ERREGULAZIO AUTOMATIKOA eta KONTROLA

APUNTEAK

Energia Berriztagarrien Ingeniaritzako Gradua

3. maila

2020 Iraila

Patxi Alkorta Egiguren
Esteban Jacob Taquet

Eibarko Ingeniaritza Eskolako Argitalpen Zerbitzua (EHU/UPV)

AURKIBIDEA

A. OINARRI MATEMATIKOA ... 3

A.1 ZENBAKI KONPLEXUAK ... 3
A.2 FUNTZIO KONPLEXUAK ... 4
A.3 LAPLACE-REN TRANSFORMATUA ... 6
Maila ... 6
Aldatsa, arrapala edo malda ... 6
Azelerazio parabolikoa ... 6
Berretura ... 7
Sinua ... 7
Kosinua ... 7
Funtzio esponentziala ... 7
Sinu esponentziala ... 7
Kosinu esponentziala ... 7
Inpultsu unitarioa funtzioa ... 8
Propietate eta teorema batzuk ... 9
Laplaceren alderantziko trasnformatuak edo Laplaceren antitransformatuak ... 10
Frakzio partzialen zabalkuntza edo zatiketa metodoa ... 11

1. OINARRIZKO KONTZEPTUEN HASTAPENAK ... 17

1.1 OINARRIZKO KONTZEPTUAK ... 17
1.2 IKUSPEGI HISTORIKOA ... 22
1.3 SISTEMEN SAILKAPENA ... 25

2. SISTEMA LINEALEN EREDU MATEMATIKOAK ... 27

2.1 SITEMAK ETA EREDUAK ... 27
2.2 SISTEMA DINAMIKOA ... 27
2.3 SISTEMA DINAMIKO LINEALAK ... 29
2.4 SISTEMEN ADIERAZPENA ... 30

3. SISTEMA LINEALEN KANPO- ETA BARNE-ADIERAZPENAK ... 35

3.1 SISTEMA LINEALEN KANPO-ADIERAZPENA ... 35
Ekuazio diferentzialak ... 35
Transferentzia funtzioa ... 35
Inpultsu bidezko adierazpena ... 37
Ohiko sistema fisikoen ereduak ... 37
3.2 ADIERAZPEN GRAFIKOAK ... 39
1) Blokeen diagrama ... 39
2) Fluxu-diagramak ... 43
Eskema orokorra ... 44
Gainezarpenaren printzipioaren aplikazio bat: sarrera konposatuak eta horiei dagozkien irteera konposatuak ... 47
3.3 BARNE-ADIERAZPENA ... 50
Egoera ekuazioak ... 50
Kontrolagarritasuna eta ohargarritasuna ... 53

4. SISTEMA LINEALEN DENBORA-ANALISIA ... 55

4.1 SARRERA ... 55
4.2 1. ORDENAKO SISTEMEN DENBORALDI IRAGANKORRA ... 56
Sistema egonkorra ... 58
Sistema baten irabazpen estatikoa ... 58
4.3 2. ORDENAKO SISTEMEN DENBORALDI IRAGANKORRA ... 59
Denboraldi iragankorraren zehaztapenak (espezifikazioak) ... 64
Goi-ordenako edo ordena garaiagoko sistemak ... 69
4.4 SISTEMEN ATZERAPENA DENBORAN ZEHAR ... 70
4.5 DENBORALDI EGONKORRA ... 72
Errore-koefiziente estatikoak ... 73
Sistemen sailkapena ... 74

Errore-koefiziente dinamikoak *78*

5. SISTEMEN EGONKORTASUNA DENBORA-EREMUAN **79**

5.1 SARRERA 79
5.2 ROUTH-HURWITZ-EN IRIZPIDEA 80
Routh-Hurwitzen kasu bereziak *81*
5.3 ERROEN KOKAERAKO METODOA 84
Erroen leku geometrikoaren definizioa *86*
Erroen leku geometrikoaren eraikuntza (ELG) *88*

6. SISTEMA LINEALEN MAIZTASUN-ANALISIA **92**

6.1 SARRERA 92
6.2 MAIZTASUN-ERANTZUNAREN ADIERAZPEN GRAFIKOAK 93
a) Adierazpen polarra *93*
b) Bode-ren diagramak *94*
Boderen diagramen arteko eta sistemaren motaren arteko erlazioa *100*
c) Black-Nichols-en diagramak *102*
6.3 MAIZTASUN-EREMUKO ZEHAZTAPENAK (ESPEZIFIKAZIOAK) 102
2. ordenako sistema baten kasua *105*
6.4 EGONKORTASUN ERLATIBOA MAIZTASUN-EREMUAN 107
Irabazpen heina/tartea GM(Gain Margin) *107*
Fase heina/tartea PM (Phase Margin) *108*
GM eta PM Bode-diagrametan eta diagrama polarrean *108*
MG eta MP Black-Nichols diagraman *109*

7. KONTROLADOREEN DISEINUA DENBORA- ETA MAIZTASUN-EREMUAN **110**

7.1 SARRERA 110
Ekintza Proportzionala *111*
Ekintza Integrala *111*
Ekintza Deribatiboa *111*
7.2 KONTROLADORE PROPORTZIONALA (P) 112
1. ordenako sistema *112*
2. ordenako sistema *114*
7.3 KONTROLADORE PROPORTZIONAL-INTEGRALA (PI) 116
PI kontrola 1. ordenako sistema batetan *116*
PI kontrola 2. ordenako sistema batetan *117*
7.4 KONTROLADORE PROPORTZIONAL-DERIBATIBOA (PD) 119
7.5 PID KONTROLADOREEN SINTONIZAZIOA 120
P/PI kontroladoreen sintonizazioa denbora-eremuko zehaztapenetan oinarrituz *121*
1. ordenako sistema batentzako (0 motakoa) P kontroladorea denbora eremuan: ess, τ 121
1. ordenako sistema batentzako (0 motakoa) PI kontroladorea denbora eremuan: polo-zero kantzelazioa eta τ 122
PI/PD kontroladoreen sintonizazioa maiztasun-eremuan *124*
1. ordenako sistema batentzako (0 motakoa) PI kontroladorea maiztasun-eremuan 124
2. ordenako sistema batentzako (1 motakoa) PD kontroladorea maiztasun-eremuan 125

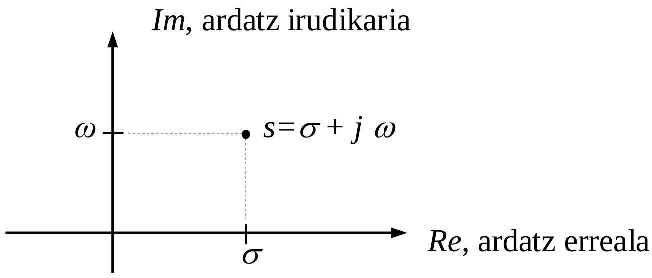
A. OINARRI MATEMATIKOA

A.1 ZENBAKI KONPLEXUAK

Laplaceren Transformatuan ***s*** **aldagai konplexua** erabiliko da:

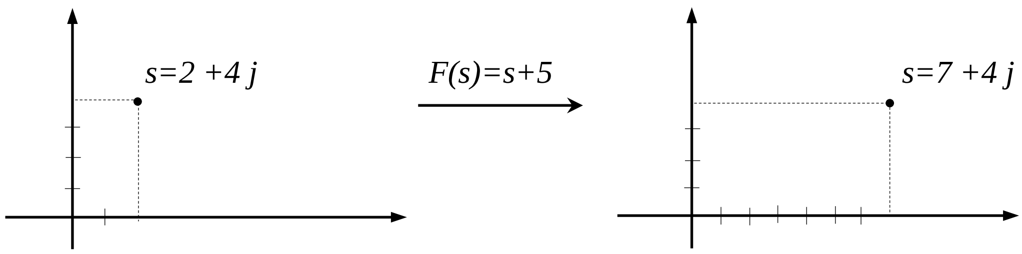
$$s = \sigma + j\,\omega$$

Plano konplexu batetan adieraz daitezke:



A-1 irudia. s planoa

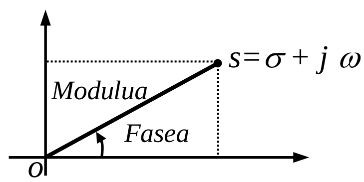
s **aldagai konplexuaren funtzioak defini daitezke**. Funtzio konplexuak dira, *s* aldagai konplexua baita, eta *s* plano baten aplikazio bezala kontsidera daiteke, beste plano batetan, *F(s)*, bihurtzen delarik.



A-2 irudia. s planoa ***A-3 irudia. F(s) planoa***

Zenbaki konplexu baten modulua eta fasea defini litezke:

$s = \sigma + j\,\omega$ izanik



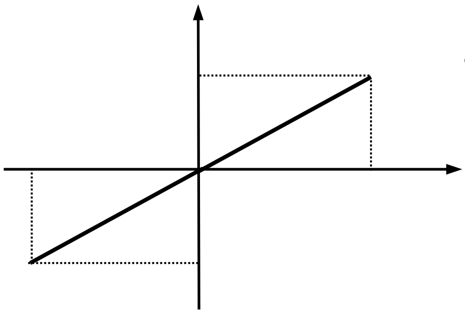
Modulua (anplitudea) = $\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$, $\overline{OS}$ zuzenkiaren luzera

Fasea (angelua, argumentua) = $\operatorname{arctg} \dfrac{\omega}{\sigma}$, $\overline{OS}$ zuzenkiak eta ardatz errealak osatzen duten angelua. Fase positiboa→erloju-orratzen aurkako biraketa-noranzkoa (angelu trigonometrikoa).

Horrela, zenbaki konplexu bat adierazteko beste modu bat da, modu polarra:

Modulua $\underline{|\textit{Fasea}}$

OHARRA: kontuz *arc tan* (arku tangentearekin), zenbaki konplexu baten *arc tan*-ak bi balio (soluzio) posible baititu,



$$\text{arctg}\,\frac{\omega}{\sigma} = \text{arctg}\,\frac{-\omega}{-\sigma}$$

Kalgulagailu eta ordenagailuek soluzio bietatik bakarra ematen dute:

- arctan + → **1.** (3.) koadrantea
- arctan - → **4.** (2.) koadrantea

Dena den, *MatLab*-ek badu `atan2(y,x)` funtzio garatua, non dagokion koadranteko angelua ematen duen.

Horregaitik, faktoreen argumentuak aurkitzean, hobeto da faktorez-faktore (banaka) egitea, denena batera (biderkadura osoarena) egin beharrean: $(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)$

Euler-en Teorema betetzen da: $M\underline{|\theta}$ zenbaki konplexu bat emanik, zera betezen da:
$\underline{M\,e^{j\theta} = M\,(\cos\theta + j\sin\theta)}$, edo berdina den beste hau
$\underline{e^{x\pm jy} = e^{x}\,(\cos y \pm j\sin y)}$,

Angelua, beti radianetan erabiliko dugu eragiketak egiteko, baina guk hobeto ikus dezagun zein balio duen, º -tara eramango dugu ($180/\pi$ faktorearengatik bidertuz)

Adibidea:
Aurkitu s=3+4j zenbaki konplexuaren forma polarra eta baita Euler-ena ere.

A.2 FUNTZIO KONPLEXUAK

Automatikan asko erabiltzen dira **polinomio arrazionalak**. Irakasgai honetan erabiliko ditugun funtzioak bi polinomioren zatiketak izango dira:

$$F(s) = \frac{N\,(s)}{D\,(s)} = \frac{Ze\,(s)}{Iz\,(s)} \quad \text{(zenbakitzailea/izendatzailea)}$$

Polinomio batek/batetan:

- **berretzaile handiena** duenaren **ordena** du
- bere **ordena**k dioen **erro kopurua** du
- **erroak bera hutsa** egiten duten **balioak (soluzioak)** dira

Polinomioak beti **bakandu** (banandu, zatitu, deskonposatu) daitezke modu honetan (**faktore biderkatzaileetan**):

$P(s)= a\, s^3+ b\, s^2 + c\, s + d$ eta bere erroak r_1, r_2, r_3 dira

$P(s)=a\,(s-r_1)\,(s-r_2)\,(s-r_3)$

F(s) funtzio konplexu baten **zeroak**, funtzio hori hutsa egiten duten balioak dira. Hau da, **zenbakitzailearen erroak**.

Adibidez:

$$F(s)=\frac{s+4}{s^2+5s+6}$$

$F(s)$-ren zeroa $s=-4$ da, $z_1=-4$.

F(s) funtzio konplexu baten **poloak**, funtzio hori infinitu egiten duten balioak dira. Hau da, **izendatzailearen erroak**:

Orduan adibide honetan, $F(s)$-ren poloak $s = -2$ eta $s = -3$ dira, $p_1=-2$ eta $p_2=-3$.

Funtzio konplexu guztiek dute polo eta zero kopuru berbera. Agertzen ez diren elementuak (adibidez lehengoan zero bat falta da), orduan $s = \propto$ zeroa dela esaten da.

Zenbaki konplexuen biderkaketa
$S1*S2=M1\,|\underline{\theta 1}\ *M2\,|\underline{\theta 2}\ =M1*M2\,|\underline{\theta 1+\theta 2}$

Zenbaki konplexuen zatiketa
$S1/S2=M1\,|\underline{\theta 1}\ / M2\,|\underline{\theta 2}\ =M1/M2\,|\underline{\theta 1-\theta 2}$

Zenbaki konplexu bat erro baten barrua agertzen denean, adibidez $c=\sqrt[n]{a+b\ j}$ orduan lenengo modulua aurkitzen da; $M=\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow Mod=\sqrt[n]{M}$, eta ondoren argumentuaren n balioak; $\theta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow Fasea=\frac{\theta+2\pi k}{n}$, non $k=0,1,2\ldots n-1$

Adibidea:
Aurkitu $\sqrt[3]{3+4\ j}$ zenbaki konplexuaren modulua eta argumentua.
Ebazpena:

$$M=\sqrt{3^2+4^2}=5 \rightarrow Mod=\sqrt[3]{5}=1.71$$

$$\theta=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)=53.13^{o} \rightarrow Fasea=\frac{\theta+2\pi k}{n}\quad k=0,1,2:\theta_1=17.71^{o},\theta_2=137.71^{o},$$

$$\theta_3=257.71^{o}$$

A.3 LAPLACE-REN TRANSFORMATUA

f(t) funtzio baten *F(s)* Laplaceren Transformatua, t >= 0 –k definitua, funtzio konplexu honi deitzen zaio:

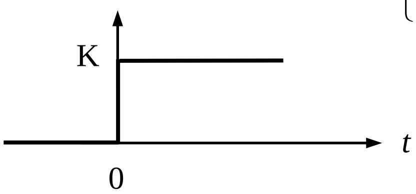
$$F(s) = L\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

f(t), denboraren funtzioa da, eta Laplaceren Transformatua aplikatu ahal izateko, nahikoa da **gutxienez zatika lineala** izatea. Aldiz, *F(s) s* aldagai konplexuaren funtzioa da, edo Laplace eremuko funtzioa, edo eremu konplexuko edo eremu transformatuakoa.

Orokorrean, *f(t)* funtzioen *F(s)* aurkitzeko taulak erabiltzen dira, integralaren bidez kalkulatu beharrean aldiro. Hauexek dira erabilienak:

Maila

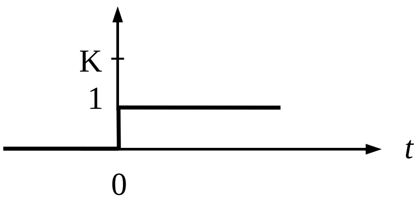
$$f(t)\begin{cases} K, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \; K=K\cdot 1, \; F(s) = \frac{K}{s} = K\frac{1}{s}$$



Oharra: honelako funtzioak definitzeko beste modu bat hau litzateke

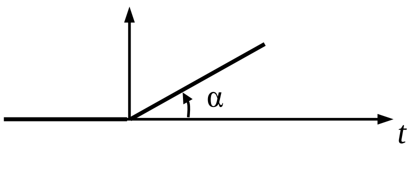
Maila unitarioa hau izango litzateke

$$f(t)\begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \; F(s) = \frac{1}{s}$$



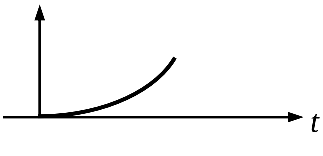
Aldatsa, arrapala edo malda

Aldatsaren malda matematikoa=*K=tg α*



$$f(t)\begin{cases} K\cdot t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \; F(s) = \frac{K}{s^2} = K\frac{1}{s^2}$$

Azelerazio parabolikoa



$$f(t)\begin{cases} K\cdot t^2, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \; F(s) = L\left[f(t)\right] = \frac{2\cdot K}{s^3} = K\frac{2}{s^3}$$

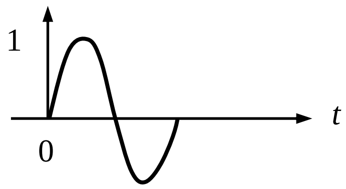
….

….

Berretura

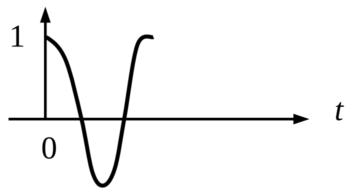
$$f(t)\begin{cases} K\cdot t^n, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \ F(s) = L\left[f(t)\right] = \frac{n!K}{s^{n+1}} = K\frac{n!}{s^{n+1}}$$

Sinua



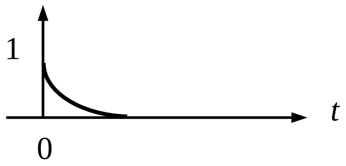
$$f(t)\begin{cases} \sin(\omega\, t), t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \quad F(s) = L\left[f(t)\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Kosinua



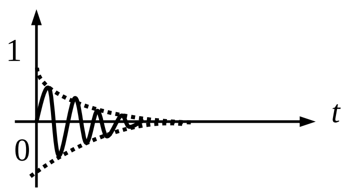
$$f(t)\begin{cases} \cos(\omega\, t), t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \quad F(s) = L\left[f(t)\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Funtzio esponentziala



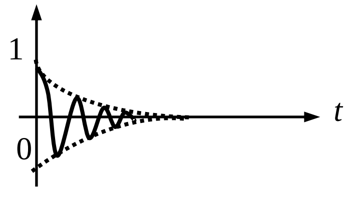
$$f(t)\begin{cases} e^{-\alpha\, t}, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \quad F(s) = L\left[f(t)\right] = \frac{1}{s + \alpha}$$

Sinu esponentziala



$$f(t)\begin{cases} e^{-\alpha\, t}\cdot\sin(\omega\, t), t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \quad F(s) = L\left[f(t)\right] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

Kosinu esponentziala

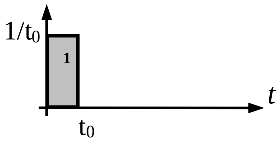


$$f(t)\begin{cases} e^{-\alpha\, t}\cdot\cos(\omega\, t), t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \quad F(s) = L\left[f(t)\right] = \frac{(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

orokorrean esponentziala dagoenean $e^{-\alpha\, t} f(t) \Rightarrow L\left[e^{-\alpha\, t} f(t)\right] = F(s + \alpha)$

Inpultsu unitarioa funtzioa

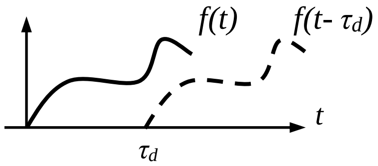
Automatikako ikasketetan erabilgarritasun handiko funtzioa dugu hau. Horrela definitzen da:



$$f(t) = \delta(t) = \delta(1) = \begin{cases} 1/t_0, \forall t \mid 0 < t < t_0 \\ = 0, \forall t > t_0 \\ = 0, \forall t < 0 \end{cases}, F(s) = L[\delta(1)] = \frac{1}{s\, t_0}\left(1 - e^{-t_0 s}\right)$$

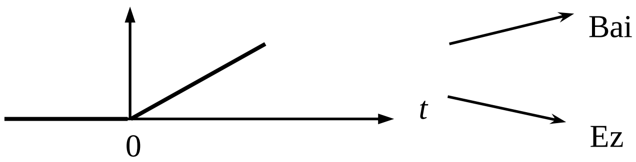
Bere azalera 1 da, $A = 1/t_0 * t_0 = 1$

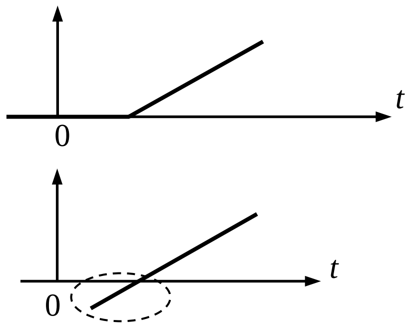
Funtzioen traslazioa edo atzerapena denboran zehar (delay)



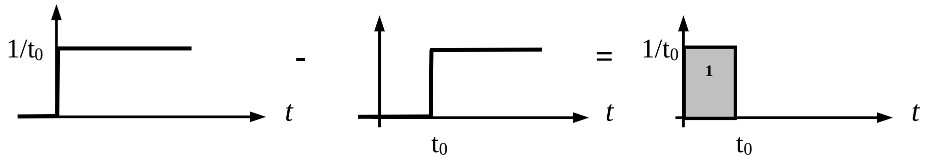
f(t)-ri, *F(s)* badagokio, orduan $f(t-\tau_d)$-ri, $e^{-\tau_d s} \cdot F(s)$ dagokio.

OHARRA:





Ariketa:
Inputsu unitario funtzioaren Laplaceren Transformatua aurkituko dugu, beste bi funtzio hauen kenketa dela hartuz: $1/t_0$ maila eta maila hori t_0 (τ_d) atzeratua.

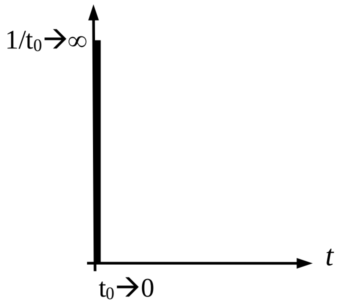


$$f(t) = \frac{1}{t_0} 1(t) - \frac{1}{t_0} 1(t - t_0) =$$

Horrela, hauxe da Inputsu unitario funtzioaren Laplaceren Transformatua:

$$F(s) = L[f(t)] = \frac{1}{s\, t_0}\left(1 - e^{-t_0 s}\right)$$

Inpultsua unitarioa nahi dugun hestua egin dezakegu, baina bere azalera beti izango da unitaioa edo 1-ekoa. Limitean, zabalera oso txikiko inpultsu bat geratzen da, 0-rantzko joerarekin, eta altuera $\propto$-rako arekin. Honi, *Dirac*-en delta deritzaio. Aurki dezagun bere transformatua:



$$f(t) = \delta(t) = \delta_{DIRAC}(t) = \delta(1) = \begin{cases} 1/t_0, \forall t \mid 0 < t < t_0 \\ = 0, \forall t > t_0 \\ = 0, \forall t < 0 \end{cases}, \quad t_0 \to 0, \quad F(s) = L[\delta_{DIRAC}(t)] = 1$$

orduan, *Dirac*-en deltaren Laplaceren Transformatua 1 da.

Propietate eta teorema batzuk

1. Deribazioa

$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$, non hasierako baldintzak, $f(0) = f(t)\big|_{t=0}$ izanik.

$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0), \quad f'(0) = f'(t)\big|_{t=0} = \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}$ izanik.

…

$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) ... - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$,

$f^n(0) = f^n(t)\big|_{t=0} = \left.\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right|_{t=0}$ izanik.

2. Integrazioa

$L\left[\int_0^{t_0} f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}, \quad f^{-1}(0) = \left.\int_0^{t0} f(t)dt\right|_{t=0}$ izanik.

Eskema bat eginez (hasierako baldintzarik gabe):

$F(s) \longrightarrow \frac{F(s)}{s} \longrightarrow \frac{F(s)}{s^2}$ *Integratzen*

$s^2F(s) \longleftarrow sF(s) \longleftarrow F(s)$ *Deribatzen*

3. Hasierako balioaren teorema

$\lim_{t \to 0} f(t) = f(0) = \lim_{s \to \infty} s\,F(s)$

4. Azken balioaren teorema

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,F(s)$$

Beste gauza batzuen artean, transformatuak ondo dauden ala ez ikusteko erabilgarriak dira terorema bi hauek (3. eta 4.a).

5. Funtzioa konstante batengatik bidertua

$K\,f(t) \rightarrow L[K\,f(t)] = K \cdot L[f(t)] = K \cdot F(s)$

6. Funtzioen batuketa/kenketa

$f(t) = f_1(t) \pm f_2(t) \pm f_3(t) \pm ... \rightarrow L[f(t)] = L[f_1(t) \pm f_2(t) \pm f_3(t) \pm ...] = L[f_1(t)] \pm L[f_2(t)] \pm L[f_3(t)] \pm ... \rightarrow F(s) = F_1(s) \pm F_2(s) \pm F_3(s) \pm ...$

Laplaceren alderantziko trasnformatuak edo Laplaceren antitransformatuak

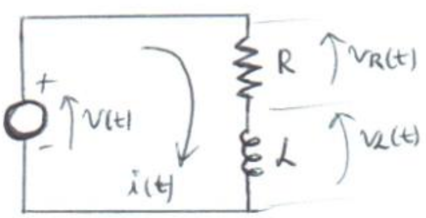
Laplaceren alderantzizko transformazioa edo transformatu iraulia (inbertitua) *F(s)*-tik *f(t)*-ra eramaten gaituen urratsa da, eta horrela adierazten da; $L^{-1}[F(s)]=f(t)$. Bi modutara eman daiteke urrats hau:

1. transformatuen taula erabiliz, zuzenean
2. *F(s)*-rekin eragiketak egin eta frakzio partzialak lortuz, taulan dauden espresioen itxurakoak lortuz

Laplace-ren transformatuaren helburua

Laplaceren transformatuaren helburu nagusienetako bat zera da: sistema baten dinamika *Ekuazio Diferentzialen* bidez adierazia denean, bere irteera-aldagaiaren espresio matematikoa lortu ahal izatea. Horretarako sistema horren *Ekuazio Diferentzialak Ekuazio Algebraiko* bihurtzea dira Laplaceren transformatua aplikatuz, hau da *t* eremutik *s* eremura pasatu, non irteera-aldagaia askatzen den, eta ondoren denbora eremura bueltatzen den Laplaceren antitransformatua aplikatuz.

Adibidez, lehen ordenako zirkuitu elektriko honen korrontearearen espresio matematikoa lortu nahi da, sarrerako tentsioaren eta sistemaren ekuazioen funtzio delarik.



$$\begin{cases} v(t) = v_R(t) + v_L(t) \\ v_R(t) = R \cdot i(t) \\ v_L(t) = L \cdot \dfrac{d\ i(t)}{dt} \end{cases} \rightarrow \quad v(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d\ i(t)}{dt}$$

Sistemaren ekuazio diferentzial bakarra geratzen da, non Laplaceren transformatua aplikatuz ekuazio algebraikoa lortu eta honela geratzen den,

$V(s) = R \cdot I(s) + L \cdot [s \cdot I(s) - i(0)]$

suposatuz L induktantziaren hasierako baldintzak baliogabeak direla (0), orduan ekuazio algebraikoa horrela geratzen da,

$$V(s) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s) \rightarrow V(s) = I(s)(L \cdot s + R)$$

non korrontea askatuz, sarreraren eta sistemaren ekuazioaren funtzio geratzen da,

$$I(s) = \frac{V(s)}{(L \cdot s + R)}$$

Orain suposatuz 5 V-eko korronte zuzenekoa tenstioa dela aplikatzen den sarrera,

$$v(t) = 5\ \mathrm{V} \rightarrow V(s) = \frac{5}{s},$$

beraz,

$$I(s) = \frac{5/s}{(L \cdot s + R)} = \frac{5/L}{s(s + R/L)}$$

Azkenik, espresio honen antitrasnformatua aplikatuz denbora eremuan korronteak izango duen espresioa lortzen da, baina ikusten dugunez, transformatu hau ez da aurkitzen Laplaceren transformatuen taulan, beraz frakzio partzialen metodoa erabili beharko da horretarako.

Frakzio partzialen zabalkuntza edo zatiketa metodoa

F(s) sinpleagoak diren hainbat funtziotan banatzeko balio du modu honek.

$$F(s) = \frac{(s^2 + s)}{(s^3 + 3s + 7)}$$

Goazen bista jotzera *F(s)*-ren poloei, hau da, izendatzailearen erroei, eta hemen, aukera ezberdinak izan ditzakegu:

a) Polo guztiak erreal ezberdinak dira
b) Polo guztiak erreal anitzak dira
c) Polo guztiak zenbaki koplexuak dira (binaka, bikoteetan)

1. OHARRA: Lehenik eta behin, ezertan hasi aurretik *F(s)* funtzioak bete behar duen baldintza honako hau izan behar da: zenbakitzailearen ordena txikiagoa izan behar da izendatzailearena baino, hau da $\partial Ze(s) < \partial Iz(s)$. Horrela ez bada, *F(s)*-ren zatiketa egin behar da, non *Ze(s)* zatikizuna eta *Iz(s)* zatitzailea diren:

$$\begin{array}{l|l} ZATIKIZUNA & \underline{ZATIZAILEA} \\ HONDARRA & ZATIDURA \end{array} \qquad \frac{Ze(s)}{Iz(s)} = \frac{ZATIKIZUNA}{ZATITZAILEA} = ZATIDURA + \frac{HONDARRA}{ZATITZAILEA}$$

Kasu hauetan, *F(s)* horrela geratzen da,

$F(s)=\dfrac{Ze(s)}{Iz(s)}=Zatd(s)+\dfrac{Hond(s)}{Zatz(s)}$, non bigarren zatia ebazten den, hau da $\dfrac{Hond(s)}{Zatz(s)}$

a) Polo guztiak ezberdinak dira (denak dira 1. ordenakoak)

Ondoko espresio honetan jarriko da,

$$F(s)=\frac{a_1}{(s-p_1)}+\frac{a_2}{(s-p_2)}+\frac{a_3}{(s-p_3)}\ldots$$

non, a_1 *F(s)*-ren hondarra dela esaten da $s=p_1$-en (denean) eta polo bakoitzak bere hondarra duen. Erraza da hondarren balioak aurkitzea eta behin aurkituz, *F(s)*-ren alderantzizko transformatuak honako forma izango du (batuketa/kenketaren propietatea aplikatuz),

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)]+L^{-1}[F_2(s)]+L^{-1}[F_3(s)]+\ldots=a_1e^{p_1t}+a_2e^{p_2t}+a_3e^{p_3t}\ldots$$

Adibidea

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

F(s) funtzioaren poloak edo izendatzaileko erroak aurkitzen dira, eta ikusten denez biak dira desberdinak. Orduan bigarren espresioa ere lehenengoaren berdina da, eta jarraian hirugarrena planteiatzen da: polo bakoitzarentzako hondar bana jarriz eta zatidura bakoitza batzen jarriz espresio osoan.

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{a_1}{(s+2)}+\frac{a_2}{(s+3)}$$

Jarraian hirugarren espresioa garatzen da, zatidura bakarrean utziz,

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{a_1}{(s+2)}+\frac{a_2}{(s+3)}=\frac{a_1(s+3)+a_2(s+2)}{(s+2)(s+3)}$$

non zenbakitzailea *s*-ren koefizienteetan ordenatuz horrela geratzen den,

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{(a_1+a_2)s+3a_1+2a_2}{(s+2)(s+3)}$$

Orain, *s*-ren koefizienteetan oinarrituriko lehenengo eta azkenengo espresioen zenbakitzaileen berdinketaz baliatuz, 2 ekuazio eta 2 ezezaguneko ekuazio sistema bat planteiatzen da,

s^1: $1=a_1+a_2$
s^0: $1=3a_1+2a_2$

eta ebatziz,

s^1: $1 = a_1 + a_2 \rightarrow a_1 = 1 - a_2$ $\rightarrow \boxed{a_1 = -1}$

s^0: $1 = 3a_1 + 2a_2 \rightarrow 1 = 3(1 - a_2) + 2a_2 = 3 - a_2 \rightarrow \boxed{a_2 = 2}$ $\uparrow$

Koefizienteen balioak ondo aurkitu diren ala ez jakiteko, hirugarren espresioan ordezkatuz jatorrizko espresioa lortu beharko da.

Horrela *F(s)*-ren hirugarren espresioa honela geratzen da,

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+3)}$$

non alderantzizko transfomatua aplikatuz, *f(t)* aurkitzen den,

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] = -1e^{-2t} + 2e^{-3t} = -e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

Hasierako eta azken balioaren teoremak aplikatuz (erabiliz), egiazta dezakegu alderantzizko transformatua ondo egin dela.

2. OHARRA: Izendatzailea polinomio monikoa izan behar da beti, hau da, ordena definitzen duen edo berretzaile handiena duen koefizientea 1 izan behar da, eta ez bada, transformazio aritmetikoak egin behar dira hori horrela geratzeko.

b) Polo guztiak berdinak edo anitz errealak dira

Adibidea

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^3+3s^2+3s+1}$$

F(s) funtzioaren poloak edo izendatzaileko erroak aurkitzen dira, non erreal berdinak eta hiru direla ikusten delarik. Orduan bigarren espresioa ere lehenengoaren berdina da, eta jarraian hirugarrena planteiatzen da: hondar bakoitzarentzako poloen berretura gehitzen joanez eta zatidura bakoitza batzen jarriz espresio osoan.

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^3+3s^2+3s+1} = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{b_1}{(s+1)^1} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{(s+1)^3}$$

Jarraian hirugarren espresioa garatzen da, zatidura bakarrean utziz,

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^3+3s^2+3s+1} = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{b_1}{(s+1)^1} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{(s+1)^3} = \frac{b_1(s+1)^2 + b_2(s+1)^1 + b_3}{(s+1)^3}$$

non zenbakitzailea *s*-ren koefizienteetan ordenatuz horrela geratzen den,

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{s^3+3s^2+3s+1}=\frac{b_1s^2+(2b_1+b_2)s+(b_1+b_2+b_3)}{(s+1)^3}$$

Orain, *s*-ren koefizienteetan oinarrituriko lehenengo eta azkenengo espresioen zenbakitzaileen berdinketaz baliatuz, 3 ekuazio eta 3 ezezaguneko ekuazio sistema bat planteiatzen da,

s^2: $1=b_1$
s^1: $2=2b_1+b_2$
s^0: $3=b_1+b_2+b_3$
eta ebatziz,

s^2: $1=b_1 \rightarrow \boxed{b_1=1}\downarrow$
s^1: $2=2b_1+b_2 \rightarrow 2=2+b_2 \rightarrow \boxed{b_2=0}\downarrow$
s^0: $3=b_1+b_2+b_3 \rightarrow\ \rightarrow 3=1+0+b_3 \rightarrow \boxed{b_3=2}$

horrela *F(s)*-ren hirugarren espresioa honela geratzen da,

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{s^3+3s^2+3s+1}=\frac{1}{(s+1)^1}+\frac{0}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)^3}$$

non alderantzizko transfomatua aplikatuz, *f(t)* aurkitzen den,

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)]+L^{-1}[F_2(s)]+L^{-1}[F_3(s)]=b_1e^{p_1t}+b_2t\,e^{p_1t}+\frac{b_3}{2!}t^2e^{p_1t}$$

$$f(t)=1e^{-1t}+0+\frac{2}{2!}t^2e^{-1t}=e^{-t}+t^2e^{-t}=e^{-t}(1+t^2)$$

c) Polo guztiak zenbaki koplexuak dira (binaka edo bikoteka)

Poloak konplexu konjokatuak direnean, binaka edo bikoteka agertzen dira. Polo bikote konjokatu bakoitzari cosinua eta sinua dagozkio, *cos(ωt)* eta *sin(ωt)*: zenbakitzailean *s* bat jartzen zaio cosinuari, eta *ω*, sinuari. Horretaz gain, izendatzailean *s*-ren ordez $s+\alpha$ ager daiteke (sinu eta cosinu moteldUak), non orduan cosinuaren zenbakitzailean ere $s+\alpha$ agertu behar den (begiratu Laplaceren funtzioen taulan bi kasu hauen transformatuak).

Kasu hauetan lehen eman behar den urratsa *α* eta *ω* identifikatzea da, izendatzailea hartuz. Ondoren cosinu eta sinuaren formak aurkitzen joan behar dugu, eragiketa arimetikoak eginez.

$$F(s)=\frac{c_1s+c_2}{s^2+\omega^2}=\frac{c_1s}{s^2+\omega^2}+\frac{c_2}{s^2+\omega^2} \qquad F(s)=\frac{c_1(s+\alpha)+c_2}{(s+\alpha)^2+\omega^2}=\frac{c_1(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega^2}+\frac{c_2}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

Adibidea

$$F(s)=\frac{2s+1}{s^2+2s+2}$$

F(s) funtzioaren poloak aurkitzen dira, non konplexu konjokatuak direla ikusten den,

$$p_{1,2}=-1\pm j$$

Bestalde, izendatzailean ez da agertzen $s^2+\omega^2$ forma, zeren s^1-en termino bat ere badago. Horrek esan nahi du α bat dagoela (cosinu eta sinu motelduak), beraz kasu orokorra bezala jarrita, honela izango litzateke,

$$(s+\alpha)^2+\omega^2=s^2+2\alpha s+\alpha^2+\omega^2$$

non adibideko izendatzailearekin berdinduz

$$s^2+2\alpha\ s+(\alpha^2+\omega^2)=s^2+2\ s+2$$

eta ondoren identifikatuz terminoz-termino

s^2: $1=1$
s^1: $2\alpha=2$
s^0: $\alpha^2+\omega^2=2$

α eta ω parametroen balioak aurkitzen dira,

s^1: $2\alpha=2\rightarrow\boxed{\alpha=1}$
s^0: $\alpha^2+\omega^2=2\rightarrow\omega=\sqrt{2-\alpha^2}=\sqrt{2-1^2}=1\ \boxed{\omega=1\ rad/s}$

Orain, kontuan izanik aurkituriko α eta ω parametroen balioak, eta lehen edo jatorrizko espresioa hartuta, cosinu eta sinu moteldu bezala jartzeko urratsak emango ditugu. Izendatzaileari dagokionez bigarren espresio hau agertzen da,

$$F(s)=\frac{2s+1}{s^2+2s+2}=\frac{2s+1}{(s+1)^2+1^2}$$

Zenbakitzailean berriz, $c_1(s+\alpha)$ eta c_2 aurkitu behar dira, behar diren eragiketa aritmetikoak eginez.
Dakigun bezala, cosinuaren (ezkerrean) zatiak *(s+α)* izan behar du, non bere koefizientea c_1 den: hau 2 da, eta kanpoan uzten da bidertzen, eta *s+1* lortzeko, *+1/2* eransten zaio, baina ezer ez aldatzeko matematikoki, *-1/2* ere sartu behar da zenbakitzailean (hirugarren espresioa). Horrela laugarren espresioan, ezkerrean cosinu eta eskubian sinu motelduen transformatuak identifika ditzakegu,

$$F(s)=\frac{2s+1}{(s+1)^2+1^2}=2\frac{s+1/2}{(s+1)^2+1^2}=2\frac{s+1/2+1/2-1/2}{(s+1)^2+1^2}=2\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}+2\frac{-1/2}{(s+1)^2+1^2}$$

non c_2 -1 da (2·(-1/2)), eta antitransformatua honela geratzen den,

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] = c_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega t) + c_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$$
$$f(t) = 2e^{-1t}\cos(1t) - 1e^{-1t}\sin(1t) = e^{-t}[2\cos(t) - \sin(t)]$$

3. OHARRA: batzuetan posible da, egin beharreko transformazioak direla eta, cosinu edo sinuaren partaidea desagartzea.

4. OHARRA: Polo konplexu konjokatuen kasua, polo erreal desberdinak balira ere ebaztu daiteke. Har dezagun aurreko *Adibide* bera, non bere poloak $p_{1,2} = -1 \pm j$ diren, eta errealak balira hartuz (desberdinak dira),

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+2} = \frac{2s+1}{(s+1-j)(s+1+j)} = \frac{a_1}{(s+1-j)} + \frac{a_2}{(s+1+j)} = \frac{a_1 s + a_1 + a_1 j + a_2 s + a_2 - a_2 j}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

non zenbakitzailea *s*-ren koefizienteetan ordenatuz eta koefizienteetan oinarrituriko lehenengo eta azkenengo espresioen zenbakitzaileen berdinketaz baliatuz, 2 ekuazio eta 2 ezezaguneko ekuazio sistema bat planteiatzen da,

s^1: $2 = a_1 + a_2$
s^0: $1 = a_1 + a_1 j + a_2 - a_2 j$

non ebatziz hondarren balioak lortzen diren,

$\boxed{a_1 = 1 + 1/2j}$, $\boxed{a_2 = 1 - 1/2j}$

eta Laplaceren antitransformatua planteatuz *f(t)*-ren adierazpena lortzen den,

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] = a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t}$$

non zenbaki konplexuak adierazteko *Euler*-en forma gogoratuz,

$$e^{x \pm jy} = e^{x} e^{\pm jy} = e^{x}(\cos y \pm j \sin y)$$

f(t)-en ordezkatuz eta garatuz eta sinplifikatuz,

$$f(t) = (1+1/2j)e^{(-1+j)t} + (1-1/2j)e^{(-1-j)t} = (1+1/2j)e^{-t}[\cos(1t) + j\sin(1t)] + (1-1/2j)e^{-t}[\cos(1t) - j\sin(1t)]$$
$$f(t) = e^{-t}[2\cos(t) - \sin(t)]$$

5. OHARRA: *F(s)* funtzioak dituen poloen arabera, a), b) eta c) kasuak modu desberdinean konbinaturik ager daitezke. Orduan termino bakoitza osatzeko, polo bakoitzari dagokion hondarra jartzen zaio, ondoren beste terminoekin batzen da eta garatu.

Adibidea

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^3+4s^2+5s+2} = \frac{s^2+2s+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{a_1}{(s+2)} + \frac{b_1}{(s+1)^1} + \frac{b_2}{(s+1)^2}$$

1. OINARRIZKO KONTZEPTUEN HASTAPENAK

1.1 OINARRIZKO KONTZEPTUAK

Hitz gutxitan esanda, automatikak magnitude bat giza-esku-hartzerik (giza-interbentziorik) gabe nola kontrolatu ahala aztertzen du. Kontrolatzea, balio tinko batetan mantentzea zein era konkretu batetan aldatzea esan nahi du. Orokorrean, magnitde horretan eragiteko, beste batzuk aldatzen dira: non lehenengoa hauen menpekoa delarik.

Adibideak:

- Motore elektriko baten abiadura aldatzeko, bere elikadura aldatzen da
- Kotxe batek bira egiteko, bere bolantea biratzen da
- Logela bateko hotz-beroa igotzeko, leihoa itxi eta berogailua jartzen da

Erregulazio automatikoa sistemen igeniaritzan oinarritzen da. Errealitatea era matematikoan adierazteko modua da (funtzioak, ekuazio diferentzialak, grafikoak…. erabiliz).

<u>Def</u> *Sistema: kausa-efektu erlazioak adierazten dituen edozein objektu, gailu edo mekanismoa da. Horrela, kausa sortzaileak aldatuz ondorioak alda ditzakegu.*

Apur bat formalizatuz, sistema bat horrela adieraz daiteke:

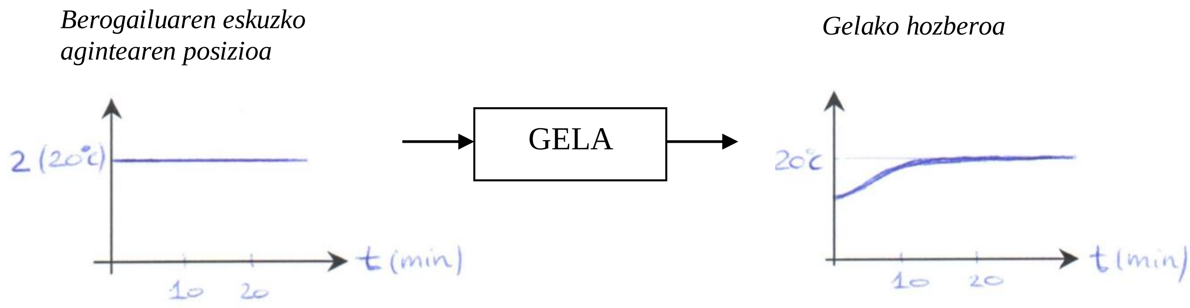
1-1 irudia. Sistema orokorra

Sistema bat, hauetariko edozein izan daiteke: zirkuitu elektroniko bat, mekanismo bat, herri edo hiri bat, kualitate bat.

Argi dagoena zera da: sarrera aldatuz irteera aldatzea lortzen dela. Erregulazio automatikoak aztertzen duena zera da: ikustea zein sarrera behar den irteera jakin bat lortzeko (helburua), eta gainera, nola alda daitekeen, sistemaren helburu hori lortzeko.

Adibidez: gela bateko hozberoa (tenperatura) kontrolatzea berogailu baten bidez. Jakin badakit, berogailuaren eskuzko agintea 2 posizioan jartzen badut 10 minututan izango ditudala 20 ºC.

Kontrol mota hau esperientzian oinarritzen da, ezaguera enpirikoan oinarritzen da. Horrela kontrolatu izan da beti hozberoa. Hau, *begizta irekiko kontrola* izenez ezagutzen da: eskuzko agintea 2 posizioan jartzen da eta 10 minutu igaro orduko nahi zena lortzen da. Kontrolatzeko modu honek nahiko ondo funtzionatzen du.



1-2 irudia. Gelako hozberoa

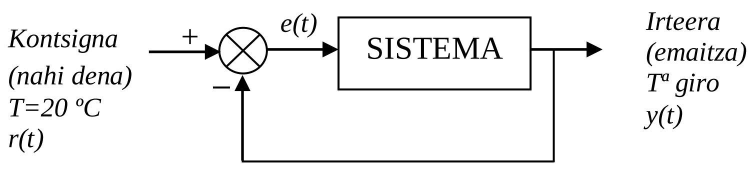
Sarrera jakin bat eman eta suposatzen da irteera nahi dena dela. Baina hau egia izango da, bakarrik, gelako baldintza termikoak aldatzen ez diren bitartean.

Beharbada
- kanpoko hozberoa handiagoa edo txikiagoa da
- leihoren bat zabalik dago
- jende pila dago gelan

Hauetariko edozein kasutan, emaitza ez da izango espero zena→ez dira 20 ºC harrapatzen

Ikusi dugun hau, begizta irekiko sistemen ezaugarri bat da: honelako sistemak ez dira konturatzen bertan azaltzen diren erroreetaz (akatsetaz). Sistemak, ondo funtziona dezan, asalduretatik (perturbazio) libre egon behar du. Beharbada, baldintzak aldatuz gero, proba dezaket beste sarrera bat ezarriz ea zer gertatzen den: leihoko kristala hautsita balego, jar dezaket 3 posizioan eskuzko agintea.

