1 Kalkulu diferentziala

1.1 Oinarrizko kontzeptuak

1.1.1 Multzoak $\mathbb{R}$ eta $\mathbb{R}^n$ espazioetan

Multzo bat objektuen bilduma bat da. Multzoaren objektuei ***elementuak*** deituko diegu.
Adibidez,

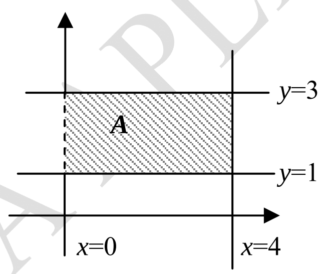
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Edo

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \le x \le 10\}.$$

$\mathbb{R}^2$ -n adibidea eta bere irudia:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < x \le 4, 1 \le y \le 3\}$$



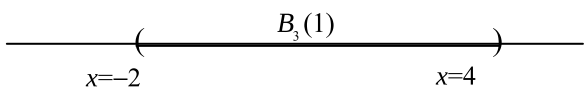
1.1.2 Bola irekiak

$\bar{\boldsymbol{x}}$ puntuan zentratua dagoen eta erradioa r duen $\mathbb{R}^n$ -ko ***bola irekia*** $\bar{\boldsymbol{x}}$ puntutik r baino distantzia txikiagoan dauden puntu guztiez osatua dago eta $B_r(\bar{\boldsymbol{x}})$ idatziko dugu:

$$B_r(\bar{\boldsymbol{x}}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \,/\, d(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) < r\},$$

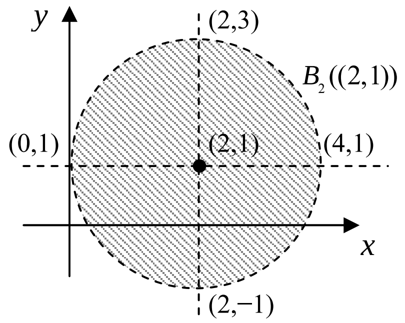
$d(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ $\bar{\boldsymbol{x}}$ eta $\boldsymbol{y}$ -ren arteko distantzia izanik.

$\mathbb{R}$: $\quad B_3(1) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, |1 - y| < 3\} = (-2, 4)$



$\mathbb{R}$ -ren kasuan, bola irekiak $\bar{x}$ puntuan zentratutako *tarte irekiak* dira.

$\mathbb{R}^2: \ B_2((2,1)) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ d((x,y),(2,1)) < 2\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} < 2\}.$



Multzo hori $(2,1)$ puntuan zentratua dagoen eta erradioa 2 duen zirkulu irekia da.

$\mathbb{R}^2$ -ren kasuan, bola irekiak $\bar{x}$ puntuan zentratutako eta erradioa *r* duten *zirkulu irekiak* dira.

$\mathbb{R}^3$ multzoan bolak *esferak* dira.

1.1.3 Muga-puntuak eta barne-puntuak

$\mathbb{R}^n$ -ko *A* multzoko ***muga-puntu*** batek hau betetzen du: puntu horretan zentratutako bola ireki guztietan *A* multzoko puntuak eta *A* multzoko ez diren puntuak daude.

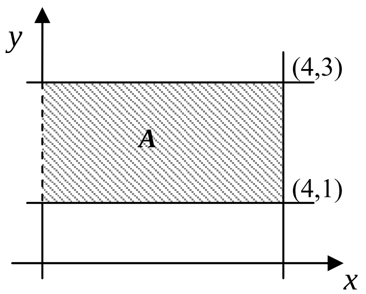
A multzoaren ***muga***, multzo horren muga-puntu guztien multzoa da eta $fr(A)$ idatziko dugu.

A multzoko muga-puntuak multzoko puntuak izan daitezke ala ez.

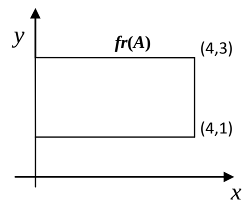
$\mathbb{R}^n$ -ko *A* multzoko ***barne-puntua*** muga-puntua ez den multzoko puntua da. Barne-puntu guztien multzoa ***barnealdea*** da eta $int(A)$ idatziko dugu.

Adibidea:

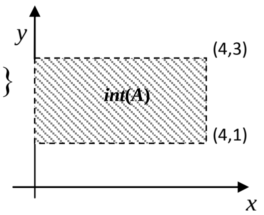
$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ 0 < x \le 4, 1 \le y \le 3\}$



$fr(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ 0 \le x \le 4,\ y = 3\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ x = 4, 1 \le y \le 3\} \cup$
$\cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ 0 \le x \le 4,\ y = 1\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ x = 1, 1 \le y \le 3\}$



$int(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ 0 < x < 4, 1 < y < 3\}$



1.1.4 Multzo itxiak, irekiak, bornatuak eta trinkoak

$\mathbb{R}^n$ -ko *A* multzoa ***itxia*** da haren muga-puntu guztiak multzoko puntuak direnean.
Adibideko *A* multzoa ez da itxia. Adibidez (0,2) puntua *A* multzoko muga-puntua, baina ez da multzokoa.

