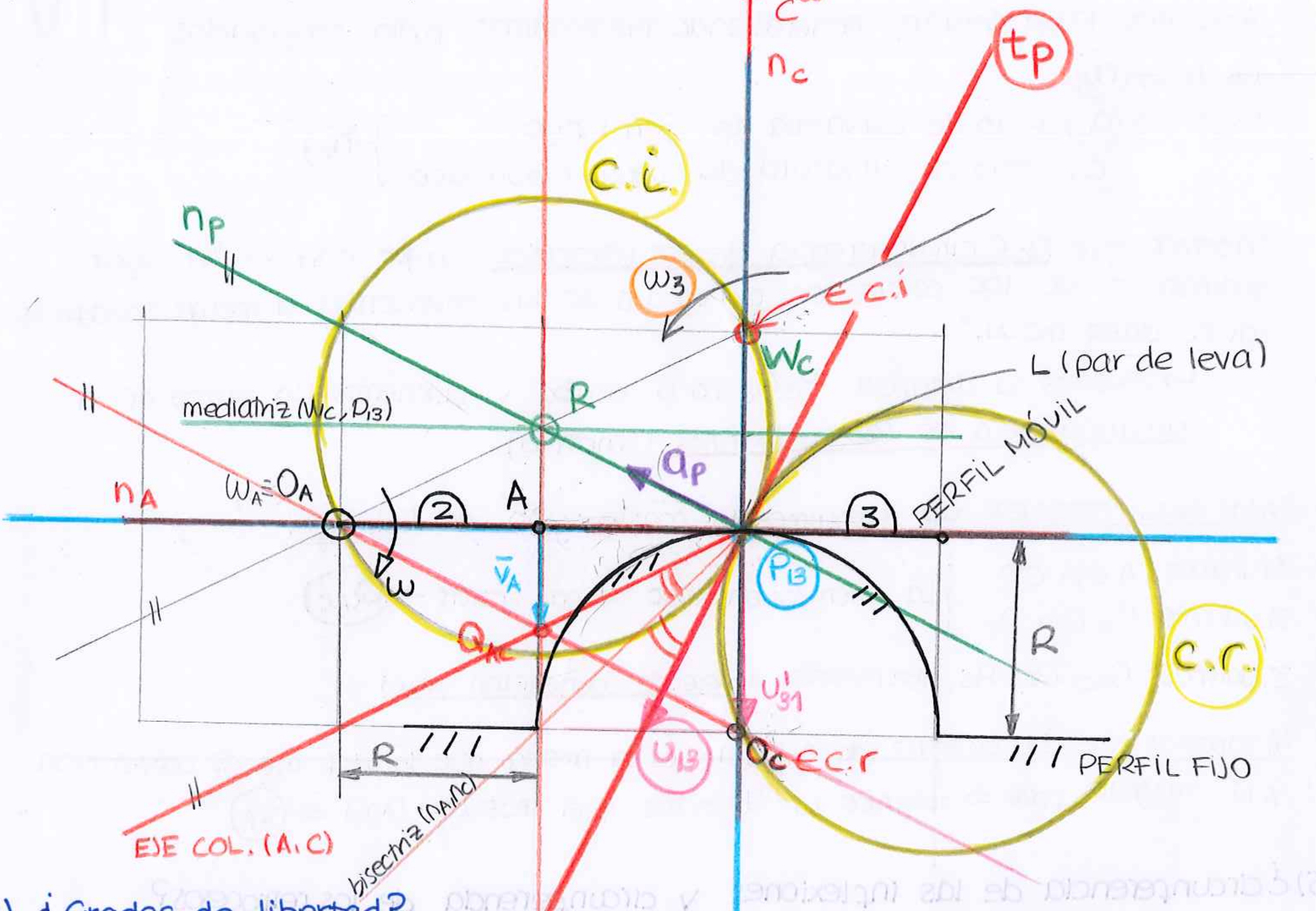
2014.10.07

Ejercicio (No es del libro).



1) ¿Grados de libertad?

$$G = 3(N-1) - 2P_I - P_{II} = \left\{ \begin{array}{l} N=3 \text{ elementos} \\ P_I = 2 \text{ pares de rotación} \\ P_{II} = 1 \text{ par de leva} \end{array} \right\} = 3(3-1) - 2.2 - 1.1 = 1$$

$\boxed{G=1}$

2) ¿CIR_3?

- Tiene que estar en la perpendicular a la tangente entre levas (planos 1 y 3)
- Tiene que estar en la perpendicular a V_A (obtenemos V_A con ω_2)

} P_{13}

3) ¿ω_3?

Sabemos que $V_{A2} = \omega . \overline{O_A A} = \omega . R$ (considerando $A \in 2$)

Podemos calcular V_A considerando el punto A parte del elemento 3 $\Rightarrow$

$V_{A3} = \omega_3 . \overline{P_{13} A} = \omega_3 . R$.

Igualándolas: $V_{A3} = V_{A2} \Rightarrow \boxed{\omega_3 = \omega}$

4) ¿t_{P_3}?

Aplicamos Euler-Savary generalizado. Necesitamos puntos conjugados.

$O_A, A \Rightarrow n_A$

$O_C, C. \Rightarrow$ O_C centro de curvatura del perfil fijo. $\Big\}$ n_C
C centro de curvatura del perfil móvil. $\Rightarrow \infty$.