Horrela, hoberena nahi den emaitza lortu den ala ez ikusi eta horren arabera jokatzea izango litzateke (adibidez 3-kin ez bada nahikoa, 4-an jarri). Hau, *begizta itxiko kontrola* edo ezagunagoa den, *berrelikadurazko kontrola* (*feedback control*) izenez ezagutzen da, 1-3 irudia. Irteera begiratzen da, nahi denarekin (kontsigna edo erreferentzia) konparatu eta behar diren neurriak hartzen (ekintzak egiten) dira momentu bakoitzean. Horrela, sistema autoerregulatu egiten da: automatikoki erregulatzen da. 1.2 irudiko adibidean aldiz, gelan (sistemaren irteeran) 20 ºC baino gutxiago badaude, eskuzko agintea handiago den posizio batetan jartzen da, eta bestela, beheragokoren baten, baina eskuz egin behar da, beraz ez da automatikoa.



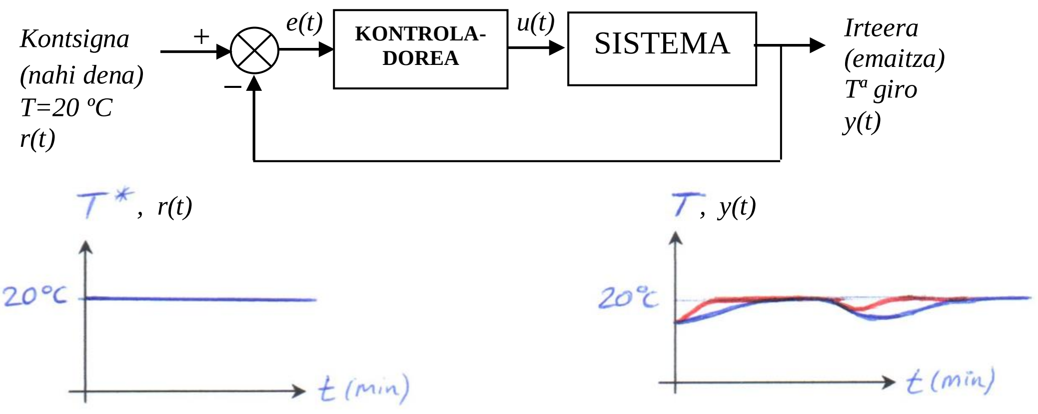
1-3 irudia. Begizta itxiko edo berrelikadurazko kontrola

Normalean konparaketa (erkaketa), kenketa bat izaten da:

Errorea (sistemaren sarrera) = Kontsigna-Irteera; $e(t)=r(t)-y(t)$

Kontsigna eta irteera berdinak badira, errorea zero da, eta orduan badugu nahi genuena. Sistema hau bestea baino zatia hobeagoa da. Gainera, daukan abantaila bat zera da: ez duela arreta jartzen asalduretan, beren efektuetan baizik. Egia esanda, asaldurak sistemarentzako beste sarrera batzuk dira.

Normalean begizta itxiko sistema batek kontroladore bat izaten du, errorea askotan ez baita izaten nahiko indartsua edo egokia sistemaren portaera zuzentzeko, 1-4 irudia. Horrela, kontroladoreak *e(t)* errorea hartu eta bere bertsio hobeagoa den *u(t)* kontrol seinalea ematen du. Kontroladore ezagun eta erabilienetariko bat erreguladore Proportzionala (P) da, non bere zeregina errorearen proportzionala den kontrol seinalea ematea de sistemari, hau da $u(t)=Kp\cdot e(t)$



1-4 irudia. Begizta itxiko sistema kontroladorearekin

Horrela, konstante proportzionalaren balioa 10 bada, errorearen balioa 10 aldiz bidertuko da eta sistemaren zuzentzeko ahalmena edo erreakzioa azkarragoa izango da (gorriz) kontroladorerik gabe baino (urdinez).

Kontrol forma hau asko ematen da naturan eta eguneroko bizitzan.

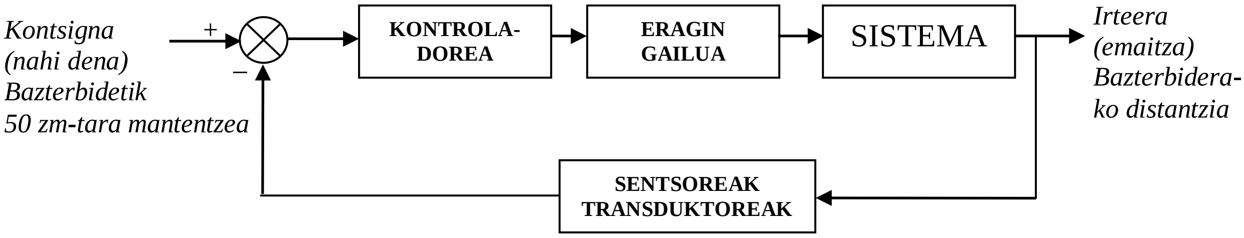
Adibidez:
Landareen ureztatzea
-asko→usteldu
-gutxi→lehortu

Ikasketa
-gutxi→ez gainditu
-asko→gainditu

Buruzagitza (lantokian)
-ongi→jarraitu
-txarto→kalera

Ekonomia
-garesti saldu→gutxi saldu } ¿irabaziak?
-merke saldu→asko saldu }
Kotxea gidatzen
-abiadura mantendu
-bide barruan (arraian) mantendu

Kotxea gidatzearen kasua oso baliagarria da zenbait kontzeptu ikusteko:



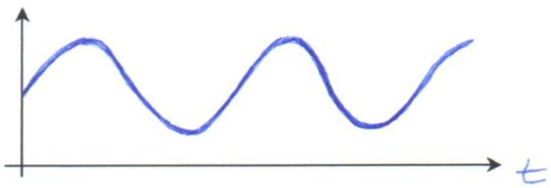
1-5 irudia. Kotxearen begizta itxiko kontola

Elementuak:

- *Kontsigna* edo *erreferentzia*: lortu nahi dena
- *Irteera* (bazterbiderako distantzia): lortzen dena
- *Errorea*: kontsignaren eta lortzen denaren arteko ezberdintasuna
- *Kontrolatzailea* (gidaria): errorea oinarri bezala hartuz, kontrol-ekintza hoberena kalkulatzen du
- *Eragingailua* (besoak): kontrol-ekintza sistemarekiko ekintza baten bihurtzen (gauzatzen) du. Normalean sistema barruan sarzen da.
- *Sistema* (bolante-kremailera-pneumatiko): kontrolatu nahi dena
- *Transduktorea*: irteera neurtzen du eta magnitude hau kontsignarekin konparatzeko zerbaitetan bihurtzen du (gidariaren ikusmena).

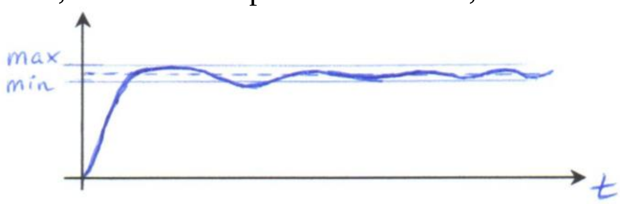
Noiz biratzen da bolantea?
Kontroladore edo kontrolagailuak aukeratzen du modurik egokiena:

- Errore handia ikusten badu eta bolantea bapatean biratzen badu→kotxea irauli→sistema ezegonkortu (1-6 irudia)
- Errorea apurka-apurka modu konstante batetan zuzentzen saiatzen bada→sistema egonkorra. Nahi dena lortzen da.
- Errorea kolpezka modu zazkarrean zuzentzen saiatzen bada horrelako zerbait egiten du: Irteera oszilakorra→sistema egonkortasun-mugan. Nahi dena lortzen da baina kontuz izan behar da ezegonkortu gabe, mugan baitago.



1-6 irudia. Egonkortasun mugaren irteera oszilakorra (egonkortasun mugan)

Errorea: ideala zero izatea da baina errealitatean beti izango da zerbait, ezinbestekoa baita, beraz, muga batzuen barruan (maximo eta minimo bat) dagoena onargarritzat hartzen da, eta hortik kanpokoa onartezina, 1-7 irudia.



1-7 irudia. Sistema baten irteera muga edo errore onargarriekin

Hainbat asaldu egon litezke:

- Irteera irakurtzean
  - kristal zikina (betaurrekoak)
  - bidebazter-marra erdi-atxindua edo zikina egotea
- Sarrera aplikatzean
  - eskuetan izerfia izatea
  - direkzioaren lasaiera
- Sisteman
  - alboko haizea
  - peralte edo goragunea

Kontroladorea, gauza guzti hauek kontuan izanik diseinatzen da: kontsigna motak, asaldura susmagarriak, errore onargarria, etab.

Beraz, aipa ditzakegu begizta itxiko edo berrelikadura kontrol-sistemaren ezaugarri batzuk:

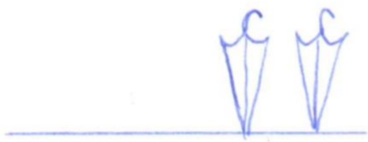
- asaldurekiko konparazioa sentigaitza (sorgorra) da. Izan ere, ez ditu ezagutzen (bere izaera), baizik eta beren efektuetaz ohartzen da bakarrik.
- begizta irekikoa baino konplikatuagoa da
- ezegonkorrak bihur litezke, erroreak berzuzentzen badira, edo kasurik hoberenean, erresonantzian sartu (egonkortasun mugan)
- kontrolatzaileari dagokionez, nahi den bezain konplikatua izan daiteke, baina azkenenan erantzuna behar bezain ona eskeintzen dutenen artean onena duena aukeratzen da.
- kontrolatzaileak gauza hauek kontuan izanik diseinatzen dira:
  - nahi diren kontsignak (erabilienak izango direlarik)
  - sarrera ezargarriak
  - sarrera onargarriak
- automatikoa izan dadin, ez da giza-esku-hartzerik izan behar
- kontroladorea diseinatu aurretik, sistema teknikoki kontrolagarria dela ikusi eta ziurtatu behar da.

Adibidez:

a) mantendu al daiteke aterkin bat zutunik hatz baten gainean? **BAI** (pendulu alderantzikatua)

b) mantendu al daitezke aterkin bi zutunik, bata bestearen gainean, behekoa hatz baten gainenan delarik kokatua? **BAI** (bi aldiz pendulu alderantzikatua)

c) mantendu al daitezke bi aterkin zutunik, bata bestearen alboan eta biak hatz baten gainean? **EZ**



1.2 IKUSPEGI HISTORIKOA

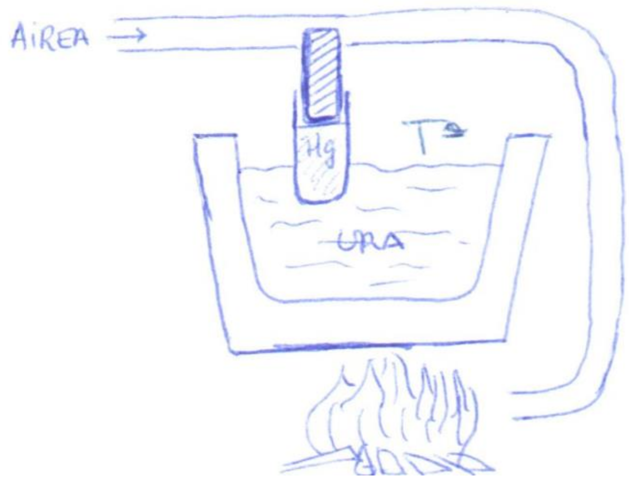
Berrelikadurazko kontrola betidanik existitu izan da naturan:

- animaliek gosea dutenenan, jan egiten dute
- animali-biztanlerien kopuruak
  - Janari asko denenan, hasi egiten dira
  - Harrapariek ez dute uzten gehiegi hazten biztanleri horiek, horretarako, bere biztanleria era hazi egiten da

Zaila da jakitea noiz eman zen lehen aldiz berariaz (zehazki) berrelikadurazko erregulazioa.

Kristo Aurreko I mendean, Alejandriako *Heron*-ek neumatikako liburu bat argitaratu zuen, urmaeletako (estankeetako) ur mailen kontrolak diseinatzen zituelarik. Maila jeisten bazen, betetze-balbula zabaltzen zen, eta horrela maila berreskuratua geratzen zen. Kristau era hasieretan, arabiarrek urezko erlojuak eraikitzen zituzten, printzipio berdina hartuz oinarri bezala.

1600 urtean *Bacon*-ek, *Drebel* alkimistak asmaturiko ontzi bateko **hozberoa konstante mantentzen zuen mekanismoa** ezagutarazi zuen.

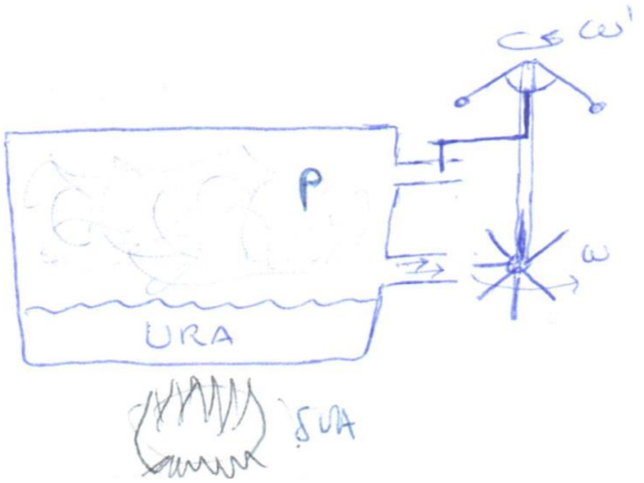


1-8 irudia. Drebbel-en sistema

Mende bat eta erdi geroxeago, 1750ean, gailu batzuk egin ziren erroten norabidea kontrolatzeko (*Meikle*).

1788an, *Watt*-en erreguladore zentrifugoa agertzen da, **ontzi bateko presioa konstante mantentzen** zuen, hau kontrol automatikoko adibide klasiko bezala hartua izaten da. Izan ere, hura izan zen azterketa analitikoa (matematikoa) egin zitzaion lehen sistema (*Marcus*, “Ou Governers”).

Ordurarteko mekanismo guztiak modu enpirikoan egiten ziren, esperientzian oinarriturik: hainbat saiakuntza-errore egiten ziren. Horren arrazoietariko bat zera zen: ez zela azterketa analitikoa egiteko tresna matematikorik existitzen.



1-9 irudia. Watt-en erreguladore zentrifugoa

1779an, *Laplace*-k automatikan aurrerapen handia izan zen transformatua sortu zuen, sistemak gobernatzen zituzten ekuazio diferentzial konplexuak ekuazio algebraiko errazetan bihurtzen baitzituen. Sasoi hartan, *Cauchy*-k aldagai konplexuaren teorema garatu zuen, Laplaceren teoria oso onuradun irten zelarik.

Kontrol-teoria ez zen garatu, gaur egun ezagutzen den bezala, XX. mendea jada sartu arte, zirkuitu elektrikoei aplikatzeko egonkortasunari buruzko lanak existitzen ziren arren (*Lyapunov*). Izan ere, azterketak kontrolari baino gehiago, mekanika edo elektrizitatera zuzenduak zeuden.

1932an, *Nyquist*-ek *Regeneration Theory* plazaratu zuen, non egonkortasunari buruzko azterketak egiten zituen berrelikadurarekin, begizta irekiko sistemaren portaeraren ondoren sarreran uhin sinusoidalak ezartzean.

1934an *Hazen*-ek *Theory of Servomechanism* aurkezten du, non serbomekanismo terminoa eta sarrera aldakorrei jarraitzen dieten sistemen diseinua, sartzen dituelarik automatikaren munduan.

Bigarren Mundu Gerran asko garatu zen automatika misilen kontrolean.
1940an *Erroen Kokaerako Metodoa* garatu zen, berrelikadurazko sistema baten egonkortasuna aztertzeko.

1950ean, *Kontrol Egokikorra* edo *Aldakorra* (*Adaptive Control*)-ren lehen garapenak hasten dira.

1970ko hamarkadan *Kontrol digitala* erabiltzen hasten da, µP-en (mikroprozesadoreen) abantailak aprobetxatuz.

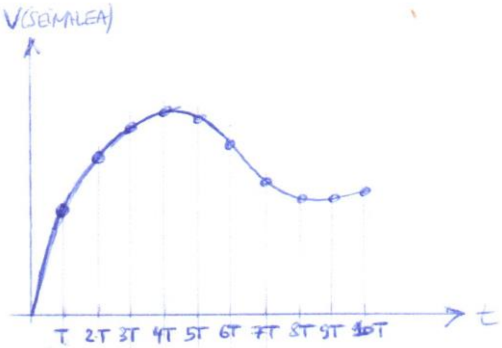
Automatika bi teoria edo atal nagusitan zatizen da:

a) *Kontrolaren Teoria Klasikoa*, 1960ko hamarkadaraino erabiltzen da
   - sistemen kanpo-adierazpena erabiltzen du→sarrerak eta irteerak erlazionatuz (Transferentzia Funtzioa)
   - batez ere Laplaceren Transformatua erabiltzen da oinarri bezala

b) *Kontrolaren Teoria Modernoa*, 1960ko hamarkadatik aurrera erabiltzen da
   - sistemen barne-adierazpena erabiltzen du→egoera-aldagaiak erabiliz
   - Matrizeen Algebra erabiltzen du oinarri bezala (tresna matematikoa)
   - Denbora-analisian oinarriturik, frekuentzia-analisia erabiltzen du

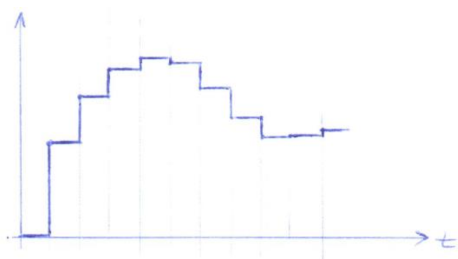
Gaur egun:

- Garapen teknikoak (teorikoak), praktikan gauzatzen direnak baino askoz ere aurreratuagoak daude
- Kontrol Digitala
  - Asko garatu da, informatikaren eta A/D & D/A bihurgailuen garapenari esker
  - Ordenagailua tresna digitala da, diskretua, eta errealitatea, sistema jarraitua (sistema). Horregaitik behar dira bihurgailu mota bi hauek, informazioa batetik bestera pasatzeko.
  - Bi motatan garatu da:
    - ✓ Jarraituko Kontroleko jakinduria Kontrol Digitalera egokituz (lehengoko teorema guztiak aprobetxatuz)
    - ✓ Kontrol Digitalaren teorema berriak gehituz (denbora Jarraituko Kontrolarekiko indepentea delarik)
- Joera modernoak hauexek dira
  - ✓ Kontrol Egokikorra (*Adaptive Control*)-> Kontroladorea bere parametroak aldatzeko gai da sistemaren eboluzioa edo/eta parametroak aldatzen diren heinean
  - ✓ Kontrol Sendoa (*Robust Control*)-> Kontroladorea, baldintza multzo zabal baten barruan funtzionatzeko diseinatzen da



T: laginketa denboraldia
(Ts: sample time)

1-10 irudia. A/D bihurgailua



1-11 irudia. D/A bihurgailua

1.3 SISTEMEN SAILKAPENA

Kontrol bat egineran, lehenetarik egin behar den gauza bat sistema modelizatzea edo eredukatzea da. Horretarako, sistema behar den besteko ondo adierazten duten eredu matematikoak erabiltzen dira. Erabilienak ekuazio diferentzialak dira, eta jarraitzen den prozesua (pausuak) hauxe da:

Izan ere, eredua lortuz gero, errealitatean dugunarekin ahaztu gintezke. Behar bada, diseinaturiko eta simulazioan probaturiko kontrolatzaileak ez du funtzionatuko modelizazio txar bat egitearen ondorioz.

Azkenean, sistemen sailkapena, beren ekuazio diferentzialen sailkapenean oinarrituta egiten da.

a) Ereduaren motaren arabera
- *Sistema linealak*: ekuazio diferentzial linealekin adireazten dira→soluzioaren araberako polinomioak eta bere deribadak dira.

$$a\frac{d^2g(t)}{dt^2}+b\frac{dg(t)}{dt}+cg(t)=x(t)$$

Aldi berean bi talde haeutan zati daitezke:
- ✓ Denboran zehar koefiziente konstanteak dituztenak; *a, b, c*
- ✓ Denboran zehar koefiziente aldakorrak dituztenak; *a(t), b(t), c(t)*. Hauetariko kasu askotan *Adaptive Control* (Kontrol Egokikorra edo Moldakorra) erabiltzen da.

- *Sistema ez linealak*: ekuazio diferentzial ez linealen bidez adierazten direnak

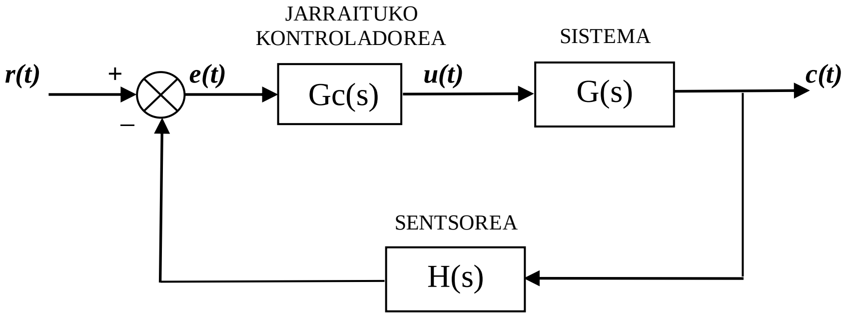
c) Erabilitako seinale motaren arabera
- *Jarraituko Sistemak (denbora jarraituko sistemak)*: seinaleak modu jarraituan aldatzen dira denboran zehar. Kontrol Jarraitua.
- *Sistema Diskretuak (denbora diskretuko sistemak)*(digitalak): seinale diskretizatuak erabiltzen erabiltzen ditu, A/D bihurgailuak emanak. Kontrol Digitalari dagozkio seinale hauek.

d) Erabilitako seinaleen izaeraen arabera
- *Deterministak*: bere adierazpen analitikoaren (formula) bidez ezagutzen direnak
- *Auzazkoak*: ez da seinalea bera ezagutzen, agian bere balio estatisitikoak. Zaratarean kasua, adibidez.

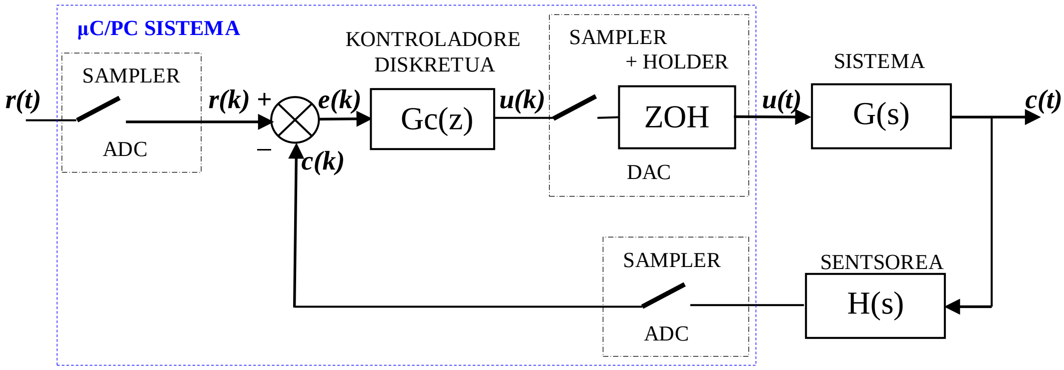
e) Sistemaren aldagai kopuruaren arabera
- *Aldagai bakarrekoak* (sarrera eta irteera bakarrekoak) SISO (Single-Input Single-Output)

- *Aldagai anitzekoak* (sarrera eta irteera bat baino geihagokoak) MIMO (Multiple-Input Multiple-Output)

Erregulazio Automatikoa eta Kontrola den Irakasgai honetan koefiziente konstantedun sistema jarraitu lineal determinista eta aldagai bakarrekoak, aztertuko ditugu.



1-12 irudia. Denbora jarraituko sistema (denbora) jarraituko kontroladorearekin



1-13 irudia. Denbora jarraituko sistema (denbora) diskretuko kontroladorearekin, kontroladore diskretuarekin edo kontroladore digitalarekin

2. SISTEMA LINEALEN EREDU MATEMATIKOAK

2.1 SITEMAK ETA EREDUAK

Erregulazio automatikoko kontzeptuak berriro hartuz, gogora dezagun nola automatikan nahi dena zera dela: mekanismo edo aparailu batek, orokorrean esanda sistema batek, aurrefinkaturiko irteera izan dezala.

Prozedura ia beti da berdina: nahi dugun bezala funtzionatzen ez duen sistema bat dugu, eta aldatu egin behar da, normalean kontroladore baten bidez eta begizta itxian, irteerak sistemari aplikatzen zaion sarrerari jarrai diezaion.

Sistema errealak orokorrean oso konplikatuak direla eta oso zaila dela beraien funtzionamendu zehatza ezagutzea, egiten dena zera da: bere idealizazio sinplifikatua lortu eta kontroladore bat diseinatu horri. Orokorrean, idealizazio hau eredu matematiko batetan gauzatzen da, hau da, adierazpen matematiko batetan. Honi, **ereduztapena** deritzo, hau da, sistema baten funtzionamendua adierazten duten ekuazio diferentzialak lortzea, eta horiekin analitikoki eta baita simulazioetan lan egin ahal izateko sistemaren eredu matematiko bat lortzea.

Baina adierazpen hori ez da izango bakarra. Izatez sistema batentzako infinitu eredu baliokide daude. Sistema bat ***n*** ordenako ekuazio diferentzial baten bidez adieraz dezakegu, edo baita, ***1.*** ordenako *n* ekuazio diferentzialen bidez, edo baita Laplaceren transformatuaren bidez, non ekuazio aljebraikoa bat izango den, etab …

Azpimarratu beharra dago ereduztapena problema kritiko bat dela erregulazio automatikoan, eredu txar bat izateak ondorio edo konklusio okerrak lortzea ekarriko du. Horrela, diseinaturiko kontroladoreak ez digu balioko ezertarako sistema errealari aplikatzean. Automatikan ezaguna den *Sistemen Ereduztapena eta Identifikazioa* atalak problema hau aztertzen du.

Argi dago sistema baten eredu ona izatea oso erabilgarria izaten dela, ordenadorez simulatua izan bait daiteke, non diseinaturiko kontroladoreak ez badu balio, behintzat ez dugu sistema erreala izorratzeko arriskuan jarriko. Izan ere, posible da eskuragarri ez edukitzea sistema erreala, eta diseinu guztia eredua erabiliz eta dagozkien ordenagailuko simulazioen bidez egina izan behar izatea.

Eredu bati eskatu behaz zaizkion oinarrizko **2** ezaugarririk garrantzitsuenak hauexek dira:

- Kontrolatu nahi den sistemaren aldagaiarekin erlazionaturik dauden aspektuak adieraz ditzala. Ez dauka sistemaren atal edo aspektu guztiak adierazi behar.

- Erabilgarria izan dadila, erraz erabiltzeko gauza.

2.2 SISTEMA DINAMIKOA

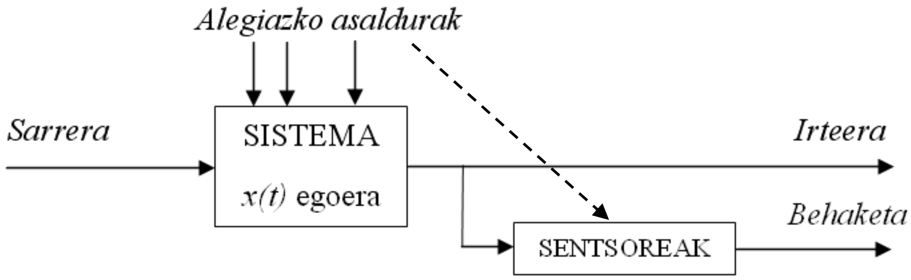
Goazen aplikatzera Kontroleko Teoria definitzen ahaleginduko garen sistemetan.

Sistema bati sarrerak aplika diezaizkiogu edo baita estimulu batzuk jasaten egon daiteke, non bere irteera edo erantzuna alda lezakete eta guk hori zuzenean edo sentsoreen bidez ikus dezakegu.

Sistema bati magnitude edo aldagai hauek esleitzeaz gain, posible dugu ***egorea*** izenez ezagutzen dena ere esleitzea. *Egoera* une jakin batetan sistemaren propietate guztiak adierazten duen aldagaia da.

Horrela, sistemaren egoera une jakin batean ezagutuz, eta ordutik jasan duen sarrera ere ezagutuz, jakin dezakegu orain edukiko duen egoera berria.

Modu berdinean, ezagutuz oraingo egoera eta sarrera, ezagutu dezakegu zein den ematen ari den irteera.



3-1 irudia. Sistema erreal baten adierazpena

Noski, kontrola beharrezkoa egiten duten eragileak sistemaren asaldurak dira, non alegiazkoak diren, eta beharbada errealitatean gertatzen denaren behaketak ez du irteerarekin zerikusirik. Asaldura hauek sisteman bertan ager litezke sarrera bezala, edo/eta baita sentsoreen sarrera gehigarri bezala, neurturiko irteera kutsatuz. Horregaitik sentsore oso onak behar direla ikusten da, edo behintzat ezagutu norarteko onak diren behaketa edo neurketa hori erabili ahal izateko.

Irakasgai honetan ez dugunez ikusiko alegiazko seinaleen tratamendua, suposatuko dugu irteerak eta bere behaketak bat egiten dutela.

Laburbilduz, sistema dinamiko baten ereduak prozesu jakin batetan parte hartzen duten magnitude edo aldagai guztien arteko erlazio guztiak adierazi behar ditu.

Gure kasuan, asaldurak kontuan hartu gabe, eredua honako 2 funtzio hauetaz emanik agertuko litzateke:

$$x(t_1) = S\left(t_1,\, t_0,\, x(t_0),\, u[t_0, t_1]\right)$$
$$y(t_1) = C\left(t_1,\, x(t_1),\, u(t_1)\right)$$

Lehengoa *transizio egoera-ekuazioa* da eta sistemaren egoera ematen digu t_1 une jakin batetan, t_0 uneko egoera eta sarrera $[t_0, t_1]$ denbora tarte guztian ezagutuz.

Bigarrena *irteera-ekuazioa* da eta irteerak t_1 unean duen balioa ematen du, une horretako egoeraren eta kontrol seinalearen balioetan oinarrituz

Begibistakoa da bi ekuazioetatik $x(t_1)$ kenduz, informazio berdina izaten jarraitzen dugula.

$$y(t) = f\left(t_1, t_0, x(t_0), u[t_0, t_1]\right)$$

Honi, *erantzun funtzioa* deritzo.

Sistema dinamikoen oinarrizko propietate bat honakoa hau dugu: edozein hasierako une t_0, edozein hasierako egoera $x(t_0)=x_0$ eta edozein sarrera u(t) emanik, orduan $y(t)$ irteera eta $x(t)$ egoera modu bakarrean daude zehazturik edo determinaturik.

Gainera hau, sistemaren edozein eredu erabilita ere modu independentean gertatzen da. Hau da, sistemaren hainbat adierazpen egon daitezkeela baina sarrera berdinei irteera jakin batzuk dagozkie.

Baina sistema dinamikoek *Kausalitatearen Printzipioa* ere betetzen dute: sistema dinamiko baten egoerak eta irteerak ez dira sekula ez beraien etorkizuneko balioen ezta sarreraren etorkizuneko balioen funtzio izango edo menpe egongo. Ez dira iragartze edo/eta memoriadun sistemak, non sistema kausalak izenez ezagutzen diren. Berez, mekanismo edo sistema erreal guztiak dira kausalak, non beraien eredu matematikoak ere kausalak diren. Aurrerantzean ikusiko den bezala, sistemen kanpo-adierazpenean horrela egiaztatzen da: *sistema baten transferentzia funtzioak ezin dezake zero gehiago izan polo kopurua baino, gehienez zero eta polo kopuruak bat izan litezke, ($n \geq m$).*

2.3 SISTEMA DINAMIKO LINEALAK

Sistema dinamiko bat lineala da bere erantzun funtzioa lineala bada bere egoeran eta bere sarreran (kontrol izenez ere ezagutzen den).

$$f(t_0, t_1, a_1 x_1 + a_2 x_2, a_1 u_1 + a_2 u_2) = \\ a_1 f(t_0, t_1, x_1, u_1) + a_2 f(t_0, t_1, x_2, u_2)$$

Sistema dinamiko linealen propietateak

- Erantzunaren deskonposizioa: 0 sarrerarentzako erantzuna eta 0 egoerarentzako erantzuna.

$$f(t, t_0, x_0, u) = f(t, t_0, 0, u) + f(t, t_0, x_0, 0)$$

- 0 sarrerarentzako erantzunaren linealtasuna:

$$f(t, t_0, a_1 x_0^{'} + a_2 x_0^{''}, 0) = a_1 f(t, t_0, x_0^{'}, 0) + a_2 f(t, t_0, x_0^{''}, 0)$$

- 0 egoerarentzako erantzunaren linealtasuna:

$$f(t, t_0, 0, a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 f(t, t_0, 0, u_1) + a_2 f(t, t_0, 0, u_2)$$

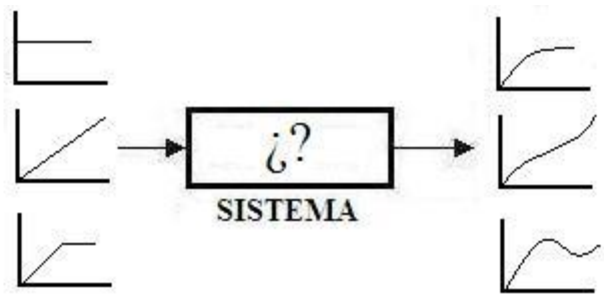
Azken propietate hau *Gainezarpenaren Printzipioa* izenez ezagutzen da.

2.4 SISTEMEN ADIERAZPENA

Gai honetan ikusi denarekin posible da jada sistema dinamiko bat adierazteko formak zeintzuk diren aurrikustea. Modo erraz eta intuitiboa erabiliz adieraziko dira, aurreko adierazpen matematiko beldurgarriak erabili gabe. Batez ere 2 dira

Kanpo-adierazpena

- Kontroleko Teoria Klasikoaren oinarria da.
- Sistema bat kanpo-aldagaien erlazioen bidez adierazten da, hau da, sarrera eta irteera. Sistema bati sarrera desberdinak aplikatzen bazaizkio eta dagozkien irteerak aztertzen badira, orduan bere portaera ezagutu daiteke.



3-2 irudia. Sistema baten sarrerak eta irteerak

- Horrela, sistema barrutik ezagutu gabe, bereak diren hainbat gauza jakin ditzakegu.
- Linealak eta denboran zehar aldaezinak diren sistementzako balio du bakarrik.
- Baliogabeak ez diren hasierako baldintzak ez ditu hain modu errazean kontuan hartzen uzten.
- Laplaceren Transformatuan oinarritzen da eta beste tresna batzuen konparazioan oinarri matematiko “erraza” dauka.

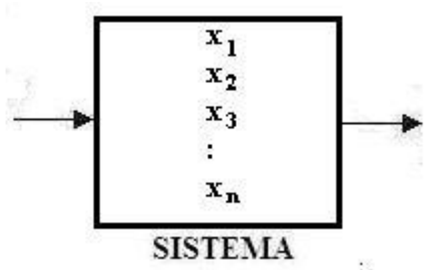
$$Sistema = \frac{L[irteera\ (t)]}{L[sarrera\ (t)]}$$

- 1960. hamarkadatik aurrera barne-adierazpen hasi zen erabiltzen.

Barne-adierazpena

- Kontroleko Teoria Modernoaren oinarria da.
- Ez linealak diren eta baita denboran zehar aldakorrak diren sistementzako ere balio du.
- Matrizeen aljebra erabiltzen du, non asko konplikatu daitekeen

- Sistema, egoera ekuazioen bidezko adierazpenean onarritzen da, lehen ikusi ditugunak, non egoera sistemaren aldagaiak momentu jakin batean duten balio sorta delarik.



3-3 irudia. Sistema bat bere egoera aldagaiekin

- Sistemaren egoera erreala bere *n* egoera aldagaien bidez modu zehatzean definiturik geratzen da, eta ikusten den bezala, bektore bat bezala adieraz daitezke. Lehen esan den bezala, sistema batek bere aurreko egoeratik eta/edo hartzen duen sarrerarengatik eboluzionatzen du.

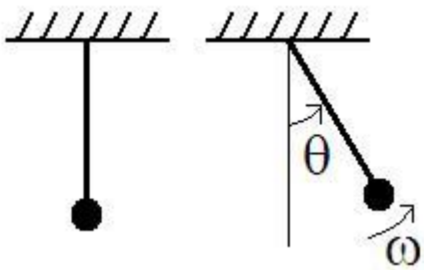
$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)\,, \qquad \textit{Egoera-transizio ekuazioa}$$

- Sistemaren irteera egoera aldagaien menpekoa da, eta batzuetan zuzeneko sarreraren menpekoa ere bai.

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\,, \qquad \textit{Irteera-ekuazioa}$$

A, *B*, *C* eta *D* matrizeek sistema zehatz-mehatz definitzen dute, inongo informaziorik falta gabe. Sistema 1. ordenakoa eta SISO motakoa denean, *A*, *B*, *C* eta *D* matrizeak 1x1 tamainakoak edo eskalarrak dira.

Ikus dezagun adibide erraz bat azken hau argitzeko. Suposa dezagun ume bat zabu batetan. Pendulu ideal bat bezala adierazi daiteke, suposatuz luzaezina eta pisurik gabekoa den soka bat (ideala), eta puntu batean kontzentraturiko masa duena (umearena gehi jesarlekuarena.

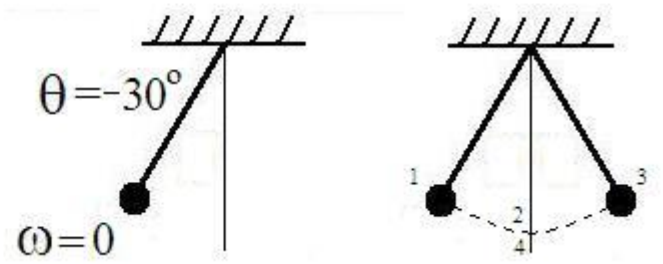


3-4 irudia. Zabua-umea sistema

Denbora guztian, bere egoera erreala θ angeluaren eta ω abiadura angeluarraren bidez zehatz-mehatz definitua geratzen da. Suposatuko da zeinu positiboa eskuineranzkoa dela. Honako egoeren izendapen hau egin daiteke $x_1 = \theta$ eta $x_2 = \omega$. Hauek izango lirateke bere egoera aldagaiak, non bi elementudun zutabe bektore bezala hartzen diren.

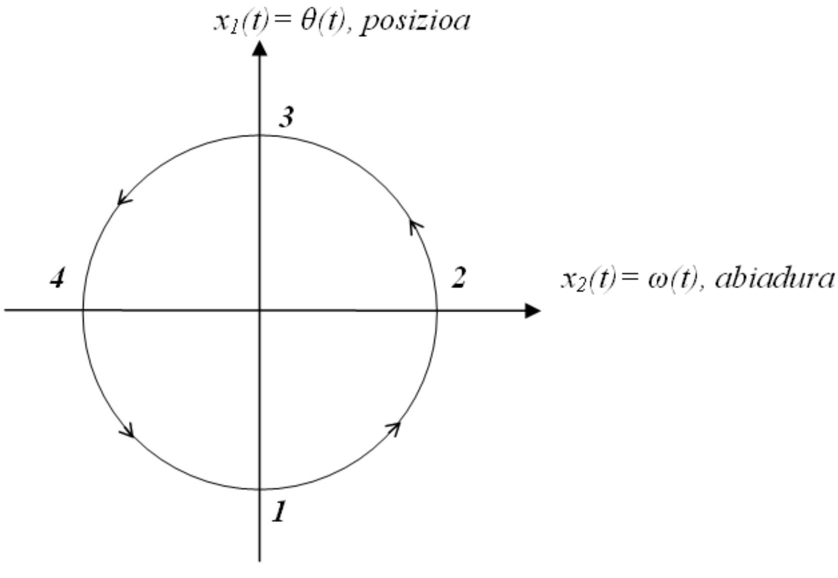
Zabua geldirik $\begin{cases} x_1 = \theta = 0 \\ x_2 = \omega = 0 \end{cases}$ Zabua mugimenduan $\begin{cases} x_1 = \theta = \pi / 6 \ rad \ (30^o) \\ x_2 = \omega = 0{,}3 \ rad / s \end{cases}$

Notazio edo adierazpen honen abantaila bat zera da, sistemaren egoera espazio bektorial batean adierazi daitekeela. Bere eboluzioa denboran zehar espazio bektorial horretako puntu batetik bestekoa izango da. Horrela, zabua hasierako egoera jakin batetan uzten bada, suposatuz marruskadurarik ez dela, hau izango litzateke bere mugimendua :



3-5 irudia. Zabua-umea sistemaren mugimenduak

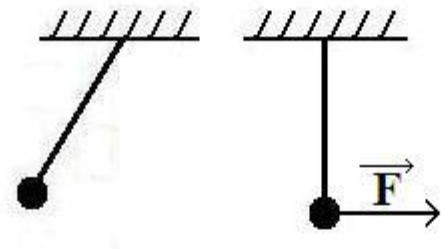
Umea-zabua 1 hasiera-posiziotik abiatzen da. θ angelua eta ω abiadura hasi egiten dira, 2 posiziora iristean, θ zero eta ω gehiengoa dira. Gero θ angelua hasten hasten jarraituko da ω abiadura gutxitzen doan heinean 0 balioa hartu arte, 3 posizioan, non θ angelua gehiengo edo maximoa izango den eta hasierakoa bezalakoa baina alderantzizko zeinuarekin. 1 posiziora itzultzean, ω gutxitu eta negatibo egiten da. 4 posizioan bere gutxiengoa edo minimoa hartzen du. Zabua 1 posiziora itzultzen da hasieran zituen baldintza berdinekin. Grafikoki, **egoera espazioan** horrela geratzen da :



3-6 irudia. Zabua-umea sistemaren egoera-espazioa

Horrela, edozein sistemak eduki dezake behar duen dimentsiotako espazio bektoriala, non bere eboluzioa denboran zehar adierazten duen grafikoki.

Orain konturatzen bagara zergaitik mugitzen den zabua, bi arrazoi hauetaz konturatzen gara: abiapuntua den hasiera-posizio jakin izatea non hor utziz modu naturalean mugimendua sortzen duen, eta/edo sarrera bat aplikatzen delako, hau da, indar bat.



3-7 irudia. Zabua-umea sistemari F(t) indarra sarrera aplikatuz

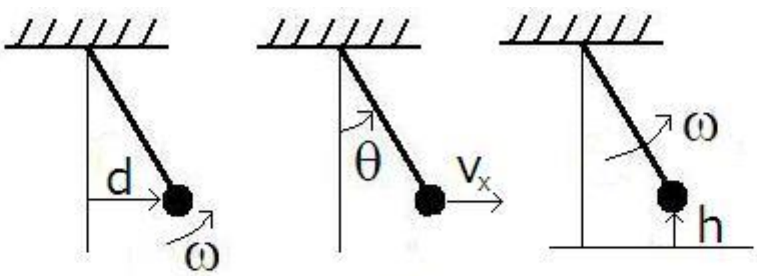
Hau da, egoeraren aldaketa momentu horretako egoeraren *x(t)* eta sarreraren *u(t)* menpe egongo da. Matematikoki horrela geratzen da:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A{\cdot}x(t) + B{\cdot}u(t)$$

Zabuaren kasuan, irteera umeak sentizen duen atsegina edo plazerra izan daiteke. Non handiagoa izango den zabua azkarrago joan edo gorago iristen den (bere egoera), edo zenbat sakatzen diogun (sarreara).

$$y(t) = C{\cdot}x(t) + D{\cdot}u(t)$$

Azkenik azpimarratu behar da aukeratuak izan diren θ eta ω koordenaden ordez, beste aldagai bikote bat aukeratu ahal zitekeela non zabuaren egoera horrenbestez adieraziko zutelarik. Espazio bektorialaren beste oinarri bat osatuko zuketen, lehengoarekin erlazionaturik egongo litzatekeelarik, eta beste *A'*, *B'*, *C'* eta *D'* lau matrizeek espresio desberdinak izango lituzkete. Aljebra irakasgaian ikasten da espazio bektorialen oinarri aldaketak eta horrekin erlazionaturiko gauza guztiak ere.



3-7 irudia. Zabua-umea sistemari beste egoera aldagai batzuk hartuz

Argi dago kanpo-adierazpenak eta barne-adierazpenak sistema berdina adierazten badute, adierazpen batetik bestera pasatu daitekeela konplikazio gehiegirik gabe.

Hurrengo kapituluetan bi adierazpenak ikusiko ditugu eta baita sistemak horietan oinarriturik aztertzeko forma ere. Izan ere, askotan berdin da adierazpen bat edo bestea erabiltzea.

Orain aurkez dezakegu irakasgaiak jarraituko duen egitura. Sistema emanik, beretzako kontrol egoki bat diseinatzea eskatzen badigute, hiru pausu hauek jarraitu behar ditugu:

1. Sistema edo prozesua leialki adierazten duen eredu matematikoa lortu.

2. Sistemaren analisia egin eredutik abiatuz, hau da, bere portaera zein propietateak zehatz-mehatz aztertu, edozeintzu izanik erabilpen baldintzak.

3. Lorturiko informazioarekin, kontroladorea diseinatu non sistemaren egiturari gehituz bere irteera nahi den moduan kontrolatu dezan. (Lehenik ikusi egin beharko litzateke hori posible den ala ez egitea).

3. SISTEMA LINEALEN KANPO- ETA BARNE-ADIERAZPENAK

3.1 SISTEMA LINEALEN KANPO-ADIERAZPENA

Adierazi dugu lehen, kanpo-adierazpenean irteerek beren sarrerekin erlazionatzen direla. Horrela, sistema bat 3 eratara adieraz daiteke:

- ekuazio diferentzialen bidez
- transferentzia funtzio bidez
- inpultsu funtzio bidez

Gainera, sistemak grafikoki adierazteko 2 modu ikusiko ditugu.

Ekuazio diferentzialak

Sistema bat, *n* ordenako ekuazio diferentzial baten bidez adieraz daiteke. Denboran zehar koefiziente konstantedun eta linealak diren sistemetaz hitz egiten ari gara.

$n \geq m$ (sistema kausala)

$$a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t)$$

non *r(t)* sarrera eta *c(t)* irteera diren

Ekuazio honek sistema adierazten du. *r(t)* sarrera jakin batentzako, ekuazioan ordezkatu eta gero ekuazioa ebazten da, *c(t)* edo irteera, lortzeko.

Ekuazio diferentziala a_i eta b_j koefiziente konstanteak definitzen dute, beraz **a_i eta b_j-k sistemaren funtzionamenduari buruzko informazio guztia dute**.

Sistema adierazteko modu hau, ez da oso erosoa, eta horregaitik beste modu hau erabiltzen da.

