s\theta_0 \quad [5.165]$$

$$s\theta_1 c\theta_2 = -s\theta_0 c\alpha c\theta_3 - s\alpha c\theta_3 \quad [5.166]$$

$$c\theta_1 = -s\theta_0 c\alpha s\theta_3 + s\alpha c\theta_3 \quad [5.167]$$

$$s\theta_1 s\theta_2 = c\theta_0 c\alpha \quad [5.168]$$

$$-s\theta_2 = -s\theta_0 s\alpha c\theta_3 + c\alpha s\theta_3 \quad [5.169]$$

$$0 = -s\theta_0 s\alpha s\theta_3 - c\alpha c\theta_3 \quad [5.170]$$

$$c\theta_2 = c\theta_0 s\alpha \quad [5.171]$$

Dividiendo la ecuación [5.168] entre la ecuación [5.165] resulta:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \cos \alpha \operatorname{cotg} \theta_1 \quad [5.172]$$

Que es la ecuación que relaciona la variable de entrada θ_1 con la de salida θ_0 . Otras relaciones interesantes se obtienen al dividir la ecuación [5.168] entre la [5.171]:

$$\operatorname{cotg} \theta_2 = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \theta_1 \quad [5.173]$$

Y la ecuación [5.171] entre la [5.173]:

$$\cos \theta_3 = \operatorname{sen} \alpha \cos \theta_1 \quad [5.174]$$

5.6.2. Ecuaciones de posición mediante el método geométrico

Aunque el método de Denavit-Hartenberg es general, se complica notablemente cuando el mecanismo posee varios lazos. En este caso, y más concretamente si el mecanismo es un robot paralelo, es más conveniente emplear el método geométrico. Éste es un método más sencillo que el anterior, pero no es tan sistemático. Básicamente, consiste en obtener una ecuación vectorial de cierre por cada lazo independiente, de modo análogo a como se explicó en el capítulo 3 para mecanismos planos. En el caso de los robots paralelos, se obtiene una ecuación vectorial de cierre por cada "pata" de la plataforma. Al final de este capítulo se presentará un ejemplo de un robot paralelo de orientación que ilustrará este método. Mientras tanto, se va a aplicar el método geométrico nuevamente a la junta Cardan. De esta manera, podrá establecerse una comparación con el método matricial.

En efecto, considérese el esquema cinemático de la junta Cardan en la posición indicada en la figura 5.37, manteniendo los ángulos de la notación D-H:

La posición del punto A común a los elementos 1 y 2 es:

$$\begin{aligned} X_A &= 0 \\ Y_A &= R \cos(\theta_1 - \pi) \\ Z_A &= R \operatorname{sen}(\theta_1 - \pi) \end{aligned} \quad [5.175]$$

La posición del punto B común a los elementos 2 y 3 es:

$$\begin{aligned} X_B &= R \cos(2\pi - \theta_0) \cos(\alpha - \pi / 2) \\ Y_B &= R \cos(2\pi - \theta_0) \operatorname{sen}(\alpha - \pi / 2) \\ Z_B &= -R \operatorname{sen}(2\pi - \theta_0) \end{aligned} \quad [5.176]$$

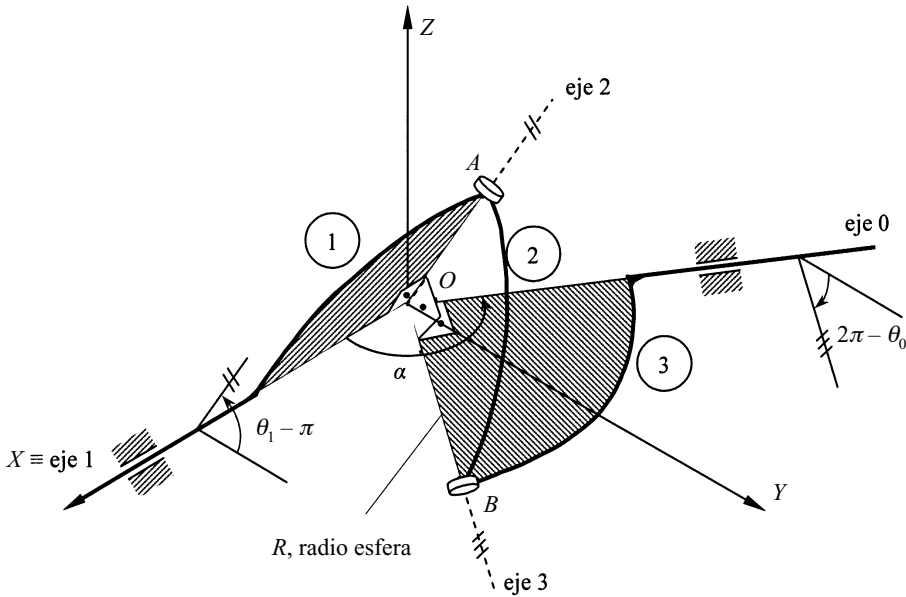


FIGURA 5.37. Esquema cinemático de la junta Cardan.

Teniendo en cuenta la condición de perpendicularidad ($\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$) que en todo instante deben mantener los ejes 2 y 3, resultará:

$$R^2 \cos \theta_1 \cos \theta_0 \cos \alpha - R^2 \sin \theta_1 \sin \theta_0 = 0 \quad [5.177]$$

Reordenando esta ecuación, se obtiene de nuevo la anterior ecuación [5.172], que relaciona las variables angulares de entrada (eje 1) y salida (eje 0):

$$\cotg \theta_1 \cos \alpha = \tg \theta_0$$

5.7. Análisis de posiciones en mecanismos de cadena abierta

La aplicación del método matricial a los manipuladores serie es idéntica a la expuesta para los mecanismos de cadena cerrada. La particularidad estriba en el mecanismo, no en el método. En el caso que nos ocupa, la ecuación matricial no se cierra, con lo cual la relación no se establece entre las variables de los pares cinemáticos, sino entre la localización del elemento terminal del robot (elemento monario) y las variables de los pares cinemáticos.

Al igual que en los mecanismos de cadena cerrada, existen dos tipos de problemas a resolver (figura 5.38). El primero es el *problema de posición directo*, y consiste en determinar la posición y orientación de la garra del robot con respecto a un sistema de referen-

cia fijo, cuando se conocen los valores de las variables de los pares. El segundo es el *problema de posición inverso*, que como su nombre indica, consiste en, dada la localización de la garra del robot, obtener las configuraciones posibles que puede adoptar el robot.

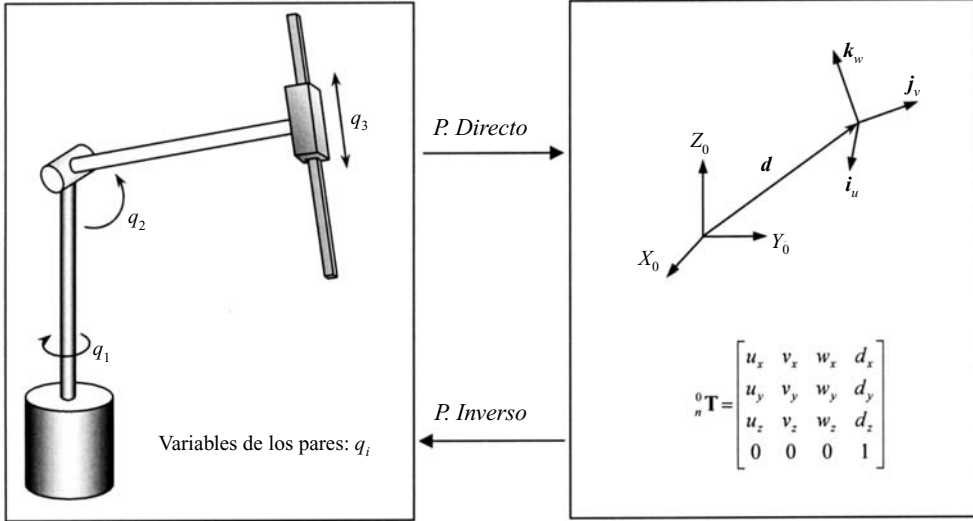


FIGURA 5.38. Relación entre los dos problemas de posición.

5.7.1. Problema de posición directo

Sea un robot de n elementos móviles, representados en la figura 5.39 mediante sus correspondientes sistemas de referencia. El método matricial expuesto proporciona cada matriz de transformación elemental ${}^{i-1}_i\mathbf{T}$, la cual define la localización del sistema de referencia i respecto del sistema de referencia $i - 1$.

