4. Gaia: FUNTZIOAK: LIMITEAK ETA JARRAITUTASUNA

4.1 - ALDAGAI ERREALEKO FUNTZIO ERREALAK. DEFINIZIO ETA ADIBIDEAK

Def

- Aldagai errealeko funtzio errealak honela adierazi daitezke, $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ ($D \neq \emptyset$) ← Definizio eremua
- $x \in D \Longrightarrow f(x)$ x-ren irudia (x aldagaia)
- $A \subset D \Longrightarrow f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ A-ren irudia
- $f(D)$ f-ren irudi multzoa
- $\{ (x, f(x)) : x \in D \} \subset \mathbb{R}^2$ f-ren grafikoa
- $y \in B$ eta $\exists$ bada $x \in D$ non $f(x) = y$ x, y-ren aurreirudia da

Def $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ funtzioa:

i) f **injektiboa** da:

① $\forall x_1, x_2 \in D$ non $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

edo

② $\forall x_1, x_2 \in D$ non $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ii) f **supraiektiboa** da $\forall y \in B \ \exists x \in D$ non $f(x) = y$ (aurreirudia badauka)

iii) f **bijektiboa** da injektiboa eta supraiektiboa bada.

Adib: ① $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

- $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ $\Rightarrow f(1) = 1 = f(-1)$ baina $x_1 = 1 \neq -1 = x_2$, beraz, f ez da injektiboa
- f ez da supraiektiboa: $y = -2 \in \mathbb{R}$ $\nexists x \in \mathbb{R}$ non $f(x) = x^2 = -2$ denik
- f ez da bijektiboa.

② $f: D = \mathbb{R} \longrightarrow B = \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$

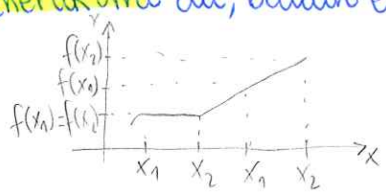
- f injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ non $f(x_1) = f(x_2) \overset{def}{\Longrightarrow} x_1 - \cancel{3} = x_2 - \cancel{3} \Rightarrow x_1 = x_2$ ✓
- f supraiektiboa: $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R}$ non $f(x) = y$
  Izan bedi $y \in \mathbb{R}$
  Aurkitu behar dugu $x \in \mathbb{R}$ non $f(x) = y \Rightarrow x - 3 = y \Rightarrow x = y + 3 \in \mathbb{R}$ ✓
- f bijektiboa ✓

Def $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa

1) f **bornatua** da, baldin eta $\exists M > 0$ non $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in D$.

2) f **gorakorra** da, baldin eta $\forall x_1, x_2 \in D$ non $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (Berdintza kentzen bada, hertsiki gorakorra)

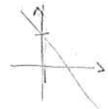
3) f **beherakorra** da, baldin eta $\forall x_1, x_2 \in D$ non $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ (Berdintza kentzen bada, hertsiki beherakorra)



Adb : ① $f(x)=\sin x$
$f: D=\mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \subset \mathbb{R}$
$|\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

② $f(x)=\ln x$
$f:(0,+\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\overset{\parallel}{D}$
$f(x)=\ln x$ gorakorra

③ $f(x)=2-x$ beherakorra
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



$x_1 < x_2 \Rightarrow$
$f(x_1) \geq f(x_2)$

Def $\boxed{\text{SIMETRIA}}$

$f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ funtzioa

i) f **bikoitia** da $f(x)=f(-x) \quad \forall x \in D$

ii) f **bakoitia** da $f(x)=-f(-x) \quad \forall x \in D$

iii) f **periodikoa** ($p \in \mathbb{R}$ periodokoa) $f(x+p)=f(x) \quad \forall x \in D$

$\boxed{\text{OHARRA}}$ 1) f bikoitiak OY ardatzarekiko simetrikoak dira
2) f bakoitiak $(0,0)$-rekiko simetrikoak dira.

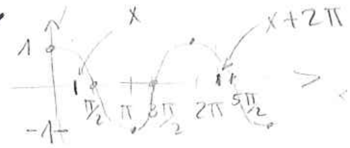
Adb : ① $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$
$f(x)=x^2$
$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

f bikoitia

② $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(x)=x^3$
$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$

f bakoitia

③ $f(x)=\cos x$
$p=2\pi$ periodokoa
$f(x+2\pi)=f(x)$



Def Izan bitez, $f: D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $g: D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioak

i) $(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall x \in D_1 \cap D_2$

ii) $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D_1 \cap D_2$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha \cdot f)(x)=\alpha \cdot f(x) \quad \forall x \in D_1$ ...

Def Izan bitez, $f: D_1 \subset \mathbb{R} \to B_1 \subset \mathbb{R}$ eta $g: D_2 \subset \mathbb{R} \to B_2 \subset \mathbb{R}$ bi funtzio non $f(D_1) \cap D_2 \neq \emptyset$.
Orduan f eta g-ren arteko konposizioa honela definitzen da. $(g \circ f)(x)=g(f(x)) \Rightarrow$ f konposatu a

$\boxed{\text{OHARRA}}$: Konposizioa ez da trukakorra orokorrean $f \circ g \neq g \circ f$.