Sabemos que $O_C \in$ circunferencia de los retrocesos porque esta es "el lugar geométrico de los centros de curvatura de las envolventes a rectas solidarias con el plano móvil."

↳ llevamos la distancia $P_{13}O_C$ hacia arriba y obtenemos un punto de la circunferencia de las inflexiones (simetría)

PASOS PARA OBTENER t_P (seguimos la construcción de Bobillier)

1) unimos A con C^∞
2) unimos O_A con O_C $\Big\}$ La intersección entre ambas rectas → Q_{AC}

3) unimos Q_{AC} con P_{13}, obteniendo el eje de colineación (A,C)

4) sabemos que la bisectriz de n_A y n_C es la misma que la del eje de colineación y la tangente polar ⇒ tenemos la bisectriz y el EJE COL (A,C) ⇒ t_P

5) ¿circunferencia de las inflexiones y circunferencia de los retrocesos?

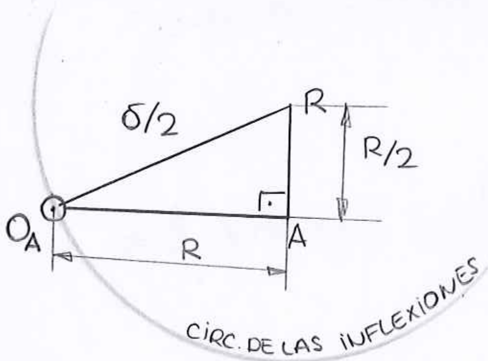
- Sabemos que P_{13} y W_C son puntos de c.i ⇒ hacemos la mediatriz
- Trazamo la normal a t_P por el punto P_{13} ⇒ n_P

$\Big\}$ cortan en R (centro de c.i)

- Tenemos la CIRC. DE LAS INFLEXIONES y la CIRC. DE LOS RETROCESOS que es la simétrica respecto a t_P.

(También se podría hacer trazando por R una paralela al EJE DE COL (A,C)). ¿?

¿cuál es el diámetro de la circunferencia de las inflexiones?



$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2$$

$$\boxed{\delta = \sqrt{5}\ R}$$

2014.10.07

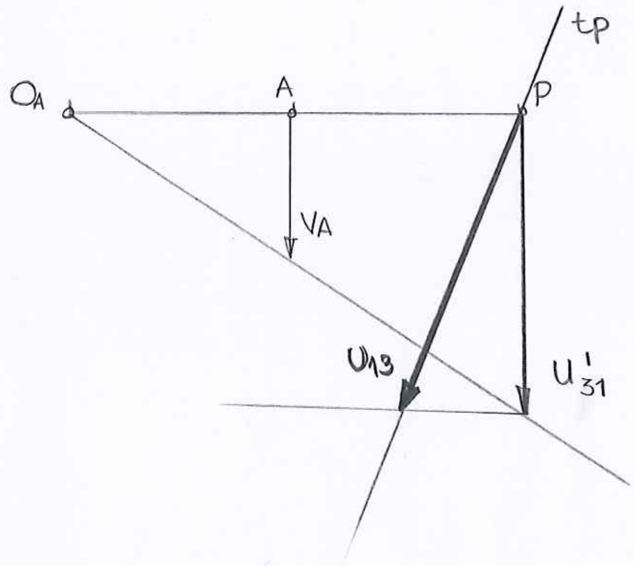
6) ¿Aceleración del punto P_{13}?

$a_P = \omega_3^2 \cdot \delta = \sqrt{5}\ \omega^2 R$ ⇒ ¿dirección? Hacia el centro de c.i (ver pág 118, POLO DE ACELERACIONES)

$\boxed{a_P = \sqrt{5}\ \omega^2 R}$

7) ¿u_{31}?

Aplicamos el teorema de Hartmann (P.100: representación gráfica del teorema de Hartmann)



"El extremo del vector velocidad de un punto, el centro de curvatura de su trayectoria y el extremo de la componente paralela a la velocidad del punto, del vector velocidad de cambio de polo, están alineados"

sabemos que u_{13} está sobre t_P, como tenemos su proyección u'_{31} ⇒ u_{13}

¿Cómo calcularíamos α_3? Conocemos la aceleración de dos puntos del elemento ③, la de P y la de A (la conseguimos como punto del elemento ②).

Planteamos el campo de aceleraciones (Mecánica I), sabiendo que $a^T_{PA} = \alpha \cdot PA$