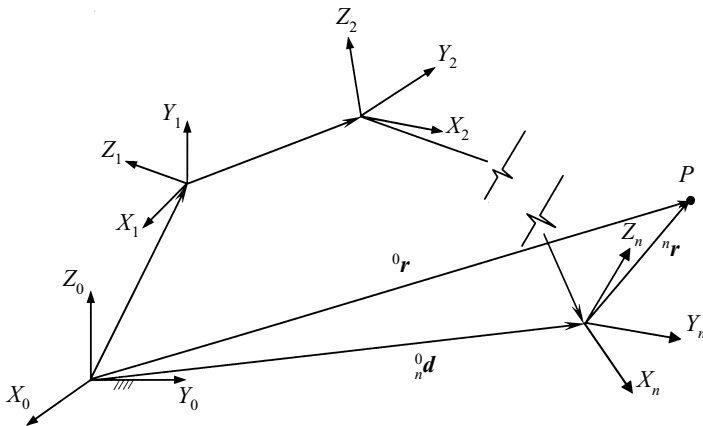


FIGURA 5.39. Sistemas de referencia elementales en un manipulador serie.

La ecuación de transformación del lazo de este manipulador es:

$${}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} \dots {}^{n-2}_{n-1}\mathbf{T} {}^{n-1}_n\mathbf{T} \quad [5.178]$$

También puede llegarse a esta ecuación matricial mediante la siguiente composición de matrices de transformación:

$${}^0\mathbf{r} = {}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} \dots {}^{n-2}_{n-1}\mathbf{T} {}^{n-1}_n\mathbf{T} {}^n\mathbf{r} \quad [5.179]$$

Una vez multiplicadas las n matrices de la ecuación [5.178], se llega a una matriz concreta, cuyos términos serán representados de la siguiente manera:

$${}^0_n\mathbf{T} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & d_x \\ u_y & v_y & w_y & d_y \\ u_z & v_z & w_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.180]$$

Particionando esta matriz en las submatrices habituales resulta:

$${}^0_n\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^0_n\mathbf{R} & {}^0_n\mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.181]$$

Donde:

$${}^0_n\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \quad [5.182]$$

Representa la orientación de la garra respecto de la base del robot, y

$${}^0_n\mathbf{d}^T = [d_x \quad d_y \quad d_z] \quad [5.183]$$

Representa la posición de la garra respecto de la base del robot.

En resumen, la resolución del problema de posición directo consiste en obtener la matriz [5.180].

Ahora bien, si la base del manipulador está referida a otro sistema de referencia S mediante la matriz de transformación ${}^S_0\mathbf{T}$; y si la garra mantiene asida una herramienta cuya localización respecto de la misma viene representada por la matriz ${}^n_H\mathbf{T}$, entonces la localización de la herramienta respecto del sistema S vendrá dada por la matriz:

$${}^S_H\mathbf{T} = {}^S_0\mathbf{T} {}^0_n\mathbf{T} {}^n_H\mathbf{T} \quad [5.184]$$

Finalización del ejemplo de aplicación 5.5. Obtener las ecuaciones de posición (resolución del problema directo) del robot Stanford (ejemplo 5.5).

En la tabla de la figura 5.30 se representaron los valores de los parámetros de cada elemento a partir de los cuales se llegó a las matrices de transformación: [5.137]-[5.142]. De acuerdo con esto, la matriz que representa la localización de la garra respecto de la base del robot será:

$${}^0\mathbf{T} = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \quad [5.185]$$

Un procedimiento eficaz para la obtención de los términos de ${}^0\mathbf{T}$ consiste en calcular primero la multiplicación de las tres primeras matrices, en segundo lugar el producto de las tres últimas, y finalmente realizar el producto de las dos matrices resultantes.

En efecto:

$${}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 & c\theta_1 s\theta_2 & e s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 & s\theta_1 s\theta_2 & -e c\theta_1 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.186]$$

$${}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 & c\theta_1 s\theta_2 & s c\theta_1 s\theta_2 + e s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 & s\theta_1 s\theta_2 & s s\theta_1 s\theta_2 - e c\theta_1 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & -s\theta c\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.187]$$

$${}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 & -s\theta_4 & -c\theta_4 s\theta_5 & 0 \\ s\theta_4 c\theta_5 & c\theta_4 & -s\theta_4 s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.188]$$

$${}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_5 & -g c\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & -s\theta_4 s\theta_5 & -g s\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & g c\theta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.189]$$

Finalmente, multiplicando la matriz [5.187] por la [5.189] se obtienen los términos de la matriz ${}^0\mathbf{T}$, resolviendo, por tanto, el problema de posición directo:

$$u_x = c\theta_1 c\theta_2 (c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6) + s\theta_1 (s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6) + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_5 c\theta_6 \quad [5.190]$$

$$u_y = s\theta_1 c\theta_2 (c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6) - c\theta_1 (s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6) + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_5 c\theta_6 \quad [5.191]$$

$$u_z = s\theta_2 (c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6) - c\theta_2 s\theta_5 c\theta_6 \quad [5.192]$$

$$v_x = -c\theta_1 c\theta_2 (c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + s\theta_4 c\theta_6) + s\theta_1 (-s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6) - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_5 s\theta_6 \quad [5.193]$$

$$v_y = -s\theta_1 c\theta_2 (c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + s\theta_4 c\theta_6) - c\theta_1 (-s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6) - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_5 s\theta_6 \quad [5.194]$$

$$v_z = -s\theta_2 (c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + s\theta_4 c\theta_6) + c\theta_2 s\theta_5 s\theta_6 \quad [5.195]$$

$$w_x = -c\theta_1 c\theta_2 c\theta_4 s\theta_5 - s\theta_1 s\theta_4 s\theta_5 + c\theta_1 s\theta_2 c\theta_5 \quad [5.196]$$

$$w_y = -s\theta_1 c\theta_2 c\theta_4 s\theta_5 + c\theta_1 s\theta_4 s\theta_5 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_5 \quad [5.197]$$

$$w_z = s\theta_2 c\theta_4 s\theta_5 - c\theta_2 c\theta_5 \quad [5.198]$$

$$d_x = -g \cdot c\theta_1 c\theta_2 c\theta_4 s\theta_5 - g \cdot s\theta_1 s\theta_4 s\theta_5 + g \cdot c\theta_1 s\theta_2 c\theta_5 + s \cdot c\theta_1 s\theta_2 + e \cdot s\theta_1 \quad [5.199]$$

$$d_y = -g \cdot s\theta_1 c\theta_2 c\theta_4 s\theta_5 + g \cdot c\theta_1 s\theta_4 s\theta_5 + g \cdot s\theta_1 s\theta_2 c\theta_5 + s \cdot s\theta_1 s\theta_2 - e \cdot c\theta_1 \quad [5.200]$$

$$d_z = -g \cdot s\theta_2 c\theta_4 s\theta_5 - g \cdot c\theta_2 c\theta_5 - s \cdot c\theta_2 \quad [5.201]$$

5.7.2. Problema de posición inverso

La operación principal de un robot es controlar la localización de la garra. Se trata, pues, de obtener el valor de los grados de libertad del robot para que su elemento terminal ocupe una determinada localización espacial. Por esta razón, de los dos problemas citados, el más importante y habitual es el inverso.

Obsérvese que, una vez resuelto el problema de posición directo (ver, p. ej., ecuaciones [5.190] a [5.201] del robot Stanford), se conoce ya la estructura de la matriz ${}^0_6\mathbf{T}$ (caso de un robot de 6 elementos y 6 gdl). Pues bien, aquí está la clave de la resolución del problema inverso. Conociéndose ahora los términos de dicha matriz, se trata de expresar las variables de los pares q_i en función de aquéllos ($u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z, d_x, d_y, d_z$).

Como se sabe, hay varias formas de especificar la localización del elemento terminal de un robot. Por tanto, hay varias maneras de expresar los términos de ${}^0_6\mathbf{T}$. Así, la posición ${}^0_6\mathbf{d}$ puede ser definida en coordenadas cartesianas, polares y esféricas. La orientación ${}^0_6\mathbf{R}$ puede definirse, según lo visto en este capítulo, mediante una composición de rotaciones básicas alrededor de los ejes fijos o alrededor de los ejes móviles, un giro β alrededor de un eje s , o los ángulos de Euler. Por tanto, los términos de ${}^0_6\mathbf{T}$ tendrán una u otra expresión según se especifique la localización, y la resolución del problema inverso adoptará diversas formas en cada caso.

De las 16 ecuaciones que resultan de igualar término a término los elementos de la matriz ${}^0_6\mathbf{T}$, 4 de ellas son triviales, con lo cual restan 12 ecuaciones con 6 incógnitas. De las 9 correspondientes a la submatriz ${}^0_6\mathbf{R}$ sólo 3 son independientes que, junto con las 3 del vector ${}^0_6\mathbf{d}$, constituyen un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Dicho sistema posee muchas funciones trascendentes, lo que le convierte en un sistema fuertemente no lineal con múltiples soluciones.

La existencia de soluciones lleva a la definición del *espacio de trabajo* del manipulador como aquella región del espacio accesible al elemento terminal del robot. La obtención de la región accesible es una de las tareas ineludibles aparejadas al cálculo de posiciones en robots. En definitiva, para que una solución exista, debe de encontrarse dentro del espacio de trabajo. En la figura 5.40 se representa el espacio de trabajo de un manipulador plano de 3 gdl.