Transferentzia funtzioa

Sistemak adierazteko askoz ere erabilgarriago eta ahaltsuagoa den modua da hau. Suposatuz HB (hastapen-baldintzak) baliogabeak direla, aurki dezagun lehengo ekuazioaren Laplace-ren transformatua. Horrela geratzen da:

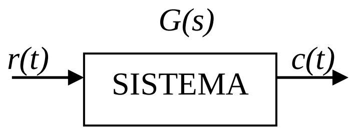
$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n) C(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m) R(s)$$

Sistema baten transferentzia funtzioa, *G(s)*, bere irteeraren Laplace-ren tranformatua eta sarreraren Laplace-ren tranformatuaren arteko zatidurarekin definitzen da.

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{(b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m)}{(a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n)}$$

s aldagai konplexuan definituriko bi polinomioen arteko zatidura da. Aurrerago ikusiko dugu, transformazio simple honek dakartzan inplikazio guztiak.

Hau egina dugunez jada,



esan dezakegu *G(s)=C(s)/R(s)*
eta gainera, egin ditzakegu jada honako aipamen hauek:
* *s*-ren *G*-k (transferentzia funtzioak), ***G(s)*-k, a_i eta b_j guztiak barneratzen dituenez, sistemaren informazio guztia ere barneratzen du**. Ez da informaziorik galtzen eginiko aldaketarekin (Laplace-ren transformatua aplikatzean Ekuazio diferentzialari).
* lor daiteke ekuazio diferentziala transferentzia funtziotik abiaturik.
    -zenbakitzailea *r(t)*-kin biderkatuz
    -izendatzailea *c(t)*-kin biderkatuz
    -$s^kX(s)$, $d^kx(t)/dt^k$-taz ordezkatuz
* horrela erraza da sistema baten erantzuna lortzea
    - sarreraren *Laplace*-ren transformatua aurkitzen da: $r(t) \rightarrow R(s)$
    - transferentzia funtzioarekin biderkatzen da, *C(s)=G(s)*R(s)*
    - *C(s)*-ren Laplace-ren alderantzizko trasformatua aurkitzen dugu

$c(t)=\pounds^{-1}[C(s)]=\pounds^{-1}[G(s)R(s)]$

* orokorrean, sistema honen ebazpena ekuazio diferentzial batena baino errazagoa da.

Tranferentzia funtzioari adituz beriro, modu honetan ere jar dezakegu:

$$G(s)=K\frac{(s-z1)(s-z2)(s-z3)\ldots(s-zm)}{(s-p1)(s-p2)(s-p3)\ldots(s-pn)}$$, non, *m* zero eta *n* polo dituen

Kasu hauetan, egon litezke sinplifikazioak ere: zenbakitzaileko eta izandatzaileko faktoreak berdinak direnean, kantzelazioak egiten dira, sistema sinpleago (ordena txikiagokoa) geratuz. Hori egin ahal izateko, derrigorrezkoa da poloa eta zeroa alde erreal negatibodunak izatea (aurrerantzean ikusiko den bezala, sistema egonkorra izatea).

$$G(s)=5\frac{(s+1)\cancel{(s+2)}}{(s+3)\cancel{(s+2)}(s+8)}=5\frac{(s+1)}{(s+3)(s+8)}$$, non $p_2 = z_2 = -2$

Kausalak (errealak) diren sistemetan, $n \geq m$ baldintza betetzen da beti: poloen kopurua beti da zeroena baino handiagoa edo berdina. Aurrerago ikusiko dugunez, poloen kokapenak *s* <u>plano konplexuan</u>, oso garrantzia handia du.

Inpultsu bidezko adierazpena

Bada sistemaren funtzionamendua adierazteko hirugarren modu bat ere. Bere lorpena nahiko konplikatua da, baina ez bere erabilera, oso erraza baita.

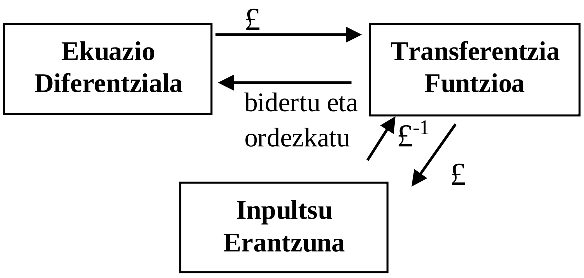
Badakaigu $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$ dela, eta hortik $C(s)=G(s)R(s)$

$r(t)=\Delta_{DIRAC}$ erabiltzen badugu, orduan *R(s)=1* da, eta hortik $C(s)=G(s)\cdot R(s)=G(s)$, eta *c(t)=g(t)*.

Horrela, *c(t)* neurtzen bada, *G(s)* lor daiteke. Hau da, inpultsu sarrera bat ezartzen badiogu sistema bati eta bere irteera *c(t)* irakurri, sistema horren transferentzia funtzioa irteera horren Laplace-ren transformatua da:

G(s)=L[c(t)]

Ikusiriko hiru adierazpen moduak, elkarrekin erlazionaturik daude:



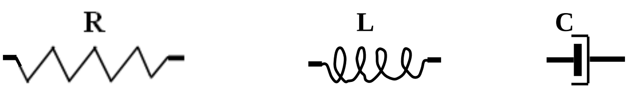
Ohiko sistema fisikoen ereduak

Sistema fisiko jakin baten eredua dinamikoa lortzeko bere portaera adierazten duten ekuazio diferentzialak ezagutu behar dira. Irakasgai honetan ezin dira existitzen diren fenomeno fisiko guztiak aztertu, beraz, ohikoenak direnak aztertuko dira modu erraz batean.

Sistemaren ekuazio diferentzialetik bere transferentzia funtzioa lor daiteke, Laplaceren transformatua aplikatuz ekuazioa horri, eta ondoren irteera eta sarreraren espresioen zatidura eginez.

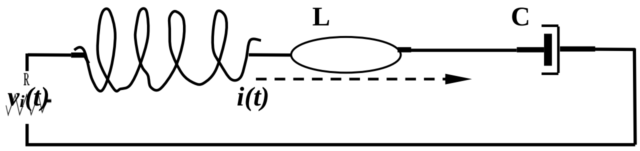
Sistema elektrikoa

Sistema elektrikoetan hiru elementu nagusi agertzen zaizkigu: erresistentzia (R), induktantzia (L) eta kondentsadorea (C)



$v_R(t)=R\,i(t)$ $v_L(t)=L\,\dfrac{di(t)}{dt}$ $v_C(t)=\dfrac{1}{C}\int i(t)\,dt$

Horrela hirurak jarraian dauden zirkuitu baten ekuazioa

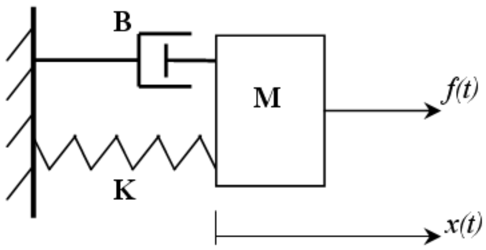


honako hau izango litzateke $v_i(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$

eta hortik atera daiteke zirkuituaren transferentzia funtzioa, non $v_i(t)$ sarrera eta $i(t)$ irteera, diren.

Translazioko sistema mekanikoa

Newton-en legea jarraitzen dute: indar guztien batuketak masa bider azelerazioaren balioa eman behar du, edo beste modu batera esanda, egiten den $f(t)$ indarrak (sarrera), masa bider azelerazioa (inertzia), abiaduraren marruskadura eta $x(t)$ desplazamenduaren erresistentzia (muellearena) gainditu behar ditu. Suposatzen da irteera $x(t)$ desplazamendu lineala dela:



$$f(t) = f_M(t) + f_B(t) + f_K(t)$$

Horrela, sistema honetan parte hartzen duten elementuek duten indarraren ekuazio diferentzialak honako hauek dira,

$$f_M(t) = M \cdot a(t) = M \cdot \frac{dv(t)}{dt} = M \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad f_B(t) = B \cdot v(t) = B \cdot \frac{dx(t)}{dt}, \quad f_K(t) = K \cdot x(t)$$

Azkenik, sistema osoaren ekuazio diferentziala planteatzen da (lehen esaten zen bezala):

$$f(t) = f_M(t) + f_B(t) + f_K(t) = M \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \cdot \frac{dx(t)}{dt} + K \cdot x(t)$$

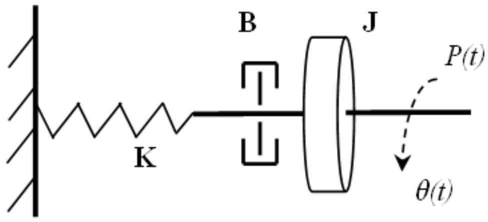
Eta orain bere transferentzia funtzioa aurkitzen da, kontuan izanik sarrera $f(t)$ indarra eta irteera $x(t)$ desplazamendua direla,

hiru puntu hauek betetzen baititu:

- *s*-n diren bi polinomioen zatidura dela
- sistemaren informazio guztia duela *(M, B, K)*
- izendatzailearen ordena zenbakitzailearenaren berdina edo handiagoa dela

Errotazioko sistema mekanikoa

Translazioko sistema mekanikoaren antzekoa dugu sistema hau, non lehengo *M* masa *J* inertzia momentuak, lehen kasuko *B* oraingo *B*-k, lehengo *K* oraingo *K*-k, *f(t)* indarrak *p(t)* errotazio indar edo indar- edo errotazio-momentu eragileek eta *x(t)* desplazamendu lineala *θ(t)* errotazio-desplazamenduak, ordezkatzen duten.



$$p(t) = p_J(t) + p_B(t) + p_K(t)$$

Horrela partaide bakoitzaren ekuazio diferentzialak horrela geratzen dira,

$$p_J(t) = J\ \alpha(t) = J\ \frac{d\omega(t)}{dt} = J\ \frac{d^2\theta(t)}{dt^2},\quad p_B(t) = B\ \omega(t) = B\ \frac{d\theta(t)}{dt},\quad p_K(t) = K\ \theta(t)$$

eta sistema osoarena,

$$p(t) = p_J(t) + p_B(t) + p_K(t) = J\ \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\ \frac{d\theta(t)}{dt} + K\ \theta(t)$$

Eta orain bere transferentzia funtzioa aurkitzen da, kontuan izanik sarrera *p(t)* indarra eta irteera *θ(t)* desplazamendua direla,

3.2 ADIERAZPEN GRAFIKOAK

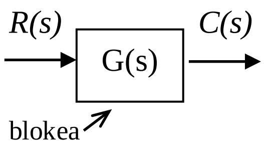
Ikus ditzagun bi kanpo-adierazpen grafiko. Oso intuitiboak eta gainera literaturan oso erabiliak diren bi modu ditugu hauek. *MatLab*-ek *Simulink*-ekin, bere erabilera zuzena egiten du.

1) Blokeen diagrama

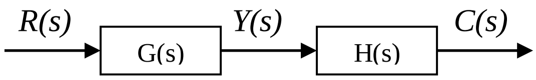
Sistema baten transferentzia funtzioa ezaguna izanik, bere irteera lor daiteke modu honetara:

$C(s) = G(s)R(s)$, gutxienez eremu konplexu edo Laplace-renean.

Grafikoki, horrela adieraziko dugu:

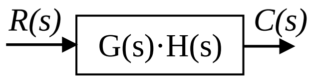


Bloke bakoitzari transferentzia funtzio bat dagokio. Seinaleak, blokeetan sartu edo blokeetatik irtetzen diren geziak dira. *Adibidea*: bi sistema batzen baditugu



$$Y(s) = G(s) \cdot R(s) \quad C(s) = H(s) \cdot Y(s) \rightarrow \quad C(s) = H(s) \cdot G(s) \cdot R(s)$$

Bi blokeak bakar bat bezala aurkez daitezke



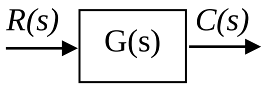
OHARRA: *s*-n dauden bai bloke (*G(s)*, *H(s)*) eta bai seinale guztiak (*C(s)*, *R(s)*, ..) polinomio arrazionalak dira guztiak, beraz <u>beren biderkaketa trukakorra</u> da.

Blokeen diagrametan, hiru elementu edo eragile erabiltzen dira:

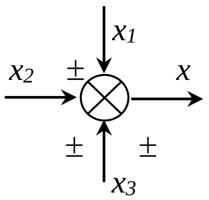
- ***Biderkaketa*** (ikusia dugu)

$$C(s) = G(s) \cdot R(s)$$

Seinale batek bloke bat pasatzean, bere balioarekin bidertzen da.

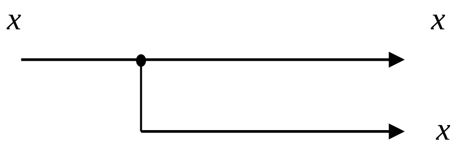


- ***Batuketa***

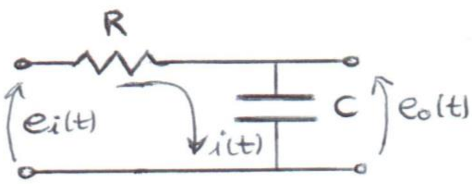


$$x = \pm x_1 \pm x_2 \pm x_3$$

- ***Adarkatze puntua***



Adibidea:

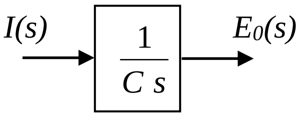


(1) $e_i(t) - e_0(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow E_i(s) - E_0(s) = R \cdot I(s)$

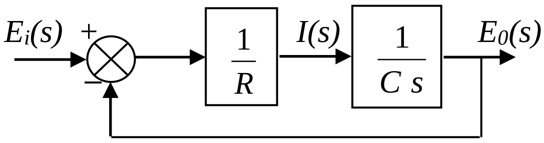
(2) $e_0(t) = \frac{1}{C}\int i(t) \cdot dt \Rightarrow E_0(s) = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \cdot I(s)$

Suposatuz hasierako baldintzak baliogabeak direla:

$$E_0(s) = \frac{1}{C}\frac{1}{s} I(s)$$



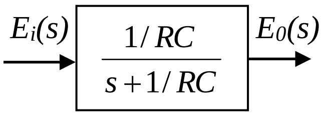
Blokeen diagramak batuz, horrela geratzen da:



Beste era batera ere egin daiteke, ekuazio birekin jokatuz:

2)-tik→ $I(s)=E_0(s)\ C(s)$

1)-era eramanez, →$E_i(s)-E_0(s)=RCs\ E_0(s)$, $E_0(s) = \dfrac{E_i(s)}{1+RCs} = \dfrac{E_i(s)/RC}{s+1/RC}$

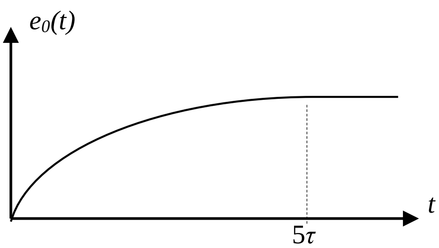


Bloke-diagrama biak adierazten dute zirkuitu berbera, eta horregaitik baliokideak direla esaten da.

Lehenengoan, gehiago ikusten <u>begizta itxiko</u> berrelikadura. $E_0(s)$ eta $E_i(s)$ desberdinak diren bitartean, kondentsadorea kargatzen duen $I(s)$ bat egongo da, eta berdinak badira, $I(s)$ baliogabe edo nulu egingo da.

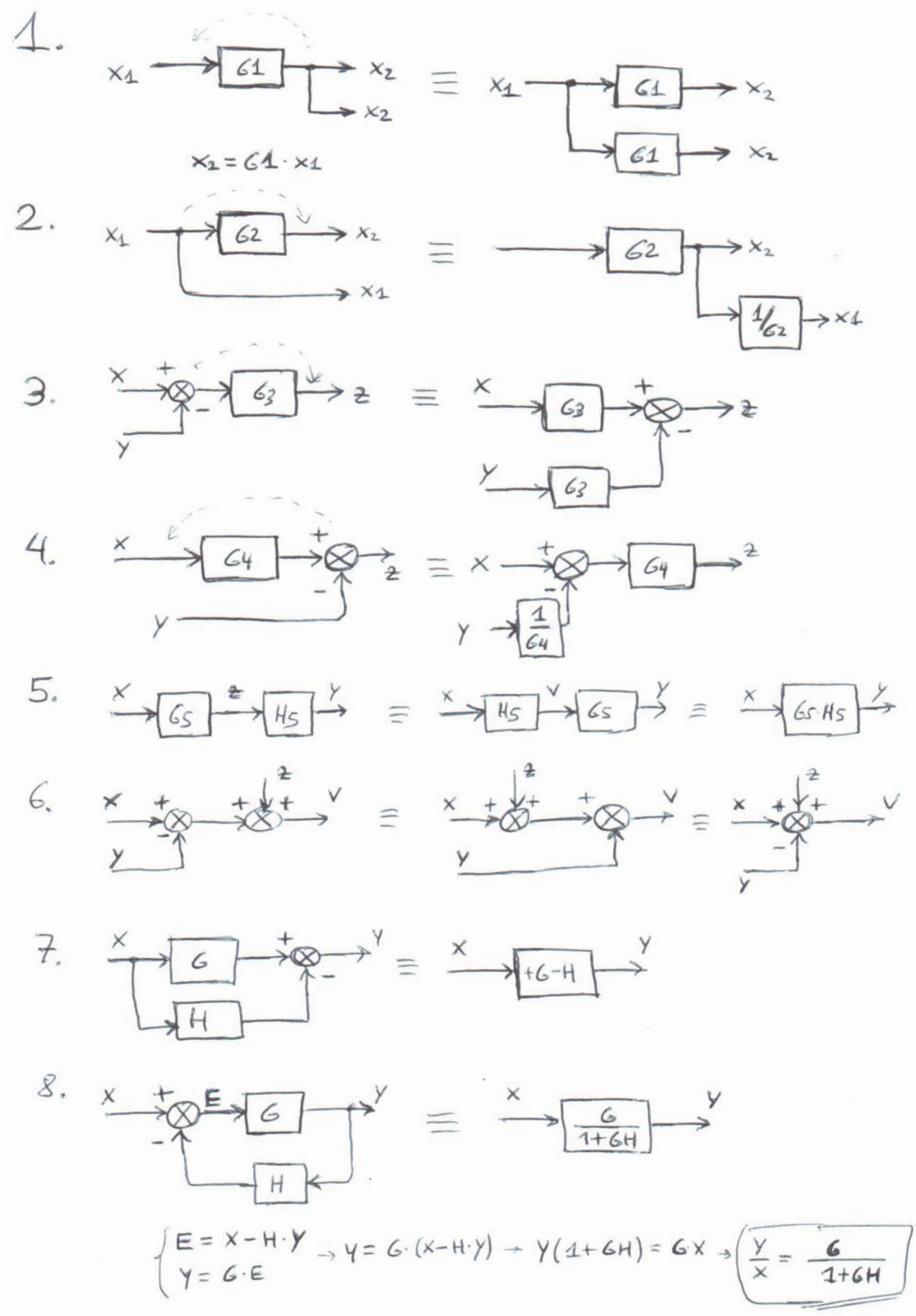
Bigarrengoa erabilgarriagoa da kalkuluak egiterakoan. $E_i=1v$-entzako ebaziz, irteera zera da:

$$E_0(s) = \frac{E_i(s)/RC}{s+1/RC} = \frac{(1/s)/RC}{s+1/RC} = \frac{1/RC}{s(s+1/RC)} = \dots$$



non $\tau=RC$ denbora-konstantea den, segundotan (s=Ω·F)

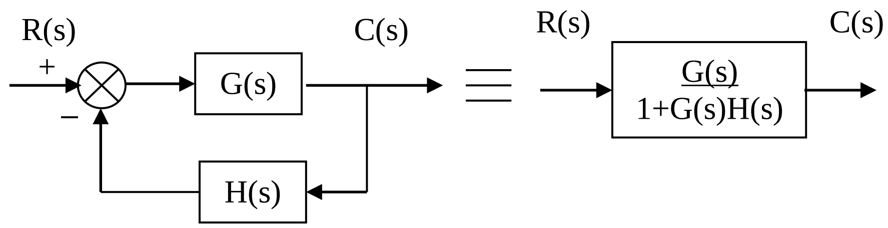
Sistema berberarentzako hainbat bloke-diagrama daude. **Zenbait aldaketa edo murrizpen ohiko daude adierazpen batzuetatik besteetara pasatzeko**. Guztiak oinarritzen direlarik, **oinarrizko hiru eragiketetan** (biderkaketa, batuketa eta adarkatze puntua).



Ohikoa 8.a da

Ikus ditzagun bloke murrizpen adibide batzuk. Ideia, errazagoak diren eskemetara murriztea da: bloke bateko sarrera bakar eta irteera bakarra duten sistemak.

Funtsean, lan egiteko modua, ikusiriko baliokidetasunak erabili eta hauekin mota honetako egituretaraino iristea da:



Adierazpen modu hau erraza, intuitiboa eta oso erabilia da. Baina bada sendoagoa den beste adierazpen mota bat: seinaleen *fluxu-diagramak* edo *fluxugramak*, *Masson*-ek garatua 1953an.

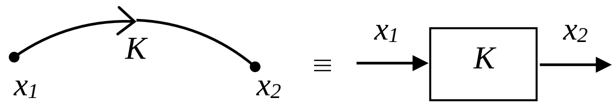
2) Fluxu-diagramak

Bloke-diagramak bezala, transformaturiko eremuan adierazten da, *s*-n, eremu konplexuan.

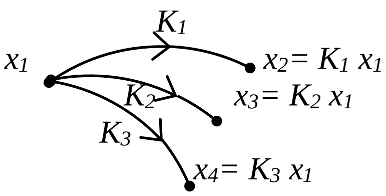
Oinarrizko elementua, sarrera- eta irteera-aldagaien arteko menpekotasuna edo erlazioa adierazten duen zuzendutako segmentu, **adar** edo gezi bat da, blokeen antzera. Adarraren sarrera eta irteera puntuak **nodo** edo **adabegi** izenez deitzen dira. Nodoen arteko erlazioa geziaren alboan idatziriko espresio baten bidez adierazten da.

Adib)

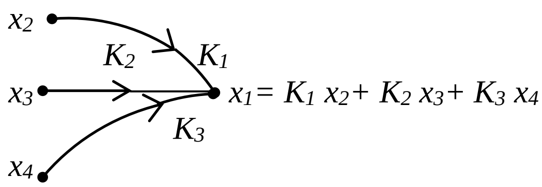
$x_2 = K\, x_1 \equiv$



x_1, adabegi (nodo) gogor edo **sarrera-adabegia** izenez ezagutzen da. Seinale hau, adabegitik (nodotik) irtetzen diren adar guztietatik zehar transmititzen da (adarkatze puntua).

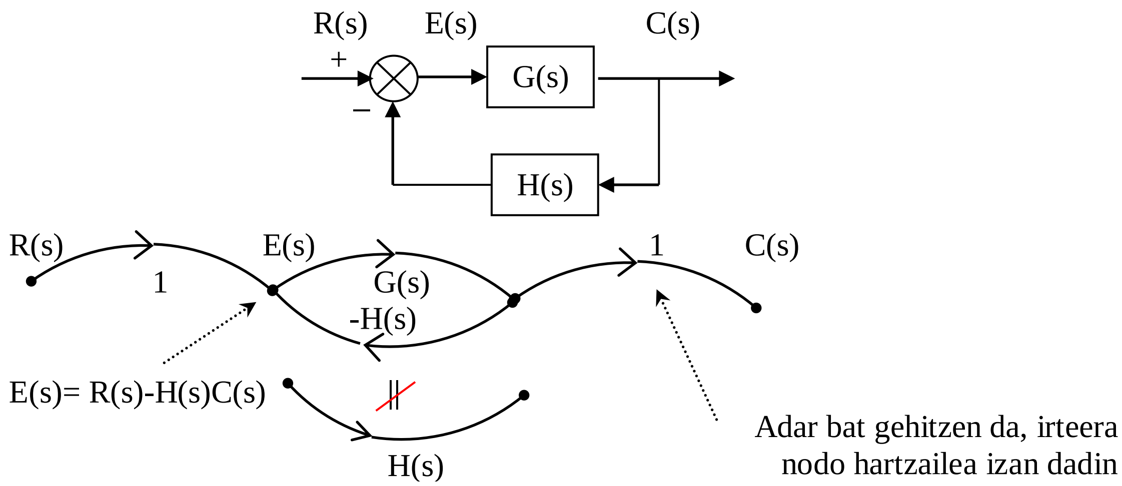


x_2, hustubide-nodo, adabegi hartzailea edo **irteera-adabegia** izenez ezagutzen da. Seinale hau, beste adabegietatik heltzen zaizkion seinaleen batuketa da (batugailua). Ez da lehen bezala, batzeko elementurik existitzen.

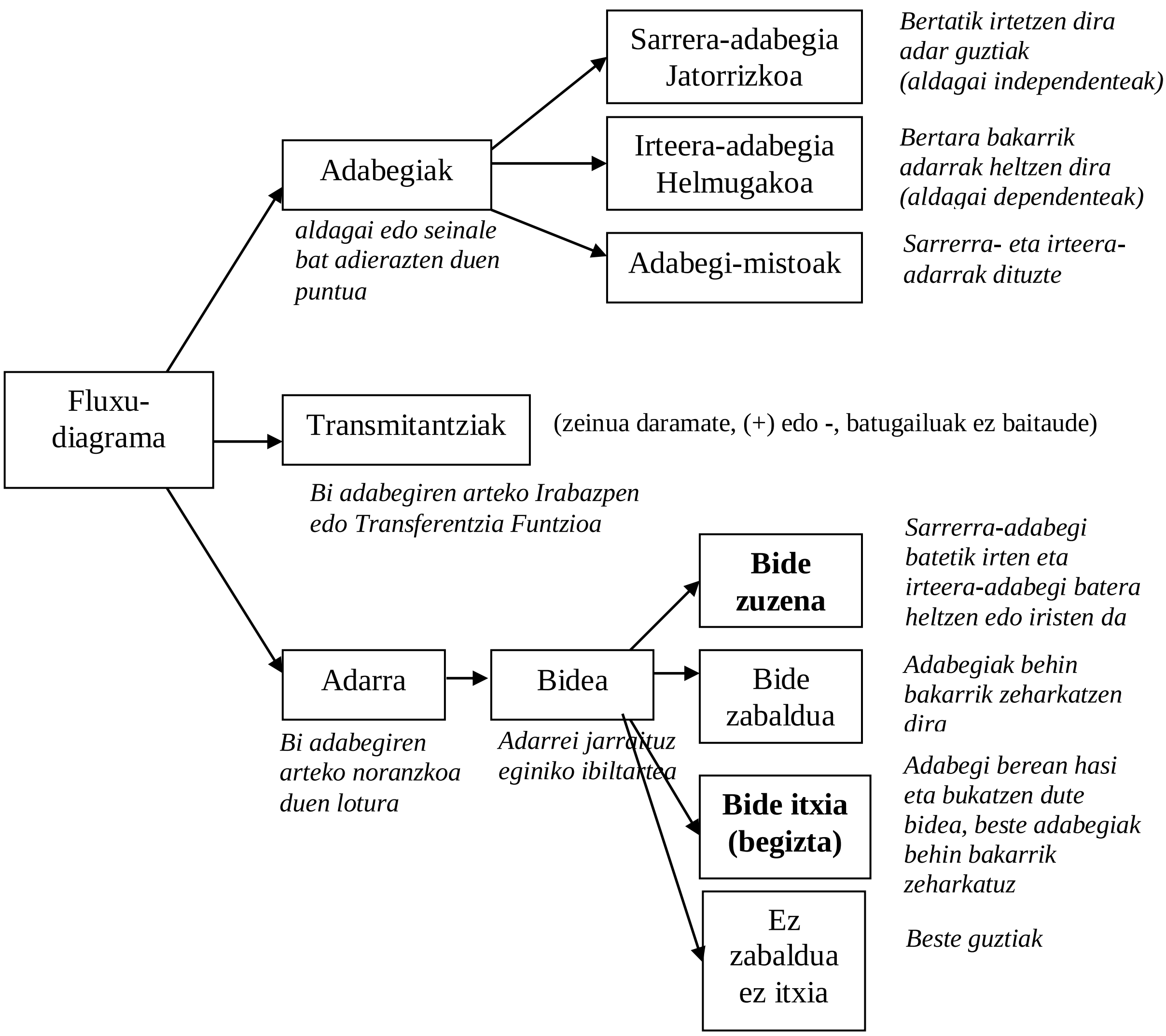


Adabegi mistoak ere egon daitezke: adarrak heltzen zaizkie eta baita adarrak bertatik irtezen ere, aldi berean (blokeen diagrametako batugailuak, baina ez beti/denak).

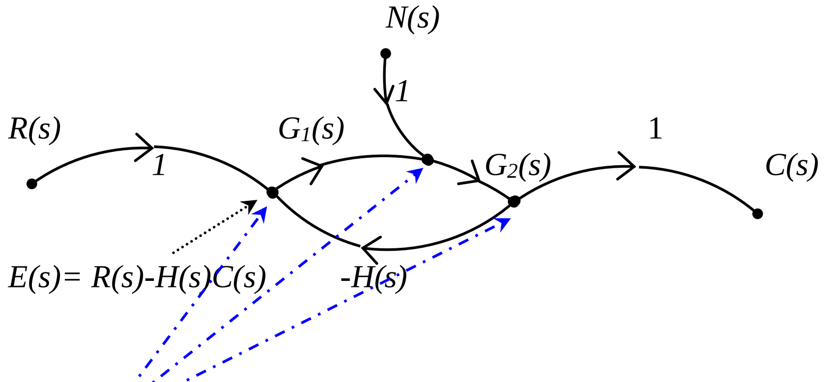
Bideak, adabegi edo nodo bi batzeko adarren batasunei deitzen zaie.
Adibidea)



Eskema orokorra



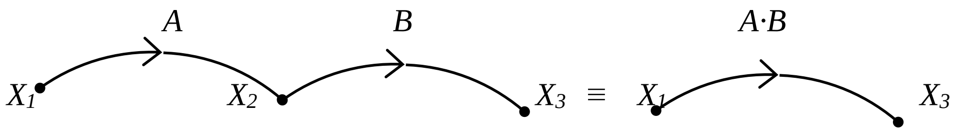
Adibide erakuslea:

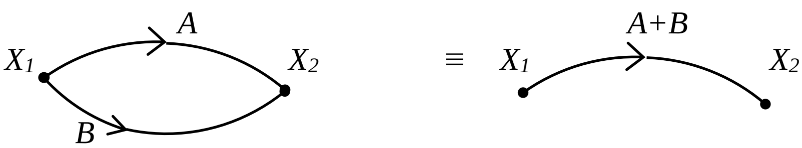


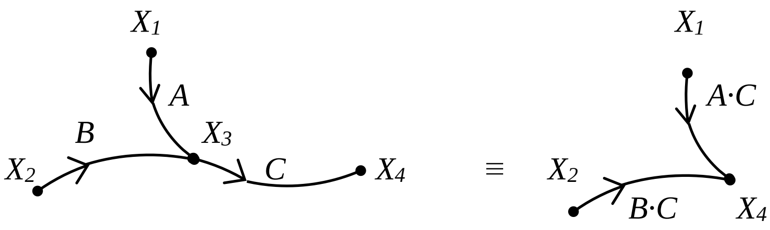
adabegi mistoak
R(s): **sarrera-adabegia**
C(s): **irteera-adabegia**
R(s)→ *C(s)* ibiltartea, G_1G_2 transmisio-faktoredun **bide zuzena** da
$-H(s)G_1G_2$ transmisio-faktoredun **begizta** edo bide itxi bat dago

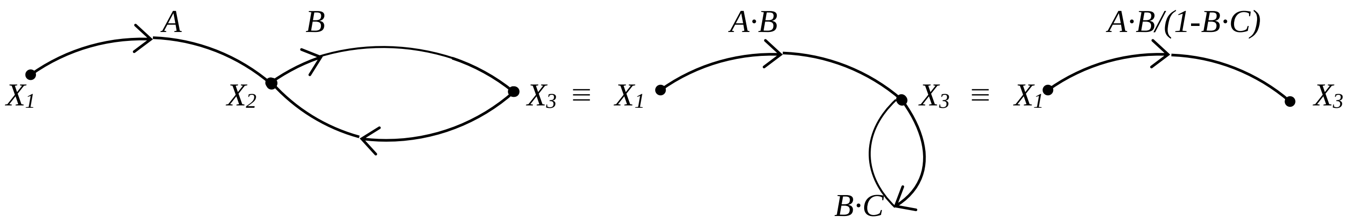
OHARRA: adabegi komunik ez dituzten begiztak, **begizta disjuntuak** direla esaten da.

Bloke-diagrametan baliokidetasunak dauden bezala, hemen ere erabil daitezke murrizketa edo sinplifikazioak egiteko. Horrela, fluxu-diagrama errazagoa izan dadin, adarrak edo/eta adabegiak kendu daitezke.









1953an, *Mason* sistemaren transferentzia funtzio orokorraren eta bere bide zuzenen eta begizten arteko erlazioaz ohartu zen. Horrela, *Mason*-en formula proposatu zuen, non **sarerra bakarreko eta irteera bakarreko sistemen kasuan**, honako forma hartzen duen:

$$TF = G(s) = \left.\frac{C(s)}{R(s)}\right|_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \frac{P_i \Delta_i}{\Delta} \quad i \text{ dagokion bide zuzena delarik}$$

k= bide zuzen kopurua
P_k= k bide zuzenaren irabazpen, transferentzia funtzioa edo transmitantzia
Δ= 1**-**(banakako begizten irabazpenen batuketa) **+** (binaka disjuntuak diren begizten biderkaketa termino posibleen batuketa) **-** (hirunaka disjuntuak diren begizten biderkaketa termino posibleen batuketa) **+** (launaka...)
Δ_k= k bide zuzena ikutzen ez duena Δ-ren balioa (-rekiko disjuntua), edo, bide zuzen hori ikutzen duten begizta itxien (B_n) balioak 0 jarriz lortzen den espresioa.

Aurreko adibidean (1.an):

k=1, bide zuzen bakarra baita
$P_1=G_1G_2G_3$

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}$$

$\Delta = 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 +$ ez dago begizta disjunturik

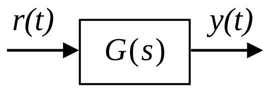
$\Delta_k = 1 -$ ezer ez (bide guztiek ukitzen baitute bide zuzen bakarra)

orduan, horrela geratzen da *Mason*en formula:

$$T = \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot (-1)}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3}$$

Gainezarpenaren printzipioaren aplikazio bat: sarrera konposatuak eta horiei dagozkien irteera konposatuak

Sistema lineal bat dugunean, gainezarpenaren printzipioa aplikatu ahal dezakegu. Automatikan interes handia izaten du printzipio honek, sistema linealak maneiatzen baitira, eta gainera, askotan sarrera ez lineal baina zatika linealak direnak erabiltzen baitira. Kasu horietan, sistemaren irteera zatika lineala den sarrera bakoitzari dagokion irteerataz osatua dago. Demagun *G(s)* sistema lineal bat dugula,



eta *r(t)* sarrera ez lineala, baina zatika lineala dena, aplikatzen diogula,

$$r(t) = r_1(t) + r_2(t) + r_3(t) + \ldots$$

non zati linealak $r_1(t)$, $r_2(t)$… diren.

Orduan, transferentzia funtzioaren definiziotik,

$$Y(s) = G(s) \cdot R(s)$$

sarrera bakoitzari dagokion ireteera lor dezakegu,

$Y_1(s) = G(s) \cdot R_1(s)$, $Y_2(s) = G(s) \cdot R_2(s)$, $Y_3(s) = G(s) \cdot R_3(s)$, …

non irteera guztiak batuz,

$$Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) + \ldots = G(s) \cdot R_1(s) + G(s) \cdot R_2(s) + G(s) \cdot R_3(s) + \ldots$$
$$Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) + \ldots = G(s) \cdot [R_1(s) + R_2(s) + R_3(s) + \ldots]$$

eta $R(s) = R_1(s) + R_2(s) + R_3(s) + \ldots$ denez, eta $Y(s) = G(s) \cdot R(s)$ denez, orduan

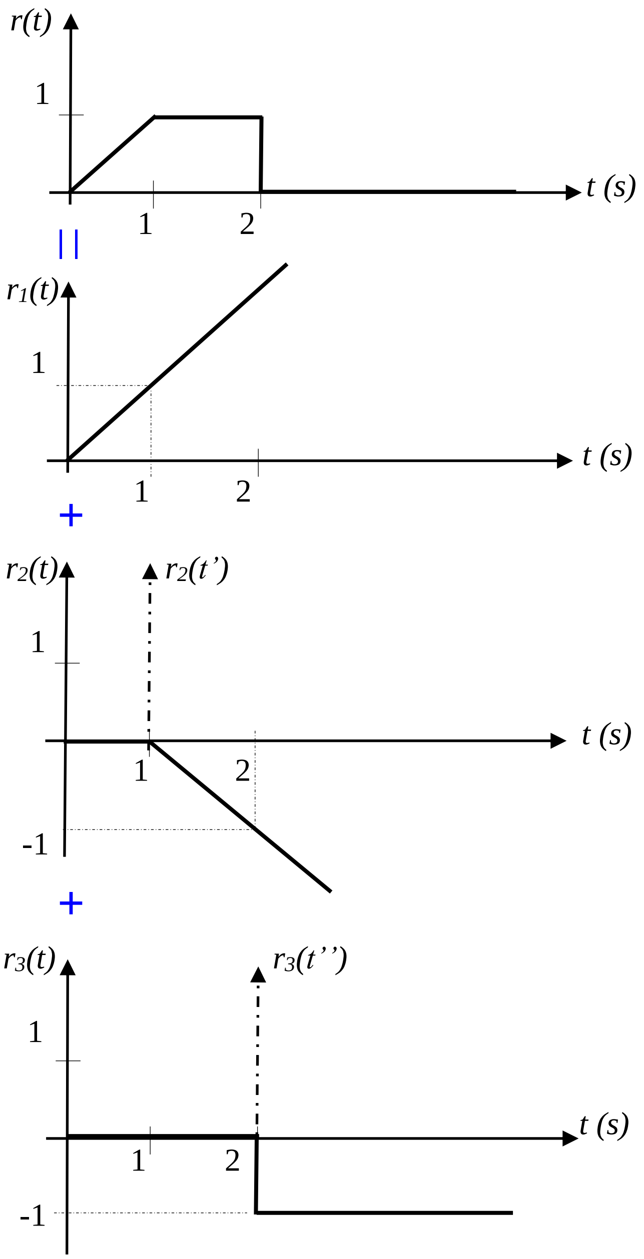
$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) + \ldots$ dela demostratzen da.

Gainera, $r_x(t)$ sarrera partaide bati $y_x(t)$ irteera badagokio, orduan sarrera horren *n.* deribadari dagokiona irteeraren *n.* deribadarena dagokio, hau da:

$$r_x(t) \Rightarrow y_x(t), \text{ orduan } \frac{d^n r_x(t)}{dt^n} \Rightarrow \frac{d^n y_x(t)}{dt^n}$$

Propietate hau oso interesgarria da sarrera partaideen arteko erlazioa deribatuen bidez adieraz daitekeenean, non frakzio partzialen bidezko metodoaren bidez jatorrizkoa izango litzatekeen sarrerari dagokion irteera lortuko geniokeen, eta besteentzako irteera horren espresioaren deribatuen bidez lortuz.

Adibidea: $r(t) = r_1(t) + r_2(t) + r_3(t)$, baina Laplaceren transformatua aplikatu ahal izateko sarrera partaideei, sarrera seinale bakoitza 0 unean hasi behar da balioa hartzen. Ikus daitekeen bezala, $r_2(t)$ eta $r_3(t)$ *t*-ren funtzio uzten badira, 1 s eta 2 s-raino, hurrenez hurren, ez dira hasten balioak hartzen, beraz, *t'* eta *t''*-ren funtzio definitu behar dira.



Horrela, zuzenago da jartzea honako hau,

$$r(t) = r_1(t) + r_2(t') + r_3(t'')$$

sistemaren erantzunean ere agertzen delarik zuzenketa hau,

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t') + y_3(t'')$$

non $t' = t - 1$ eta $t'' = t - 2$ diren.

Beraz, sistemaren irteeraren balioa 4 s-tan eskatzen bada, hau da, $y(t)|_{t=4} = y(4)$, orduan horrela geratuko litzateke irteeraren ekuazioa,

$$y(4) = y_1(4) + y_2(4-1) + y_3(4-2) = y_1(4) + y_2(3) + y_3(2)$$

Bestalde, sarreren artean erlazio bat dago, eta ondorioz, irteeren artean ere bai. Lehen bi sarrerak, $r_1(t)$ eta $r_2(t)$, arrapala motakoak dira, malda 1 delarik lehen kasuan, eta -1, bigarrenean. Hirugarrena, $r_3(t)$, aldiz, maila, baina -1 balioarekin bidertua. Dakigun bezala, maila arrapalaren deribatua da, hau da,

$$r_{mai}(t)=\frac{dr_{arr}(t)}{dt} \text{ eta } r_{mai\_uni}(t)=\frac{dr_{arr\_uni}(t)}{dt} \rightarrow y_{mai}(t)=\frac{dy_{arr}(t)}{dt} \text{ eta } y_{mai\_uni}(t)=\frac{dy_{arr\_uni}(t)}{dt}$$

Beraz, maila unitario nahiz arrapala unitarioa erreferentzia bezala erabiltzen direnez, espresio hauek oso interesgarriak dira,

$$r_{mai}(t)=K\cdot r_{mai\_uni}(t) \text{ eta } r_{arr}(t)=K\cdot r_{arr\_uni}(t) \rightarrow y_{mai}(t)=K\cdot y_{mai\_uni}(t) \text{ eta } y_{arr}(t)=K\cdot y_{arr\_uni}(t)$$

orduan esan dezakegu, $r_{mai}(t)=\dfrac{dr_{arr}(t)}{dt}=K\cdot\dfrac{dr_{arr\_uni}(t)}{dt}$ eta $y_{mai}(t)=\dfrac{dy_{arr}(t)}{dt}=K\cdot\dfrac{dy_{arr\_uni}(t)}{dt}$

non ondorioz, $r_{mai}(t)=K\cdot r_{mai\_uni}(t)$ eta $y_{mai}(t)=K\cdot y_{mai\_uni}(t)$

Suposa dezagun aurreko orrialdeko $r(t)$ sarrera $G(s)=\dfrac{2}{s+1}$ sistemari aplikatzen diogula. Orduan bere irteeraren espresioa lortzeko, frakzio partzialen metodoaren bidez lortuko da, baina behin bakarrik planteatuz (hiruren ordez). Ikus daitekeen bezala, $r_1(t)$ arrapala unitarioa da, $r_2(t')$ arrapala unitarioa -1 balioarengatik bidertua, eta $r_3(t'')$ maila unitarioa -1 balioarengatik bidertua. Frakzio partzialen bidez $y_1(t)$ aurkitzen da,

$$Y_1(s)=G(s)\cdot R_1(s)\rightarrow Y_1(s)=\frac{2}{s+1}\frac{1}{s^2}=\frac{a_1}{s+1}+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}=\frac{(a_1+b_1)s^2+(b_1+b_2)s+b_2}{(s+1)s^2}$$

non ebaztuz $a_1=2$, $b_1=-2$ eta $b_2=2$ geratzen diren.

Beraz, $y_1(t)=a_1\cdot e^{-t}+b_1+b_2\cdot t=2\cdot e^{-t}-2+2\cdot t$

Orain, $r_2(t)=-1\cdot r_1(t)$ denez, orduan $y_2(t)=-1\cdot y_1(t)=-2\cdot e^{-t}+2-2\cdot t$, non $t'=t-1$ denez, orduan $y_2(t')=-2\cdot e^{-t'}+2-2\cdot t'$

Azkenik, $r_3(t)=-1\cdot r_{mai\_uni}(t)=-1\cdot\dfrac{dr_{arr\_uni}(t)}{dt}$ denez, orduan,

$$y_3(t)=-1\cdot y_{mai\_uni}(t)=-1\cdot\frac{dy_{arr\_uni}(t)}{dt}=-1\cdot\left(-2\cdot e^{-t}+2\right)=2\cdot e^{-t}+2, \text{ non } t''=t-2$$

denez, orduan $y_3(t'')=2\cdot e^{-t''}+2$

Horrela, sistemaren irteeraren espresioa honela geratuko litzaiguke,

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t')+y_3(t'')=\left(2\cdot e^{-t}-2+2\cdot t\right)+\left(-2\cdot e^{-t'}+2-2\cdot t'\right)+\left(2\cdot e^{-t''}-2\right)$$

MatLab (t=3s): 2*exp(-3)-2+2*3-2*exp(-2)+2-2*2+2*exp(-1)-2→0.5647

Simulink (t=3s): →0.5647

3.3 BARNE-ADIERAZPENA

Egoera ekuazioak

Sistema baten dinamika, kanpo-adierazpenaren (transferentzia funtzioa) bidez gain, barne-adierazpenaren bidez ere adierazi daiteke. Barne-adierazpeneko tresna egoera-ekuazioak dira, bi matrize-ekuazio *t* denbora-eremuan definituak: (1) egoera-ekuazioa, eta, (2) irteera-ekuazioa,

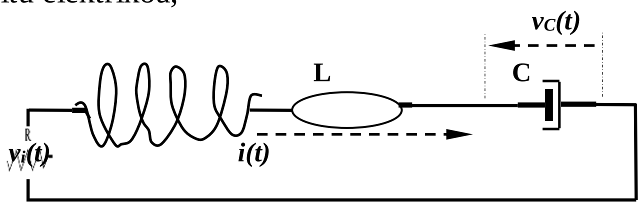
$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A\cdot x(t) + B\cdot u(t) & (1) \\ y(t) = C\cdot x(t) + D\cdot u(t) & (2) \end{cases}$$

non *x(t)* aldagai-egoera den, bektore formakoa eta *n* aldagai barneratzen dituena, *n* sistemaren ordena izanik

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .. \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

u(t) sistemaren sarrera eta *y(t)* sistemaren irteera dira, eta izatez bektoreak izan litezte biak, baina gure kasuan SISO sistemak erabiltzen ditugunez, sarrera bakarra eta irteera bakarra, seinale bakarrak izango dira biak.

