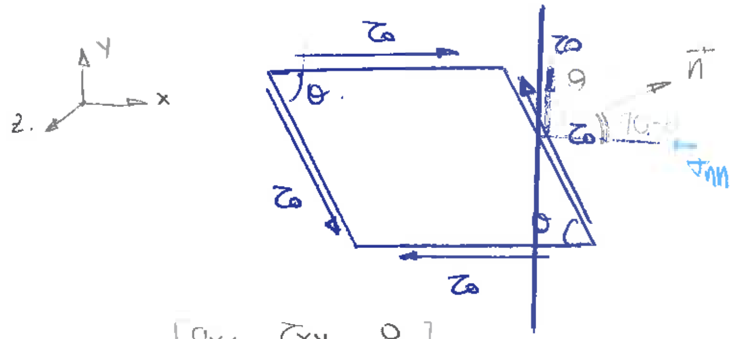
2C4. Tensión normal y tangencial que actúan sobre el plano vertical.



$\vec{n}\left(\cos(90-\theta),\ \operatorname{sen}(90-\theta)\right) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}]\cdot\vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}\operatorname{sen}\theta + \tau_{xy}\cos\theta \\ \tau_{xy}\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tau_{xy} = \tau_0$

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}\operatorname{sen}\theta + \tau_0\cos\theta \\ \tau_0\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix}(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) = \sigma_{xx}\operatorname{sen}^2\theta + \tau_0\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tau_0\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx}\operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_0\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \sigma_{xx}\operatorname{sen}^2\theta + \tau_0\operatorname{sen}2\theta$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{|\vec{\sigma}_n|^2 - \sigma_{nn}^2}$$

$$|\vec{\sigma}_n|^2 = \sigma_{xx}^2\operatorname{sen}^2\theta + \tau_0^2\cos^2\theta + \tau_0^2\operatorname{sen}^2\theta = \sigma_{xx}^2\operatorname{sen}^2\theta + \tau_0^2$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{\sigma_{xx}^2\operatorname{sen}^2\theta + \tau_0^2 - \sigma_{xx}^2\operatorname{sen}^4\theta - 4\tau_0^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}$$

Del diagrama podemos deducir que en el plano inclinado: $\tau_{nt} = \tau_0$, $\sigma_{nn} = 0$

En el plano vertical

$\sigma_{nn} = \sigma_{xx}^{inclin}$

$$\sigma_{xx}\operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_0\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

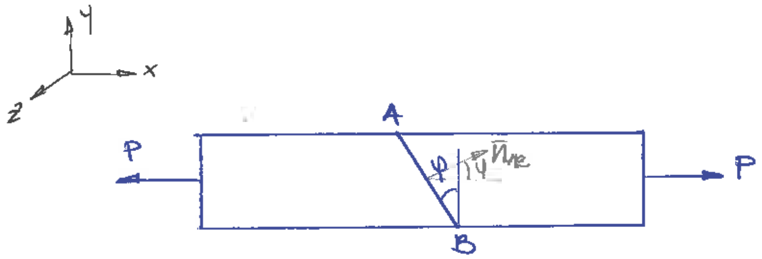
$$\sigma_{xx} = -\frac{2\tau_0\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{-2\tau_0}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sigma_{nn} = \frac{-2\tau_0}{\operatorname{tg}\theta} \\ \tau_{nt} = \tau_{nt}^{incl} = \tau_0\end{gathered}}$$

2C1. Determinar el ángulo de inclinación φ para el que se produce fallo simultáneamente por τ y σ.

Adhesivo $\begin{cases} \tau_{máx} = 4{,}2\ MPa \\ \sigma_{máx} = 7\ MPa \end{cases}$

5 cm de lado



$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma_{xx} = \frac{P}{A} = \frac{P\ (N)}{5\cdot 5\cdot 10^{-4}\ (m^2)}$$

En el plano AB: $\vec{n}_{AB} = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$

$$\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}]\ \vec{n}_{AB} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n\cdot\vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}(\cos\varphi\ \ \operatorname{sen}\varphi) = \sigma_{xx}\cos^2\varphi = 7\ MPa$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{|\vec{\sigma}_n|^2 - \sigma_{nn}^2}$$

$$|\vec{\sigma}_n|^2 = \sigma_{xx}^2\cos^2\varphi$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{\sigma_{xx}^2\cos^2\varphi - \sigma_{xx}^2\cos^4\varphi} = \sigma_{xx}\cos\varphi\sqrt{\underbrace{1-\cos^2\varphi}_{\operatorname{sen}^2\varphi}} = \sigma_{xx}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi = 4{,}2\ MPa$$

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad & \sigma_{xx}\cos^2\varphi = 7 \\ (2)\quad & \sigma_{xx}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi = 4{,}2 \end{aligned}\right\}\quad (2)\div(1)\quad \frac{\sigma_{xx}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{\sigma_{xx}\cos\varphi\cos\varphi} = \frac{4{,}2}{7}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}6 \longrightarrow \boxed{\varphi = 30{,}96^\circ}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{7\ MPa}{\cos^2(30{,}96)} = 9{,}52\ MPa$$

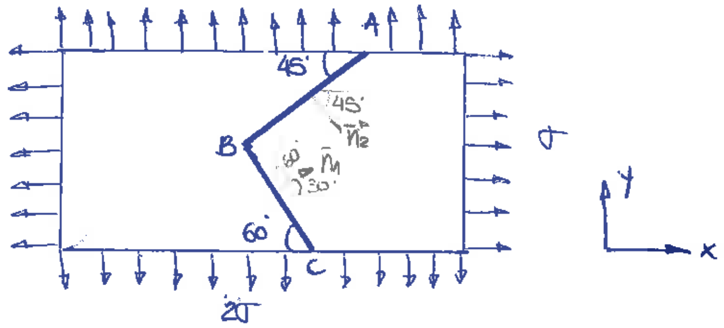
$$\sigma_{xx} = \frac{P}{5\cdot 5\cdot 10^{-4}} \longrightarrow P = 9{,}52\cdot 10^6\cdot 5\cdot 5\cdot 10^{-4}$$

$$\boxed{P = 23800\ N = 23{,}8\ kN}$$

2C2. Placa sometida a estado tensional plano. Determinar máximo $\sigma_{admisible}$ sin que se produzca fallo.

Criterion $\begin{cases} \sigma_{nn} = 100\text{ MPa} \\ \tau = 75\text{ MPa} \end{cases}$ máximo.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 2\sigma \end{bmatrix}$$



• Cara BC: $\vec{n}_1\,(\cos 30°, \operatorname{sen} 30°) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}]\cdot\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 2\sigma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}\sigma}{2} \\ \sigma \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n\cdot\vec{n}_1 = \frac{3\sigma}{4} + \frac{\sigma}{2} = \frac{3\sigma + 2\sigma}{4} = \frac{5\sigma}{4} < 100\text{ MPa} \quad \text{para no fallo} \quad (1)$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{|\vec{\sigma}_n|^2 - \sigma_{nn}^2}$$

$$|\vec{\sigma}_n|^2 = \frac{3\sigma^2}{4} + \sigma^2 = \frac{7\sigma^2}{4}$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{\frac{7\sigma^2}{4} - \frac{25\sigma^2}{16}} = \sqrt{\frac{3\sigma^2}{16}} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{4} < 75\text{ MPa} \quad (2)$$

(1) $\sigma < \frac{400}{5} \rightarrow \sigma < 80$ MPa

(2) $\sigma < \frac{4\cdot 75}{\sqrt{3}} \rightarrow \sigma < 173{,}21$ MPa

• Cara AB: $\vec{n}_2\,(\cos 45°, -\operatorname{sen} 45°) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}]\,\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 2\sigma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma/\sqrt{2} \\ -2\sigma/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n\cdot\vec{n}_2 = \frac{\sigma}{2} + \sigma = \frac{3\sigma}{2} < 100\text{ MPa} \quad (3)$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{|\vec{\sigma}_n|^2 - \sigma_{nn}^2}$$

$$|\vec{\sigma}_n|^2 = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{4\sigma^2}{2} = \frac{5\sigma^2}{2}$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{\frac{5\sigma^2}{2} - \frac{9\sigma^2}{4}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4}} = \frac{\sigma}{2} < 75\text{ MPa} \quad (4)$$

(3) $\sigma < \frac{200}{3} \rightarrow \sigma < 66{,}67$ MPa

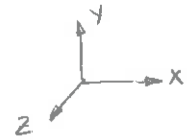
(4) $\sigma < 150$ MPa

La σ_{adm} máxima será la más restrictiva de las 4 condiciones $\boxed{\sigma_{adm}^{máx} = 66{,}67\text{ MPa}}$

y la placa fallará por tensión normal en el plano AB.

2C3. Estado tensional en un punto respecto a un sistema xyz:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 5 \\ -10 & -10 & 30 \\ 5 & 30 & 20 \end{bmatrix} \text{(MPa)}$$



a. Determinar $\vec{\sigma}_n$ y sus componentes intrínsecas en un plano normal al eje x.

Plano YZ $\rightarrow \vec{n}\,(1, 0, 0)$

$$\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}]\,\vec{n} = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 5 \\ -10 & -10 & 30 \\ 5 & 30 & 20 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{\sigma}_n}$$

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}(1\ 0\ 0) \longrightarrow \boxed{\sigma_{nn} = 10\text{ MPa}}$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{|\vec{\sigma}_n|^2 - \sigma_{nn}^2}$$

$$|\vec{\sigma}_n|^2 = 10^2 + 10^2 + 5^2 = 225$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{225 - 100} \longrightarrow \boxed{\tau_{nt} = 11{,}18\text{ MPa}}$$

b. Determinar $\vec{\sigma}_n$ de un plano paralelo al eje z cuya normal forma 45° con x e y, con cosenos directores positivos.

$\vec{n}_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$$\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}]\,\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 5 \\ -10 & -10 & 30 \\ 5 & 30 & 20 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -10\sqrt{2} \\ 35/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \vec{\sigma}_n}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n_{AB}} = \begin{bmatrix} 0 & 10^{-3}/2 & 10^{-3}/2 \\ 10^{-3}/2 & 0 & 10^{-3} \\ 10^{-3}/2 & 10^{-3} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10^{-3}/2 \\ -10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{n_{AB}n_{BC}} = \bar{\varepsilon}_{n_{AB}} \cdot \bar{n}_{BC} = \begin{pmatrix} -\frac{10^{-3}}{2} \\ -10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \quad -1 \quad 0) = 10^{-3}$$

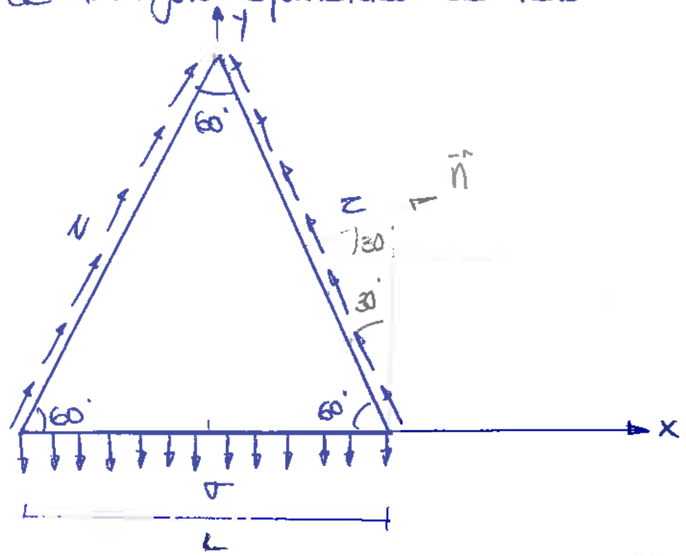
$\boxed{\Delta\alpha = 2 \cdot 10^{-3} \text{ disminuye}}$

2C5. Placa con forma de triángulo equilátero de lado L.

No me sale

X

Estado tensional plano.



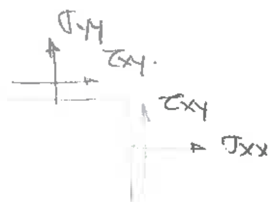
a. Valor de τ en función de σ para que la placa esté en equilibrio.

Para el equilibrio: $-\sigma + 2\tau\cos 30° = 0$

$$\tau = \frac{\sigma}{2\cos 30°}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}}$$

b. $[\sigma_{ij}]_{xy}$ en la placa en función de σ.



$$[\sigma_{ij}]_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

$\vec{n}\ (\cos 30°, \operatorname{sen} 30°) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\tau_{xy} = 0$ porque se anula la componente de τ

$$\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}]\vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}\sigma_{xx}}{2} \\ \frac{\sigma_{yy}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = \frac{3\sigma_{xx}}{4} + \frac{\sigma_{yy}}{4} \quad (1)$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{|\vec{\sigma}_n|^2 + \sigma_{nn}^2}$$

$$|\vec{\sigma}_n|^2 = \frac{3\sigma_{xx}^2}{4} + \frac{\sigma_{yy}^2}{4}$$

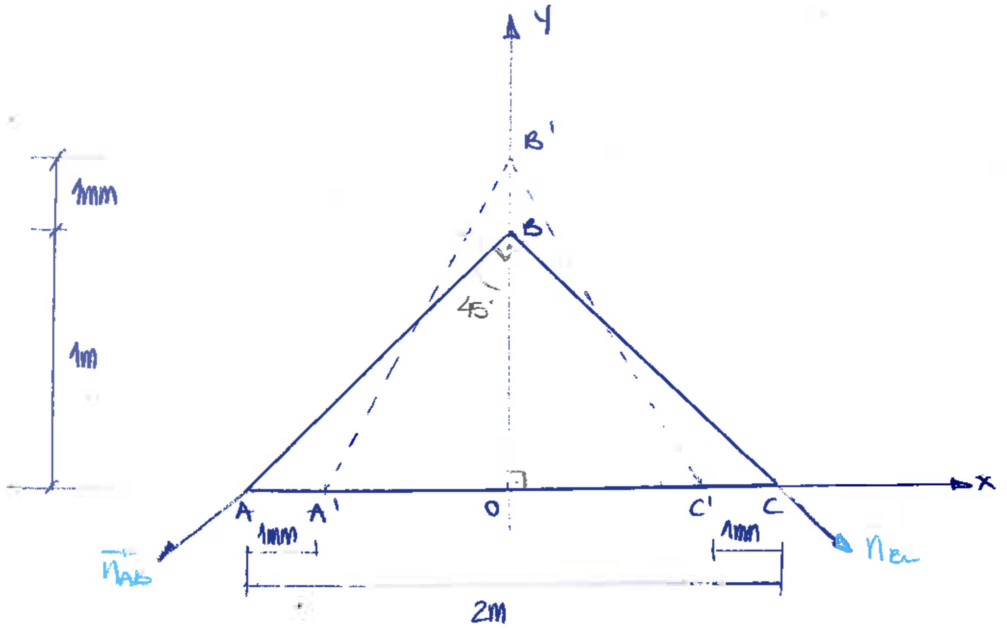
$$\tau_{nt} = \sqrt{\frac{3\sigma_{xx}^2}{4} + \frac{\sigma_{yy}^2}{4} - \frac{9\sigma_{xx}^2}{16} - \frac{\sigma_{yy}^2}{16} - \frac{3\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{2}} = \sqrt{\frac{3\sigma_{xx}^2}{16} + \frac{3\sigma_{yy}^2}{16} - \frac{3\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{2}}$$

(1) $\frac{3\sigma_{xx}}{4} + \frac{\sigma_{yy}}{4} = 0 \longrightarrow -3\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$

(2) $\frac{3\sigma_{xx}^2}{16} + \frac{3\sigma_{yy}^2}{16} - \frac{3\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{2} = \tau^2$

$$\frac{3\sigma_{xx}^2}{8} + \frac{27\sigma_{xx}^2}{8} + 9\sigma_{xx}^2 = 2\tau^2 \longrightarrow \frac{102\sigma_{xx}^2}{8} = 2\tau^2 \longrightarrow \sigma_{xx} = \sqrt{\frac{16\tau^2}{102}}$$

3C1. Estado de deformación plana y uniforme.



a. Matriz de deformaciones.

Al ser la deformación plana sólo existe deformación en el plano xy, como además es uniforme es independiente del punto del plano

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1{,}998 - 2\ (m)}{2m} = \frac{-0{,}002}{2} = -0{,}001 = -10^{-3}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1{,}001 - 1}{1m} = 0{,}001$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{2} = 0$$

$$\boxed{[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -10^{-3} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix}}$$

b. Calcular variación del ángulo recto de B con $[\varepsilon_{ij}]$.

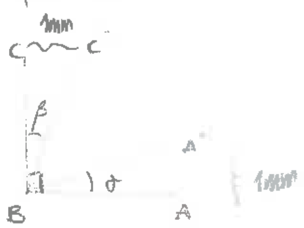
$$\Delta\alpha = 2\,\varepsilon_{n_{AB}n_{BC}}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n_{AB}} = [\varepsilon_{ij}]\,\vec{n}_{AB} = \begin{bmatrix} -10^{-3} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\,10^{-3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}\cdot 10^{-3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{n_{AB}n_{BC}} = \bar{\varepsilon}_{n_{AB}} \cdot \vec{n}_{BC} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\,10^{-3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}\cdot 10^{-3}}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{10^{-3}}{2} + \frac{10^{-3}}{2} = 10^{-3}$$

$$\boxed{\Delta\alpha = 2\cdot 10^{-3} \text{ disminuye}}$$

\# comprobación



$$\gamma = \alpha + \beta = 2\alpha$$

$$\alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}001}{1} = 10^{-3}$$

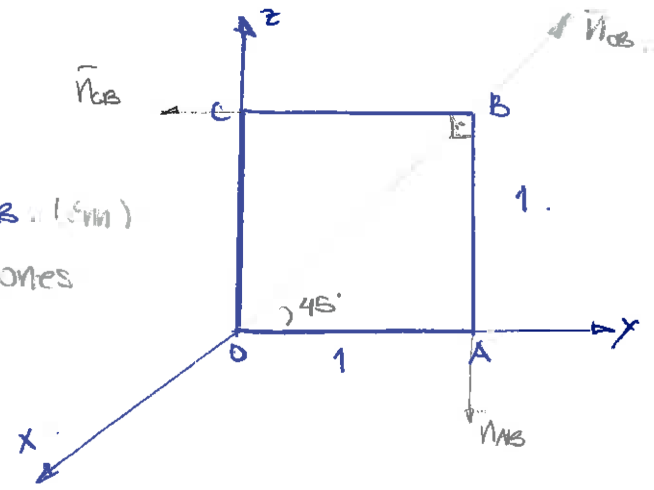
$$\boxed{\gamma = 2\cdot 10^{-3}}$$

└→ positivo disminuye.

3C2. Ley de deformación:

$x' = x + Ay^2$
$y' = y + Az^2$
$z' = z + Ax^2$

$u = x' - x = Ay^2$
$v = y' - y = Az^2$
$w = z' - z = Ax^2$



a. Alarg. unitario de B según la diagonal OB. (ε_{nn})

calculamos primero la matriz de deformaciones

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}Az$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(Ay + 2Ax) = \frac{A}{2}(y+2x)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(2Az + 0) = Az$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Az}{2} & \frac{A}{2}(y+2x) \\ \frac{Az}{2} & 0 & Az \\ \frac{A}{2}(y+2x) & Az & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[z(0,1,1)]{\text{En } B} [\varepsilon_{ij}]_B = \begin{bmatrix} 0 & A/2 & A/2 \\ A/2 & 0 & A \\ A/2 & A & 0 \end{bmatrix}$$

Según la diagonal OB:

$$\bar{\varepsilon}_n = [\varepsilon_{ij}]\cdot\vec{n}$$

$$\vec{n}_{OB} = \overline{OB} = (0,1,1) - (0,0,0) = (0,1,1),$$

Normalizo el vector para que sea unitario:

$$\vec{n} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\bar{\varepsilon}_n = \begin{bmatrix} 0 & A/2 & A/2 \\ A/2 & 0 & A \\ A/2 & A & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A/\sqrt{2} \\ A/\sqrt{2} \\ A/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{nn} = \bar{\varepsilon}_n \cdot \vec{n} = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = \boxed{A = \varepsilon_{nn}}$$

b. Variación ángulo recto en B si $A = 10^{-3}$.

$$\Delta\alpha = 2\,\varepsilon_{n_{AB}n_{BC}}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n_{AB}} = [\varepsilon_{ij}]_A\,\vec{n}_{AB}$$

$$\vec{n}_{AB} = -z = (0, 0, -1)$$

$$\vec{n}_{BC} = -y = (0, -1, 0)$$

Sustituyo en (1) y (2) y tengo dos ecus con dos incógnitas

$$(1):\ \frac{1}{200\cdot10^{9}}\left[\sigma_{yy}^{A}-\frac{1}{3}\cdot60\cdot10^{6}\right]+10^{-5}\Delta T=0 \longrightarrow \sigma_{yy}^{A}=20\cdot10^{6}-2\cdot10^{6}\Delta T$$

$$(2):\ \frac{1}{200\cdot10^{9}}\left[60\cdot10^{6}-\frac{1}{3}\sigma_{yy}^{A}\right]+10^{-5}\Delta T+\frac{2}{200\cdot10^{9}}\cdot60\cdot10^{6}=0$$

$$\frac{1}{200\cdot10^{9}}\left[60\cdot10^{6}-\frac{20\cdot10^{6}}{3}+\frac{2\cdot10^{6}}{3}\Delta T\right]+10^{-5}\Delta T=-6\cdot10^{-4}$$

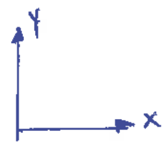
$$\frac{2\cdot10^{6}}{3\cdot200\cdot10^{9}}\Delta T+10^{-5}\Delta T=-6\cdot10^{-4}-3\cdot10^{-4}+3{,}33\cdot10^{-5}$$

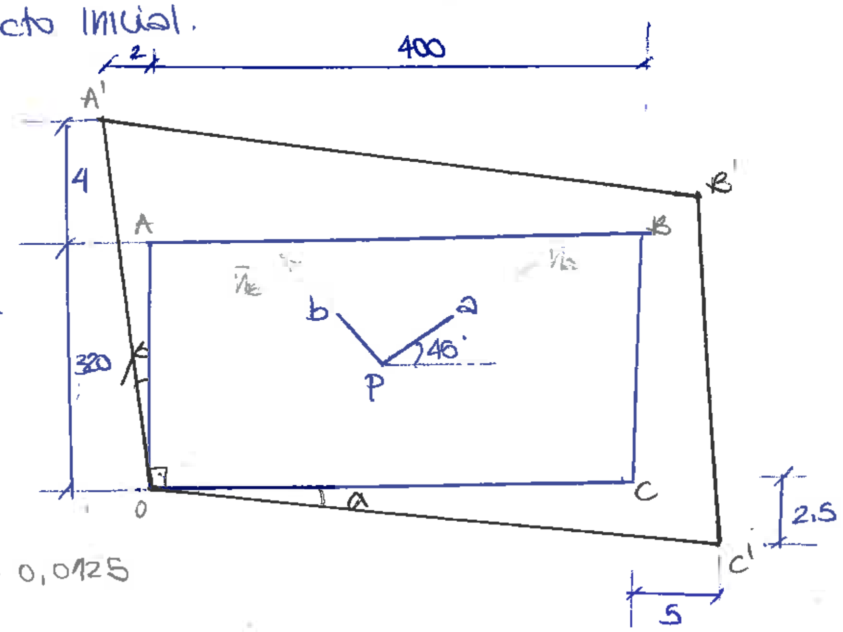
$$\frac{1}{75000}\Delta T=-8{,}667\cdot10^{-4}\longrightarrow\boxed{\Delta T=-65^{\circ}C}$$

3C3. Determinar la variación de longitud de cada uno de los segmentos y la variación del ángulo recto inicial.

Deform. plana y uniforme
unidades mm

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{zz}=0\\ \varepsilon_{xz}=0\\ \varepsilon_{yz}=0\end{array}\right\}\ \text{Defor. plana.}$$





$$\varepsilon=\frac{\delta}{L_0}$$

$$\varepsilon_{xx}=\frac{OC'-OC}{OC}=\frac{405-400}{400}=0{,}0125$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{OA'-OA}{OA}=\frac{324-320}{320}=0{,}0125$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\gamma_{xy}=\alpha+\beta$$

$$\alpha\simeq tg\,\alpha=\frac{2{,}5}{400}=0{,}00625$$

$$\beta\simeq tg\,\beta=\frac{2}{320}=0{,}00625$$

Como los ángulos aumentan γ_{xy} tendrá signo negativo porque por definición lo suponemos como disminución

$$\gamma_{xy}-0{,}00625-0{,}00625=0{,}0125$$

$$\varepsilon_{xy}=-0{,}00625$$

La matriz de deformaciones será $[\varepsilon_{ij}]=\begin{bmatrix}0{,}0125 & -0{,}00625\\ -0{,}00625 & 0{,}0125\end{bmatrix}$

$$\bar{\varepsilon}_{n_a}=[\varepsilon_{ij}]\,n_a=\begin{bmatrix}0{,}0125 & -0{,}00625\\ -0{,}00625 & 0{,}0125\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}0044\\ 0{,}0044\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{n_a}=\bar{\varepsilon}_{n_a}\cdot n_a=\frac{0{,}0044}{\sqrt2}+\frac{0{,}0044}{\sqrt2}=0{,}00625$$

$$\varepsilon_{n_a}=\frac{\Delta a}{a}\longrightarrow\boxed{\Delta a=0{,}00625\,a}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n_b}=[\varepsilon_{ij}]\,\bar{n}_b=\begin{bmatrix}0{,}0125 & -0{,}00625\\ -0{,}00625 & 0{,}0125\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}0133\\ 0{,}0132\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{n_b}=\bar{\varepsilon}_{n_b}\,\bar{n}_b=\frac{0{,}0133}{\sqrt2}+\frac{0{,}0133}{\sqrt2}=0{,}01875$$

$$\varepsilon_{n_b}=\frac{\Delta b}{b}\longrightarrow\boxed{\Delta b=0{,}01875\,b}$$

$\boxed{\gamma_{ab}=0}$ Porque el ángulo sigue siendo recto después de la deformación

3C4. Calcular las componentes de la deformación en $P(x_0, y_0, z_0)$ y representar cómo se deformaría un paralelepípedo elemental con lados paralelos a los ejes coordenados.

$u = 3y + 6z$

$v = 3x + 5z$

$w = -6x - 5y$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

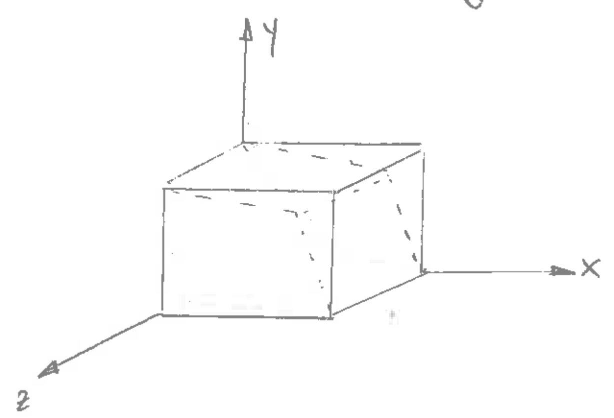
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(3+3) = 3$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(6-6) = 0$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(5-5) = 0$$

Un paralelepípedo elemental en el entorno de P no sufriría una variación longitudinal, sólo sufriría una distorsión angular porque los alargamientos unitarios son nulos. Además, como sólo existe una componente angular de la matriz de deformaciones sólo variaría el ángulo que inicialmente tuviera los lados paralelos a los ejes x e y, los demás seguirían siendo perpendiculares.



4C1. Máximo ΔT en A sin que se produzca deslizamiento de B y C.