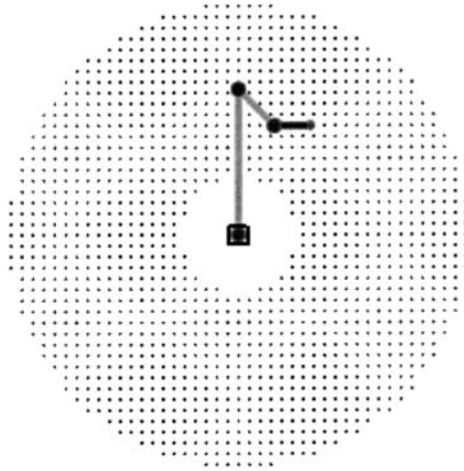


FIGURA 5.40. Espacio de trabajo (zona punteada).

La existencia de soluciones múltiples conlleva una dificultad adicional ya que obliga al sistema a elegir una determinada. El criterio de decisión más razonable consiste en quedarse con la solución más cercana a la posición actual. En cualquier caso, es importante conocer todas las soluciones disponibles para el robot, cuando el elemento terminal ocupa una determinada localización. Ello es debido a que, por regla general, los robots se encuentran en entornos complicados, con zonas prohibidas dentro de su región accesible (debido a obstáculos por ejemplo), donde puede ser que la solución más cercana no sea admisible.

En el punto 3.2.1 del capítulo 3 se hizo una breve introducción a los métodos de resolución de los problemas de posición. De allí puede extraerse que para resolver este tipo de manipuladores existen básicamente dos alternativas: los métodos analíticos y los métodos de computación matricial. Estos últimos se apoyan básicamente en el algoritmo de Newton-Raphson o en alguna de sus variantes. Poseen dos limitaciones: no obtienen más que una solución de las múltiples posibles y su convergencia no está siempre garantizada. Esto último puede provocar paradas del manipulador durante su movimiento. Por el contrario, son métodos potentes, cuya aplicación a la resolución del problema inverso en tiempo real es ineludible, siempre que la resolución analítica en forma cerrada sea imposible.

Los métodos analíticos proporcionan todas las soluciones. Cuando consiguen hacerlo en forma cerrada, el tiempo de resolución es mínimo. Por el contrario, si no se consigue una solución en forma cerrada, la resolución debe ser numérica y el tiempo de cálculo es inadmisiblemente largo para funcionar en tiempo real. La consecución de todas las soluciones exige introducir criterios selectivos para obtener la solución más adecuada.

Teniendo en cuenta el tipo de manipuladores con los que se está tratando en este apartado, resulta admisible abordar de forma analítica su resolución. Dentro de los métodos analíticos cabe distinguir los de carácter geométrico y los algebraicos. Realmente, la diferencia entre ellos es de planteamiento, ya que finalmente ambos utilizan expresiones algebraicas. Sin embargo, no todos los manipuladores serie de 6 gdl tienen solución analítica.

En la mayoría de los casos, la obtención de una solución analítica es consecuencia de realizar ciertas simplificaciones geométricas en el robot. La realidad es que el diseño de la mayoría de los robots industriales tiene como objetivo adicional la consecución de una cinemática fácil de resolver. Una condición suficiente para que un robot de 6 gdl con pares R tenga solución analítica es que tres de sus ejes adyacentes intersecten en un punto. Para este caso, es conocida la solución algebraica dada por Pieper, 1969.

Los métodos geométricos son, en general, más intuitivos aunque menos sistemáticos que los algebraicos. Dentro de los existentes, se va a exponer, por su sencillez, el método de desacople cinemático. Este método es aplicable a aquellos robots cuyos tres últimos ejes se cortan en un punto coloquialmente denominado “muñeca del robot”. Precisamente, los giros asociados a estos ejes, aunque también originan un cambio en la posición final del elemento terminal del robot, su verdadero objetivo es la orientación de dicho elemento. La idea del método consiste en desacoplar ambos problemas: posición y orientación. Para ello, es determinante el hecho de que la posición de la muñeca del robot dependa exclusivamente de los tres primeros grados de libertad del robot: q_1, q_2, q_3 . En la siguiente figura queda representada esta circunstancia:

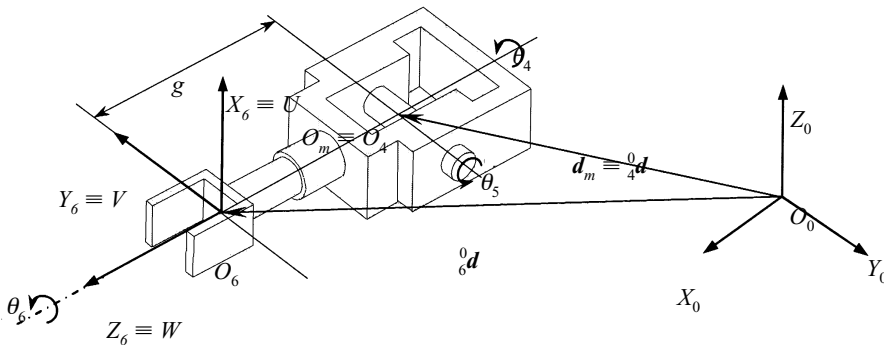


FIGURA 5.41. Obtención de la muñeca del robot.

El punto O_m de la muñeca coincide con uno de los orígenes O_i de los sistemas de referencia de elemento, en concreto con O_4 . Por tanto, su posición, d_m respecto del sistema fijo $(OXYZ)_0$ es 0_4d . Téngase en cuenta que al cortarse Z_3 y Z_4 , el parámetro a_4 se anula, y por tanto 0_4d ya no depende de q_4 . Por otro lado, la posición del elemento terminal del robot, definida respecto del sistema fijo por el vector ${}^0_6d = (d_x, d_y, d_z)$, es el origen del sistema $(OXYZ)_6$. Por tanto, podrá escribirse:

$${}^0_6d = d_m + \overrightarrow{O_4O_6} \tag{5.202}$$

Y como $\overrightarrow{O_mO_6} = g \mathbf{k}_w$ resulta:

$$d_m = {}^0_6d - g \mathbf{k}_w \tag{5.203}$$

Expresando las componentes de este vector de forma explícita:

$$d_{mx} = d_x - g w_x \quad [5.204]$$

$$d_{my} = d_y - g w_y \quad [5.205]$$

$$d_{mz} = d_z - g w_z \quad [5.206]$$

Conocidas las expresiones algebraicas de d_m y los valores numéricos de sus componentes a partir de [5.204]-[5.206], ya se pueden obtener las tres primeras variables q_1, q_2, q_3 .

A continuación, a partir de los datos de la orientación de la garra:

$${}^0\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \quad [5.207]$$

Y, de los valores de las variables ya calculadas, se obtienen los valores de las restantes variables q_4, q_5, q_6 . Para ello considérese la ecuación matricial:

$${}^0\mathbf{T} = {}^0\mathbf{T} {}^3\mathbf{T} \quad [5.208]$$

A partir de esta ecuación y teniendo en cuenta [5.120] se verificará:

$${}^0\mathbf{R} = {}^0\mathbf{R} {}^3\mathbf{R} \quad [5.209]$$

Donde ${}^0\mathbf{R}$ y ${}^3\mathbf{R}$ son las submatrices de rotación de las matrices de transformación ${}^0\mathbf{T}$ y ${}^3\mathbf{T}$ respectivamente. La submatriz ${}^0\mathbf{R}$ se obtiene de

$${}^0\mathbf{R} = {}^0\mathbf{R} {}^1\mathbf{R} {}^2\mathbf{R} {}^3\mathbf{R} \quad [5.210]$$

Así, conocido ${}^0\mathbf{R}$ y calculado ${}^3\mathbf{R}$ ya se pueden obtener numéricamente los términos de ${}^3\mathbf{R}$ a partir de [5.209]. Por otro lado, las expresiones algebraicas de los elementos de ${}^3\mathbf{R}$, las cuales dependen exclusivamente de los tres últimos giros q_4, q_5, q_6 , pueden obtenerse de

$${}^3\mathbf{R} = {}^3\mathbf{R} {}^4\mathbf{R} {}^5\mathbf{R} {}^6\mathbf{R} \quad [5.211]$$

Basta, ahora, elegir adecuadamente las ecuaciones más sencillas para determinar q_4, q_5, q_6 .

Conviene resaltar que en muchos manipuladores, los giros de estos tres últimos ejes se corresponden exactamente con la transformación de Euler WVW anteriormente vista.

Ejemplo de aplicación 5.7. Aplicar el procedimiento anteriormente descrito para la resolución del problema inverso en el robot Stanford.