Ondoren, adibide praktiko bat erabiliko da, sistema baten dinamika egoera-ekuazioen bidez adierazteko nola jardun behar den ikusteko. Horrela, har dezagun jarraiko *RLC* zirkuitu elektrikoa,



non bere ekuazio diferentzialak hauek diren,

$$\begin{cases} v_i(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\ v_R(t) = R \cdot i(t) \\ v_L(t) = L \cdot \dfrac{d\ i(t)}{dt} \\ v_C(t) = \dfrac{1}{C}\int i(t)\cdot dt \end{cases}$$

Bigarren, hirugarren eta laugarren ekuazioak lehenengoan ordezkatzen badira, eta integrala kentzeko, dena deribatzen bada,

$$\frac{d\ v_i(t)}{dt} = R \cdot \frac{d\ i(t)}{dt} + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t)$$

ikusten da 2. ordenako sistema dela, hau da, $n=2$ dela. Beraz sistema honek 2 egoera-aldagai izango ditu, $x_1(t)$ eta $x_2(t)$. Baina egoera-ekuazioen adierazpenak ***1.*** ordenako ***n*** ekuazio diferentzial behar izaten ditu, eta ez ***n.*** ordenako ekuazio ***1***. Beraz emango den urratsa hau izango da: bigarren eta hirugarren ekuazioak lehenengoan ordezkatu, eta laugarrena deribatu (integrala kentzeko), non honela geratuko diren *1.* ordenako *2* ekuazio diferentzialak,

$$\begin{cases} v_i(t) = R \cdot i(t) + L \dfrac{d\ i(t)}{dt} + v_C(t) \\ \dfrac{d\ v_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{C} \cdot i(t) \end{cases}$$

Orain, egoera aldagaiak aukeratzeko, normalean hasierako baldintzekin bat egiten duten aldagaiak hartzen dira, hau da, deribatzen dauden aldagaiak, $i(t)$ eta $v_C(t)$. Berez har daitezke nahi den bezala, baina gehienetan bien arteko erlazio hau bilatzen da, egon litezkeen sistemaren konstante edo parametroak kontuan hartu gabe (*R,L,C)*:

$$\frac{d\ x_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

Konturatzen bagara, forma hontako espresio hau azken ekuazio-sistemako bigarrenean identifika dezakegu, eta horrela ondorengo esleipena egin,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

Gainera, sarrera eta irteera honela hartzen dira, $u(t)=v_i(t)$ eta $y(t)=v_C(t)$, hurrenez hurren,

$$\begin{cases} u(t) = R \cdot x_2(t) + L \cdot \dot{x}_2(t) + x_1(t) \\ x_2 = C \cdot \dot{x}_1(t) \end{cases}$$

non $\dot{x}_1(t) = \dfrac{d\ x_1(t)}{dt}$, eta $\dot{x}_2(t) = \dfrac{d\ x_2(t)}{dt}$, diren.

Beraz, azken ekuazio-sistema hartuz eta (1) egoera-ekuazio forman jarriz, honela geratzen da,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{C} \cdot x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{u(t)}{L} - \dfrac{x_1(t)}{L} - \dfrac{R}{L} \cdot x_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{C} \cdot x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{1}{L} x_1(t) - \dfrac{R}{L} \cdot x_2(t) + \dfrac{1}{L} u(t) \end{cases}$$

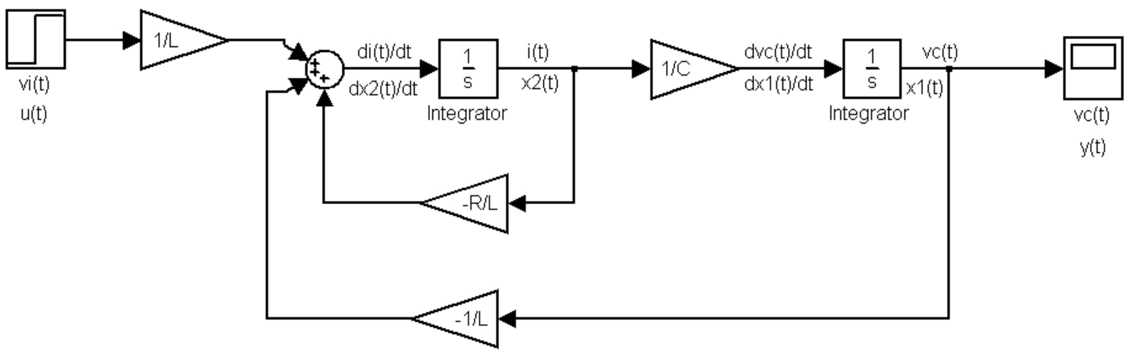
eta irteerako ekuazioa honako hau da, $y(t)=x_1(t)$, beraz (1) eta (2) egoera-ekuazioak honela geratzen dira

$$\begin{cases} \dot{x} = A\cdot x + B\cdot u \\ y = C\cdot x + D\cdot u \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0)\cdot u$$

non $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ eta $D = (0)$, diren.



Kontuan izan irteera $y(t)=i(t)$ hartzen bada, orduan irteera ekuazioa aldatu egingo dela, non kasu honetan $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ den eta beste matrize guztiak lehengo berdinak.

Ikusi dugun egoera-ekuazioen errealizazio edo burutzapen hau, ez da sistema hori adierazten duen bakarra, izatez A, B, C eta D matrize talde asko lor daitezke edozein sistematan. Horien artean, badira kontroleko ingeniaritzan oso ezagunak diren ***Forma Kanoniko Kontrolagarria*** eta ***Forma Kanoniko Ohargarria***, beste batzuen artean. Bi burutzapen hauek lortzeko, prozedura jakin bat jarraitu behar da kasu bakoitzean, transferentzia funtzioa hartuz abiapuntu bezala.

Dena den, edozein sistemaren barne-adierazpeneko egoera-ekuazioen edozein burutzapen abiapuntu izanik, kanpo-adierazpeneko espresioa, hau da, transferentzia funtzioa, lor daiteke ondorengo ekuazioa aplikatuz:

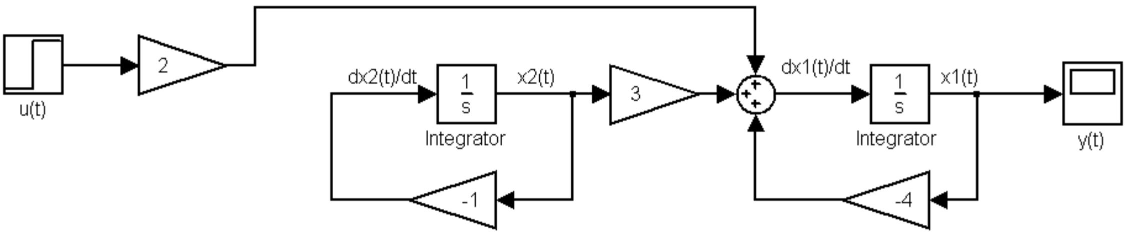
$$G(s) = \frac{C \cdot Adj(sI - A)^T \cdot B}{|sI - A|}$$

Kontrolagarritasuna eta ohargarritasuna

Kontrol ingeniaritzan oso garrantzitsuak dira bi kontzeptu hauek, asko erabiltzen baitira.

Def. Kontrolagarritasuna: sistema bat kontrolagarria dela esaten da, bere **egoera-aldagai guztiak** ere kontrolagarriak badira. Hau da, nahi den balio bat hartzera eraman balitezke, denbora finitu batetan, eta behar den sarrera ezarriz.

Argi dago, aldagai bat sarrerarekiko independentea bada (grafikan, isolatuak badaude elkarrekin), ezin daitekela berarengan eragin. Aldagai horrek, bere hasierako baldintzetatik abiatuta eboluzionatuko du bakarrik. Hau, ondo ikus dezakegu honako fluxu-diagrama honetan:



$x_2(t)$ ez da kontrolagarria, sarrerak ez baitu eraginik berarengan, beraz **sistema ez da kontrolagarria**.

Sistema bat kontrolagarria den ala ez jakiteko, modu analitiko hau erabiltzen da: *KM* kontrolagarritasun matrizearen heinak sistemaren ordenarekin bat egin behar du.

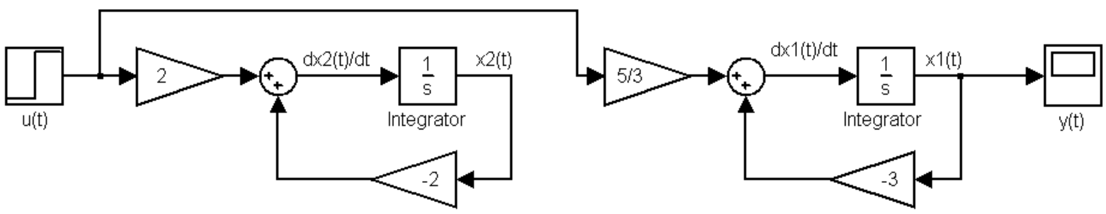
$$KM=[B\,|\,AB\,|\,A^2B\,|\,\dots\,|\,A^{n-1}B]$$

Adibidez:

esan sistema hau kontrolagarria den ala ez $\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$

Def. Ohargarritasuna: sistema bat ohargarria dela esaten da, bere irteera behatuz bere egoera-aldagai guztiak ezagutu ahal badira.

Argi dago, irteera egoera-aldagairen batekiko independentea bada (grafikan, isolatuak badaude elkarrekin), ezingo dela izan ezagutua irteeraren bidez. Ondorengo irudian ikus daitekeen kasu bat,



$x_2(t)$ ez da ohargarria, irteera neurtuz ezin baita jakin $x_2(t)$ aldagaiaren balioa, beraz **sistema ez da ohargarria**.

Analitikoki jakiteko sistema bat ohargarria den ala ez, ohargarritasun matrizea begiratu behar da, *OM*, non sistema ohargarria izan dadin, *OM*-ren heina eta sistemaren ordena balio bera izan behar duten.

$$OM=[C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \ldots \mid (A^T)^{n-1} C^T]$$

RLC sistemaren egoera-ekuazioen adierazpen grafikoan (blokeen diagrama) ikus daitekeen bezala, sistemaren egoera aldagai biak, $x_1(t)$ eta $x_2(t)$, dira kontrolagarriak eta ohargarriak, beraz *RLC* sistema kontrolagarria eta ohargarria da. Noski, *KM* eta *OM* formulen bidez ere ondorio berdina atera behar da.

Ez ohargarriak ezta kontrolagarriak diren egoera-aldagaiek ez dute inolako interesik: existituko ez balira bezala da.

Kanpo-adierazpena, ohargarriak eta kontrolagarriak diren sistemataz arduratu daiteke bakarrik.

4. SISTEMA LINEALEN DENBORA-ANALISIA

4.1 SARRERA

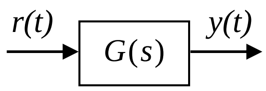
Erabiltzen ari garen aldagai independentea, *t* denbora da. Erabilgarria izaten da ikustea irteeraren eboluzioa denboran zehar: honi denbora-erantzuna deritzo.

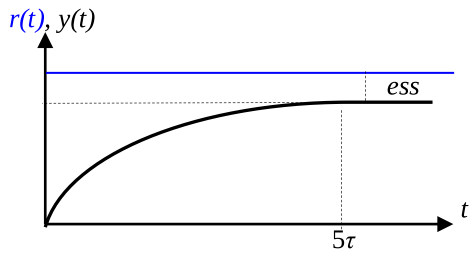
Denbora-erantzuna bi atal hauetan erabiliko dugu:

- ikusteko nola eboluzionatzen duen sistema batek denboran zehar→ **analisia**
- ikusteko zein den nahi den sistema batekiko erantzuna denboran zehar, eta horretarako behar den kontroladorea diseinatu→**sintesia** (kontrola)

Adibidea

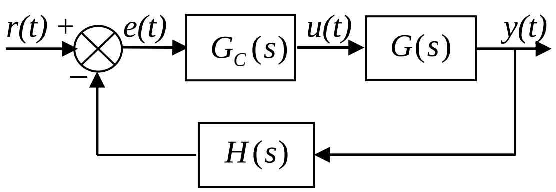
Badakit 1. ordenako horrelako sistema batek, honelako erantzuna ematen duela. Hau sistemaren **analisia** da.

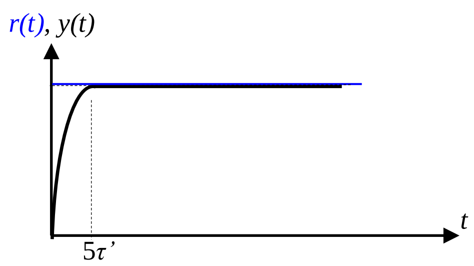




$$G(s) = \frac{K}{1+\tau \cdot s}$$

Beste sistema baten ireera berdina lortu nahi izango banu, orduan kalkulatu egin behar dut zein kontroladore behar dudan, hau da, *Gc(s)*, sistema (*G(s)*) berez ezin bait daiteke aldatu. Hau kontroladorearen **sintesia** da. Irudian ikus daitekeen bezala eta lehengoarekin konparatuz, sarrera berdinaren aurrean, erantzuna azkarragoa eta zehatzagoa (errore gutxiagokoa) da, izan ere, automatikak bilatzen duen helburua betetzen du: irteera ia sarrera bera bezalakoa da (sistemaren irteerak, aplikatzen zaion sarrera oso ondo jarraitzen du). Sistema osoa, lehengo sistema kontroladore eta sentsorearekin deritzo.





$$G(s) = \frac{K}{1+\tau \cdot s}$$

Orokorrean begiratuta, sistema baten irteerak 2 denbora-zati nagusi ditu:

- denboraldi iragankorra, $y_i(t)$
- denboraldi egonkorra, $y_e(t)$

$y(t)= y_i(t)+ y_e(t)$

Denboraldi iragankorraren efektua desagertu egiten da denborarekin: $\lim_{t\to\infty} y_i(t) = 0$. Honek, sistemak sarrerarekiko duen egokitzapena adierazten du, hau da, **sistemaren dinamika**, *G(s)*-n agertzen diren *s* terminoak eraginda (ekuazio diferentzialetako deribatu eta integralak).

Sistema errealetan beti agertzen dira inertziak, marruskadurak, likatasunak (biskositateak), non hauek irteerak sarrera berehala jarraitzen galarazten/eragozten dutelarik. Egoera edo **denboraldi egonkorra** hainbat modutara definitu daiteke, non **sistemaren estatika** adierazten duen, *G(s)*-n agertzen diren *s* terminoak 0 eginda (beti eta beti sistema egonkorra bada). Denboraldi egonkorrak ez du esan nahi irteera konstante mantendu behar denik. Automatikan horrela definitzen da: irteera *t*-k infinitoranzko joera duenean:

$y(t) = y_i(t) + y_e(t)$ denez

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} y_i(t) + \lim_{t\to\infty} y_e(t) = 0 + \lim_{t\to\infty} y_e(t) = y_e(t)$$

Denboraldi egonkorrean ezberdintasunik agertzen bada sarerra eta irteeraren artean, orduan **egoera egonkorreko errorea** (*ess*, *error steady state*) dagoela esaten da, eta honek sistemaren doitasuna adierazten du. Aurreko orrialdeko lehen grafikoan ikus daiteke.

Kontroladore bat diseinatzean, alde iragankorrari buruzko baldintzak ematen dizkigute (gehienengo gaindiketa, haziera-denbora, etab), edo/eta alde egonkorrari buruzkoak (ess). Beharrezkoa izaten da konpromiso bat aurkitzea bi denboraldien arteko baldintzak bete daitezen. Normalean ez da ezagutzen sistemak izango duen sarrera, zehatz mehatz. Horregaitik, sistemak sarrera-eredu batzuen aurrean duen erantzuna aztertzen da. Irteera horietan oinarrituz egiten da kontroladorearen diseinua. Horrela, sistemak aztertzeko sarrera-ereduen bi talde nagusi hartzen dira: Orokorrean begiratuta, sistema baten irteerak 2 denbora-zati nagusi ditu:

- egokiak diren denbora-seinaleak ezarri sistemari (maila, aldapa (malda edo arrapala), azelerazioa (parabola), Dirac-en delta), eta iraganaldiko nahiz egoera egonkorra behatu (denbora analisia).
- maiztasun aldakorra duten sinuak ezarri eta irteeraren denboraldi egonkorra behatuz (maiztasun analisia)

Gai honetan, denbora-analisia aztertuko dugu.

4.2 1. ORDENAKO SISTEMEN DENBORALDI IRAGANKORRA

Lehen ordenako sistema baten transferentzia funtzioa honako motakoa da:

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau\cdot s} = \frac{K/\tau}{(1+\tau\cdot s)/\tau} = \frac{K'}{s+1/\tau} = \frac{K'}{s+a},\ \tau>0 \text{ izanik.}$$

Transferentzia funtzioaren izendatzailea lehen ordenako polinomio bat da, hau da, sistemaren ekuazio diferentziala 1. ordenakoa da. Bere irteera, maila unitarioa aplikatzean:

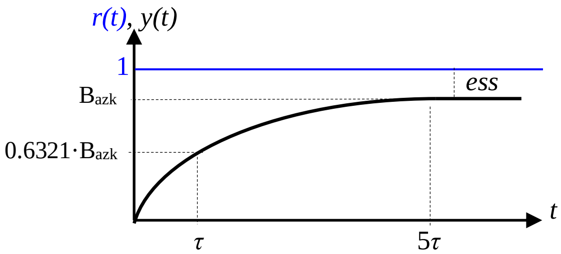
$$Y(s) = G(s)\cdot R(s) = \frac{K'}{s+a}\frac{1}{s} = \frac{a_1}{s+a} + \frac{a_2}{s} = \frac{(a_1+a_2)s + a_2 a}{(s+a)s}$$

$$y(t) = a_1 \cdot e^{-a\,t} + a_2$$

non a_1=-K'/a eta a_2=K'/a direnez, orduan

$$y(t) = -\frac{K'}{a}\cdot e^{-a\,t} + \frac{K'}{a} = \frac{K'}{a}\left(1-e^{-a\,t}\right) = \frac{K/\tau}{1/\tau}\left(1-e^{-1/\tau\,t}\right) = K\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

non τ sistemaren denbora-konstantea den (segundotan). Denbora honek, 1. ordenako sistemari maila bat aplikatzean, bere irteerak azken balioaren (B_{azk}) % 63.21 harrapatzen duen unea adierazten du. Gainera, sistemak azken balioa denbora hau 5 aldiz pasatzean harrapatzen duela suposatzen da.



Irteeraren azken balioa, azken balioaren teoremarekin kalkulatu daiteke,

$$B_{azk} = y_{azk} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} K\left(1-e^{-t/\tau}\right) = K$$

eta denbora-konstantearen definizioa ere demostratu daiteke,

$$y(t)\big|_{t=\tau} = K\left(1-e^{-\tau/\tau}\right) = K\left(1-e^{-1}\right) = 0.6321\cdot K$$

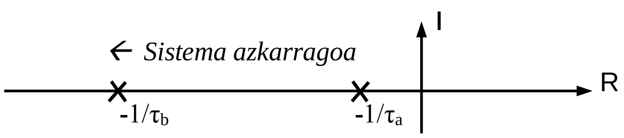
non baita ere konproba dezakegun 5·τ azken balioa harrapatzeko denboratzat hartu daitekeela,

$$y(t)\big|_{t=5\cdot\tau} = K\left(1-e^{-5\cdot\tau/\tau}\right) = K\left(1-e^{-5}\right) = 0.9933\cdot K \approx K$$

Irteeraren jatorriko malda hau da,

$$malda = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.K\left(-e^{-t/\tau}\right)\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right|_{t=0} = \frac{K}{\tau}$$

Bestalde, τ txikia bada, orduan sistema azkarra izango da: zenbat eta τ txikiagoa, sistema are eta azkarragoa. Sistemaren poloa $1+\tau s=0$ → $s=p=-1/\tau$ da, eta sistema azkarra bada, poloa s planoaren jatorritik hurrun kokatzen da: $\tau_a > \tau_b$ → $-1/\tau_a < -1/\tau_b$



4-1 irudia. 1. ordenako sistema baten poloa s planoan

Sistema egonkorra

Sistema bat egonkorra izan dadin, bere **polo guztiak alde erreal negatibodunak** izan behar dira. Nahikoa da horietako polo batek bakarrik alde erreal positiboa izatea, sistema ezegonkorra izateko. Beraz, sistema bat egonkorra izan dadin, bere polo guztiak *s* planoaren ezker erdialdean kokaturik egon behar dute.

Sistema baten egonkortasuna bere **poloek** definitzen dute **bakarrik**, eta ez sarrerako seinaleek ezta bere zeroek ere. Adibidez, har ditzagun bi sistema, G_1 eta G_2

Sistema baten transferentzia funtzioa sinplifikatu daiteke egonkorrak diren polo eta zero berdinen artean (zero-polo kantzelazioak). Poloa ezegonkorra bada, nahiz eta matematikoki kantzelazioa posible izan, fisikoki ezin da egin, beraz Automatikan ere ezin da egin. Polo bat ardatz irudikarian izanez gero, bere bikotea izango du eta hura ere ardatz irudikarian izango baina kontrako zeinudun balioarekin (alde errealik gabeko polo konplexu konjokatuak). Eta orduan sistema kritikoki egonkorra da: ez da, ez egonkorra, ezta ezegonkorra ere, baina praktikan ezegonkortzat hartzen da, oszilakorra baita eta hori denborarekin ezegongor izatera iritsiko delako.

Sistema baten irabazpen estatikoa

Sistema baten K_{est} irabazpen estatikoa lortzeko, ondorengo limitea aplikatzen da,

$$K_{est} = \lim_{s \to 0} G(s)$$

baina horretarako sistema egonkorra izan behar da, bestela ezin da aplikatu.

Adibidez, 1. ordenako sistema hartzen badugu

$G(s) = \frac{K}{1+\tau \cdot s} = \frac{K/\tau}{(1+\tau \cdot s)/\tau} = \frac{K'}{s+1/\tau} = \frac{K'}{s+a}$, non $\tau>0$ den, beraz sistema

egonkorra den, orduan bere irabazpen estatikoa honako hau izango da,

$$K_{est} = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{1+\tau \cdot s} = \frac{K}{1+\tau \cdot 0} = K \text{ edo } \frac{K'}{a}$$

4.3 2. ORDENAKO SISTEMEN DENBORALDI IRAGANKORRA

Bigarren ordenako sistema baten transferentzia funtzioa hauxe da,

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^{\ 2}}$$

non zenbakitzailean agertzen den *K*, sistemaren **irabazpen estatikoa** den. Izendatzailean, berriz, δ sistemaren **moteltze-faktorea**, eta ω_n sistemaren **maiztasun naturala** edo berezko maiztasuna (rad/s) agertzen dira. Moteltze-faktorea beti izango da positiboa edo nulua, hau da, $\delta \geq 0$, eta ω_n , beti positiboa, $\omega_n>0$.

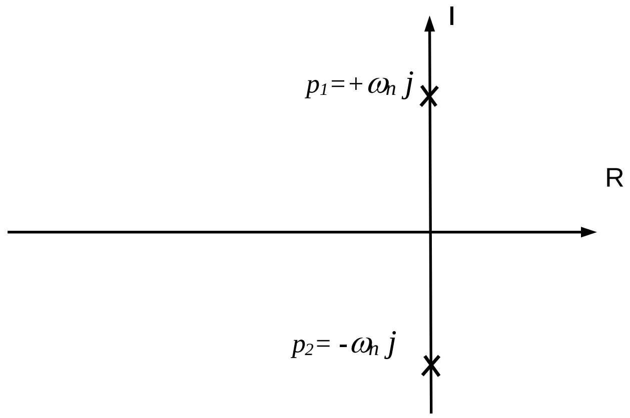
Horrela, definituriko bi parametro horiek erabiltzen dira, ekuazio karakteristikoaren soluzioak, hau da, poloak, forma edo itxura erraza izan dezaten. Ekuazio karakteristikoa $s^2+2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot s+ \omega_n^2=0$ da, eta bere bi soluzioak, bi poloak:

$$s_{1,2} = (-2 \cdot \delta \cdot \omega_n \pm \sqrt{4 \cdot \delta^2 \cdot \omega_n^{\ 2} - 4 \cdot \omega_n}) / 2$$

$$s_{1,2} = -\delta \cdot \omega_n \pm \omega_n \sqrt{1-\delta^2}\, j$$

non bere izaera δ-ren menpe dagoen eta horrek 4 kasu ezberdin dakartzan.

a) $\delta=0$ → $p_{1,2} = 0 \pm \omega_n j$, alde errealik gabeko polo konplexu konjokatuak edo irudikari hutsak.



4-2 irudia. 2. ordenako moteldugabeko sistema baten poloak s planoan

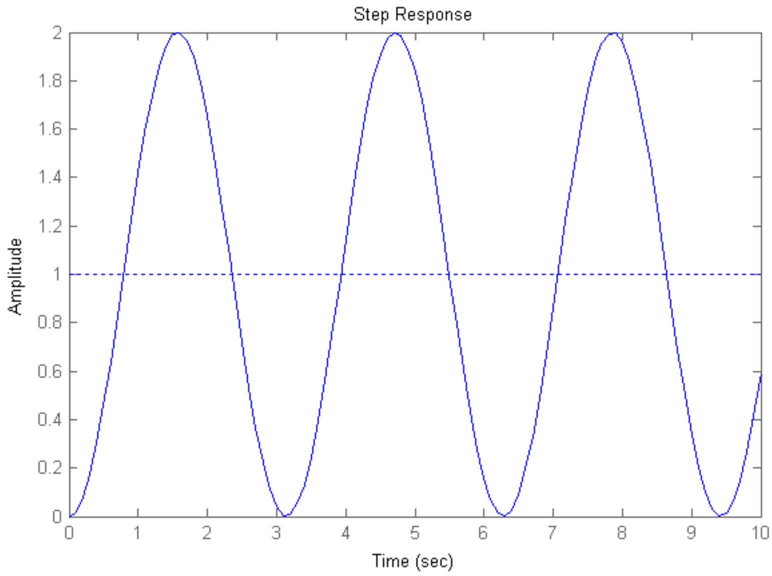
Kasu honetan sistemaren erantzuna oszilakor hutsa da, eta *sistema moteldugabea* edo *kritikoki egonkorra* dela esaten da. Adibidez, hartzen badugu ondorengo sistema,

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2\cdot\delta\cdot 2\cdot s + 4}$$

non K=1 eta ω_n=*2 rad/s* diren, eta orain δ=*0* eginez, honako hau geratzen den,

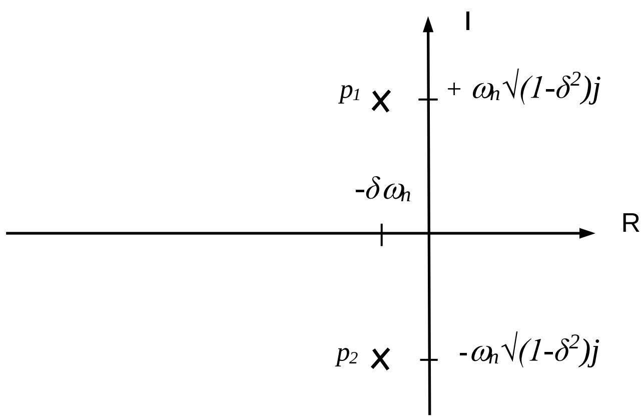
$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 4}$$

Horrela, maila unitarioaren aurrean izango duen erantzuna ondorengo irudian (4-3) agertzen den hori izango da. Ikus daitekeen bezala, sistemaren erantzuna oszilatzen geratzen da, bere oszilazioak ez dira moteltzen, horregaitik *sistema moteldugabea* deritzo, erantzuna ez da egonkortzen. Baina ezegonkortu ere ez da egiten, beraz horregatik deritzo baita *sistema kritikoki egonkorra*.



4-3 irudia. 2. ordenako moteldugabeko sistema baten maila erantzuna

b) *0<*δ*<1*→ $p_{1,2} = -\delta\cdot\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,j$ alde erreal negatibodun polo konplexu konjokatuak.



4-4 irudia. 2. ordenako sistema azpimoteldu baten poloak s planoan

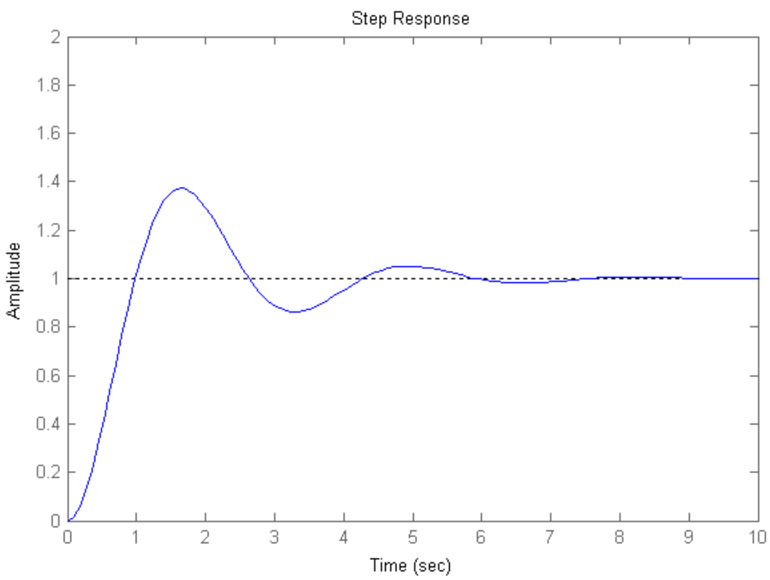
Kasu honetan sistemaren erantzuna oszilakor moteldua da, eta *sistema azpimoteldua* dela esaten da. Adibidez, lehengo sistema hartuz,

$$G(s)=\frac{4}{s^2+2\cdot\delta\cdot 2\cdot s+4}$$

non $K=1$ eta $\omega_n=2\ rad/s$ diren, eta orain $\delta=0.3$ eginez, honako hau geratzen den,

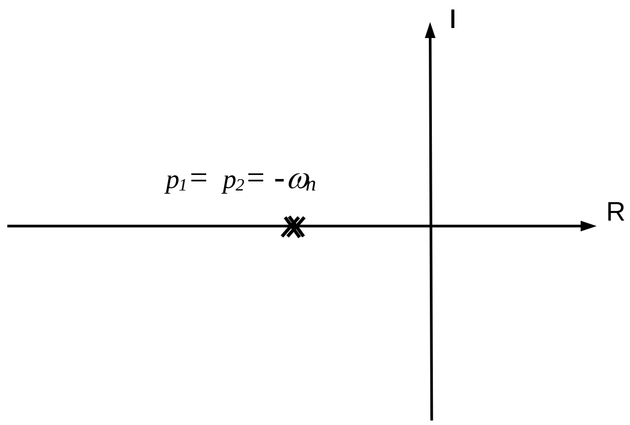
$$G(s)=\frac{4}{s^2+1.2\cdot s+4}$$

Maila unitarioaren aurrean izango duen erantzuna ondorengo irudian (4-5) agertzen den hori izango da. Ikus daitekeen bezala, sistemaren erantzuna hasieran oszilatzen egon arren, motelketa bat dagoenez, bere oszilazioak moteltzen joaten dira agortuak izan arte, horregaitik *sistema azpimoteldua* deritzo. Erantzuna bere azken balioan egonkortzen da eta sistema egonkorra da.



4-5 irudia. 2. ordenako sistema azpimoteldu baten maila erantzuna

c) $\delta=1$ → $p_{1,2}=-\delta\cdot\omega_n=-\omega_n$ polo erreal bikoitza eta negatiboa.



4-6 irudia. 2. ordenako sistema kritikoki moteldu baten poloak s planoan

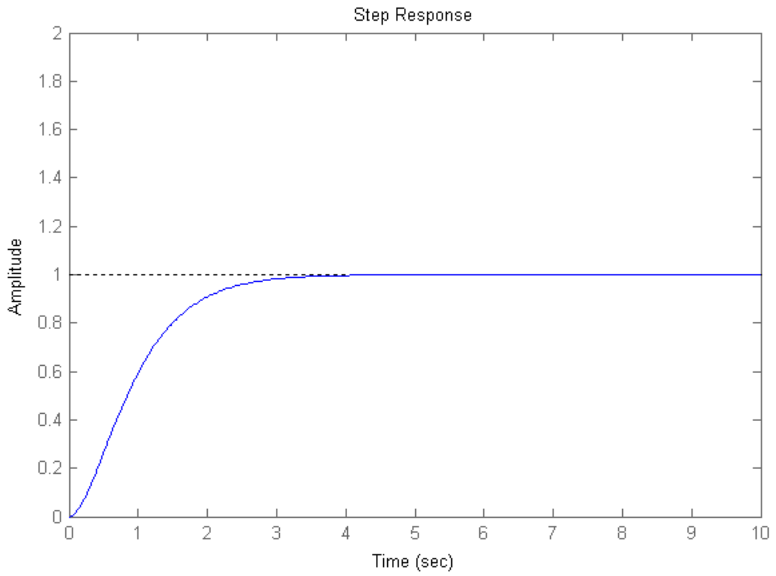
Kasu honetan sistemaren erantzuna kritikoki moteldua da, eta *sistema kritikoki moteldua* dela esaten da. Adibidez, lehengo sistema hartuz,

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2\cdot\delta\cdot 2\cdot s + 4}$$

non $K=1$ eta $\omega_n=2$ *rad/s* diren, eta orain $\delta=1$ eginez, honako hau geratzen den,

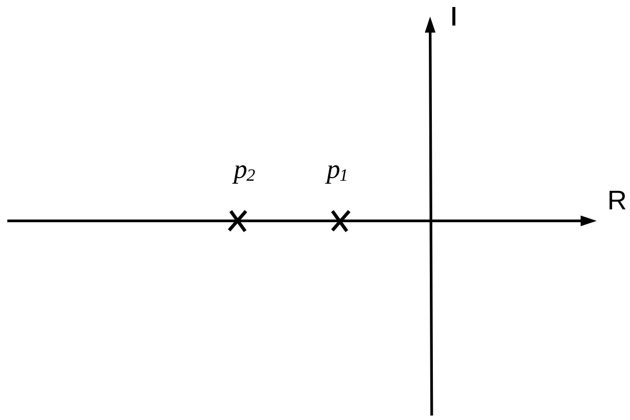
$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 4\cdot s + 4}$$

Maila unitarioaren aurrean izango duen erantzuna ondorengo irudian (5-7) agertzen den hori izango da. Ikus daitekeen bezala, sistemaren erantzunak ez du inongo oszilaziorik baina δ zerbait txikiago jarriz, egongo litzateke, beraz mugan dagoenez, *sistema kritikoki moteldua* deritzo. Erantzuna bere azken balioan egonkortzen da eta sistema egonkorra da, eta lehen ordenako sistemaren erantzunaren antzekoa da, lehen uneetako zatia izan ezik.



4-7 irudia. 2. ordenako sistema kritikoki moteldu baten maila erantzuna

d) $\delta>1$ → $p_{1,2} = -\delta\cdot\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$: polo errealak, ezberdinak eta negatiboak



4-8 irudia. 2. ordenako sistema gainmoteldu baten poloak s planoan

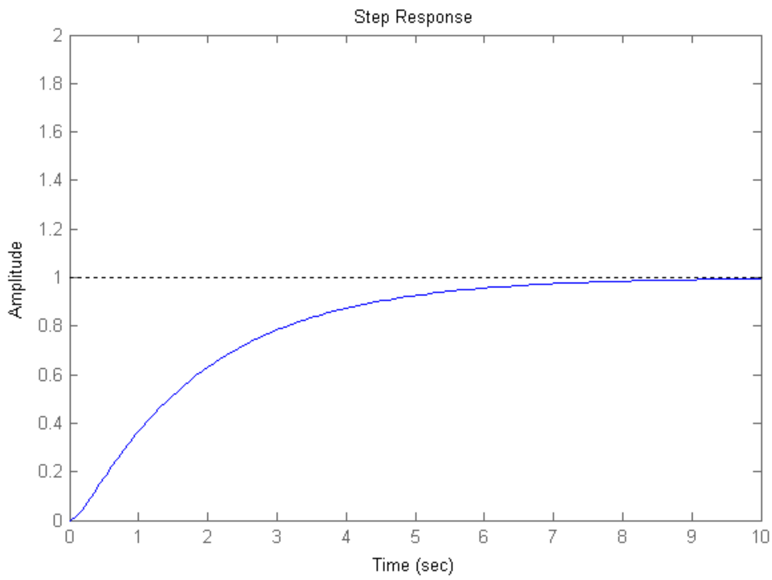
Kasu honetan sistemaren erantzuna gainmoteldua da, eta *sistema gainmoteldua* dela esaten da. Adibidez, lehengo sistema hartuz,

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2{\cdot}\delta{\cdot}2{\cdot}s + 4}$$

non $K=1$ eta $\omega_n=2\ rad/s$ diren, eta orain $\delta=2$ eginez, honako hau geratzen da,

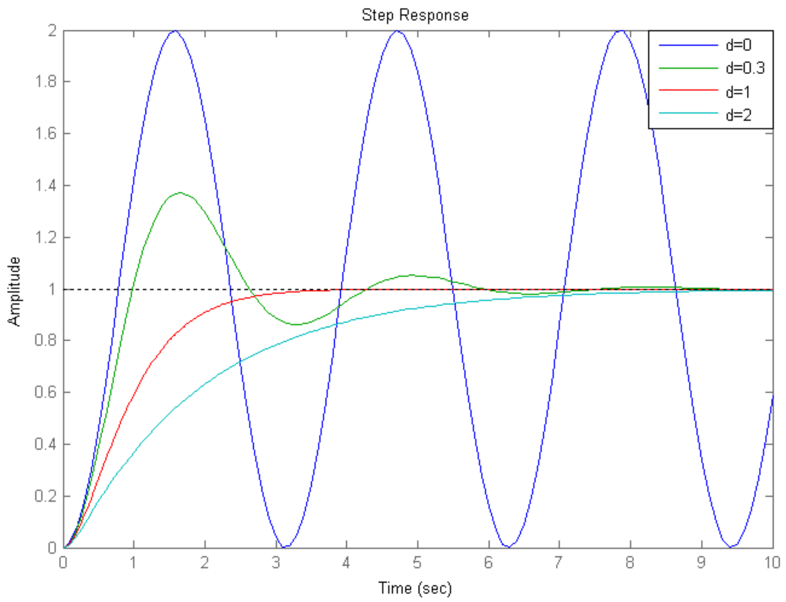
$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 8{\cdot}s + 4}$$

Maila unitarioaren aurrean izango duen erantzuna ondorengo irudian (4-9) agertzen den hori izango da. Ikus daitekeen bezala, sistemaren erantzunak ez du inongo oszilaziorik, eta $\delta=1$ mugatik kanpo dagoenez, *sistema gainmoteldua* deritzo. Erantzuna bere azken balioan egonkortzen da eta sistema egonkorra da, eta aurreko kasuan bezala, lehen ordenako sistemaren erantzunaren antzekoa da, lehen uneetako zatia izan ezik.



4-9 irudia. 2. ordenako sistema gainmoteldu baten maila erantzuna

Ikusi ditugun lau kasuen erantzunak aldi berean marraztuz, elkarren artean konparatu ditzakegu,



4-10 irudia. 2. ordenako sistema egonkor guztien erantzunak

Denboraldi iragankorraren zehaztapenak (espezifikazioak)

Sistema azpimoteldua hartuz oinarri bezala ($0<\delta<1$), zerorik gabeko 2. ordenako sistemen denboraldi iragankorreko zehaztapenak definituko dira sarrera maila unitarioarentzako.

Maiztasun naturala, $\boldsymbol{\omega_n}$: sistemaren moteltze faktorea nulua deneko maiztasuna, maiztasun oszilakorra.

Maiztasun moteldua, $\boldsymbol{\omega_d}$: sistemaren moteltze faktorea nulua ez deneko maiztasuna, hau da, sistemak motelketa bat (unitatea baino txikiagoa) dueneko maiztasuna.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

Gehienezko gaindiketa, $\boldsymbol{M_p}$: irteerak azken balioarekiko duen lehen gaindiketa edo maximoa . Portzentai moduan ematen da.

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \qquad M_p = \frac{y_{max} - y_{azk}}{y_{azk}}$$

Puntako denbora, $\boldsymbol{t_p}$: gehienezko gaindiketa ematen den unea.

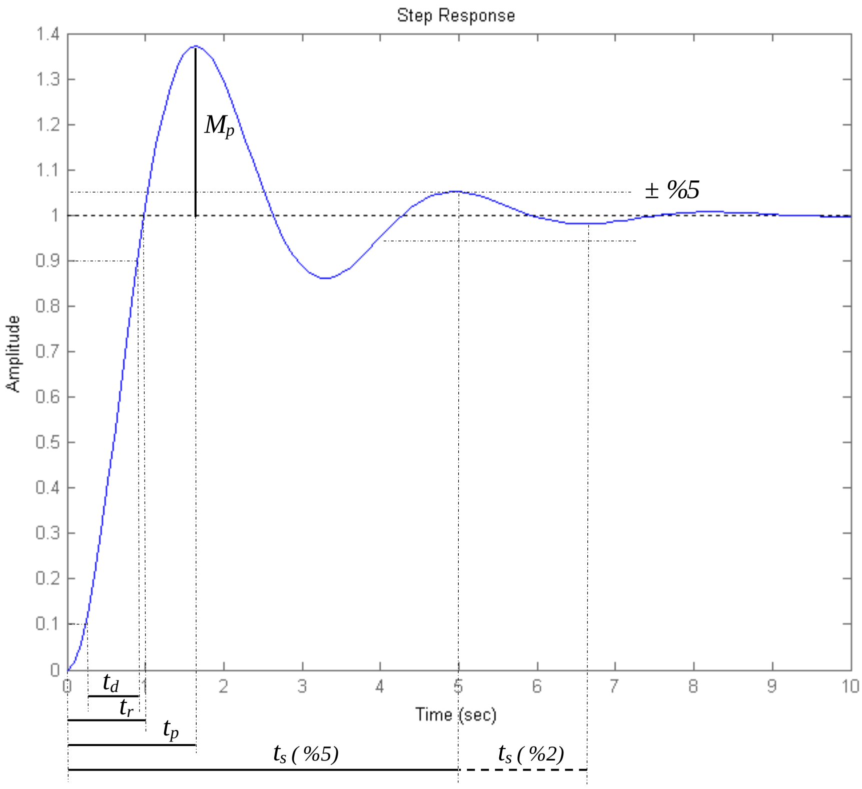
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

Haziera-denbora, $\boldsymbol{t_r}$: irteerak lehenengo aldiz azken balioa hartzen dueneko unea. Automatikako testu liburu batzuetan $\boldsymbol{t_d}$ ere deitzen dute, *atzerapen denbora (delay time)*, irteerak lehenengo aldiz azken balioaren %10-etik %90-eko bitarteko denboraldia. Beste batzuek, $\boldsymbol{t_d}$ parametro hau irteerak lehenengo aldiz azken balioaren %50-a harrapatzeko behar duen denbora ere definitzen dute. Guztiek, sistemak (maila utitarioaren aurrean) erreakzionatzeko duen ahalmena edo azkartasuna adierazten dute: txikiak badira, sistema azkarra da.

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}, \text{ non } \theta = arc\ cos\ \delta \text{ den}$$

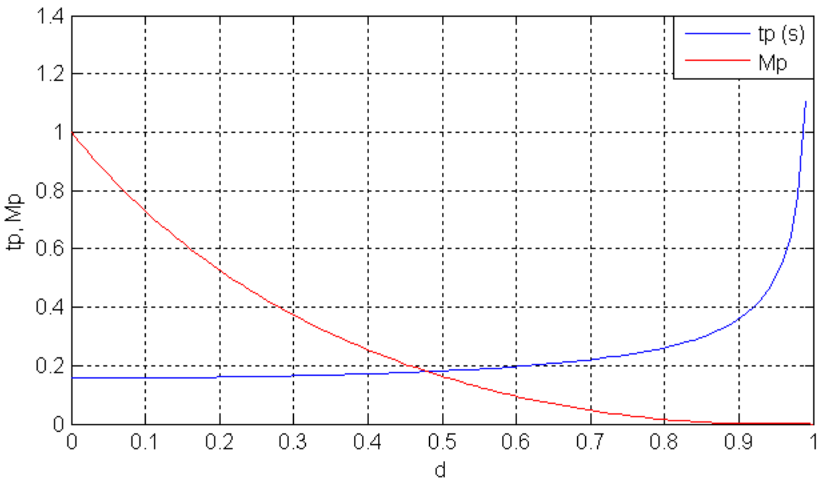
Egonkortze-denbora, $\boldsymbol{t_s}$: irteera lehen aldiz azken balioaren % 2 edo %5 bitartean geratzen hasten den unea.

$$t_s = \frac{4}{\delta \cdot \omega_n} \quad \%2\text{-rentzako}, \; t_s = \frac{3}{\delta \cdot \omega_n} \quad \%5\text{-entzako}$$



4-11 irudia. 2. ordenako sistema baten zehaztapenak (denboraldi iragankorra)

Ondorengo grafikoa begiratuz (ω_n=20 rad/s hartuz), δ txikia izanez gero, M_p handia eta t_p txikia, izango dira. δ handitzen den heinean, aldiz, M_p txikitzen eta t_p handitzen joaten dira.



4-12 irudia. 2. ordenako sistema baten t_p eta M_p δ-ren funtzio dira

Egoera egonkorrari dagokionez, sistemaren irabazpen estatikoa deritzon parametroa dugu, K_{est} .

$$K_{est} = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K\cdot\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot s + \omega_n^{\ 2}} = \frac{K\cdot\omega_n^{\ 2}}{0 + 2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot 0 + \omega_n^{\ 2}} = K$$

Parametro guzti hauek, sistemaren portaerari buruzko informazioa ematen digute: atzerapenak, erantzun-abiadura, irabazpen estatikoa, egonkortasuna. Sistemaren analisia egiteko balio digute. Beste modu bateko erantzunak aztertzeko, beste parametro batzuk defini daitezke.

Poloak *s* planoan izaten duten kokaera kontuan izanda, sistemarekiko informazio asko ematen dute, eta maila sarrerarekiko izango duen irteerakiko ere. Gogoratuz poloak non kokatzen diren *s* planoan eta beraien espresio orokorra honako hau dela,

$$p_{1,2} = \underbrace{-\delta\cdot\omega_n}_{\text{motelketa}} \pm \omega_n\sqrt{1-\delta^2}\, j$$

ondorio hauek atera ditzakegu:

1. motelketa (poloen alde erreala) berdina duten 2. ordenako sistema guztiak, egonkortze denbora berdina izango dute, naiz eta moteltze faktore eta maiztasun natural desberdinak izan. Horiek denak, *s* planoaren $\underline{-\delta\cdot\omega_n}$ <u>marra bertikal berean izango dituzte polo bikoteak</u>.

2. maiztasun natural berdineko 2. ordenako sistema guztiek *s* planoko ezker erdialdeko $\underline{\omega_n}$ <u>erradiodun semizirkunferentzian izango dituzte kokatuak beraien poloak</u>.

3. δ moteltze-faktore berdina duten 2. ordenako sistema guztiek *s* planoko ezker erdialdeko ardatz errealarekiko simetrikoak diren bi diagonaletan izango dituzte beraien poloak.

Polo bakoitza zenbaki konplexu bat da, non:

- bere modulua $\left|\overline{Op_1}\right| = \omega_n$ den
- eta bere angelua, $\theta = acos(\delta)$ den, ondorioz $\delta = cos(\theta)$

hau da, poloak δ eta ω_n-ren menpe geratzen dira edo parametro horien funtzio dira.