Adb : $f(x)=x+1$ eta $g(x)=x^2$
$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+1$
$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=(x+1)^2$ ≠

$f(x)=g(x)=\sin x$
$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(\sin x)=\sin(\sin x)=\cancel{\sin^2 x}$ ≠ $\sin x \cdot \sin x$

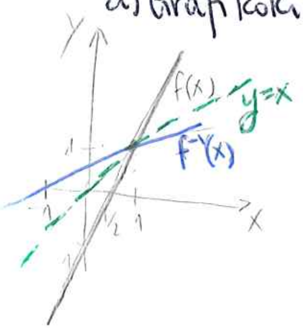
Def Izan bitez $f: D \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ injektiboa. f-ren alderantzizkoa, f^{-1} eran adierazten dena, $f(D)$ definizio eremua du eta $\forall y \in f(D) \quad f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$

$\boxed{\text{OHARRA}}$ 1) $(f^{-1} \circ f)(x)=x \quad \forall x \in D$
$(f \circ f^{-1})(y)=y \quad \forall y \in f(D)$

2) f eta f^{-1} funtzioaren grafikoak $y=x$ zuzenarekiko simetrikoak dira.

Adb : ① $f(x)=2x-1$ (injektiboa)

a) Grafikoki



b) Analitikoki
$y=2x-1$
$\downarrow x \leftrightarrow y$
$x=2y-1$
$\downarrow$ Bakar du y
$\frac{x+1}{2}=y=f^{-1}(x)$

② $f(x)=\frac{1}{x} \quad D=\mathbb{R}-\{0\}$ Kalkulatu f^{-1} bi eratara

4.2- ALDAGAI ERREALEKO FUNTZIOEN LIMITEAK

Def Izan bitez $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$. $(a-r, a+r) - \{a\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < r\}$

$x \neq a$ $\quad -r < x-a < r$

$-r+a < x < r+a$

$a-r \quad a \quad a+r$

a puntuan zentratutako eta r erradioko tarte simetriko laburtua.

Def Izan bitez $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in \mathbb{R}$, eta demagun existitzen dela $r > 0$ non $(a-r, a+r) - \{a\} \subset D$ den. Izan bedi $\ell \in \mathbb{R}$. ℓ zenbakia f-ren a puntuko limitea da, $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, adierazi z,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(a, \varepsilon) : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

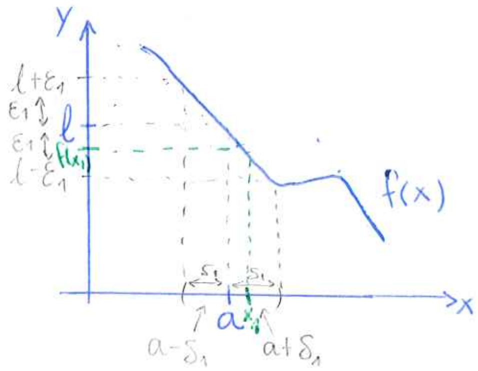
Limitearen definizioa

$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$ (δ a eta ε-en menpe)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underset{\text{delta}}{\delta} = \delta(a, \varepsilon) > 0$ non

$0 < \underbrace{|x-a|}_{d(x,a)} < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - \ell|}_{d(f(x), \ell)} < \varepsilon$

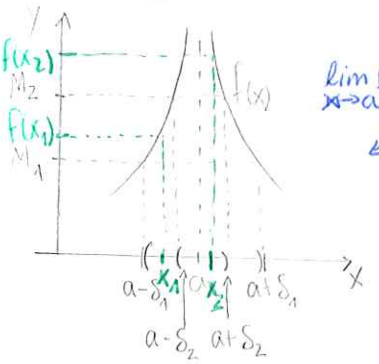


Def (Limite infinituak)

Izan bedi $f: (a-r, a+r) - \{a\} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa

i) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ baldin eta $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta = \delta(M, a) > 0$ non $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

ii) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ baldin eta $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta = \delta(M, a) > 0$ non $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$



Adb: ① $\lim_{x \to 0} \overset{\to 0}{x} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\nexists \text{ bornatua}} = 0$ dela frogatu definizioarekin.

Frogatu $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(0, \varepsilon) > 0$ non $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |\overbrace{x \sin \frac{1}{x}}^{f(x)} - \overset{\ell}{0}| < \varepsilon$

Izan bedi $\varepsilon > 0$ ... (zuek) $\delta = \varepsilon$ aukeratu.

② $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ frogatu definizioa erabiliz. $\left(\frac{1}{0^+} = +\infty\right)$

Frogatu $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta = \delta(M, 0) > 0$ non $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|x|} > M$

Izan bedi $M \in \mathbb{R}$ edozein.. (zuek) $\delta = \frac{1}{M}$ aukeratu.

Def (Albo limiteak)

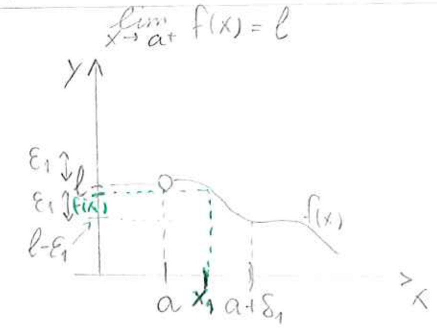
Izan bedi $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa eta $a \in \mathbb{R}$

i) f-ren a puntuko eskuinetiko limitea, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ non $\forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

ii) f-ren a puntuko ezkerretiko limitea, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ non $\forall x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$



Teorema 4.1

$f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa eta $a \in \mathbb{R}$

FROGA gu

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) = l \\ \text{eta} \\ \lim_{x\to a^-} f(x) = l \end{cases}$$

Teorema 4.2 (Limitearen bakartasuna)