1. *Cálculo de θ_1 , θ_2 y s .* A partir de las ecuaciones [5.204]-[5.206] se obtienen los valores numéricos de la posición O_m del centro de la muñeca. Puesto que, en el caso del robot Stanford O_3 y O_4 son coincidentes, las expresiones algebraicas de las componentes de $O_m \equiv O_4$ pueden extraerse de la cuarta columna de ${}^0_3\mathbf{T}$ según la ecuación [5.187]. Por otro lado, \mathbf{d}_m también puede obtenerse haciendo $\mathbf{g} = 0$ en ${}^0_6\mathbf{d}$. De cualquier manera, resultan las siguientes ecuaciones:

$$s \cdot c\theta_1 \cdot s\theta_2 + e \cdot s\theta_1 = d_{mx} \quad [5.212]$$

$$s \cdot s\theta_1 \cdot s\theta_2 - e \cdot c\theta_1 = d_{my} \quad [5.213]$$

$$-s \cdot c\theta_2 = d_{mz} \quad [5.214]$$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones [5.212] y [5.213] resulta:

$$d_{mx}^2 + d_{my}^2 = s^2(s\theta_2)^2 + e^2 \quad [5.215]$$

Elevando al cuadrado [5.214] y sumándola a [5.215] resulta:

$$d_{mx}^2 + d_{my}^2 + d_{mz}^2 = s^2 + e^2 \quad [5.216]$$

Teniendo en cuenta la geometría del brazo Stanford, s siempre es positivo:

$$s = +\sqrt{d_{mx}^2 + d_{my}^2 + d_{mz}^2 - e^2} \quad [5.217]$$

Ahora, a partir de [5.214] resulta:

$$\theta_2 = \arccos\left(-\frac{d_{mz}}{s}\right) \quad [5.218]$$

De donde se obtienen dos soluciones:

$$\theta_2^1 \text{ y } \theta_2^2 = 2\pi - \theta_2^1 \quad [5.219]$$

Multiplicando [5.212] por d_{my} y [5.213] por d_{mx} , y restando ambas ecuaciones, resulta tras operar:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{s \cdot d_{my} \cdot s\theta_2 + e \cdot d_{mx}}{s \cdot d_{mx} \cdot s\theta_2 - e \cdot d_{my}} \quad [5.220]$$

A partir de s y θ_2^1 se obtiene:

$$\theta_1^1 = \text{Atan2} \left(e \cdot d_{mx} + d_{my} \sqrt{d_{mx}^2 + d_{my}^2 - e^2}, d_{mx} \sqrt{d_{mx}^2 + d_{my}^2 - e^2} - e \cdot d_{my} \right) \quad [5.221]$$

A partir de s y θ_2^2 se obtiene:

$$\theta_1^2 = \text{Atan2} \left(e \cdot d_{mx} - d_{my} \sqrt{d_{mx}^2 + d_{my}^2 - e^2}, -d_{mx} \sqrt{d_{mx}^2 + d_{my}^2 - e^2} - e \cdot d_{my} \right) \quad [5.222]$$

En la figura 5.42 se representan gráficamente las dos soluciones $(\theta_1^1, \theta_2^1, s)$ y $(\theta_1^2, \theta_2^2, s)$:

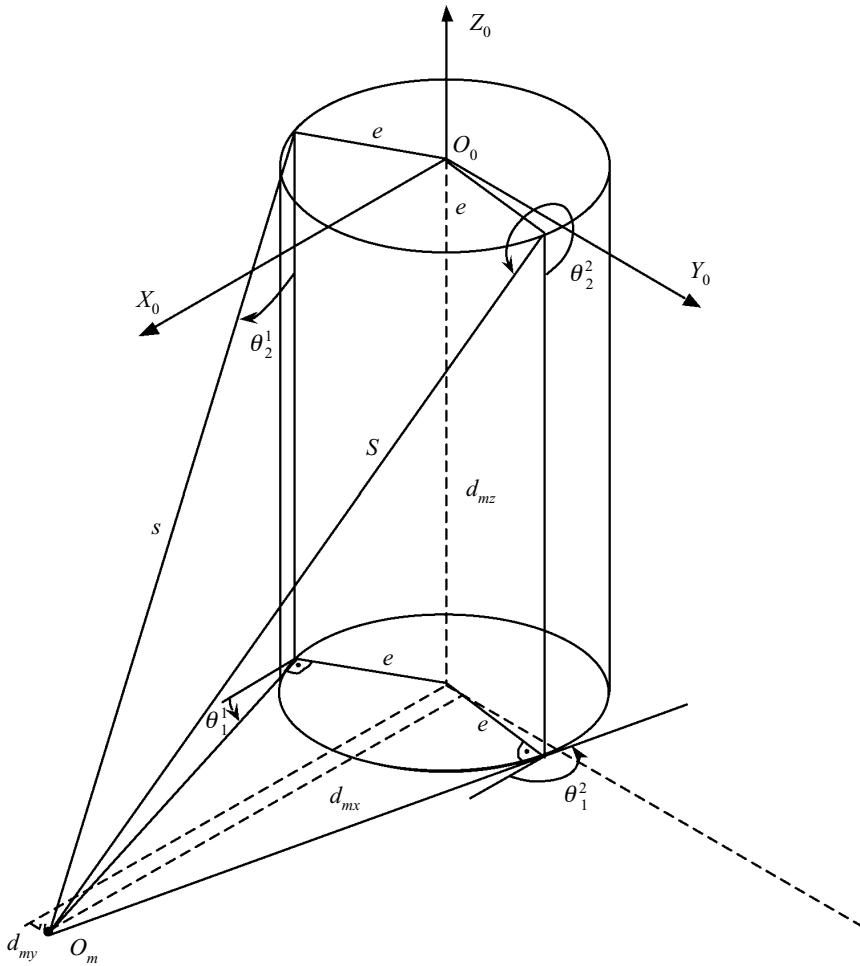


FIGURA 5.42. Soluciones del robot Stanford.

2. *Cálculo de θ_3 , θ_4 y θ_5 .* Conocidos los valores de θ_1 , θ_2 y s , la submatriz ${}^0_3\mathbf{R}$ se obtiene de [5.187]. Teniendo en cuenta [5.207] y [5.209] es fácil obtener numéricamente ${}^3_6\mathbf{R}$:

$${}^3_6\mathbf{R} = {}^0_3\mathbf{R}^+ {}^0_6\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad [5.223]$$

Por otro lado, las expresiones algebraicas de los términos de esta matriz se corresponden con las de los términos de la submatriz de rotación en ${}^3_6\mathbf{T}$, ecuación [5.189]:

$${}^3_6\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & -s\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 \end{bmatrix} \quad [5.224]$$

Obsérvese que esta ecuación se corresponde con la transformación de Euler WWV dada por las ecuaciones [5.78] a [5.86], sin más que hacer: $\theta_4 = \phi$, $\theta_5 = -\theta$ y $\theta_6 = \psi$. Por tanto, la solución vendría dada por la relación inversa. Siguiendo el criterio anteriormente adoptado, se trabajará con la función arcotangente de doble argumento. De esta manera pueden establecerse las siguientes relaciones entre las matrices [5.223] y [5.224]:

$$c\theta_5 = r_{33} \quad [5.225]$$

$$s\theta_4 = -\frac{r_{23}}{s\theta_5} \quad [5.226]$$

$$c\theta_4 = -\frac{r_{13}}{s\theta_5} \quad [5.227]$$

$$s\theta_6 = -\frac{r_{32}}{s\theta_5} \quad [5.228]$$

$$c\theta_6 = \frac{r_{31}}{s\theta_5} \quad [5.229]$$

De [5.225] se obtiene:

$$s\theta_5 = \pm \sqrt{1 - r_{33}^2} \quad [5.230]$$

Que da lugar a dos soluciones:

$$\theta_5^1 = \text{Atan2}\left(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) \quad [5.231]$$

$$\theta_5^2 = \text{Atan2}\left(-\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) = -\theta_5^1 \quad [5.232]$$

De [5.226] y [5.227]:

$$\theta_4^1 = \text{Atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \quad [5.233]$$

$$\theta_4^2 = \text{Atan2}(r_{23}, r_{13}) = \theta_4^1 + \pi \quad [5.234]$$

De [5.228] y [5.229]:

$$\theta_6^1 = \text{Atan2}(-r_{32}, r_{31}) \quad [5.235]$$

$$\theta_6^2 = \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31}) = \theta_6^1 + \pi \quad [5.236]$$

Así pues, las dos soluciones son: $(\theta_4^1, \theta_5^1, \theta_6^1)$ y $(\theta_4^1 + \pi, -\theta_5^1, \theta_6^1 + \pi)$.

Combinando las dos soluciones de las tres primeras variables y las dos soluciones de las tres últimas, se obtiene un total de cuatro soluciones para el manipulador.

Si $r_{33} = 1$, entonces $\theta_5 = 0^\circ$ y la solución [5.226] a [5.229] degenera. En este caso, puede comprobarse que sólo se puede calcular $(\theta_4 + \theta_6)$, lo cual es suficiente para localizar al elemento terminal. Por ello, puede adoptarse la convención de elegir uno de los ángulos, por ejemplo $\theta_4 = 0^\circ$. Así, la solución será:

$$\theta_4^1 = 0^\circ; \theta_5^1 = 0^\circ; \theta_6^1 = \text{Atan2}(r_{21}, r_{11})$$

Algo similar ocurre si $r_{33} = -1$.