$\mathbb{R}^n$ -ko *A* multzoa ***irekia*** da haren muga-puntu bat ere ez bada multzoko puntua.
Adibideko *A* multzoa ez da irekia. Adibidez (4,3) puntua *B* multzoko muga-puntua da eta multzokoa da.

Multzo bat ez da halabeharrez irekia edo itxia izan behar; badaude irekiak edo itxiak ez diren multzoak (gure adibidearen kasua)

$\mathbb{R}^n$ -ko *A* multzoa ***bornatua*** da ardatz-jatorrian zentratutako bola ireki batean sartzen bada.
Adibideko *A* multzoa bornatua da. Adibidez $r=\sqrt{4^2+3^2}=5$ hartuta $A\subset B_5((0,0))$

$\mathbb{R}^n$ -ko *A* multzoa ***trinkoa*** da *A* multzoa bornatua eta itxia denean.
Adibideko *A* multzoa ez da trinkoa, ez baita itxia.

1.1.5 Multzo ganbilak

$\mathbb{R}^n$ -ko *A* multzoa ***ganbila*** da *A* multzoko edozein bi puntu hartuta, bi puntu horiek lotzen dituen segmentua *A* multzoaren parte bada.
Adibideko *A* multzoa ganbila da.

$\boldsymbol{x}$ eta $\boldsymbol{y}$ puntuak lotzen dituen segmentuko edozein $\boldsymbol{z}$ puntua, $\boldsymbol{x}$ eta $\boldsymbol{y}$-ren arteko *konbinazio ganbila* da.
Eta hori modu formalean: existitzen da $\lambda\in[0,1]$ zenbaki erreala $\boldsymbol{z}=\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}$ izanik.
Horrela, $\mathbb{R}^n$ -ko *A* multzoa ganbila da *A* multzoko edozein bi punturen arteko konbinazio ganbil guztiak multzoan daudenean.

1.2 Aldagai askoko funtzioak

1.2.1 Aldagai askoko funtzioak

x eta *y* aldagaietako funtzio erreala $\mathbb{R}^2$-ko *E* multzoko (x,y) elementu bakoitzari *z* zenbaki erreala esleitzen dion metodoa da. *z* aldagaia *x* eta *y* aldagai independenteen menpe dago eta $z = f(x,y)$ idatziko dugu, edo $f(x,y)$ besterik gabe.

Adibidez: $f(x,y) = x^2 + y^2$

Hiru aldagai edo gehiagoko funtzioak modu berean definitzen dira.

1.2.2 Existentzi eremua

Aldagai askoko funtzio baten ***existentzi eremua***, ***izate-eremua*** edo ***definizio-eremua*** funtzioa definitua dagoen puntu multzoa da.

f funtzioaren existentzi eremua *E* bada, $f : E \to \mathbb{R}$ idatziko dugu.

Funtzio batzuen existentzi eremua emango dugu:

Demagun $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzioak direla:

f funtzioa polinomikoa bada, haren existentzi eremua $\mathbb{R}^2$ osoa da.

$\dfrac{f}{g}$ funtzioaren existentzi eremua $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, g(x,y) \neq 0\}$ da.

$\sqrt{f}$ funtzioaren existentzi eremua $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) \geq 0\}$ da.

$\ln(f)$ funtzioaren existentzi eremua $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) > 0\}$ da.

Adibidea: $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ funtzioaren existentzi eremua hau da:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, 1 - x^2 - y^2 > 0\}.$$

1.2.3 Adierazpen grafikoa eta sestra-kurbak

$y = f(x)$ aldagai bateko funtzioaren irudikapena planoko kurba bat da.

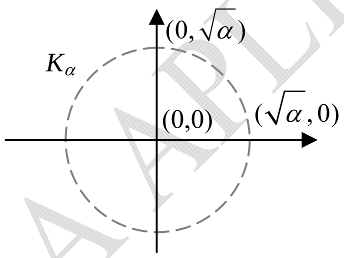
$z = f(x, y)$ bi aldagaiko funtzioaren irudia hiru dimentsioko espazioko azalera bat da eta irudikapena ez da oso eraginkorra. Baina bi aldagaiko funtzioak adierazteko ordezko metodo hau dugu: sestra-kurben erabilera.

Funtzio baten *sestra-kurbak* honela lortzen dira: funtzioaren grafikoa plano horizontalekin mozten eta sortzen dena *XY* planoan proiektatzen.

