3. GAIA: ZENBAKI SERIEAK

3.1. DEFINIZIOAK ETA ADIBIDEAK

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida $\longrightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{a_1, a_2, \dots\}$

Def. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1+a_2+a_3+\dots \leftarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.-ren gaiek osatutako seriea edo z.e. seriea.

Def. Izan bitez $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ z.e. seriea

$S_n = a_1+a_2+\dots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ batura $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriearen n-garren batura partziala

$S_1 = a_1 \in \mathbb{R}$

$S_2 = a_1+a_2 \in \mathbb{R}$

$S_n = a_1+a_2+\dots+a_n \in \mathbb{R} \Longrightarrow \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ z.e.s. da.

$\downarrow n\to\infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Def.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ z.e. seriea eta $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bere batura partzialen segida

i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriea konbergentea da $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea bada, seriearen batura $\lim_{n\to\infty} S_n$ izanik $\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} a_1+\dots+a_n$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriea dibergentea da $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dibergentea bada. Kasu honetan $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ izango da eta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriea oszilatzailea da $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oszilatzailea bada. Kasu honetan ez da existitzen baturarik.

Laburbilduz, serie baten izaera bere batura partzialen segidaren izaera da.

Adib: 1) $\sum_{k=1}^{\infty} a$ seriea konstantea dibergentea dela ikusiko dugu $(a\in\mathbb{R})$.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konstantea.

$S_n \stackrel{def}{=} a_1+a_2+\dots+a_n = \underbrace{a+a+\dots+a}_{n \text{ aldiz}} = n\cdot a$

$\sum_{k=1}^{\infty} a \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot a = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases} \longrightarrow a>0$ edo $a<0$ bada serie dibergentea da.

$\boxed{a=0}$

$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0+0+\dots = 0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow a=0$ seriea konbergentea da.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ seriea oszilakorra dela ikusiko dugu.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

$$S_n \overset{def}{=} a_1+a_2+\dots+a_n = (-1)+1+(-1)+1+\dots+(-1)^{n-1}+(-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ bikoitia} \\ -1, & n \text{ bakoitia} \end{cases}$$

Ondorioz $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oszilakorra da $\overset{def}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ seriea oszilakorra da.

Def. (P)

edozein operazioa izan daiteke

$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$, $a_1 \neq 0$ eta $r \neq 0$ izanik, r arrazoiko serie geometrikoa.

- Aztertuko dugu serie geometrikoaren izaera:

$\boxed{r=1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_1$ serie konstantea dibergentea.

$$\boxed{r\neq 1} \Rightarrow S_n = a_1+a_2+\dots+a_n = \underbrace{a_1+a_1r+a_1r^2+\dots+a_1r^{n-1}}_{\text{segida geometrikoaren lehen n gaien batura}} = \frac{a_1-a_1r^n}{1-r} = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1} \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \begin{cases} \frac{a_1}{1-r}, & |r|<1 \\ \frac{a_1}{1-r}(-\infty), & r>1 \\ \nexists, & r\leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r|<1 \\ \infty, & r>1 \\ \nexists, & r\leq -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{a_1}{1-r}, & |r|<1 \\ +\infty, & a_1>0 \text{ eta } r>1 \\ -\infty, & a_1<0 \text{ eta } r>1 \\ \nexists, & r\leq -1 \end{cases}$$

✓SERIE GEOMETRIKO

Ondorioz, $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$ konbergentea da $\Longleftrightarrow |r|<1$

Kasu honetan, serie geometrikoa konbergentea bada, bere batura $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1} = \frac{a_1}{1-r}$

(seriearen lehen gaia $k=1 \Rightarrow a_1 r^0 = a_1$)

Def.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie harmonikoa da eta $\alpha \in \mathbb{R}$ bada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ serie harmoniko orokortua.

OHARRA Serie harmonikoaren izaera aztertzeko itxaron teoria gehiago behar da.

3.2- ZENBAKI-SERIEEN OINARRIZKO PROPIETATEAK

Proposizioa 3.1

non $b_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$

i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konbergentea $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k + (b_1+\dots+b_n)$ ere konbergentea da

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dibergentea $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k + (b_1+\dots+b_n)$ dibergentea da.