↳ una vez conocido α podemos obtener la CIRCUNFERENCIA DE BRESSE

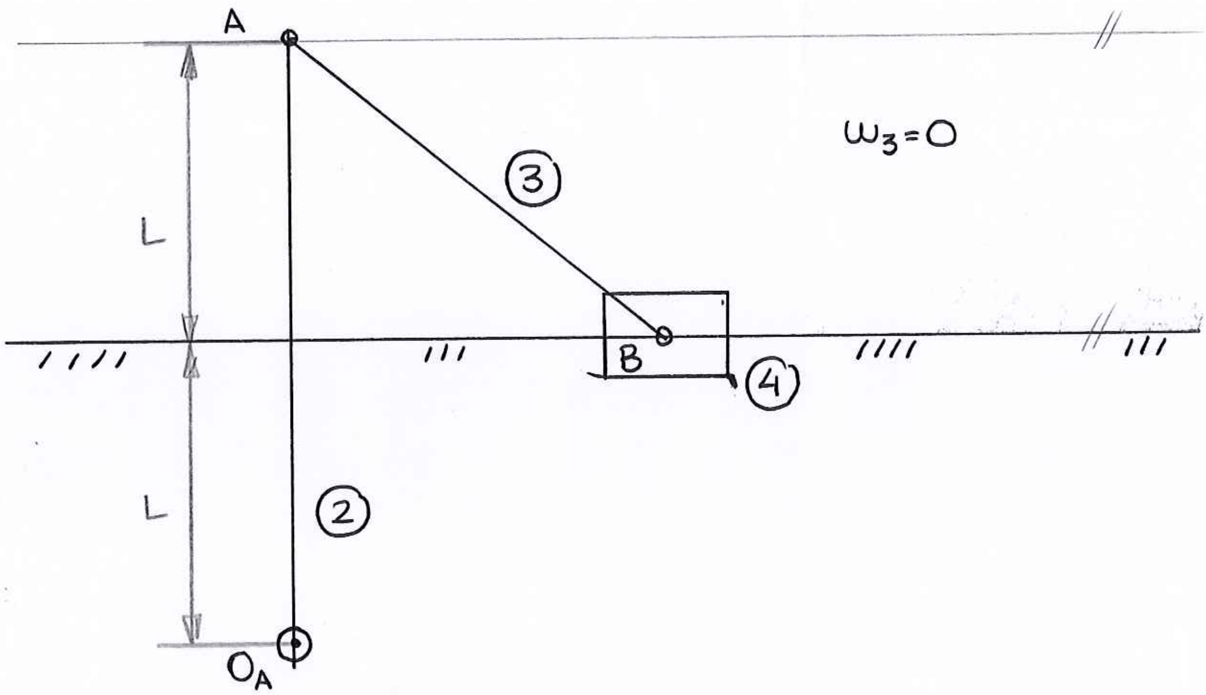
diámetro de c.b. ⇒ $b = \frac{\omega^2}{\alpha} \cdot \delta$ sobre t_P y corta con c.i. en un punto cuya aceleración es nula.

¿Para el campo de aceleraciones ω=cte? ($\alpha_2 = 0$)
¿$a^T_{PA} = \alpha\,\overline{PA} = \alpha R$ ó $a^N_{PA} = \alpha\,\overline{PA}$? ¿De qué?
¿Circ. de Bresse?

2014.10.07

Ejercicio (Para hacer).