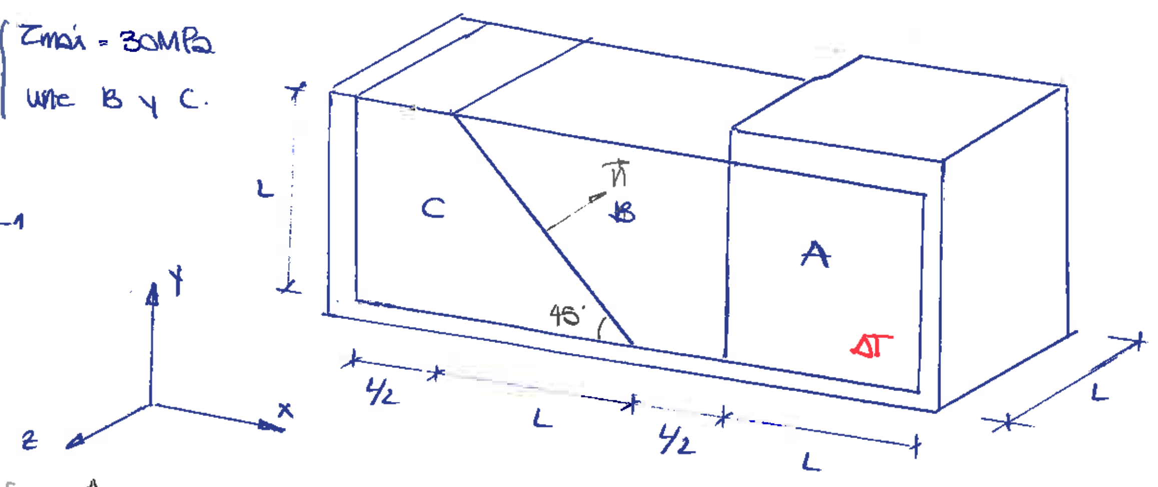
$L = 1\,cm$

Adhesivo $\begin{cases} \tau_{máx} = 30\,MPa \\ \text{une B y C.} \end{cases}$

$E = 200\,GPa$

$\alpha = 10^{-5}\,°C^{-1}$

$\nu = \frac{1}{3}$



$$[\sigma_{ij}]^A = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^A & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\sigma_{ij}]^{BC} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{BC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

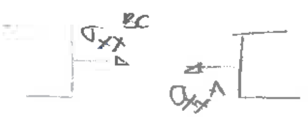
$\sigma_{zz}^A = 0$ por tener deformación libre en esta cara.

$\sigma_{zz}^{BC} = 0$ " " " "

$\sigma_{yy}^{BC} = 0$ por tener deformación libre en esta cara

- Equilibrio

  Por la ley de acción reacción $\sigma_{xx}^{BC} = \sigma_{xx}^A$



- Ecus de compatibilidad de deformaciones:

$$\varepsilon_{xx}^{BC} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}^{BC} - \nu(\sigma_{yy}^{BC} + \sigma_{zz}^{BC})\right] = \frac{1}{E}\sigma_{xx}^{BC}$$

$$\varepsilon_{xx}^{A} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}^{A} - \nu(\sigma_{yy}^{A} + \sigma_{zz}^{A})\right] + \alpha\Delta T = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}^{A} - \nu\sigma_{yy}^{A}\right] + \alpha\Delta T$$

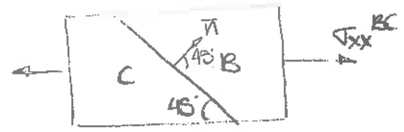
$$\varepsilon_{yy}^{A} = 0 = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy}^{A} - \nu\sigma_{xx}^{A}\right] + \alpha\Delta T \qquad (1)$$

$$\delta_{xx} = 0 = \delta_{xx}^{A} + \delta_{xx}^{BC} \longrightarrow \varepsilon_{xx}^{A} L + 2L\varepsilon_{xx}^{BC} = 0$$

$$\varepsilon_{xx}^{A} + 2\varepsilon_{xx}^{BC} = 0$$

$$\frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}^{A} - \nu\sigma_{yy}^{A}\right] + \alpha\Delta T + \frac{2}{E}\sigma_{xx}^{BC} = 0 \qquad (2)$$

- Paralelepípedo BC



$$\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}]^{BC} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{BC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\sigma_{xx}^{BC}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

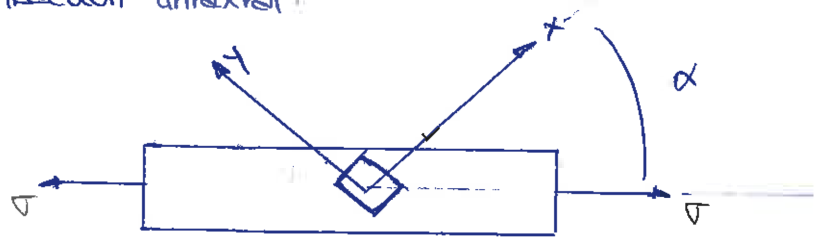
$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = \frac{\sigma_{xx}^{BC}}{2}$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{|\vec{\sigma}_n|^2 - \sigma_{nn}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_{xx}^{2\,BC}}{2} - \frac{\sigma_{xx}^{2\,BC}}{4}} = \frac{\sigma_{xx}^{BC}}{2} = 30\,MPa$$

$$\sigma_{xx}^{BC} = \sigma_{xx}^{A} = 60\,MPa$$

5C3. Calcular α para el que se cumple $\sigma_{xx} = 2\sigma_{yy}$

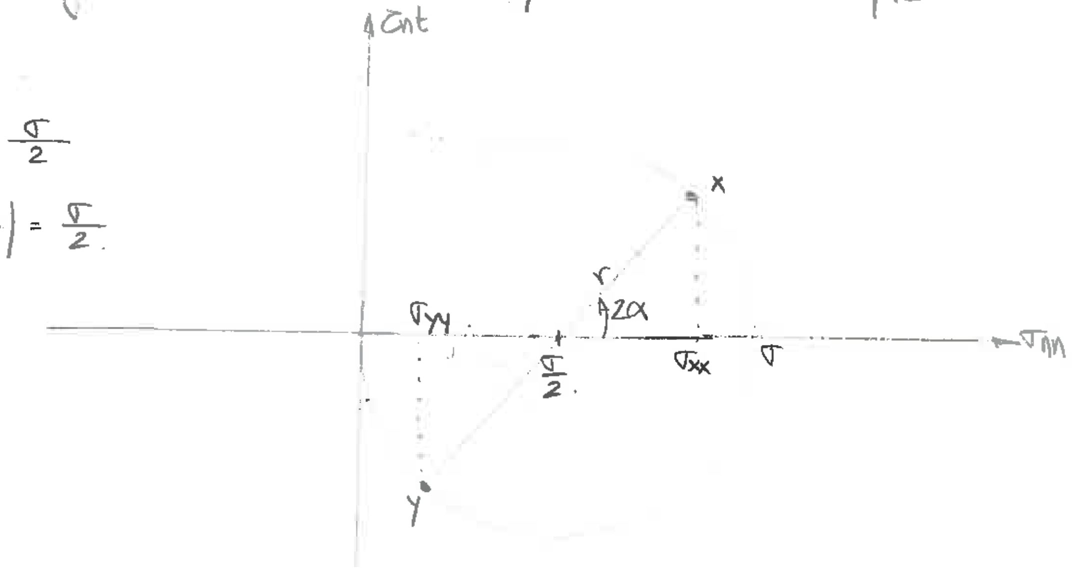
Ensayo de tracción uniaxial.



Dibujamos el diagrama de Mohr del ensayo de tracción simple:

$$c = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2}$$

$$r = \left| \frac{\sigma - 0}{2} \right| = \frac{\sigma}{2}$$



$$\sigma_{xx} = c + r\cos 2\alpha = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\cos 2\alpha = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = c - r\cos 2\alpha = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2}\cos 2\alpha = \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

Imponemos la condición

$$\sigma_{xx} = 2\sigma_{yy}.$$

$$\cancel{\frac{\sigma}{2}}(1 + \cos 2\alpha) = 2\cancel{\frac{\sigma}{2}}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 - 2\cos 2\alpha$$

$$3\cos 2\alpha = 1 \longrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\alpha = 35{,}26^\circ}$$

4C2. Calcular la matriz de deformaciones y la deformación longitudinal en dirección $\vec{n}\,(0{,}6\ ,\ 0\ ,\ 0{,}8)$.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 40 \\ 0 & -20 & 10 \\ 40 & 10 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$E = 200\,GPa$

$\nu = 0{,}25$.

Vamos a aplicar la ley de Hooke

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{1}{200\cdot 10^9}[60\cdot 10^6 + 0{,}25\cdot 20\cdot 10^6] = 3{,}25\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] = \frac{1}{200\cdot 10^9}[-20\cdot 10^6 - 0{,}25\cdot 60\cdot 10^6] = -1{,}75\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = \frac{1}{200\cdot 10^9}[-0{,}25(60\cdot 10^6 - 20\cdot 10^6)] = -5\cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = 0$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xz} = \frac{1+0{,}25}{200\cdot 10^9}\cdot 40\cdot 10^6 = 2{,}5\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{1+0{,}25}{200\cdot 10^9}\cdot 10\cdot 10^6 = 6{,}25\cdot 10^{-5}$$

La matriz de deformaciones será:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 3{,}25 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & -1{,}75 & 0{,}625 \\ 2{,}5 & 0{,}625 & -0{,}5 \end{bmatrix}\cdot 10^{-4}$$

$$\bar{\varepsilon}_n = [\varepsilon_{ij}]\cdot\vec{n} = \begin{bmatrix} 3{,}25 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & -1{,}75 & 0{,}625 \\ 2{,}5 & 0{,}625 & -0{,}5 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} 10^{-4}$$

$$\bar{\varepsilon}_n = \begin{pmatrix} 3{,}95\cdot 10^{-4} \\ 5\cdot 10^{-5} \\ 1{,}1\cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{nn} = \bar{\varepsilon}_n\cdot\vec{n} = 3{,}95\cdot 10^{-4}\ 0{,}6 + 1{,}1\cdot 10^{-4}\ 0{,}8$$

$$\boxed{\varepsilon_{nn} = 3{,}25\cdot 10^{-4}}$$

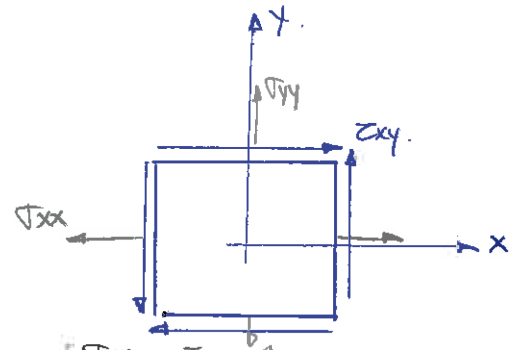
5C1. Calcular y representar σ_{xx}, σ_{yy}.

Estado de tensión plano xy

$\sigma_1 = 300$ MPa

$\sigma_2 = -700$ MPa

$\tau_{xy} = 300$ MPa.

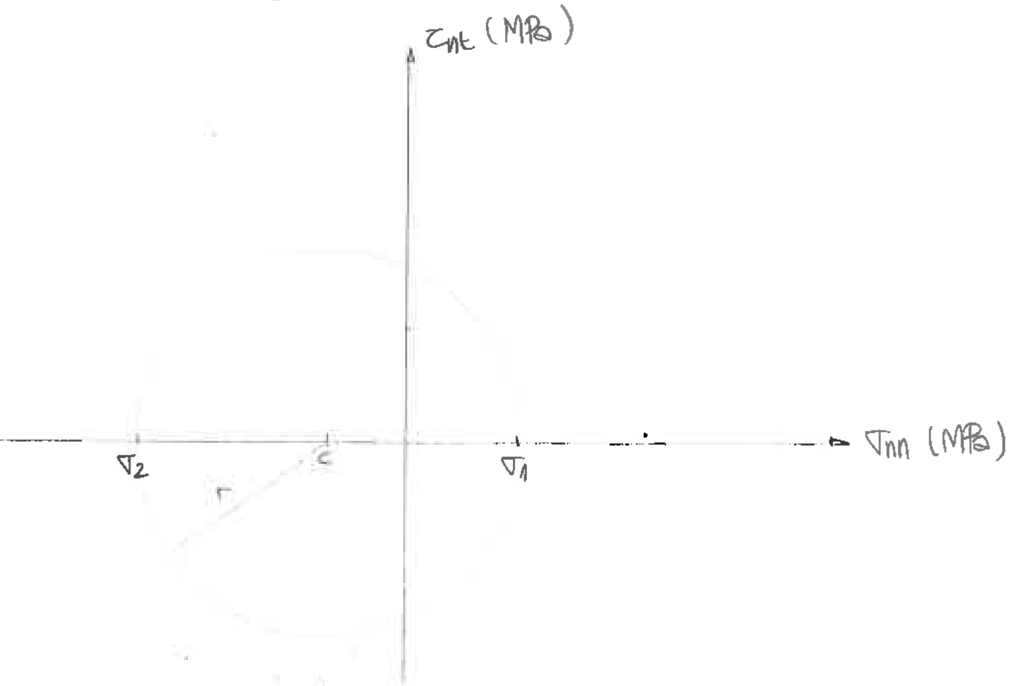


Estado tensional plano: $[\sigma_{ij}]_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$

$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_3 = 0$

$c = \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = -200$

$r = \left| \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \right| = 500$



Para un estado de tensión plano sabemos que en Mohr se cumple:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = 300 = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + 300^2} \quad (1)$$

$$\sigma_2 = -700 = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + 300^2} \quad (2)$$

(1)+(2) $\quad -400 = \sigma_{xx}+\sigma_{yy} \rightarrow \sigma_{xx} = -400 - \sigma_{yy}$ *

(1)-(2) $\quad 1000 = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + 300^2} \rightarrow 500^2 = \frac{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2}{4} + 300^2$

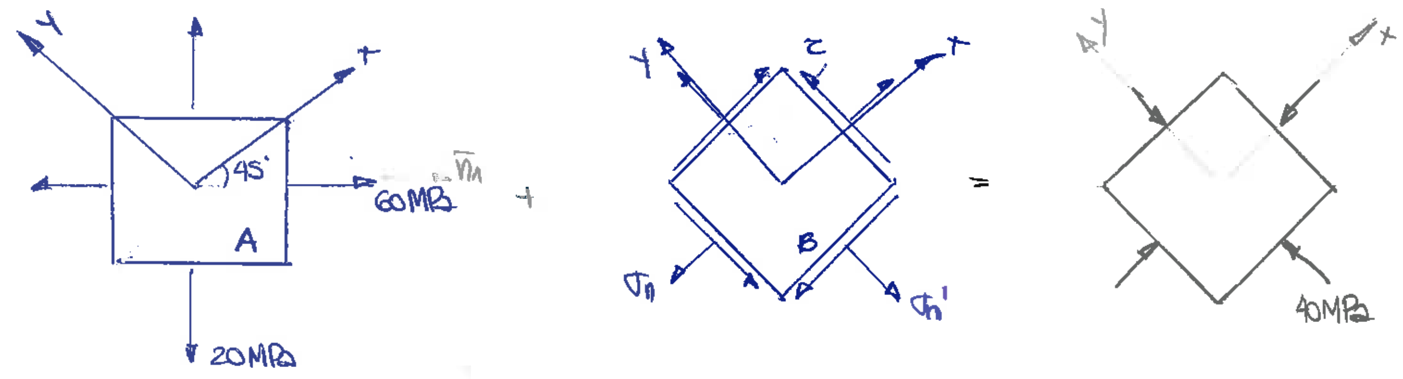
$(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2 = 800^2$

$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 800$

* $-400 - \sigma_{yy} - \sigma_{yy} = 800$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_{yy} = -600 \text{ MPa} \\ \sigma_{xx} = 200 \text{ MPa} \end{array}}$$

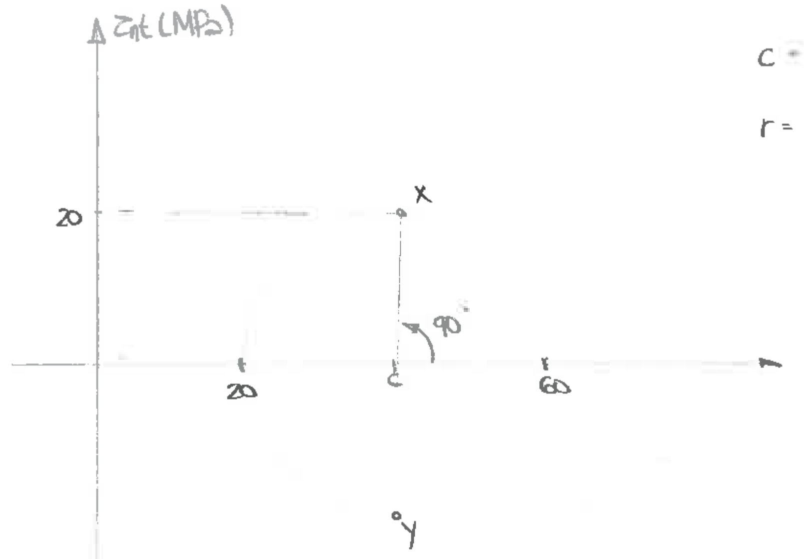
5C2. Determinar σ_n, σ_n', τ para que la suma de A y B sea una compresión de 40MPa para cualquier plano $\perp$ a xy.



Dibujamos el diagrama de Mohr de A:

$c = \dfrac{60+20}{2} = 40$

$r = \left| \dfrac{60-20}{2} \right| = 20$



Girando 90° desde σ_n llegaremos a x.

X (40, 20)

Y (40, -20)

Ahora podemos sumar componente a componente:

$40 + \sigma_n' = -40$

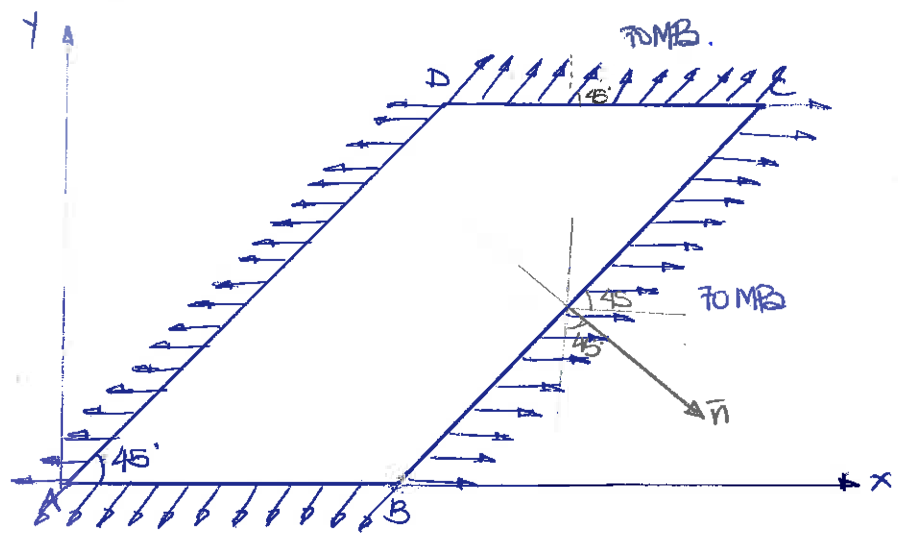
$40 + \sigma_n = -40 \quad \longrightarrow$

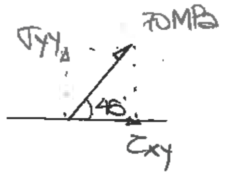
$20 - \tau = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_n' = -80 \text{ MPa} \\ \sigma_n = -80 \text{ MPa} \\ \tau = 20 \text{ MPa} \end{array}}$$

5.7. Calcular tensiones principales.

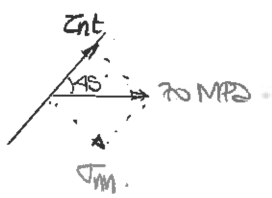
Estado uniforme de tensiones.





$\sigma_{yy} = 70 \text{ sen } 45° = \frac{70\sqrt{2}}{2} = 35\sqrt{2}$

$\tau_{xy} = 70 \cos 45° = \frac{70\sqrt{2}}{2} = 35\sqrt{2}$



$\sigma_{nn} = 70 \text{sen} 45° = 35\sqrt{2}$

$\tau_{nt} = 70 \cos 45° = 35\sqrt{2}$

$\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}]\,\vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 35\sqrt{2} \\ 35\sqrt{2} & 35\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{xx} - 35 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{xx} - 35\right) = \frac{\sigma_{xx}}{2} - \frac{35\sqrt{2}}{2} = 35\sqrt{2}$$

$$2\sigma_{xx} = 35\sqrt{2} + \frac{35\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \sigma_{xx} = 105\sqrt{2}$$

Las tensiones ppales por definición:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{105\sqrt{2} + 35\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{105\sqrt{2} - 35\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (35\sqrt{2})^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{105\sqrt{2} + 35\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\left(\frac{105\sqrt{2} - 35\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (35\sqrt{2})^2}$$

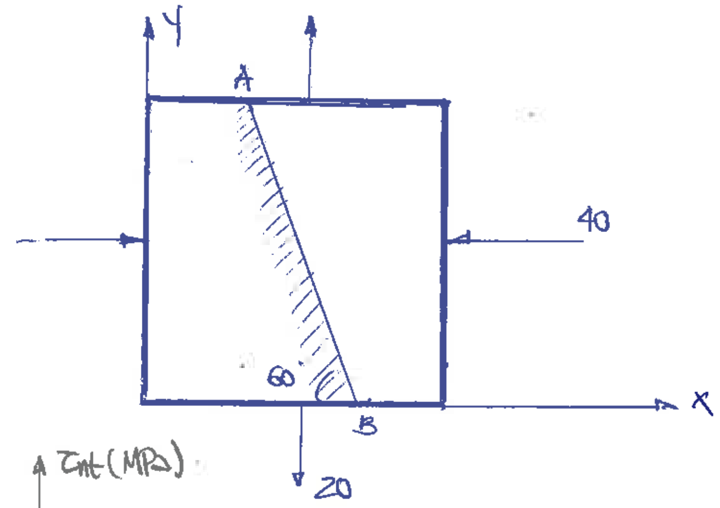
$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_1 = 169 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 29 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 0 \end{array}}$$

5.4. Determinar, utilizando Mohr, las componentes intrínsecas correspondientes al plano AB.

Tensiones ppales:

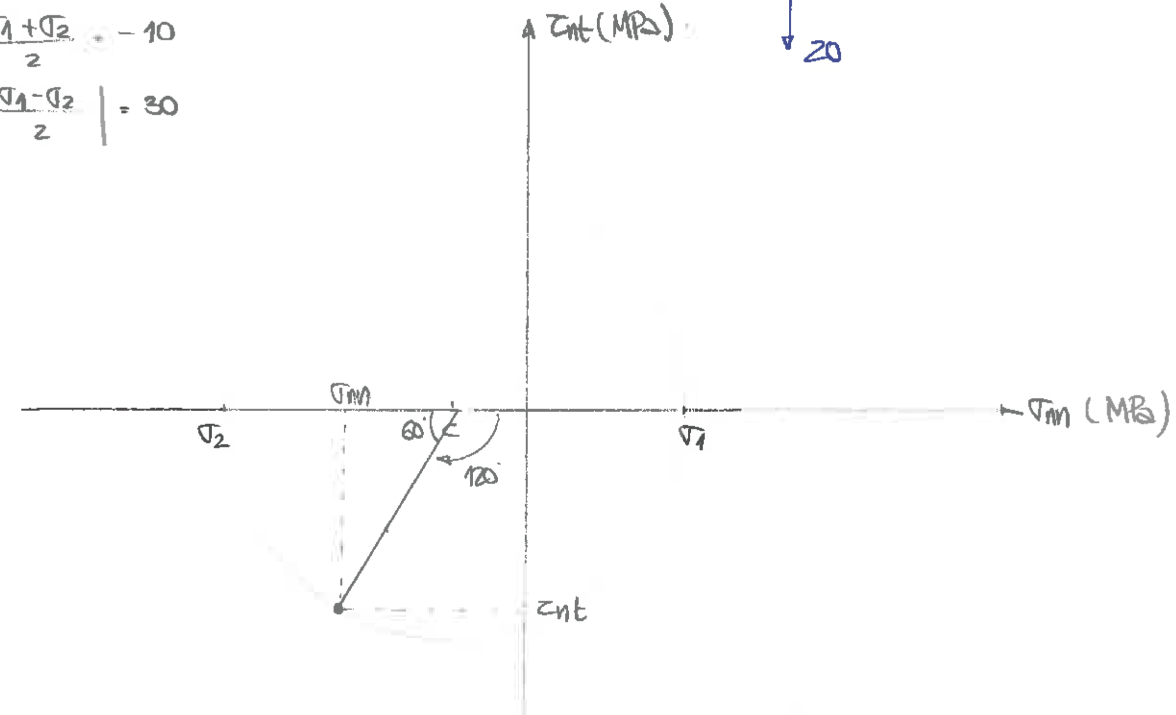
$\sigma_1 = 20\text{MPa}$

$\sigma_2 = -40\text{MPa}$



$c = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = -10$

$r = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right| = 30$



$\sigma_{nn} = c - r\cos 60° = -10 - 30\,\frac{1}{2} = \boxed{-25 \text{ MPa} = \sigma_{nn}}$

$\tau_{nt} = -r \text{ sen } 60° = -30\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-15\sqrt{3}\text{MPa} = \tau_{nt}}$

5C5. Determinar las medidas de las galgas B y C.