5.8. Análisis de velocidades y aceleraciones

En algunas aplicaciones es necesario que el elemento terminal de un manipulador se mueva a lo largo de su trayectoria con una determinada velocidad. Para ello, es necesario una precisa coordinación entre los actuadores del manipulador. Al igual que en el análisis de posiciones, en el de velocidades también existen dos tipos de problemas: el problema de velocidad directo y el inverso. El problema de velocidad directo consiste en determinar las componentes de velocidad del elemento terminal, a partir de las velocidades de los elementos de entrada. Por el contrario, en el inverso se trata de obtener las velocidades de los actuadores para que el elemento terminal adquiera un estado de velocidad conocido (prescrito según la aplicación concreta a desarrollar). Como se sabe, esta coordinación de movimientos se realiza a través de la matriz (o de las matrices) jacobiana. En cualquier caso, en velocidades, el grado de dificultad de estos dos problemas es similar, sea cual sea el tipo de manipulador considerado.

En realidad, el cálculo de velocidades y aceleraciones es igual, tanto para mecanismos planos como espaciales, para mecanismos de cadena abierta como de cadena cerrada. El desarrollo analítico de este cálculo fue explicado en el capítulo 3. En definitiva, hay dos variantes: derivar sucesivamente respecto del tiempo las ecuaciones de posición o plantear directamente las ecuaciones de velocidad sobre el mecanismo. En cualquier caso, es requi-

sito previo haber resuelto previamente el problema de posición. Si se derivan las ecuaciones de posición, la primera derivación da lugar a un sistema lineal de ecuaciones que relacionan las velocidades de entrada con las de salida. Derivando de nuevo, se obtienen las ecuaciones de aceleración. La complejidad de estas ecuaciones sí es dependiente del tipo de mecanismo y del procedimiento utilizado para obtener las ecuaciones de posición. Así, por ejemplo, en el referido caso de la junta Cardan, en el que se ha utilizado un procedimiento geométrico, la ecuación de posición se obtiene a partir de [5.172]:

$$\cotg \theta_1 \cdot \cos \alpha = \operatorname{tg} \theta_0$$

Derivando dicha ecuación respecto del tiempo se obtiene la ecuación de velocidad:

$$\dot{\theta}_0 = - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \theta_1 + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_1} \cdot \dot{\theta}_1 \quad [5.237]$$

Derivando [5.237] se obtiene la ecuación de aceleración:

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \theta_1}{(\operatorname{sen}^2 \theta_1 + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_1)^2} \cdot \dot{\theta}_1^2 - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \theta_1 + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_1} \cdot \ddot{\theta}_1 \quad [5.238]$$

En cambio, si se utiliza el método matricial, las ecuaciones de posición se extraen de la ecuación de transformación. En el caso de un mecanismo de cadena cerrada la ecuación de transformación es la ecuación matricial [5.144].

En general, el planteamiento para un mecanismo espacial de cadena cerrada es idéntico al realizado en el subapartado 3.7.5 del capítulo 3 para mecanismos planos de cadena cerrada. En aquel punto, se describieron con detalle las relaciones entre las variables de entrada y las variables secundarias, entre las que se encuentran las variables pasivas y las variables de salida. Dichas relaciones fueron establecidas mediante la matriz jacobiana de las coordenadas secundarias, \mathbf{J}_S , y la matriz jacobiana de las variables de entrada, \mathbf{J}_E , según la ecuación [3.156] que se reproduce a continuación:

$$\mathbf{J}_S \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{J}_E \dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

Donde $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ es el vector de velocidades de entrada y $\dot{\mathbf{s}}$ el vector de velocidades de salida y de los pares pasivos. Dicha ecuación matricial [3.156] constituye un sistema lineal de ecuaciones algebraicas del que, una vez resuelto el problema de posición, se conocen las dos matrices jacobianas y el vector de velocidades de entrada.

En el caso de los robots espaciales de 6 gdl se trata de establecer la relación entre las velocidades de las articulaciones ($\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6$) y el estado de velocidades del elemento terminal. Suponiendo que la localización del elemento terminal se encuentre definida por su posición en coordenadas cartesianas y su orientación mediante los ángulos de Euler, pueden establecerse las siguientes ecuaciones de posición:

$$\begin{aligned}
 d_x &= f_x(q_1, \dots, q_6) \\
 d_y &= f_y(q_1, \dots, q_6) \\
 d_z &= f_z(q_1, \dots, q_6) \\
 \phi &= f_\phi(q_1, \dots, q_6) \\
 \theta &= f_\theta(q_1, \dots, q_6) \\
 \psi &= f_\psi(q_1, \dots, q_6)
 \end{aligned}
 \tag{5.239}$$

Este sistema es una forma particular de las ecuaciones de posición [3.154] presentadas en el capítulo 3, en la que no hay pares o articulaciones pasivas. Derivándolo respecto del tiempo resulta:

$$\begin{Bmatrix} \dot{d}_x \\ \dot{d}_y \\ \dot{d}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \frac{\partial f_x}{\partial q_2} & \frac{\partial f_x}{\partial q_3} & \frac{\partial f_x}{\partial q_4} & \frac{\partial f_x}{\partial q_5} & \frac{\partial f_x}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \frac{\partial f_y}{\partial q_2} & \frac{\partial f_y}{\partial q_3} & \frac{\partial f_y}{\partial q_4} & \frac{\partial f_y}{\partial q_5} & \frac{\partial f_y}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_z}{\partial q_1} & \frac{\partial f_z}{\partial q_2} & \frac{\partial f_z}{\partial q_3} & \frac{\partial f_z}{\partial q_4} & \frac{\partial f_z}{\partial q_5} & \frac{\partial f_z}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\phi}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\theta}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\psi}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{Bmatrix}
 \tag{5.240}$$

En ese caso la matriz jacobiana es:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \frac{\partial f_x}{\partial q_2} & \frac{\partial f_x}{\partial q_3} & \frac{\partial f_x}{\partial q_4} & \frac{\partial f_x}{\partial q_5} & \frac{\partial f_x}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \frac{\partial f_y}{\partial q_2} & \frac{\partial f_y}{\partial q_3} & \frac{\partial f_y}{\partial q_4} & \frac{\partial f_y}{\partial q_5} & \frac{\partial f_y}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_z}{\partial q_1} & \frac{\partial f_z}{\partial q_2} & \frac{\partial f_z}{\partial q_3} & \frac{\partial f_z}{\partial q_4} & \frac{\partial f_z}{\partial q_5} & \frac{\partial f_z}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\phi}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\phi}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\theta}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\theta}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\psi}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_6} \end{bmatrix}
 \tag{5.241}$$

Hay determinadas posiciones para las que la matriz jacobiana del robot es singular. En estas circunstancias el sistema [5.240] se encuentra indeterminado: una (o más) de las ecuaciones es combinación lineal de las restantes. Si se fija el elemento terminal, hay infinitas soluciones para la entrada $\dot{\mathbf{q}}$. Por otro lado, el hecho de que una de las ecuaciones sea combinación lineal de las restantes significa que el robot, en esa posición, tiene ligadas las componentes de velocidad del elemento terminal, por lo que tiene impedido cierto tipo de movimientos. Esto supone una pérdida de movilidad (gdl) del elemento terminal.

Desde otro punto de vista, la expresión [5.240] puede considerarse una particularización de [3.156], donde \mathbf{J}_S se convierte en la matriz unidad y \mathbf{J}_E en la matriz jacobiana [5.241]. Por ello, las singularidades de los robots se asemejan a las singularidades en el problema inverso de los mecanismos de cadena cerrada, lo cual está completamente de acuerdo con lo razonado en el párrafo anterior.

Como se ha indicado anteriormente, las ecuaciones de velocidad pueden plantearse también directamente. En realidad, éste es un método más efectivo que derivar las ecuaciones de posición.

En efecto, considérese el estado de velocidad del elemento terminal, dado por la velocidad del origen O_6 del sistema de referencia asociado al elemento terminal (elemento 6), \mathbf{v}_6 , y su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_6$. Estas velocidades pueden expresarse en función de las velocidades articulares de los elementos de entrada, teniendo en cuenta el método de las velocidades relativas aplicado a los sistemas de referencia elementales (OXYZ)_{*i*}:

$$\mathbf{v}_6 = \sum_{i=1}^6 (\dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_6} + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}) \tag{5.242}$$

$$\boldsymbol{\omega}_6 = \sum_{i=1}^6 \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \tag{5.243}$$

Donde:

$\dot{\theta}_i$ y \dot{d}_i son las derivadas respecto del tiempo de los parámetros de par θ_i y d_i .