Hay que hacer lo mismo que con el anterior

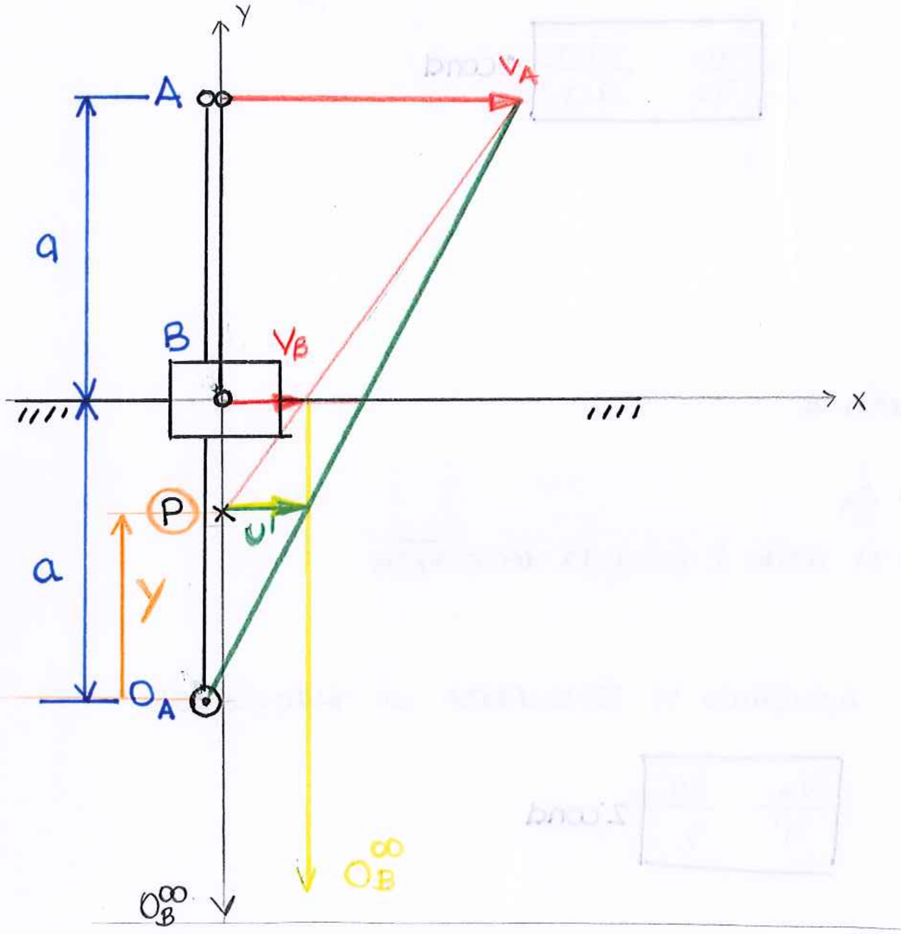


Pedírselo a Asier

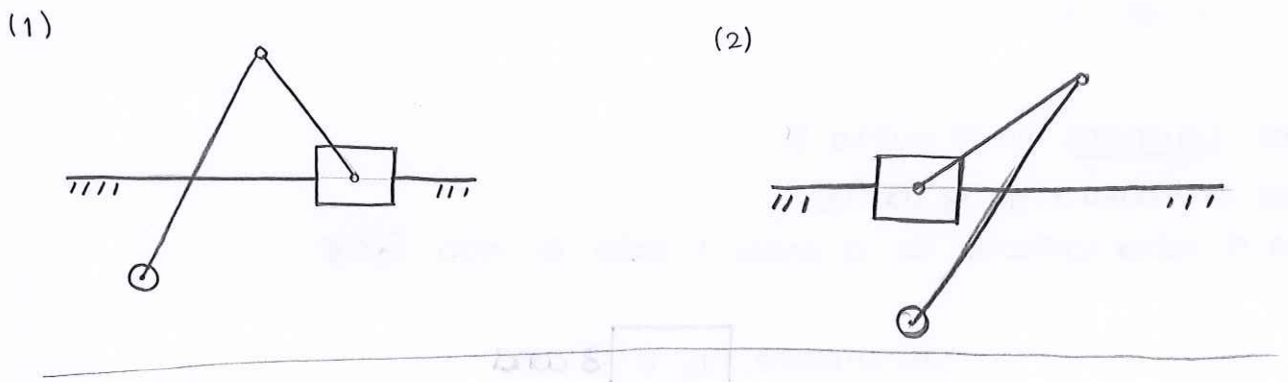
2014.10.17

EJERCICIO: Biela-manivela en posición de indeterminación

(Tipo ejemplo 3.1. de la página 158)



CONFIGURACIONES POSIBLES:



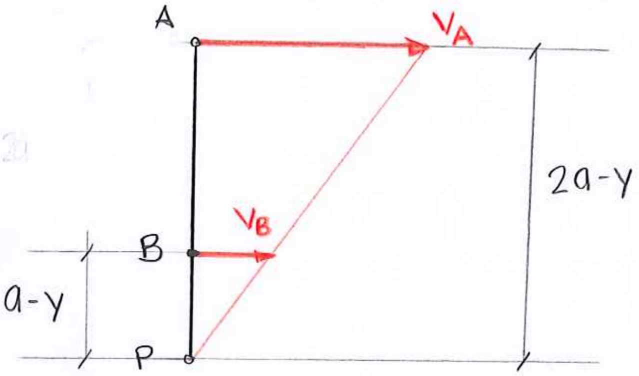
Calcula los CIR's de la barra $\overline{AB}$.

* sabemos que V_A y V_B: horizontales (dirección del eje x) → el polo estará en en el eje y

3 CONDICIONES

→ Ponemos polo en posición P, a una distancia y de O_A para plantear el problema

1. A, B ∈ mismo elemento

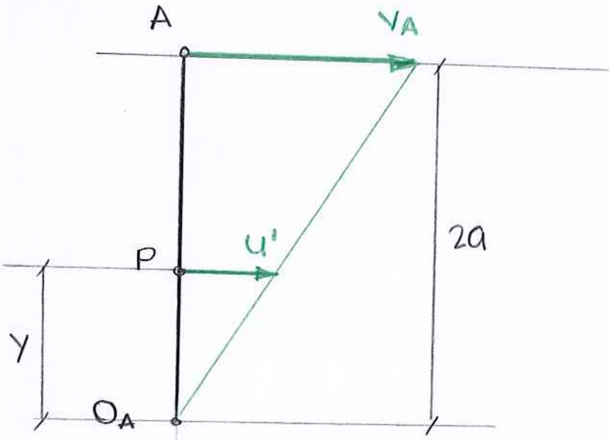


Aplicamos la SEMEJANZA de TRIÁNGULOS

$$\boxed{\frac{V_A}{V_B} = \frac{2a-y}{a-y}}$$ 1ª cond.

2. Aplicamos Hartmann en el punto A

* unimos el extremo de V_A con O_A
* u' será el vector (dirección de x) desde P hasta la recta $\overline{V_A O_A}$

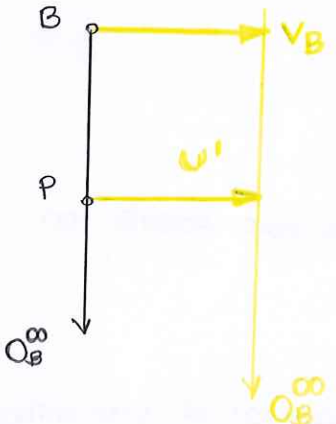


Aplicamos la SEMEJANZA de TRIÁNGULOS

$$\boxed{\frac{V_A}{u'} = \frac{2a}{y}}$$ 2ª cond.

3. Aplicamos Hartmann en el punto B.

* unimos el extremo de V_B con O_B^{∞}
* u' será el vector (dirección de x) desde P hasta la recta $\overline{V_B O_B^{\infty}}$.