Orduan, horrelako eskakizunak adieraz daitezke: aurkitu eta marraztu $\delta > \delta_1$, $\omega_n < \omega_{n1}$ eta $|\delta\ \omega_n| < |\delta_1\ \omega_{n1}|$, duten sistema egonkor guztien poloen esparrua s planoan. (adibidez: $\delta_1 = 0.5$, $\omega_{n1} = 2$ rad/s eta $|\delta_1\ \omega_{n1}| = 1$)

Horrela, esan dezakegu:

1. poloak ardatz irudikarian kokaturik dituzten sistemak, $\delta = 0$ dute eta erantzun oszilakorra ematen dute. Ezegonkortzat hartzen dira, ez baitute nahi den erantzunerantz jotzen. Kritikoki egonkorrak deritze.
2. poloak ardatz errealean kokaturik badaude, aldiz:
   a. kritikoki motelduak $\delta = 1$
   b. gaimotelduak $\delta > 1$

3. motelketa $\delta \cdot \omega_n$ izanik, zenbat eta handiagoa izan (balio absolutua) alde erreala, arinago joko du 0-rantz erantzunaren $e^{-\delta \varpi_n t}$ terminoak, eta horrek egonkortze denbora, t_s, txikiagoa izatea ekarriko du.
4. poloa zutabe edo marra berean dituzten sistema guztiak dute motelketa berdina, t_s bera, eta alde erreal bera ere.
5. gehienezko gaindiketa ez da ω_n-ren menpe, δ-ren menpe baizik, baina bai gertatzen den unea, t_p.
6. Jatorritik urrun geratzen diren poloak, goi mailako ordena duten sistemetan, murriz edo deusez daitezke, beren eragina erantzun orokorrean txikia baita, denboran zehar azkar desagertzen direlako.
7. polo konplexuen kasuan, polo guztiek dute bere bikote konjokatua, eta askotan nahikoa izaten da soilik *s* planoaren goi aldekoa marraztea.

Adibidea

$G(s) = \dfrac{4}{s(s+5)}$ sistema begizta itxian berrelikadura unitario negatiboarekin emanez, aurkitu sistemaren parametroak, poloak eta marraz itzazu s planoan, sistemaren izaera eta maila unitarioaren (aurreko) irteera.

Adibidea

$G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ sistema begizta itxian berrelikadura unitario negatiboarekin emanez, aurkitu sistemaren parametroak, poloak eta marraz itzazu s planoan, sistemaren izaera, maila unitarioaren (aurreko) irteera eta ondorengo zehaztapenak: t_r, t_p, t_s eta M_p.

Goi-ordenako edo ordena garaiagoko sistemak

Automatikan, joera, ahal denik eta sistema sinpleenekin lan egitea da, asko errazten baitu sistemaren analisia eta kontroladoreen diseinua (sintesia). Horrela, joera 1. edo 2. ordenako sistemekin lan egitea da, ahal den neurrian. Beraz, posible den kasuetan, goi-ordenako edo garaiagoko ordenako sistemak 1. edo 2. ordenako sistemetara sinplifikatzen dira. Hori egin ahal izateko, polo menderatzaileak kontuan hartu eta uzten dira sisteman, urrutirago daudenak, azkarrenak, sinplifikatu ahal daitezkeelarik.

Polo bat baino gehiago dituen sistema batetan, **polo menderatzailea** *s* planoaren jatorritik edo ardatz irudikaritik hurbilen dagoen poloa da, non horrek izango duen sistemaren erantzunean eraginik handiena. Matematikoki demostratzeko, arrazoi bikoitza dago: alde batetik, bere a_m hondarra izango da hondar guztienetatik handiena, eta bestetik, bere esponentziala $e^{p_m \cdot t}$ izango da esponentzial guztienetatik motelena denboran zehar.

$$y(t)= a_1\, e^{\,p_1 \cdot t} + a_2\, e^{\,p_2 \cdot t} + ... + a_m\, e^{p_m \cdot t} + ...$$

Polo bakoitzak $a_i{\cdot}e^{p_i \cdot t}$ terminoarekin dakar bere ekarpena erantzunean, eta gero sarreraren termino bat ere agertuko den. Erantzunaren hondarrak ikusieran, poloa zenbat eta urrunago jatorritik, hondarra are eta txikiago izango da, eta eragin gutxiago izango du erantzun orokorrean. Hondarra txikia bada, orduan bere eragina txikia izango da erantzunean.

Poloa jatorritik hurrun badago:

- bere hondarra txikia da, $a_i << a_m$
- esponentzialak 0-rantz oso arin jotzen du } → <u>ia ez du eraginik</u>

Polo bat menderatzailea den polo baten aurrean sinplifikatu ahal izateko, menderatzaiela baino 8 edo 10 aldiz handiagoa izan behar da. Sistema batetan polo azkarrak sinplifikatzen badira, ondorengo sistemak jatorrizkoaren K_{est} irabazpen estatiko berdina izan beharko du. Horretarako, <u>kentzen edo sinplifikatzen den polo bakoitzeko</u> (faktore biderkatzailea), <u>poloaren balioa uzten da transferentzia funtzioan</u>.

Adibidea

$G(s) = \dfrac{3}{(s+1)(s+10)}$ sisteman -10 poloa kendu daiteke, -1 baino 10 aldiz handiagoa

delako. Bere irabazpen estatikoa,

$$K_{est} = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{3}{(s+1)(s+10)} = \frac{3}{1 \cdot 10} = 0.3 \text{ da.}$$

Horrela, sinplifikatuz $G(s)' = \dfrac{3}{(s+1)(\cancel{s+10})} \rightarrow G(s)' = \dfrac{3}{(s+1) \cdot 10} = \dfrac{3/10}{(s+1)} = \dfrac{0.3}{(s+1)}$

geratzen da, konprobatuz bere irabazpen estatikoa, jatorrizkoaren berdina dela,

$$K_{est} = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3}{(s+1)(s+10)} = \frac{3}{1\cdot 10} = 0.3$$

s planoan, polo baten parean zeroren bat balego, elkar deuseztuko lukete, eta elkarrengangik hurbil baleude eta ezin sinplifikatu, beren hondarrak txikiak izango lirateke besteekin konparatuz (beraien eragina sistemaren erantzunean).

Horrela, sistema baten ordena murriztu daiteke:

- elkarren hurbileko zero-polo bikoteak kentzen badira
- urrun-urruneko poloak, menderatzailearekiko kentzen badira

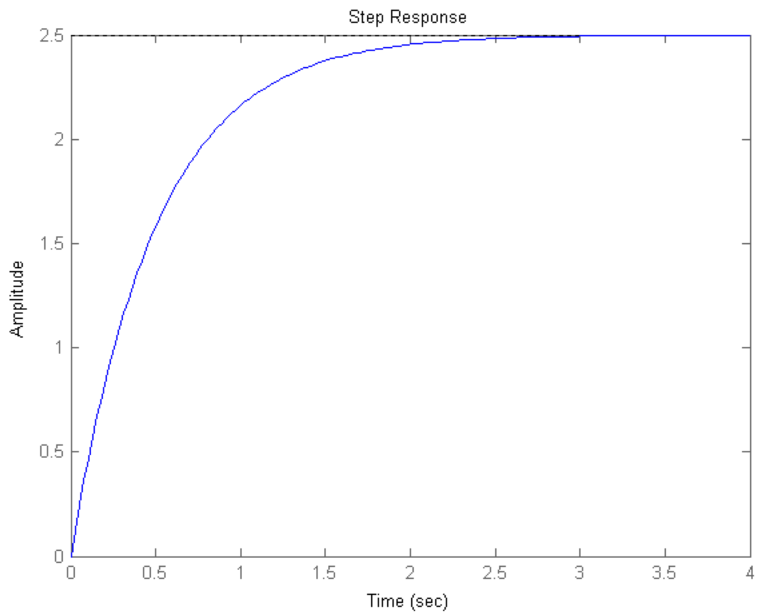
orduan, polo menderatzaile edo nagusiekin geratzen gara.

4.4 SISTEMEN ATZERAPENA DENBORAN ZEHAR

Denbora jarraituko sistemen atzerapena denboran zehar $e^{-\tau_d \cdot t}$ terminoaren bidez adierazten da, non τ_d sistemaren atzerapena segundotan den. Horrela, adibidez lehen ordenako sistema bat hatzen bada, non bere transferentzia funtzioa ondorengoa den,

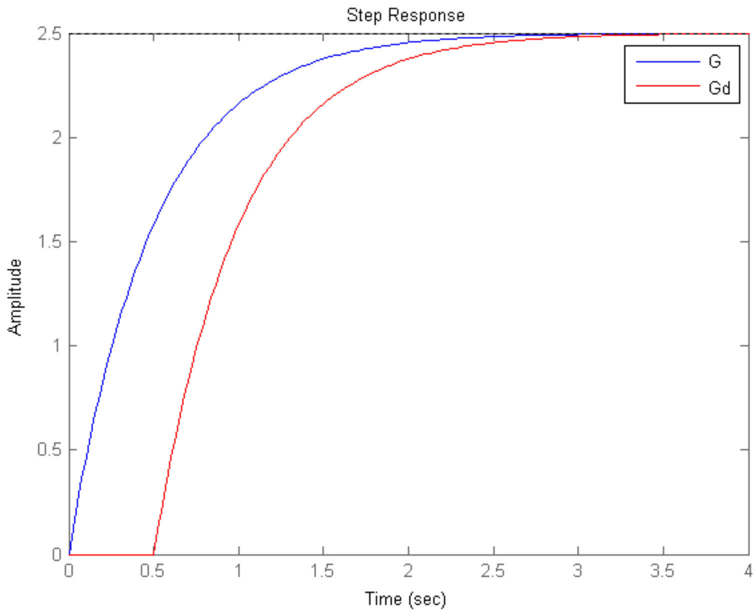
$$G(s) = \frac{5}{s+2}$$

bere maila unitarioaren aurreko denbora-erantzuna ondorengo irudian agertzen dena izango litzateke,



Baina sistema bera 0.5 s-ko atzerapenarekin izango bagenu, hau da, $\tau_d=0.5$ balitz, kontuan izanik denboran definituriko funtzioen traslazioa edo atzerapena denboran zehar (delay) (Laplace-ren transformatua), orduan horrela definituko litzateke bere transferentzia funtzioa,

$$G_d(s) = \frac{5}{s+2}\cdot e^{-0.5\cdot s}$$



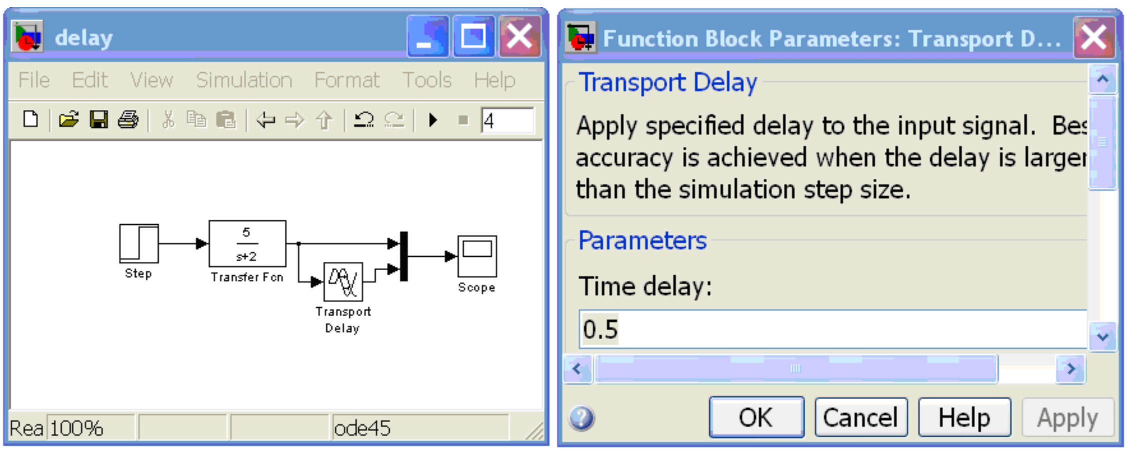
non bere denbora-erantzuna goiko irudian ikus daitekeen, eta ohartu daitekeen bezala, erantzun gorria denboran 0.5 segundo atzeratua agertzen da atzerapenik gabeko sistema berdinaren erantzunarekiko.

MatLab-en emaitzok ikus daitetzen, ondorengo kodea idatz eta egikaritu daiteke.

delay.m

```
% system without delay
G=tf(5,[1 2])
step(G,4)
% system with delay
s=zpk('s')
tau_d=0.5
d=exp(-tau_d*s)
Gd=G*d
hold on
step(Gd)
```

Simulink-en, aurreko adibideko sistema eraikitzen da, non ondorengo irudian agertzen den, *delay.mdl*, eta *Continuous* liburutegiko *Transport Delay* objektua sartzen den sistemaren erantzuna atzeratzeko, non editatuz 0.5-eko balio esleitzen zaion *Time delay* parametroari. *Scope* bistaratzailean ikus daiteke, atzeratu gabe eta atzeraturiko erantzunak agertzen direla, eta *MatLab*-en lorturiko emaitzekin bat egiten dutela.



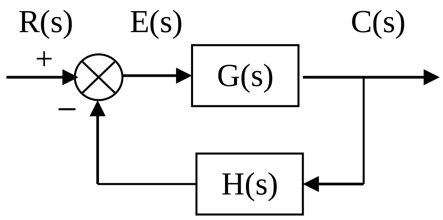
4.5 DENBORALDI EGONKORRA

Erantzunarekin, bi denboraldi bereiztu ditugu: iragankorra eta egonkorra. Lehenengoarekin, sistemaren dinamika ezagutzen da, parametro batzuen bidez (t_r , t_p , t_s ...), eta gainera, sistemaren egonkortasuna ere aztertu dugu, ezegonkorrak diren sistemak, ez baitute inolako interesik gure aldetik. Egoera egonkorra sistema egonkorretan existitzen da bakarrik.

Erregulazio automatikoaren ideia zera da: kontsignak (sarrerak) eta irteerak bat egin dezatela egoera egonkorrean. Baina hau, kontu teoriko nahiz praktikoak direla medio, beti ez da posible izaten. Izan ere, praktikan ez da berdintasun hori sekula lortzen.

Sistema baten doitasuna, sistema horrek kontsigna eta irteeraren arteko ezberdintasuna (errorea) muga jakin batzuen barruan eusteko ahalmenari deitzen zaio. Egoera egonkorraren azterketa, iragankorra aztertzeko erabili zen modu berdintsuan egiten da: sistemari sarrera patroi batzuk ezarri eta bere irteeraren inguruan erraz neurtzeko magnitude batzuk definitzen dira.

Har dezagun honako kontrol-sistema hau:



non

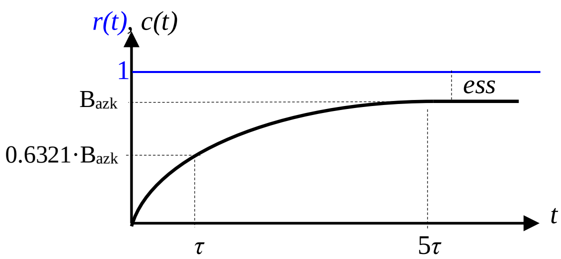
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)Hs)}$$

errorea, ***R(s)-C(s)***, sarrera eta irteeraren arteko desberdintasunari deritzo.
errore seinalea, ***E(s)***, batugailuaren irteeran den seinaleari deitzen zaio, hau da, sarrera, R(s), eta berrelikaduraren irteeraren arteko ezberdintasuna. Aurki dezagun *E(s)*:

$E(s)=R(s)-H(s)C(s)=R(s)-H(s)G(s)E(s) \rightarrow E(s)(1+H(s)G(s))=R(s)$, eta horrela

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+H(s)G(s)}$$

zer esanik ez, sistemaren menpekoa (*G(s)* eta *H(s)*) izateaz gain, sarreraren (*R(s)*) menpekoa ere badela.



4-13 irudia. 1. ordenako sistema baten ess maila unitarioaren aurrean

OHARRA: berrelikadura unitarioa denean, *H(s)=1*, errorea eta errore seinalea gauza bera dira. Testu liburuetan, errorearen azterketa egineran, errorea da aztertzen dena baina beti, suposatuz berrelikadura unitarioa dela. Dena den, errealistagoa da errore seinalearen azterketa egitea, eta guk horrela egingo dugu. Beraz errorea esaten dugunean, berez errore seinalea izango da.

Egoera egonkorreko errorea honela definitzen da e_{ss} (error steady state):

$$e_{ss} = \lim_{t->\infty} e(t)$$

Espresio honi azken balioaren teorema aplikatzen badiogu

$$e_{ss} = \lim_{t->\infty} e(t) = \lim_{s->0} sE(s) = \lim_{s->0} s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Errore-koefiziente estatikoak

Egoera egonkorreko erorre hau, sistemak beraien artean konparatzeko erabiliko ditugun errore-koefiziente batzuekin erlazionatuko dugu. Koefiziente hauek, zenbat eta handiagoak izan, bere egoera egonkorreko portaera are eta hobeago dela adieraziko digute. Sarrera patroi bakoitzarentzako, errore-koefiziente bana definituko da:

a) K_p: *posizio-errore-koefizientea*

Egoera egonkorreko errorea aurkituko dugu sarrera maila unitarioa denenan:

$$e_{ss} = \lim_{s->0} sE(s) = \lim_{s->0} s\frac{1/s}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0}\frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

$G(0)H(0) = \lim_{s->0} G(s)H(s)$ izanik

K_p horrela definitzen da: $K_p = \lim_{s->0} G(s)H(s) = G(0)H(0)$

eta horrela, egoera egonkorreko errorea horrela geratzen da

$e_{ss} = \lim_{s->0} sE(s) = \frac{1}{1+K_p}$, non $K_p\uparrow \rightarrow e_{ss}\downarrow$ den.

b) K_v: *abiadura-errore-koefizientea*

Egoera egonkorreko errorea aurkituko dugu sarrera arrapala unitarioa (malda=1) denenan:

$$e_{ss} = \lim_{s->0} sE(s) = \lim_{s->0} s\frac{1/s^2}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0}\frac{1}{s+sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_v}$$

K_v horrela definitzen delarik: $K_v = \lim_{s->0} sG(s)H(s)$

eta horrela, egoera egonkorreko errorea horrela geratzen da

$e_{ss} = \lim_{s->0} sE(s) = \frac{1}{K_v}$, non $K_v\uparrow \rightarrow e_{ss}\downarrow$ den.

c) K_a: *azelerazio-errore-koefizientea*

Egoera egonkorreko errorea aurkituko dugu sarrera azelerazio unitarioa denenan:

$$e_{ss} = \lim_{s->0} sE(s) = \lim_{s->0} s\frac{1/s^3}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0}\frac{1}{s^2+s^2G(s)H(s)} = \frac{1}{K_a}$$

non Ka horrela definitzen den: $K_a = \lim_{s->0} s^2 G(s)H(s)$

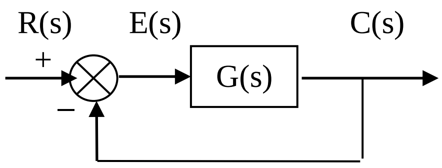
eta horrela, egoera egonkorreko errorea horrela geratzen da

$e_{ss} = \lim_{s->0} sE(s) = \frac{1}{K_a}$, non $K_a\uparrow \rightarrow e_{ss}\downarrow$ den.

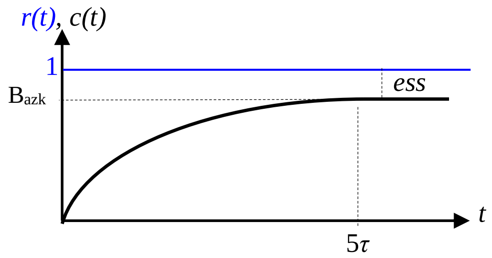
Sistemen sailkapena

Ikusten den bezala, koefiziente guzti hauek *G(s)H(s)*-ren menpekoak dira: **Begizta Irekiko Transferentzia Funtzioa** (BIrTF). Berrelikadura, unitarioa balitz, orduan *G(s)* geratuko litzateke bakarrik. Suposa dezagun hori, *H(s)=1* dela:

orduan



kasu honetan, *E(s)* bai dela *R(s)* eta *C(s)*-ren arteko ezberdintasuna:



Badakigu transferentzia funtzioa modu honetara idatz daitekeela beti:

$$G(s) = \frac{K(1+T_1 s)(1+T_2 s)...(1+T_m s)}{s^j(1+T_a s)(1+T_b s)...(1+T_n s)}$$, non T_i eta T_j, denbora konstanteak deitzen diren.

Adibidez: 1. ordenako sistema batek duen denbora konstantea: $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$

Aurreko espresioetan ikusi izan dugu, nola errore konstante guztiak, hau da, K_p , K_v eta K_a , *G(s)*-ren menpekoak direla eta s-k 0-rantzko joera ($s\rightarrow 0$) duen limitea eginez kalkulatzen direla. Honela idatzirik, limite erraza geratzen da:

$$\lim_{s->0} G(s) = \frac{K}{s^j}$$

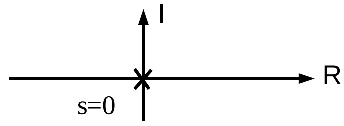
$(1+T_k\, s)$ faktore guztiak 1-eranzko joera baitute. Sailka ditzagun ba orduan sistemak, *j* indize honen arabera:

- 0 motako sistema, j indizea 0 den kasuetan (j=0)
- 1 motako sistema, j indizea 1 den kasuetan (j=1)
- n motako sistema, j indizea n den kasuetan (j=n)

j-k, sistemak s planoaren jatorrian dituen polo kopurua edo integratzaile kopurua adierazten du eta baita sistemaren mota ere, eta horrela, egoera egonkorreko errorea (e_{ss}).

<u>Adibidez:</u>

$$G(s)=\frac{K(1+T_1 s)(1+T_2 s)...(1+T_m s)}{s^j(1+T_a s)(1+T_b s)...(1+T_n s)}$$



s planoa

<u>j=0 bada</u>, 0 motako sistema dugu. Ez du polorik s planoaren jatorrian (s=0), ez du integratzailerik.

<u>j>0 bada</u>, mota>0 da, s=0 eginda, G(s)-ren izendatzailea baliogabetu egiten da: egonkortasunaren mugan dauden poloak dira. j ikusirik, sistemaren mota definitzen da, eta horrela e_{ss} .

$$e_{ss}=\lim_{t->\infty} e(t)=\lim_{s->0} sE(s)=\lim_{s->0} s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

- <u>maila unitarioa den sarrera batentzako</u>

$$r(t)=1\Rightarrow R(s)=\frac{1}{s}$$

0 motako sistemak

$$e_{ss}=\lim_{s->0} s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s->0} s\frac{1/s}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s->0}\frac{1}{1+K}\neq 0$$, errore finitua

1 eta garaiagoak diren motako sistemak

$$e_{ss}=\lim_{s->0} s\frac{1/s}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s->0}\frac{1}{1+K/s}=\frac{1}{1+K/0}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

Bide zuzenean (kate zuzenenan) integratzailerik ez badago, sistema 0 motakoa da, eta sistemak ezin du sarrera (maila) jarraitu errorerik izan gabe.

$e_{ss}=\dfrac{1}{1+K}\neq 0$ da, eta K↑→ e_{ss}↓, baina sistema ezegonkor bihur daiteke (6. gaia).

- <u>arrapala unitarioa den sarrera batentzako</u>

$$r(t)=t\quad\Rightarrow R(s)=\frac{1}{s^2}$$

0 motako sistemak

$$e_{ss}=\lim_{s->0} s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s->0} s\frac{1/s^2}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s->0}\frac{1}{1+K}\frac{1}{s}=\lim_{s->0}\frac{1}{s(1+K)}=\frac{1}{0}=\infty$$

1 motako sistemak

$$e_{ss}=\lim_{s->0} s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s->0} s\frac{1/s^2}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s->0}\frac{1}{(1+K/s)}\frac{1}{s}=\lim_{s->0}\frac{1}{(s+K)}=\frac{1}{K}$$

2 eta garaiagoak diren motako sistemak

$$e_{ss} = \lim_{s->0} s \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0} s \frac{1/s^2}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0} \frac{1}{(1+K/s^2)} \frac{1}{s} = \lim_{s->0} \frac{1}{(s+K/s)} = \frac{1}{0+K/0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Hau da, 0 motako sistemak ezin du arrapala jarraitu inolaz ere, 1 motakoak errore jakin batekin, eta 2 eta garaiagoko motakoek, errorerik gabe jarraitzen dute.

- parabola unitarioa den sarrera batentzako

$$r(t) = \frac{1}{2} t^2 \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^3}$$

0 motako sistemak

$$e_{ss} = \lim_{s->0} s \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0} s \frac{1/s^3}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0} \frac{1}{1+K} \frac{1}{s^2} = \lim_{s->0} \frac{1}{s^2(1+K)} = \infty$$

1 motako sistemak

$$e_{ss} = \lim_{s->0} s \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0} s \frac{1/s^3}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0} \frac{1}{(1+K/s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s->0} \frac{1}{(s^2+sK)} = \infty$$

2 motako sistemak

$$e_{ss} = \lim_{s->0} s \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0} s \frac{1/s^3}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0} \frac{1}{(1+K/s^2)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s->0} \frac{1}{(s^2+K)} = \frac{1}{K}$$

3 eta garaiagoak diren motako sistemak

$$e_{ss} = \lim_{s->0} s \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0} s \frac{1/s^3}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s->0} \frac{1}{(1+K/s^3)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s->0} \frac{1}{(s^2+K/s)} = \frac{1}{0+K/0}$$

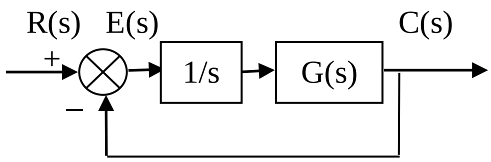
$$e_{ss} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Hau da, 0 eta 1 motako sistemek ezin dute parabola jarraitu inolaz ere, 2 motakoek errore jakin batekin, eta, 3 eta garaiagoko motakoek, errorerik gabe jarraitzen dute.

Kasu guztiak taula batetan laburbilduz:

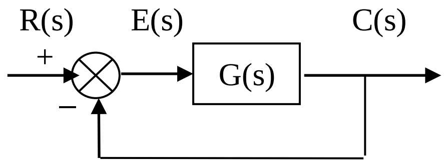
	S a r r e r a		
Sistema mota	Maila	Arrapala	Parabola
0	1/(1+Kp)	$\propto$	$\propto$
1	0	1/Kv	$\propto$
2	0	0	1/Ka
3	0	0	0

Taulan oso ondo ikusten da, nola sistemaren mota handitzen den heinean e_{ss} hobetzen joaten dela. Sistemari mota gehitzea, integratzaile bat gehitzea da bere kate zuzenean.



Baina honek bere arazoa ere badauka: sistema ezegonkortzeko joera ere eransten diola. Guzti honetaz, hau izan behar da kontuan:

- Kp, Kv eta Ka konstanteak sarrera maila, arrapala eta parabola unitarioak, hurrenez hurren, diren kasuentzako balio dutela bakarrik.
- Eginiko kalkuluak, berrelikadura unitarioa den kasuentzako dira bakarrik:



Kasu hauetan bai dela benetakoa E(s)=R(s)-C(s) (edo baita H(s)-ren K_{est} = 1 denean). Errorearen gehinezko balioa, t=0 denean ematen da

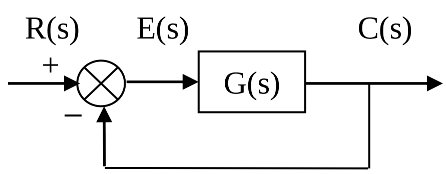
- Azken balioaren teorema erabiltzen denez s·E(s)-n, lehenago sistemaren begizta itxiko polo guztiak egonkorrak direla zihurtatu behar da.
- Sistemari ezartzen zaion sarreraren bat, beste bi edo hiruren gainezartzea bada, orduan errorea, banan-banako sarreren erroreen batuketa izango da (gainezartze teorema aplikatzen da).

- Berrelikadura unitarioa ez duten sistementzako, Kp, Kv eta Ka koefizienteak beste modu batera defini daitezke*.

Adibidea

Har dezagun berrelikadura unitarioa duen sistema bat, non bere kate zuzeneko transferentzia funtzioa honako hau den:

$$G(s)=\frac{K(s+3{,}15)}{s(s+1{,}5)(s+0{,}5)}$$



aurkitu bere Kp, Kv eta Ka.

Integratzaile bat duenez, 1 motako sistema bat da, orduan:

* lehenengo, sistemaren bigizta itxiko polo guztiak egonkorrak direla ziurtatuko dugu

Ikus dezagun zeintzu diren K-ren balioak, sistema egonkor mantentzen dutenak.

-BitxTF, $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \dfrac{I_G(s)}{I_G(s)+Z_G(s)}$

izendatzailea

$I_G(s)=s(1+0,66s)(1+2s)=1,32s^3+2,66s^2+s$

eta zenbakitzailea

$Z_G(s)=4,2K(1+0,3175s)$

$I_G(s) + Z_G(s)= s(s+3/2)+K(s+3,15)=s(s^2+2s+3/4)+K(s+3,15)=s^3+2s^2+(3/4+K)s+3,15K$

Orduan Routz-Hurwitzen polinomioa balioduna izateko, K>0 izan behar da (1. Baldintza). Horrela, Routz-Hurwitzen taula osa dezakegu:

s^3 1 3/4+K

s^2 2 3,15K

s^1 ¾-0,575K 0 →¾-0,575K>0→<u>K<1,304</u>

s^0 3,15K→3,15K>0→<u>K>0</u>

horrela ba, sistema orokorra egonkorra izan dadin, <u>0<K<1,304</u> baldintza bete behar da.

* bigarren, errore-koefizienteak aurkitu

$$Kp = \lim_{s->0} \frac{K(s+3,15)}{s(s+1,5)(s+0,5)} = \infty \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+Kp} = 0$$

$$Kv = \lim_{s->0} s\frac{K(s+3,15)}{s(s+1,5)(s+0,5)} = \frac{3,15K}{1,5*0,5} = 4,2K \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{Kv} = \frac{1}{4,2K}$$

$$Ka = \lim_{s->0} s^2\frac{K(s+3,15)}{s(s+1,5)(s+0,5)} = 0 \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{Ka} = \infty$$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3,15)}{s(s+1,5)(s+0,5)} = \frac{K(1+T_1 s)}{s(1+T_a s)(1+T_b s)} = \frac{K*3,15*(1+s/3,15)}{s*1,5*0,5*(1+s/1,5)(1+s/0,5)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{4,2K(1+0,3175s)}{s(1+0,66s)(1+2s)}$$

1 motakoa denez, 4,2K hori, Kv da

(0 motakoa balitz, 1+Kp izango zen, eta 2 motakoa izan ezkero, Ka)

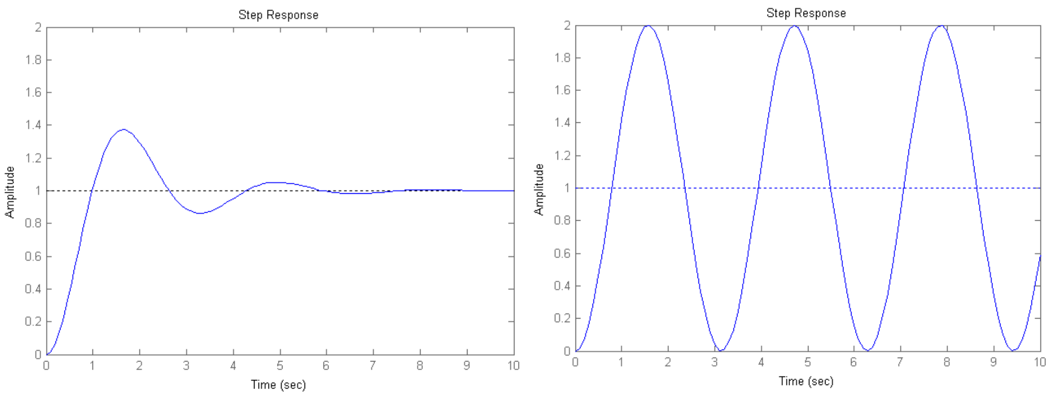
Errore-koefiziente dinamikoak

Erroreari buruz dugun informazioa, eta bereziki, e_{ss} -ri buruzkoa, nahiko urria da. Izan ere, K_p, K_v eta K_a koefizienteak hiru balio besterik ezin dituzte hartu: 0, balio finitu bat eta ∝. Hauek ez digute ematen denboran zehar erroreak duen eboluzioari buruzko informaziorik. Horretarako, errore-koefiziente dinamikoak daude, eta hauek, edozein sarreraren erabilpena onartzen dute.

5. SISTEMEN EGONKORTASUNA DENBORA-EREMUAN

5.1 SARRERA

Ezaguna dugu jada egonkortasun kontzeptua. Sistema bat egonkorra dela esaten da, bere maila erantzunak balio konstante bateranzko joera edo bi balio finituk osaturiko heinean mantentzen denean, denborak infiniturantz jotzen duenean. Beste modu batera esanda, irteera ez dadila $+\infty$-rantz edo $-\infty$-rantz joan, edo $\pm\infty$ artean oszilatzen ibili.



5-1 irudia. Erantzun egonkorra eta erantzun kritikoki egonkorra

Badakigu, sistema bat egonkorra izan dadin, bere tranferentzia funtzioak ezin duela alde erreal positibodun polorik izan.

Froga

$G(s) = \dfrac{K}{(s+2)(s-3)}$, adibidez $r(t)=1$ izanik, $c(t)= a_1 + a_2\, e^{-2t} + a_3\, e^{+3t}$

Orduan, sistema bat egonkorra den edo ez jakiteko, bere ekuazio karakteristikoaren erro guztiak aurkituz da.

- Erroren bat alde erreal positiboduna dela agertzen bada, orduan sistema ezegonkorra da.
- Erroren baten alde erreala hutsa balitz, orduan bi kasu aurki ditzakegu: erroa zero denekoa (integratzaile bat), edo erro irudikari hutsak kasua (bi erro konplexu konjokatu alde errealik gabeak). Sarrera maila aplikatzean,
    - ✓ Lehenengoaren irteera $+\infty$-rantz joango da, beraz ezegonkorra balitz izango da.
    - ✓ eta bigarrenarena, egonkortasunaren mugan kokatzen da (erantzun oszilakorra duelarik), baina praktikan ezegonkortzat hartzen da.

Erro guztiak aurkitzea konplikatua izan daiteke 3. eta gainontzeko ordenako sistemetan, batez ere erroak osoko zenbakiak ez direnean (Ruffini ezin baitugu aplikatu). Horregaitik, sistemaren erroak aurkitu beharrean, bere transferentzia funtziotik abiaturiko metodoak aurkitzen saiatzen da.

Adibidez: polo guztiak negatiboak badira, izendatzailea faktoreen biderkaketa forman jarrita, horrelakoa izango da:

poloak; $p_1 = -a$, $p_2 = -b$, $p_3 = -c$

$(s+a)\ (s+b)\ (s+c)\ldots=P(s)$ polinomioa, koefiziente guztiak positiboak dira. Hau sistema egonkorrak antzemateko erabil daiteke, baina honek ez du nahi esan koefiziente guztiak positiboak dituen ekuazio karakteristikoaren polo guztiak negatiboak direnik. Orduan, baldintza hori, beharrezkoa baina nahikoa ez den baldintza da.

Hurwitz-ek, determinanteen sistema bat erabiliz, sistema baten egonkortasuna aurki zezakeen. *Routh*-ek, aldatu eta sinplifikatu, eta gainera, sistemak **alde erreal positibodun polo kopurua** aurki dezake, eta kasu batzuetan, *s* planoko alde irudikari hutsa duten poloen kopururen bat ere emateko gai da.

5.2 ROUTH-HURWITZ-EN IRIZPIDEA

Routh-Hurwitzen irizpidea, erroak kalkulatu gabe, sistema baten egonkortasuna aurkitzeko modu bat da. Horrela, izendatzailea den polinomioaren erroak atera edo jakin ezin direnean erabiliko genuke modu hau.

$$G(s) = \frac{Ze(s)}{Iz(s)} = \frac{Ze(s)}{a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \ldots + a_n}$$

Bi baldintza bete behar dira sistema egonkorra izan dadin:

1. **Iz(s)**-ak koefiziente guztiak izan ditzala, eta denak positiboak (beharrezkoa baina ez nahikoa). Koefiziente guztiak negatiboak balira, seinua aldatuko litzaieke denei.
2. Routh-Hurwitzen taulako lehen zutabeko koefiziente guztiak positiboak izatea. Zutabe honetan zeinu aldaketa bat den bakoitzean, sistemak alde erreal posiboa duen polo bat duela esan nahi du.

   Sinplifikatzea behar ezkero, lerro bateko koefiziente guztiak zati edo bidertu daitezke balio batengatik.

Routh-Hurwitzen taula horrela eraikitzen da:

$$Iz(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n$$

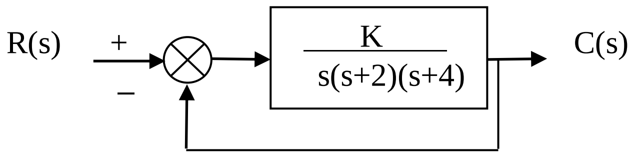
$$\begin{array}{l|llll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\
\ldots & & & & \\
s^0 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1},\ b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1},\ b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1},\ c_2 = \frac{b_1 a_5 - b_3 a_1}{b_1},\ \ldots$$

<u>5.1 ariketa</u>: ikusi sistema bat egongorra den ala ez, Routhu-Hurwitzen irizpidea erabiliz, bere tranferentzia funtzioaren izendatzailea beheko hau bada.
$Iz(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$

<u>5.2 ariketa</u>: ikusi irudiko sistema egongorra den ala ez (K-ren arabera), Routh-Hurwitzen irizpidea erabiliz.



<u>5.3 ariketa</u>: ikusi sistema bat egongorra den ala ez (K-ren arabera), Routhu-Hurwitzen irizpidea erabiliz, bere tranferentzia funtzioaren izendatzailea beheko hau bada.

$Iz(s) = s^4 + s^3 + K s^2 + s + 1$

Ariketa gehiago:
$Iz(s) = 2s^4 + 8s^3 + 10s^2 + 10s + 20$
$Iz(s) = s^3 + 7s^2 + 7s + 46$
$Iz(s) = s^5 + 6s^4 + 10s^2 + 5s + 24$
$Iz(s) = s^3 - 2s^2 + 4s + 6$
$Iz(s) = s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16$

Routh-Hurwitzen kasu bereziak

1. Routh-Hurwitzen taulako lehen zutabeko elementuren bat edo gehiago zehazgabea ateratzen zaigunean, orduan elementu horren aurrekoa 0 dela esan nahi du (zutabe berean). Kasu honetan, 0-ren ordez ε^+ balio oso txiki eta positiboa jartzen da. Teorikoki, erregela edo soluzio hau aplikatu ahal izateko, zehazgabetasunaren gaineko 0 horren eskuinean, 0 ez diren edo ezer ez diren terminoa egon behar da, (esk.≠0 bald.). Behar denean, ezer ezaren tokietan 0-ak jartzen ditugu (grisez).

$Iz(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2$

s^3	1	1	|	1	1
s^2	2	2	|	2	2
s^1	0	0	|	ε	0
s^0	Zg		|	2	

zeinu aldaketarik ez du → alde erreal positibodun polorik ez du, baina 0 denez bat → sistema kritikoki egonkorra da.
OHARRA: Normalean taulako lehen zutabean 0 edo ε^+ agertzen bada beste bi balio positiboren artean, alde errealik gabeko bi polo konplexu konjokatu dituela bere poloen artean suposatzen da. Kasu horretan, alde errealik gabeko polo konplexu konjokatuak dituenean (irudikari hutsak), orduan kritikoki egonkorra da (praktikan ezegonkorra)

MatLab-en konprobatuz (suposizio hori egiazkoa dela ziurtatzen da)
```
>> roots([1 2 1 2])
  -2.0000
   0.0000 + 1.0000i
   0.0000 - 1.0000i
```

2. Koefizienteren bat falta denean izendatzailean, 0 jartzen da

$Iz(s) = 2\,s^2 + 2 \rightarrow Iz(s) = 2\,s^2 + 0\,s + 2$

$$\begin{array}{lcc|cc} s^2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ s^0 & Zg & & 2 & \end{array}$$

zeinu aldaketarik ez du → alde erreal positibodun polorik ez du, baina bat 0 da → sistema kritikoki egonkorra da
Aurreko kasuan bezala, lehen zutabean ε duenez, hau da 0, bi balio positiboren artean, suposatzen da alde errealik gabeko polo konplexu konjokatuak dituela (irudikari hutsak), eta horrela bada, orduan sistema kritikoki egonkorra da (praktikan ezegonkorra)

MatLab-en konprobatuz (suposizio hori egiazkoa dela ziurtatzen da)
```
>> roots([2 0 2])
ans =
        0 + 1.0000i
        0 - 1.0000i
```

OHARRA: egin ariketa hau (2. kasua) nahiz eta jakin ezegonkorra dela (ez du 1. baldintza betetzen)

$Iz(s) = s^3 - 3\,s + 2 \rightarrow Iz(s) = s^3 + 0\,s^2 - 3\,s + 2$

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & 0 & 2 \\ s^1 & -\infty & 0 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

zeinu aldaketa bi→ alde erreal positibodun polo 2→sistema ezegonkorra
ε duenez, alde errealik gabeko polo konplexu konjokatuak izan ditzake, baina 3. ordenakoa denez, eta 2 polo jada ezegonkorrak direnez, ba orduan ezinezkoa da 2 polo gehiago izatea.

MatLab-en konprobatuz
```
>> roots([1 0 -3 2])
ans =
   -2.0000
    1.0000
    1.0000
```

OHARRA: seinu aldaketetan, ε ez da kontuan hartzen, 0 baita.

3. Routh-Hurwitzen taulako edozein lerroko elementu guztiak 0 direnean, aurreko lerroko polinomioaren deribadaren koefizienteak jarriko ditugu lerro horretan.

$Iz(s) = s^6 + 4\,s^4 + 8\,s^2 + 16 \rightarrow Iz(s) = s^6 + 0\,s^5 + 4\,s^4 + 0\,s^3 + 8\,s^2 + 0\,s + 16$

$d\,Iz(s)/ds = 6\,s^5 + 16\,s^3 + 16\,s$

s^6	1	4	8	16	1	4	8	16
s^5	0	0	0		6	16	16	0
s^4					4/3	32/6	16	0
s^3					-8	-56	0	
s^2					-3,98	16	0	
s^1					-88,16	0		
s^0					16			

zeinu aldaketa bi→ alde erreal positibodun polo 2→sistema ezegonkorra
MatLab-en konprobatuz, alde erreal positibodun 2 polo ematen ditu

```
>> roots([1 0 4 0 8 0 16])
ans =
  -0.9540 + 1.1689i
  -0.9540 - 1.1689i
   0.0000 + 1.7571i
   0.0000 - 1.7571i
   0.9540 + 1.1689i
   0.9540 - 1.1689i
```

$Iz(s) = s^5 + 2\,s^4 + 24\,s^3 + 48\,s^2 - 25\,s - 50$

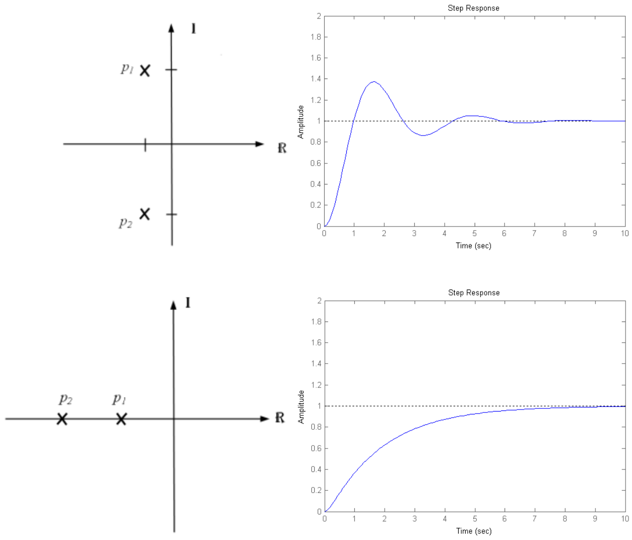
s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	0	0	
s^2			
s^1			
s^0			

MatLab-en konprobatuz

```
>> roots([1 2 24 48 -25 -50])
ans =
   0.0000 + 5.0000i
   0.0000 - 5.0000i
   1.0000
  -2.0000
  -1.0000
```

5.3 ERROEN KOKAERAKO METODOA

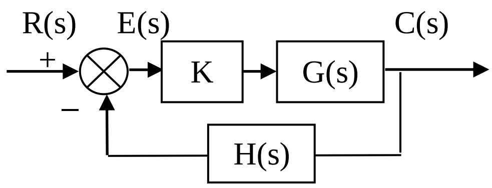
Badakigu jada, sistema baten poloak *s* planoan duten kokapenak sistemaren portaerari buruzko informazio handia ematen digula.



6-2 irudia. Sistemen denbora-erantzuna poloek s planoan duten kokapenaren arabera

Askotan, polo hauek sistemaren parametroren baten menpekotasuna izaten dute. Horrela ba, interesgarria izango litzateke ikustea nola aldatzen den poloen kokapena s planoan, parametro horien balioa 0-tik $\propto$-ra doan heinean. Orduan, parametro horren balio jakin bat aukeratuz, antzeman eta defini dezaket sistema baten portaera, bere egoera iragankorra.

Eskemarik erabiliena hau izango litzateke:



Aldatzen den parametora K da. Mota honetako ariketa edo problemak izaten dira:

- Zein balio izan behar du K parametroak, sistemaren erantzunak maila ezartzean % 20-eko gehienezko gaindiketa izan dezan? Eta ts=3 s izan dadin?

  Egia esan, poloen posizioei dagozkien baldintzak dira.

- K parametroaren balio askori dagozkien poloak aurkitu (hainbat soluzio) eta betebeharrei hobekien erantzuten dien K hartuko litzateke.

Ewans-ek asmatu zuen *erroen kokaera metodoa*, K parametroaren balioa aldatzean, sistemaren poloen kokapena nola aldatzen den erakusten den metodoa:

- *Erroen kokaera*: K, 0-tik ∝-ra
- *Erroen alderantzizko kokaera*: K, 0-tik -∝-ra
- *Erroen inguruko kokaera*: aldatzen dena ez da K, beste parametro bat baizik

Adibidea

Har dezagun honako sistema hau $K \cdot G(s) \cdot H(s) = K\,\frac{s+1}{s^2}$

Begizta irekiko poloak hauexek dira; $s_{1,2}=0$ (bikoitza) eta K-k ez du eraginik.

Interesatzen zaiguna **begizta itxikoa** da. Bere poloak, ekuazio karakteristikoaren erroak dira, hau da:

$S^2+Ks+K=0$ bere erroak $s_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \frac{\sqrt{K^2-4K}}{2}$ direlarik

K, - ∝-tik eta + ∝-rako balioen artean aldatzen joaten bada, ikusi behar dena da nola eragiten dion $\sqrt{K^2-4K}$ terminoari.