\mathbf{z}_{i-1} es un vector unidad según la dirección del eje *i*, referido al sistema de referencia fijo (OXYZ)₀:

$$\mathbf{z}_{i-1} = {}^0\mathbf{R}_{i-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.244}$$

$\overrightarrow{O_{i-1}O_6}$ es un vector cuyo origen es O_{i-1} (origen del sistema de referencia *i* - 1) y cuyo extremo es O_6 (origen del sistema de referencia 6). Dicho vector está referido al sistema de referencia fijo. Por tanto:

$$\overrightarrow{O_{i-1}O_6} = {}^0\mathbf{d} - {}^{0}_{i-1}\mathbf{d} = {}^{0}_{i-1}\mathbf{R} \ {}^{i-1}_6\mathbf{d} \tag{5.245}$$

Escribiendo [5.242] y [5.243] conjuntamente en forma matricial:

$$\dot{s} = \begin{Bmatrix} v_6 \\ \omega_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \dot{q} \quad [5.246]$$

Donde:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \quad \mathbf{J}_3 \quad \mathbf{J}_4 \quad \mathbf{J}_5 \quad \mathbf{J}_6] \quad [5.247]$$

Con

$$\mathbf{J}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_6} \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{Bmatrix} \quad [5.248]$$

Para un par de rotación, y con

$$\mathbf{J}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [5.248]$$

Para un par prismático.

La columna i de la matriz jacobiana [5.247] representa el efecto de la velocidad de la articulación i sobre el estado de velocidad del elemento terminal.

Ejemplo de aplicación 5.8. En la figura 5.43 se representa un manipulador paralelo de 3 grados de libertad de rotación. Dicho manipulador está constituido por una plataforma móvil $OB_1B_2B_3$ en forma de tetraedro. Las aristas de la plataforma en el vértice O forman un triedro trirrectángulo. El vértice O está unido al elemento fijo mediante una rótula esférica. Las distancias OB_1 , OB_2 y OB_3 son iguales entre sí e iguales a h . Cada vértice B_i de la plataforma está unido a un punto A_i del suelo mediante un émbolo con rótulas esféricas en sus extremos. Los puntos A_i del suelo forman un triángulo equilátero cuyo baricentro es el punto O . La distancia entre O y cualquiera de los vértices A_i es L . Los sistemas de referencia adoptados son: el fijo $(OXYZ)_1$ solidario al suelo y el móvil $(OUVW)_2$ solidario a la plataforma.

Las ecuaciones de posición se obtienen planteando los vectores longitud del émbolo a partir de los vectores de posición de los vértices A_i y B_i :

$$\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OA_i} \Rightarrow {}^1\mathbf{l}_i = {}^1\mathbf{b}_i - {}^1\mathbf{a}_i \quad [5.249]$$

El producto escalar de cada uno de estos vectores ${}^1\mathbf{l}_i$ por sí mismos, proporcionan las tres ecuaciones de posición de la plataforma:

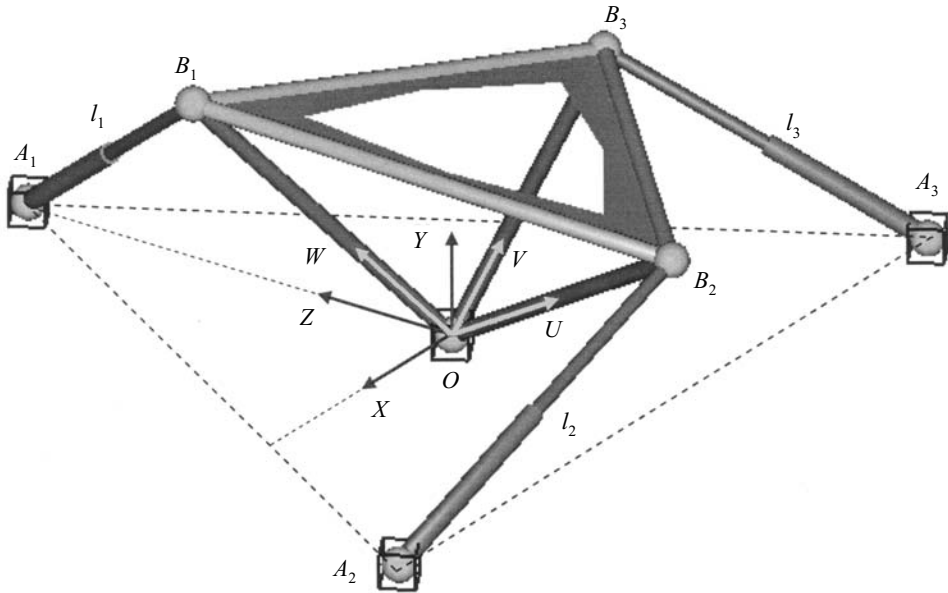


FIGURA 5.43. Manipulador paralelo espacial.

$${}^1\mathbf{l}_i \cdot {}^1\mathbf{l}_i = l_i^2 = b_i^2 + a_i^2 - 2({}^1\mathbf{a}_i \cdot {}^1\mathbf{b}_i) \quad [5.250]$$

Para expresar la rotación de la plataforma se utilizarán los ángulos de Euler ϕ , θ , ψ según el convenio de giro WVV. De esta forma, los vectores ${}^1\mathbf{b}_i$ pueden ser expresados a partir de los vectores ${}^2\mathbf{b}_i$ de la siguiente manera:

$${}^1\mathbf{b}_i = {}^1\mathbf{R} {}^2\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} {}^2\mathbf{b}_i \quad [5.251]$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones [5.250] y [5.251], puede escribirse para cada una de las “patas” de la plataforma:

a) $i = 1$

$${}^1\mathbf{a}_1 = [0 \quad 0 \quad L]^T$$

$${}^2\mathbf{b}_1 = [0 \quad 0 \quad h]^T$$

$$l_1^2 = h^2 + L^2 - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{Bmatrix}$$

$$l_1^2 = h^2 + L^2 - 2Lh c\theta$$

b) $i = 2$

$${}^1\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{L\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}^T$$

$${}^2\mathbf{b}_2 = [h \quad 0 \quad 0]^T$$

$$l_2^2 = h^2 + L^2 - 2 \begin{bmatrix} \frac{L\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$l_2^2 = h^2 + L^2 - hL (\sqrt{3}(c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi) + s\theta c\psi)$$

c) $i = 3$

$${}^1\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{L\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}^T$$

$${}^2\mathbf{b}_3 = [0 \quad h \quad 0]^T$$

$$l_3^2 = h^2 + L^2 - 2 \begin{bmatrix} -\frac{L\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$l_3^2 = h^2 + L^2 - hL (\sqrt{3}(c\phi c\theta s\psi + s\phi c\psi) - s\theta s\psi)$$

1. *Resolución del problema de posición inverso.* Los datos son los ángulos de Euler ϕ , θ , ψ , que definen la orientación de la plataforma, y las incógnitas son las longitudes l_i de los émbolos, que pueden obtenerse directamente de las ecuaciones:

$$l_1^2 = h^2 + L^2 - 2Lh c\theta \quad [5.252]$$

$$l_2^2 = h^2 + L^2 - hL (\sqrt{3}(c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi) + s\theta c\psi) \quad [5.253]$$

$$l_3^2 = h^2 + L^2 - hL (\sqrt{3}(c\phi c\theta s\psi + s\phi c\psi) - s\theta s\psi) \quad [5.254]$$

2. *Resolución del problema de posición directo.* Conocidas las longitudes de los émbolos l_i , para obtener la orientación de la plataforma es preciso tratar las ecuaciones obtenidas previamente. De la ecuación [5.252] se obtiene el ángulo θ :

$$\theta = \arccos \left[\frac{h^2 + L^2 - l_1^2}{2Lh} \right] \quad [5.255]$$

Esta expresión proporciona dos soluciones que no son diferentes por la peculiaridad de los ángulos de Euler al expresar orientaciones.

A partir de las ecuaciones [5.253] y [5.254] se plantea el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} hL(\sqrt{3}c\phi \, c\theta + s\theta) \, c\psi + (-hLs\phi) \, s\psi &= h^2 + L^2 - l_2^2 \\ (hLs\phi) \, c\psi + hL(\sqrt{3}c\phi \, c\theta - s\theta) \, s\psi &= h^2 + L^2 - l_3^2 \end{aligned}$$

Que puede ser expresado de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11} \, c\psi + a_{12} \, s\psi &= a_{13} \\ a_{21} \, c\psi + a_{22} \, s\psi &= a_{23} \end{aligned}$$

De este sistema se despejan $c\psi$ y $s\psi$ que relacionados mediante la ecuación trigonométrica $c^2\psi + s^2\psi = 1$, da lugar a una ecuación de una sola variable, ϕ , de la forma:

$$f(s\phi, c\phi) = 0$$

Realizando el cambio de variable:

$$c\phi = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad s\phi = \frac{2t}{1+t^2}$$

Se obtiene una ecuación polinómica de grado 8 en t de la que se obtienen las soluciones del manipulador.