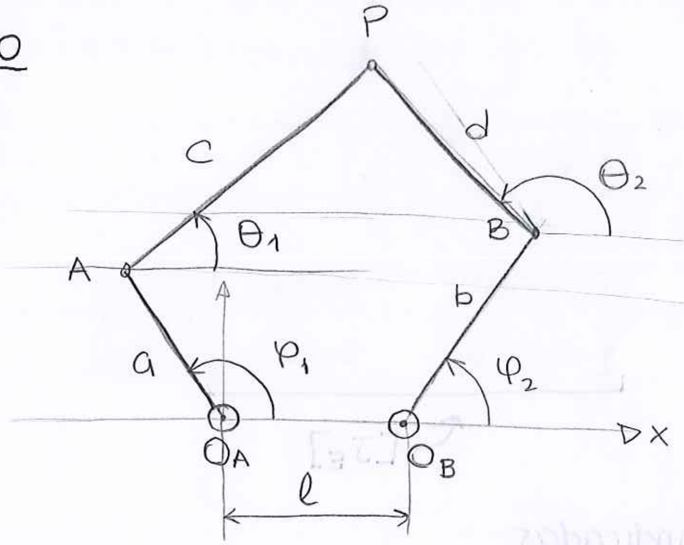
directamente, $\boxed{V_B = u'}$ 3ª cond.

Con las 3 condiciones resolvemos el problema:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{2a-y}{a-y} \\[2ex] \left.\begin{array}{l} \dfrac{V_A}{u'} = \dfrac{2a}{y} \\[2ex] V_B = u' \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{2a}{y} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{2a-y}{a-y} = \dfrac{2a}{y} \Rightarrow (\ldots) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y_1 = 0{,}586 \cdot a \\ y_2 = 3{,}414 \cdot a \end{array}}$$

EJERCICIO

2014.11.07



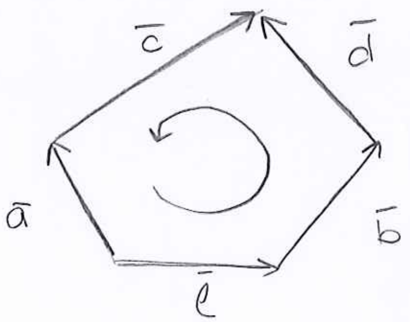
$G = 2\,gdl$

datos geom: a, b, c, d, l

entradas: φ_1, φ_2

salidas: Θ_1, Θ_2

1) Ecuaciones de posición:



$$\bar{\ell} + \bar{b} + \bar{d} - \bar{a} - \bar{c} = \bar{0}$$

Proyectamos:

$$\left.\begin{aligned} x)\;& \ell + b\cos\varphi_2 + d\cos\Theta_2 - c\cdot\cos\Theta_1 - a\cdot\cos\varphi_1 = 0 \\ y)\;& b\sin\varphi_2 + d\sin\Theta_2 - c\sin\Theta_1 - a\cdot\operatorname{sen}\varphi_1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

{No hay variables pasivas.}

2) Ecuaciones de velocidad

Matriz Jacobiana $[J_s]$ correspondiente a todas las variables.

$[J]$, $[J_S]$, $[J_E]$

$$\left\{\begin{aligned} & -b\sin\varphi_2\cdot\dot{\varphi}_2 - d\sin\Theta_2\cdot\dot{\Theta}_2 + c\sin\Theta_1\cdot\dot{\Theta}_1 + a\cdot\cos\varphi_1\cdot\dot{\varphi}_1 = 0 \\ & b\cos\varphi_2\cdot\dot{\varphi}_2 + d\cos\Theta_2\cdot\dot{\Theta}_2 - c\cos\Theta_1\,\dot{\Theta}_1 - a\cdot\cos\varphi_1\cdot\dot{\varphi}_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$ derivando ec. posición

Reordenando

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c\sin\Theta_1 & -d\sin\Theta_2 & a\sin\varphi_1 & -b\sin\varphi_2 \\ -c\cos\Theta_1 & d\cos\Theta_2 & -a\cos\varphi_1 & b\cos\varphi_2 \end{bmatrix}}_{J} \begin{Bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}$ (arriba las salidas y abajo entradas, porque luego para sacas J_S y $J_E \Rightarrow [J_S]\{\dot{s}\} = -[J_E]\{\dot{\varphi}\}$

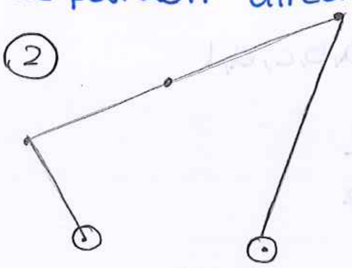
$$[J_S]\{\dot{s}\} = -[J_E]\{\dot{\varphi}\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c\cdot\sin\theta_1 & -d\sin\theta_2 \\ -c\cdot\cos\theta_1 & d\cos\theta_2 \end{bmatrix}}_{[J_S]} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} a\cdot\sin\varphi_1 & -b\sin\varphi_2 \\ -a\cdot\cos\varphi_1 & b\cos\varphi_2 \end{bmatrix}}_{[J_E]} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

3) ~~Grados de libertad en las pos. indicadas.~~
Obtener las singularidades del problema de posición directo (+ general)

1

2



1 $\varphi_1 = \pi;\ \varphi_2 = 0 / \theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi$

→ sustituimos en $[J]$.