- -∝<K<0 → *2 erro erreal*, bata positiboa (+ ∝-tik 0-ra doana) eta bestea negatiboa (-1 –etik 0-ra doana)
- K=0 (begizta irekia)→*erro bikoitz errealak (nulua)*; $s_1 = s_2 = 0$
- 0<K<4→*2 erro konplexu konjokatuak*; $s_{1,2} = -0{,}5\,K \pm \sqrt{4K-K^2}\,j$

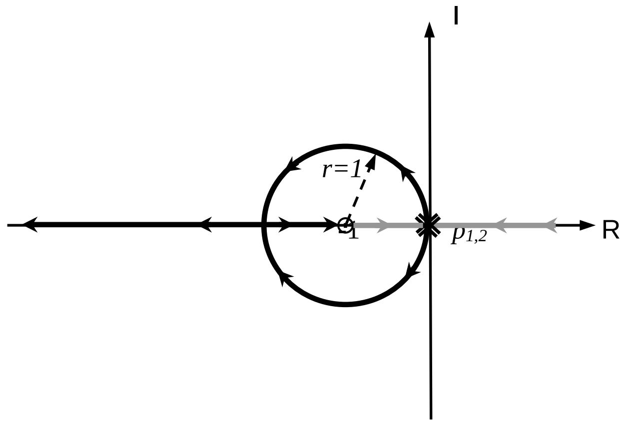
eta kontuan izanik *s* aldagaia konplexua dela eta bere bi parametroak σ eta ω direla,

$s = Re(s)+Im(s) = \sigma + \omega j$

orduan $\sigma = -0{,}5\,K$ da, eta → $K=-2\sigma$, eta baita, $\omega^2=1/4(4K-K^2)$, non *K* ordezkatuz

$\omega^2=1/4(-8\sigma-4\sigma^2) = -2\sigma-\sigma^2 \rightarrow \sigma^2+2\sigma+\omega^2=0 \rightarrow \sigma^2+2\sigma+1+\omega^2=1 \rightarrow$

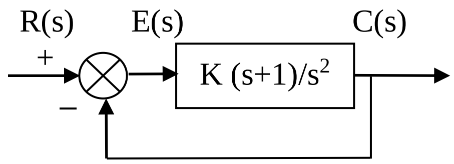
$(\sigma+1)^2+\omega^2=1^2$, hau da, erradioa 1 duen eta erdiko puntua (-1,0) duen zirkunferentzia geratzen zaigu.



6-3 irudia. Begizta itxiko sistemaren poloen ibilbidea s planoan K-ren balioen arabera

- K=4→ *erro erreal negatibo bikoitza*; $s_1 = s_2 = -2$
- K=∝→ *2 erro erreal negatibo desberdin*; bata > -2, -2 –tik –1-era doa, eta bestea <-2, -2-tik -∝-ra doana.

Irudia ikusirik, sistemari buruzko informazioa lor daiteke. Askotan K sistemaren G(s) transferentzia funzioaren barnean kokatzen da, eta H(s) unitarioa izaten da.



- Bere egonkortasunari buruz:
  - ✓ K-ren balio negatibo guztiek, polo positibo bat→sistema ezegonkorra
  - ✓ K-ren balio positibo guztiek ($0<K<\infty$), alde erreal negatibodun polo bi → sistema egonkorra
- Bere jarduera dinamikoari edo denboraldi iragankorreko erantzunari buruz:
  - ✓ $0<K<4$, polo konplexu konjokatuak→erantzun *oszilakor azpimoteldua**
  - ✓ $K=4$, polo erreal bikoitza→erantzun *kritikoki moteldua**
  - ✓ $K>4$, polo erreal ezberdinak→erantzun *gainmoteldua**

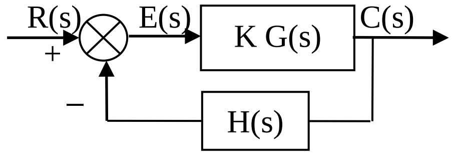
  OHARRA*: kontuan izan behar da sistemaren zeroaren eraginez, aparteko gaindiketa bat agertzen dela erantzunean.

K oso handia egiten bada: polo bat $-\infty$ aldera joango da eta bere eragina desagertu egiten da (oso azkarra bihurtzen baita), eta beste poloa, polo menderatzaile edo nagusi bezala geratzen da. Horrela, 1. ordenako sistema bat bezalako portaera izango du. Azken polo hau zerorantz joango da K ∞-rantz doan heinean.

Erroen leku geometrikoaren definizioa

Sistema baten <u>begizta irekiko transferentzia funtzioaren parametro bat</u> (edo gehiago) 0-tik ∞-ra aldatzen denean, <u>begizta itxiko transferentzia funtzioaren poloen leku geometrikoa bezala definitzen da (polo horiek *s* planoan marrazten duten irudia).</u>

<u>Erroen leku geometrikoan edo erroen lekuan</u>, K irabazpena da aldatzen den parametroa.



Poloek izendatzailea baliogabetzen edo zero egiten dute, eta horren ondorioz, berdinketa hau egiaztatzen da (ekuazio karakteristikoa),

$$1+ K\,G(s)\,H(s)=0$$

Beste modu batera idatzirik,

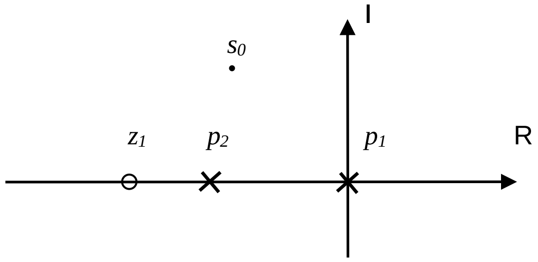
$$K\,G(s)\,H(s) = -1 = 1|_{(2k+1)\,\pi}$$

Begizta itxiko poloek zer hau betetzen dute:

| K G(s) H(s) | = 1 →moduluaren baldintza
$\underline{|\ K\ G(s)\ H(s)}$ = (2k+1)π →angeluaren edo argumentuaren baldintza

Erroen lekuarena den edozein puntuk, bi baldintzak bete behar ditu nahitaez. Ikus dezagun adibide bat: har dezagun ondorengo begizta irekiko transferentzia funtzioa duen sistema, $KG(s)H(s) = \dfrac{s - z_1}{s(s - p_2)}$.

poloak→s= p_1=0, s=p_2
zeroa→s=z_1
bere konfigurazioa beheko marrazkian ikus daiteke



s_0 erroen lekuarena den ala ez jakin nahi dugu, hau da, ikustea ea honako baldintza hau bete arazten duen K-ren baliorik dagoen ala ez:

$$1+ K\,G(s_0)\,H(s_0)=0$$

Argumentuaren baldintza behartzen dugu (askoz ere murrizgarriagoa baita)

$Arg\,(K\,G(s_0)\,H(s_0)) = (2k+1)\pi$, non $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

$$Arg\left(\frac{s_0 - z_1}{s_0(s_0 - p_1)}\right) = \arg(s_0 - z_1) - \arg(s_0) - \arg(s_0 - p_1) = (2n+1)\pi$$

$$\alpha_1-\beta_1-\beta_2= (2k+1)\pi$$

s_0 erroen lekuarena izango da $\varphi=\alpha_1-\beta_1-\beta_2= (2n+1)\pi$ betetzen bada. Horrela balitz, orduan aurki dezaket hori betearazten duen K parametroaren balioa, moduluaren baldintza erabiliz

$$\frac{1}{K} = |G(s_0)H(s_0)| = \frac{|s_0 - z_1|}{|s_0||(s_0 - p_1)|} = \frac{m_1}{d_1 d_2} \Rightarrow K = \frac{d_1 d_2}{m_1}$$

s planoaren puntu asko edota guztientzako gauza berbera eginik, erroen leku geometrikoa aurkituko genuke. Zorionez, errazagoa den modu bat dago hau egiteko.

Erroen leku geometrikoaren eraikuntza (ELG)

10 urratsez osaturiko metodo sistematiko bat garatuko da, erroen lekua marrazteko. Ekuazio karakteristikoa hartuko da abiapuntutzat,

$$1+K\,G(s)\,H(s)=0$$

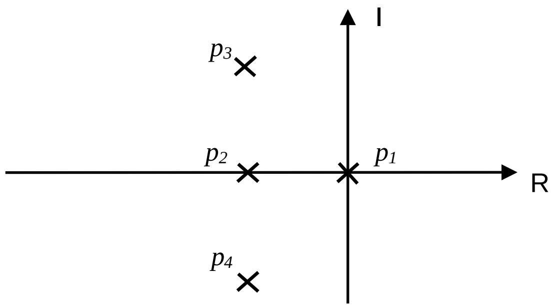
Faktorizatuz

$$1+K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=0$$ *m* zero eta *n* polo (falta diren zeroak: ∞ hartzen dira)

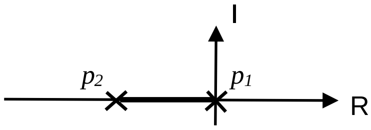
Lehenengo urratsa G(s)H(s)-ren zero eta poloak aurkitzea izango da, begizta irekikoak. Metodoa, adibide batekin ikusiko dugu. Pentsa dezagun ondorengo sistema hau dugula,

$$K{\cdot}G(s){\cdot}H(s)=\frac{K}{s(s+5)(s^2+10s+50)},$$

$s_1=p_1=0,\ s_2=p_2=-5,\ s_{3,4}=p_{3,4}=-5\pm 5j$



1. **Adar kopurua**. Sistemaren leku geometrikoak duen adar kopurua, bere begizta irekiko transferentzia funtzioaren polo kupuru bera da, hau da *n* (ekuazio karakteristikoaren ordena). Horrela, adibidean 4 adar izango dira.
2. **Adarren irteera-puntuak**. Adarren abiapuntuak KG(s)H(s)-ren poloak dira (K=0, begizta irekian), (G(s)H(s)-ren polo berdinak). Adibidean, irteera-puntuak orduan $p_1=0,\ p_2=-5,\ p_3=-5+5j,\ s_4=-5-5j$
3. **Adarren bukaera-puntuak**. Adarrak bukatzen diren puntuak dira (K=∞, begizta itxian eta K topera emanda), KG(s)H(s)-ren zeroak dira (begizta irekiko zeroak). Adibidean, finituak diren zerorik ez denez, zero infinituak hartzen dira, baina konkretatu egin behar da zein infinitu izango diren: ∞, -∞, ∞ j edo -∞ j.
4. **Artdatz errealeko erroen lekua**. Ardatz errealeko puntu bat erroen lekukoa da, bere eskuinean dagoen elementu (polo gehi zero finitu) kopurua bakoitia bada. Izan ere, konplexu konjokatuak diren poloak binaka agertzen direnez, ez daude zertan kontuan hartu (zenbatu) beharrik. Adibidean, $p_1=0$ eta $p_2=-5$ bakarrik, hartzen dira kontuan, horrela, (-5,0) zuzenkia erroen lekukoa da.



5. **Erroen lekuaren simetria**. Erroen lekua ardatz errealarekiko simetrikoa da. Arau hau batez ere emaitza egiaztatzeko erabiltzen da.
6. **Erroen lekuaren asintotak**. Asintota adarraren tangentea da K$\rightarrow\infty$ denean. Hala ta guztiz ere, erroen leku geometrikoak asintota zeharka edo gurutza dezake. Horrela, asintotekin aurkitzen dugu zero finitutan bukatzen ez diren eta infiniturantz doazen adarrak.
   Erroen lekua marra zuzenekiko asintotikoa da. Angelu positiboa duten marra hauek formula honen bitartez aurkitzen dira:

   $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}$, non *k=0, 1, 2, n-m-1*, eta ***n***: polo finitu kopurua, ***m***: zero finitu kopurua, eta, ***n-m***: polo-zero heina, diren.

   Zero finitu baten bukatzen ez den adar bakoitzarentzako *k* bat dago. Adibidean, *polo-zero heina= n - m = 4 – 0 = 4*, beraz
   $k= 0, 1, 2, 3 \rightarrow \theta_0=\pi/4=45^o,\ \theta_1=3\pi/4=135^o,\ \theta_2=5\pi/4=225^o$ eta $\theta_3=7\pi/4=315^o$

   Horrela, esan behar da ere, asintotak elkarrekin ekidistanteak direla.

7. **Zentroidea** (asintotak ardatz errealarekin duten elkargunea). Asintotak ardatz errealarekin duten elkargunea jatorritik σ distantziarakoa da, formula honen bidez lortzen delarik:

   $$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} pi - \sum_{j=1}^{m} zj}{n-m} = \frac{poloen\_batuketa - zeroen\_batuketa}{polo-zero\_heina}$$

   adibidean
   $$\sigma = \frac{0-5-5+5j-5-5j}{4} = \frac{-15}{4} = -3{,}75$$
   (beti izan behar da zenbaki erreala, bi konjokatu batuz beren alde irudikariak baliogabetzen baitira).

8. **Poloen irteera-angelua eta zeroen bukaera-agelua**. Honekin zein den adarren irteera eta bukaeraren norabidea kalkulatzen da. Horretarako, polo horren alboko puntu bat s_0, hartzen da, eta argumentuaren baldintza aplikatzen zaio.

   Adibidean,

   $arg(s-zi)-arg(s-p_1)-arg(s-p_2)-arg(s-p_3)-arg(s-p_4)=(2k+1)\pi$, *k=0, 1, 2, ..el_anitzak-1*

   zerorik ez dagoenez, ekuazioaren poloen aldea hartzen da soilik,

   $-arg(s-p_1)-arg(s-p_2)-arg(s-p_3)-arg(s-p_4)=(2k+1)\pi$

   orduan $\underline{p_1=0 \text{ poloa}}$ hartzen badugu (k=0)

   $-\varphi - 0 - (-\pi/4) - \pi/4 = \pi \rightarrow \underline{\varphi= -\pi}$

orduan p_2= -5 poloa hartzen badugu (k=0)

$-\pi - \varphi - (-\pi/2) - \pi/2 = \pi \rightarrow \varphi=2\pi=0$

orduan p_3= -5 + 5j poloa hartzen badugu (k=0)

$-(3\pi/4) - \pi/2 - \varphi - \pi/2 = \pi \rightarrow -\varphi=11\pi/4$ eta bira oso bat kentzen zaio $(-8\pi/4) \rightarrow$ $\varphi= -3\pi/4$

orduan p_4= -5 - 5j poloa hartzen badugu (k=0)

$-(5\pi/4) - 6\pi/4 - 6\pi/4 - \varphi = \pi \rightarrow -\varphi=21\pi/4$ eta bira oso bi kentzen zaizkio $(-16\pi/4) \rightarrow$ $\varphi= -5\pi/4$

Gauza guztiak kalkulatu behar dira, eta ez badatoz bat, denak edo batzuk bakarrik, txarto daude (erroen lekua ardatz errealean, erroen lekua simetrikoa dela ardatz errealarekiko).

9. **Erroen lekuak ardatz irudikariarekin duen elkargunea**. Routh-Hurwitzen irizpideko taularen lehen zutabeko s^1 elementua 0-rekin berdintzean lortzen den K-rekin, s-ren balioak, K hori s^2 ekuazioan ordezkatuz lortzen dira. Adibidean, ekuazio karakteristikoa honako hau da:

$s^4+15s^3+100s^2+250s+K=0$

s^4	1	100	K	0
s^3	15	250	0	
s^2	250/3	K		
s^1	250-0,18K	0		
s^0	K			

250-0,18K =0 $\rightarrow$ K=1388,88

s^2-an ordezkatuz, $250/3\, s^2+K=0 \rightarrow s=\pm 4{,}08j$

10. **Erroen lekuaren haustura puntuak**. Erroen leku geometrikoa bi zati edo adarretan banatzen diren puntuak dira. Honako baldintza hau betetzen dute: $\dfrac{d(K\cdot G(s)\cdot H(s))}{ds}=0$, baina beharrezkoa den arren, ez da nahikoa. Soluzioak ez dira nahitaez haustura puntuak: bakarrik erroen lekuaren ardatz errealean daudenak izango dira haustura puntuak, 4. urratsak ematen dituen zuzenkientan egon behar dutelarik.

$$\frac{d\dfrac{K}{s(s+5)(s^2+10s+50)}}{ds}=0,\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2},\quad v=s^4+15s^3+100s^2+250s$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{0-K(4s^3+45s^2+200s+250)}{v^2}=0,$$ **p_1=-1,97** Є R eta ELG (Є R)

$p_{2,3}$=-4,63±3,19j ez da Є R

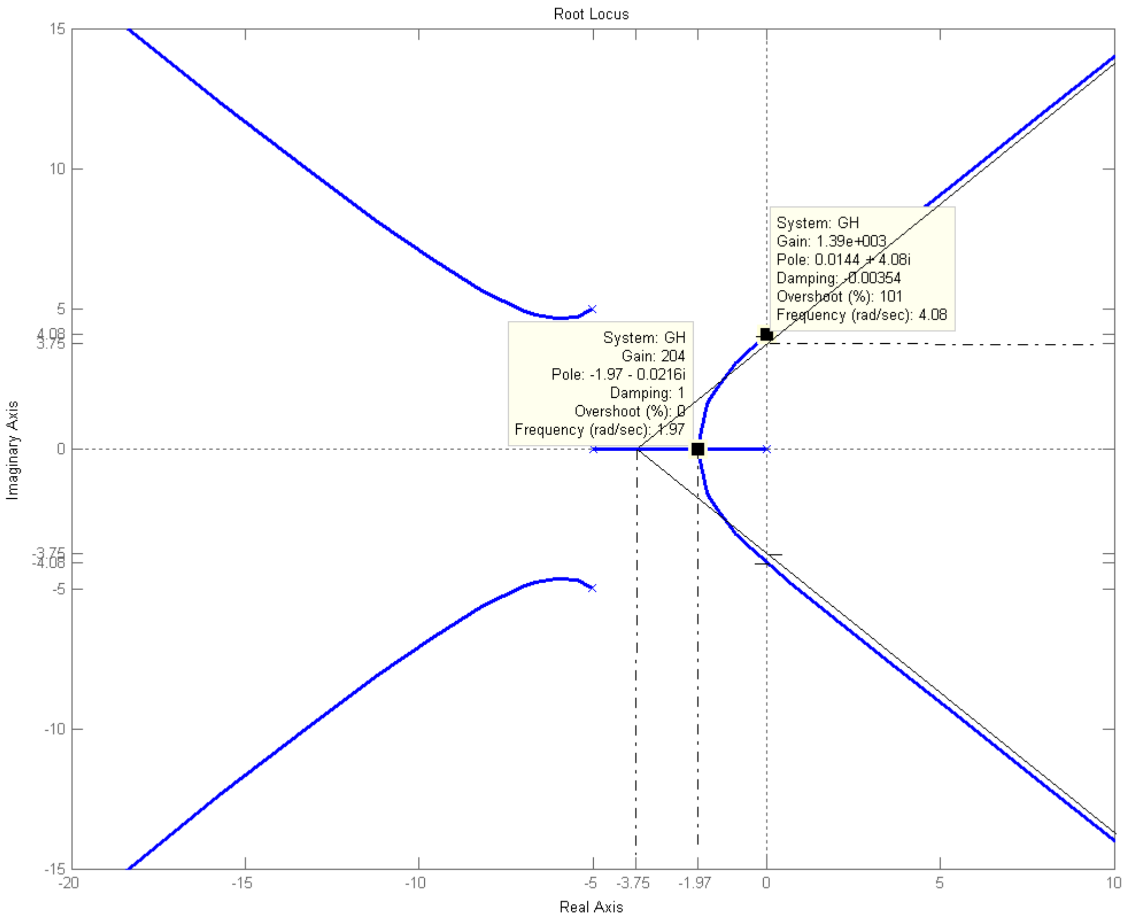
Begizta Itxiko Transferentzia Funtzioaren Iz(s)-an p_1 ordezkatuz, haustura puntuan K parametroak duen balioa lortzen da:

$$Iz(s) = s^4 + 15s^3 + 100s^2 + 250s + K\Big|_{s=-1.97} = 0 \rightarrow \underline{K=204,02}$$

edo bestela moduluaren baldintzaren bidez s = - 1,97 denean

$$\left|KG(s)H(s)\right|_{s=-1,97} = |1| \qquad \left|\frac{K}{s(s+5)(s^2+10s+50)}\right|_{s=-1,97} = 1 \qquad \text{orduan } \underline{K = 204,0292}$$

Orain arte lorturiko datu guztiak batuz, Erroen Leku Geometrikoa (ELG) marrazten da.



OHARRAK:

- Marrazkia tresna bat besterik ez da eta ez du ezertarako balio interpretatzen jakiten ez bada.
- Marrazkia begiratuz, ikus daiteke <u>sistemaren egonkortasuna</u> eta <u>erantzunaren izaera</u>.

  Adibidean: *Egonkortasuna*. Sistema egonkorra da K<1388 bada. K>1388 izanez gero, alde erreala posibo duten bi polo konjokatu agertzen dira, beraz sistema ezegonkor bihurtzen da. K handientzako eta polo menderatzaileei dagokionez (p_1 eta p_2), $\delta \approx 0$ izanik, bi polo nagusi/menderatzaile agertzen dira, eta orduan maila sarreraren erantzuna oszilakorra izango da.

  Guzti hau MatLab eta Simulink-en egiazta daiteke (K-ren balioak aldatuz).

6. SISTEMA LINEALEN MAIZTASUN-ANALISIA

6.1 SARRERA

Orain arte denbora-analisia egiteko orduan, sistemari sarrera patroi batzuk ezarri dizkiogu eta horren ondorengo erantzunak aztertu. Gai honetan, aldiz, sistemari maiztasun ezberdinetako seinale sinusoidalak ezarriko dizkiogu, horrela:

- sistema lineala bada, erantzuna maiztasun bereko beste seinale sinusoidal bat izango da
- sistema ez lineala bada, orduan erantzunean maiztasun ezberdinetako armoniko eta subarmonikoak agertuko dira (maiztasun bereko seinaleaz gain)

Guri interesatzen zaigun kasua sistema linealena da. Kasu hauetan, sarrera

$r(t)=A\sin(\omega t)$ (**A** anplitude eta **ω** maiztasunduna) bada

orduan irteera (egoera egonkorrekoa)

$c(t)=A\,R(\omega)\sin(\omega t+\phi(\omega))$

izago da: maiztasun berekoa, anplitude ezberdina ($R(\omega)$, maiztasunaren funtzio dena) eta desfase batekin ($\phi(\omega)$, hau ere maiztasunaren funtzioa izanik)

<u>Maiztasun-eremuan ez da aztertzen egoera iragankorrik</u>.

Ikus dezagun $R(\omega)$ eta $\phi(\omega)$-ren erlazioa ω-rekiko. $G(s)$ transferentzia funtzioa duen sistema baten erantzuna sarrera sinusoidala ezartzean hau da:

$C(s)= G(s)\,R(s)$, Laplaceren *s* aldagaia erabiliz

$$R(s)=L[A\cdot\sin(\omega t)]=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

horrela:

$$C(s)=\frac{G(s)A\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{A\omega G(s)}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$$, eta frakzio partzialetan banatzen badugu

$$C(s)=\underbrace{\frac{R_1}{s+j\omega}+\frac{R_2}{s-j\omega}}_{\substack{\text{egoera egonkorra}\\ C_e(s)}}+\underbrace{beste\_term\_batzuk}_{\substack{\text{egoera iragankorra (}G(s)\text{-ren poloei dagokiena)}\\ C_i(s)}} \rightarrow c(t)=c_e(t)+c_i(t)$$

Hondarren metodoa aplikatuz:

$s = -j\omega$

$$R_1=\left.\frac{A\omega G(s)(s+j\omega)}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\right|_{s=-j\omega}=\frac{AG\omega(-j\omega)}{-2j\omega}=\frac{-AG(-j\omega)}{2j}$$

$s = j\omega$

$$R_2=\left.\frac{A\omega G(s)(s-j\omega)}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\right|_{s=j\omega}=\frac{A\omega G(j\omega)}{2j\omega}=\frac{AG(j\omega)}{2j}$$

Erantzun egonkorra honela geratuko litzateke

$$c_e(t) = \frac{-AG(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{AG(j\omega)}{2j} e^{j\omega t}$$

Sistemaren transferentzia funtzioa, $G(s)=G(j\omega)$, eta aldagai konplexua denez, alde erreala eta irudikaria ere izango ditu:

$$G(j\omega)=X(\omega)+jY(\omega)$$

non bere modulu eta argumentua aurki ditzakegun

$$|G(j\omega)| = \sqrt{X^2(\omega)+Y^2(\omega)}$$

$$\arg G(j\omega)= \angle G(j\omega)=\mathrm{atan}\,(Y(\omega)/X(\omega))$$

Adibidea:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+3}, \quad G(j\omega) = \frac{j\omega+1}{(j\omega)^2+3} = \underbrace{\frac{1}{3-\omega^2}}_{X(\omega)} + \underbrace{\frac{\omega}{3-\omega^2}}_{Y(\omega)} j$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{X^2(\omega)+Y^2(\omega)} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{3-\omega^2}$$

$$\arg G(j\omega)= \angle G(j\omega)=\mathrm{atan}\,(Y(\omega)/X(\omega))=\mathrm{atan}\,(\omega/1)= \mathrm{atan}\,(\omega)$$

Eragiketak eginez, eta Euler-en teorema erabiliz, horrela geratzen da

$$c(t) = A\cdot\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{3-\omega^2}\cdot\sin(\omega\cdot t + \arctan(\omega))$$

eta forma orokorrarekin identifikatuz

$$c(t)=A\cdot R(\omega)\,\sin\,(\omega t+\phi(\omega))$$

c(t) irteera modu errazean aurkitzen da: transferentzia funtzioan, *s*, $j\omega$-rengatik ordezkatuz, eta bere modulua eta argumentua aurkituz.

$$R(\omega)=|G(j\omega)|$$
$$\phi(\omega)=\angle G(j\omega)$$

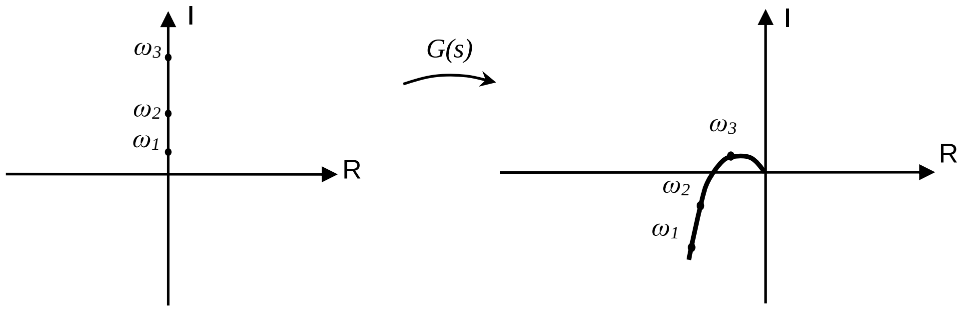
Interesgarria dena zera da: sistema baten portaera adierazten duten forma grafikoak ikustea, hainbat maiztasun ezberdinetako sarrera sinusoidalak ezarriz.

6.2 MAIZTASUN-ERANTZUNAREN ADIERAZPEN GRAFIKOAK

a) Adierazpen polarra

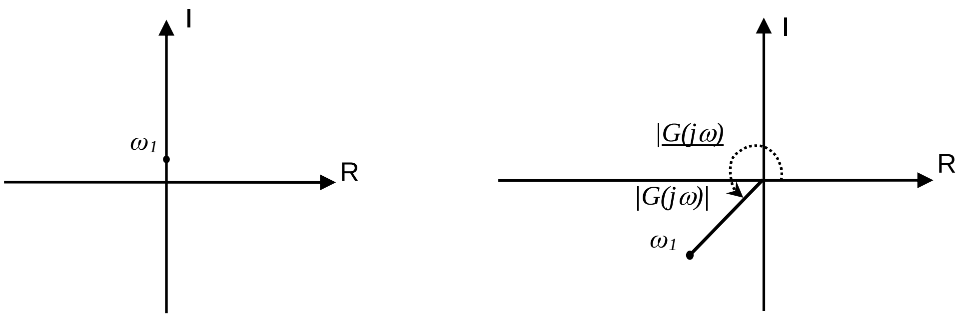
G(s) transferentzia funtzioa duen sistema baten erantzuna, adierazpen polarra erabiliz, bere anplitudearen grafikoa, bere fasearekiko besterik ez da, non ω aldagaia 0-tik $\propto$–ra aldatzen den. Kontuan izan behar da berez $s=\sigma+j\omega$ izan arren, $s=j\omega$ hartzen dela.

Matematikoki ikusiz, ez da *G(s)*-ren alde irudikari positiboaren aplikazio bat besterik *G(jω)* planoan.



7-1 irudia. s eta G(jω) planoak G(s) aplikazioarekin erlazionatuak. Adierazpen polarra G(jω)-n

Maiztasun jakin baten erantzuna, koordenaden jatorrian bere jatorria duen bektore batekin adierazten da, |*G(jω)*| delarik bere modulua, eta |*G(jω)*, bere argumentua. Fase positiboak, erlojuen orratzen aurkako noranzkoan doaz, angenlu trigonometrikoak bezala.



Adibidea:
Marraztu aurreko orrialdeko adibideko *G(s)*-ren maiztasun-erantzunaren adierazpen polarra.

b) Bode-ren diagramak

G(jω)-ren **modulua** eta **fasea** adierazten duten grafikoak dira.

- Modulua dB-tan (dezibelio) adierazten da, hau da,

  Modulua dB-tan→*20 log* | *G(jω)*|, non $Modulua = \dfrac{irteeraren\_anplitudea}{sarreraren\_anplitudea}$

- *Fasea*→*Arg(G(jω))*

eta biak, moduluak nahiz faseak, *ω*-ren eskala horizontal logaritmiko berdina erabiltzen dute (sinkronizatua).

Adierazpen honen abantailak hauxek dira:

- Irabazpenen biderkaketa (zatiketa) batuketa (kenketa) bihurtzen da, logaritmoak baitira
- Modulu eta fase kurbak marra asintotikoetan oinarrituriko metodo erraz eta hurbilduzkoekin marrazten dira.
- Maiztasun hein handiak adierazten dira espazio gutxi baten bitartez (orrialde baten)

Transferentzia funtzioa hartzen da abiapuntutzat:

$$G(s) = K' \frac{(s+b_1)(s+b_2)...(s+b_m)}{s^{j'}(s+a_1)(s+a_2)...(s+a_n)} = K \frac{(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)...(\tau_m s+1)}{s^{j'}(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+2)...(\tau_n s+1)}$$

non bere modulua dB-tan honako hau izango den,

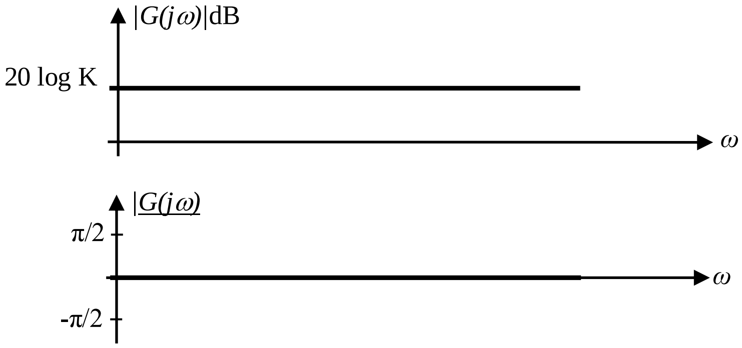
$$20\log|G(j\omega)| = 20\log \mathrm{K} + \sum_{i=1}^{m} 20\log|\tau_i j\omega+1| - \sum_{k=1}^{n} 20\log|\tau_k j\omega+1| - 20\log|j\omega|^{j'}$$

eta bere argumetua (K-k ez du argumenturik, 0 da bere argumentua),

$$\underline{|G(j\omega)} = \sum_{i=1}^{m} Arg(\tau_i j\omega+1) - \sum_{k=1}^{n} Arg(\tau_k j\omega+1) - j' \cdot \underbrace{Arg(j\omega)}_{\pi/2}$$

Ikus dezagun orain, termino bakoitzaren adierazpen asintotikoa:

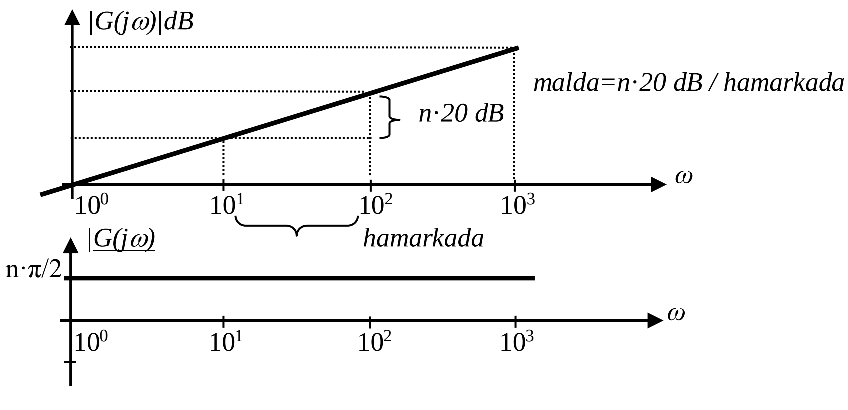
a) **K irabazpena**. *20 log K* terminoak marra zuzen horizontal bat sortzen du moduluaren grafikoan, ardatz horizontaletik 20 log K-ko distantziara dagoelarik.



Fasearen grafikoan ez du ezer aldatzen, bere ekarpena 0º edo 0 rad-ekoa baita.

b) **s^n edo $(j\omega)^n$ motako terminoak**.

- Irabazpena $|G(j\omega)|dB = 20\log|j\omega|^n = n{\cdot}20\log|j\omega| = n{\cdot}20\log\omega$, ω-ren jatorritik ($\omega=10^0=1$ *rad/s*) pasatzen den eta *n·20·dB/hamarkada* **malda** duen marra zuzen bat da. Hamarkada, $\Delta\omega = 10^{j+1} - 10^{j} = 10^1$ *rad/s*
- Argumentua (Φ), marra horizontal bat da, ardatz horizontalarekiko distantzia $n{\cdot}\pi/2$ delarik.



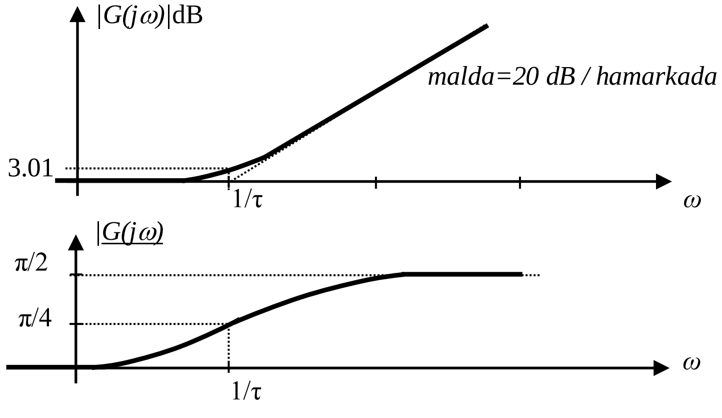
c) (1+τ s) edo (1+τ jω) motako terminoak

- Modulua $|G(j\omega)|dB = 20\log|1+\tau\cdot j\omega| = 20\log\sqrt{1+\tau^2\cdot\omega^2}$
  - ω txikietarako, G_{dB}=20 log 1 =0
  - ω handietarako, G_{dB}=20 log τω =20 log τ+20 log ω

  20dB/hamarkada-ko malda eta ardatz horizontala 20 log ω=0→τω=1→ω=1/τ -n mozten duen marra zuzena da.

  - ω=1/τ kasuan→ G_{dB}=20 log |1+j|=20 log √2=3.01 dB

- Argumentua (Φ)
  - ω txikietarako, $\underline{|G(j\omega)} = \underline{|1} = 0$
  - ω=1/τ kasuan, $\underline{|G(j\omega)} = \underline{|1+j} = \pi/4 = 45^{\circ} = \text{atan } 1/1$
  - ω handietarako, $\underline{|G(j\omega)} = \underline{|j\tau\omega} = \pi/2$



- $(1+\tau\, j\omega)^{\mathbf{n}}$ balira, gauza bera izango litzateke baina bai modulua eta bai argumentua **n**-gatik bidertzen direlarik.

d) Bigarren ordenako terminoak

Forma honetakoak dira: $a{\cdot}s^2+b{\cdot}s+1=\dfrac{1}{\omega_n{}^2}s^2+\dfrac{2{\cdot}\delta}{\omega_n}s+1$

$s{=}j\omega$ eginik:

- Modulua

  $$\left|G(j\omega)\right|dB=20\log\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}+2{\cdot}\delta\frac{\omega}{\omega_n}j\right|$$

  - ω handietarako $\left|G(j\omega)\right|dB=20\log\dfrac{\omega^2}{\omega_n{}^2}=40\log\dfrac{\omega}{\omega_n}$

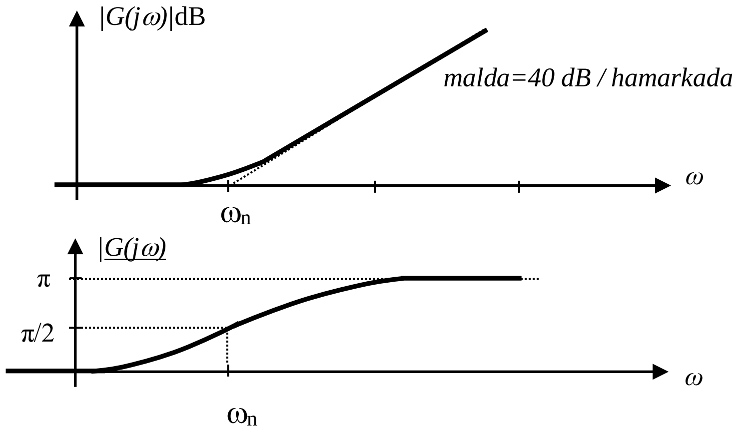
    40dB/hamarkadako malda eta ardatz horizontala $\omega/\omega_n=1\rightarrow\omega=\omega_n$ puntuan mozten duen marra zuzena da.

  - $\omega=\omega_n$ denerako, $|G(j\omega)|_{dB}=20\log|1-1+2\delta|=20\log|2\delta|$
  - ω txikietarako, $|G(j\omega)|_{dB}=20\log|1|=0$

- Argumentua (Φ)

$$a\tan\frac{\left(\dfrac{2{\cdot}\delta{\cdot}\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)}$$

  - ω handietarako, $|\underline{G(j\omega)}=Arg(-\omega^2/\omega_n{}^2)=\pi$
  - $\omega=\omega_n$ denerako, $|\underline{G(j\omega)}=Arg(2\,\delta\,j)=\pi/2$
  - ω txikietarako, $|\underline{G(j\omega)}=Arg(1)=0$



Kontuan izan behar da, modulua nahiz argumentua δ parametroaren funtzio direla.

Adibidea
Har ditzagun hiru sistema hauek:

$$G_1(s) = \frac{10(s+1)}{(s+10)}$$
$$G_2(s) = \frac{10(s-1)}{(s+10)}$$
$$G_3(s) = \frac{10(s-1)}{(s-10)}$$

- hirurak dute modulu-kurba berebera
- argumentuari dagokionez,
  $G_1(j\omega)$, $0 < \Phi < \pi/2$
  $G_2(j\omega)$, $0 < \Phi < \pi$
  $G_3(j\omega)$, $-\pi < \Phi < 0$

Fase minimoa duten sistemetan, modulu-kurbak eta argumentu-kurbak elkarrekin erlazio zuzena dute.

Fase minimodun sistemak propietate hau betetzen dute: modulu-kurba bat izanik, bere fase-kurbak aldaketa minimoa adierazten du. Sistema hauek beren polo eta zero guztiak s planoaren ezker erdialdean dituzte, eta horregaitik, egonkorrak dira. Horrela, faseak elkarrenganako hurbil dauden balioen artean oszilatzen du. Kuriositate moduan, beren erlazioa (modulua eta fasea) hauxe da:

$$ArgG(j\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,|G(j\omega)|}{du} \ln\left(ctgh\left|\frac{u}{2}\right|\right)du \text{ , non } u = \ln\frac{\omega}{\omega n} \text{ den}$$

Hau da, fase-kurbak modulu-kurbaren deribadarekin erlazio proportzionala du.

Adibidea
Marraztu sistema honen Bode-ren diagramak.

Lehenengo **normalizatu** egin behar da *G(jω)*,

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)} = \left.\frac{7.5(s/3+1)}{s(s/2+1)(s^2/2+s/2+1)}\right|_{s=i\omega} = \frac{7.5(1+1/3j\omega)}{j\omega(1+1/3j\omega)[(1-\omega^2/2)+1/2\cdot\omega\cdot j]}$$

ondoren 5 terminoetako bakoitzaren ekarpena ikusi beharko litzateke

OHARRA: Bode-ren moduluaren diagramak asintotikoak dira, beraz ez da metodo zehatza.

Espresio hau aplikatuz:

$$Arg\big(G(j\omega)\big) = Arg\big(j\omega/3+1\big) - Arg(j\omega) - Arg(j\omega/2+1) - Arg(-\omega^2/2+j\omega/2+1)$$
$$Arg\big(G(j\omega)\big) = atag\big(\omega/3\big) - \pi/2 - atag(\omega/2) - atag(\omega/(2-\omega^2))$$

non arku tangentearen (atag) hurbilketa erabiltzen den

atag $(\omega/\omega n) \approx (\omega/\omega n)$, $\omega < \omega_1$ *kasuentzako*

atag $(\omega/\omega_1) \approx (\pi/2) - (\omega/\pi)$, $\omega > \omega_1$ *kasuentzako*

Boderen diagramen arteko eta sistemaren motaren arteko erlazioa

Gogoratuz apur bat, sistema baten begizta irekiko transferentzia funtzioa horrela idazten badugu

$$G(s)H(s) = K\frac{(1+\tau_a s)(1+\tau_b s)...(1+\tau_m s)}{s^j(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)...(1+\tau_n s)}$$

orduan **j** da sistema horren **mota**, eta esaten genuenez,

* 1 motakoek ez dute egoera egonkorreko errorerik (ess) maila ezartzean sarreran
* 2 motakoek ez dute egoera egonkorreko errorerik (ess) arrapala ezartzean sarreran
* 3 motakoek ez dute egoera egonkorreko errorerik (ess) parabola ezartzean sarreran

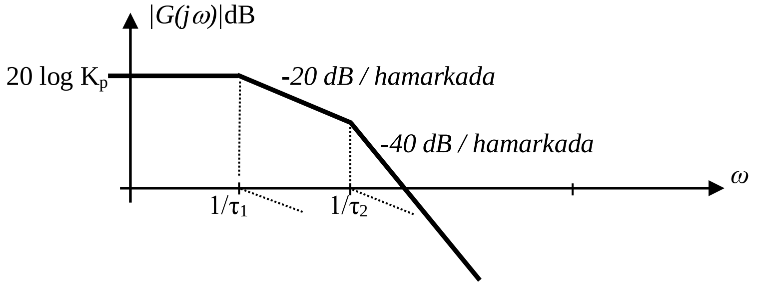
0 motakoa

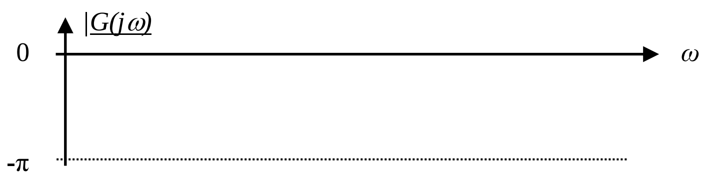
Har dezagun 2. ordenako zerorik gabeko 0 motako honako sistema,

$$G(s)H(s) = \frac{K_p}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}\text{, non } K_p = \lim_{s->0} G(s)H(s) \text{ den}$$

bere Boderen modulu-digrama marraztuz

- $K_p \rightarrow 20 \log K_p \rightarrow$ ktea (konstantea), marra horizontala
- $(1+\tau_1 s) \rightarrow$ jatorritik $\omega=1/\tau_1$-ra 0dB-ko marra horizontala eta ondoren –20dB/ham. maldaduna
- $(1+\tau_2 s) \rightarrow$ jatorritik $\omega=1/\tau_2$-ra 0dB-ko marra horizontala eta ondoren –20dB/ham. Maldaduna





Horrela bada, sistema baten modulu-kurba horizontala bada maiztasun txikietan, orduan sistema 0 motakoa da eta gainera bere K_p neur daiteke.

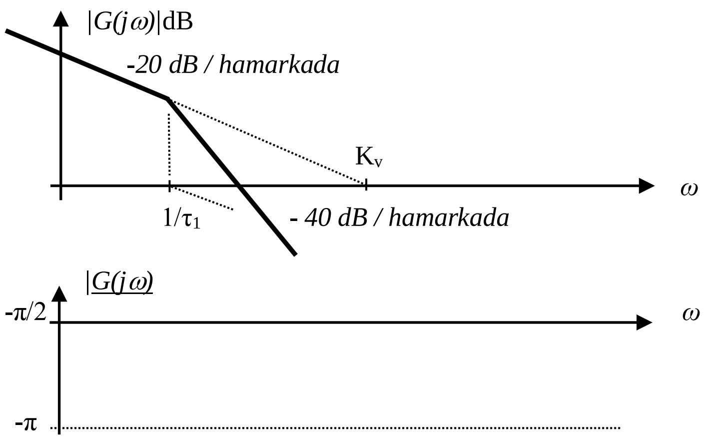
Adibidez,

$$15 \text{ dB} = 20 \log K_p \rightarrow \mathbf{K_p=10^{15/20}}=5.6234$$

1 motakoa

Kasu honetarako, $G(s)H(s)=\dfrac{K_v}{s(1+\tau_1 s)}$ hartzen dugu, non $K_v=\lim\limits_{s->0} sG(s)H(s)$ den bere Boderen modulu-digrama marraztuz

- $K_v/s \rightarrow$ –20dB/ham. maldadun marra-ekarpena dakar
- $(1+\tau_1 s)\rightarrow$jatorritik $\omega=1/\tau_1$-ra 0dB-ko marra horizontala eta ondoren –20dB/ham. maldaduna



Lehenengo zuzenkiak ardatz horizontalarekin elkargunea duen tokian zera betetzen da,

$20 \log (K_v/s)=0$, non $s=j\omega$

orduan

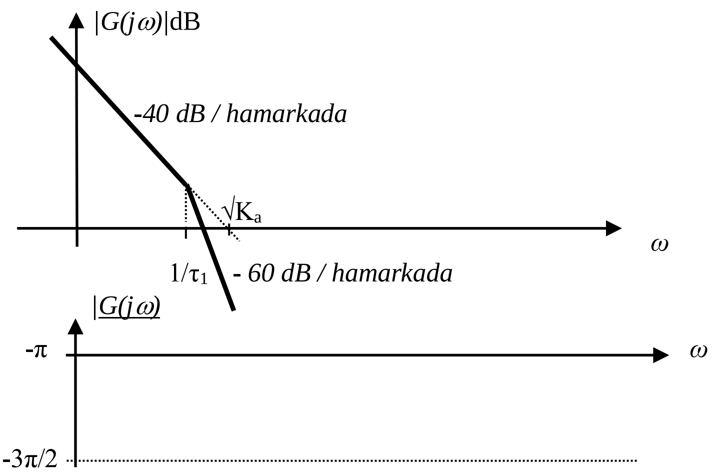
$20 \log K_v - 20 \log |j\omega|=0 \rightarrow 20 \log K_v = 20 \log |j\omega| \rightarrow \boldsymbol{K_v = \omega}$

Horrela bada, K_v parametroaren balioa mudulu-diagramatik kalkula daiteke, lehen zuzenkia ardatz horizontaleraino luzatuz, non ebakidura edo elkargune puntua K_v delarik.