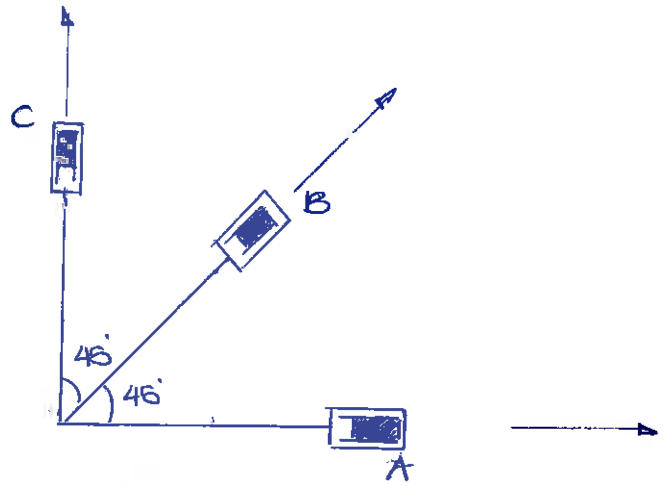
$G = 80$ GPa

$\tau = 120$ MPa cortadura pura

$\varepsilon_a = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

ε_b acortamiento

$$[\varepsilon_{ij}]_{xy} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$



Fmla galgas: $\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{xx}\alpha^2 + \varepsilon_{xy}2\alpha\beta + \varepsilon_{yy}\beta^2$

Al ser un estado de cortadura pura $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} = \frac{1}{2\cdot 80\cdot 10^9} 120\cdot 10^6 = 0{,}75\cdot 10^{-3}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})] = \frac{-\nu\sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})] = \frac{-\nu\sigma_{zz}}{E} \end{aligned}\right\} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$$

- Galga A: $\vec{n}_A\ (1,0)$

$\varepsilon_a = 0{,}5\cdot 10^{-3} = \varepsilon_{xx} + 0 \longrightarrow \varepsilon_{xx} = 0{,}5\cdot 10^{-3}$

- Galga C: $\vec{n}_c\ (0,1)$

$\varepsilon_c = \varepsilon_{yy} = \boxed{0{,}5\cdot 10^{-3} = \varepsilon_c}$

- Galga B: $\vec{n}_B\left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right)$

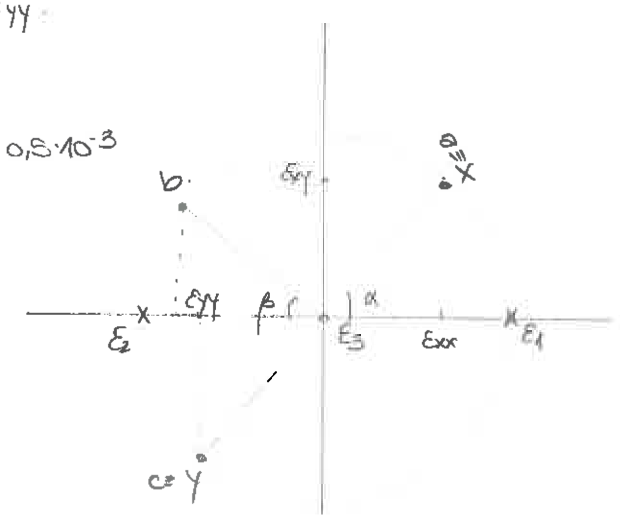
$\varepsilon_b = \varepsilon_{xx}\frac{2}{4} + 2\frac{\sqrt2}{2}\frac{\sqrt2}{2}\varepsilon_{xy} + \frac{2}{4}\varepsilon_{yy}$

$\varepsilon_b = \frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3} + \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2}\varepsilon_{yy} = 1\cdot 10^{-3} + \frac{1}{2}\varepsilon_{yy}$

- Galga C: $\vec{n}_c\ (0,1)$

$\varepsilon_c = \varepsilon_{yy}$

$r = \left|\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right| = 0{,}5\cdot 10^{-3}$



En situación de cortadura pura:

$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$

$\varepsilon_3 = 0$

$\beta = 180 - (90+\alpha)$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{0{,}75\cdot 10^{-3}}{0{,}5\cdot 10^{-3}} \longrightarrow \alpha = 56{,}31°$

$\beta = 33{,}69°$

$\varepsilon_{bb} = r\cos\beta = 0{,}5\cdot 10^{-3}\cos 33{,}69$

$\boxed{\varepsilon_{bb} = 4{,}16\cdot 10^{-4}}$

$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{yy} = -\varepsilon_{xx}$

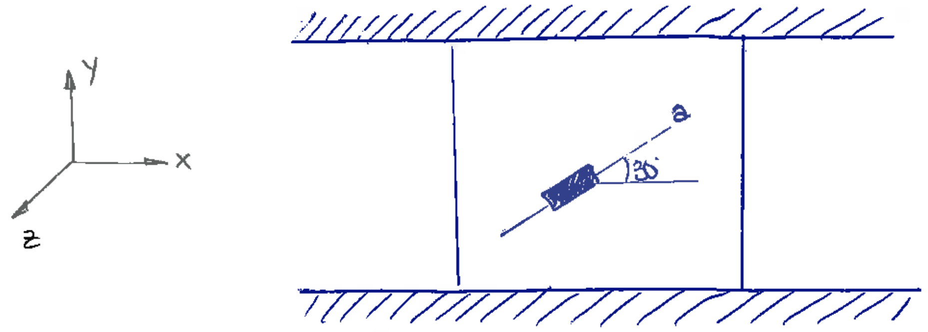
$\boxed{\varepsilon_{cc} = -0{,}5\cdot 10^{-3}}$

5C6. Determinar el coef. de Poisson

$\alpha = 10^{-5}$ °C

$\Delta T = 100$ °C

$\varepsilon_a = 10^{-3}$



Galga: $\varepsilon_m = \varepsilon_{xx}\alpha^2 + 2\alpha\beta\varepsilon_{xy} + \beta^2\varepsilon_{yy}$

$n_a(\cos 30°, \operatorname{sen} 30°) = \left(\frac{\sqrt3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\varepsilon_a = 10^{-3} = \varepsilon_{xx}\frac{3}{4} + \frac{\sqrt3}{2}\varepsilon_{xy} + \frac{1}{4}\varepsilon_{yy} \qquad (1)$

Aplicamos la ley de Hooke con T^a

$\varepsilon_{yy} = 0 = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})] + \alpha\Delta T \qquad (2)$

$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})] + \alpha\Delta T \qquad (3)$

$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})] + \alpha\Delta T \qquad (4)$

Como en las caras libres no hay tension $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0$

(2) $0 = \frac{1}{E}\sigma_{yy} + \alpha\Delta T$

$\sigma_{yy} = -\alpha\Delta T\, E = -10^{-5}\cdot 100\ E = -10^{-3}E$

(3): $\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{yy}) + \Delta T = \nu 10^{-3} + 10^{-3} = 10^{-3}(1+\nu)$

Teniendo en cuenta que las tensiones de origen térmico son normales a los planos $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \longrightarrow \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$

(1): $\varepsilon_a = 10^{-3} = \varepsilon_{xx}\frac{3}{4} + 0$

$\varepsilon_{xx} = \frac{4}{3}\cdot 10^{-3}$

(3) $\varepsilon_{xx} = \frac{4}{3}\cdot 10^{-3} = 10^{-3}(1+\nu)$

$\nu = \frac{4}{3} - 1 = \frac{4-3}{3}$

$\boxed{\nu = \frac{1}{3}}$

$$\sigma_1 = r = \sqrt{\sigma^2+\tau^2}$$
$$\sigma_2 = -r = -\sqrt{\sigma^2+\tau^2}$$
$$\sigma_3 = -\sigma$$

$$\sigma_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4\sigma^2+4\tau^2+\sigma^2+\tau^2+\sigma^2+2\sigma r+\sigma^2+\tau^2+\sigma^2-2\sigma r}$$

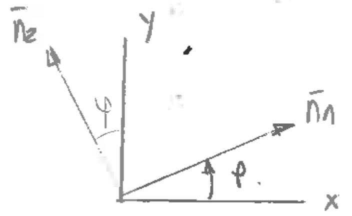
$$2\sigma_f^2 = 8\sigma^2+6\tau^2 \longrightarrow \sigma_f^2 = 4\sigma^2+3\tau^2$$
$$\sigma^2 = \frac{\sigma_f^2-3\tau^2}{4}$$
$$\boxed{\sigma = 120,67 \text{ MPa}}$$

2. Tensiones y direcciones principales.

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma^2+\tau^2} \qquad \sigma_2 = -\sqrt{\sigma^2+\tau^2} \qquad \sigma_3 = -\sigma \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\sigma_1 = 132,98 \text{ MPa}\\ \sigma_2 = -132,98 \text{ MPa}\\ \sigma_3 = -120,67 \text{ MPa}\end{array}}$$

Una dirección principal es z: $\vec{n}_3\,(0,0,1)$.

Del diagrama de Mohr obtenemos las otras dos:



$$tg\, 2\varphi = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{55,85}{120,67} \longrightarrow \varphi = 12,42°$$

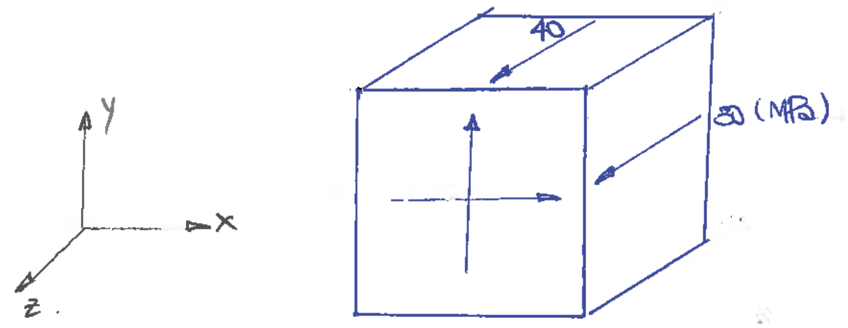
$\bar{n}_1\,(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, 0)$

$\bar{n}_2\,(-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{n}_1\,(0,98;\ 0,22;\ 0)\\ \bar{n}_2\,(-0,22;\ 0,98;\ 0)\end{array}}$$

6C1. Calcular coeficiente de seguridad según Tresca y Von Mises.

$\sigma_f = 240$ MPa



$\tau_{xz} = 30$ MPa

$\tau_{yz} = 40$ MPa

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30\\ 0 & 0 & 40\\ 30 & 40 & 0\end{bmatrix}$$

Calculamos las tensiones principales con la ec. indicial:

$$|[\sigma_{ij}] - \sigma[I]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 30\\ 0 & -\sigma & 40\\ 30 & 40 & -\sigma\end{vmatrix} = -\sigma^3 + 30^2\sigma + 40^2\sigma = 0$$

$$-\sigma^3 + 900\sigma + 1600\sigma = -\sigma^3 + 2500\sigma = 0$$

$$\sigma(-\sigma^2+2500) = 0 \longrightarrow \sigma_2 = 0,\quad \sigma_1 = 50 \text{ MPa},\quad \sigma_3 = -50 \text{ MPa}$$

• Tresca:

$$n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{eq}}$$

$$\sigma_{eq} = 2\tau_{máx} = \sigma_{máx} - \sigma_{mín} = 50-(-50) = 100 \text{ MPa}$$

$$n_T = \frac{240}{100} \longrightarrow \boxed{n_T = 2,4}$$

• Von Mises

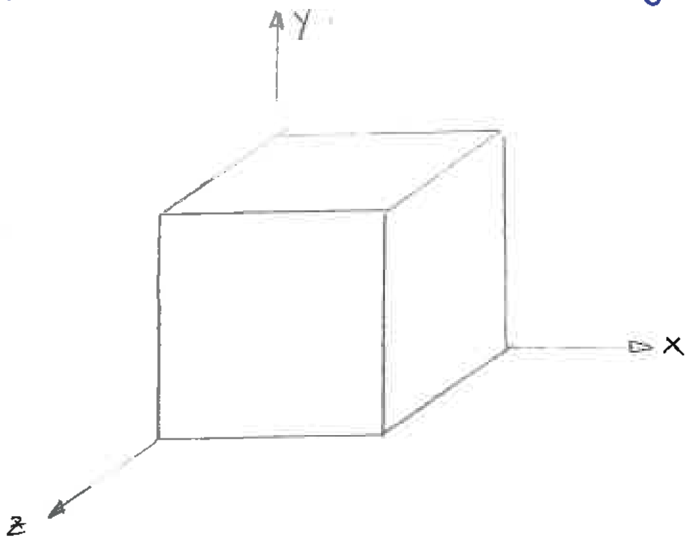
$$n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{eq}}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{50^2+100^2+50^2} = 50\sqrt{3}$$

$$n_{VM} = \frac{240}{50\sqrt{3}}$$

$$\boxed{n_{VM} = 2,77}$$

6C2. Representar el estado tensional para el que se produce fallo según Tresca.



$\sigma_{eq} = 60$ MPa

z eje principal

$\sigma_{xx} = 50$ MPa $= \sigma_{yy}$

$\tau_{xy} = 10$ MPa

según Tresca:

$\sigma_{eq} = \sigma_{máx} - \sigma_{mín}$

Eje z principal $\longrightarrow \sigma_3 = 0 = \sigma_{zz}$

$$[\sigma_{ij}]_{xy} = \begin{bmatrix} 50 & 10 \\ 10 & 50 \end{bmatrix}$$

$$|[\sigma_{ij}] - \sigma[I]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 50-\sigma & 10 \\ 10 & 50-\sigma \end{vmatrix} = (50-\sigma)^2 - 100 = 2500 + \sigma^2 - 100\sigma - 100 = 0$$

$$\sigma^2 - 100\sigma + 2400 = 0$$

$\sigma_1 = 60$ MPa

$\sigma_2 = 40$ MPa

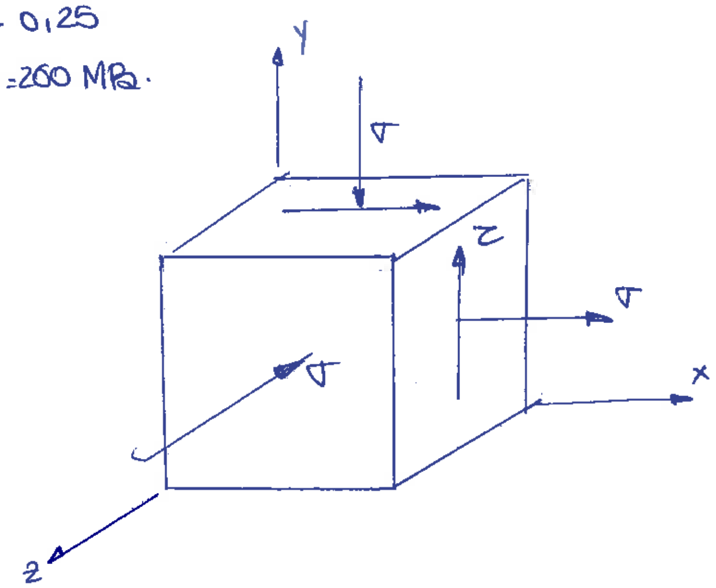
$\boxed{\sigma_3 = 0 = \sigma_{zz}}$

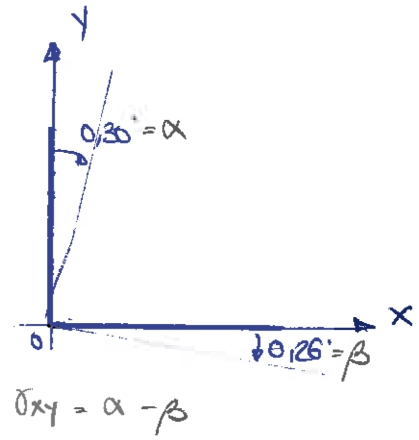
$\sigma_{eq} = 60 - 0 = 60$ ✓

6C3. $E = 200$ GPa

$\nu = 0{,}25$

$\sigma_f = 260$ MPa.





$\gamma_{xy} = \alpha - \beta$

1. Valores de σ, τ para el fallo según Von Mises sabiendo la variación del ángulo recto inicialmente paralelo a x e y.

Según Von Mises el fallo se dará cuando:

$\sigma_{eq} = \sigma_f$

$$\sigma_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2}$$

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

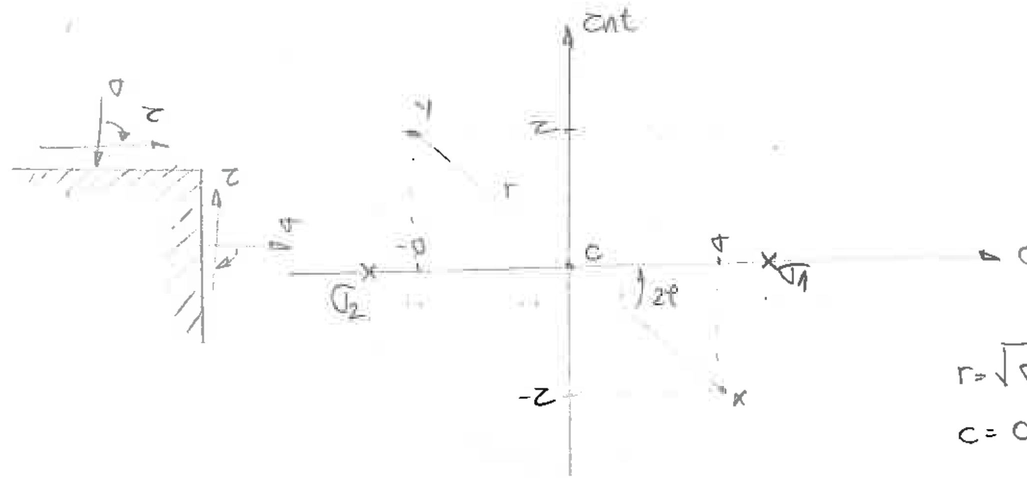
$$\gamma_{xy} = \alpha - \beta = 0{,}30 - 0{,}26 = 0{,}04 \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180} = 6{,}98 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = 3{,}49 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} \longrightarrow 3{,}49 \cdot 10^{-4} = \frac{1+0{,}25}{200 \cdot 10^9}\tau_{xy}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = 55{,}85 \text{ MPa} = \tau}$$

La dirección z ya es principal: $\sigma_i = -\sigma$



$r = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$

$c = 0$

$$\frac{1}{E}[\sigma_{yy} + \alpha\Delta T\nu E - \nu^2\sigma_{yy}] + \alpha\Delta T + \frac{1}{E}\sigma_{yy} = 7{,}5\cdot10^{-4}$$

$$\frac{1}{200\cdot10^9}\left[\sigma_{yy} + 80\cdot10^6 - \frac{\sigma_{yy}}{9}\right] + 1{,}2\cdot10^{-3} + \frac{\sigma_{yy}}{200\cdot10^9} = 7{,}5\cdot10^{-4}$$

$$\frac{1}{200\cdot10^9}\,\frac{17}{9}\sigma_{yy} = -8{,}5\cdot10^{-4}$$

$$\sigma_{yy} = \boxed{-90\,MPa = \sigma_{yy}^A = \sigma_{yy}^B}$$

$$\sigma_{zz}^A = -\alpha\Delta T E + \nu\sigma_{yy}^A = -240\cdot10^6 - 30\cdot10^6 \longrightarrow \boxed{\sigma_{zz}^A = -270\,MPa}$$

2.- Coef. de seguridad de cada cubo según Tresca

$n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{eq}}$

según Tresca. $\sigma_{eq} = 2\tau_{máx} = \sigma_{máx} - \sigma_{mín}$

A: $\sigma_{eq} = 0 - (-270) = 270$

$n_{TA} = \frac{324\,MPa}{270\,MPa} \longrightarrow \boxed{n_{TA} = 1{,}2}$

B: $\sigma_{eq} = 0 - (-90) = 90$

$n_{TB} = \frac{324}{90}$

$\boxed{n_{TB} = 3{,}6}$

6C4. Cubos alojados en una cavidad rígida sin rozamiento ni holgura.

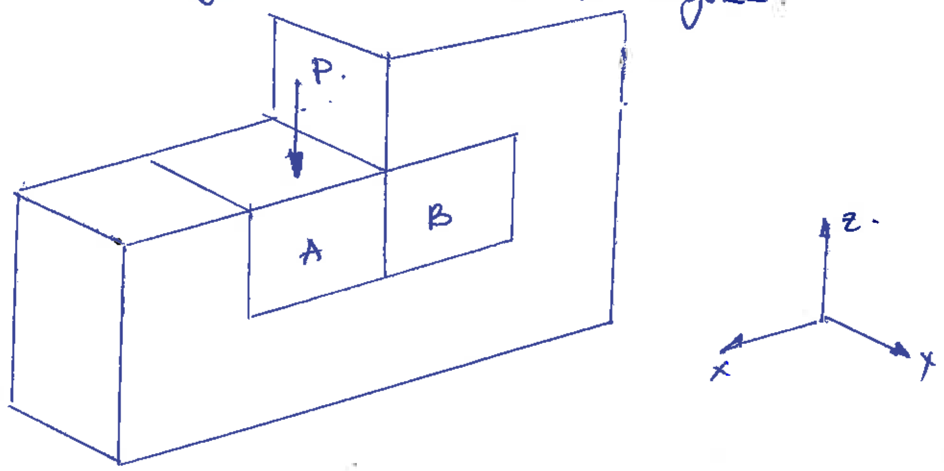
arista 1cm

$E = 200\,GPa$

$\nu = \frac{1}{3}$

$\sigma_f = 240\,MPa$

$P = 17\,kN$.



1. Matrices de tensiones de los cubos.

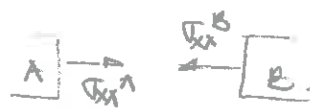
$$[\sigma_{ij}]^A = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^A & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^A & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^A \end{bmatrix} \qquad [\sigma_{ij}]^B = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^B & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^B & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^B \end{bmatrix}$$

Como y es la cara de libre deformación para ambos cubos no se generarán tensiones. $\boxed{\sigma_{yy}^A = 0 \quad \sigma_{yy}^B = 0}$

$$\sigma_{zz}^A = \frac{-P}{A} = \frac{-17\cdot10^3\,N}{1\times1\cdot10^{-4}\,m^2} = \boxed{-170\,MPa = \sigma_{zz}^A}$$

- Equilibrio:

$\sigma_{xx}^A = \sigma_{xx}^B$ por tener mismas dimensiones, mismo material



- Ecus compatibilidad de deformaciones

Aplicamos la ley de Hooke.

$$\varepsilon_{xx} = 0 = \delta_{xx}^A + \delta_{xx}^B \longrightarrow \varepsilon_{xx}^A + \varepsilon_{xx}^B = 0$$

$$\varepsilon_{xx}^A = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}^A]$$

$$\varepsilon_{xx}^B = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}^B]$$

$$\cancel{\frac{1}{E}}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}^A] + \cancel{\frac{1}{E}}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}^B] = 0 \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{zz}^B = 0 = \frac{1}{E}[\sigma_{zz}^B - \nu\sigma_{xx}] \qquad (2)$$

$\quad \hookrightarrow \sigma_{zz}^B = \nu\sigma_{xx}$

Vamos a (1):

$$\sigma_{xx} + \frac{1}{3}\cdot170\cdot10^6 + \sigma_{xx} - \frac{1}{9}\sigma_{xx} = 0$$

$$\sigma_{xx}\frac{17}{9} = -\frac{1}{3}\,170\cdot10^6 \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\sigma_{xx} = -30\,MPa = \sigma_{xx}^A = \sigma_{xx}^B \\ \sigma_{zz}^B = -10\,MPa.\end{array}}$$

2. Coef. de seguridad de los cubos según Tresca.

$n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{eq}}$.

Según Tresca $\sigma_{eq} = 2\tau_{máx} = \sigma_{máx} - \sigma_{min}$

- cubo A:

$\sigma_{eq} = 0 - (-170) = 170$

$n_{TA} = \frac{240 \text{ MPa}}{170 \text{ MPa}} \longrightarrow \boxed{n_{TA} = 1,41}$

- cubo B

$\sigma_{eq} = 0 - (-30) = 30$

$n_{TB} = \frac{240 \text{ MPa}}{30 \text{ MPa}}$

$\boxed{n_{TB} = 8}$

6C5. Dos cubos alojados en un cajón indeformable con holgura.

$L = 10$ cm

$\Delta = 0{,}075$ mm

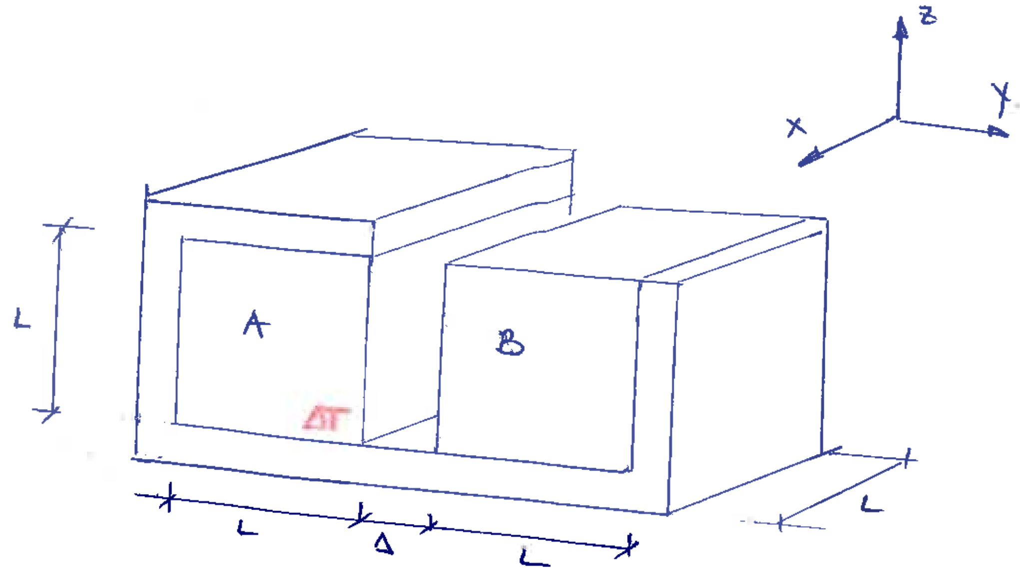
$E = 200$ GPa

$\alpha = 10^{-5}\ °C^{-1}$

$\nu = \frac{1}{3}$

$\sigma_f = 324$ MPa

$\Delta T = 120\ °C$ sobre A.



1. Matrices de tensión de ambos cubos.

$$[T_{ij}]^A = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^A & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^A & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^A \end{bmatrix} \qquad [T_{ij}]^B = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^B & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^B & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^B \end{bmatrix}$$

En la dirección x la deformación es libre, no hay nada que la restringa, luego $\boxed{\begin{matrix}\sigma_{xx}^A = 0 \\ \sigma_{xx}^B = 0\end{matrix}}$

El cubo B también tiene libre la deformación en z. $\boxed{\sigma_{zz}^B = 0}$.

El cubo A sufrirá una dilatación térmica por lo que se deformará hasta tocar al cubo B. ≡ HIPÓTESIS.

- $\delta_{yy}^{A+B} = \frac{\Delta}{L} \cdot \frac{0{,}075 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1 \text{m}} = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$.

$\delta_{yy}^{A+B} = \delta_{yy}^A + \delta_{yy}^B = \varepsilon_{yy}^A \frac{1}{L} + \varepsilon_{yy}^B \cdot \frac{1}{L} = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$

$\varepsilon_{yy}^A + \varepsilon_{yy}^B = 7{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 10 = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$

$\varepsilon_{yy}^A = \frac{1}{E}[\sigma_{yy}^A - \nu\sigma_{zz}^A] + \alpha\Delta T$

$\varepsilon_{yy}^B = \frac{1}{E}\sigma_{yy}^B$.

$\frac{1}{E}[\sigma_{yy}^A - \nu\sigma_{zz}^A] + \alpha\Delta T + \frac{1}{E}\sigma_{yy}^B = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$. (1)

- $\varepsilon_{zz}^A = 0 \longrightarrow \frac{1}{E}[\sigma_{zz}^A - \nu\sigma_{yy}^A] + \alpha\Delta T = 0$ (2)

$\sigma_{zz}^A = -\alpha\Delta T E + \nu\sigma_{yy}^A$

\# Equilibrio:

Al ser los dos cubos del mismo material y las mismas dimensiones

$\sigma_{yy}^A = \sigma_{yy}^B = \sigma_{yy}$. (3)

Sustituimos (3) y (2) en (1)

667. Placa de acero 20cm × 10cm × 1cm

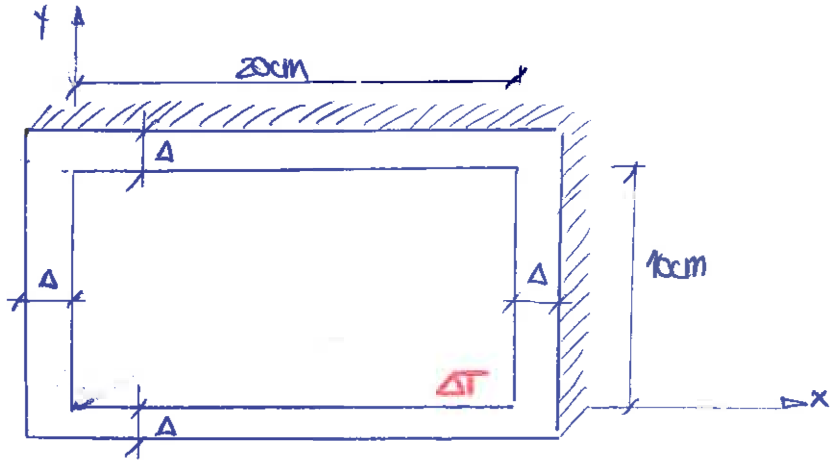
$\Delta = 0,1mm$

$E = 200GPa$

$\nu = \frac{1}{3}$

$\sigma_f = 240\ MPa$

$\alpha = 10^{-5}\ °C^{-1}$



1. Máximo ΔT sin que aparezcan tensiones.

Las tensiones aparecerán justo cuando la placa toque el cuerpo rígido. Aunque el máximo ΔT se dará en el instante anterior. $\longrightarrow$ $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$ cara libre.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha\Delta T = \frac{2\Delta}{L_x} = 1\cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha\Delta T = \frac{2\Delta}{L_y} = 2\cdot 10^{-3}$$

(1) $\varepsilon_{xx} = \frac{2\Delta}{L} = \alpha\Delta T$. porque llega antes al contacto con x.

$$\Delta T = \frac{2\Delta}{\alpha L} = \frac{2\cdot 0,1mm}{10^{-5}\cdot 200mm} \quad \boxed{100°C = \Delta T_{máx}}$$

2. Tensiones ppales para $\Delta T = 180°C$

HIPÓTESIS ≡ Supongo que hay contacto tanto en x como en y. $\sigma_{zz} = 0$

- $\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] + \alpha\Delta T$

$$\frac{2\Delta}{L_x} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] + \alpha\Delta T \quad (1) \longrightarrow 1\cdot 10^{-3} = \frac{1}{200\cdot 10^{9}}[\sigma_{xx} - \tfrac{1}{3}\sigma_{yy}] + 180\cdot 10^{-5}$$

- $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] + \alpha\Delta T$

$$\frac{2\Delta}{L_y} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] + \alpha\Delta T \quad (2) \longrightarrow 2\cdot 10^{-3} = \frac{1}{200\cdot 10^{9}}[\sigma_{yy} - \tfrac{1}{3}\sigma_{xx}] + 180\cdot 10^{-5}$$

De (1): $\sigma_{xx} = (1\cdot 10^{-3} - 180\cdot 10^{-5})\cdot 200\cdot 10^{9} + \frac{1}{3}\sigma_{yy} = -160\cdot 10^{6} + \frac{1}{3}\sigma_{yy}$.