$$[J]\begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -d & a & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

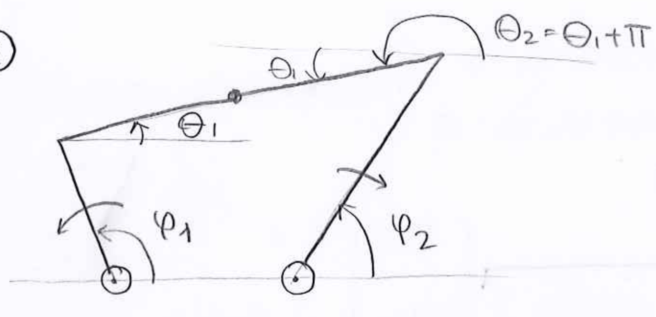
{Tenemos que usar el estudio de posiciones singulares porque la fórmula no sirve para casos de pos. singulares}

$$G = N^{\circ}\ C.\ Lagrangiana - \underbrace{N^{\circ}\ Ecuaciones\ indep.\ (de\ posc)}_{rango\ [J]} = \begin{matrix} 4-1=3 \\ 4-2=2 \end{matrix}$$

P. Indeterm.

Inc. movilidad

2



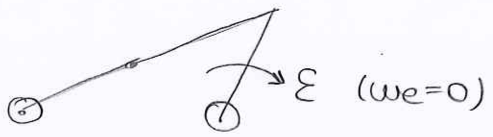
{Pierde 1 gdl en las v. entrada}

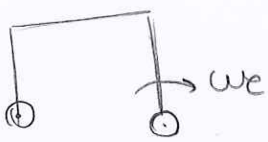
$\boxed{\theta_2 = \theta_1 + \pi}$ $\qquad |J_S| = c.d.\,(\text{sen}\,\theta_1 . \cos(\theta_1+\pi) - \text{sen}(\theta_1+\pi).\cos\theta_1) = (*)$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(\theta_1+\pi) = \cos\theta_1 \cos\pi - \text{sen}\,\theta_1\, \cancel{\text{sen}\,\pi}^{\,0} = -\cos\theta_1 \\ \text{sen}(\theta_1+\pi) = \text{sen}\,\theta_1 \cos\pi + \cos\theta_1\, \cancel{\text{sen}\,\pi}^{\,0} = -\text{sen}\,\theta_1 \end{array}\right\}$$

$(*) = c.d\,(\text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_1 - \text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_1) = 0 \Rightarrow$ sing. problema directo.

$(\dot\varphi_1, \dot\varphi_2) \qquad A\dot\varphi_1 + B\dot\varphi_2 = 0$



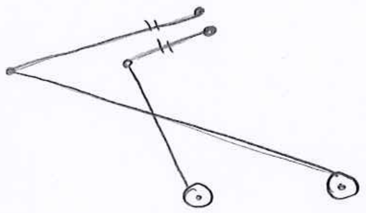


$\boxed{\text{(+ general)}}$ Singularidades en el problema DIRECTO.

$|J_S| = 0;$

$\downarrow$ de forma genérica

$c\,d\,\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = 0;\ \pi, -\pi$

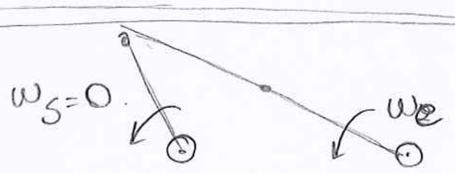


Singularidades en el problema INVERSO

$|J_E| = 0$

$\downarrow$ de forma genérica

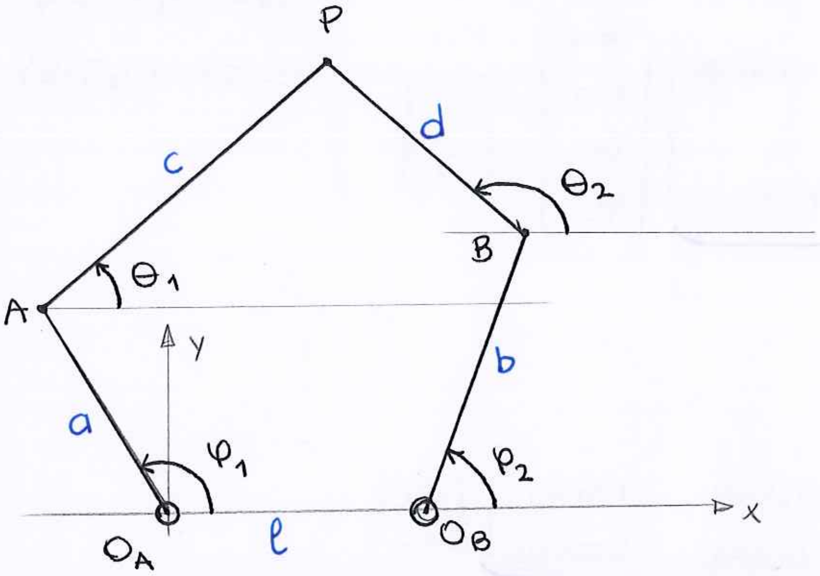
obtenemos la condición $\Rightarrow$ dibujamos la posición.