$f(x, y)$ funtzioaren α *sestra-kurba* α balioa hartzen duten existentzi eremuko puntu guztien multzoa da:

$$K_\alpha = \{(x, y) \in E(f) / \ f(x, y) = \alpha\}.$$

Adibidea: Demagun $f(x, y) = x^2 + y^2$ funtzioa dela. Funtzio horren α sestra-kurba $K_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 = \alpha\}$ multzoa da, hau da, $(0,0)$ puntuan zentratua dagoen eta erradioa $\sqrt{\alpha}$ duen zirkunferentzia da.



1.3 Limitea eta jarraitutasuna

1.3.1 Aldagai askoko funtzioen limitea

$f(x,y)$ funtzioaren limitea $(\bar{x},\bar{y})$ puntuan ℓ zenbakia dela esango dugu, $(\bar{x},\bar{y})$ puntutik geroz eta hurbilago dauden puntuak hartuta, puntu horietan funtzioak hartzen dituen balioak ℓ zenbakira konbergenteak badira.

$f(x,y)$ funtzioaren *limitea* $(\bar{x},\bar{y})$ puntuan ℓ dela esango dugu eta honela idatziko dugu:

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = \ell$$

<u>Eragiketak limiteekin:</u>

$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = \ell$ eta $\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} g(x,y) = \ell'$ badira, orduan:

- $\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} [f(x,y) + g(x,y)] = \ell + \ell'$,
- $\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} [f(x,y) - g(x,y)] = \ell - \ell'$,
- $\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y)\cdot g(x,y) = \ell \cdot \ell'$,
- $\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y)/g(x,y) = \ell/\ell'$, $\ell' \neq 0$ denean,
- $\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} (f(x,y))^n = \ell^n$, *n* edozein zenbaki arrunt izanik.

Honaino, bi aldagaiko funtzioak soilik aztertu ditugu, baina limitearen kontzeptua eta haren propietateak, inolako zailtasunik gabe, aldagai gehiagoko funtzioetara zabaldu daitezke.

1.3.2 Aldagai askoko funtzioen jarraitutasuna

$f(x,y)$ funtzioa existentzi eremuko $(\bar{x},\bar{y})$ puntuan *jarraitua* dela esango dugu

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y})$$

<u>Funtzio jarraituen propietateak:</u>

f eta g funtzioak jarraituak badira $(\bar{x},\bar{y}) \in E$ puntuan, orduan jarraituak izango dira, puntu horretan, funtzio hauen batuketa, kenketa, biderketa, zatiketa (izendatzailea ezberdin zero denean) eta baita konposaketa ere.

Formalki:

Demagun $f,g : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzioak $(\bar{x},\bar{y}) \in E$ puntuan jarraituak direla. Orduan,

$f+g$ funtzioa $(\bar{x},\bar{y})$ puntuan jarraitua da.

$f-g$ funtzioa $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan jarraitua da.

$f\cdot g$ funtzioa $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan jarraitua da.

f/g funtzioa $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan jarraitua da ($g(\overline{x},\overline{y})\neq 0$ denean).

$\lambda\in\mathbb{R}$ bada, λf funtzioa $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan jarraitua da.

Bira $f:E\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, jarraitua $(\overline{x},\overline{y})\in E$ puntuan eta $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, jarraitua $f(\overline{x},\overline{y})$ puntuan, orduan $g\circ f$ funtzioa jarraitua da $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan.

<u>Hona hemen jarraituak diren funtzioen zerrenda:</u>

Funtzio konstantea: $f(x,y)=k$, $k\in\mathbb{R}$ izanik, jarraitua da $\mathbb{R}^2$-n.

$f(x,y)=x$ edo $f(x,y)=y$ jarraituak dira $\mathbb{R}^2$-n.

Funtzio linealak: adibidez $f(x,y)=3x+4y$ jarraitua da $\mathbb{R}^2$-n.

Funtzio polinomikoak: adibidez $f(x,y)=4x^2y^2+3xy^2+5xy+12$ jarraitua da $\mathbb{R}^2$-n.

Eta aldagai bateko funtzio hauek ere jarraituak dira:

Balio absolutu funtzioa: $f(x)=|x|$ jarraitua da $\mathbb{R}$-n.

Errokari funtzioa: $f(x)=\sqrt{x}$ jarraitua da $\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}$ multzoan.

Funtzio esponentziala: $f(x)=\mathrm{e}^x$ jarraitua da $\mathbb{R}$-n.

Funtzio logaritmikoa: $f(x)=\ln(x)$ jarraitua da $\{x\in\mathbb{R}/x>0\}$ multzoan.