Izan bedi $f: D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa, $a \in \mathbb{R}$ eta demagun $\exists\, r>0$ non $(a-r, a+r)-\{a\} \subset D$
Baldin eta $\lim_{x\to a} f(x)$ existitzen bada, orduan bakarra izan behar du, hau da,
$\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ eta $\lim_{x\to a} f(x) = l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$

FROGA: Absurdura eramanez, suposatuko dugu $l_1 \neq l_2$.
Adibidez $l_1 > l_2$ gertatuko da eta ~~$\lim_{x\to a} f(x) = l_2$~~

$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_1 = \delta_1(a,\varepsilon) > 0$ non $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-l_1| < \varepsilon \overset{⊛}{=} \frac{l_1-l_2}{2}$ (1)

$\lim_{x\to a} f(x) = l_2 \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_2 = \delta_2(a,\varepsilon) > 0$ non $0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-l_2| < \varepsilon \overset{⊛}{=} \frac{l_1-l_2}{2}$ (2)

Aukeratu $\varepsilon = \frac{l_1-l_2}{2} > 0$ ⊛

Izan bedi $x \in D$ non $\begin{cases} 0<|x-a|<\delta_1 \\ 0<|x-a|<\delta_2 \end{cases}$

(1) $\to |f(x)-l_1| < \frac{l_1-l_2}{2} \iff -\frac{l_1-l_2}{2} < f(x)-l_1 < \frac{l_1-l_2}{2}$ $\quad l_1 - \frac{l_1-l_2}{2} = \frac{l_1+l_2}{2} < f(x)$

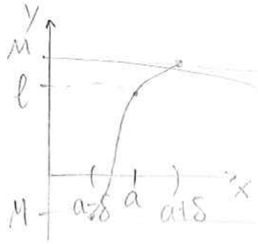
(2) $\to |f(x)-l_2| < \frac{l_1-l_2}{2} \iff -\frac{l_1-l_2}{2} < f(x)-l_2 < \frac{l_1-l_2}{2}$ $\quad f(x) < l_2 + \frac{l_1-l_2}{2} = \frac{l_1+l_2}{2}$

Absurdua, $f(x)$ ezin da izan $\frac{l_1+l_2}{2}$ baino handiagoa eta txikiagoa aldi berean
$\Downarrow$
$l_1 = l_2$ ∎

Proposizioa 4.3

Izan bitez $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa eta $a \in \mathbb{R}$ eta demagun $\exists\, r>0$ non $(a-r, a+r)-\{a\} \subset D$.

$\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ bornatua dago a-n zentratutako ingurune simetriko laburtu batean, hau da, $\exists\, M>0\ \exists\, \delta>0$ non $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)-\{a\} \Rightarrow |f(x)| < M$

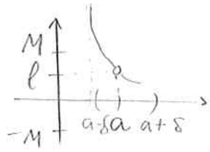


Def (Limiteak infinituan)

$\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ gutk begiratu (76. or.)

Prop. 4.3

$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \Rightarrow \exists M>0$ eta $\exists \delta>0$ non $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$ $|f(x)|\leq M$



FROGA: Izan bedi $\lim_{x\to a} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta=\delta(a,\varepsilon)>0$ non $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

Aukeratu $\varepsilon=1>0 \Longrightarrow \exists\,\delta>0$ non $x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\} \Rightarrow |f(x)-\ell|<1$

$|f(x)|=|f(x)-\ell+\ell|=|(f(x)-\ell)+(\ell)|\leq|f(x)-\ell|+|\ell|$

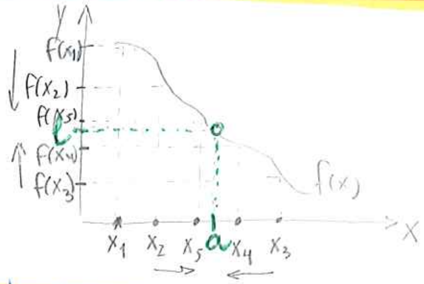
Ondorioz, $\exists\,\delta>0$ non $x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$ $|f(x)|\leq 1+|\ell|=M$ ◼

Teorema 4.4 (Funtzio baten limitearen karakterizazioa zenbaki errealen segiden bidez)

$f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funtzioa eta $a,\ell\in\mathbb{R}$

Orduan

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ z.e.s. non } x_n\neq a\ \forall n\in\mathbb{N}\\ \text{eta } \lim_{n\to\infty} x_n=a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\ell\end{array}\right\}$$



OHARRA: Aurreko teorema $\lim_{x\to a} f(x)$ existitzen ez duela frogatzeko erabili daiteke: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. non $x_n\neq a$ eta $y_n\neq a$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim_{n\to\infty} y_n=a$ eta $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty} f(y_n) \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to a} f(x)$.

Adb. Frogatuko dugu $\lim_{x\to 0=a} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ez duela existitzen.

Hartuko ditugu $x_n=\frac{1}{2\pi n}$ eta $y_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\lim x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi n}=0=a=\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi n+\pi/2}$

$$\left.\begin{array}{l}x_n=\frac{1}{2\pi n}\neq 0=a\\ y_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\neq 0\end{array}\right\}\forall n\in\mathbb{N}$$

$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2\pi n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi n)=0$

$\lim_{n\to\infty} f(y_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right)=1$

$\not\equiv \overset{\text{oharra}}{\Longrightarrow} \nexists \lim_{n\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

4.3 FUNTZIOEN LIMITEAK ETA ERAGIKETA ALJEBRAIKOAK

Proposizioa 4.5:

$f,g:(a-r,a+r)-\{a\}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bi funtzioa $\left\{\begin{array}{l}f \text{ bornatua}\\ \lim_{x\to a} g(x)=0\end{array}\right] \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0$

Adb: $\lim_{x\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{x}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{bornatua}}=0$

Teorema 4.6.