3. *Problema de velocidades.* Derivando las ecuaciones de posición [5.249] y teniendo en cuenta las bases móviles, se obtienen las ecuaciones de velocidad:

$$\dot{l}_i \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\omega}_i \wedge \mathbf{l}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b}_i - 0 \quad [5.256]$$

Donde \mathbf{n}_i es un vector unitario solidario a la base del émbolo y en la dirección de \mathbf{l}_i , ω_i es la velocidad angular de la base del émbolo, y ω es la velocidad angular de la plataforma.

Multiplicando escalarmente por \mathbf{l}_i es posible eliminar el término que contiene la velocidad angular del émbolo:

$$\mathbf{l}_i \cdot \dot{\mathbf{l}}_i \mathbf{n}_i + \mathbf{l}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \wedge \mathbf{l}_i) = \mathbf{l}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{b}_i) ; \mathbf{l}_i \cdot \dot{\mathbf{l}}_i \mathbf{n}_i = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{b}_i \wedge \mathbf{l}_i)$$

Con lo que se obtiene la relación matricial entre las velocidades de entrada y salida:

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{l}_1)^T \\ (\mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{l}_2)^T \\ (\mathbf{b}_3 \wedge \mathbf{l}_3)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad [5.257]$$

Que expresada en forma compacta resulta:

$$\mathbf{J}_l \dot{\mathbf{l}} = \mathbf{J}_\omega \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

4. Análisis de singularidades.

a) Singularidad en el problema inverso. El jacobiano de la matriz \mathbf{J}_l vale:

$$|\mathbf{J}_l| = l_1 l_2 l_3$$

Que sólo se anula cuando alguna de las distancias l_1 , l_2 , l_3 es cero, lo cual es físicamente imposible.

b) Incremento de la movilidad. La expresión de la matriz jacobiana es:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_l : -\mathbf{J}_\omega]$$

Puesto que $|\mathbf{J}_l| \neq 0$, el rango de \mathbf{J} es 3. De acuerdo con la ecuación [3.154], el número de gdl para cualquier posición del mecanismo es 3. Por tanto, no existe este tipo de singularidad.

c) Singularidad en el problema directo. Se trata de obtener las condiciones con las que $|\mathbf{J}_\omega|$ se anula. Alguna de estas condiciones son las siguientes:

- Al alinearse los vectores \mathbf{b}_i y \mathbf{l}_i los términos correspondientes a la fila i se anulan (figura 5.44):

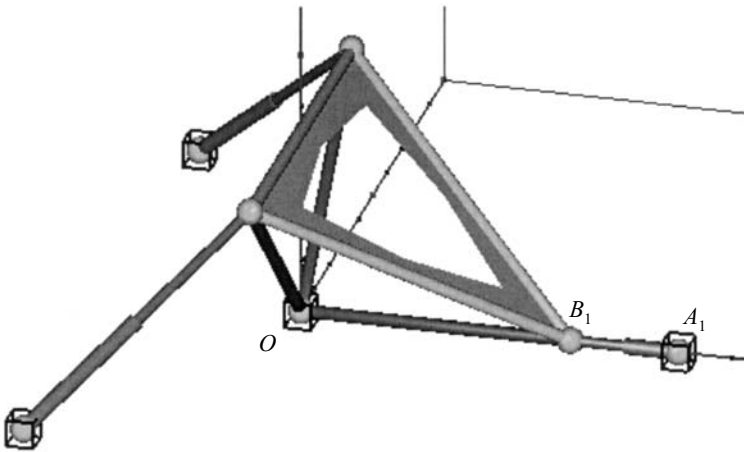


FIGURA 5.44. Singularidad en el problema directo I.

- Cuando existe una dependencia lineal entre los vectores de las filas de la matriz. Cada fila es el resultado de un producto vectorial que involucra dos vectores que forman un plano (el plano OA_iB_i). Si dos de los tres planos son coincidentes (figura 5.45) o si los tres se cortan en una recta, se producirá una singularidad.

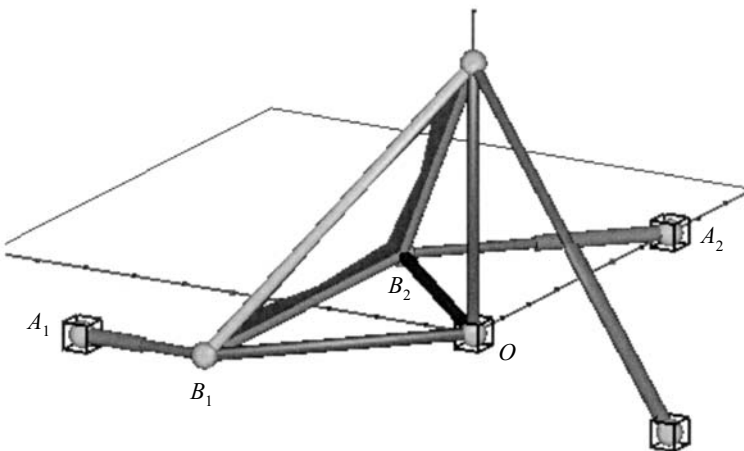


FIGURA 5.45. Singularidad en el problema directo II.

Ejercicios propuestos

1. Obtener la matriz de transformación ${}^1_2\mathbf{T}$ entre las localizaciones 1 y 2 de la figura 5.46 mediante la composición de transformaciones básicas, tanto en coordenadas globa-

les como en coordenadas locales. En ambos casos, representar gráficamente cada transformación.

Obtener, asimismo, dicha transformación de forma directa a partir del conocimiento del sistema (OUVW) en la localización 2.

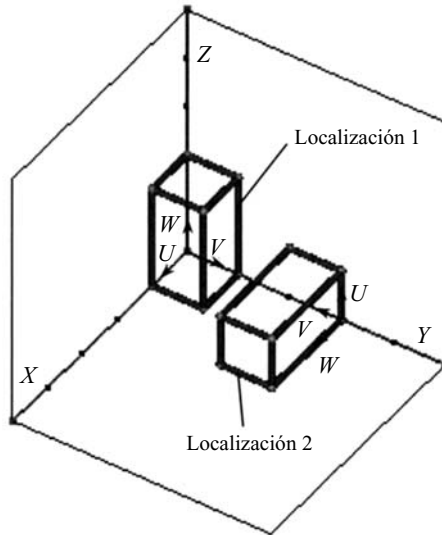


FIGURA 5.46. Objeto en las localizaciones 1 y 2.

- Sea el palpador de 3 gdl de la figura 5.47. De acuerdo con la notación D-H, obtener:

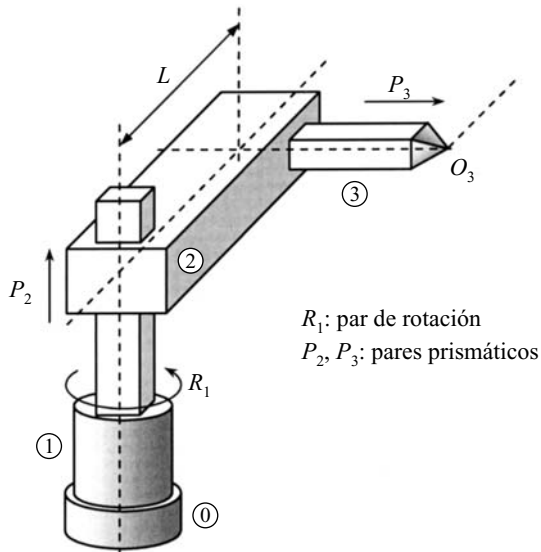


FIGURA 5.47. Palpador de 3 gdl.

- Los sistemas de referencia asociados a cada elemento.
- Los parámetros de cada elemento y las correspondientes matrices de elemento.
- La posición de la punta del palpador respecto del sistema de referencia fijo.

Adóptese el punto O_3 como origen de coordenadas del elemento 3.

3. Considérese el robot de 6 gdl de la figura 5.48. Obtener, de acuerdo con la notación D-H, lo siguiente:

- Los sistemas de referencia asociados a cada elemento.
- Los parámetros de cada elemento y las correspondientes matrices de elemento.
- La localización del elemento terminal respecto de la base del robot.
- La matriz ${}^0_6\mathbf{T}$ particularizada para la posición de la figura 5.48.

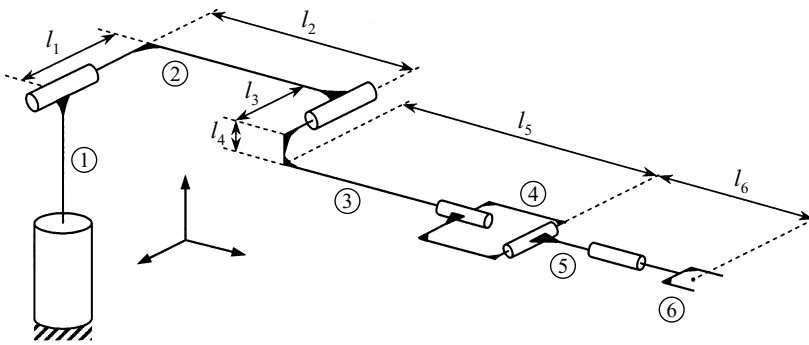


FIGURA 5.48. Robot de 6 gdl.