Funtzio trigonometrikoak: $f(x)=\sin(x)$, $f(x)=\cos(x)$ jarraituak dira $\mathbb{R}$-n.

Adibidez, $f(x,y)=\ln(x+y)$ funtzioa $x+y>0$ diren puntuetan jarraitua da, funtzio jarraituen batura eta konposizioa delako, hau da, E bere existentzia-eremuan jarraitua da.

1.4 Kalkulu diferentziala

Atal honetan ikusiko ditugun kontzeptu eta emaitza guztiak bi aldagaiko funtzioetarako emango ditugu, baina inolako zailtasunik gabe, *n* aldagaiko funtzioetara heda daitezke.

1.4.1 Deribatu partzialak

$f(x,y)$ funtzioaren deribatu partziala lehen aldagairekiko, x-rekiko, $(\bar{x},\bar{y}) \in int(E)$ puntuan limite hau da, existitzen denean, eta $f_1(\bar{x},\bar{y})$ idazten da:

$$f_1(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y})}{h}$$

Adibidez $f(x,y) = -x^2 - y^2$ funtzioarenak $(\bar{x},\bar{y}) = (2,2)$ puntuan:

$$f_1(2,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,2) - f(2,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(2+h)^2 - 2^2 - (-2^2 - 2^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-4-4h-h^2-4+8}{h} = -4$$

Eta nola egingo dugu deribazio erregelak erabiliz? Oso erraz: y aldagaia $\bar{y}$ balioan konstante modura hartuz eta x aldagaiarekin deribatuta, aldagai bakar bateko funtzio bat bezala deribatuz.

$f_1(x,y) = f'(x,\bar{y}) = -2x$ deribatu partzial funtzioa x-rekiko.

eta $(\bar{x},\bar{y}) = (2,2)$ puntuan $f_1(2,2) = -2(2) = -4$

$$f_2(2,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2,2+h) - f(2,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2^2 - (2+h)^2 - (-2^2 - 2^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-4-4-4h-h^2+8}{h} = -4$$

Eta nola egingo dugu deribazio erregelak erabiliz? Oso erraz: x aldagaia $\bar{x}$ balioan konstante modura hartuz eta y aldagaiarekin deribatuta, aldagai bakar bateko funtzio bat bezala deribatuz.

$f_2(x,y) = f'(\bar{x},y) = -2y$ deribatu partzial funtzioa y-rekiko.

eta $(\bar{x},\bar{y}) = (2,2)$ puntuan $f_2(2,2) = -2(2) = -4$

Deribatu partziala tasa modura eta funtzioaren aldakuntzari buruzko informazioa

x-rekiko deribatu partzialak x aldagaiaren aldaketa txikiekin funtzioaren aldaketa tasa jasotzen du:

$$f_1(\bar{x},\bar{y}) \simeq \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y})}{h} \quad \text{edo}$$

$$f(\bar{x}+h,\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y}) \simeq hf_1(\bar{x},\bar{y})$$

Eta x-rekiko deribatu partzialaren zeinua, aurreko kasuan bezala, x aldagaiaren aldaketen aurrean (gehiago, gutxiago) funtzioaren aldaketari buruzko informazioa ematen digu:

- $f_1(\bar{x},\bar{y}) > 0$ denean:

  Aldagaia handitzen denean (h>0) funtzioa handitu egingo da.

  Aldagaia txikiagotzen denean (h<0) funtzioa ere txikiagotu egingo da.

- $f_1(\bar{x},\bar{y}) < 0$ denean:

  Aldagaia handitzen denean (h>0) funtzioa txikiagotu egingo da.

  Aldagaia txikiagotzen denean (h<0) funtzioa handitu egingo

Modu berean, y-rekiko deribatu partzialak y aldagaiaren aldaketa txikiekin funtzioaren aldaketa tasa jasotzen du:

$$f_2(\bar{x},\bar{y}) \simeq \frac{f(\bar{x},\bar{y}+h) - f(\bar{x},\bar{y})}{h} \text{ edo}$$

$$f(\bar{x},\bar{y}+h) - f(\bar{x},\bar{y}) \simeq hf_2(\bar{x},\bar{y})$$

Eta y-rekiko deribatu partzialaren zeinua, aurreko kasuan bezala, y aldagaiaren aldaketen aurrean (gehiago, gutxiago) funtzioaren aldaketari buruzko informazioa ematen digu:

- $f_2(\bar{x},\bar{y}) > 0$ denean:

  Aldagaia handitzen denean (h>0) funtzioa handitu egingo da.