Sustituyo en (2):

$$2\cdot 10^{-3} = \frac{1}{200\cdot 10^{9}}\sigma_{yy} + \frac{1}{3}\frac{160\cdot 10^{6}}{200\cdot 10^{9}} - \frac{1}{9}\frac{1}{200\cdot 10^{9}}\sigma_{yy} + 180\cdot 10^{-5}$$

$$2\cdot 10^{-3} - 1,8\cdot 10^{-3} - 2,66\cdot 10^{-4} = \frac{1}{200\cdot 10^{9}}\cdot\frac{8}{9}\sigma_{yy}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sigma_{yy} = -15MPa \\ \sigma_{xx} = -165\ MPa\end{array}}$$

Vemos que la hipótesis es correcta porque las dos tensiones nos salen a compresión, luego hay contacto en ambas.

666. Cubos alojados en una pieza rígida con orificio pasante.

$L = 10cm$

$\Delta = 0,1mm$

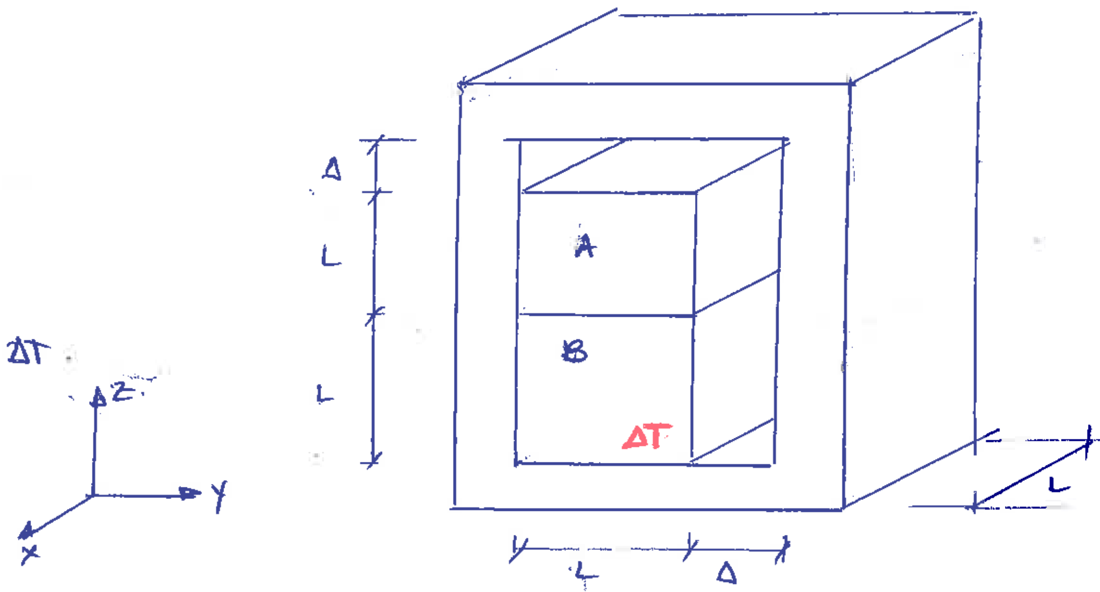
$E = 200GPa$

$\nu = \frac{1}{3}$

$\sigma_f = 420\ MPa$

$\alpha = 10^{-5}\ °C^{-1}$

B sometido a ΔT.



1. Máximo ΔT sin que aparezcan tensiones.

Para que no aparezcan tensiones la deformación tiene que ser justo hasta llegar a la pared de la cavidad.

HIPÓTESIS: suponemos que tocará arriba y al lado al mismo tiempo. (En B).

Si no hay tensiones: $\sigma_{xx}^A = 0$, $\sigma_{yy}^A = 0$, $\sigma_{zz}^A = 0$; $\sigma_{xx}^B = 0$, $\sigma_{yy}^B = 0$, $\sigma_{zz}^B = 0$. siempre por ser cara libre.

- $\varepsilon_{yy}^B = \frac{1}{E}[\sigma_{yy}^B - \nu(\sigma_{xx}^B + \sigma_{zz}^B)] + \alpha\Delta T = \alpha\Delta T \quad (1)$

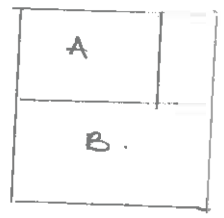
$\varepsilon_{yy}^B = \frac{\Delta}{L} \quad (2)$

De (1) y (2): $\frac{\Delta}{L} = \alpha\Delta T$

$$\Delta T = \frac{1}{10^{-5}}\cdot\frac{0,1mm}{100mm} \longrightarrow \boxed{\Delta T = 100°C}$$

2. Matrices de tensiones y deformaciones de ambos cubos si $\Delta T = 185°C$.

HIPÓTESIS: No hay contacto en A con y. $\boxed{\sigma_{yy}^A = 0}$



$$[\sigma_{ij}]^A = \begin{bmatrix}\sigma_{xx}^A & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^A & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^A\end{bmatrix} \qquad [\sigma_{ij}]^B = \begin{bmatrix}\sigma_{xx}^B & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^B & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^B\end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}]^A = \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}^A & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy}^A & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^A\end{bmatrix} \qquad [\varepsilon_{ij}]^B = \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}^B & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy}^B & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^B\end{bmatrix}$$

Cubo A:

Al ser x la cara libre $\longrightarrow$ $\boxed{\sigma_{xx}^A = 0}$

$\varepsilon_{xx}^A = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{zz}^A) \quad (1)$

$\varepsilon_{yy}^A = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{zz}^A) \quad (2)$

$\varepsilon_{zz}^A = \frac{1}{E}\sigma_{zz}^A$ (3)

\# Cubo B:

Al ser x la cara libre: $\boxed{\sigma_{xx}^B = 0}$

$\varepsilon_{xx}^B = \frac{1}{E}\left[-\nu(\sigma_{yy}^B + \sigma_{zz}^B)\right] + \alpha\Delta T$ (4)

$\varepsilon_{yy}^B = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy}^B - \nu\sigma_{zz}^B\right] + \alpha\Delta T = \frac{\Delta}{L}$ (5)

$\varepsilon_{zz}^B = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz}^B - \nu\sigma_{yy}^B\right] + \alpha\Delta T$ (6)

Equilibrio:

$\sigma_{zz}^A = \sigma_{zz}^B = \sigma_{zz}$

Ecus de compatibilidad de deformaciones:

$\delta_{zz} = \Delta = \delta_{zz}^A + \delta_{zz}^B = L\,\varepsilon_{zz}^A + L\varepsilon_{zz}^B$

$\frac{1}{E}\sigma_{zz} + \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu\sigma_{yy}^B\right] + \alpha\Delta T = \frac{\Delta}{L}$ (7)

De (5): $\sigma_{yy}^B = \frac{\Delta E}{L} - \alpha\Delta T E + \nu\sigma_{zz}$

$\frac{1}{E}\sigma_{zz} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu\Delta}{L} + \nu\alpha\Delta T - \nu^2\sigma_{zz} + \alpha\Delta T = \frac{\Delta}{L}$

$\frac{1}{200\cdot 10^9}\cdot\frac{17}{9}\sigma_{zz} = \frac{0{,}1\,mm}{100\,mm} - 185\cdot 10^{-5} - \frac{1}{3}\cdot 185\cdot 10^{-5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}1}{100}$

$\sigma_{zz} = \boxed{-120\,MPa = \sigma_{zz}^A = \sigma_{zz}^B}$

De (5): $\sigma_{yy}^B = \frac{0{,}1}{100}\,200\cdot 10^9 - 185\cdot 10^{-5}\cdot 200\cdot 10^9 - \frac{120\cdot 10^6}{3}$

$\boxed{\sigma_{yy}^B = -210\,MPa}$

$[\sigma_{ij}]^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -120 \end{bmatrix}$ (MPa) $\qquad [\sigma_{ij}]^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -210 & 0 \\ 0 & 0 & -120 \end{bmatrix}$ (MPa)

Calculo las deformaciones:

(1): $\varepsilon_{xx}^A = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{zz}^A) = +\frac{120\cdot 10^6}{3\cdot 200\cdot 10^9} = 2\cdot 10^{-4}$

(2): $\varepsilon_{yy}^A = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{zz}^A) = \varepsilon_{xx}^A$

(3): $\varepsilon_{zz}^A = \frac{1}{E}\sigma_{zz}^A = -\frac{120\cdot 10^6}{200\cdot 10^9} = -6\cdot 10^{-4}$

(4): $\varepsilon_{xx}^B = \frac{1}{200\cdot 10^9}\left[-\frac{1}{3}(-210\cdot 10^6 - 120\cdot 10^6)\right] + 185\cdot 10^{-5} = 2{,}4\cdot 10^{-3}$

(5): $\varepsilon_{yy}^B = \frac{\Delta}{L} = \frac{0{,}1\,mm}{100\,mm} = 10^{-3}$

(6): $\varepsilon_{zz}^B = \frac{1}{200\cdot 10^9}\left[-120\cdot 10^6 + \frac{210\cdot 10^6}{3}\right] + 185\cdot 10^{-5} = 1{,}6\cdot 10^{-3}$

3. Máximo ΔT sin que se produzca fallo en ningún cubo según Tresca.

Para que no se produzca fallo según Tresca: $\sigma_F \geq \sigma_{eq}$. El $\Delta T_{máx}$ nos lo dará la situación límite: $\sigma_F = \sigma_{eq}$

$\sigma_F = 420\,MPa = \sigma_{máx} - \sigma_{min}$

Sigo con la hipótesis de que en A no llega a tocar la pared y supongo que $|\sigma_{yy}^B| > |\sigma_{zz}^B|$

$\sigma_F = 0 - (-\sigma_{yy}^B) = \sigma_{yy}^B = 240\,MPa$

(7): $\frac{1}{E}\sigma_{zz} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy}^B + \alpha\Delta T = \frac{\Delta}{L}$

$\frac{2}{E}\sigma_{zz} + \alpha\Delta T = \frac{\Delta}{L} + \frac{\nu}{E}\sigma_{yy}^B = 10^{-3} - \frac{1}{200\cdot 10^9}\cdot\frac{240\cdot 10^6}{3} = 6\cdot 10^{-4}$

(5): $\frac{\Delta}{L} = \frac{1}{E}\sigma_{yy}^B - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} + \alpha\Delta T$

$\alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} = \frac{\Delta}{L} - \frac{1}{E}\sigma_{yy}^B = \frac{0{,}1}{100} + \frac{240\cdot 10^6}{200\cdot 10^9} = 2{,}2\cdot 10^{-3}$

$\to \sigma_{zz} = (\alpha\Delta T - 2{,}2\cdot 10^{-3})\frac{E}{\nu}$

Sustituimos en (7)

$\frac{2}{\nu}\alpha\Delta T - \frac{2}{\nu}\,2{,}2\cdot 10^{-3} + \alpha\Delta T = 6\cdot 10^{-4}$

$7\alpha\Delta T = 6\cdot 10^{-4} + 6\cdot 2{,}2\cdot 10^{-3}$

$\Delta T = 102{,}85$

6C9. Prisma triangular en un cajón indeformable.

$L = 25\,cm$

$a = 10\,cm$

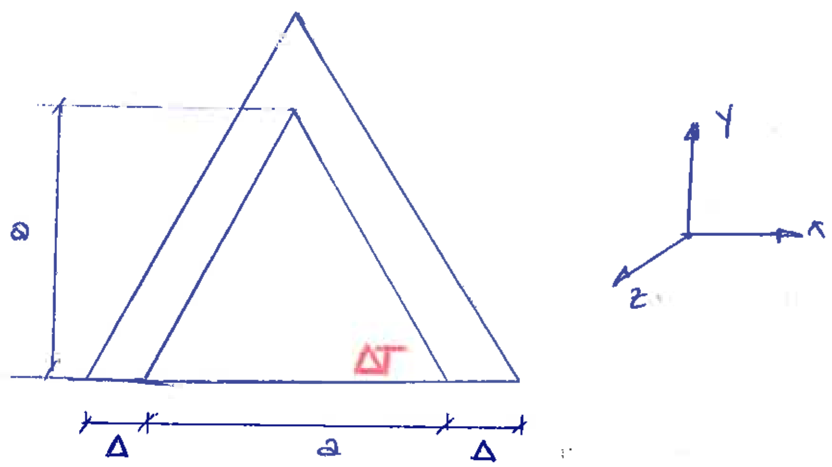
$\Delta = 0{,}1\,mm$

$E = 200\,GPa$

$\nu = 1/3$

$\alpha = 10^{-5}\,°C^{-1}$

$\sigma_f = 240\,MPa$



a. ΔT para la que comienza la fluencia según Tresca.

Según Tresca la fluencia se dará para: $\sigma_f = \sigma_{eq}$

$$\sigma_f = \sigma_{eq} = \sigma_{máx} - \sigma_{min}$$

Como el prisma está sometido únicamente a un incremento de T^a, las tensiones serán las mismas: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma$

$\sigma_{zz} = 0$ por ser la cara libre

$$\sigma_f = 0 + \sigma \longrightarrow \sigma = 240\,MPa \text{ a compresión}$$

La ley de Hooke con temperaturas:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] + \alpha\Delta T$$

$$\frac{2\Delta}{a} = \frac{1}{E}[\sigma - \nu\sigma] + \alpha\Delta T$$

$$\alpha\Delta T = \frac{2\Delta}{a} - \frac{\sigma}{E}(1-\nu) = \frac{2\cdot 0{,}1\,mm}{100\,mm} + \frac{240\cdot 10^6}{200\cdot 10^9}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{\Delta T = 280\,°C}$$

b. Cambio de volumen para el ΔT calculado.

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$\Delta V = e\,V$$

$$V = \frac{a^2}{2}L$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma - \nu\sigma] + \alpha\Delta T = \frac{-240\cdot 10^6}{200\cdot 10^9}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 10^{-5}\cdot 280 = 2\cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[0 - \nu(\sigma + \sigma)] + \alpha\Delta T = -\frac{2\nu\sigma}{E} + \alpha\Delta T = \frac{2\cdot 240\cdot 10^6}{3\cdot 200\cdot 10^9} + 280\cdot 10^{-5} = 3{,}6\cdot 10^{-3}$$

$$\Delta V = (2\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^{-3} + 3{,}6\cdot 10^{-3})\cdot \frac{10\cdot 10\cdot 10^{-4}\,m^2}{2}\; 0{,}25\,m$$

$$\boxed{\Delta V = 9{,}5\cdot 10^{-6}\,m^3 = 9{,}5\,cm^3}$$

3. Máximo ΔT en que se produzca fallo según Tresca y tensiones finales en ese instante.

Según Tresca el fallo se producirá cuando $\sigma_f \leq \sigma_{eq}$. Tenemos que estudiar el caso límite.

$$\sigma_f = \sigma_{eq} = \sigma_{máx} - \sigma_{min}$$

Como el contacto se produce primero en x suponemos que $|\sigma_{xx}| > |\sigma_{yy}|$

$$\sigma_f = \sigma_{zz} - \sigma_{xx} = 0 - \sigma_{xx}$$

$$\boxed{\sigma_{xx} = -240\,MPa}$$

Con las ecuaciones anteriores de la deformación:

(1) $\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] + \alpha\Delta T = 1\cdot 10^{-3}$

(2): $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] + \alpha\Delta T = 2\cdot 10^{-3}$

De (1): $\alpha\Delta T = 1\cdot 10^{-3} - \frac{1}{E}\sigma_{xx} + \frac{1}{E}\nu\sigma_{yy}$

sustituimos en (2):

$$2\cdot 10^{-3} = \frac{1}{200\cdot 10^9}\sigma_{yy} + \frac{1}{3}\cdot\frac{240\cdot 10^6}{200\cdot 10^9} + 1\cdot 10^{-3} + \frac{240\cdot 10^6}{200\cdot 10^9} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{200\cdot 10^9}\sigma_{yy}$$

$$\frac{1}{200\cdot 10^9}\cdot\frac{4}{3}\sigma_{yy} = 2\cdot 10^{-3} - 1\cdot 10^{-3} - 1{,}2\cdot 10^{-3} - 4\cdot 10^{-4}$$

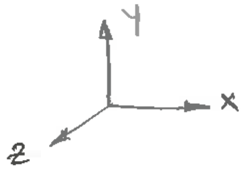
$$\boxed{\sigma_{yy} = -90\,MPa}$$

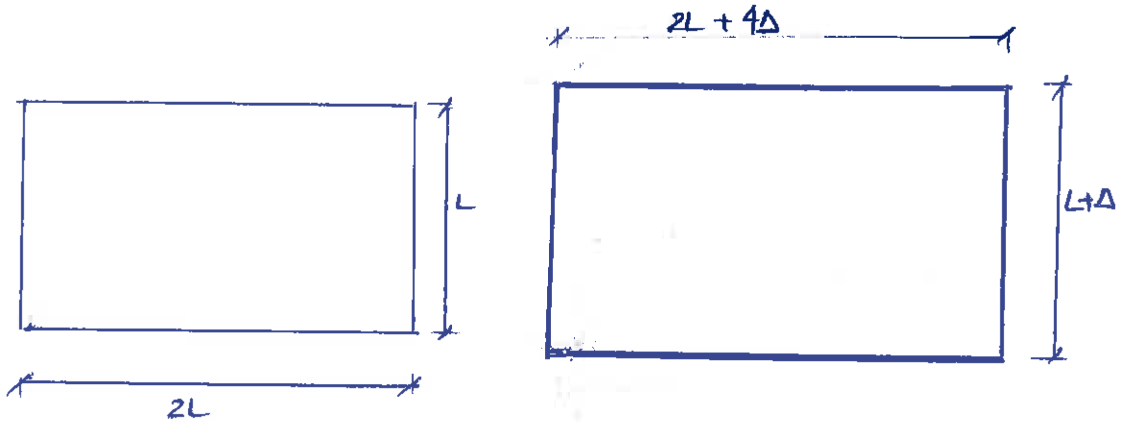
$$\alpha\Delta T = 1\cdot 10^{-3} + \frac{240\cdot 10^6}{200\cdot 10^9} - \frac{1}{3}\,\frac{90\cdot 10^6}{200\cdot 10^9} \longrightarrow \boxed{\Delta T = 205\,°C}$$

608. Se prevé colocar un paño en un marco rígido de manera que quede tensionado.

$\nu = \frac{1}{3}$

$\sigma_f = 55\,MPa$.





1. Calcular tensiones ppales en función de L, E, Δ. círculos de Mohr.

Aplicamos la ley de Hooke para calcular las deformaciones

- $\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}]$

$$\frac{4\Delta}{2L} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \tfrac{1}{3}\sigma_{yy}] \longrightarrow \sigma_{xx} = \frac{2\Delta E}{L} + \tfrac{1}{3}\sigma_{yy} \quad (1)$$

- $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}]$.

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \tfrac{1}{3}\sigma_{xy}] \quad (2)$$

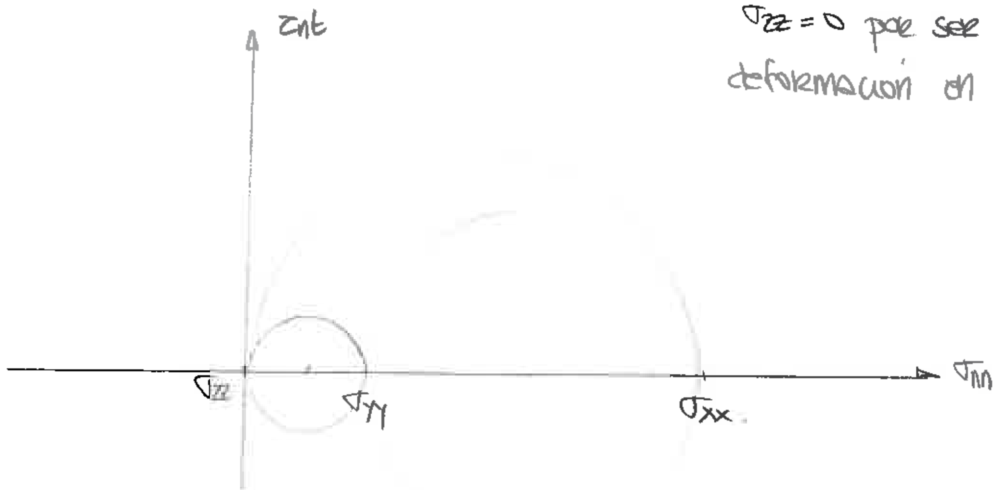
Sustituimos (1) en (2).

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{1}{3}\frac{2\Delta \cancel{E}}{\cancel{E}L} - \frac{1}{9}\frac{1}{E}\sigma_{yy}$$

$$\frac{\Delta}{L} + \frac{2\Delta}{3L} = \frac{1}{E}\cdot\frac{8}{9}\sigma_{yy}$$

$$\frac{5\Delta E}{3L} \cdot \frac{8}{9}\sigma_{yy} \longrightarrow \boxed{\sigma_{yy} = \frac{15}{8}\frac{\Delta E}{L} \qquad \sigma_{xx} = \frac{21}{8}\frac{\Delta E}{L}}$$

son a tracción porque se estira (tensiona) antes de unirla al marco.



$\sigma_{zz} = 0$ por ser libre la deformación en esa cara.

2. Coef. de seguridad según Tresca y Von Mises.

$\sigma_f = 55\,MPa$

$E = 2GPa$ $\qquad n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{eq}}$

$L = 120cm$

$\Delta = 8mm$.

Calculamos primero el valor de las tensiones principales.

$$\sigma_{xx} = \frac{21}{8}\cdot 2\cdot 10^9 \cdot \frac{8mm}{1200mm} = 35\,MPa$$

$$\sigma_{yy} = \frac{15}{8}\cdot 2\cdot 10^9 \cdot \frac{8mm}{1200mm} = 25\,MPa$$

\# Tresca:

$n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{eq}}$

$\sigma_{eq} = 2\tau_{máx} = \sigma_{máx} - \sigma_{mín} = \sigma_{xx} - \sigma_{zz} = 35\,MPa$

$n = \frac{55}{35} \longrightarrow \boxed{n_T = 1{,}57}$

\# Von Mises:

$n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{eq}}$

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{10^2 + 25^2 + 35^2} = 5\sqrt{39}$$

$n = \frac{55}{5\sqrt{39}}$

$\boxed{n_{VM} = 1{,}76}$

20.11.09

Pblma: Dos cubos iguales alojados en una cavidad infinitamente rígida.

$L = 5cm$

$\Delta = 0{,}075\ mm$

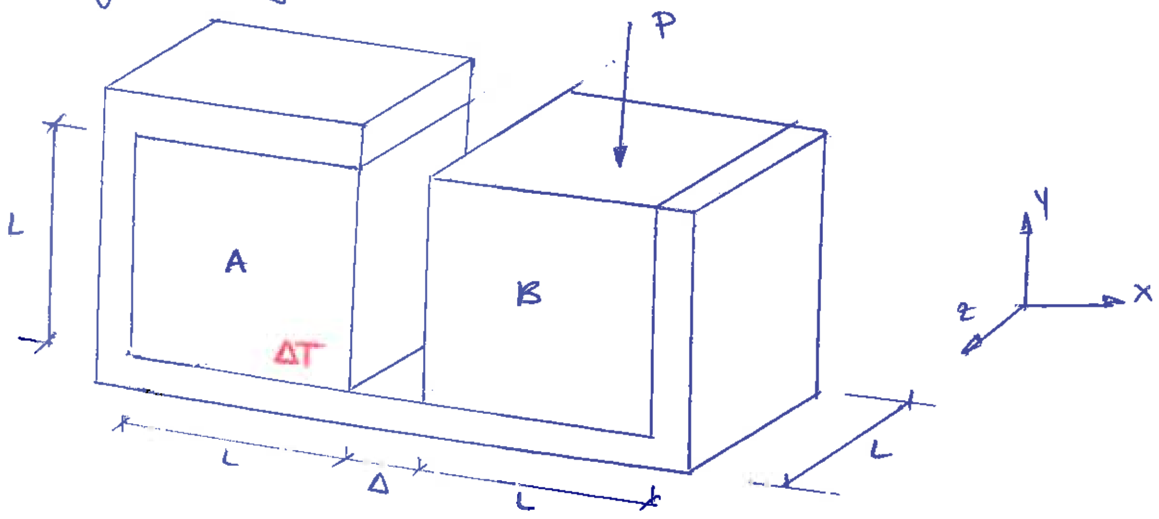
$E = 200\ GPa$

$\alpha = 10^{-5}\ °C^{-1}$

$\nu = \frac{1}{3}$

$\sigma_f = 360\ MPa$

$P = 450\ kN$.



1. ΔT para que B no cambie de longitud en x. $\rightarrow \delta_{xx}^{B} = 0$

$$[\sigma_{ij}]^A = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^A & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^A & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^A \end{bmatrix} \qquad [\sigma_{ij}]^B = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^B & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^B & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^B \end{bmatrix}$$

Al ser la deformación libre en la dirección z para ambos cubos $\rightarrow$ $\sigma_{zz}^A = 0$, $\sigma_{zz}^B = 0$

$$\sigma_{yy}^B = -\frac{P}{A} = -\frac{450 \cdot 10^3 N}{5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} m^2} = -180\ MPa$$

- Ecus de compatibilidad de deformaciones:

$$\delta_{xx}^{AB} = \Delta = \delta_{xx}^A + \delta_{xx}^B \longrightarrow \delta_{xx}^A = \Delta.$$

$$L\varepsilon_{xx}^A = \Delta.$$

$$\varepsilon_{xx}^A = \frac{\Delta}{L} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx}^A - \nu\sigma_{yy}^A] + \alpha\Delta T \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{xx}^B = 0 = \frac{1}{E}[\sigma_{xx}^B - \nu\sigma_{yy}^B] \longrightarrow \sigma_{xx}^B = \nu\sigma_{yy}^B = -\frac{1}{3} \cdot 180$$

$$\sigma_{xx}^B = -60\ MPa$$

$$\varepsilon_{yy}^A = 0 = \frac{1}{E}[\sigma_{yy}^A - \nu\sigma_{xx}^A] + \alpha\Delta T \qquad (2)$$

- Equilibrio:

Como A varía su longitud en Δ los cubos llegan a tocarse, luego:

$$\sigma_{xx}^A = \sigma_{xx}^B = \sigma_{xx} = -60\ MPa$$

$$(1):\ \frac{\Delta}{L} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}^A] + \alpha\Delta T$$

$$(2):\ 0 = \frac{1}{E}[\sigma_{yy}^A - \nu\sigma_{xx}] + \alpha\Delta T \longrightarrow \sigma_{yy}^A = -\alpha\Delta T E + \nu\sigma_{xx}$$

Sustituimos en (1):

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \nu\alpha\Delta T - \frac{\nu^2\sigma_{xx}}{E} + \alpha\Delta T$$

$(1+\nu)\alpha\Delta T = \frac{\Delta}{L} + \frac{\nu^2}{E}\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{xx}}{E}$

$(1+\frac{1}{3})\, 10^{-5}\Delta T = \frac{0,075\,mm}{50\,mm} - \frac{1}{9}\frac{60\cdot10^6}{200\cdot10^9} + \frac{60\cdot10^6}{200\cdot10^9}$

$\boxed{\Delta T = 132,5\,°C}$ $\qquad \sigma_{yy}^A = -285$ MPa

2. Máximo ΔT sin que se produzca fluencia según Tresca. Para ese ΔT expresar las matrices de tensiones de ambos cubos.

La fluencia se producirá para: $\sigma_f \le \sigma_{eq}$. Tendremos que estudiar la situación límite para obtener $\Delta T_{máx}$.