Bibliografía

- Albizuri, J.; Altuzarra, O.; Amezua, E.; Bilbao, A. y Lainez, E. (1999): *Mecánica Aplicada I y II*. Sección de Publicaciones ETSI de Bilbao.
- Ángeles, J. (1978): *Análisis y Síntesis Cinemáticos de Sistemas Mecánicos*. Limusa, México.
- Ángeles, J. (2003): *Fundamentals of Robotic Mechanical systems. Theory, Methods, and Algorithms*. Springer.
- Artobolevski, I. I. (1977): *Mecanismos en la Técnica Moderna*, 6 vols. MIR, Moscú.
- Avilés, R.; Navalpotro, S.; Amezua, E. y Hernández, A. (1994): "An Energy-Based General Method for the Optimum Synthesis of Mechanisms". *Journal of Mechanical Design*, vol. 116, n.º 1, pp 127-136.
- Baránov, G. G. (1988): *Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas*. MIR, Moscú.
- Barrientos, A.; Peñín, L. F.; Balaguer, C. y Aracil, R. (1997): *Fundamentos de Robótica*. McGraw-Hill, Madrid.
- Beyer, R. (1963): *The Kinematic Synthesis of Mechanisms* (traducción del alemán por H. Kuenzel). Chapman&Hall Ltd., Londres.
- Chironis, N. P. y Sclater, N. (1996): *Mechanisms and Mechanical Devices Sourcebook*. McGraw-Hill, Nueva York.
- Craig, J. J. (1989): *Introduction to Robotics*. Addison-Wesley, Massachusetts.
- Denavit, J. y Hartenberg, R. S. (1955): "A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices". *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 77, pp. 215-221.
- Di Benedetto, A. y Pennestri, E. (1993): *Introduzione a la Cinematica dei Meccanismi*, vol. 2. Casa Editrice Ambrosiana, Milán.
- Dijkman, E. A. (1976): *Motion Geometry of Mechanisms*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Doughty, S. (1988): *Mechanics of Machines*. John Wiley & Sons, Inc., Nueva York.
- Duffy, J. (1980): *Analysis of Mechanisms and Robot manipulators*. Edward Arnold (Publishers) Ltd., Southampton.

- Erdman, A.G. y Sandor, G. N. (1997): *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, vol 1. Prentice-Hall.
- Fu, K. S.; González, R. C. y Lee, C. S. G. (1988): *Robótica: control, detección, visión e inteligencia*. McGraw-Hill, Madrid.
- García de Jalón, J. y Bayo, E. (1994): *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge*. Springer-Verlag, Nueva York.
- Gosselin, C. y Angeles, J. (1988): "The Optimum Kinematic Design of a Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator", *J. Mechanisms Transmissions, and Automation in Design*, vol. 110, pp. 35-41.
- Hain, K. (1967): *Applied Kinematics*. McGraw-Hill, Nueva York.
- Hall, A. S. (1961): *Kinematics and Linkage Design*. Balt Publishers, Lafayette.
- Hartenberg, R. S. y Denavit, J. (1964): *Kinematic Synthesis of Linkages*. McGraw-Hill, Nueva York.
- Haug, E. J. (1989): *Computer-aided kinematics and dynamics of mechanical systems*. Allyn and Bacon, Boston.
- Hernández, A.; Altuzarra, O.; Avilés, R. y Petuya, V. (2003): "Kinematic analysis of mechanisms via a velocity equation based in a geometric matrix", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 38, n.º 12, pp. 1413-1429.
- Hernández, A.; Amezua, E.; Ajuria, M. B. y Llorente, J. I. (1994): "Multiple points on the coupler curve of transitional four-hinge planar linkages", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 29, n.º 7, pp. 1015-1032.
- Hernández, A.; Petuya, V. y Amezua, E. (2002): "A method for the solution of the forward position problems of planar mechanisms with prismatic and revolute joints", *Journal of Mechanical Engineering Science (P. I. Mech. Eng. Part C)*, vol. 216, pp. 395-407.
- Hunt, K. H. (1978): *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford University Press.
- Kozhevnikov, S. N. (1981): *Mecanismos*. Gustavo Gili, Barcelona.
- Mallik, A. K.; Ghosh, A. y Dittrich, G. (1994): *Kinematic Analysis and Synthesis of Mechanisms*. CRC Press.
- Merlet, J.-P. (2000): *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Molian, S. (1997): *Mechanism Design*. Pergamon Pr., Oxford.
- Nielsen, J.; Roth, B. (1999): "On the kinematic analysis of robotic mechanisms", *The International Journal of Robotics Research*, vol. 18, n.º 12.
- Nieto, J. (1978): *Síntesis de Mecanismos*. Alfa Centauro, Madrid.
- Paul, B. (1979): *Kinematics and Dynamics of Planar Machinery*. Prentice-Hall, Nueva Jersey.
- Petuya, V. (2002): *Método geométrico-iterativo para la resolución del problema de posición directo en mecanismos planos con pares inferiores. Análisis de posiciones singulares*, Tesis doctoral. Universidad del País Vasco, Vizcaya.
- Pieper, D. y Roth, B. (1969): "The kinematics Kinematics of Manipulators under Computer Control". *Proceedings of the 2nd International Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, vol. 2, Zakopane, Polonia, pp. 159-169.
- Rosenauer, N. y Willis, A. H. (1967): *Kinematics of Mechanisms*. Dover Publications, Nueva York.

- Sandor, G. N. y Erdman, A. G. (1984): *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, vol. 2. Prentice-Hall, Nueva Jersey.
- Shigley, J. E. y Uicker, J. J. (1988): *Teoría de Máquinas y Mecanismos*. McGraw-Hill, Madrid.
- Suh, C. H. y Radcliffe, C. W. (1978): *Kinematics and Mechanisms Design*. John Wiley & Sons, Inc., Nueva York.
- Tsai, L-W. (1999): *Robot Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Uicker, J. J. (Jr.); Pennock, G. R. y Shigley, J. E. (2003): *Theory of Machines and Mechanisms*. Oxford University Press, Oxford.
- Waldron, K. J. y Kinzel, G. L. (1999): *Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery*. John Wiley & Sons, Inc., Nueva York.
- Zlatanov, D.; Bonev, I. A. y Gosselin, C. M. (2002): "Constraint singularities as C-space singularities", *Advances in Rotot Kinematics*, J. Lenarcic & F. Thomas (Eds.), Kluwer Academic Publishers, pp. 183-192.
- <http://www.ehu.es/compmech>
- <http://www.parallemic.org>

INGENIERÍA

Félez Mindán, Jesús/Martínez Muneta, M.^a Luisa

Dibujo industrial

(3.^a edición, año 2000)

Cos Castillo, Manuel de

Teoría general del proyecto.

Vol. I: Dirección de proyectos

Scala Estalella, Juan José

Análisis vectorial.

Vol. I: Vectores

Félez Mindán, Jesús (editor)

Fundamentos de Ingeniería Gráfica

Iglesias Pérez, Celso

Mecánica del suelo

Cos Castillo, Manuel de

Teoría general del proyecto.

Vol. II: Ingeniería de proyectos

Scala, Rosa M.^a/Valenciano, Alberto

Sistema diédrico.

Ampliaciones teóricas y ejercicios resueltos

Scala Estalella, Juan José
Análisis vectorial.
Vol. II: Funciones vectoriales
y teoría de campos

Soler Dorda, Mariano
Cálculo diferencial e integral.
Una y varias variables

Capmany, J./Fraile-Peláez, F. J./Martí, J.
Fundamentos de comunicaciones ópticas

Doblaré, M./Gracia, L.
Fundamentos de la elasticidad lineal

Hernando, J. M./Montero del Pino, M./Pérez, F.
Ingeniería de los sistemas "trunking"

VV. AA.
Cuestiones de termodinámica

Capmany, J./Fraile-Peláez, F. J./Martí, J.
Dispositivos de comunicaciones ópticas

Pestana, D./Rodríguez, J. M./Marcellán, F.
Variable compleja.
Un curso práctico

Alvárez, R./Arvesú, J./Marcellán, F.

Álgebra lineal y aplicaciones

Roger Folch, José/Riera Guasp, Martín/

Roldán Porta, Carlos

Tecnología eléctrica

(2.ª edición)

Soler Dorda, Mariano

Ejercicios de Cálculo diferencial e integral

Juan Ruiz, J./Palomo Sánchez, J. G./

Sánchez Naranjo, M.ª J./Sánchez R. Morcillo, I.

Problemas resueltos de Estadística

Sánchez Lencero, Tomás/Muñoz Blanco, Antonio/

Jiménez-Espadafor Aguilar, Francisco J.

Turbomáquinas térmicas