  Aldagaia txikiagotzen denean (h<0) funtzioa ere txikiagotu egingo da

- $f_2(\bar{x},\bar{y}) < 0$ denean:

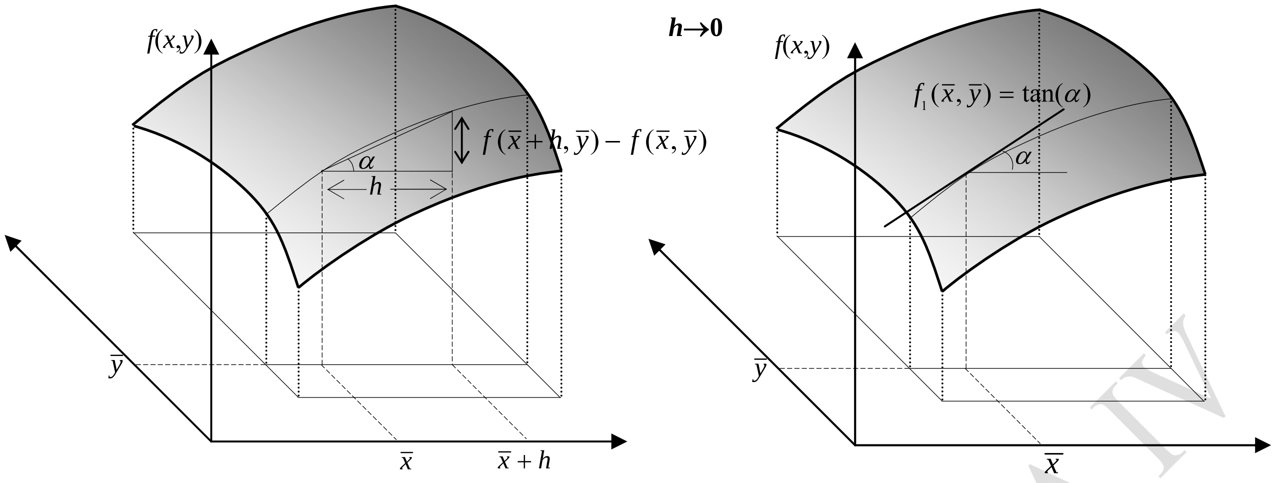
  Aldagaia handitzen denean (h>0) funtzioa txikiagotu egingo da.

  Aldagaia txikiagotzen denean (h<0) funtzioa handitu egingo da

Interpretzaio geometrikoa:

$f_1(\bar{x},\bar{y})$ deribatu partziala, existitzen denean, *OX* ardatz norabidean funtzioaren grafikoak onartzen duen zuzen ukitzailearen malda da. Hau da, $f_1(\bar{x},\bar{y})$ deribatu partzialak erakusten du nola aldatzen den funtzioa $(\bar{x},\bar{y})$ puntutik eta *OX* ardatzaren norabidean mugitzen garenean.

$f_2(\bar{x},\bar{y})$ deribatu partziala, existitzen denean, *OY* ardatz norabidean funtzioaren grafikoak onartzen duen zuzen ukitzailearen malda da. Hau da, $f_2(\bar{x},\bar{y})$ deribatu partzialak erakusten du nola aldatzen den funtzioa $(\bar{x},\bar{y})$ puntutik eta *OY* ardatzaren norabidean mugitzen garenean.



1.4.2 Goi ordenako deribatu partzialak. C^k klaseko funtzioak

$f(x,y)$ funtzioaren bigarren ordenako deribatu partzialak deribatu partzial funtzioen deribatuak dira.

Adibidez, $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})$ egin nahi badugu, lehenengoz *x*-rekiko deribatua egingo dugu, eta gero, *y*-rekiko deribatua. Idazkera desberdinak daude deribatu hauek adierazteko:

Deribatua *x* aldagaiarekiko bi aldiz: $f_{11}(\bar{x},\bar{y}),\quad f_{xx}(\bar{x},\bar{y}),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x},\bar{y}),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\bar{x},\bar{y}).$

Deribatua *x* aldagaiarekiko eta gero *y*-rekiko: $f_{12}(\bar{x},\bar{y}),\quad f_{xy}(\bar{x},\bar{y}),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\bar{x},\bar{y}),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(\bar{x},\bar{y}).$

Deribatua *y* aldagaiarekiko eta gero *x*-rekiko: $f_{21}(\bar{x},\bar{y}),\quad f_{yx}(\bar{x},\bar{y}),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\bar{x},\bar{y}),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(\bar{x},\bar{y}).$

Deribatua *y* aldagaiarekiko bi aldiz: $f_{22}(\bar{x},\bar{y}),\quad f_{yy}(\bar{x},\bar{y}),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x},\bar{y}),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\bar{x},\bar{y}).$

$f: E\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *E* multzoan *k klaseko* ($k=1,2,3,\dots$) funtzioa dela esango dugu, eta $f\in C^k(E)$ idatziko dugu, *E*-ko puntu guztietan *k* ordenarainoko deribatu partzial guztiak existitzen eta jarraituak badira.