2 motakoa

Beste kasu honetan, berriz, $G(s)H(s)=\dfrac{K_a}{s^2(1+\tau_1 s)}$ hartuko da, non $K_a=\lim\limits_{s->0} s^2G(s)H(s)$ den bere Boderen modulu-digrama marraztuz

- $K_a/s^2 \rightarrow$ –40dB/ham. maldadun marra-ekarpena dakar
- $(1+\tau_1 s)\rightarrow$jatorritik $\omega=1/\tau_1$-ra 0dB-ko marra horizontala eta ondoren –20dB/ham. Maldaduna



Lehenengo zuzenkiak ardatz horizontalarekin elkargunea duen tokian zer hau betetzen da,

$$20 \log |K_a/s^2| = 0, \text{ non } s = j\omega \text{ eta } s^2 = -\omega^2 \rightarrow |s^2| = \omega^2$$

orduan

$$20 \log K_a - 20 \log |s^2| = 0 \rightarrow 20 \log K_a = 20 \log |s^2| \rightarrow K_a = \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{K_a}$$

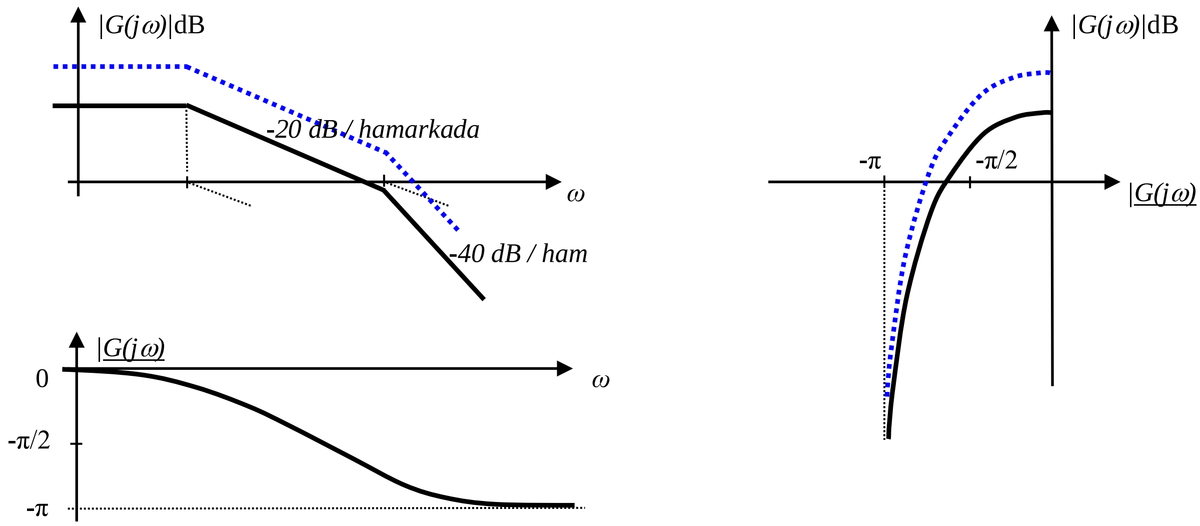
Horrela bada, K_a parametroaren balioa modulu-diagramatik kalkula daiteke lehen zuzenkia ardatz horizontaleraino luzatuz, non ebakidura edo elkargune puntua $\sqrt{K_a}$ delarik.

c) Black-Nichols-en diagramak

Adierazpen Kartesiar bat da:

- ordenaden ardatzean→$20 \log |G(j\omega)|$, Anplitudea dB-tan
- etzanen ardatzean→$Arg(G(j\omega))$, Fasea radianetan (edo gradutan)

Boderen diagrama abiapuntu harturik ere marraz daiteke *Black-Nichols* delakoaren diagrama hau. Black-Nichols diagramako puntu bakoitzak maiztasun jakin bat adierazten du,



Sistemaren K irabazpena handitzean (gutxitzean), kurba gorantz (beherantz) desplazatzen da. Faserik ez da aldatzen, ez baitu, horren desplazamendua gora-bera norabidean (moduluan) izango da bakarrik.

Orain arte ikusiriko hiru maiztasun-adierazpen edo –diagramak, Polarra, Bode eta Black-Nichols, baliokideak dira.

6.3 MAIZTASUN-EREMUKO ZEHAZTAPENAK (ESPEZIFIKAZIOAK)

Denbora-eremuan sistemen portaera definitzen zuten parametroak erabiltzen genituen bezala, non horrela beren "ontasuna" neurtu, sistemak elkarrekin konparatu eta kontroladoreak diseinatzea posible zen, maiztasun-eremuan ere gauza berbera egingo dugu.

Zehaztapen hauek maiztasun-diagrametan erraz neurtzekoak izatea interesatzen da. Gainera, logikoa da pentsatzea denbora- eta maiztasun-eremuko magnitude hauek elkarrekin erlazionaturik daudela. Ikus ditzagun zehaztapen batzuk:

a) Irabazpen kritikoa. Sistemaren irabazpena unitarioa denekoa da.

$|G(j\omega_{GC})|=1$, non dB-tan 0 den→ $20 \log |G(j\omega_{GC})|=0$

Irabazpen hau ematen duen maiztasunari *irabazpen kritikoko maiztasuna*, ω_{GC} , (*gain crossover frequency*) deritzo. Fisikoki, maiztasun honekin, sistemaren sarrerako seinalearen anplitudea eta irteerakoarena berdinak dira. Beraz sistemak ez du inolako anplifikazio mailarik. Posible da sistema batek ω_{GC} bat baino gehiago izatea.

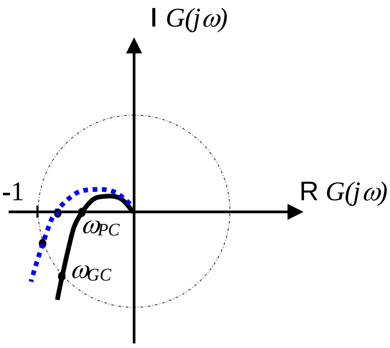
b) Fase kritikoa (ϕ_K). Sistemaren fasea $-\pi$ denekoa da.

$Arg(G(j\omega_{PC})) = -\pi$

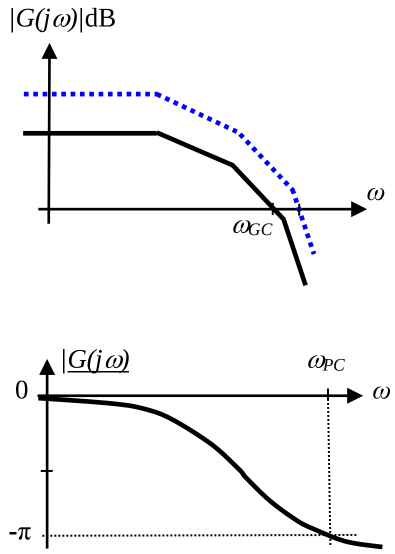
Fase hau ematen duen maiztasunari *fase kritikoko maiztasuna*, ω_{PC}, (*phase crossover frequency*) deritzo.

Maiztasun-diagrametan ondo ikusten dira lehen bi zehaztapen hauek

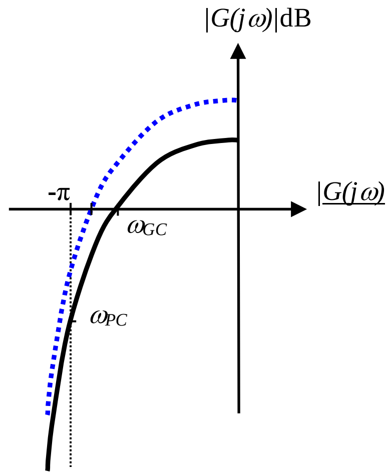
Polarra



Bode

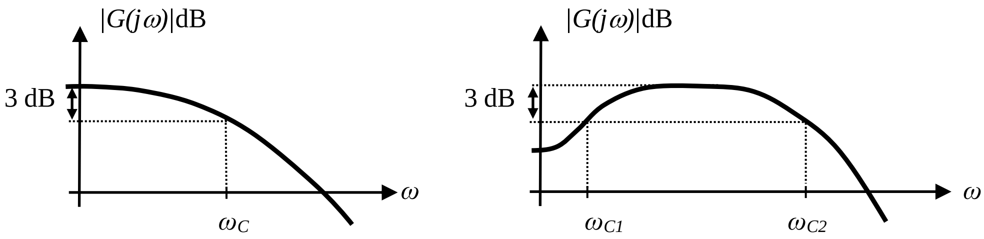


Black-Nichols

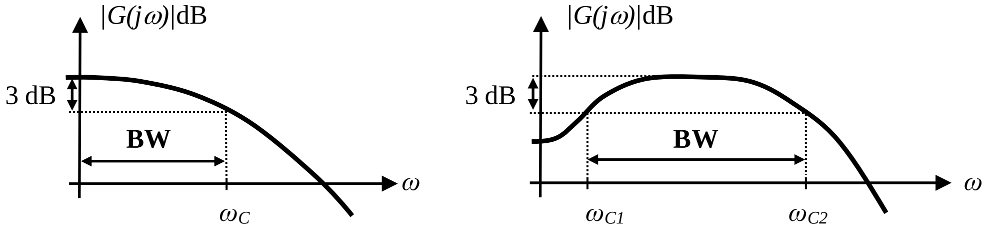


K handitzean: $K\uparrow \rightarrow \omega_{GC}\uparrow$, $\omega_{PC}=kte$ mantentzen da (K parametroak ez baitu faserik).

c) Hauste-maiztasuna edo Ebaki-maiztasuna (ω_C , *crossover frecuency*). $G(j\omega)$-ren modulua G(jω=0)-rena baino 3 dB baino txikiagoa egiten duen maiztasuna, ω_C, da. Beste definizio batekin ere ezagutzen da: moduluaren gehienezko balioa edo maximoa baino 3 dB txikiago egiten duen maiztasunaren balioa (maiztasun hein zabaletan).



d) Banda zabalera (BW, *Bandwidth*). 0 eta ebaki-maiztasunaren arteko maiztasun-heinari, edo bestela, ebaki-maiztasun biren arteko heinari deritzo.



$BW = \omega_C - 0 = \omega_C$ $\qquad$ $BW = \omega_{C2} - \omega_{C1}$

Banda zabalerak, modulua 0 rad/seg maiztasunaren modulua % 70 edo gehiago mantentzen duten maiztasunek osatzen dute. Ezkerreko adibideko Boderen modulu-diagrama begiratuz:

- $\omega=0$ bada, irteera A anplitudeko seinale sinusoidala izango da, sarrerakoaren bestekoa.
- $\omega=\omega_C$ bada, irteerak 0.7*A anplitudea izango du.

Hau da, banda zabaleraren barnean seinaleak ez dira gehiegi moteltzen (ahultzen), aldiz, hortik kanpora bai.

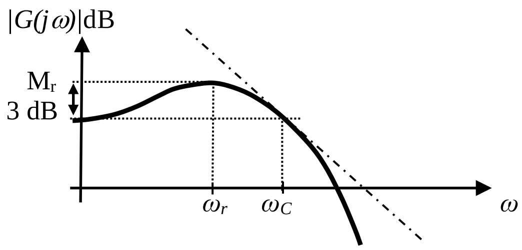
Banda zabalera handia izatea:

- ona da ez badira ezagutzen sarrerek izango dituzten maiztasunak
- txarra da zaraten aldetik, hauek ere anplifikatu egingo bailituzke (normalean zaratak maiztasun handikoak izaten dira)

Orokorrean esanda, banda zabala handia izatea ona da, sistema azkarragoa dela adierazten baitu (Fourier-en deskonposaketako maiztasun handiko partaideak pasatzen uzten baititu).

e) Hauste-abiadura edo ebaki-abiadura, (V_E). Modulu-kurbak ebaki-maiztasunean duen malda da.

$$V_E = \left.\frac{d\,|G(j\omega)|}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_C}$$



Horrela ba, V_E handi eta negatibo batek maiztasun handiak asko moteltzen ditu, zaratak moteltzeko ahalmen handia adierazten du. Baina honek badu bere alde negatiboa ere loturik: honen ondorioz sortzen den erresonantziaren gehiengoak (M_r) sistema ezegonkortzera jotzen du (aurrerago ikusiko den bezala).

f) Erresonantziaren gehiengoa edo erresonantzia-faktorea (M_r). Modulu-kurbaren gehienezko balioa da (ez dauka dB-tan egon beharrik).

$M_r = max(|G(j\omega_r)|)$

g) Erresonantzia-maiztasuna (ω_r). Modulu-kurbaren gehienezko balioa, M_r, ematen duen maiztasuna da.

Erresonantzia-faktoreak, M_r, sistemak gehien anplifikatzeko duen ahalmena adierazten du, eta sistemaren egonkortasunarekin zerikusia du. Sistemaren M_r handia bada, sistemak gehienezko gaindiketa handia izango du (denbora eremuan, M_p). Eta, ω_r handia bada, sistema azkarra izango da, baina zaratekiko sentikorra ere izango delarik.

2. ordenako sistema baten kasua

Honekin eman nahi den ideia zera da: 2. Ordenako sistema baten denbora-zehaztapenak eta maiztasun-zehaztapenak erlazionatzea analitikoki. Har dezagun orduan kontuan honako *G(s)* sistema

$$G(s) = \frac{K\cdot\omega_n^{\,2}}{s^2 + 2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot s + \omega_n^{\,2}}$$

orduan

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^{\,2}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}}\right)\omega_n^{\,2} + 2\delta\dfrac{\omega}{\omega_n}\omega_n^{\,2}\,j} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}}\right) + 2\delta\dfrac{\omega}{\omega_n}\,j}$$

modulua

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}}\right)^2 + \left(2\delta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

argumentua

$$Arg(G(j\omega)) = -atag\frac{2\delta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}}}$$

- ebaki- edo hauste-maiztasuna

$$\boxed{\omega_C = \omega_n\sqrt{(1-\delta^2) + \sqrt{1 + (1-2\delta^2)^2}}}$$

- hauste-abiadura

$$\boxed{V_E = \left.\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_C} = \frac{d}{d\omega}\left.\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}}\right)^2 + \left(2\delta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}\right|_{\omega=\omega_C}}$$ espresio konplikatuegia ateratzen

da, baina $\omega_C = f(\omega_n, \delta)$ denez, V_E ere bai, hau da $V_E = f(\omega_n, \delta)$

- erresonantzia-faktorea eta erresonantzia-maiztasuna

$$M_r = \max\ |G(j\omega)| = \min\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}}\right)^2 + \left(2\delta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] \rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_n\sqrt{(1-2\delta^2)}}\ \omega_r = f(\omega_n, \delta)$$

$$\boxed{M_r = |G(j\omega)|_{\omega=\omega_r} = \frac{1}{2\delta\sqrt{(1-\delta^2)}}}\ M_r = f(\delta)$$

$\dfrac{1}{s^2+0.4s+1}$ (ω_n=*1 rad/s*, δ=*0.2*) eta $\dfrac{4}{s^2+0.8s+4}$ (ω_n=*2 rad/s*, δ=*0.2*) sistemek,

M_r berdina eta ω_r desberdina dute.

Dakigun bezala, zerorik gabeko 2. ordenako sistemetan $\delta=\cos\theta$ da. Orain, ω_r parametroaren espresioa hartuz, non $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ dela jakinik,

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\delta^2}=\omega_n\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos^2\theta}=\omega_n\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$$

$$\boxed{\omega_r=\omega_n\sqrt{-\cos^2 2\theta}}$$

eta M_r parametroan ere gauza berdina eginez,

$$\boxed{M_r=\frac{1}{\sin 2\theta}}$$

Gogoratuz sistemaren maiztasun moteldua (oszilazio maiztasun iragankorra), ω_d

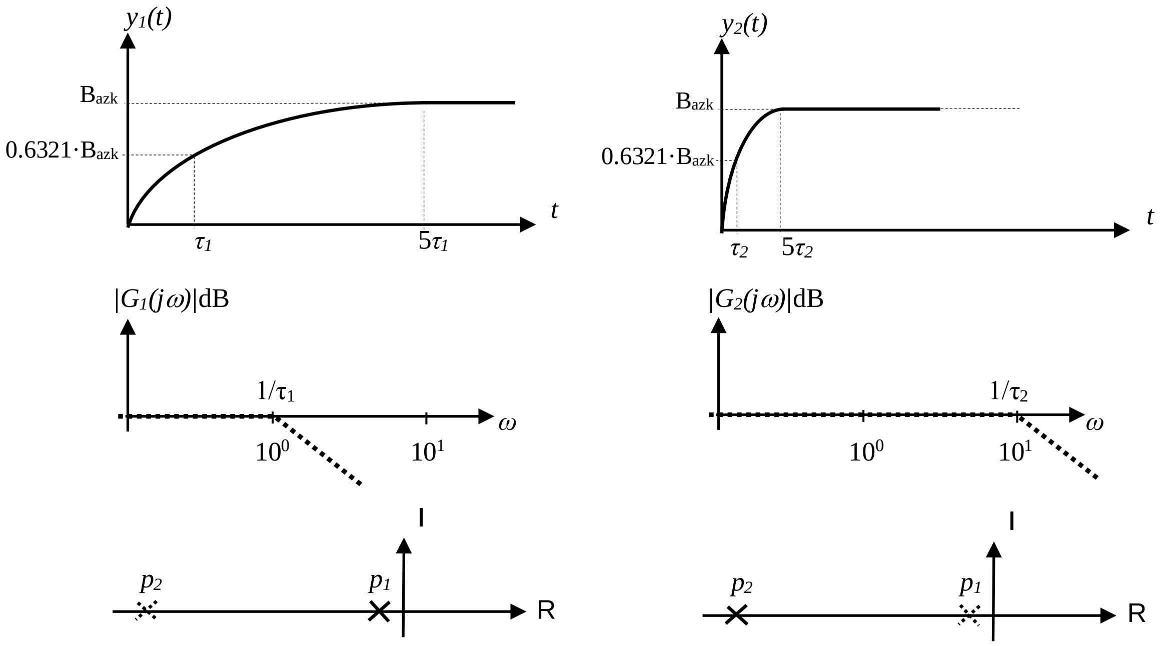
$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$, non <u>δ oso txikia den kasuetan</u> → $\omega_d\approx\omega_r$

non puntako denboraren espresioa hartuz, $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}\approx\dfrac{\pi}{\omega_r}$

Horrela erlazionatzen dira denbora- eta maiztasun-eremuko magnitudeak:

- zenbat eta banda zabalera handiagoa izan, are eta erantzun azkarragoa denbora eremuan. *Adibidez*, ikus dezagun 1. ordenako sistemetan

  $G_1(s)=\dfrac{1}{s+1}$, τ_1=1 s eta p_1= -1 $G_2(s)=\dfrac{1}{0.1\cdot s+1}$, τ_2=0.1 s eta p_2= -1/0.1=-10



Gehienezko gaindiketa hartuz,

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = e^{-\frac{\pi\cdot\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}} = e^{-\frac{\pi\cdot\cos\theta}{\sin\theta}} = e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\tan\theta}}}$$

orduan δ txikia bada, θ handia izango da→ondorioz M_p eta M_r ere handiak izango dira

Adibidez,

δ=0.4→M_p= %25 eta M_r=1.4

0.4<δ<0.7→%5<M_p<%25 eta 1<M_r<1.4

0.7<δ → M_p txikia (δ=0.8 %1-eko M_p) eta M_r ez du

6.4 EGONKORTASUN ERLATIBOA MAIZTASUN-EREMUAN

Bi magnitudek ematen digu sistema baten egonkortasun erlatiboari buruzko informazioa:

- Irabazpen heina/tartea GM (Gain Margin)
- Fase heina/tartea PM (Phase Margin)

Irabazpen heina/tartea GM(Gain Margin)

Oso erraz definitzen da diagrama polarrean: ω_{PC} fase kritikoko maiztasuna da, fasea $-\pi$ egiten duena.

$$GM\big|_{dB} = 20\log\frac{1}{|G(j\omega_{PC})H(j\omega_{PC})|} = 20\log 1 - 20\log|G(j\omega_{PC})H(j\omega_{PC})|$$

$$GM\big|_{dB} = 20\log GM = -20\log|G(j\omega_{PC})H(j\omega_{PC})|$$

$$GM = \frac{1}{|G(j\omega_{PC})H(j\omega_{PC})|}$$

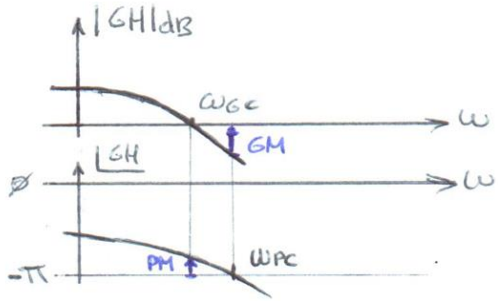
Horrela aztertuz, dB-tan adierazten du zenbat gehitu daitekeen irabazpena sistema begizta itxian ezegonkorra izan aurretik.

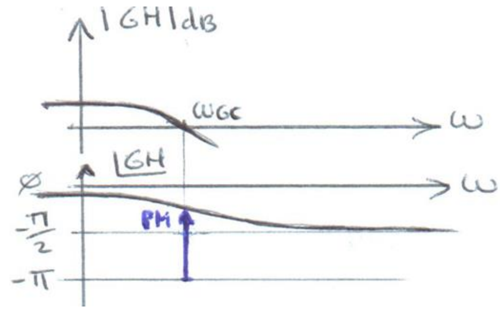
OHARRA: sistemen egonkortasun azterketa guztiak begizta irekiko transferentzia funtzioan, *G(s)H(s)* delakoan, egiten dira.

Zenbat eta handiagoa izan $|G(j\omega)\ H(j\omega)|_{\omega=\omega PC}$, are eta txikiagoa izango da GM irabazpen heina. Marrazkia edo kurba –1 puntutik pasatzen bada, orduan $|G(j\omega)\ H(j\omega)|_{\omega=\omega PC} = 1$, eta logaritmoa 0, eta GM=0: honek esan nahi du ezin dudala gehitu ezer K irabazpena, begizta itxiko sistema ezegonkortu gabe.

Beraz, sistema egonkorrek GM>0 izaten dute, eta zenbat eta handiago izan, are eta egonkorragoa da sistema begizta itxian.

Hala ta guztiz ere, badira sistema batzuk zeinetan ezin daitekena aplikatu GM-aren irizpidea, ω_{PC} ez baita existitzen. Kasu horietan, fase heina PM erabiltzen da





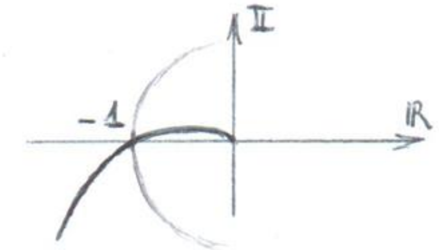
Fase heina/tartea PM (Phase Margin)

φ_0 begizta irekiko sistemak ω_{GC} maiztasunarekin ematen duen faseari deritzo. Maiztasun hau da begizta irekiko sistemaren modulua unitarioa denekoa (irabazpen kritikoko maiztasuna):

$|G(j\omega)\ H(j\omega)|_{\omega=\omega GC} = 1$ *edo,* $0\ dB = 20 \log |G(j\omega)\ H(j\omega)|_{\omega=\omega GC})$
$PM=\pi+\varphi_0 = 180^o+\varphi_0$ $(-\pi=-PM+\varphi_0$ *ekuaziotik PM askatuz lortzen da)*

Egonkorra den sistema batek beti izango du PM>0, eta zenbat eta PM handiagoa izan, are eta egonkorragoa izango da sistema hori begizta itxian.

Egonkortasun mugan



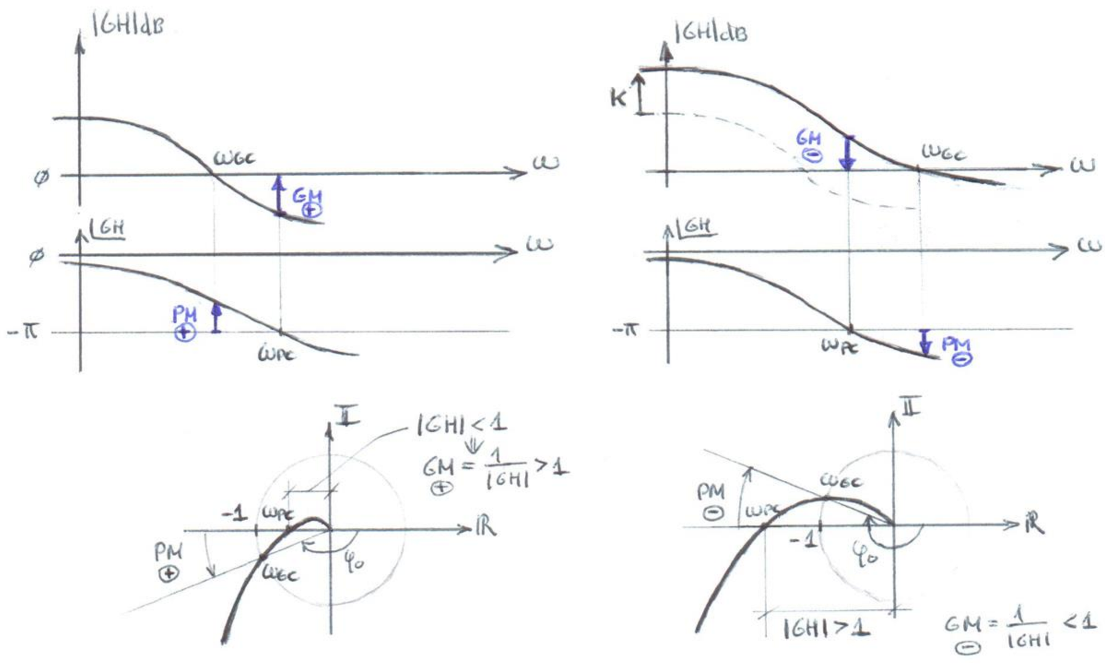
GM=20 log 1/1=0dB
PM=0

GM eta PM Bode-diagrametan eta diagrama polarrean

Erraz-erraza da. Begizta irekian K gehitzen bada $\Rightarrow$ sistema begizta itxian ezegonkortasun mugatik hurbilago geratzen da. K asko handituz, zeharkatu egingo luke muga hori, ezegonkor bihurtuz begizta itxian.

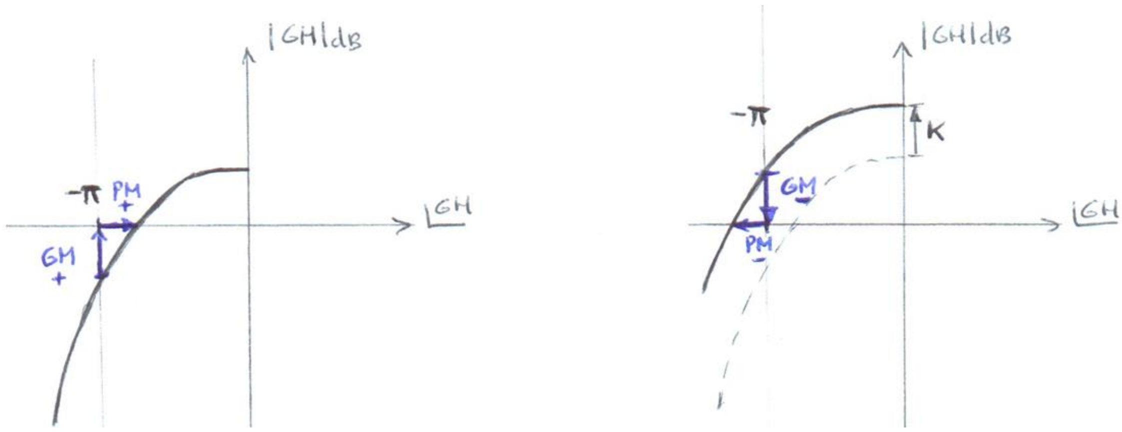
Boderen diagrametan, moduluaren kurba 20 log K gorantz igotzea besterik ez da. Honek eragin hau dakar: ω_{PC} ez da aldatzen K irabazpenak ez baitu fase ekarpenik, GM txikitu egiten da, eta ω_{GC} handitzen, eta horregaitik PM txikitu.

GM eta PM Bode diagramako kontroladore egokien bidez alda daitezke (erraza da egitea, kurbak gehitu egiten baitira diagrama horietan).



MG eta MP Black-Nichols diagraman

K-ren gehikuntzak kurba igotzen du.



OHARRA: GM eta PM erabili ahal izateko, G(s)H(s) sistema (begizta irekikoa) fase minimoduna izan behar da, hau da, bere polo eta zero guztiak *s* planoaren ezker erdialdean egon behar dira kokatuta.

7. KONTROLADOREEN DISEINUA DENBORA- ETA MAIZTASUN-EREMUAN

7.1 SARRERA

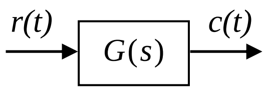
Orain arte irakasgaian zehar egin duguna zera izan da, **analisia**:

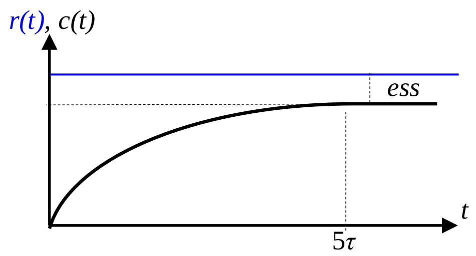
- Nola adierazi sistema dinamikoak
- Bere portaera aztertu denbora- eta maiztasun-eremuan
- Egonkortasunaren azterketa denbora- eta maiztasun-eremuan

Geratzen dena zera da, **diseinua**: zerbait aldatzea sistemari bere erantzuna edo portaera guk nahi duguna izan dadin. Horretarako, kontroladorea deituriko sistema gehitzen zaio jatorrizko sistemari, eta begizta itxian jartzen da dena edo sistema osoa. Gai honetan, kontroladoreen diseinua denbora-eremuko ikuspuntutik aztertuko dugu.

Gogora dezagun kontrolaren kontzeptua:

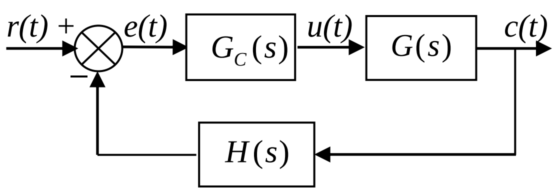
- Nahi ez den irteera edo portaeradun sistema bat dugu, eta ezin dugu lortu hori hobetzerik ezta sarrera oso ondo doituz ere.

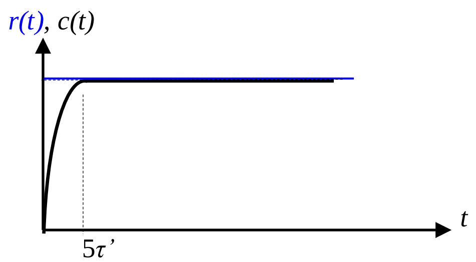




$$G(s) = \frac{K}{1+\tau \cdot s}$$

- kontroladore bat ezarriz gero, aldaketa bat egitea lortzen da, eta ondorioz sistema osoaren portaera aldatzea lortzen da





eta errazago izan dadin, H(s)=1 egiten da.

R(s): sarrera, erreferentzia edo kontsigna
C(s): irteera (sistemaren portaera adierazten digu)
E(s): errorea, sarrera eta irteeraren arteko ezberdintasuna
U(s): kontrol seinalea, kontroladoreak errorea zuzentzeko ematen duen seinalea

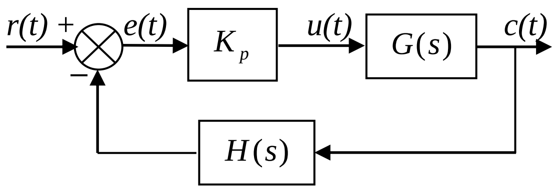
Sistema osoa transferentzia funtzio batekin adierazten da, begizta itxiko transferentzia funtzioarekin alegia, eta sistema orokor edo **sistema oso** moduan aztertzen da.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_C(s)G(s)}{1+G_C(s)G(s)H(s)}$$

Denbora eremuan, batez ere 3 kontrol ekintza mota dira ezagunenak:
- Proportzionala (P)
- Integrala (I)
- Deribatiboa (D)

Ekintza Proportzionala

Ondorengo eskema dauka.

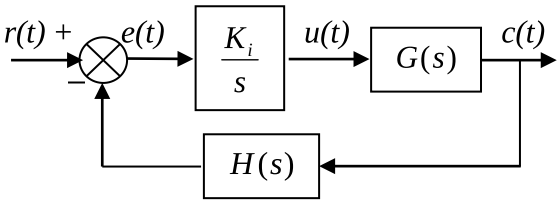


$u(t)=K_P \cdot e(t) \rightarrow U(s)= K_P \cdot E(s)$

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P$$

Ekintza Integrala

Normalean ekintza proportzionalarekin batera joaten da. Ondorengo eskeman bera bakarrik ikus daiteke.

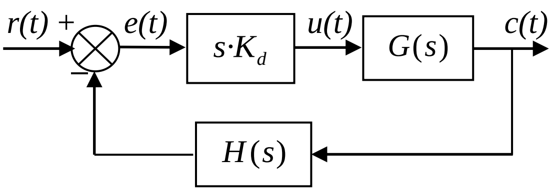


$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) \cdot d\tau$$

$$U(s) = K_i \frac{E(s)}{s} \qquad G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Ekintza Deribatiboa

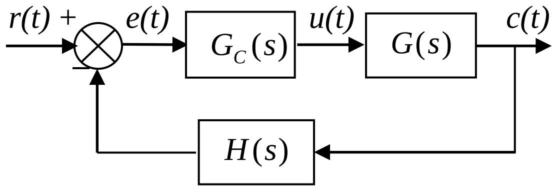
Sekula ez da bakarrik erabiltzen, naiz eta ondorengo eskeman bakarrik agertzen den.



$$u(t) = K_d \frac{d\ e(t)}{dt}$$

$$U(s) = s \cdot K_d \cdot E(s) \qquad G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = s \cdot K_d$$

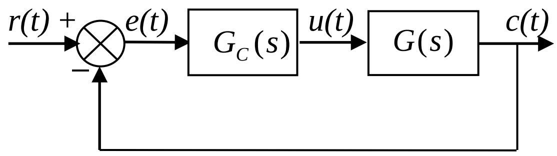
Ikasiko dugun konfigurazioataz gain, badira beste konfigurazio batzuk ere, baina gurea, serie-konfigurazioa edo kaskadakoa izenez ezagutzen da: kontroladorea eta sistema jarraian konektatzen dira.



Ikus dezagun zehatz-mehatz kontroladore bakoitza, non *H(s)=1* dela suposatuko dugun.

7.2 KONTROLADORE PROPORTZIONALA (P)

Kasu honetan $u(t)=K_p\cdot e(t)$, non $G_C(s)=K_p$ den



sistema osoaren transferentzia funtzioa honako hau da:

$G'(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{K_pG(s)}{1+K_pG(s)}$, bere eragin nagusia egoera egonkorreko errorea (e_{ss}) txikitzea eta sistemaren erantzuna azkartzea da.

Ikus dezagun erantzunaren azken balioa,

$$c_{ss}=\lim_{t->\infty} c(t)=\lim_{s->0} s\cdot C(s)=\lim_{s->0} s\cdot G'(s)\cdot R(s),$$

non, *G'(s)* kasu bakoitzean dugun sistema osoa (begizta itxikoa) den,

suposatuz, sarrera maila dela: *r(t)=K (ktea)*→*R(s)=K/s*

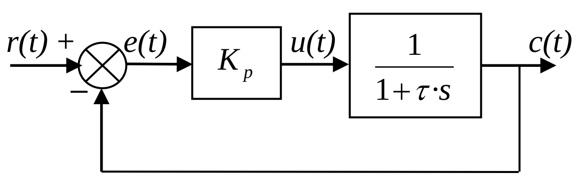
- Begizta itxian, $c_{ss}=\lim_{s->0} s\dfrac{K_pG(s)}{1+K_pG(s)}\dfrac{K}{s}=\dfrac{K_pG(0)}{1+K_pG(0)}K$,

$K_P\uparrow$ bada $\Rightarrow K_{est}'=\dfrac{K_pG(0)}{1+K_pG(0)}\rightarrow 1$, eta horrela $c_{ss}\rightarrow K$ (baina sekula ez da berdintzen)

Ikus dezagun bere eragin nagusiak (e_{ss} txikitzea eta erantzuna azkartzea) ordena desberdinetako sistemetan.

1. ordenako sistema

Har dezagun ondorengo sistema, *r(t)=1* delarik,



eta kontuan izanik $T=\tau$, eta bere transferentzia funtzioa ondorengo hau dela,

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_p/1+\tau\cdot s}{1+K_p/1+\tau\cdot s}=\frac{K_p}{1+K_p+\tau\cdot s}=\frac{K_p/1+K_p}{1+\left(\tau/1+K_p\right)s}$$

1. ordenakoa izaten jarraitzen du eta bere denbora-konstante berria $\tau'=\tau/1+K_p$ da, eta irteeraren azken balio berria $c_{ss}=\dfrac{K_p}{1+K_p}$. Jakinik ere $e_{ss}=\dfrac{1}{1+K_{pos}}=\dfrac{1}{1+K_p}$ dela,

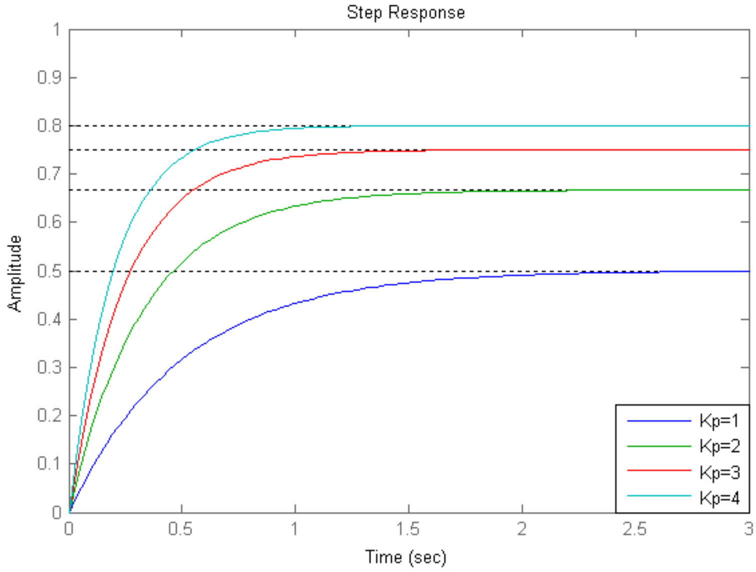
orduan $K_p\uparrow$ egitean:

- $\tau'\downarrow\rightarrow$ sistema azkarragoa
- $c_{ss}\uparrow$, eta $\rightarrow 1$
- $e_{ss}\downarrow$, eta $\rightarrow 0$
- poloa, $1+\dfrac{\tau}{1+K_p}s=0, s=-\dfrac{1+K_p}{\tau}$, jatorritik hurrundu egiten da

suposa dezagun $\tau=T=1\ s$ dela,

K_P	c_{ss}	e_{ss}	τ' (berria)	poloa
Gabe(B.Irekian)	1	0	1	-1
1	0.5	0.5	0.5	-2
2	0.66	0.33	0.33	-3
3	0.75	0.25	0.25	-4
4	0.8	0.2	0.2	-5

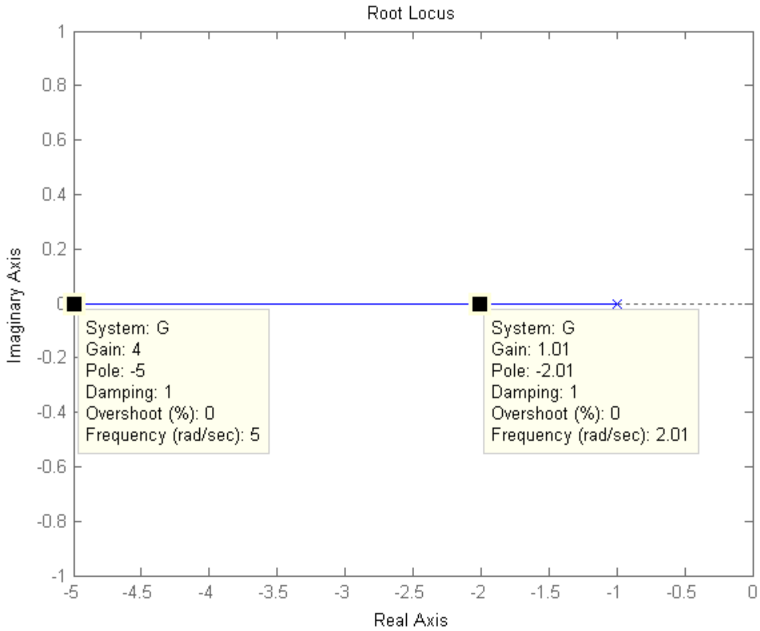
eta marraztuz irteera maila unitarioaren aurrean,



sistemaren mota behatuz:

- begizta irekian $G(s)H(s)=\dfrac{K_P}{1+\tau\cdot s}$, 0 motakoa da, orduan mailarean aurrean errore jakin batekin jarraitzen du.

Erroen Leku Geometrikoa eraikiz, argi ikusten da beti izango dela egonkorra, alde erreal positibodun polorik ez baitu sekula, eta zenbat eta K_p handiagoa izan, sistemaren poloa azkarragoa dela. (*Erroen Leku Geometrikoa (6. gaia)*)

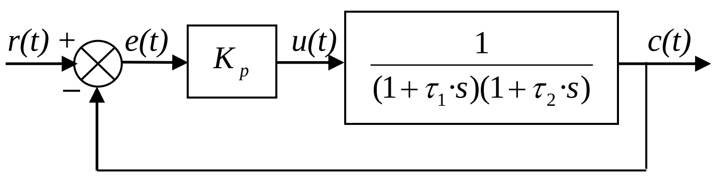


Laburbilduz, K_P handitzearen eraginak hauexek dira:

- ✓ sistema azkarragoa (τ' ↓)
- ✓ doitasun handiagoko sistema (ess↓, baina ess≠0)
- × kontrol seinale handia, honek sistema asebete dezake
  hasieran $r=1$, $c=0 \rightarrow e=1 \rightarrow K_p=30$ bada, $u=30$ (agian handiegia da nire sistemarentzako)

2. ordenako sistema

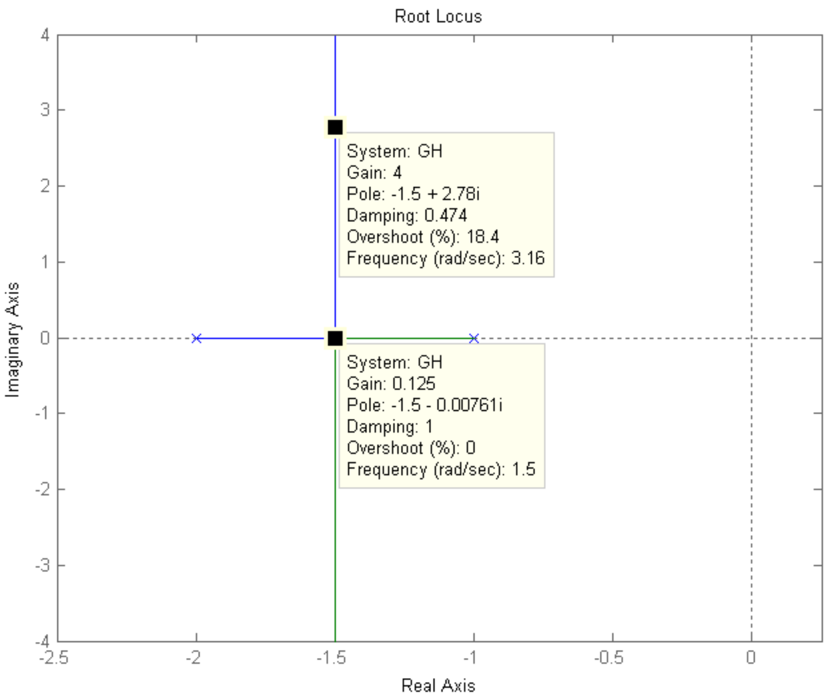
Eskema honetan oinarritzen da

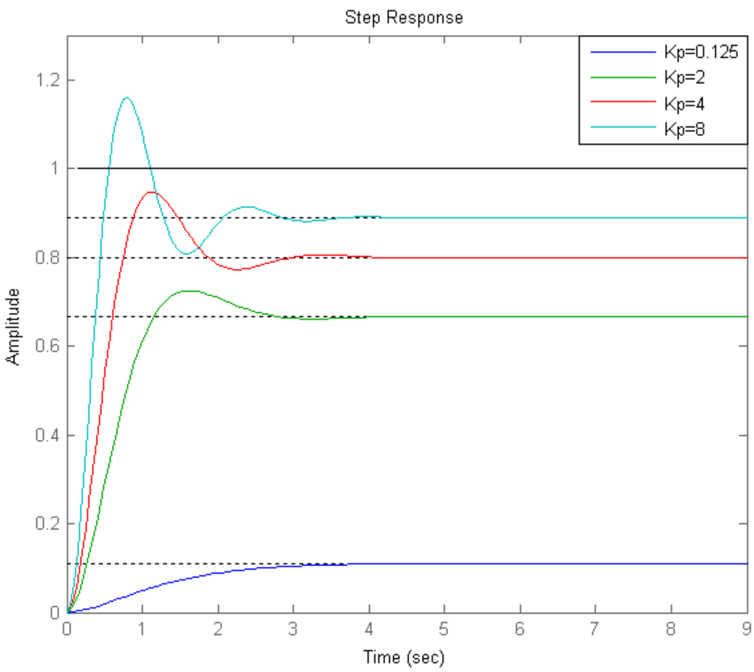


2. ordenako sistemak *denbora-konstante biko sistemak* izenez ere ezagunak dira. 0 motako sistema batek ezin du doitasun osoz jarraitu maila sarrera. Bere erantzuna adibide batekin ikusiko dugu, non $\tau_1=T_1=1\ s$ eta $\tau_2=T_2=0.5\ s$ diren, eta ondorengo begizta itxiko transferentzia funtzioa geratzen da,

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2\cdot K_p}{s^2+3s+2+2\cdot K_p}\text{, non bere poloak } s_{1,2}=-1.5\pm\sqrt{0.25-2\cdot K_p}\text{ diren}$$

eta erroen leku geometrikoa eraikiz, argi ikusten da beti dela egonkorra, alde erreal positibodun polorik ez baitu sekula, eta zenbat eta K_p handiagoa izan, sistemaren poloak, errealak izatetik ($0<K_p<0.125$) konplexu konjokatu motakoak izatera bihurtzen direla ($K_p>0.125$), non K_p handituz jarraituz, geroz eta moteltze faktore txikiago eta maiztasun natural handiagoa izanez (K_p↑→ δ↓ ω_n↑), sistema oszilakorragoa eta azkarragoa bihurtzen dela.