$f,g:(a-r,a+r)-\{a\}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bi funtzio non $\lim_{x\to a} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ eta $\lim_{x\to a} g(x)=m\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$
- i) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\ell+m$
- ii) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=\ell\cdot m$
- iii) $m\neq 0$ $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{m}$
- iv) $m\neq 0$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{m}$
- v) $\lim_{x\to a}|f(x)|=|\lim_{x\to a} f(x)|=|\ell|$

FROGA (i) eta ii) gu (81. or.) $g(x)\neq 0$

(iii) Lehenengo, ikusiko dugu $\exists \delta_3>0$ non $\forall x\in(a-\delta_3, a+\delta_3)-\{a\}$ $|g(x)|>0$ izango dela.

Honela, a-ren ingurune batean $g(x)\neq 0$ izango da eta $\frac{1}{g(x)}$ ondo definituta egongo da $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m\neq 0 \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_3>0$ non $(a-\delta_3, a+\delta_3)-\{a\} \Rightarrow |g(x)-m|<$

Aukeratu $\varepsilon=\frac{|m|}{2}>0 \Rightarrow |g-m|<\frac{|m|}{2}$. Ondorioz $\forall x\in(a-\delta_3, a+\delta_3)-\{a\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |m|-|g(x)| \leq ||m|-|g(x)|| \leq |g(x)-m| \overset{lehen}{<} \frac{|m|}{2} \Rightarrow |m|-|g(x)|<\frac{|m|}{2}$

$a-b\leq|a-b|$ $\quad ||a|-|b||\leq|a-b|=|b-a|$

$|m|-\frac{|m|}{2}<|g(x)|$

$\boxed{0<\frac{|m|}{2}<|g(x)|}$

Orain $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{m}$ frogatu behar dugu.

$\Updownarrow$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ non $0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{m}\right|<\varepsilon$

Izan bedi $\varepsilon>0$ edozein: $\varepsilon\cdot\frac{|m|^2}{2}>0$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=m \overset{def}{\iff} \varepsilon\cdot\frac{|m|^2}{2}>0$ $\exists\delta_2>0$ non $0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-m| \overset{(2)}{<} \varepsilon\frac{|m|^2}{2}$

Aukeratu $\delta=\min\{\delta_3,\delta_2\}$

$0<|x-a|<\delta\leq\delta_2$ eta $\delta_3 \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{m}\right|=\left|\frac{m-g(x)}{g(x)m}\right|=\frac{|g-m|}{|g|\cdot|m|}<\frac{\varepsilon|m|^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{|m||m|}=\varepsilon$

$|g|\overset{(1)}{>}\frac{|m|}{2}$

(iv) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \overset{ii) \text{ eta } iii)}{=} \ell\cdot\frac{1}{m}$

(v) Frogatu nahi dugu $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|\lim\limits_{x\to a}f(x)|=|\ell|$ dela, hau da, $\forall\varepsilon_1>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon_1,a)>0$ non $|x-a|<\delta \Rightarrow ||f(x)|-|\ell||<\varepsilon_1$

Izan bedi $\varepsilon_1>0$ edozein.

$\forall x\in\mathbb{R}$ dakigu, balio absoluturen $||a|-|b||\leq|a-b|$ propietateagatik $||f(x)|-|\ell||\leq|f(x)-\ell|$

Bestalde, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$ denez, (def.) $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon,a)>0$ non $0<|x-a|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$. Ondorioz, konkretuki, ere beteko da ε_1-rako

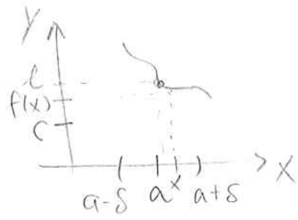
$0<|x-a|<\delta$ bada $\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon_1$ eta $||f(x)|-|\ell||\leq|f(x)-\ell|<\varepsilon_1$ ∎

4.4 - FUNTZIOEN LIMITEAK ETA ORDENA-ERLAZIOA

Teorema 4.7 $f:(a-r, a+r)-\{a\}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funtzioa $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ eta $c\in\mathbb{R}$

i) $\ell>c \Rightarrow \exists\delta>0$ non $\forall x\in(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ $f(x)>c$

ii) $\ell<c \Rightarrow \exists\delta>0$ non $\forall x\in(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ $f(x)<c$



Teorema 4.8

$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x)=l \\ \lim_{x\to a} g(x)=m\end{array}\right. \text{ eta } \exists \delta>0 \text{ non } f(x)\leq g(x) \ \forall x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\} \Rightarrow l\leq m$$

Teorema 4.9 (Funtzioetarako Sandwicharen erregela)

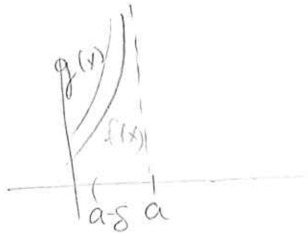
$f,g,h:(a-r,a+r)-\{a\}\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$\exists\delta>0$ non $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$ eta $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=l$

Teorema 4.10

$f,g:(a-r,a+r)-\{a\}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\exists\delta>0$ non $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$



i) $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=+\infty$

ii) $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

Orrie guk begiratu

4.5- INFINITESIMOAK

Def $\alpha:(a-r,a+r)-\{a\}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funtzioak $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$ betetzen badu orduan α a puntuko infinitesimoa da.