Definiziotik zuzenean ondorio hau dugu: $f\in C^2(E)$ bada, $f\in C^1(E)$ da, eta $f\in C^k(E)$ bada, orduan, $f\in C^{k-1}(E)$ da.

Schwarz-en teorema: $f \in C^2(E)$ bada, haren deribatu partzial gurutzatuak berberak dira, hau da,

$$f_{12}(\overline{x},\overline{y}) = f_{21}(\overline{x},\overline{y}), \quad (\overline{x},\overline{y}) \in E \text{ guztietarako.}$$

1.4.3 Funtzio konposatuen deribazioa (katearen erregela)

Atal honetan agertuko diren funtzio guztiak C^1 klasekoa izango dira.

Demagun $z = f(u,v)$ funtzioa dela, $u = \phi(x)$ eta $v = \psi(x)$ izanik. Orduan,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \phi'(x) + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \psi'(x).$$

Demagun $z = f(u)$ funtzioa dela, $u = \phi(x,y)$ izanik. Orduan,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Demagun $z = f(u,v)$ funtzioa dela, $u = \phi(x,y)$ eta $v = \psi(x,y)$ izanik. Orduan,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Formula horiek aldagai gehiagoko funtzioetara, zailtasunik gabe, egokitzen dira.

1.4.4 Deribazio logaritmikoa

Batzuetan komenigarria da funtzioen deribatuak kalkulatzeko orduan logaritmoen propietateaz baliatzea

Adibidez:

$f(x,y) = \frac{1}{4} \mathrm{e}^{(2x+y)^2} \mathrm{e}^{(1-y)^2}$ funtzioaren deribatu partzialak lortuko deribazio logaritmikoa erabiliz:

x-rekiko deribatu partziala lortuko dugu, hau da, $f_x(x,y)$

<u>1.pausoa:</u> Logaritmo nepertiarrak bi aldeetan hartu eta propietateak erabili:

$$\begin{aligned} \ln\left(f(x,y)\right) &= \ln\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{(2x+y)^2}\mathrm{e}^{(1-y)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{(2x+y)^2}\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{(1-y)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4}\right) + (2x+y)^2 \ln\left(\mathrm{e}\right) +^{(1-y)^2} \ln\left(\mathrm{e}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4}\right) + (2x+y)^2 +^{(1-y)^2} \end{aligned}$$

<u>2.pausoa:</u> Bi aldeak deribatu:

$$\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)} = 4(2x+y)$$

3.pausoa: $f_x(x,y)$ askatu:

$$f_x(x,y)=4(2x+y)\,f(x,y)=(2x+y)\mathrm{e}^{(2x+y)^2}\mathrm{e}^{(1-y)^2}$$

Eta *y*-rekiko deribatu partziala pauso berdinak eginda hau da:

$$f_y(x,y)=(x+y-1)\mathrm{e}^{(2x+y)^2}\mathrm{e}^{(1-y)^2}$$

1.4.5 Deribatu direkzionala. Gradientea

$(\overline{x},\overline{y})$ puntuan *f* funtzioaren ***gradientea***, $\nabla f(\overline{x},\overline{y})$, deribatu partzialez osatutako bektorea da:

$$\nabla f(\overline{x},\overline{y})=(f_1(\overline{x},\overline{y}),\,f_2(\overline{x},\overline{y})).$$

$f(x,y)=x^2+y^2$ funtzioaren gradientea:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y)=2x \\ f_1(x,y)=2y \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(x,y)=(2x,2y)$$

Deribatu direkzionala:

Demagun $f:E\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funtzioa, $f\in C^1(E)$, eta $(\overline{x},\overline{y})\in int(E)$ puntua direla. $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan eta (v_1,v_2) bektore normalizatuaren norabidean *f* funtzioaren deribatu direkzionala ($D_{(v_1,v_2)}f(\overline{x},\overline{y})$ deituko dugu) gradientearen eta norabidearen arteko biderkadura da. Hau da, $\|(v_1,v_2)\|=1$ bada, orduan, $D_{(v_1,v_2)}f(\overline{x},\overline{y})=v_1 f_1(\overline{x},\overline{y})+v_2 f_2(\overline{x},\overline{y})$.