Laburbilduz, K_P handitzearen eraginak hauexek dira:

✓ sistema azkarragoa ($\omega_n\uparrow \rightarrow t_s\downarrow$)
✓ doitasun handiagoko sistema ($e_{ss}\downarrow$, baina $e_{ss}\neq 0$)
× gehienezko gaindiketa eta oszilazio handiagoak ($M_p\uparrow$, $\delta\downarrow$)
× kontrol seinale handia, honek sistema asebete dezake
hasieran $r=1$, $c=0 \rightarrow e=1 \rightarrow K_p=30$ bada, $u=30$ (agian handiegia da nire sistemarentzako)

Oharra: kontroladore proportzionalaren bidez *ess* txikiak (eta doitasun handiak) lor daitezke, baina esan behar da ere **beti dela beharrezkoa erroreren bat izatea**, kontrol seinalearen bidez errorea zuzentzeko, bestela ezin da errorearen zuzenketarik egin.

7.3 KONTROLADORE PROPORTZIONAL-INTEGRALA (PI)

Hasieran ikusi dugun bezala, **ekintza integralak** ematen duen kontrol seinalea hauxe da,

$$u(t)=K_i\int_0^t e(\tau)d\tau=\frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau \Rightarrow U(s)=K_i\frac{E(s)}{s}=\frac{K_p}{T_i}\frac{E(s)}{s} \Rightarrow G_C(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{K_i}{s}=\frac{K_p}{s\cdot T_i}$$

non bere ezaugarririk garrantzitsuenak hauek diren:

- $u(t)$ seinalea eman dezake $e(t)=0$ izan arren
- e_{ss} gutxitu edo baliogabetzen du baina egonkortasuna konpromisoan jarriz
- ia beti ekintza proportzionalarekin batera erabiltzen da, non **ekintza proportzional-integrala** (PI) lortzen den:

$$u(t)=u_p(t)+u_i(t)=K_p\cdot e(t)+K_i\int_0^t e(\tau)d\tau=K_p\left(e(t)+\frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau\right)$$

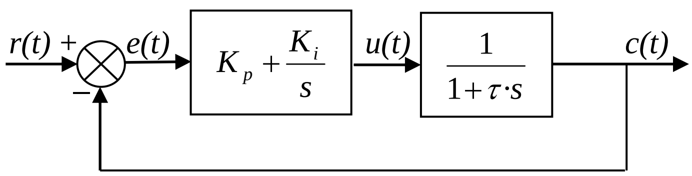
$$\frac{U(S)}{E(S)}=K_p+\frac{K_i}{s}=\frac{K_p\cdot s+K_p/T_i}{s}=\frac{K_p(s+1/T_i)}{s}$$, 1 motakoa denez→ $e_{ss}=0$ maila ezartzean.

Oharra: prozesadore edo automata batek egikari ahal dezan, ekintza integrala diskretizatu ondoren honela geratzen da,

$$u_i(k)=K_i\cdot e(k)\cdot T_s+u_i(k-1)$$

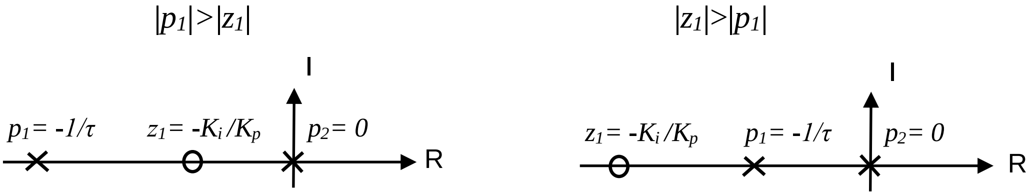
horrela, ekintza integralak $u_i(t)$ seinalea eman dezakeela $e(k)=0$ izan arren ulertu daiteke: k unean errorea 0 izan arren, aurreko uneko $(k-1)$ kontrol seinaleak duen balioak hartzen du.

PI kontrola 1. ordenako sistema batetan



Begizta itxiko tranferenzia funtzioa honela geratzen da,

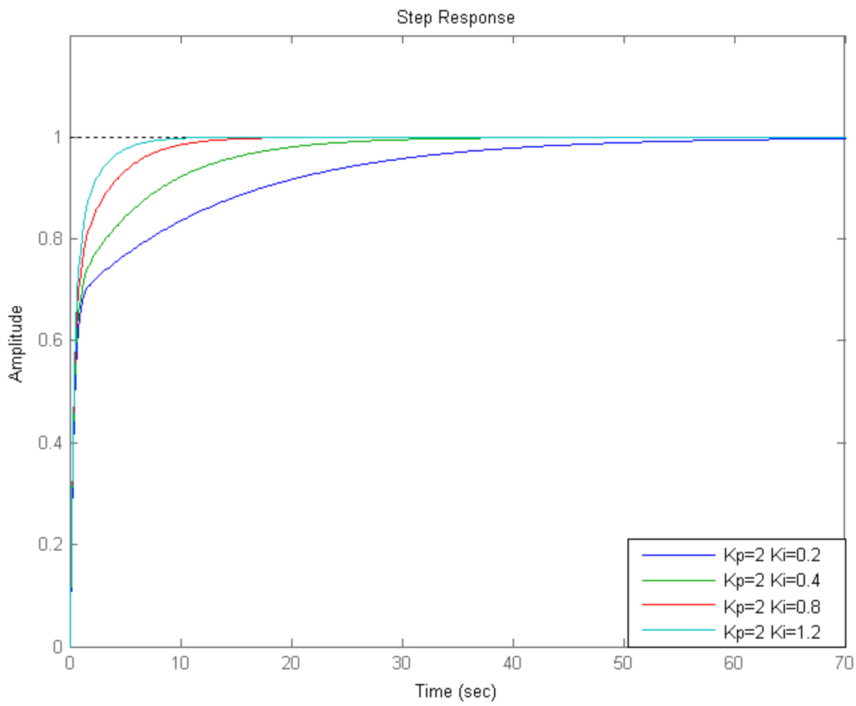
$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_p(s+1/T_i)}{\tau\cdot s^2+(1+K_p)s+K_p/T_i}$$, PI kontroladoreak zero bat ($z_1=-1/T_i$) eta jatorriko polo bat ($p_2=0$) ekartzen ditu begizta irekian. Kontuan izanda $K_i=\frac{K_p}{T_i}\rightarrow T_i=\frac{K_p}{K_i}$, orduan zeroa $z_1=-\frac{K_i}{K_p}$ izango da, non aukera bi agertzen diren: $|p_1|>|z_1|$ eta $|p_1|<|z_1|$.



Horrela, Erroen Leku Gemetrikoaren ikuspegitik esan dezakegu, K_p eta K_i koefizienteak positiboak izango direnez, sistema beti izango dela egonkorra begizta itxian. $|p_1|>|z_1|$ kasua hartuz (ezkerrekoa), begizta itxian p_2 poloa z_1 zerorantz joango da, eta p_1 poloa $-\infty$ aldera.

P ekintza handituz (K_p), begizta itxiko sistemaren azkartasuna handitu eta ess murriztea lortzen da. Ondoren, errore hori guztiz 0 egiteko, **I** ekintza (K_i) eransten zaio, non zenbat eta handiagoa izan, azkarrago baliogabetuko duen errore hori. K_i (K_p/T_i) termino integralak, errorea dagoen bitartean *u(t)* kontrol-seinaleak errorea integratu egingo du, non une batzuetan, errorea zero izan arren, kontrol seinale konstantea emateko gai den ere.

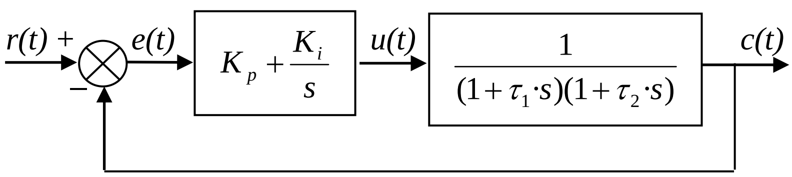
Ondorengo irudian ikus daiteke $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$ sistemak begizta itxian PI kontroladore baten hainbat diseinurentzat izango duen maila unitarioaren aurreko erantzuna.



OHARRA: askotan ekintza integrala T_i parametroaren bidez definitzen da, non bere unitatea segundoak diren. *Adibidez*, $K_p=2$ bada eta $T_i=10$ *s* bada, hortik $K_i = K_p/T_i=0.2$

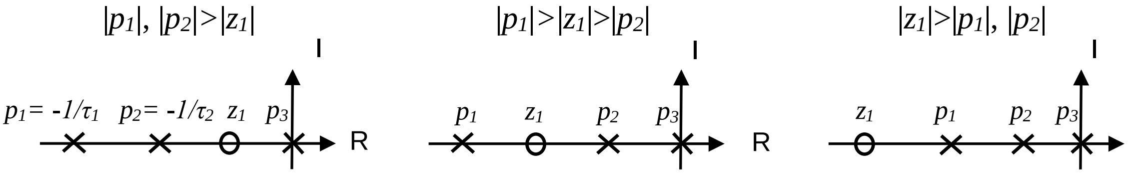
PI kontrola 2. ordenako sistema batetan

Kasu honetan denbora-konstante biko sistema dugu

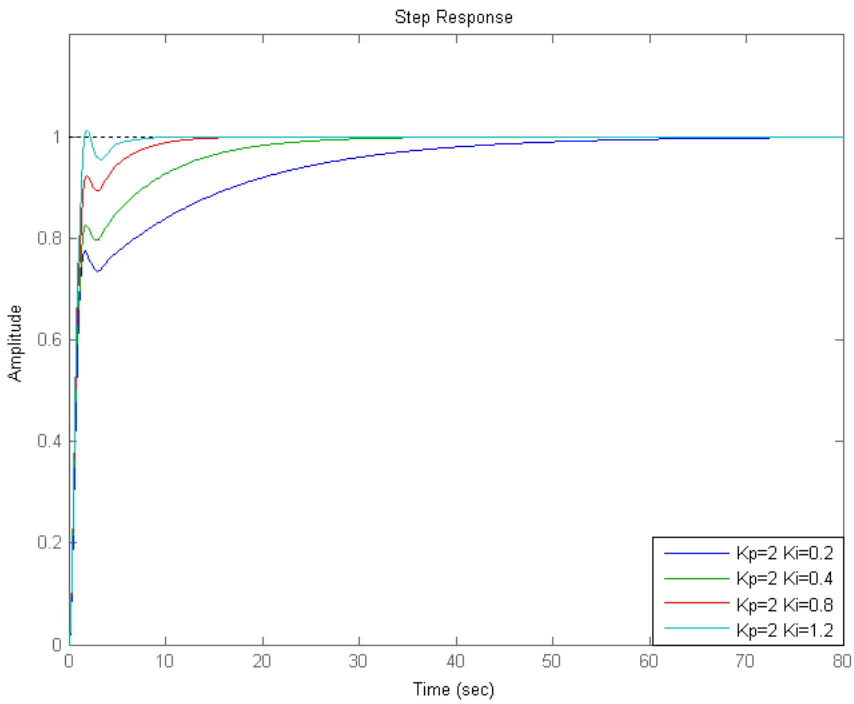


non $G(s) = \dfrac{K}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1}$ den, eta $K=1$, $\tau_1=1s$, $\tau_2=0.5s$ izanik horrela geratzen da

$G(s) = \dfrac{2}{s^2 + 3s + 2}$, eta begizta itxian $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{2K_p(s + 1/T_i)}{s^3 + 3s^2 + 2(1 + K_p)s + 2K_p/T_i}$, non PI kontroladoreak zero bat ($z_1=-1/T_i$) eta jatorriko polo bat ($p_3=0$) ekartzen dituen begizta irekian. Kontuan izanda zeroa $z_1 = -\dfrac{K_i}{K_p}$ dela, hiru aukera agertzen dira, suposatuz $|p_1|>|p_2|$ dela:



Erroen Leku Gemetrikoaren ikuspegitik esan dezakegu, K_p eta K_i koefizienteak positiboak izango direnez, sistema beti izango dela egonkorra begizta itxian. $|p_1|$, $|p_2|>|z_1|$ kasua hartuz (ezkerrekoa), begizta itxian p_3 poloa z_1 zerorantz joango da, eta p_1 eta p_2 poloak berdinak izatera heltzetik aurrera, konplexu konjokatu bihurtzen direla.



Hemen ere berdin jokatzen da, lehenengo P ekintza handitzen da errorea dexente murriztu arte, eta ondore I ekintzaren bidez errorea baliogabetzen da, behar den abiadurarekin.

Sistemaren poloak konplexu konjokatuak balira, erroen leku geometrikoaren planteamendua apur bat desberdindu egiten da. Dena den, ekintza integrala gehitzeak sistema ezegonkortu lezake, beraz, beti egin behar da egonkortasun analisia, ELG edo Routh-Hurwitzen irizpidea erabiliz.

7.4 KONTROLADORE PROPORTZIONAL-DERIBATIBOA (PD)

Ekintza deribatiboa ekintza proportzionalarekin batera (PD) eta baita proportzional eta integralarekin batera (PID) agertzen da, sekula ez da bera bakarrik agertzen.

$$u(t) = u_p(t) + u_d(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{d\ e(t)}{dt} \Rightarrow U(s) = K_p E(s) + K_p \cdot T_d \cdot s \cdot E(s) \Rightarrow$$

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d \cdot s) = K_p + K_d \cdot s \text{, non } K_d = K_p \cdot T_d$$

Ikusten denez, ez da sistema kausala (zero kopurua poloena baino handiagoa da), eta honek, praktikan ezin daitekeela gauzatu esan nahi du, urrutian kokatzen den poloren bat ez bazaio gehitzen behintzat. Horrela, adibidez $s=-100$ ($val=100$) poloa gehituz,

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_d \cdot s}{s+100} \rightarrow G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{(K_p + K_d) \cdot s + 100 \cdot K_p}{s+100}$$

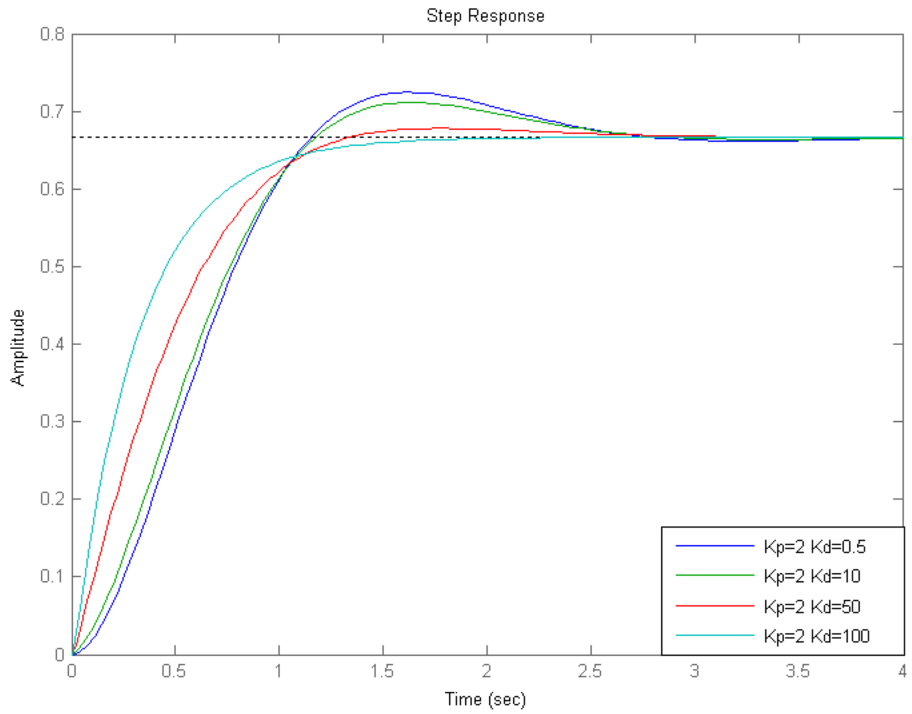
Ekintza deribatiboaren eragina K_d (T_d)↑ eginez:

- ✓ sistema azkarragoa egitea da
- ✓ erantzunaren oszilazioak murriztea da, eta horrekin, sistema egonkorragoa egitea ere
- × zaraten eragina biderkatu egiten du, beraz interferentziaz kutsatutako inguruneetan kontu handiz erabili behar da

Bestalde $G(s) = \dfrac{K}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1}$ hartuz, non 0 motakoa denez, $e_{ss} \neq 0$ izango dugu maila sarreraren aurrean. $K=1$, $\tau_1=1s$, $\tau_2=0.5s$ izanik horrela geratzen da $G(s) = \dfrac{2}{s^2 + 3s + 2}$

Begizta itxiko transferentzia funtzioa,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2[(K_d s + K_p) + 100 K_p]}{s^3 + 103 s^2 + [2(K_p + K_d) + 300]s + 200(1 + K_p)} \text{ da.}$$

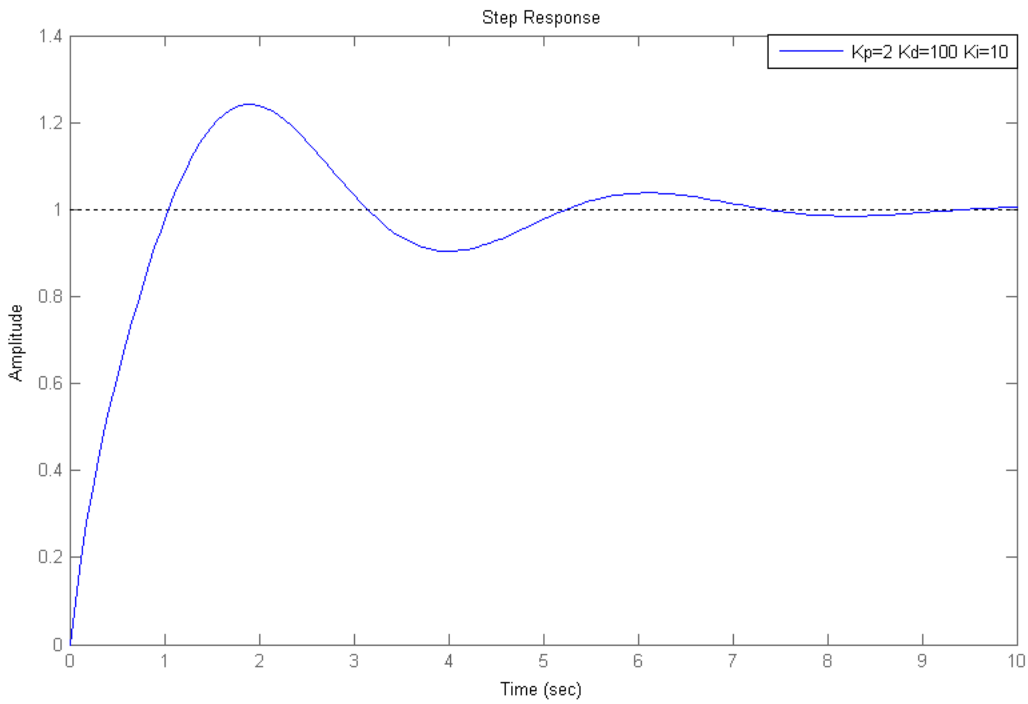


Ekintza integralean gertatzen den bezala, deribatiboa ere K_d parametroaren ordez T_d parametroaren bidez emana izan daiteke. Aurreko grafikoan, $K_p=2$ mantenduz eta ekintza deribatiboa geroz eta handiagoa jarriz (T_d = 0.25 s , 5 s, 25 s, 50 s), ikus daiteke nola sistemaren erantzuna geroz eta azkarragoa dela.

PD kontroladorea 1 motako sistemetan erabiltzen da gehien bat, sistemaren integratzaileak baliogabetzen baitu *ess* mailaren aurrean (motore elektrikoen posizio sistema). Baina sistema 0 motakoa denean eta e_{ss} 0 izatea nahi denean, derrigorrez ekintza **integrala** gehitu behar zaio (sistemaren mota 0-tik 1-era igoz), ekintza **deribatiboak** sistema azkartu arren, ezin baitio errorea baliogabetu. Adibidez, aurreko kasuko sistemaren (aurreko orrialdea) errorea txikitzeko ekintza **proportzionala** handitu beharko litzateke, baina baliogabetu nahi ezkero, orduan ekintza **integrala** gehitu beharko litzaioke, **PDI** edo **PID** kontroledorea inplementatzea lortuz.

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_d \cdot s}{s+100} + \frac{K_i}{s},$$

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{(K_p + K_d)s^2 + (100 \cdot K_p + K_i)s + 100K_i}{s(s+100)}$$



Dena den, azkenean erabiltzen den kontroladorea eta sistema kontuan hartuz, sistema osoaren begizta itxiko egonkortasunaren azterketa zehatz bat egin behar da beti, ondo ezagutu ahal izateko kontroladorearen parametroen balioen mugak.

7.5 PID KONTROLADOREEN SINTONIZAZIOA

PID kontroladoreak sintonizatzeko, hau da, beraien kontrol parametroen (K_p , K_i , K_d) balio egokiak aurkitzeko hainbat metodo daude, sistema oso edo kontrolatuari eskatzen zaizkion zehaztapenak bate daitezen. Metodo ezagunenen artean, *Ziegler-Nichols, bi graduko askatasun sistemena, denbora-eremuko zehaztapenetan oinarrituak (τ, ess, etab)* eta *maiztasun eremukoak* ditugu.

Baina gaur egun, simuladore on eta merkeak daudenez, askotan 'eskuz' edo 'esperientzia eta intuizioz' ere asko sintonizatzen dira, non zehaztapenak betetzen diren ala ez denbora gutxian aztertu daitekeen. Horrela:

- 0 motako sistemetan PI kontroladoreak erabiltzen dira, agian D ekintza pixkat erantzunaren oszilazioak murrizteko edo/eta erantzun hori azkartzeko gehitzen delarik
- 1 edo mota garaiagokoetan PD kontroladoreak erabiltzen dira, eta agian I ekintza pixkat e_{ss} 0 izateko, sistema esperimentalean edo praktikoan, e_{ss} baliogabetzea lortzen ez denean

P/PI kontroladoreen sintonizazioa denbora-eremuko zehaztapenetan oinarrituz

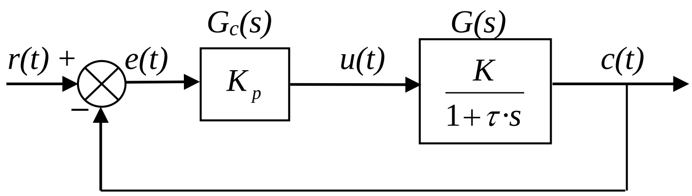
Ondoren bi adibide ikusiko dira, kasu bakoitzean eskatzen diren denbora-eremuko zehaztapenak bete daitezen. Motore elektrikoaren abiadura kontrola hartuko da adibide gisa.

1. ordenako sistema batentzako (0 motakoa) P kontroladorea denbora eremuan: ess, τ

Dakigun bezala, 1. ordenako eta 0 motako sistema baten eta kontroladore Proportzionalaren trasnferentzia funtzioak ondorengo hauek dira,

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau \cdot s}\ ,\ G_C(s) = K_p$$

non begizta itxiko sistemaren eskema hau izango den,



Adibidez, sistema hori motore elektriko bat bada, non $K=K_T/B$, $\tau=J/B$, $u(t)= i_T(t)$, $r(t)=\omega_m{}^*(t)$, $c(t)=\omega_m(t)$ diren, eta, J=0.057 Kg·m^2, B=0.015 Nm/rad/s, Kt=2.9489 Nm/A izanik:

a) Zein izan behar da K_p konstantearen balioa, begizta itxiko sistemaren egoera egonkorreko errorea 100 rad/s-ko mailaren aurrean ± % 4-koa iza nahi bada? Zein da sistema osoaren (begizta itxia) denbora konstantea? Aztertu sistemaren egonkortasuna.

Begizta itxiko transferentzia funtzioa hauxe da,

$$\frac{\omega_m(s)}{\omega_m^*(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} = \frac{K_p\,K/(\tau\ s+1)}{1+K_p\,K/(\tau\ s+1)} = \frac{K_pK}{\tau\ s+1+K_pK}$$

$$\frac{\omega_m(s)}{\omega_m^*(s)} = \frac{K_pK/(1+K_pK)}{\tau\ s+1+K_pK/(1+K_pK)} = \frac{\dfrac{K_pK}{(1+K_pK)}}{\dfrac{\tau}{(1+K_pK)}s+1} = \frac{K'}{\tau\ 's+1}$$

Routh-Hurwitz aplikatuz,

$$\begin{array}{l|c} s^1 & \tau\ /(1+K_pK) \\ s^0 & 1 \end{array} \qquad \frac{\tau}{(1+K_pK)}>0 \quad - \ \tau>0 \ \ \textit{beti betetzen da}$$

$$- \ 1+K_pK>0 \rightarrow K_pK>-1$$

$$K_p>-1/K=-1/196.6 \rightarrow \boxed{K_p>-0.0051}$$

Orduan sistema egonkorra da begizta itxian K_p konstantearen balioa -0.0051 balioa baino handiagoa den bitartean. Halere, normalean ez da erabiltzen K_p konstantearentzako balio negatiborik.

$$e_{ss}=\lim_{s->0} s\cdot E(s)=\lim_{s->0} s\frac{R(s)}{1+Gc(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}=\lim_{s->0} s\frac{100/s}{1+K_p\cdot G(s)\cdot 1}=\lim_{s->0}\frac{100}{1+K_p\cdot G(s)}=100\cdot 0.04$$

$$e_{ss}=\lim_{s->0}\frac{1}{1+K_p\cdot\frac{K}{1+\tau\cdot s}}=0.04\Rightarrow\frac{1}{1+K_p\cdot\frac{K}{1+\tau\cdot 0}}=\frac{1}{1+K_p\cdot K}=0.04\Rightarrow\frac{1}{0.04}=1+K_p\cdot K$$

$$K_p=\frac{25-1}{K}=\frac{24}{196.5933}=0.1221$$

$\boxed{K_p=0.1221}$, *eta 0.1221>-0.0051 denez, sistema egonkorra da begizta itxian.*

Begizta itxiko sistemaren transferentzia funtziotik, denbora konstantea hauxe dugu,

$$\tau'=\frac{\tau}{(1+K_pK)}=\frac{3.8}{(1+0.1221\cdot 196.5933)}=0.152\ \ s$$

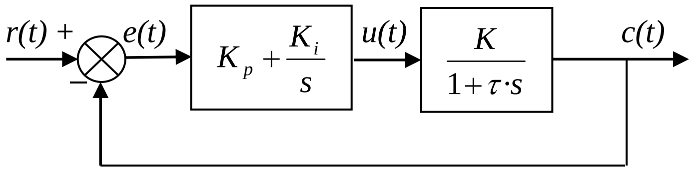
b) Zein izan behar da K_p konstantearen balioa, begizta itxiko sistemaren denbora konstantea 0.2 s izan dadin? Eta horri dagokion egoera egonkorreko errorea lehengo sarrera berdinarentzako?

1. ordenako sistema batentzako (0 motakoa) PI kontroladorea denbora eremuan: polo-zero kantzelazioa eta τ

Ezaguna da kontroladore Proportzional Integralaren trasnferentzia funtzioa ondorengo hau dela,

$$G_C(s)=K_p+\frac{K_i}{s}=\frac{K_p\cdot s+K_i}{s}=\frac{K_p\cdot s+K_p/T_i}{s}=K_p\frac{s+1/T_i}{s}=K_p\frac{T_i\cdot s+1}{T_i\cdot s}$$

begizta itxiko sistemaren eskema honakoa izanik,



bere transferentzia funtzioa lortzen da,

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_m(s)}{\omega_m^*(s)}=\frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)}=\frac{K_p\frac{(T_i\cdot s+1)}{T_i\cdot s}\frac{K}{(\tau\ s+1)}}{1+K_p\frac{(T_i\cdot s+1)}{T_i\cdot s}\frac{K}{(\tau\ s+1)}\cdot 1}$$

Garatuz, 2. ordenakoa eta zero 1 duen sistema geratzen da. Baina **polo-zero kantzelazio metodoa** aplikatuz, sinplifikatu egiten da, zerorik gabeko eta 1. ordenako sistema bat lortuz begizta itxikan. Horretarako, $\boldsymbol{T_i=\tau}$ aukeratu eta gauzatzen da, eta ondoren geratzen den transferentzia funtzioa hauxe dugu,

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_m(s)}{\omega_m^*(s)}=\frac{K_p\frac{\cancel{(T_i\cdot s+1)}}{T_i\cdot s}\frac{K}{\cancel{(\tau\ s+1)}}}{1+K_p\frac{\cancel{(T_i\cdot s+1)}}{T_i\cdot s}\frac{K}{\cancel{(\tau\ s+1)}}\cdot 1}=\frac{K_p\frac{K}{T_i\cdot s}}{1+K_p\frac{K}{T_i\cdot s}}=\frac{K_pK}{T_i\cdot s+K_pK}=\frac{1}{\frac{T_i}{K_pK}\cdot s+1}$$

non sistema osoaren denbora-konstantea $\tau'=\frac{T_i}{K_pK}=\frac{1}{K_iK}$ den, eta irabazpen estatikoa, unitatea.

<u>Oharra</u>: kontuan izan behar da metodo hau aplikatu ahal izateko, sistemaren τ denbora-konstantea definitzen duten parametroak oso gutxi edo ezer ez direla aldatzen sistema errealean denbora iragan ahala. Adibidez, motorearen J inertzia momentua eta B marruskadura koefizientea ($\tau=J/B$).

Aurreko ariketako motore elektriko berdina hartuz,

a) Zeintzu izan behar dira K_p eta K_i konstanteen balioak, begizta itxiko sistema 0.1 segundotan egonkortu nahi bada 100 rad/s-ko mailaren aurrean? Aztertu sistemaren egonkortasuna.

Routh-Hurwitz aplikatuz,

$$\begin{array}{c|c} s^1 & T_i/K_pK \\ s^0 & 1 \end{array} \qquad \frac{T_i}{K_pK}=\frac{\tau}{K_pK}>0$$

- $\tau>0$ *beti betetzen da*
- $K_pK>0\rightarrow$, $K>0$ *beti betetzen da, beraz* $K_p>0$

Begizta ixiko lehen ordenako sistema honen erantzuna maila honen aurrean $c(t)=100\cdot(1-e^{-t/\tau'})$ da, eta erantzuna $t=5\cdot\tau'$ segundo pasatzean egonkortzen da, beraz,

$5\cdot\tau'=0.1$ s $\rightarrow \tau'=0.1/5=0.02$ s da.

$$eta\ \ \tau'=\frac{T_i}{K_pK}=\frac{K_p/K_i}{K_pK}=\frac{1}{K_iK}\rightarrow K_i=\frac{1}{\tau' K}=\frac{1}{0.02\cdot 196.5933}=0.2543$$

$$azkenik,\ \ K_i=\frac{K_p}{T_i}=\frac{K_p}{\tau}\ \ denez,\ orduan\ \ K_p=K_i\cdot\tau=0.2545\cdot 3.8=0.9665$$

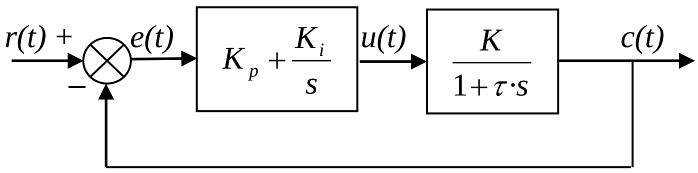
$K_p=0.9665$, e*ta 0.9665>0 denez, sistema egonkorra da begizta itxian.*

PI/PD kontroladoreen sintonizazioa maiztasun-eremuan

Ondoren maiztasun-eremuan sintonizaturiko PI eta PD kontroladoreen bi adibide aurkezten dira. Jatorrizko adibideak motore elektrikoen kasuak dira, baina ordena eta mota bereko edozein sistemari aplikatu ahal diezaiegu berdin-berdin, ondoren agertzen den bezala.

1. ordenako sistema batentzako (0 motakoa) PI kontroladorea maiztasun-eremuan

Kasu honetan hain ezaguna den **1. ordenako** eta **0 motako** sistema dugu, aurreko kasuko sistema berdina baina PI kontroladorea beste modu batera sintonizatzen den, malgutasun handiagoa eskainiz, [1] (motorearen abiadura kontrola).



$G(s) = \dfrac{K}{1+\tau\cdot s}$, $G_C(s) = K_p + \dfrac{K_i}{s} = \dfrac{K_p\cdot s + K_i}{s}$, *H(s)=1*, non sistemaren Begizta Irekiko Transferentzia Funtzioa hartuz, $BIrTF(s) = G_C(s)\cdot G(s) = \dfrac{K_p\cdot s + K_i}{s}\dfrac{K}{1+\tau\cdot s}$, bere irabazpen kritikoko maiztasuna (ω_{GC}) eta fase heina aukeratzen dira (*PM*) , eta ondoren hori lortzeko behar diren K_p eta K_i kalkulatzen dira automatikoki, ondorengo algoritmoa aplikatuz:

1. $tem = \tan(PM - \pi/2 + \arctan(\omega_{GC}\cdot\tau))$
2. $\boxed{K_i = \dfrac{\omega_{GC}}{K}\dfrac{\sqrt{1+\omega_{GC}{}^2\tau^2}}{\sqrt{1+tem^2}}}$
3. $\boxed{K_p = \dfrac{K_i\cdot tem}{\omega_{GC}}}$

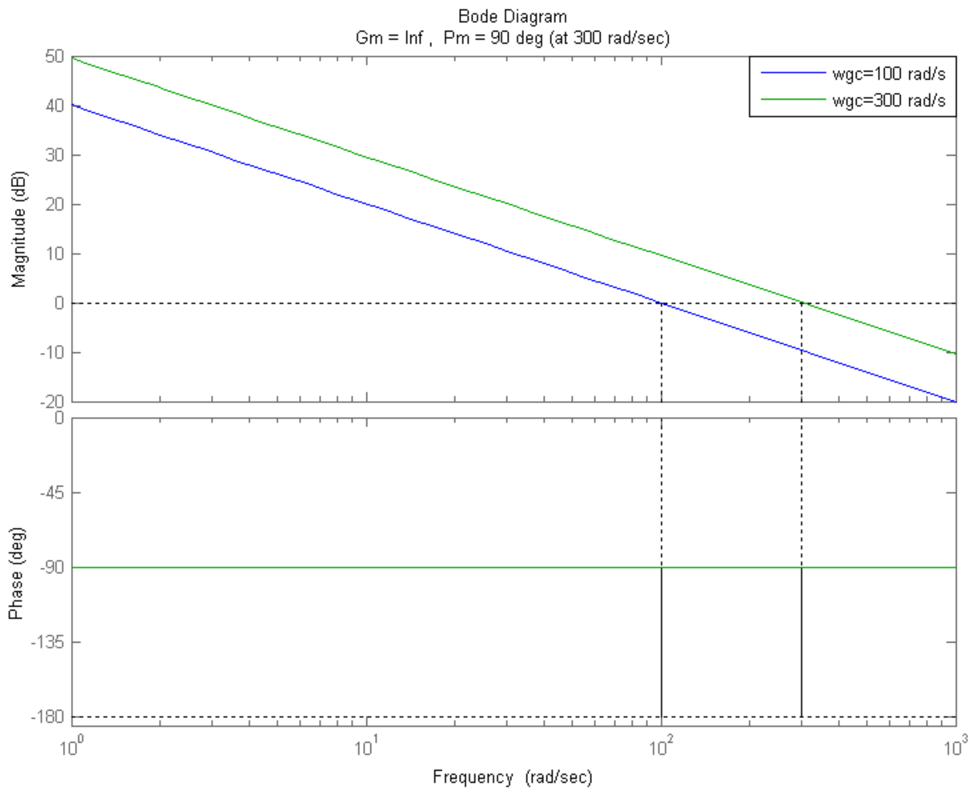
Oharra: begizta irekiko transferentzia funtzioaren polo-zero heina 2-1=1 denez, sistema honek ez du izango ω_{PC} eta ondoren GM=+∞ izango da.
Malgutasun handiagoa: ω_{GC} berdinarentzako, K_p eta K_i desberdinak lor daitezke PM-ren arabera. $\omega_{GC}\uparrow \rightarrow K_p\uparrow, K_i\uparrow$, $PM\uparrow \rightarrow K_p\uparrow, K_i\downarrow$

PI_1order.m

```
% This script tunes the PI (Proportional Integral) controller
% coefficients, Kp and Ki, in frequency domain, choosing the
% Gain Crossover frequency (wgc) and Phase Margin (PM) to use
% with a first order transfer function.
% (N. Mohan, Advanced Electric Drives 2001, Mineapolis, USA)

% 1st order system
%                 K
%       G(s)= -------
%             Tau·s+1
% your system's parameters, i.e. Tau=0.5 and K=2

Tau=0.5;
```

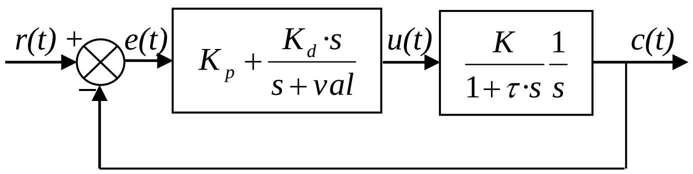
```
K=2;
        G=tf(K,[Tau 1])
% PI regulator
%                    Ki
%       Gc(s)= Kp + ---
%                    s
wgc=300; % desired Gain Crossover ferquency (rad/s)
PM=90*pi/180; % desired Phase Margin (°)
tem=tan(PM-pi/2+atan(wgc*Tau)); % temporary variable
Ki=wgc/K*sqrt((1+wgc^2*Tau^2))/sqrt(1+tem^2) % Integral coefficient
Kp=Ki*tem/wgc % Proportional coefficient

        Gc=tf([Kp Ki],[1 0]) % PI controller

GcG=series(Gc,G) % Open Loop Transfer Function (OLTF)
subplot(1,3,1:2)
margin(GcG) % OLTF's Bode diagraman where wgc and PM are shown
grid on
CLGcG=feedback(GcG,1) % Closed Loop Transfer Function (CLTF)
subplot(1,3,3)
step(CLGcG,0.05) % CLTF's step response
title('CLTF´s step response')
```

Gogoratu behar da, zenbat eta (ω_{GC}) handiagoa izan, are eta banda zabalera (*BW*) handiagoa izango dela begizta irekian nahiz itxian, eta ondoren sistema kontrolatua azkarragoa izango dela. Baita ere, zenbat eta *PM* handiagoa, sistema egonkorragoa izango da (nahiz eta kasu honetan beti izango den egonkorra, behintzat PM>0 bada). Ondorengo grafikan ikus daiteke bi diseinuren emaitza: a) PM=90º eta ω_{GC}=100 rad/s, eta b) PM=90º eta ω_{GC}=300 rad/s.



2. ordenako sistema batentzako (1 motakoa) PD kontroladorea maiztasun-eremuan

Kasu honetan **2. ordenako** eta **1 motako** sistema dugu, motore elektrikoaren posizio kontrola erabiltzeko egokia delarik PD kontroladorearen bidez [2], plaka fotoboltaiko eta termosolarretan azimut angelua kontrolatzeko erabili izan duguna.



$G(s) = \frac{K}{1+\tau\cdot s}\frac{1}{s}$, $G_C(s) = K_p + \frac{K_d}{s+val} = \frac{(K_p+K_d)s + K_p\cdot val}{s+val}$, *H(s)=1*, non sistemaren Begizta Irekiko Transferentzia Funtzioa hartuz,

$BIrTF(s) = G_C(s)\cdot G(s) = \frac{(K_p+K_d)\cdot s + K_p\cdot val}{s+val}\frac{K}{1+\tau\cdot s}\frac{1}{s}$, bere irabazpen kritikoko maiztasuna (ω_{GC}) eta fase heina aukeratzen dira (*PM*), eta ondoren hori lortzeko behar diren K_p eta K_d kalkulatzen dira automatikoki, ondorengo algoritmoa aplikatuz:

1. $a = \omega_{GC}^3(1+\tau\cdot val) + \omega_{GC}\cdot tg(PM)\left(val\cdot\omega_{GC} - \tau\cdot\omega_{GC}^3\right)$
2. $b = \left(val\cdot\omega_{GC}^2\cdot tg(PM) - \omega_{GC}^3\right)(1+\tau\cdot val) - \left(\omega_{GC}\cdot tg(PM) + val\right)\left(val\cdot\omega_{GC} - \tau\cdot\omega_{GC}^3\right)$
3. $c = (1+\tau\cdot val)^2\omega_{GC}^4 + (val\cdot\omega_{GC} - \tau\cdot\omega_{GC}^3)^2$
4. $$\boxed{K_d = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{c}{\omega_{GC}^2(1+2\cdot a/b) + (a/b)^2(\omega_{GC}^2 + val^2)}}}$$
5. $$\boxed{K_p = K_d\frac{a}{b}}$$

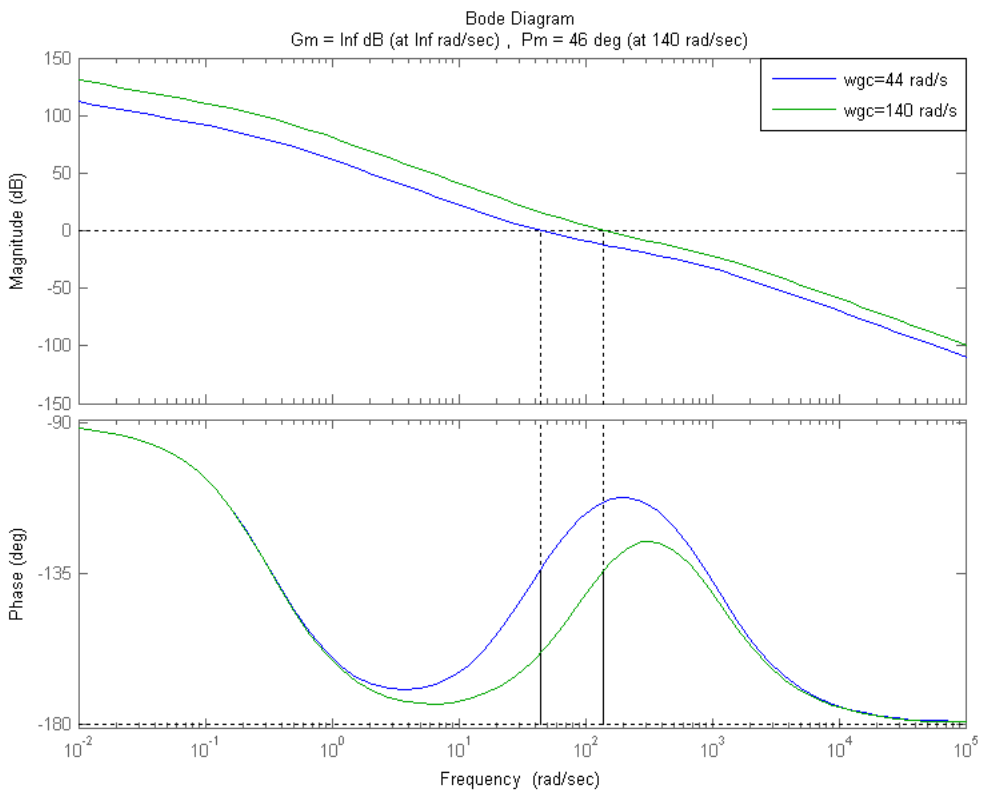
<u>Oharra</u>: begizta irekiko transferentzia funtzioaren polo-zero heina 3-1=2 denez, sistema honek ez du izango ω_{PC} eta ondoren GM=+∞ izango da.
$\omega_{GC}\uparrow \rightarrow K_p\uparrow, K_d\uparrow$, $PM\uparrow \rightarrow K_p\downarrow, K_d\uparrow$

PD_2order1type.m

```
% This script tunes the PD (Proportional Derivative) controller
% coefficients, Kp and Kd, in frequency domain, choosing the
% Gain Crossover frequency (wgc) and Phase Margin (PM) to use
% with a second order transfer function with an integrator.
% (P. Alkorta et al. UPV/EHU, IEEE ICIT 2016)


% 2nd order system with integrator
%                      K       1
%           G(s)= -------- ---
%                    Tau·s+1   s
% your system's parameters, i.e. Tau=3 and K=4

Tau=3;
K=4;
```

```
            G=tf(K,[Tau 1 0])

% PD regulator with causal pole (pol=-val=-1000)
%                          Kd·s
%            Gc(s)= Kp + --------
%                         s+val
val=1000;
wgc=44; % desired Gain Cross-over frecuency (rad/s)
PM=46*pi/180; % desired Phase Margin (°)
a=wgc^3*(1+Tau*val)+wgc*tan(PM)*(val*wgc-Tau*wgc^3); % temporary variable
b=(val*wgc^2*tan(PM)-wgc^3)*(1+Tau*val)-(wgc*tan(PM)+val)*(val*wgc-Tau*wgc^3);
% temporary variable
c=wgc^4*(1+Tau*val)^2+(val*wgc-Tau*wgc^3)^2; % temporary variable
Kd=1/K*sqrt(c/(wgc^2+2*wgc^2*a/b+(a/b)^2*(wgc^2+val^2))) % Derivative
coefficient
Kp=Kd*a/b % Proportional coefficient

            Gc=tf([Kp+Kd val*Kp],[1 val]) % PD controller

GcG=series(Gc,G) % Open Loop Transfer Function (OLTF)
subplot(1,3,1:2)
margin(GcG) % OLTF's Bode diagraman where wgc and PM are shown
grid on
CLGcG=feedback(GcG,1) % Closed Loop Transfer Function (CLTF)
subplot(1,3,3)
step(CLGcG) % CLTF's step response
title('CLTF´s step response')
```

Esan behar da, zenbat eta (ω_{GC}) handiagoa izan, are eta banda zabalera (*BW*) handiagoa izango dela, eta ondoren sistema kontrolatua azkarragoa izango dela. Baita ere, zenbat eta *PM* handiagoa, sistema egonkorragoa izango da (behintzat PM>0 bada). Ondorengo grafikan ikus daiteke bi diseinuren emaitza: a) PM=46º eta ω_{GC}=44 rad/s, eta b) PM=46º eta ω_{GC}=140 rad/s.



Erreferentziak:
[1] *N. Mohan 2001 "Advanced Electric Drives".*

[2] *P. Alkorta et al. UVP/EHU IEEE ICIT2016 “Effective Proportional Derivative Position Control of Induction Motor Drives”.*