$\sigma_f = \sigma_{eq}$

$\sigma_{eq}^T = 2\tau_{máx} = \sigma_{máx} - \sigma_{min}$

$\sigma_{máx} = 0 = \sigma_{zz}^A$

$\sigma_{min} = \sigma_{yy}^A$

$\sigma_f = 0 - \sigma_{yy}^A \longrightarrow \sigma_{yy}^A = -360$ MPa

Volvemos a utilizar las ecuaciones (1) y (2):

(2) $\frac{1}{E}[\sigma_{yy}^A - \nu\sigma_{xx}^A] + \alpha\Delta T = 0 \longrightarrow \alpha\Delta T = -\frac{1}{E}[\sigma_{yy}^A - \nu\sigma_{xx}^A]$

(1) $\frac{\Delta}{L} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx}^A - \nu\sigma_{yy}^A] + \alpha\Delta T$

sustituimos en (1)

$\frac{\Delta}{L} = \frac{\sigma_{xx}^A}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy}^A - \frac{1}{E}\sigma_{yy}^A + \frac{\nu}{E}\sigma_{xx}^A$

$\frac{\Delta}{L} + \frac{\sigma_{yy}^A}{E}(1+\nu) = \frac{\sigma_{xx}^A}{E}(1+\nu)$

$\sigma_{xx}^A \frac{1+1/3}{200\cdot10^9} = \frac{0,078\,mm}{50\,mm} - \frac{360\cdot10^6}{200\cdot10^9}(1+\frac{1}{3}) \longrightarrow \sigma_{xx}^A = -135\cdot10^6$ MPa

Volvemos a (2):

$10^{-5}\Delta T = \frac{-1}{200\cdot10^9}[-360\cdot10^6 + \frac{1}{3}135\cdot10^6]$

$\boxed{\Delta T = 157,5\,°C}$

La matriz de tensiones para el cubo A $\quad [\sigma_{ij}]^A = \begin{bmatrix}-135&0&0\\0&-360&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ (MPa)

Para el cubo B:

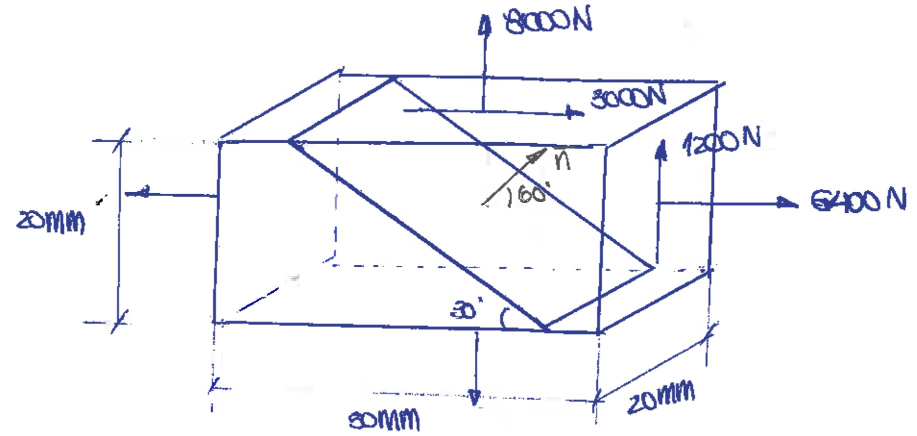
$\sigma_{xx}^B = \sigma_{xx}^A = -135$ MPa

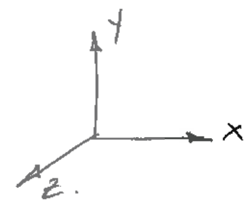
$\varepsilon_{xx}^B = \frac{1}{E}[\sigma_{xx}^B - \nu\sigma_{yy}^B] = 0$

$\sigma_{xx}^B = \nu\sigma_{yy}^B \longrightarrow \sigma_{yy}^B = \frac{-135}{3} = -45$ MPa

1era CUESTIÓN: Paralelepípedo formado por dos bisel a 30°

Adhesivo $\tau_{máx} = 126$ MPa.





1. $\tau_{máx}$ que debería soportar el adhesivo para que se produzca el fallo simultáneamente por tensión normal y cortadura.

Calculamos el estado tensional al que está sometido el paralelepípedo.

$\sigma_{xx} = \frac{P}{A} = \frac{6400\,N}{20\cdot20\cdot10^{-6}m^2} = 16$ MPa

$\sigma_{yy} = \frac{P}{A} = \frac{8000\,N}{20\cdot50\cdot10^{-6}m^2} = 8$ MPa

$\tau_{xy_1} = \frac{P}{A} = \frac{1200}{20\cdot20\cdot10^{-6}} = 3$ MPa

$\tau_{xy_2} = \frac{P}{A} = \frac{3000}{20\cdot50\cdot10^{-6}} = 3$ MPa

Estado tensional plano.

$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix}16&3&0\\3&8&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ (MPa)

En el plano $\vec{n}(\cos60°, \sin60°, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

$\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}]\,\vec{n} = \begin{bmatrix}16&3\\3&8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10,6\\8,43\end{pmatrix}$

$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n\cdot\vec{n} = 5,3 + 7,3 = 12,6$

$\tau_{nt} = \sqrt{|\vec{\sigma}_n|^2 - \sigma_{nn}^2}$

$|\vec{\sigma}_n|^2 = 10,6^2 + 8,43^2 = 183,42$

$\tau_{nt} = \sqrt{183,42 - 158,76} = 4,96$

2ª CUESTIÓN: Placa hexagonal deformada.

$L = 1m$

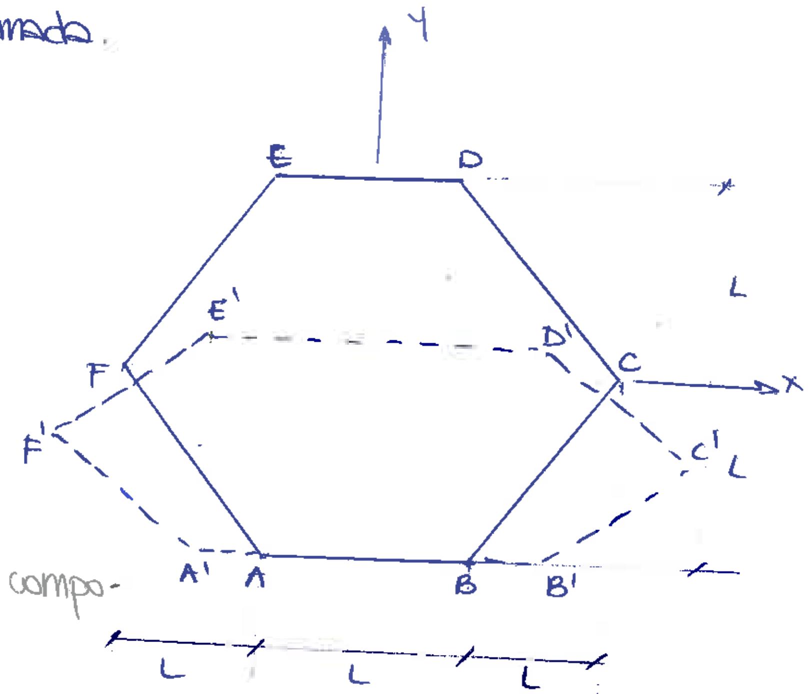
espesor $1cm$

V_{final} $40 cm^3$ menor que V_{inic}.

$\gamma_c = 3 \cdot 10^{-3}$ rad

Estado de def. plana y uniforme.

Calcular la matriz de deformaciones.



Al ser la deformación plana no habrá componentes de la deformación en el plano z

$\varepsilon_{zz} = 0 = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz}$

Y al ser uniforme la deformación será la misma para todos los puntos del plano xy

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$N_2 = -137{,}56$ kN

$N_1 = -476{,}53$ kN

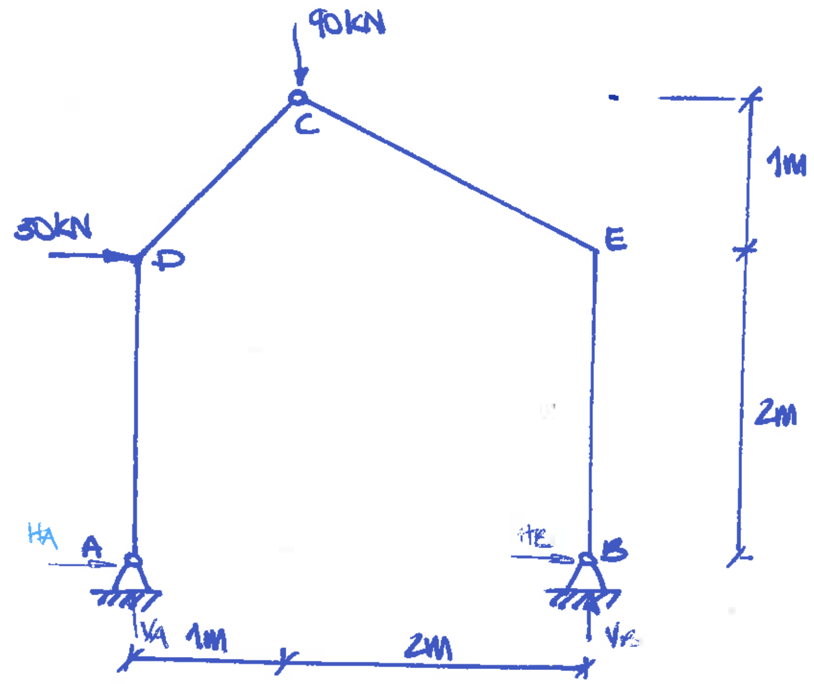
Las tensiones serán:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-476{,}53 \cdot 10^3 \text{ N}}{40 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} \longrightarrow \boxed{\sigma_1 = -119{,}13 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-137{,}56 \cdot 10^3 \text{ N}}{160 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} \longrightarrow \boxed{\sigma_2 = -8{,}59 \text{ MPa}}$$

Tensiones de compresión

7C2. Representar diagramas.



* Reacciones:

$\Sigma F_x = 0$: $H_A + H_B + 30 = 0$

$\Sigma F_y = 0$: $V_A + V_B = 90$

$\Sigma M_A = 0$: $30 \cdot 2 + 90 \cdot 1 - V_B \cdot 3 \longrightarrow V_B = 50$ kN

$V_A = 40$ kN

De la rótula: $\Sigma M_C^{CE} = 0$

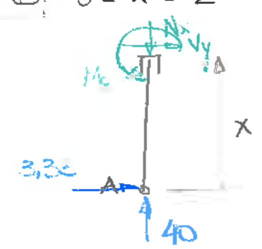
$V_B \cdot 2 + H_B \cdot 3 = 0$

$H_B = -\frac{2}{3} V_B \longrightarrow H_B = -33{,}33 \text{ kN} = -\frac{100}{3}$

$H_A = 3{,}33 \text{ kN} = \frac{10}{3}$

\# Diagramas:

$\boxed{AD}$ $0 \le x \le 2$



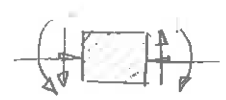
$\Sigma F_x = 0$: $N_x = 40$

$\Sigma F_y = 0$: $V_y = -3{,}33$

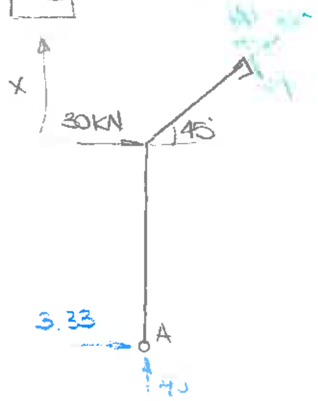
$\Sigma M_{z_0} = 0$: $M_z = 3{,}33x$

$x = 0$ (A): $M_z = 0$

$x = 2$ (D): $M_z = 6{,}66$



$\boxed{DC}$ $0 \le x \le 1$



$\Sigma F_x = 0$: $N_x + \frac{30}{\sqrt{2}} + \frac{40}{\sqrt{2}} + \frac{3{,}33}{\sqrt{2}} = 0$

$N_x = -51{,}83$ kN.

$\Sigma F_y = 0$: $V_y + \frac{30}{\sqrt{2}} + \frac{3{,}33}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}}$

$V_y = 4{,}72$ kN.

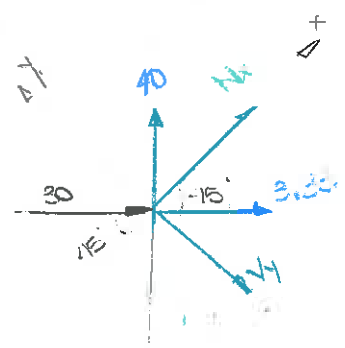
$\Sigma M_z = 0$: $M_z + 30x + 3{,}33(2+x) = 40x$

$M_z = 10x - 3{,}33(2+x)$

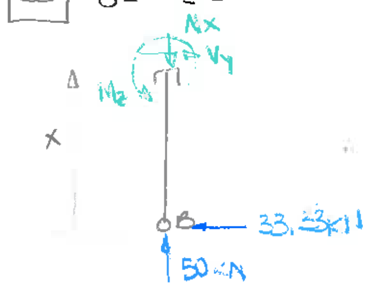
$x = 1$ (C): $M_z = 0$

$x = \frac{1}{2}$: $M_z = -3{,}32$

$x = 0$: $M_z = -6{,}66$



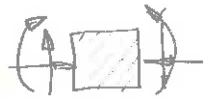
BE $0 \le x \le 2$



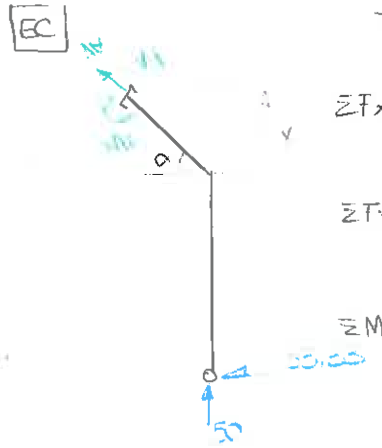
$\Sigma F_x = 0$: $N_x = 50$

$\Sigma F_y = 0$ $V_y = 33,33$

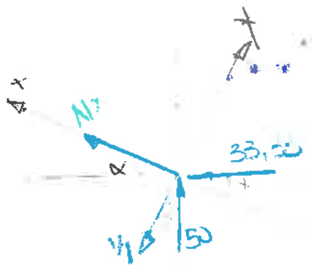
$\Sigma M_z = 0$ $M_z = 33,33x$ | $x = 0\,(B)$ $M_z = 0$; $x = 2\,(E)$ $M_z = 66,66$



EC



$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26,57$

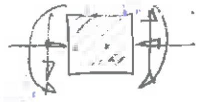


$\Sigma F_x = 0$: $N_x + 33,33 \cdot 0,89 + 50 \cdot 0,48 = 0$

$N_x = -53,67$

$\Sigma F_y = 0$ $V_y + 33,33 \cdot 0,48 = 50 \cdot 0,89$

$V_y = 28,5$

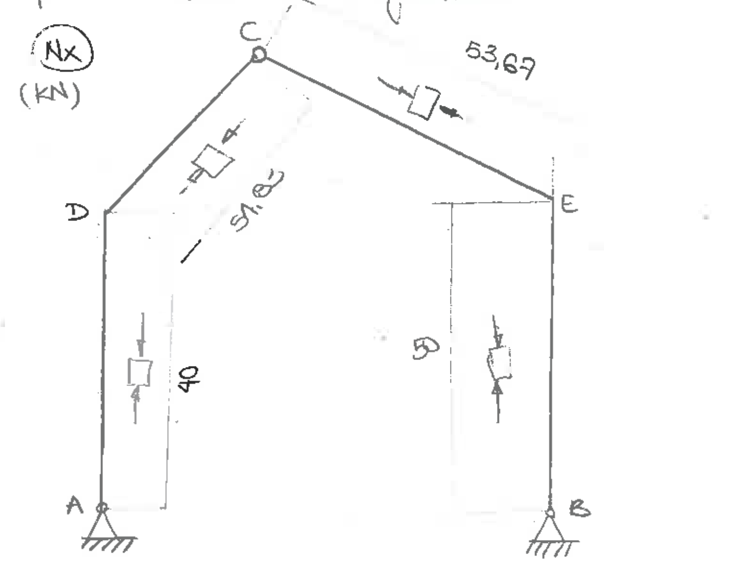


$\Sigma M_z = 0$: $M_z + 50x = 33,33(2+x)$

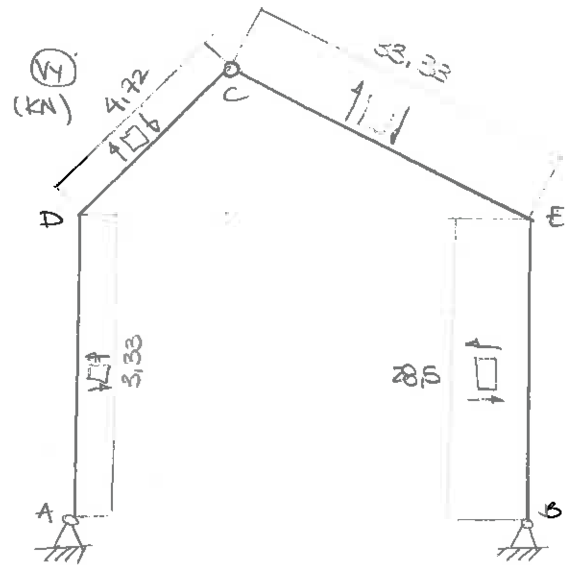
$M_z = 33,33(2+x) - 50x$ $x = 0\,(E)$ $M_z = 66,66$; $x = 1\,(C)$ $M_z = 0$; $x = 0,5$ $M_z = 58,33$

Representamos los diagramas

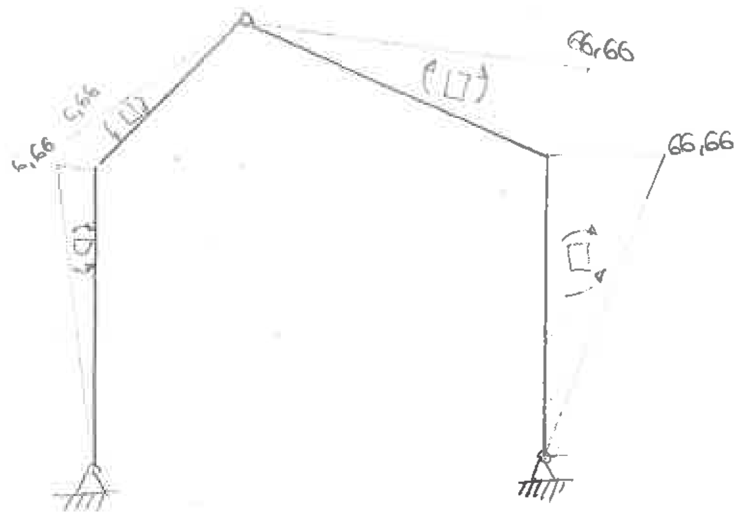
Nx (kN)



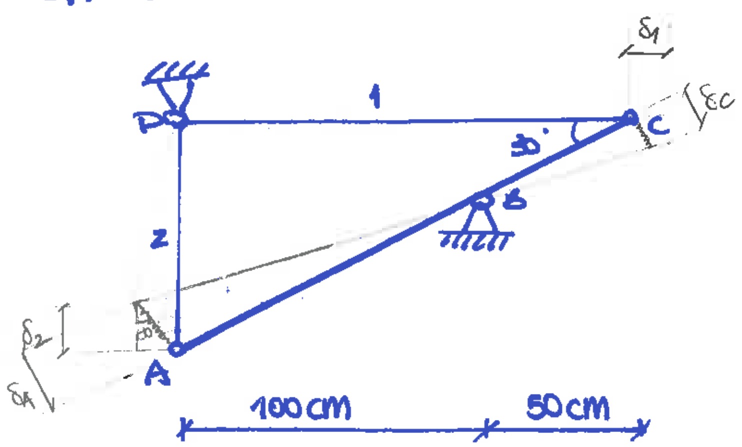
Vy (kN)



Mz (kNm)

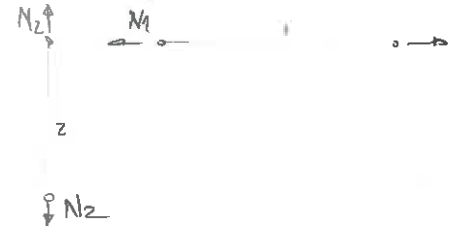


BC1. Calcular tensiones en ambas barras cuando $\Delta T = 40\,°C$ (incremento).

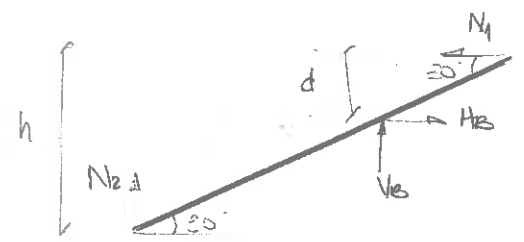


	Acero (1)	Cobre (2)
E (GPa)	200	100
α (°C^{-1})	$12,5 \cdot 10^{-6}$	$16,5 \cdot 10^{-6}$
A (cm²)	40	160

Supongamos que ambas barras articuladas trabajan a tracción



1. Equilibrio



$\Sigma F_x = 0$: $N_1 = H_B$

$\Sigma F_y = 0$ $N_2 + V_B = 0$

$\Sigma M_B = 0$ $N_1 \frac{50\sqrt{3}}{3} = N_2 \cdot 100$

$N_1 = 2\sqrt{3} N_2$ (1)

$tg\,30° = \frac{h}{150} \rightarrow h = 86,6\,cm.$

$tg\,30° = \frac{d}{50} \rightarrow d = \frac{50\sqrt{3}}{3} = 28,87\,cm.$

2. Compatibilidad de deformaciones

δ_1: alargamiento

δ_2: acortamiento

Por semejanza de triángulos $\delta_1 = 2\delta_c$

$\delta_1 \cos 30° = \delta_2$

$\delta_c \,sen 30° = \delta_1.$

$\frac{\delta_2}{\cos 30°} = 2 \frac{\delta_1}{sen 30°} \longrightarrow \frac{2\delta_2}{\sqrt{3}} = 2 \cdot 2\delta_1$

$\delta_2 = 2\sqrt{3}\,\delta_1$ (2)

3. Leyes de comportamiento

$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 L_1 \Delta T$

$\delta_2 = \frac{-N_2 L_2}{E_2 A_2} - \alpha_2 L_2 \Delta T$

Sustituimos (1), (3), (4) en (2):

$\frac{-N_2 L_2}{E_2 A_2} - \alpha_2 L_2 \Delta T = 2\sqrt{3}\left(\frac{2\sqrt{3} N_2 L_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 L_1 \Delta T\right)$

$N_2 \left(\frac{12\, L_1}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2}\right) = -\alpha_2 L_2 \Delta T - 2\sqrt{3}\alpha_1 L_1 \Delta T$

$N_2 \left(\frac{12 \cdot 1,5\,m}{200 \cdot 10^9 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} + \frac{86,6 \cdot 10^{-2}}{100 \cdot 10^9 \times 160 \cdot 10^{-4}}\right) = -40 \cdot 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 86,6 \cdot 10^{-2} - 2\sqrt{3} \cdot 40 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5$

$\sigma_2^T = 240 = 81{,}633 + \sigma_2^{\Delta T} \longrightarrow \sigma_2^{\Delta T} = 158{,}367$ MPa

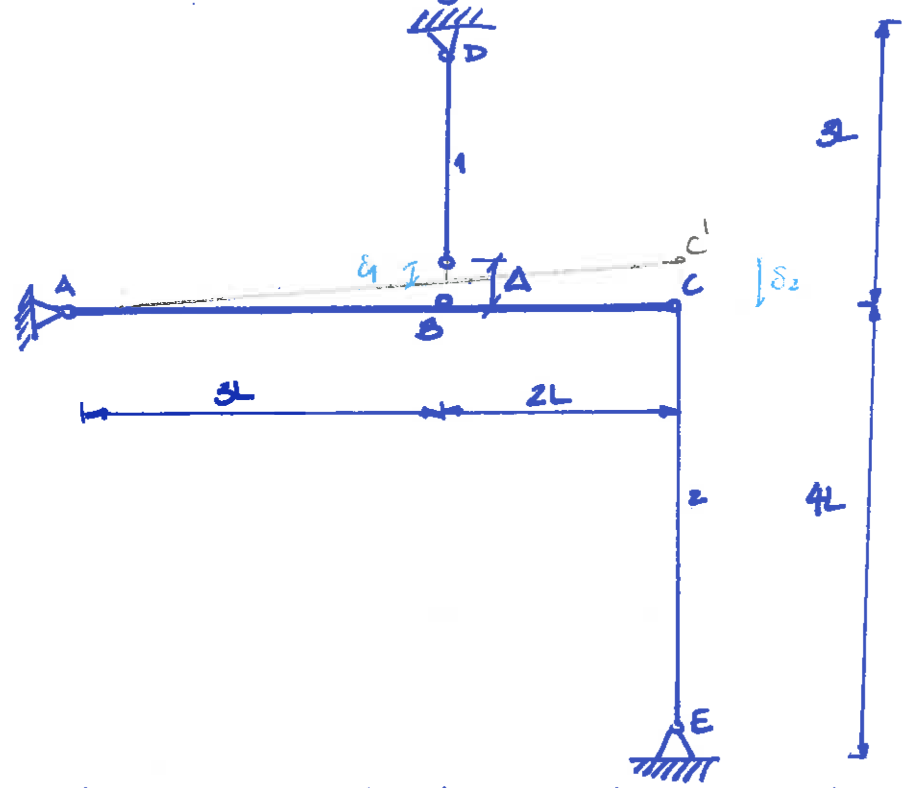
Vamos a la ecu del apartado anterior:

$$\left(\frac{12}{E} + \frac{25}{2E}\right)\underbrace{\frac{T_2}{A_2}}_{\sigma_2} = (13+12)\,\alpha\,\Delta T$$

$$\left(\frac{12}{200\cdot10^9} + \frac{25}{2\times200\cdot10^9}\right)158{,}367\cdot10^6 = (13+12)\;12\cdot10^{-6}\cdot\Delta T_{min}$$

$$\boxed{\Delta T_{min} = 59{,}88\ ^\circ C}$$

8C2. Tirante DB con longitud Δ más corto.