Oharrak:

1. (v_1,v_2) norabidean funtzioaren deribatua kalkulatu nahi badugu, aurretik (v_1,v_2) bektorea normalizatu beharko dugu:

(v_1,v_2) bektoaren norma: $\|(v_1,v_2)\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$

2. Kalkulatu gure funtzioarekin Deribatu direkzionala (1,0) norabidean edozein (*x*,*y*) puntuan. $D_{(1,0)}f(x,y)=1\,f_1(x,y)+0\,f_2(x,y)=f_1(x,y)$

Horrela, Deribatu partzialak deribatu direkzionalen kasu bereziak dira:

$$D_{(1,0)}f(\overline{x},\overline{y})=f_1(\overline{x},\overline{y}) \qquad \text{eta} \qquad D_{(0,1)}f(\overline{x},\overline{y})=f_2(\overline{x},\overline{y}).$$

Gure adibidean kalkulatu *f*-ren deribatu direkzionala (-1,-1) norabidean eta (2,2) puntuan:

Ezer baino lehen bektorea normalizatuko dugu

$$\| (-1,-1) \| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$D_{(-1,-1)} f(2,2) = D_{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)} f(2,2) = \frac{-1}{\sqrt{2}} f_1(2,2) - \frac{1}{\sqrt{2}} f_2(2,2) = -\frac{8}{\sqrt{2}} < 0$$

Zer informazio ematen digu bere zeinuak?

Deribatu bat denez, aurretik ikusi bezala, (2,2) puntuan eta (1,0) norabidean aldagaietan gehikuntzak egiten baditugu, funtzioa handitu egiten da. Horregatik (1,0) norabidea (2,2) puntuan ***hazkunde-norabide*** bat da.

Orokortuz:

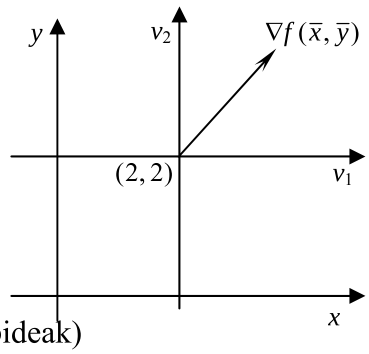
$D_{(v_1,v_2)} f(\bar{x},\bar{y}) > 0$ bada, (v_1,v_2) ***hazkunde-norabidea*** da $(\bar{x},\bar{y})$ puntuan eta

$D_{(v_1,v_2)} f(\bar{x},\bar{y}) < 0$ bada, (v_1,v_2) ***gutxitze-norabidea*** da $(\bar{x},\bar{y})$ puntuan

Oharra: Erraz ikus daiteke gradientea hazkunde-norabide bat dela

$$D_{(f_1(\bar{x},\bar{y}), f_2(\bar{x},\bar{y}))} f(\bar{x},\bar{y}) = f_1(\bar{x},\bar{y}) f_1(\bar{x},\bar{y}) + f_2(\bar{x},\bar{y}) f_2(\bar{x},\bar{y}) = \left(f_1(\bar{x},\bar{y})\right)^2 + \left(f_2(\bar{x},\bar{y})\right)^2 > 0$$

Orain, gure adibidean (2,2) puntuan hazkunde-norabide guztiak ikusiko ditugu deribatu direkzionalaren zeinua aztertuz. Akordatu deribatu direkzionala >0 izen behar dela. Orduan zein (v_1,v_2) norabide normalizatutan da $D_{(v_1,v_2)} f(2,2) > 0$?



$f(x,y) = x^2 + y^2$

Gradientea lortu eta irudikatu (2,2) puntuan:

$\nabla f(2,2) = (4,4)$

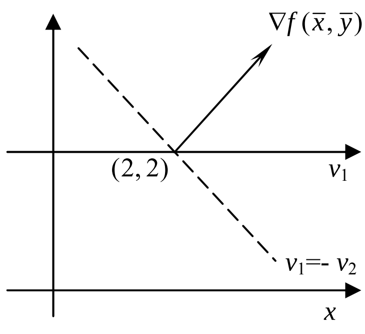
Deribatu direkzionalaren zeinuaren azterketa:

$D_{(v_1,v_2)} f(2,2) = v_1 4 + v_2 4 > 0 \Leftrightarrow v_1 > -v_2$ (Hazkunde-norabideak)

$D_{(v_1,v_2)} f(2,2) = v_1 4 + v_2 4 = 0 \Leftrightarrow v_1 = -v_2$

$D_{(v_1,v_2)} f(2,2) = v_1 4 + v_2 4 < 0 \Leftrightarrow v_1 < -v_2$ (Gutxitze-norabideak)

hauek lortzeko $v_1 = -v_2$ irudikatzen dugu.



Ikusten dugunez, deribatu direkzionala nulua dutenak gradientearekin perpendikularrak dira. Horrela, hazkunde-norabideak gradientea dauden zatikoak dira eta gutxitze-norabideak beste aldekoak.