Adb:

① $\alpha(x)=\sin(x-1)$

$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)=\sin 0=0$

α 1 puntuko infinitesimoa da.

② $\alpha(x)=\cos(x+1)-1$

$\lim_{x\to -1}\cos(x+1)-1=0$

α -1 puntuko inf. da.

③ $\alpha(x)=(x-2)^3$

$\lim_{x\to 2}(x-2)^3=0$

α 2 puntuko inf. da.

Def α eta β a puntuko infinitesimoak

i) $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0 \Rightarrow \alpha$ infinitesimoaren ordena a puntuan β-rena baino txikiagoa da.

ii) $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k\in\mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow \alpha$ eta β infinitesimoak a puntuan ordena berdina dute.

iii) $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1 \Rightarrow \alpha$ eta β infinitesimo ~~ak~~ baliokideak dira ($\alpha(x)\sim\beta(x)$ adierazten da)

Infinitesimo baliokide ezagunak

$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$ bada,

1) $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$

2) $1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha(x)^2}{2}$

3) $\tan\alpha(x)\sim\alpha(x)$

4) $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$

5) $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$

6) $b^{\alpha(x)}-1\sim\ln b\cdot\alpha(x)$ $(\forall b>0)$

7) $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$

8) $\arctan\alpha(x)\sim\alpha(x)$

Teorema 4.11

$f:(a-r,a+r)-\{a\}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eta $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}\beta(x)$

Orduan,

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)\cdot f(x)=\lim_{x\to a}\beta(x)\cdot f(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\beta(x)}$$

Froga guk egingo

$\ln(1+\alpha(x))\underset{x\to 2}{\sim}\alpha(x)$

Adb: $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1\cdot\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3-1+1)}{x^2+3x-10}=$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(\overbrace{(x^2-4)}^{\alpha(x)}+1)}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(x+5)}=$

$\lim_{x\to 2}\alpha(x)=\lim_{x\to 2}x^2-4=0$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+5)}=\frac{4}{7}$

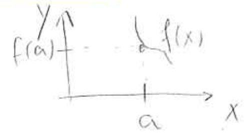
OHARRA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e. segidetarako funtzioetarako betala funtzionatzen duten infinitesimo baliokideak daude, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ bada.

1) $\sin a_n\sim a_n$	3) $\tan a_n\sim a_n$	5) $\arctan a_n\sim a_n$	7) $b^{a_n}-1\sim a_n\ln b$ ($\forall b>0$)
2) $1-\cos(a_n)\sim\frac{a_n^2}{2}$	4) $\arcsin a_n\sim a_n$	6) $e^{a_n}-1\sim a_n$	8) $\ln(1+a_n)\sim a_n$

4.6 - FUNTZIO JARRAITUAK

Def $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in D$ f a puntuan jarraitua da $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$, hau da,

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(a,\varepsilon)>0$ non $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$



Adb: ① Polinomioak eta esponentzialak jarraituak dira $\mathbb{R}$ osoan.
② Logaritmoak jarraituak dira bere barneko funtzioa >0 bada.
③ Sinu eta kosinua jarraituak dira $\mathbb{R}$ osoan.
④ Tangentea jarraitua da bere barneko funtzioa $\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\forall k\in\mathbb{Z}$

Def $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $a\in D$

i) $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ f eskuinetik jarraitua $x=a$ puntuan.

ii) $\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$ f ezkerretik jarraitua $x=a$ puntuan.

Proposizioa 4.12

$f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in D$

$$\left[\begin{matrix}f\text{ jarraitua}\\ x=a\text{ puntuan}\end{matrix}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)\\ \lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)\end{matrix}\right]$$

Proposizioa 4.13

$f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in D$ f jarraitua $x=a$ puntuan $\Rightarrow\exists\delta>0$ non f $(a-\delta,a+\delta)$ tartean bornatua den.

hau da, $\exists M>0:|f(x)|\leq M$, $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$

Proposizioa 4.14

f eta g $x=a$ puntuan jarraituak

$\Rightarrow$
- i) $f+g$ ere jarraitua da $x=a$ puntuan
- ii) $f\cdot g$ " " " " "
- iii) $g(a)\neq 0$ bada $\frac{1}{g}$ funtzioa jarraitua da $x=a$ puntuan
- iv) $g(a)\neq 0$ bada $\frac{f}{g}$ " " "

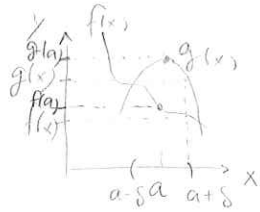
Proposizioa 4.15

f funtzioa $x=a$ puntuan jarraitua eta $c\in\mathbb{R}$.

i) $f(a)>c \Rightarrow \exists\, \delta>0$ non $f(x)>c \quad \forall x\in(a-\delta, a+\delta)$

ii) $f(a)<c \Rightarrow \exists\, \delta>0$ non $f(x)<c \quad \forall x\in(a-\delta, a+\delta)$

Proposizioa 4.16



f eta g funtzioak $x=a$ jarraituak

$f(a)<g(a) \Rightarrow \exists\, \delta>0$ non $f(x)<g(x) \quad \forall x\in(a-\delta, a+\delta)$

Proposizioa 4.17 (Jarraitutasunaren karakterizazioa z.e. Segiden bidez)