{hemos perdido un gdl en la salida}

EJERCICIO

2014.11.07



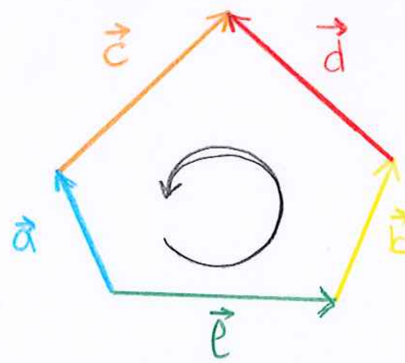
G=2gdl

<u>Datos</u>

Geometría: a, b, c, d, ℓ

$\begin{cases} \text{entradas: } \varphi_1, \varphi_2 \\ \text{salidas: } \theta_1, \theta_2 \end{cases}$

1) Ecuaciones de posición



$\vec{\ell} + \vec{b} + \vec{d} - \vec{c} - \vec{a} = \vec{0}$

Proyectamos:

$$\boxed{\begin{array}{l} x)\ \ell + b\cos\varphi_2 + d\cos\theta_2 - c.\cos\theta_1 - a.\cos\varphi_1 = 0 \\ y)\ b\sin\varphi_2 + d\sin\theta_2 - c.\sin\theta_1 - a\cos\varphi_1 = 0 \end{array}}$$

{No hay variables pasivas}

2) Ecuaciones de velocidad.

Matriz Jacobiana [J] correspondiente a todas las variables. [J], [J_S], [J_E]

Derivando ecuaciones de posición.

$$\begin{cases} -b.\sin\varphi_2.\dot{\varphi}_2 - d\sin\theta_2.\dot{\theta}_2 + c\sin\theta_1.\dot{\theta}_1 + a\sin\varphi_1.\dot{\varphi}_1 = 0 \\ b\cos\varphi_2.\dot{\varphi}_2 + d\cos\varphi_2.\dot{\varphi}_2 - c\cos\theta_1.\dot{\theta}_1 - a\cos\varphi_1.\dot{\varphi}_1 = 0. \end{cases}$$

Reordenando: (Escribimos en forma matricial). $\begin{Bmatrix} \dot{S} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}$

* Arriba las salidas y abajo entradas, porque luego sacas Js y JE

$[J_S]\{\dot{S}\} = -[J_E]\{\dot{\varphi}\}$

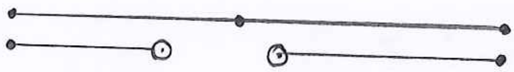
$$\underbrace{\begin{bmatrix} c\cdot\sin\theta_1 & -d\sin\theta_2 & a\sin\theta_1 & -b\sin\varphi_2 \\ -c\cdot\cos\theta_1 & d\cos\theta_2 & -a\cos\theta_1 & b\cos\varphi_2 \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$[J_S]\{\dot{S}\} = -[J_E]\{\dot{\varphi}\}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c\cdot\sin\theta_1 & -d\sin\theta_2 \\ -c\cos\theta_1 & d\cos\theta_2 \end{bmatrix}}_{[J_S]} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} a\sin\theta_1 & -b\sin\varphi_2 \\ -a\cos\theta_1 & b\cos\varphi_2 \end{bmatrix}}_{[J_E]} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

3) "Obtener las singularidades del sistema" (+ general)

1



(??)

$\varphi_1 = \pi;\ \varphi_2 = 0 \ /\ \theta_1 = 0;\ \theta_2 = \pi$

↳ sustituimos en [J]

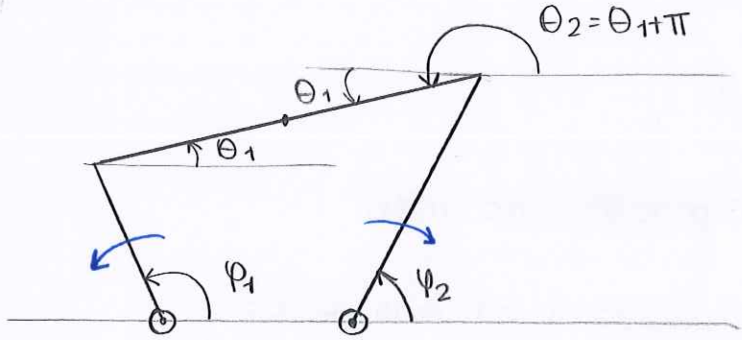
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -d & a & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tenemos que usar el ESTUDIO DE POSICIONES SINGULARES porque la fórmula no sirve para casos de posiciones singulares. (??)

$G = N^{\circ}$ C.Lagrangiana $-$ $\underbrace{N^{\circ}\text{ Ecuaciones independ}}_{\text{rango }[J]}$ (de posic.) $= \begin{matrix} 4-1=3 \\ 4-2=2 \end{matrix}$ P.Indeterm / Inc. movilidad

2014.11.07

(2)



{pierde 1 gdl en las var. entrada}

$\boxed{\theta_2=\theta_1+\pi}$ $\quad |J_s| = c.d.(\text{sen}\theta_1 \cdot \cos(\theta_1+\pi) - \text{sen}(\theta_1+\pi).\cos\theta_1) = (*)$

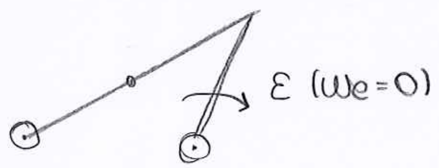
Relaciones trigonométricas:

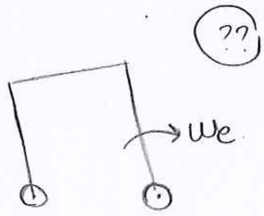
$\cos(\theta_1+\pi) = \cos\theta_1 . \underbrace{\cos\pi}_{-1} - \text{sen}\theta_1 . \underbrace{\text{sen}\pi}_{0} = -\cos\theta_1$

$\text{sen}(\theta_1+\pi) = \text{sen}\theta_1 . \cos\pi + \cos\theta_1 . \text{sen}\pi = -\text{sen}\theta_1$

$(*) = c.d.(\text{sen}\theta_1\cos\theta_1 - \text{sen}\theta_1\cos\theta_1) = 0 \Rightarrow$ SING. PROBLEMA DIRECTO

(φ_1, φ_2) $\quad A\dot{\varphi}_1 + B\dot{\varphi}_2 = 0$



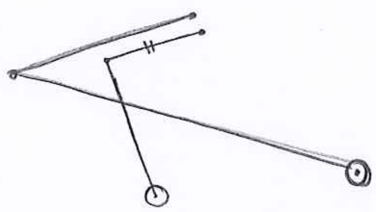


(+ general) singularidades del problema DIRECTO.

$|J_s| = 0;$

↓ de forma genérica

$c.d.\sin(\theta_1-\theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = 0 ; \pi ; -\pi$



Singularidades en el problema INVERSO.

$|J_E| = 0$

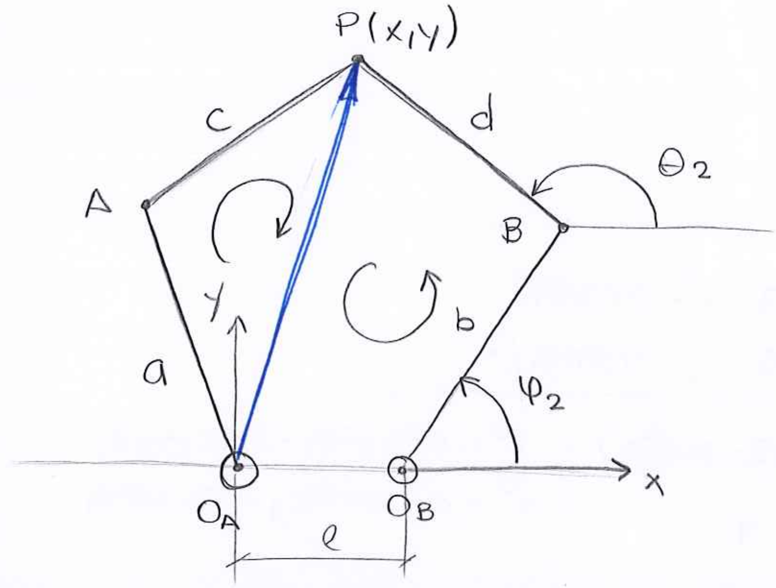
$\downarrow$ de forma genérica.

obtenemos la condición $\Longrightarrow$ dibujamos la posición (como antes)

{hemos perdido un gdl en la salida}

2014.11.07

EJERCICIO MODIFICADO



G = 2 gdl

datos geom: a, b, c, d. ℓ

entradas: φ_1, φ_2

salidas: θ_1, θ_2

ent : φ_1, φ_2

c. secundar $\left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\theta_1 \\ \theta_2\end{array}\right\} \text{pasivas} \\ \left.\begin{array}{l}x \\ y\end{array}\right\} \text{salida} \end{array} \right\}$ incógnitas

2 lazos $\begin{bmatrix} \bar{a} + \bar{c} = \overline{OP} \\ \bar{e} + \bar{b} + \bar{d} = \overline{OP} \end{bmatrix}$ → (*)

Proyectamos:

$$\left.\begin{array}{l} x)\ a\cos\varphi_1 + c\cos\theta_2 = x \\ y)\ a\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 + c\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = y \\ x)\ \ell + b\cdot\cos\varphi_2 + d\cos\theta_2 = x \\ y)\ b\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 + d\cdot\mathrm{sen}\,\theta_2 = y \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{derivando}} [J] \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{(4\times2)}{[J_S]} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \underset{(2\times2)}{[-J_E]} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de posición, podríamos haber eliminado las var. pasivas.

$$[J_S]\begin{Bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{Bmatrix} = -[J_E]\begin{Bmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\varphi}_2\end{Bmatrix}$$

(*) $\longrightarrow$ eliminar θ_1 =
$$(c\cdot\cos\theta_1 = x - a\cos\varphi_1)^2$$
$$(c\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = y - a\,\mathrm{sen}\,\varphi_1)^2$$

$$c^2(\cos^2\theta_1 + \mathrm{sen}^2\theta_1) = x^2 + a^2\cos^2\varphi_1 - 2ax\cdot\cos\varphi_1 + y^2 + a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi_1 - 2ay\,\mathrm{sen}\,\varphi_1$$

$$\cos^2\theta_1 + \mathrm{sen}^2\theta_1 = 1$$

$$\boxed{c^2 = x^2 + a^2 + y^2 - 2ax\cos\varphi_1 - 2ay\,\mathrm{sen}\,\varphi_1}$$