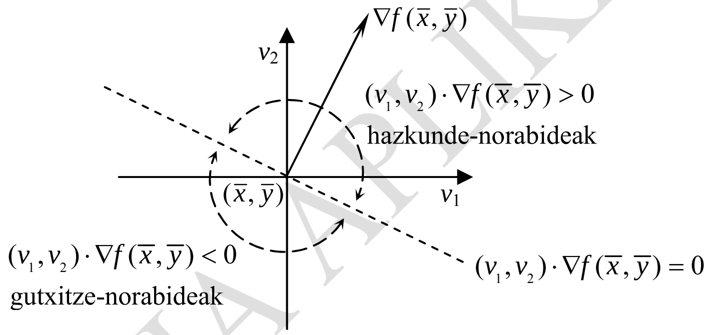
<u>Emaitza:</u> $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan eta (v_1,v_2) norabidean *f* funtzioaren deribatu direkzionalak ondokoa betetzen du:

Gradientearekin perpendikularra den zuzeneko norabideetan deribatu direkzionala 0 da. Eta zuzen hori errefentziatzat hartuta:

• Gradientearen aldean dauden norabideak (gradientearekin 90º baino txikiagoa den angelua osatzen dutenak) *f* funtzioaren ***hazkunde-norabideak*** dira, $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan.

• Gradientearen beste aldean dauden norabideak (gradientearekin 90º baino handiagoa den angelua osatzen dutenak), *f* funtzioaren ***gutxitze-norabideak*** dira, $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan.

• Gradientea nulua bada, ezin izango dugu ezer ondorioztatu.



<u>Gradientea puntu batean eta bertatik pasatzen den sestra-kurbaren zuzen ukitzailea</u>

- Gradientea nulua ez bada, orduan $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan sestra-kurbaren zuzen ukitzailea perpendikularra da grandientearekin, hau da, $(v_1,v_2)\cdot\nabla f(\overline{x},\overline{y})=0$.
- $f_2(\overline{x},\overline{y})\neq 0$ bada, orduan $(\overline{x},\overline{y})$ puntuan sestra-kurbaren zuzen ukitzailearen malda $\dfrac{-f_1(\overline{x},\overline{y})}{f_2(\overline{x},\overline{y})}$ da.

Adibidez, $f(x,y)=x^2+y^2$ funtzioarentzako (2,2) puntutik pasatzen den sestra-kurbaren zuzen ukitzailearen malda eta zuzen ukitzailearen ekuazioa.

$f(2,2)=8$, hortaz, $(2,2)\in K_8$

$\nabla f(2,2)=(4,4)$. Gradientea (2,2) puntuan sestra-kurbaren zuzen ukitzailearen perpendikularra da.

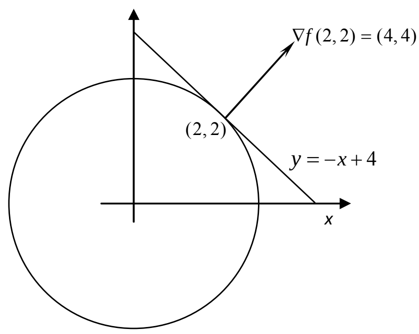
Zuzen ukitzailearen malda: $m=\dfrac{-f_1(2,2)}{f_2(2,2)}=\dfrac{-4}{4}=-1$

Zuzen ukitzailearen ekuazioa:

$y=mx+b=-x+b$

$(2,2)$ zuzenean denez: $2=-2+b\Rightarrow b=4$

$y=-x+4$



1.5 Funtzio homogeneoak

Bi aldagaiekin:

$f(x,y)$ funtzioa α *mailako funtzio homogeneoa* dela esango dugu edozein $t>0$ baliotarako ondokoa betetzen bada:

$$f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y)\,.$$

Oharra: $f(x,y)$ funtzioa α mailako homogeneoa bada, orduan, funtzio horren deribatuak, existitzen badira, $\alpha-1$ mailako funtzio homogeneoak dira.

n aldagaiekin

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funtzioa α *mailako funtzio homogeneoa* dela esango dugu edozein $t>0$ baliotarako ondokoa betetzen bada:

$$f(tx_1,tx_2,\dots,tx_n) = t^{\alpha} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,.$$

Oharra: $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funtzioa α mailako homogeneoa bada, orduan, funtzio horren deribatuak, existitzen badira, $\alpha-1$ mailako funtzio homogeneoak dira.

Euler-en teorema:

Bi aldagaiekin:

$f\in C^1$ funtzioa α mailako funtzio homogeneoa izateko

$$xf_1(x,y)+yf_2(x,y)=\alpha f(x,y)$$

betetzea beharrezkoa eta nahikoa da.

n aldagaiekin

$f\in C^1$ funtzioa α mailako funtzio homogeneoa izateko

$$x_1 f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)+x_2 f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)+\cdots+x_n f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

betetzea beharrezkoa eta nahikoa da.