$f: D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $a\in D$

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ jarraitua} \\ x=a \text{ puntuan}\end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ z.e.s. non } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(a)\end{array}\right]$$

$\boxed{\text{OHARRA}}$ Prop. 4.17 berez segidetan erabili egin dugu jada $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(a_n) = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$

$f(x)=\ln x$ jarraitua $(0,+\infty)$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in (0,+\infty)$

Proposizioa 4.18

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = l \\ g(x)\ l \text{ puntuan jarraitua}\end{array}\right] \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (g\circ f)(x) = g(l)$$

$g\left(\lim\limits_{n\to a} f(x)\right)$ $\;\|$

Korolarioa:

$(g\circ f)(a) = g(f(a))$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ a puntuan jarraitua} \\ g\ f(a) \quad \text{''} \qquad \text{''}\end{array}\right] \Rightarrow (g\circ f) \text{ a puntuan jarraitua}$$

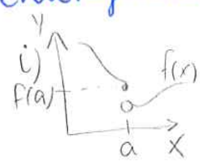
4.7 - ETENGUNEAK

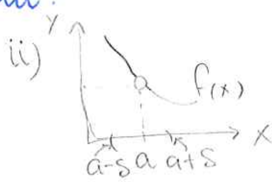
Def $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funtzioa, $a\in\mathbb{R}$ a puntua f-ren etengunea da:

i) $a\in D$ baina f ez da jarraitua $x=a$ puntuan

edo

ii) $a\notin D$ baina $\exists\, r>0$ non $(a-r, a+r)-\{a\}\subset D$.

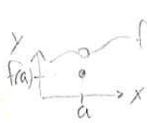




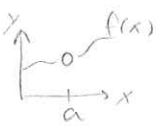
Def (Etenguneen sailkapena)

$f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funtzioa a f-ren etengunea

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l\in\mathbb{R}$ eta $l\neq f(a)$ (edo $a\notin D$) $\longrightarrow$ a etengune gaindigarria da



edo



Kasu honetan f a puntuan jarraitua bihurtzeko

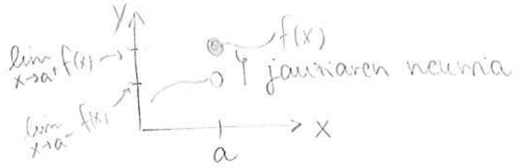
$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x\in D-\{a\} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & x=a\end{cases} \longrightarrow \tilde{f} \text{ bai jarraitua da } x=a \text{ puntuan}$$

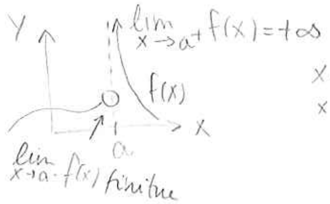
ii) Existitzen badute albo-limiteak ($\lim_{x \to a^+} f(x)$ eta $\lim_{x \to a^-} f(x)$) (finituak edo infinituak)

→ Finituak direnean desberdinak badira → $x=a$ lehen mailako etengunea

$$\left| \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) \right| = \text{Jauziaren neurria}$$

→ Albo limiteren bat edo biak $\pm\infty$ badira, $x=a$ asintota bertikala da.





$x=a$ lehen mailako etengunea
$x=a$ asintota bertikala

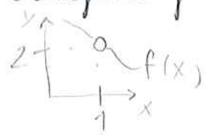
iii) Gutxienez albo limiteren bat ez badu existitzen ⇒ $x=a$ f-ren bigarren mailako etengunea.

Adb: ① $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $\boxed{a=1}$

$\nexists f(1)$

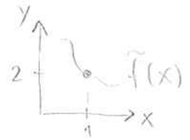
$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2$

} $x=1$ etengune gainditagarria



Konpontzeko

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & \mathbb{R} - \{1\} \\ \lim_{x \to 1} f(x) = 2, & x = 1 \end{cases}$$

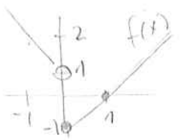


② $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a=0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$x=0$ lehen mailako etengunea eta asintota bertikala.

③ $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x<0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$



$a=0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x-1 = -1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1-x = 1$ $\nexists$

$x=0$ lehen mailako etengunea → $|(-1)-1| = 2$ jauziaren neurria

④ $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $a=0$

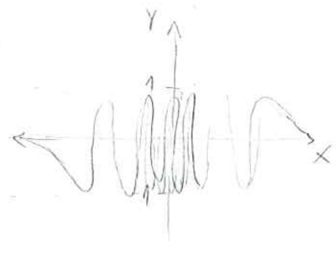
$\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{0} = \sin(\pm\infty)\ \nexists$

$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} \sin\frac{1}{x} = \sin(+\infty)\ \nexists \\ \lim_{x \to 0^-} \sin\frac{1}{x} = \sin(-\infty)\ \nexists \end{array} \right)$

$x=0$ bigarren mailako etengunea

$\lim_{x \to +\infty} \sin\frac{1}{x} = \sin 0^+ = 0^+$

$\lim_{x \to -\infty} \sin\frac{1}{x} = \sin 0^- = 0^-$



4.8- FUNTZIO JARRAITUEI BURUZKO TEOREMA NAGUSIAK

Def $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa

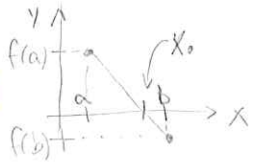
i) f (a,b) tartean jarraitua da $\forall x \in (a,b)$ f jarraitua bada x puntuan

ii) f $[a,b]$ tartean jarraitua da, $\begin{cases} \bullet\ \forall x \in (a,b)\ f \text{ jarraitua } x \text{ puntuan} \\ \bullet\ f\ a \text{ puntuaren eskumatik jarraitua} \\ \bullet\ f\ b \text{ '' ezkerretik ''} \end{cases}$