ABC barra rígida

$A_1 = 2A_2$

$L = 25$ cm

$\Delta = 0{,}5$ mm

$E = 200$ GPa

$\alpha = 12\cdot10^{-6}\ ^\circ C^{-1}$

$\sigma_F = 240$ MPa

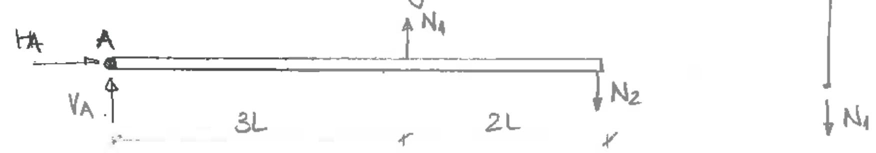
1) Tensiones en los tirantes debidas al montaje

Se fuerza el montaje con la barra ① más corta. La barra ① se estirará pero tenderá a recuperar su longitud inicial → lo que se opondrá la barra ②. Llegaríamos a una situación intermedia

Hipótesis: ambas barras tracción

1. Equilibrio:

Aislamos la barra rígida



$\Sigma M_A = 0: \; 3LN_1 = 5LN_2$

$3N_1 = 5N_2 \quad (1)$

2. Leyes de comportamiento

Suponemos que las dos barras se alargan

$\delta_1 = \dfrac{N_1\,3L}{EA_1} \quad (2)$

$\delta_2 = \dfrac{N_2\,4L}{EA_2} \quad (3)$

3. Compatibilidad de deformaciones

Por semejanza de triángulos tenemos que

$\dfrac{\delta_2}{5L} = \dfrac{\Delta - \delta_1}{3L} \longrightarrow 3\delta_2 = 5(\Delta - \delta_1) \quad (4)$

Sustituimos (2), (3) en (4)

$3\,\dfrac{N_2\,4L}{EA_2} = 5\Delta - 5\,\dfrac{N_1\,3L}{EA_1}$

como $\left|\begin{array}{l} A_1 = 2A_2 \\ N_1 = \frac{5}{3}N_2 \end{array}\right.$

$$3\frac{N_2\,4L}{EA_2} = 5\Delta - \frac{5\cdot\frac{-5}{3}N_2\cdot 3L}{E\,2A_2}$$

$$\left(\frac{12\,L}{E} + \frac{25\,L}{2E}\right)\frac{N_2}{A_2} = 5\Delta$$

$$\left(\frac{12\cdot 0{,}25}{200\cdot 10^9} + \frac{25\cdot 0{,}25}{2\times 200\cdot 10^9}\right)\frac{N_2}{A_2} = 5\cdot 0{,}5\ 10^{-3} \longrightarrow \frac{N_2}{A_2} = 81{,}633\text{ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 81{,}633\text{ MPa}}$$

$N_2 = 81{,}633\cdot 10^6\ A_2$

$3N_1 = 5N_2 = 5\times 81{,}633\cdot 10^6\cdot A_2$

$A_2 = \frac{A_1}{2}$

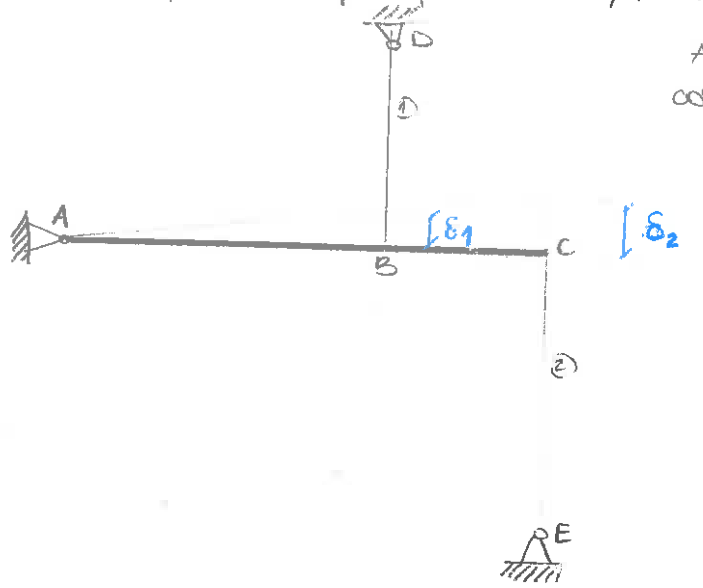
$$3N_1 = 5\times 81{,}633\cdot 10^6\ \frac{A_1}{2} \longrightarrow \frac{N_1}{A_1} = \frac{5\times 81{,}632\ 10^6}{2\times 3} = \sigma_1$$

$$\boxed{\sigma_1 = 68{,}027\text{ MPa}}$$

Las dos tensiones nos han salido positivas luego la hipótesis de que trabajan a tracción era correcta

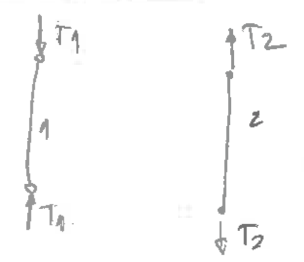
2) Tensiones finales en los tirantes si se les somete a un enfriamiento de $\Delta T = 30°C\ (-)$.

Las tensiones finales serán una suma de las debidas al montaje y las debidas al enfriamiento. Como las primeras ya las hemos calculado vamos a aplicar superposición, es decir, vamos a calcular las debidas a ΔT únicamente suponiendo que partimos ya del montaje hecho

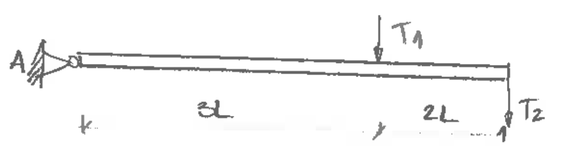


Al enfriarse ambas barras se van a comprimir.

Hipótesis: ① compresión
② tracción



1. Equilibrio



$\Sigma M_A = 0 \quad 3LT_1 + 5LT_2 = 0$

$3T_1 = -5T_2 \quad (1)$

2. Leyes de comportamiento.

$\delta = \pm\delta^N \pm \delta^{\Delta T}$

suponemos $\begin{cases}\delta_1 \text{ acortamiento}\\ \delta_2 \text{ alargamiento}\end{cases}$

① T_1 comprime, ΔT comprime

② T_2 alarga, ΔT comprime

$\delta_1 = \frac{T_1 3L}{EA_1} + \alpha 3L\Delta T \quad (2)$

$\delta_2 = \frac{T_2 4L}{EA_2} - \alpha 4L\Delta T \quad (3)$

3. Compatibilidad de deformaciones

$$\frac{\delta_2}{5L} = \frac{\delta_1}{3L} \longrightarrow 3\delta_2 = 5\delta_1 \quad (4)$$

sustituimos (2), (3) en (4)

$$3\frac{T_2\cdot 4L}{EA_2} - 3\alpha 4L\Delta T = 5\frac{T_1 3L}{EA_1} + 5\alpha 3L\Delta T$$

como $A_1 = 2A_2$ y $T_1 = -\frac{5}{3}T_2$

$$\frac{12T_2}{EA_2} - 12\alpha\Delta T = -\frac{25T_2}{E\,2A_2} + 15\alpha\Delta T$$

$$\left(\frac{12}{E} + \frac{25}{2E}\right)\frac{T_2}{A_2} = 15\alpha\Delta T + 12\alpha\Delta T$$

$$\left(\frac{12}{200\cdot 10^9} + \frac{25}{2\times 200\cdot 10^9}\right)\sigma_2 = (15+12)\ 12\ 10^{-6}\cdot 30 \longrightarrow \sigma_2 = 79{,}347\text{ MPa } (+)$$

volvemos a la ecu (1)

$3T_1 = -5T_2 = -5\cdot 79{,}347\cdot 10^6 A_2$

$A_2 = \frac{A_1}{2}$

$$\frac{T_1}{A_1} = \frac{-5\cdot 79{,}347\cdot 10^6}{2\times 3} \longrightarrow \sigma_1 = -66{,}123\text{ MPa}$$

→ Como nos sale negativa la hipótesis es errónea, ① trabaja a tracción por lo que σ_1 es (+)

Las tensiones finales, por superposición, serán

$\sigma^T = \sigma^M + \sigma^{\Delta T}$

$\sigma_1^T = 68{,}027 + 66{,}123 \longrightarrow \boxed{\sigma_1^T = 134{,}15\text{ MPa } (+)}$

$\sigma_2^T = 81{,}633 + 79{,}347 \longrightarrow \boxed{\sigma_2^T = 160{,}98\text{ MPa } (+)}$

3) ΔT_{min} sin que ningún tirante sobrepase el límite de fluencia

Vemos que la barra ②, tiene mayor tensión, luego sería la primera en fallar. En el caso límite en el que se alcance el límite de fluencia

$\sigma_2^T = \sigma_F$

Al ser $N_1 = 2N_2$ las tensiones serán

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{2N_1}{A} = 2\sigma_1$$

Volvemos a la ecuación

$$2\Delta = \left(\frac{L_1}{E} + \frac{4L_2}{E}\right)\sigma_1$$

$$2\cdot 1mm = \left(\frac{1000mm}{200\cdot 10^3 MPa} + \frac{4\cdot 1000mm}{200\cdot 10^3 MPa}\right)\sigma_1$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sigma_1 = 80 MPa \ (+)\\ \sigma_2 = 160 MPa \ (+)\end{array}}$$

salen positivas → hipótesis ok! Ambas a tracción.

El coef. de seguridad será:

$$n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{máx}} = \frac{\sigma_f}{\sigma_2} = \frac{240}{160}$$

$$\boxed{n = 1,5}$$

2. Máximo valor de Δ para que ningún tirante alcance la fluencia

En la barra ② hay más tensión, luego será la que llegue antes a fluencia cuando lleguemos a esa situación $\sigma_2 = \sigma_f = 240 MPa$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2} = 120 MPa$$

Vamos a la ecu del apartado anterior

$$2\Delta = \left(\frac{L_1}{E} + \frac{4L_2}{E}\right)\sigma_1$$

$$2\Delta = \left(\frac{1000mm}{200\cdot 10^3 MPa} + \frac{4\cdot 1000mm}{200\cdot 10^3 MPa}\right) 120 MPa$$

$$\boxed{\Delta = 1,5mm}$$

8C4. Calcular el máximo valor admisible Δ sin que se alcance la fluencia al realizar el montaje.

ABC indeformable

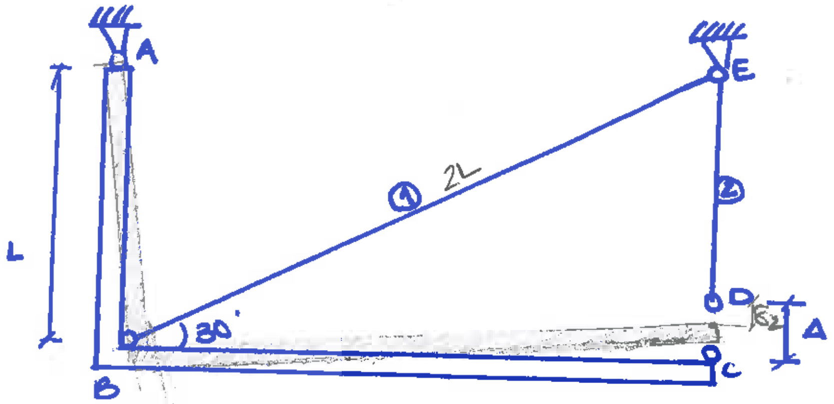
$L = 1m$

$E = 200GPa$

$A_1 = A_2 = A$

$\sigma_f = 240 MPa$

$\overline{BC} = \sqrt{3}L$



Se fuerza el montaje estirando la barra ② pero tenderá a recuperar su posición inicial por lo que llegará a una posición intermedia. Por esta razón hacemos la hipótesis de que ① trabaja a compresión y ② a tracción

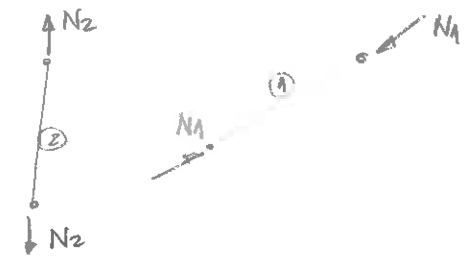
1. Equilibrio

Aislo el nudo E

$\Sigma F_y = 0 \quad N_2 = N_1 \cos 60$

$N_1 = 2N_2 \quad (6)$

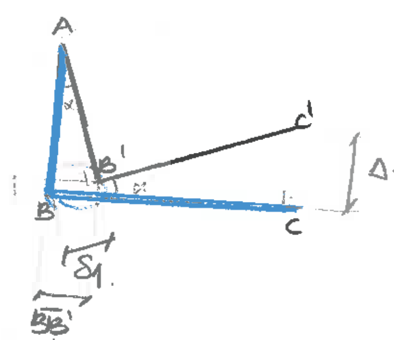
Al tener la misma A $\sigma_1 = 2\sigma_2$ falla antes



2. compatibilidad de deformaciones

δ_2: alargamiento

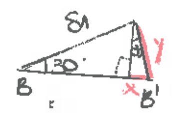
δ_1: acortamiento



$$\frac{\Delta - \delta_2}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\Delta - \delta_2}{\sqrt{3}L} = \frac{\overline{BB'}}{L}$$

$$\Delta - \delta_2 = \sqrt{3}\,\overline{BB'} \quad (1)$$



$\overline{BB'} = \delta_1 \cos 30° + x$

$x = y \operatorname{sen} 30$

$\delta_1 \operatorname{sen} 30° = y \cos 30°$

$x = \delta_1 \operatorname{tg} 30° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{3}}{6}\delta_1$

$\overline{BB'} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\delta_1 \quad (A)$

$\Delta - \delta_2 = \frac{2\sqrt{3}^2}{3}\delta_1$

$\Delta - \delta_2 = 2\delta_1 \quad (2)$

3. Leyes de comportamiento

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} \quad (4)$$

$$\delta_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} \quad (5)$$

Llevamos (4), (5), (6) a (2)

$$\Delta - \frac{N_2 L_2}{EA} = 2\cdot\frac{2N_2 L_1}{EA}$$

$$\Delta = \left(\frac{4L_1}{E} + \frac{L_2}{E}\right)\frac{N_2}{A}$$

En la situación de fluencia σ_2 fallaría antes pero $\sigma_1 = 2\sigma_2$ así que σ_2 no puede alcanzar σ_f porque σ_1 no aguantaría, como mucho $\sigma_2 = \frac{\sigma_f}{2}$ para que σ_1 no sobrepase σ_f

- $\sigma_2 = \frac{N_2}{A}$

  $\sigma_1 = \frac{N_1}{A} \quad 2\frac{N_2}{A}$

Vamos a la ecuación

$$\Delta = \left(\frac{4L_1}{E} + \frac{L_2}{E}\right)\sigma_2$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_f}{2} = 120\,MPa$$

$L_2 = L$

$L_1 = 2L$

$$\Delta = \left(\frac{4 \times 2 \times 1000\,mm + 1000\,mm}{200 \cdot 10^3\,MPa}\right) 120\,MPa$$

$$\boxed{\Delta = 5{,}4\,mm}$$

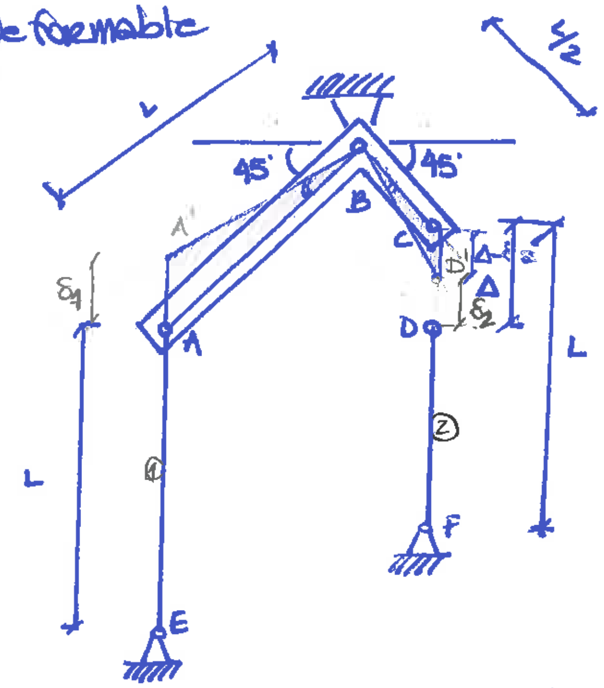
8C5. Escuadra ABC indeformable

$\Delta = 1\,mm$

$E = 200\,GPa$

$\sigma_f = 240\,MPa$

$L = 100\,cm$

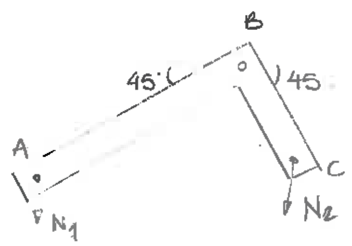


1. Tensiones en los tirantes debidas al montaje y coef. de seguridad.

Forzaríamos el montaje y para eso alargaríamos ② pero tendería a recuperar su longitud inicial por lo que llegaríamos a una situación intermedia

Hipótesis ① tracción
② tracción

1. Equilibrio



$\Sigma M_B = 0: \quad N_1 \cos 45° = N_2 \frac{L}{2} \cos 45°$

$N_2 = 2N_1 \quad (1)$

2. Compatibilidad de deformaciones

Por semejanza de triángulos

$$\frac{\delta_1}{A'B} = \frac{\Delta - \delta_2}{C'B}$$

$A'B \simeq AB = L$

$C'B \simeq CB = \frac{L}{2}$

$\delta_1 = 2(\Delta - \delta_2) \quad (2)$

3. Leyes de comportamiento $\qquad \delta_1, \delta_2$ alargamientos

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} \quad (3)$$

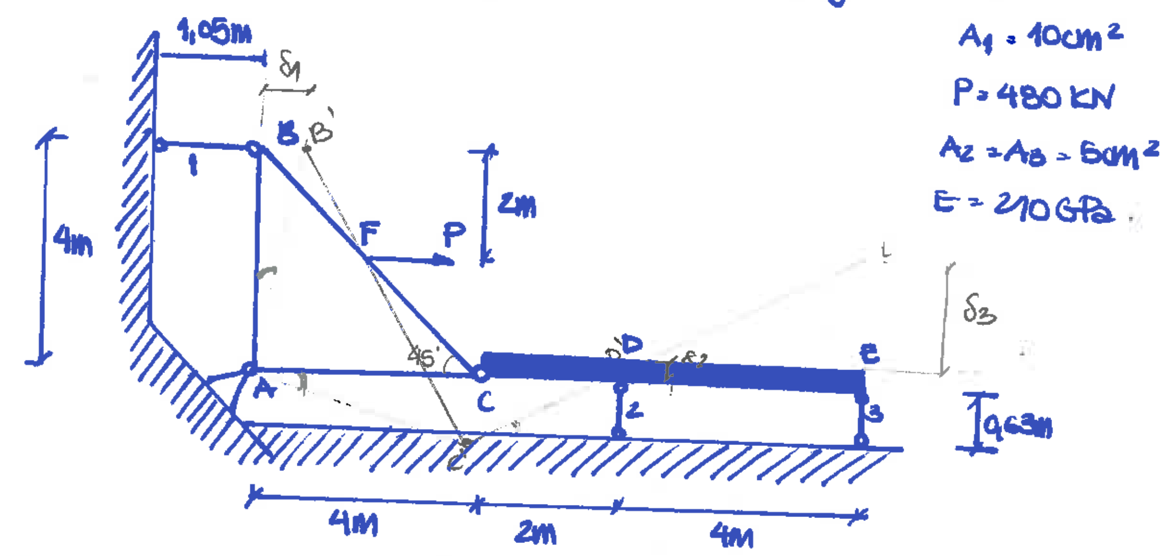
$$\delta_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} \quad (4)$$

Sustituimos (1), (3), (4) en (2)

$$\frac{N_1 L_1}{EA} = 2\Delta - 2\frac{2N_1 L_2}{EA}$$

$$2\Delta = \left(\frac{L_1}{E} + \frac{4L_2}{E}\right)\frac{N_1}{A}$$

8C7. Triángulo y barra infinitamente rígidos.



$A_1 = 10cm^2$

$P = 480\ kN$

$A_2 = A_3 = 5cm^2$

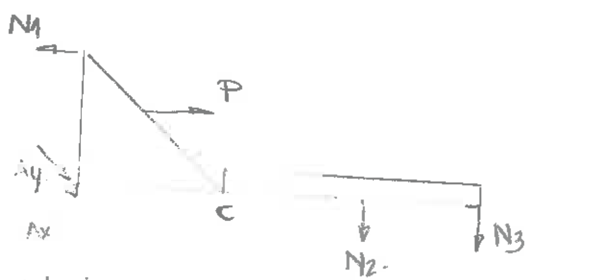
$E = 210\ GPa$.

1. Esfuerzos en los tirantes

La fuerza P generará unos esfuerzos que suponemos | ① tracción
②, ③ tracción

1. Equilibrio

Aislo el conjunto triángulo - barra.



$\Sigma M_A = 0$: $N_1 \cdot 4 = 2P + 6N_2 + 10N_3$

$2N_1 - 3N_2 - 5N_3 = P \quad (1)$

$\Sigma M_C = 0$: $2N_2 + 6N_3 = 0$

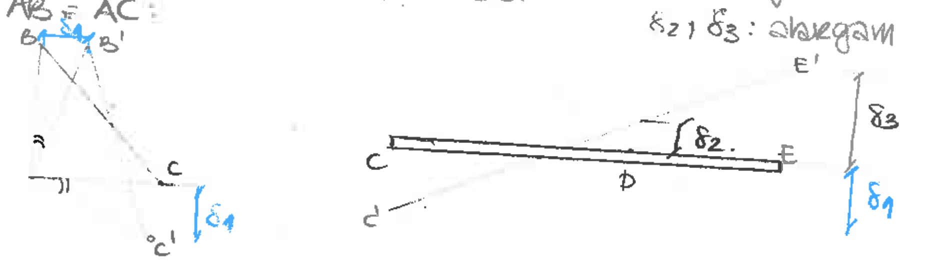
$N_2 = -3N_3 \quad (2)$

2. Compatibilidad de deformaciones.

Como $AB = AC$

δ_1: alargamiento

δ_2, δ_3: alargam



Por semejanza de triángulos

$$\frac{\delta_3+\delta_1}{\overline{CE}} = \frac{\delta_2+\delta_1}{\overline{CD}}$$

$$\frac{\delta_3+\delta_1}{6} = \frac{\delta_2+\delta_1}{2} \longrightarrow \delta_3+\delta_1 = 3(\delta_2+\delta_1)$$

$$\delta_3 = 3\delta_2 + 2\delta_1 \quad (3)$$

3. Leyes de comportamiento

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{E A_1} \quad (4)$$

$$\delta_2 = \frac{N_2 L_2}{E A_2} \quad (5)$$

$$\delta_3 = \frac{N_3 L_3}{E A_3} \quad (6)$$

Sustituimos (4), (5), (6) en (3)

$$\frac{N_3 L_3}{E A_3} = 3\frac{N_2 L_2}{E A_2} + 2\frac{N_1 L_1}{E A_1}$$

8C8. Plataforma infinitamente rígida de peso P = 100 kN.

$\Delta = 2cm$

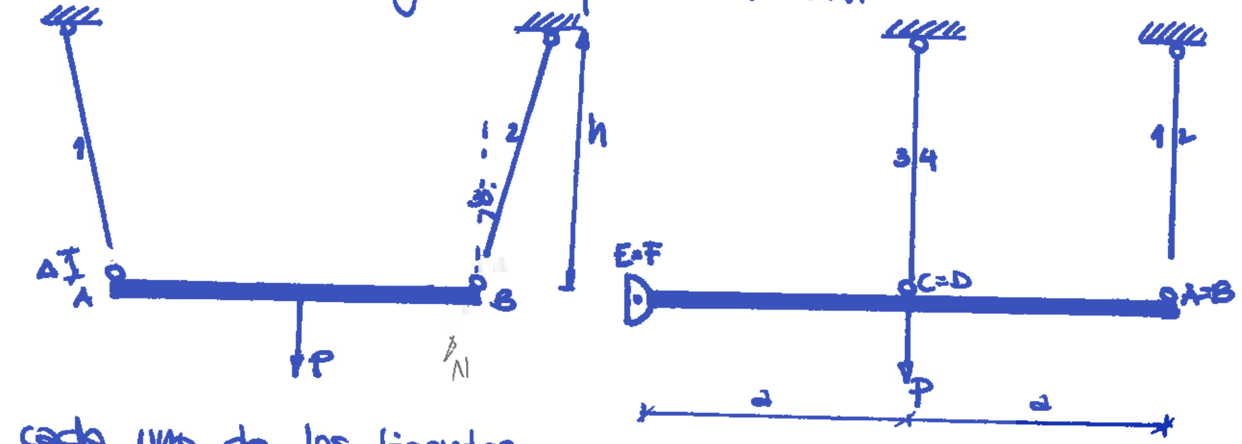
$P = 100\ kN$

$E = 210\ GPa$

$A = 10cm^2$

$P = 100\ kN$.

$h = 3m$



1. Tensiones en cada uno de los tirantes.

Resuelvo el problema por superposición. Las tensiones finales serán las debidas al montaje (M) + las debidas a la carga (P)

* MONTAJE (σ_M)

Las barras ① y ② se fuerzan para el montaje, se estirarán para tenderán a recuperar su longitud inicial, a lo que se oponen ③ y ④. Llegaremos a una situación de equilibrio donde suponemos que: | ①, ② tracción
③, ④ compresión

1. Equilibrio

Aislamos la plataforma

Por simetría

$N_1 = N_2$

$N_3 = N_4$.

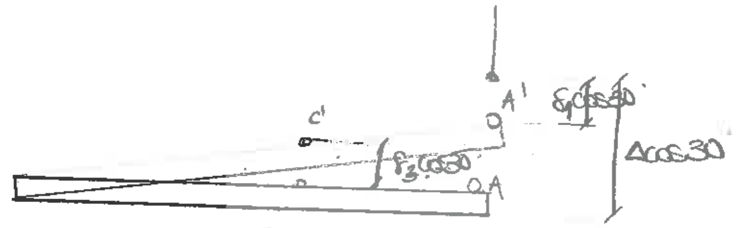
$\Sigma M_E = 0$ $\quad 2N_3\cos30° \cdot a = 2N_1\cos30° \cdot 2a$

$N_3 = 2N_1 \quad (1)$

2. Compatibilidad de deformaciones

δ_1 alargamiento

δ_3: acortamiento



$$\frac{\delta_3\cos30°}{a} = \frac{\Delta\cos30° - \delta_1\cos30°}{2a}$$

$$2\delta_3 = \Delta - \delta_1 \quad (2)$$

3. Leyes de comportamiento

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} \quad (3)$$

$$\delta_3 = \frac{N_3 L_3}{EA} \quad (4)$$

Sustituimos (3), (4), (1) en (2)

$$2 \cdot \frac{2N_1 L_3}{EA} = \Delta - \frac{N_1 L_1}{EA}$$

$$(4L_3 + L_1)\frac{N_1}{EA} = \Delta$$

$$\left(4\frac{3}{\cos30} + \frac{3}{\cos30}\right)\frac{N_1}{210\cdot10^9\cdot10\cdot10^{-4}} = 0{,}02 \longrightarrow N_1 = 242{,}48\ MPa$$

$$N_3 = 484{,}97\ MPa.$$

Las tensiones serán

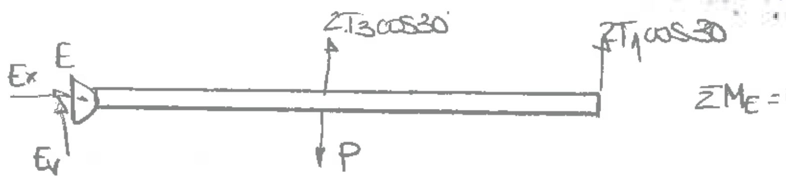
$$\sigma_1^M = \frac{N_1}{A_1} = \frac{242,48 \cdot 10^3 N}{10 \cdot 10^2 mm^2} = 242,48 MPa \ (+)$$

$$\sigma_3^M = \frac{N_3}{A_3} = \frac{484,97 \cdot 10^3 N}{10 \ 10^2 mm^2} = 484,97 MPa \ (-)$$

*CARGA (σ^P)

Partimos ya del montaje hecho (sin errores). Al aplicar la carga los 4 tirantes trabajan a tracción

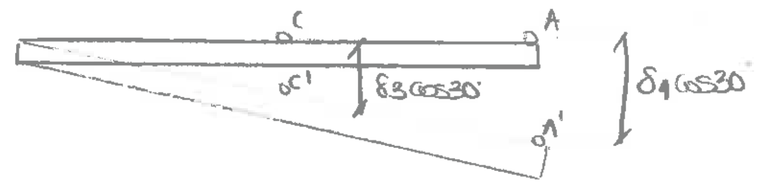
1. Equilibrio



$$\Sigma M_E = 0 : \ 2T_3 \cos 30 \cdot \cancel{a} + 2T_1 \cos 30 \cdot 2\cancel{a} = P\cancel{a}$$

$$T_3 + 2T_1 = \frac{P}{2\cos 30}$$

2. Compatibilidad de deformaciones



δ_1: alargamiento

δ_3: alargamiento

$$\frac{\delta_3 \cos 30}{a} = \frac{\delta_1 \cos 30}{2a}$$

$$\delta_1 = 2\delta_3 \quad (2)$$

3. Leyes de comportamiento

$$\delta_1 = \frac{T_1 L_1}{EA} \quad (3)$$

$$\delta_3 = \frac{T_3 L_3}{EA} \quad (4)$$

sustituimos (3), (4) en (2)

$$\frac{T_1 \cancel{L_1}}{EA} = 2 \frac{T_3 L_3}{EA} \longrightarrow T_1 = 2T_3$$

Lo llevamos a (1)

$$T_3 + 4T_3 = \frac{P}{2\cos 30} = \frac{100 \cdot 10^3}{2 \cdot \cos 30} \longrightarrow T_3 = 11,55 kN$$

$$T_1 = 23,1 kN$$

Las tensiones debidas a la carga

$$\sigma_1^P = \frac{T_1}{A_1} = \frac{11,55 \cdot 10^3 N}{10 \cdot 10^2 mm^2} = 11,55 MPa \ (+)$$

$$\sigma_3^P = \frac{T_3}{A_3} = \frac{23,1 \cdot 10^3 N}{10 \cdot 10^2 mm^2} = 23,1 MPa \ (+)$$

Las tensiones totales serán

$$\sigma^T = \sigma^M + \sigma^P$$

$$\sigma_1^T = 242,48 + 11,55 \longrightarrow \boxed{\sigma_1 = 254,03 MPa}$$

$$\sigma_3^T = -484,97 + 23,1 \longrightarrow \boxed{\sigma_3 = -461,87 MPa}$$

2. Desplazamiento extremo de la plataforma respecto a la horizontal:

Las tensiones debidas al montaje son mucho mayores que las debidas a la carga por lo que la plataforma ascenderá

$$\delta_1^T = \frac{N_1^T L_1}{EA} = \sigma_1^T \frac{L_1}{E}$$

$$\delta_1^T = \frac{254,03 \cdot 10^6 \cdot \frac{3}{\cos 30}}{210 \cdot 10^9} \longrightarrow \delta_1^T = 0,419 cm$$

El desplazamiento total (δ_{AB}) será

$$\delta_{AB} = \Delta \cos 30 - \delta_1^T \cos 30$$

$$= 2 \cos 30 - 0,419 \cos 30$$

$$\boxed{\delta_{AB} = 1,36 cm}$$

8C9. Estructura de 5 barras de misma sección.