Teorema 4.20 (Boltzanoren teorema)

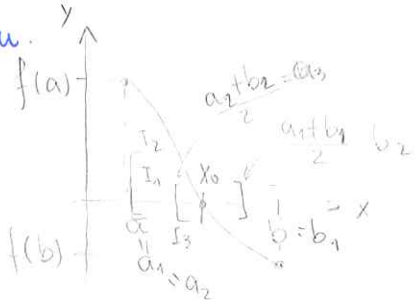
- $f\,[a,b]$ jarraitua
- $f(a)\cdot f(b)<0$

$\Big] \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ non $f(x_0)=0$



FROGA: Suposatuko dugu $f(a)>0$ eta $f(b)<0$ direla eta $I_1=[\overset{a_1}{a},\overset{b_1}{b}]$.
Kontsidera dezagun I_1 tarteko erdiko puntua: $\frac{a+b}{2}$.
Hiru aukera hauek daude:

1) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0 \Rightarrow x_0=\frac{a+b}{2}$, bukatu dugu.
2) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0 \Rightarrow I_2=\left[\overset{a_2}{\frac{a+b}{2}},\overset{b_2}{b}\right]$
3) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0 \Rightarrow I_2=\left[\overset{a_2}{a},\overset{b_2}{\frac{a+b}{2}}\right]$



¿3?

$I_2=[a_2,b_2]=\left[a_2,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$

$\frac{a_1+b_1}{2} \rightarrow f\left(\frac{a_1+b_2}{2}\right)>0 \Rightarrow I_3=[\overset{\frac{a_2+b_2}{2}}{a_3},\overset{b_2}{b_3}]$

Honela jarraitut lortuko dugu: $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n$ non $|I_n|=|b_n-a_n|=\frac{b-a}{2^{n-1}}$

eta $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0 \end{cases}$

f jarraitua denez $[a,b]$ tartean $\xrightarrow[\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} x_0,\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} x_0]{\text{Prop. 4.17}}$ $\begin{cases} f(x_0)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(a_n)}} \geq 0 \\ f(x_0)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(b_n)}} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0)=0$ ∎

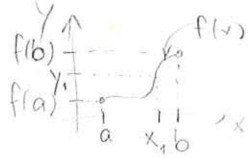
OHARRA Boltzanoren teoremaren frogak $f(x)=0$ ekuaziorako solutio hurbildu bat bilatzeko metodo bat ematen digu.
x_0 bilatzeko $\rightarrow \frac{a_n+b_n}{2}$ hurbilketa erabilit, errorea $=\left|\overset{\text{sol zehatza}}{x_0}-\overset{\text{sol hurbildua}}{\frac{a_n+b_n}{2}}\right| \leq \frac{b-a}{2^n}$ izango da.

Adb.: (7uek)

- Aurkitu $N\in\mathbb{N}$ $x\cdot 2^x=5$ ekuazioak solutioa izan dezan $[N,N+1]$ tartean.
- Eman solutio honen hurbilketa bat, errorea 10^{-1} baino txikiagoa izan dadin.

Teorema 4.21 (Tarteko balioaren teorema edo Darbouxen teorema)

- $f\,[a,b]$ jarraitua $\Rightarrow \forall y \in [f(a), f(b)]$ (edo $[f(b), f(a)]$) $\exists\, x \in [a,b]$ non $f(x) = y$



FROGA Hiru kasu hauek daude:

1.- $\underbrace{f(a) = f(b)}_{\text{Kasu hondan}}$ denean $\rightarrow [f(a), f(b)]$ = puntu bakarra

$y \in [f(a), f(b)] \Rightarrow y = f(a) = f(b)$

Orduan bilatu behar dugun x, $x = a$ edo $x = b$ hartu daiteke.

2.- $f(a) < f(b)$ bada, $y \in (f(a), f(b)) \Rightarrow f(a) < y < f(b)$

Definituko dugu $g(x) = f(x) - y$

f jarraitua $[a,b] \Rightarrow g$ ere jarraitua $[a,b]$. Gainera $g(a) = f(a) - y < 0$, $g(b) = f(b) - y > 0$ $\xrightarrow[g(x)]{\text{Bolzano}}$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ non $g(x_0) = 0$

$g(x_0) = f(x_0) - y = 0 \Rightarrow f(x_0) = y$

3.- $f(a) > f(b)$ denean. Aurreko kasuaren berdina egin $g(x) = y - f(x)$ hartuz. ▨

Teorema 4.22.

f jarraitua $[a,b] \Rightarrow \exists\, M > 0$ non $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$ (f bornatua $[a,b]$)

Teorema 4.23

$f\,[a,b]$ jarraitua $\Rightarrow f$ funtzioak minimo eta maximoa lortzen du $[a,b]$ tartean.