$A = 100 mm^2$

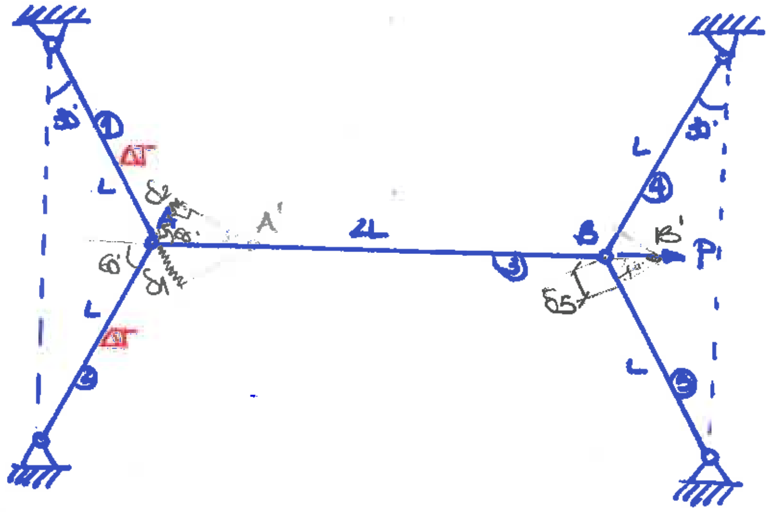
$E = 200 GPa$

$\alpha = 10^{-5} °C^{-1}$

$\Delta T = 50 °C$

$P = 10 kN.$

$L = 1m$



1. Desplazamiento de B, δ_B.

Al calentar las barras ① y ② se dilatarán pero las otras barras se van a oponer a su libre dilatación de forma que no se dilatarán del todo y llegarán a una situación intermedia.

1. Equilibrio

Hipótesis: ①, ②, ③ tracción

④, ⑤ compresión

Aislamos los nudos

$\Sigma F_x = 0$: $N_3 = N_1 \cos 60° + N_2 \cos 60°$

$\Sigma F_y = 0$: $N_1 \operatorname{sen} 60° = N_2 \operatorname{sen} 60° \longrightarrow N_1 = N_2 \quad (\delta_1 = \delta_2)$

$N_3 = 2N_1 \cos 60° = 2N_1 \frac{1}{2} \longrightarrow N_1 = N_2 = N_3 \quad (1)$

$\Sigma F_y = 0$: $N_4 \operatorname{sen} 60° = N_5 \operatorname{sen} 60° \longrightarrow N_4 = N_5 \quad (\delta_4 = \delta_5)$

$\Sigma F_x = 0$ $P = N_3 + 2N_4 \cos 60°$

$P = N_3 + N_4 \quad (2)$

2 Compatibilidad de deformaciones.

$\delta_3 = \overline{BB'} - \overline{AA'}$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ alargan

δ_4, δ_5 acortan

$\overline{AA'} = \frac{\delta_2}{\cos 60°} = 2\delta_2$

$\overline{BB'} = \frac{\delta_5}{\cos 60°} = 2\delta_5$

$\delta_3 = 2\delta_5 - 2\delta_2 \quad (3)$

3. Leyes de comportamiento

$\delta_1 = \frac{N_1 L}{EA} + \alpha \Delta T L = \delta_2 \quad (4)$

$\delta_3 = \frac{N_3 L}{EA} \quad (5)$

$\delta_4 = \frac{N_4 L}{EA} = \delta_5 \quad (6)$

Llevamos (4), (5), (6) a (3)

$\frac{2N_3 L}{EA} = 2\frac{N_4 L}{EA} - 2\frac{N_1 L}{EA} - 2L\alpha\Delta T$

(2): $N_2 = -3N_3$

(1) $2N_1 = P + 3N_2 + 5N_3 = P + 3(-3N_3) + 5N_3 = P - 9N_3 + 5N_3 = P - 4N_3$

$\frac{N_3 L_3}{A_3} = 3\frac{(-3N_3) L_2}{A_2} + \frac{(P - 4N_3) L_1}{A_1}$

$\left(\frac{L_3}{A_3} + \frac{9L_2}{A_2} + \frac{4L_1}{A_1}\right) N_3 = \frac{PL_1}{A_1}$

$\left(\frac{0,63 m}{5 \cdot 10^{-4}} + \frac{9 \times 0,63}{5 \cdot 10^{-4}} + \frac{4 \times 1,05}{10 \cdot 10^{-4}}\right) N_3 = \frac{480 \cdot 10^3 \times 1,05}{10 \cdot 10^{-4}}$

$N_3 = 30 kN$

$N_2 = -90 kN$: sentido contrario al supuesto, es a compresión

$N_1 = 180 kN$

2. Desplazamientos de B, C, D, E.

$\delta_B = \delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA_1} = \frac{180 \cdot 10^3 \times 1,05}{210 \cdot 10^9 \times 10 \cdot 10^{-4}} \longrightarrow \boxed{\vec{\delta_B} = 0,0009 m = 0,09 cm = \delta_C}$

$\delta_E = \delta_3 = \frac{N_3 L_3}{EA_3} = \frac{30 \cdot 10^3 \times 0,63}{210 \times 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}$

$\boxed{\delta_E^{\uparrow} = 0,018 cm}$

como N_2 es una compresión, δ_2 definido como acortamiento será

$\delta_D^{\downarrow} = \delta_2 = \frac{N_2 L_2}{EA_2} = \frac{90 \cdot 10^3 \times 0,63}{210 \cdot 10^9 \times 5 \cdot 10^{-4}}$

$\boxed{\delta_D^{\downarrow} = 0,054 cm}$

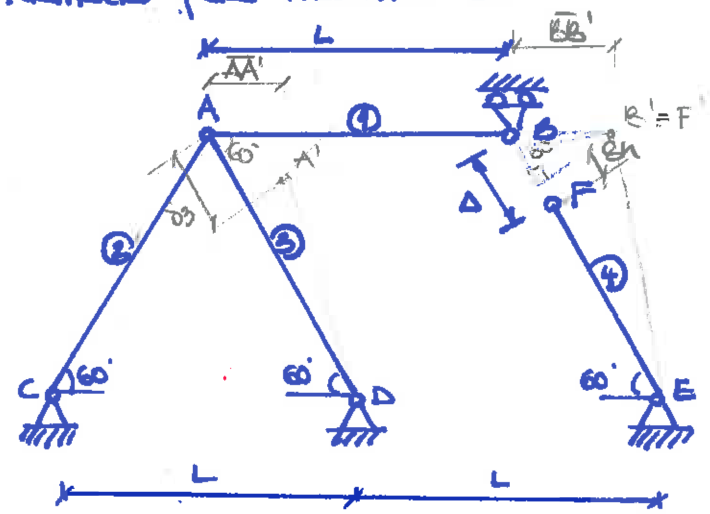
808. Estructura formada por tirantes de la misma sección.

$L = 100\,cm$

$\Delta = 1{,}4\,mm$

$E = 200\,GPa$

Se monta.

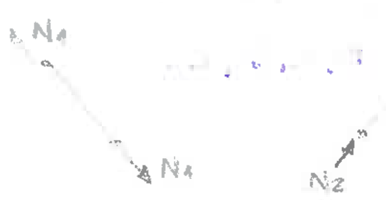


1. Tensiones en las barras.

Forzamos el montaje y para eso estiramos ④ pero tenderá a recuperar su longitud inicial, a lo que se oponden los otros tirantes. En el equilibrio llega remos a una situación intermedia.

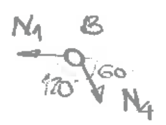
Hipótesis: ④, ① tracción

②, ③ compresión



1. Equilibrio

Aislamos los nudos



$\Sigma F_x = 0 \quad N_1 = N_4 \cos 60$

$N_4 = 2N_1 \quad (1)$

$\Sigma F_x = 0: \; N_1 + N_2 \cos 60° = N_3 \cos 60 \quad \rightarrow \quad 2N_1 + N_2 = N_3$

$\Sigma F_y = 0: \; N_2 \operatorname{sen} 60° + N_3 \operatorname{sen} 60° = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = -N_3$

$2N_1 \cdot N_3 - N_2 = 2N_3 \quad \longrightarrow \quad N_1 = N_3 \quad (2)$

2. compatibilidad de deformaciones.

$\delta_1 = \overline{BB'} - \overline{AA'}$

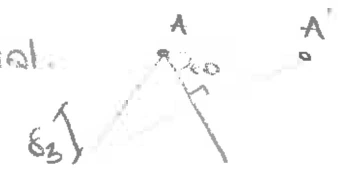
δ_4, δ_1 : alarg

δ_2, δ_3 : acortam

$\overline{BB'} \cos 60° = \Delta - \delta_4$

$\overline{BB'} = 2(\Delta - \delta_4)$

Por la simetría de la figura $\overline{AA'}$ también será horizontal.



$\overline{AA'} \cos 60° = \delta_3 \quad \rightarrow \quad AA' = 2\delta_3$

$\delta_1 = 2(\Delta - \delta_4) - 2\delta_3 \quad (3)$

3 leyes de comportamiento.

$\delta_1 = \dfrac{N_1 L}{EA} \quad (4)$

$\delta_2 = \dfrac{N_2 L}{EA} \quad (5)$

$\delta_3 = \dfrac{N_3 L}{EA} \quad (6)$

$\delta_4 = \dfrac{N_4 L}{EA} \quad (7)$

Llevamos (4), (6), (7) a (3)

$\dfrac{N_1 L}{EA} = 2\Delta - 2 \cdot \dfrac{N_4 L}{EA} - 2\dfrac{N_3 L}{EA}$

(1) $N_4 = 2N_1$

(2) $N_1 = N_3$

$\dfrac{N_1 L}{EA} = 2\Delta - \dfrac{4N_1 L}{EA} - \dfrac{2N_1 L}{EA}$

$\dfrac{7N_1 L}{EA} = 2\Delta \quad \longrightarrow \quad \dfrac{7 \times 1\,m}{200 \cdot 10^9}\,\sigma_1 = 2 \cdot 1{,}4 \times 10^{-3}$

$\boxed{\sigma_1 = 80\,MPa}$

Las tensiones serán

$\sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} \quad (+)$

$\sigma_2 = \dfrac{N_2}{A_2} = -\sigma_1$

$\sigma_3 = \dfrac{N_3}{A_3} = \sigma_1$

$\sigma_4 = \dfrac{N_4}{A_4} = 2\sigma_1$

$\longrightarrow$

$\sigma_2 = 80\,MPa$	(tracción)
$\sigma_3 = 80\,MPa$	(compresión)
$\sigma_4 = 160\,MPa$	(+)

2. Desplazamiento del extremo B.

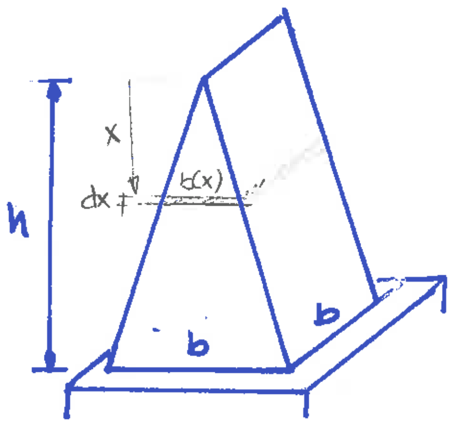
$\delta_B = 2(\Delta - \delta_4)$

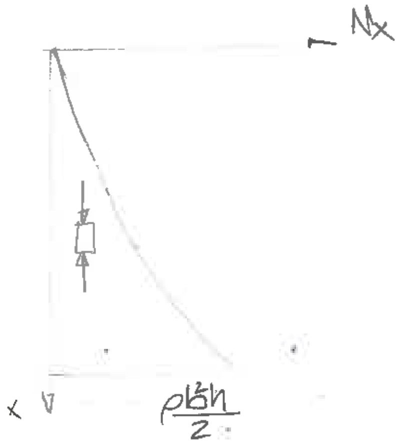
$\delta_4 = \dfrac{N_4 L}{EA} = \sigma_4 \cdot \dfrac{L}{E} = 160 \cdot 10^6 \cdot \dfrac{1}{200 \cdot 10^9} = 0{,}8 \cdot 10^{-3}\,m = 0{,}8\,m$

$\delta_B = 2(1{,}4 - 0{,}8)$

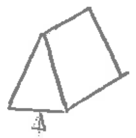
$\boxed{\delta_B = 1{,}2\,mm.}$

8CM. Dibujar diagrama de esfuerzos axiales y calcular acortam.
columna triangular sometida a su propio peso.
E, ρ.





Hacemos un corte:



$N_x = \rho \cdot vol = \rho \cdot \frac{A \cdot x}{2}$

$A = b(x) \cdot b$

$\frac{b(x)}{x} = \frac{b}{h} \longrightarrow b(x) = \frac{bx}{h}$

$\boxed{N_x = \rho \cdot \frac{b^2 x}{2h} \cdot x = \frac{\rho b^2 x^2}{2h}}$

Para el diagrama $x = 0 \longrightarrow N_x = 0$

$x = h \longrightarrow N_x = \frac{\rho b^2 h}{2}$

La deformación sería

$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} = \frac{d\delta}{dx}$

El acortamiento será:

$d\delta = \frac{N}{EA} dx = \frac{\rho b^2 x^2}{2h} \frac{1}{EA} dx$

$A(x) = b(x) \cdot b = \frac{b^2 x}{h}$

$d\delta = \frac{\rho b^2 x^2}{2hE \cdot \frac{b^2 x}{h}} dx = \frac{\rho x}{2E} dx$

El acortamiento total:

$d\delta = \int_0^h \frac{\rho x}{2E} dx = \frac{\rho}{2E} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h$

$\boxed{d\delta = \frac{\rho h^2}{4E}}$

$N_1 = N_3$

$N_4 = P - N_3$

$\frac{2N_3}{EA} = \frac{2P}{EA} - \frac{2N_3}{EA} - \frac{2N_5}{EA} - 2\alpha \Delta T$

$\frac{6 N_3}{200 \cdot 10^9 \times 100 \cdot 10^{-6}} = \frac{2 \times 10 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \times 100 \cdot 10^{-6}} - 2 \times 50 \cdot 10^{-5} \longrightarrow N_3 = 0 = N_1 = N_2$

$N_4 = N_5 = P = 10 kN$

El desplazamiento de B será

$\delta_B = 2\delta_5 = \frac{2 N_5}{EA} = 2 \times \frac{10 \cdot 10^3 N}{200 \cdot 10^9 \times 100 \cdot 10^{-6}}$

$\boxed{\delta_B = 0{,}001 m = 1 mm}$

2. Valor de P que haría fallar la estructura manteniendo ΔT
$\sigma_{adm} = 300 MPa$.

En el instante de fallo de la estructura, las barras que fallen serán ④ y ⑤:

$\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_{adm} = \frac{N_4'}{A} \longrightarrow N_4' = 300 \cdot 10^6 \times 100 \cdot 10^{-6} = 30 kN$ (comp)

(2) $P' = N_3' + N_4' \longrightarrow N_3' = P' - N_4'$

$N_1' = N_3'$

Vamos a (3)

$\frac{2N_3'}{EA} = 2\frac{N_4}{EA} - 2\frac{N_1}{EA} - 2\alpha \Delta T$

$\frac{2P'}{EA} - \frac{2N_4'}{EA} = \frac{2N_4'}{EA} - \frac{2P'}{EA} + \frac{2N_4'}{EA} - 2\alpha \Delta T$

$\frac{4 \times P'}{200 \cdot 10^9 \times 100 \cdot 10^{-6}} = \frac{6 \times 30 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \times 100 \cdot 10^{-6}} - 2 \times 50 \cdot 10^{-5}$

$\boxed{P = 40 kN}$

8.10. Calcular las tensiones que se originan en el montaje.

$E = 200 GPa$

$A_1 = A_4 = 5 cm^2$

$A_2 = A_5 = 3 cm^2$

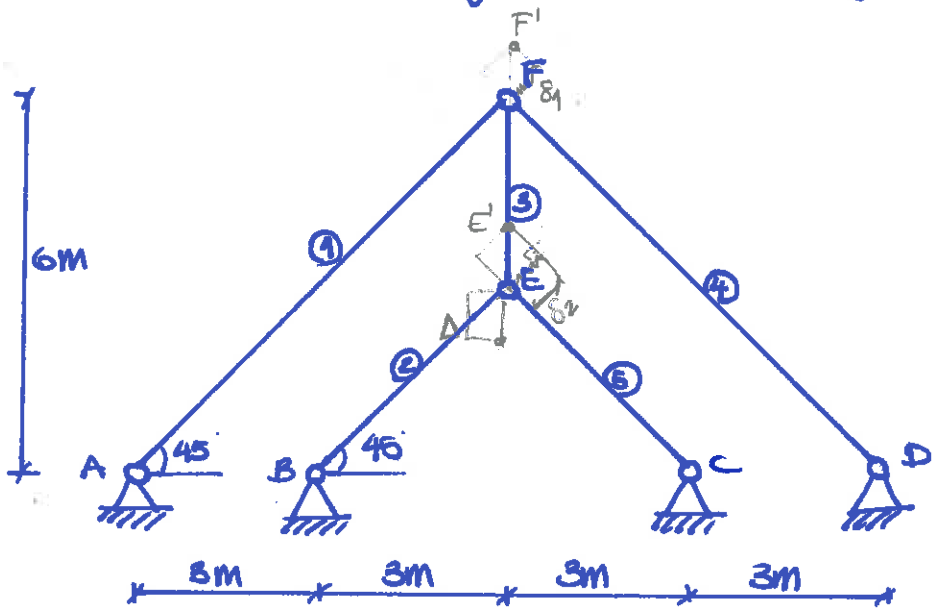
$A_3 = 2 cm^2$

$\Delta = 10 mm$ (EF)

$L_2 = \frac{3}{\cos 45} = 3\sqrt{2}$

$L_1 = \frac{6}{\cos 45} = 6\sqrt{2}$

$L_3 = 3 + \Delta \simeq 3$

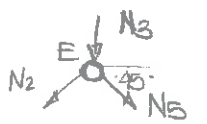


La barra ③ es más larga de lo debido pero se fuerza el montaje. Las otras barras tienden a recuperar su longitud inicial porque han tenido que ser estiradas para montarlo.

Hipótesis: ③ compresión
②, ⑤, ①, ④ tracción

1. Equilibrio

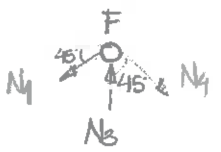
Aislo los nudos



$\Sigma F_x = 0$: $N_2 \cos 45 = N_5 \cos 45 \longrightarrow N_2 = N_5$

$\Sigma F_y = 0$: $N_3 + 2N_2 \operatorname{sen} 45 = 0$

$N_3 = -2\frac{\sqrt{2}}{2} N_2 = -\sqrt{2} N_2$



$\Sigma F_x = 0$: $N_1 \cos 45 = N_4 \cos 45 \longrightarrow N_1 = N_4$

$\Sigma F_y = 0$: $N_3 = 2N_1 \operatorname{sen} 45$

$N_3 = \sqrt{2} N_1$ (2)

2. Compatibilidad de deformaciones

$\delta_1, \delta_2, \delta_4, \delta_5$: alargam.

δ_3 alarg.

$\delta_3 = \overline{FF'} - \overline{EE'} - \Delta$

$\overline{FF'}\cos 45 = \delta_1$

$\overline{FF'}\frac{\sqrt{2}}{2} = \delta_1 \longrightarrow \overline{FF'} = \frac{2\delta_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\delta_1$

$\overline{EE'}\cos 45 = \delta_2$

$\delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{EE'} \longrightarrow \overline{EE'} = \sqrt{2}\delta_2$

$\delta_3 = \sqrt{2}\delta_1 - \sqrt{2}\delta_2 - \Delta$ (3)

3. Leyes de comportamiento

$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{E A_1} = \delta_4$ (4)

$\delta_2 = \frac{N_2 L_2}{E A_2} = \delta_5$ (5)

$\delta_3 = \frac{-N_3 L_3}{E A_3}$ (6)

Sustituimos (4), (5), (6) en (3).

$$-\frac{N_3 L_3}{E A_3} = \sqrt{2}\frac{N_1 L_1}{E A_1} - \sqrt{2}\frac{N_2 L_2}{E A_2} - \Delta$$

(1) $N_3 = -\sqrt{2} N_2$

(2) $N_3 = \sqrt{2} N_1$

$$-\frac{N_3 L_3}{E A_3} = \sqrt{2}\frac{N_3}{\sqrt{2}}\frac{L_1}{E A_1} + \sqrt{2}\frac{N_3 L_2}{\sqrt{2} E A_2} - \Delta$$

$$\left(-\frac{L_3}{E A_3} - \frac{L_1}{E A_1} - \frac{L_2}{E A_2}\right) N_3 = -\Delta$$

$$\left(\frac{3}{200\cdot 10^9 \times 2\cdot 10^{-4}} + \frac{6\sqrt{2}}{200\cdot 10^9 \times 5\cdot 10^{-4}} + \frac{3\sqrt{2}}{200\cdot 10^9 \times 3\cdot 10^{-4}}\right) N_3 = 10\cdot 10^{-3}$$

$N_3 = 43,372 kN$ (−) $\longrightarrow \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-43,372 \cdot 10^3 N}{2\cdot 10^{-4} m}$ $\boxed{= -216,86 MPa = \sigma_3}$

$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_3/\sqrt{2}}{A_1}$

$\sigma_1 = \frac{43,372\cdot 10^3 N/\sqrt{2}}{5\cdot 10^2 mm^2} \longrightarrow \boxed{\sigma_1 = 61,34 MPa} = \sigma_4$

$\sigma_2 = \sigma_5 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-N_3/\sqrt{2}}{A_2} = \frac{-43,372\cdot 10^3 N/\sqrt{2}}{3\cdot 10^2 mm^2}$

$\boxed{\sigma_2 = -102,24 MPa}$

↳ En nuestra hipótesis hemos supuesto que N_2 y N_5 eran a tracción pero vemos que son a compresión.

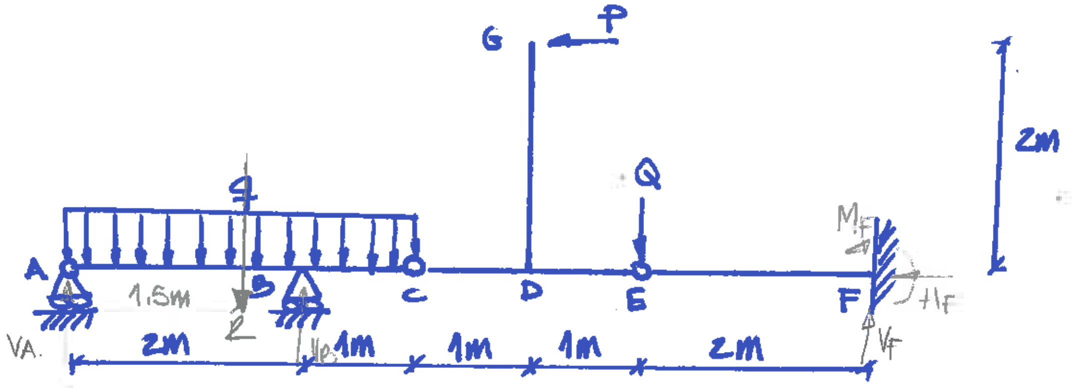
10C2. Viga con rótulas C y E.

$q = 180\ kN/m$

$Q = 20\ kN$

$\sigma_{adm}^{T} = 4\ MPa$

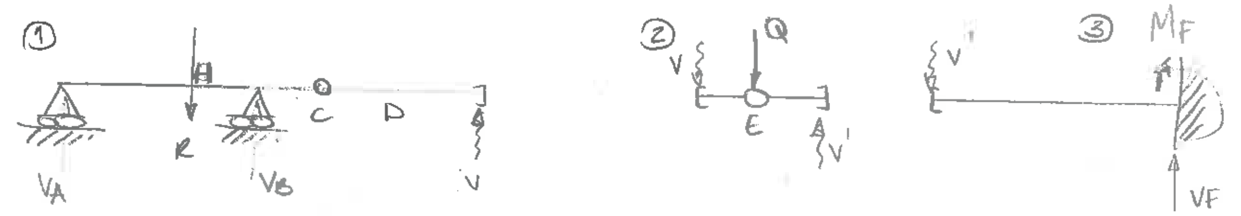
$\sigma_{adm}^{C} = 30\ MPa$



1. Cuando P=0, dibujar diagramas V_y, M_z.

$R = q \cdot L = 180\ kN/m \cdot 3m = 540\ kN$

Separo la estructura mediante la rótula E



② $\Sigma F_y = 0$: $Q = V' - V$ (4)

① $\Sigma F_y = 0$ $V_A + V_B + V = R$ (2)

$\Sigma M_E = 0$: $R \cdot 2{,}5 = V_A\, 4 + V_B\, 2$

$2V_A + V_B = 1{,}25R$ (3)

③ $\Sigma F_y = 0$ $V' = V_F$ (4)

$\Sigma M_F = 0$ $M_F = -2V'$ (5)

Como C es una rótula $\Sigma M_C^{CEF} = 0$

$\Sigma M_C = 0$: $Q\, 2 = V_F 4 + M_F$ (6)

(4) en (6) $2Q = 4V' + M_F$

(5) $2Q = 4V' - 2V' \rightarrow V' = Q$

$V = 0$

$M_F = 40\ kN$ (↺)

$V_F = 20\ kN$.

(2) $V_A + V_B = R \rightarrow V_B = R - V_A$

(3) $2V_A + V_B = 1{,}25R$

$2V_A + R - V_A = 1{,}25R \rightarrow V_A = 0{,}25R$

$V_A = 135\ kN$

$V_B = 405\ kN$

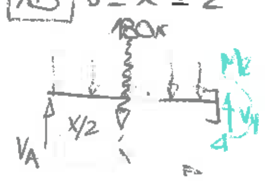
Para calcular los diagramas utilizo la división

EF $0 \le x \le 2$

$\Sigma F_y = 0$: $V_y = Q = 20\ kN$.