4.9- ALDERANTZIZKO FUNTZIOAREN JARRAITUTASUNA

Lema 4.24

$\left.\begin{array}{l} f\,[a,b] \text{ jarraitua} \\ f \text{ injektiboa} \end{array}\right\} \Rightarrow f\,[a,b]$ tartean hertsiki gorakorra ($\forall x, y \in [a,b]$ non $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$) edo hertsiki beherakorra da ($\forall x, y \in [a,b]$ non $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

Lema 4.25

f hertsiki gorakorra $\Rightarrow f^{-1}$ hertsiki gorakorra

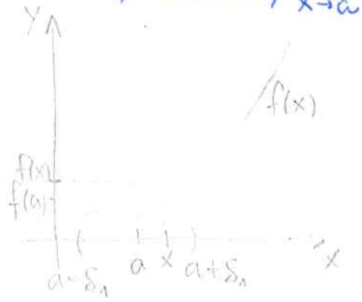
(edo beherakorra $\Rightarrow$ beherakorra)

Teorema 4.26

$f(a,b)$ jarraitua eta injektiboa $\Rightarrow f^{-1}$ jarraitua $f((a,b))$ tartean

4.10 - JARRAITUTASUN UNIFORMEA

Gogoratu $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jarraitua izatea $A \subset D$ eremuan, $\forall a \in A$ f jarraitua izatea da, hau da, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(a, \varepsilon)$ non $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$



Def: $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $A \subset D$
f A multzoan uniformeki jarraitua da $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ non $\forall x, y \in A \; |x-y| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\boxed{\text{OHARRA}}$: x aldagaian aldaketa txikiek $f(x)$ irudian aldaketa txikiak eragiten badituzte eta $f(x)$ irudietako aldaketaren neurriak x-ren aldaketaren neurriaren mempe dago bakarrik $\leftarrow \delta(\varepsilon)$

Edozein $\varepsilon > 0$-rako existitu behar du $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ non $\forall x, y \in A \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\rightarrow$ f jarraitua A eremuan ez da uniformeki jarraitua A eremuan, ε baterako ezin dugulako aurkitu δ non $\forall x, y \in A \quad |x-y| < \delta \not\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Proposizioa 4.27
f A eremuan uniformeki jarraitua $\Rightarrow$ f jarraitua A eremuan

$\boxed{\text{OHARRA}}$ $\Leftarrow$ ez da betetzen, hau da, f jarraitua bada A eremuan, ez du zertan uniformeki jarraitua izan behar.

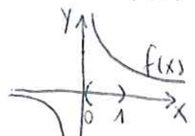
$\boxed{\text{OHARRA}}$ f A tartean uniformeki jarraitua izatea, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x, y \in A$
$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Kontrakoa: f ez izatea uniformeki jarraitua A eremuan

1) $\exists \varepsilon > 0$ non $\forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in A \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

2) $\exists \varepsilon > 0$ eta $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ z.e. segidak A tartean non $\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0$ eta $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

Adb.: 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ $A = (0,1)$ tartean bai da jarraitua baina ez da uniformeki jarraitua.



Aukeratu $\varepsilon = 1 > 0$, $x_n = \frac{1}{n}$ eta $y_n = \frac{1}{n+1}$

- $x_n = \frac{1}{n} \in (0,1) = A \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $y_n = \frac{1}{n+1} \in (0,1) = A \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \to \infty} x_n - y_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1-n}{n(n+1)} = 0$

- $|f(x_n) - f(y_n)| = |f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n+1})| =$
$= |n - (n+1)| = |-1| = 1 \geq \varepsilon = 1$
Betetzen da

$\Rightarrow$ f ez da uniformeki jarraitua

2) $f(x) = x^2$ ez da uniformeki jarraitua $\mathbb{R}$ osoan

Aukeratu $\varepsilon = 1 > 0$ eta $x_n = n$ eta $y_n = n + \frac{1}{n}$

- $x_n = n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $y_n = n + \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n - \left(n + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow 2 + \frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow -2 - \frac{1}{n^2} < -2 \Rightarrow \left|-2-\frac{1}{n^2}\right| \overset{?}{<} |-2|$

- $|f(x_n) - f(y_n)| = |f(n) - f(n+\frac{1}{n})| = |n^2 - (n+\frac{1}{n})^2| = |n^2 - (n^2 + 2 + \frac{1}{n^2})| = |-2 - \frac{1}{n^2}| > 2 \geq \varepsilon = 1$

Adb

a) Aurkitu $N \in \mathbb{N}$ non $x \cdot 2^x = 5$ ekuazioa solutio bat duen $[N, N+1]$ tartean.

$f(x) = 0$

$f(x) = x \cdot 2^x - 5$

Aukeratuko dugu $N = 1 \Rightarrow [N, N+1] = [1, 2]$

$f(1) = 1 \cdot 2^1 - 5 = -3 < 0$

$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 = 3 > 0$

$\overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} \exists\, x_0 \in (1, 2)$ non $f(x_0) = 0$

b) Aplikatu Bolzanoren froga Soluzioaren hurbilketa bat bilatzeko non erroa $< \frac{1}{10}$.

Errorea $= \left|x_0 - \frac{a_n + b_n}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{2-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{10}$ ($n \geq 4$)

$[1, 2]$ (a, b)

Aplikatu Bolzanoren froga $n = 4$-rako.

$I_1 = [a_1, b_1] = [1, 2]$ $\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \rightarrow \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\sqrt{2} - 5 < 0$

$I_2 = [a_2, b_2] = \left[\frac{3}{2}, 2\right] \rightarrow \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow f\left(\frac{7}{4}\right) > 0$

$I_3 = \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right] \rightarrow \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{13}{8} \Rightarrow f\left(\frac{13}{8}\right) < 0$

$I_4 = \left[\frac{13}{8}, \frac{7}{4}\right] \rightarrow \frac{a_4 + b_4}{2} = \underline{\underline{\frac{27}{16}}}$