$\Sigma M_G = 0$ $M_z = 20x$ $\begin{cases} x=0\ (E) & M_z = 0 \\ x = 2\ (F) & M_z = 40\ kN\, m \end{cases}$

AB $0 \le x \le 2$

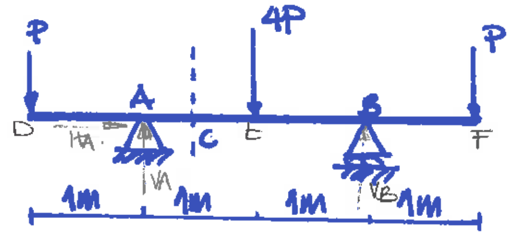


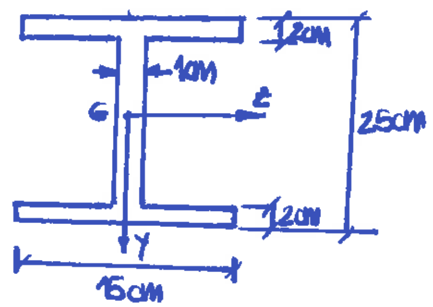
$\Sigma F_y = 0$: $V_y = 180x - 135$ $\begin{cases} x = 0\ (A) & V_y = -135\ kN \\ x = 2\ (B) & V_y = 225\ kN \\ x = 0{,}75 & V_y = 0 \end{cases}$

$\Sigma M_G = 0$: $\frac{180x^2}{2} - V_A x$ $\begin{cases} x = 0\ (A) & M_z = 0 \\ x = 2\ (B) & M_z = 90\ kN\, m \\ x = 0{,}75 & M_z = -50{,}625\ kN\, m \\ x = 1{,}5 & M_z = 0 \end{cases}$

10C1. Viga de acero

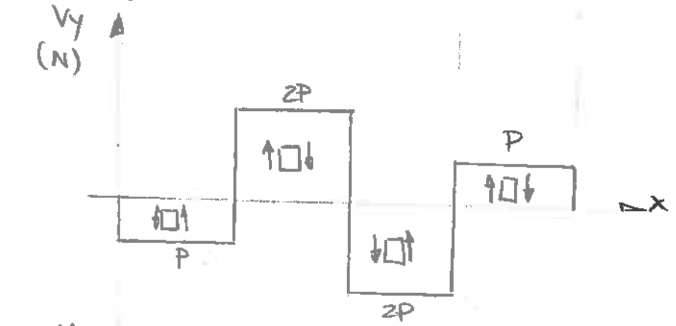
$\sigma_f = 240\ MPa$





1. Valor máximo de P aplicando Von-Mises y utilizando n = 1,6.

Como tenemos que aplicar Von-Mises damos por hecho que el estado tensional es biaxial y que tenemos que tener en cuenta tanto Mz como Vy. Lo primero que vamos a hacer es calcular los diagramas



- Reacciones

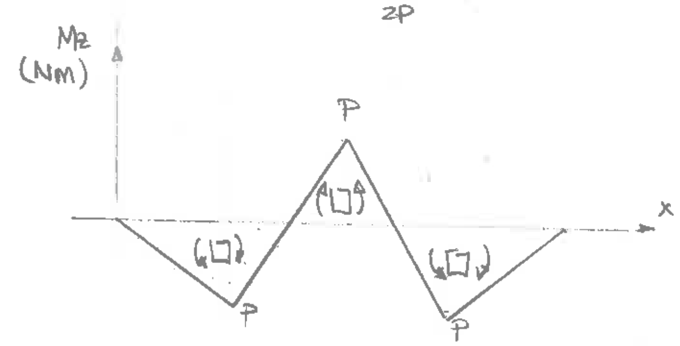
$\Sigma F_x = 0$ $H_A = 0$

$\Sigma F_y = 0$ $V_A + V_B = 6P$

$\Sigma M_B = 0$ $4P + 3P = P + 2V_A$

$V_A = 3P$

$V_B = 3P$



- Diagramas

DA $0 \le x \le 1$ $\Sigma F_y = 0$ $V_y = P$

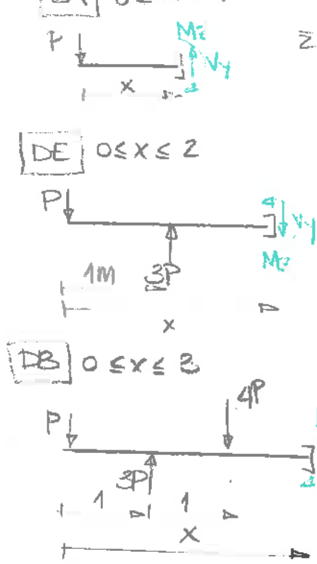
$\Sigma M_G = 0$ $M_z = Px$ $\begin{cases} x = 0\ (D) & M_z = 0 \\ x = 1\ (A) & M_z = P \end{cases}$

DE $0 \le x \le 2$ $\Sigma F_y = 0$: $V_y = 3P - P = 2P$

$\Sigma M_G = 0$ $M_z = 3P(x-1) - Px$ $\begin{cases} x = 1\ (A) & M_z = -P \\ x = 2\ (E) & M_z = P \end{cases}$

DB $0 \le x \le 3$ $\Sigma F_y = 0$: $V_y = 5P - 3P = 2P$

$\Sigma M_G = 0$: $M_z = 4P(x-2) + Px - 3P(x-1)$ $\begin{cases} x = 2\ (E) & M_z = -P \\ x = 3\ (B) & M_z = P \end{cases}$



La σ_{adm} será:

$n = \frac{\sigma_f}{\sigma_{adm}} \rightarrow \sigma_{adm} = \frac{\sigma_f}{n} = \frac{240\ MPa}{1{,}6}$

$\sigma_{adm} = 150\ MPa$

Según el criterio de Von-Mises:

$\sigma_{eq} \le \sigma_{adm}$

$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xy}^2} \le 150\ MPa$ (1)

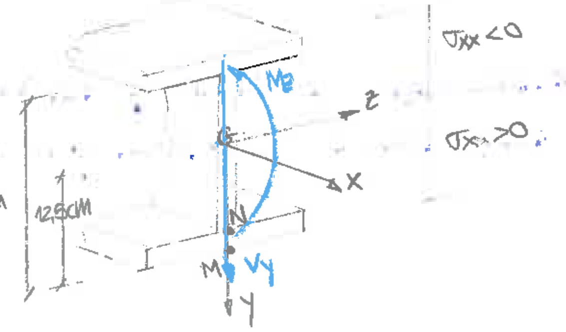
Tengo que calcular las tensiones, para ello estudio la sección más desfavorable y en ella los puntos más comprometidos

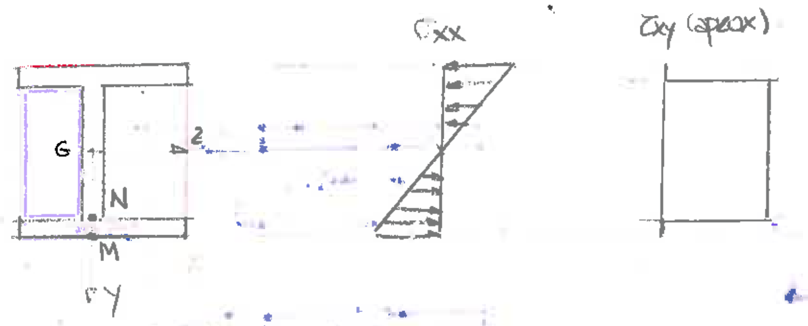
En la sección más desfavorable (E)

$M_z = P$ (↺)

$V_y = 2P$ (↓)

Como el material es equirresistente da igual que lo calcule a tracción que a compresión





Tengo que ver en cual de los dos posibles puntos la tensión equivalente es mayor

(M) $\sigma_{xx} = \dfrac{M_z \cdot y}{I_z}$

$I_z = I_1 - 2I_2$

$I_1 = \dfrac{1}{12} bh^3 = \dfrac{15 \times 25^3}{12} = 19531,25\ cm^4$

$I_2 = \dfrac{1}{12} bh^3 = \dfrac{(7,5-0,5)\cdot(25-4)^3}{12} = 5402,25\ cm^4$

$I_z\ 8726,75\ cm^4$

$\sigma_{xx}^M = \dfrac{P \times \frac{25}{2} 10^{-2}}{8726,75 (10^{-2})^4} = 1432,38P$ (Pa)

$\tau_{xy}^M = 0$

Lo sustituimos en (1)

$\sigma_{xx} \leq 150$ MPa

$1432,38P \leq 150 \cdot 10^6 \longrightarrow P \leq 104,721$ KN

(N) $\sigma_{xx} = \dfrac{M_z\ y}{I_z}$.

$\sigma_{xx}^N = \dfrac{P \times 10,5 \cdot 10^{-2}}{8726,75 \cdot 10^{-8}} = 1203,2P$ (Pa)

$\tau_{xy}^N = \dfrac{V_y \cdot Q_z}{b_1 I_z}$

$\tau_{xy}^N = \dfrac{2P\ (2\times15)10^{-4} \times 11,5 \times 10^{-2}}{1 \times 10^{2} \times 8726,75 \cdot 10^{-8}} = 790,67P$ (Pa)

Lo sustituimos en (1)

$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq 150$ MPa

$\sqrt{(1203,2P)^2 + 3\times(790,67P)^2} = 1822,96P \leq 150\ 10^6 \longrightarrow P \leq 82,284$ kN

La P máxima admisible será la más restrictiva, luego

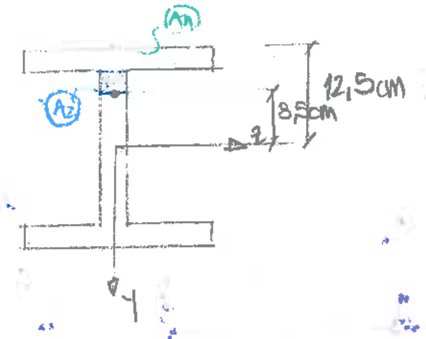
$\boxed{P = 82,284\ KN}$.

2. Diagrama de Mohr y tensiones ppales para un punto de la sección C del alma situado a 8,5cm por encima del eje neutro.

En la sección C

$V_y = 2P = 164,568$ KN

$M_z = 2P(x-1) - Px \Big|_{x=1,5} = 1,5P - 1,5P = 0$



$\sigma_{xx} = \dfrac{M_z \cdot y}{I_z} = 0$

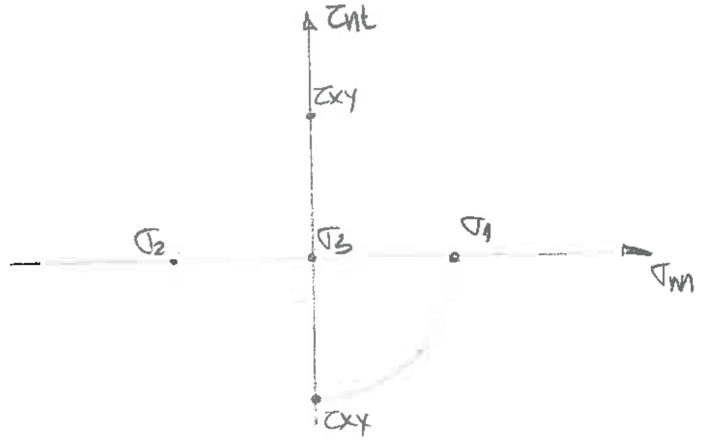
$\tau_{xy} = \dfrac{V_y \cdot Q_z}{b \cdot I_z}$.

$Q_z = y_G \cdot A_1 = y_{G_1} A_1 + y_{G_2} A_2$

$= (15\times2) \cdot 11,5 + (2\times1)\ 9,5 = 364\ cm^3$.

$\tau_{xy} = \dfrac{164,568 \cdot 10^3 N \times 364 \cdot 10^{-6} m^3}{1 \cdot 10^{-2} m \times 8726,75 \cdot 10^{-8} m^4} = 68,643$ MPa

El diagrama de Mohr será



$\sigma_1 = 68,643$ MPa

$\sigma_2 = -68,643$ MPa

$\sigma_3 = 0$

2. Calcular P admisible, despreciar tensiones debidas a V_y.

$L = 1m$

$\sigma_{adm}^{T} = 90\ MPa$

$\sigma_{adm}^{C} = 200\ MPa$

En el diagrama vemos que la sección que trabaja en condiciones más desfavorables es (D) $M_D = 2PL$ (↻)

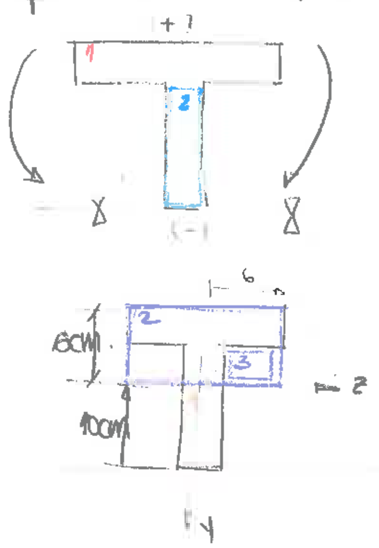
$$\sigma_{xx} = \frac{M_z\, y}{I_z}$$

Necesito calcular I_z y para eso previamente tengo que calcular y_G

$$Mom.est_T = Mom\ est_1 + Mom\text{-}est_2$$

$$y_G \cdot A_T = y_{G1} \cdot A_1 + y_{G2} \cdot A_2$$

$$y_G = \frac{6\times(4\times12) + 14(12\times4)}{(4\times12)+(12\times4)} = 10\ cm$$



$$I_z = I_{z1} + I_{z2} - 2I_{z3} = \frac{1}{3}(4\times10^3) + \frac{1}{3}(12\times6^3) - 2\frac{1}{3}(4\times2^3)$$

$I_z = 2176\ cm^4$

Tracc: $\sigma_{xx} = \frac{2P\times1\times0{,}06}{2176\cdot10^{-8}} = 5514{,}71\ P \le 90\cdot10^6$

$P \le 16{,}32\ kN$

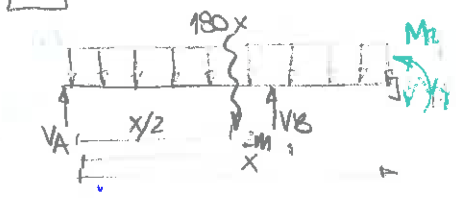
Comp. $\sigma_{xx} = \frac{2P\times1\times0{,}1}{2176\cdot10^{-8}} = 9191{,}18\ P \le 200\cdot10^6$

$P \le 21{,}76\ kN$

La $P_{máx}$ será la más restrictiva de ambas, luego

$\boxed{P = 16{,}32\ kN}$

AC $0 \le x \le 3$

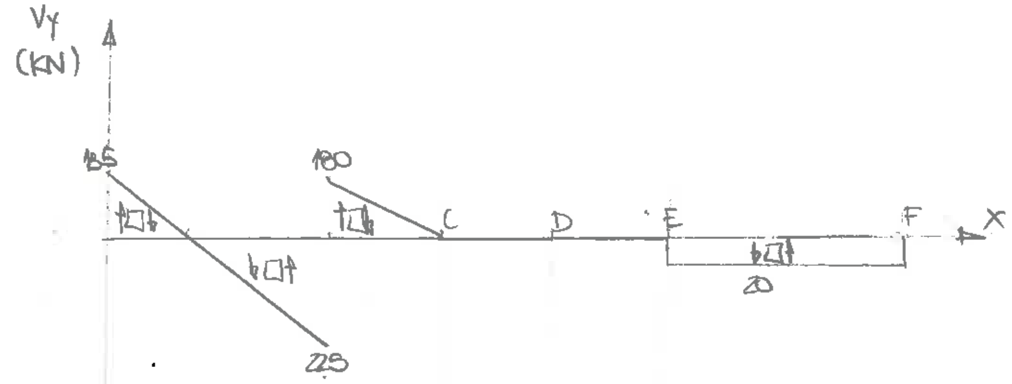


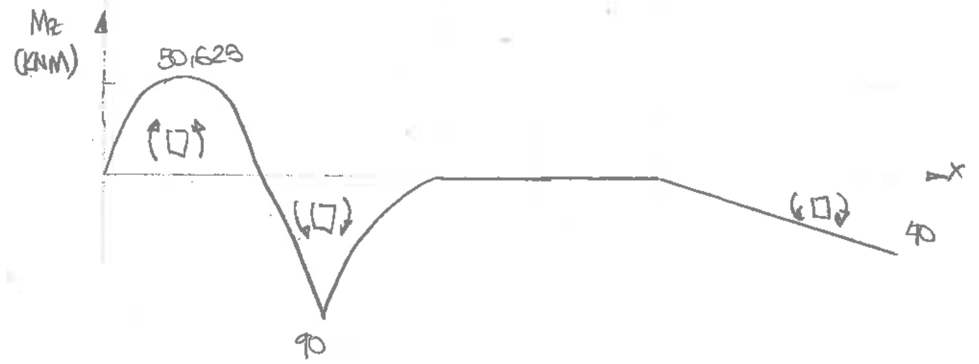
$\Sigma F_x = 0$: $V_y = V_A + V_B - 180x$

$V_y = 540 - 180x$; $x = 2(B)$: $V_y = 180$; $x = 3(C)$: $V_y = 0$

$\Sigma M_G = 0$: $M_z = V_A x + V_B(x-2) - \frac{180x^2}{2}$

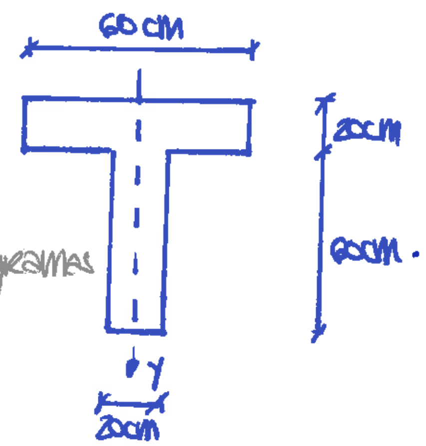
$M_z = 135x + 405(x-2) - 90x^2$; $x = 2(B)$: $M_z = -90\ kNm$; $x = 3(C)$: $M_z = 0$

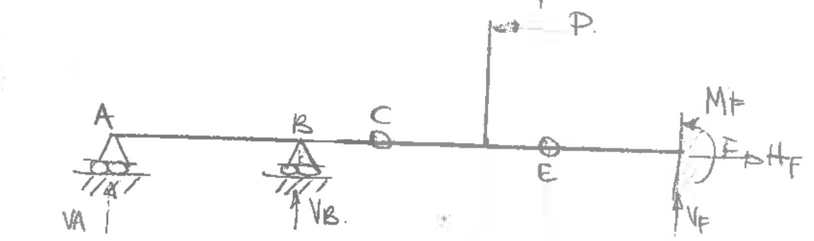


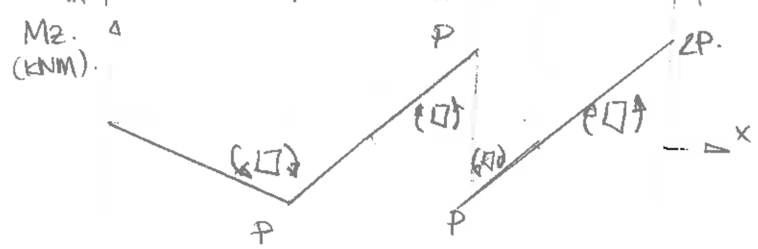


2. Máximo valor admisible de P (despreciar N_x, V_y).

Por el principio de superposición podemos calcular los diagramas debidos únicamente a P y después sumarla a la anterior







$\Sigma F_x = 0$ $H_F = P$

$\Sigma F_y = 0$ $V_F + V_A + V_B = 0$ (1)

$\Sigma M_E^{EF} = 0$ $M_F = -V_F\, 2$ (2)

$\Sigma M_C^{ABC} = 0$ $V_A \cdot 3 + V_B = 0 \rightarrow V_B = -3V_A$ (3)

$\Sigma M_C^{CDEF} = 0$ $M_F + P\times2 + V_F \cdot 4 = 0$

$2P = -M_F - 4V_F$ (4)

(4) y (2) $2P = 2V_F - 4V_F = -2V_F$

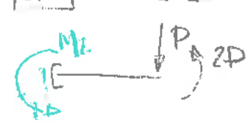
$\boxed{V_F = -P}$ $\boxed{M_F = 2P}$

(1) y (3) $V_A + V_B = -V_F = P$

$V_A - 3V_A = -2V_A = P$

$\boxed{V_A = -\frac{P}{2}}$ $\boxed{V_B = \frac{3P}{2}}$

EF $0 \le x \le 2$



$\Sigma F_y = 0$ $V_y = P$

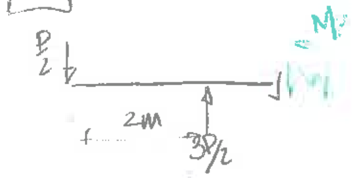
$\Sigma M_G = 0$ $M_z = Px - 2P$; $x = 0(F)$: $M_z = -2P$; $x = 2(E)$: $M_z = E$

AB $0 \le x \le 2$

$\Sigma F_y = 0$: $V_y = P/2$

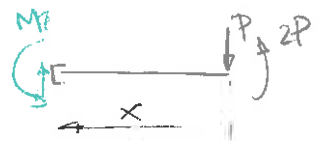
$\Sigma M_B = 0$ $\frac{P}{2}x = M_z$; $x = 0(A)$: $M_z = 0$; $x = 2(B)$: $M_z = P$

AC $0 \leq x \leq 3$



$\Sigma M_G = 0: \quad M_z = \frac{3P}{2}(x-2) - \frac{P}{2}x \quad \begin{cases} x=3\ (C) & M_z = 0 \\ x=2\ (B) & M_z = -P \end{cases}$

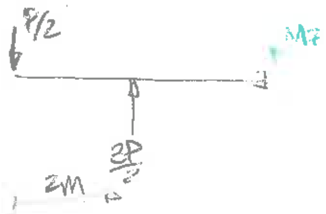
DF $0 \leq x \leq 3$



$\Sigma F_y = 0: \; V_y = P$

$\Sigma M_G = 0 \quad M_z = Px - 2P \quad \begin{cases} x=0\ (F) & M_z = -2P \\ x=3\ (D) & M_z = P \end{cases}$

AD $0 \leq x \leq 4$



$\Sigma M_G = 0 \quad M_z = \frac{3P}{2}(x-2) - \frac{P}{2}x \quad \begin{cases} x=3\ (C) & M_z = 0 \\ x=4\ (D): & M_z = P \end{cases}$

Estudiando ambos diagramas vemos que las secciones que trabajan en condiciones más desfavorables son B y F

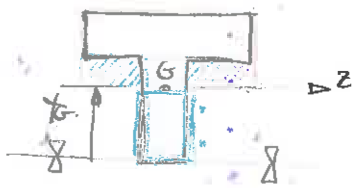
(B)

$\sigma_{xx} = \frac{M_z\, y}{I_z}$

Tenemos que calcular I_z pero primero tengo que situar (y_G)

Mom. estat$_T$ = Mom. est ① + Mom. est ②

$y_G A_T = y_{G1} A_1 + y_{G2} A_2$



$y_G = \frac{(60+10)\times(20\times 60) + 30\times(60\times 20)}{(20\times 60)+(20\times 60)} = 50\text{ cm}$

$I_z = I_1 + I_2 - 2 I_3 = \frac{1}{3}(20\times 50^3) + \frac{1}{3}(60\times 30^3) - 2\times\frac{1}{3}(20\times 10^3)$

$I_z = 1{,}36\cdot 10^6\text{ cm}^4 = 1{,}36\cdot 10^6\cdot 10^{-8} = 0{,}0136\text{ m}^4$

Vamos ahora a la sección B.

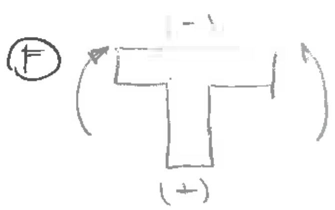
Tracción: $\sigma_{xx} = \frac{(90+P)\text{ kNm}\times 0{,}3\text{ m}}{0{,}0136\text{ m}^4} = 22{,}06\,(90+P)\text{ kPa} \leq 4\cdot 10^3\text{ kPa}$

$P \leq 91{,}33$ kN

Comp: $\sigma_{xx} = \frac{(90+P)\text{ kNm}\times 0{,}5}{0{,}0136} = 36{,}76\,(90+P)\text{ kPa} \leq 30\cdot 10^3\text{ kPa}$

$P \leq 726$ kN

(F)



Tracc $\sigma_{xx} = \frac{(2P-40)\times 0{,}5}{0{,}0136} = 36{,}76\,(2P-40) \leq 4\cdot 10^3$

$P \leq 74{,}41$ kN

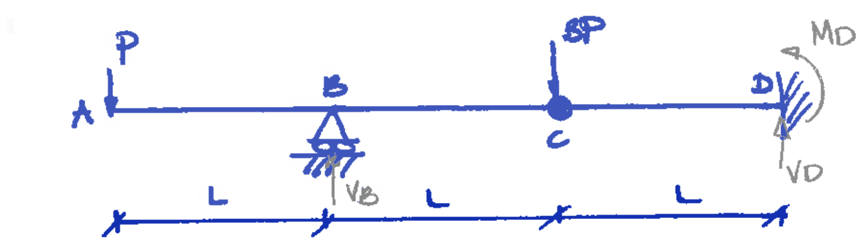
Comp $\sigma_{xx} = \frac{(2P-40)\times 0{,}3}{0{,}0136} = 22{,}06\,(2P-40) \leq 30\cdot 10^3$

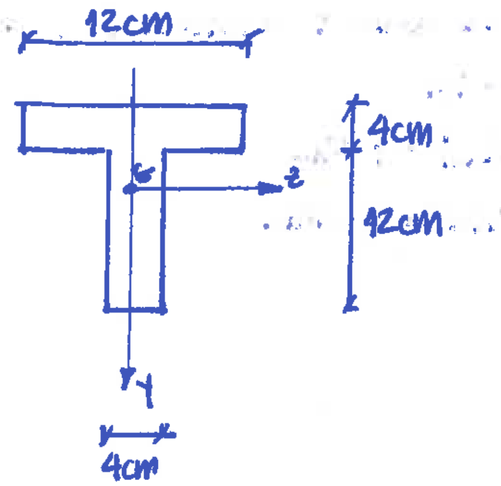
$P \leq 699{,}96$ kN

La Pmáx será la más restrictiva

$\boxed{P_{máx} = 74{,}41\text{ kN}}$

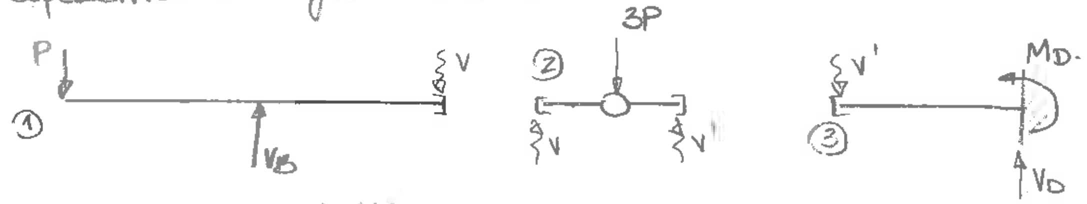
10C3. Viga con rótula en C.





1. Diagramas V_y, M_z.

Separamos la viga mediante la rótula



① $\Sigma F_y = 0 \quad V_B = P + V \quad (1)$

$\Sigma M_C = 0; \quad V_B\cdot L = P\cdot 2L \longrightarrow V_B = 2P \xrightarrow{(1)} V = 2P - P = P.$

② $\Sigma F_y = 0: \quad 3P = V + V'$

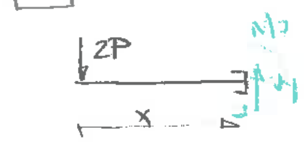
$V' = 3P - P = 2P$

③ $\Sigma F_y = 0 \quad V' = V_D = 2P$

$\Sigma M_c = 0: \quad M_D + V_D\cdot L = 0 \longrightarrow M_D = -V_D L = -2PL$

Aplicamos el método del corte a las partes separadas

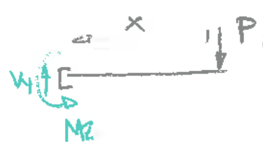
CD $0 \leq x \leq L$



$\Sigma F_y = 0: \; V_y = 2P$

$\Sigma M_G = 0: \; M_z = 2Px \quad \begin{cases} x=0\ (C): & M_z = 0 \\ x=L\ (D): & M_z = 2PL \end{cases}$

CB $0 \leq x \leq L$



$\Sigma F_y = 0 \quad V_y = P$

$\Sigma M_G = 0: \quad M_z = Px \quad \begin{cases} x=0\ (C) & M_z = 0 \\ x=L\ (B) & M_z = PL \end{cases}$

AB $0 \leq x \leq L$

$\Sigma F_y = 0: \quad V_y = P$

$\Sigma M_B = 0 \quad M_z = Px \quad \begin{cases} x=0\ (A) & M_z = 0 \\ x=L\ (B) & M_z = PL \end{cases}$