- Gainera, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konbergentea bada eta bere batura S bada eta $b_1+\dots+b_2=b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k + (b_1+\dots+b_n) = S+b \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k - (b_1+\dots+b_n) = S-b \end{cases}$$

(Azalpena: zenbaki-serie batean batugai-kopuru finitua sartzen edo kentzen bada, lortzen den serie berriaren izaera aurrekoaren izaera bera da. Beraz, serie batean batugai-kopuru finitu bat aldatzeak ez du eraginik seriearen izaeran)

OHARRA Hemendik aurrera, serie baten itxaera bakarrik badugu kontuan, ez ditugu batukariaren indizeak idatziko: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \rightarrow \sum a_k$

Proposizioa 3.2

$\sum a_n$ konbergentea $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

FROGA:

$\sum a_n$ konbergentea $\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. konbergentea, $S_n = a_1 + \dots + a_n$

Suposatuko dugu $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$\forall n \geq 2 \rightarrow a_n = \underbrace{S_n}_{(a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n)} - \underbrace{S_{n-1}}_{(a_1 + \dots + a_{n-1})} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0}$ ∎

Korolario 3.3

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ dibergentea da

Adib. 3 gaia 3(i) ariketa

Proposizioa 3.4

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eta $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serie konbergenteak haien batuak a eta b izanik, hurrenez hurren:
sucesivamente

i) $\overbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k}^{konb.} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a+b$

ii) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \overbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k}^{konb.} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lambda \cdot a, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

FROGA

Izan bitez, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriearen batura partzialen segida
$\{S_n'\}_{n\in\mathbb{N}} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ " " "

$\overset{hipotesiak}{\Longrightarrow} \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{def.}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = a \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \overset{def.}{=} \lim_{n\to\infty} S_n' = b \end{cases}$

i) Izan bedi $\{S_n''\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k$ seriearen batura partzialen segida $\Rightarrow S_n'' \overset{def}{=}$
$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n) = (a_1+\dots+a_n)+(b_1+\dots+b_n) = S_n + S_n' \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{S_n''\}_{n\in\mathbb{N}} = \{S_n + S_n'\}_{n\in\mathbb{N}} \rightarrow \{S_n''\}_{n\in\mathbb{N}}$ bi segida konbergenteen batura da $\xrightarrow{teorema\ 2.11\ i)}$

$\Rightarrow \{S_n''\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea da eta $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k}_{def\ konb.} \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} S_n'' \overset{teorema\ 2.11\ i)}{=} \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} S_n' = a+b.$

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$. Izan bedi $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot a_k$ seriearen batura partzialen segida.

$T_n \overset{def}{=} \lambda \cdot a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda \cdot a_n = \lambda(a_1 + \dots + a_n) = \lambda \cdot S_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konb. denez ($\sum a_k$ konbergentea delako)

$\overset{2.\ gaian}{\Longrightarrow} \{\lambda S_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konb. da ere bai $\overset{def}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$ konb. da

(Jarraitzen)

Gainera, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \overset{def.}{=} \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \lambda \cdot S_n \overset{2.\text{gaian}}{=} \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} S_n \overset{def.}{=} \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ■

Def

Izan bitez $\sum a_n$ z.e. seriea eta $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bere batura partzialen segida.

$\sum a_n$ serieak Cauchyren baldintza betetzen du, $\boxed{\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0=n_0(\varepsilon) \text{ non}}$ $\boxed{\forall m>n\geq n_0 \ |S_m-S_n|<\varepsilon}$ (edozein $\varepsilon>0$-rako n_0 batetik aurrera S_m eta S_n oso gertu daude).

$$|S_m-S_n|<\varepsilon \Leftrightarrow |(a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1}+\dots+a_m)-(a_1+\dots+a_n)| = \boxed{|a_{n+1}+\dots+a_m|<\varepsilon}$$

Teorema 3.5

Izan bedi $\sum a_n$ z.e. seriea

$\sum a_n$ konbergentea $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ Cauchyren baldintza betetzen du

FROGA:

$\sum a_n$ konb $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $\{S_n\}$ ($\sum a_n$ seriearen batura partzialen segida.) $\overset{\text{Teorema } 2.10}{\Leftrightarrow}$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyren segida da $\overset{def.}{\underset{2.\text{gaian}}{\Leftrightarrow}}$ $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ non $\forall m>n\geq n_0$ $|S_m-S_n|<\varepsilon$ $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $\sum a_n$ Cauchyren baldintza betetzen du ■

Proposizioa 3.6 (*)(*) "ERABILGARRIA"

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea da.

OHARRA:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots = +\infty$$

FROGA: Frogatu nahi dugu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ dibergentea dela $\overset{3.5 \text{ teorema}}{\Longleftrightarrow}$ Ez duela Cauchyren baldintza betetzen

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$-ren Cauchyren baldintza:

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ non $\forall m>n\geq n_0$ $|S_m-S_n|<\varepsilon$.

EZ BETETZEA

$\exists\varepsilon>0$ $\forall n_0\in\mathbb{N}$ non $\exists m>n\geq n_0$ $|S_m-S_n|\geq\varepsilon$ $\longrightarrow$ Aurkitu behar dugu edozein $n_0\in\mathbb{N}$-rako $\varepsilon>0$ eta $m>n\geq n_0$ batzuk non $|S_m-S_n|\geq\varepsilon$.

Izan bedi $n_0\in\mathbb{N}$ edozein eta hartuko ditugu $m=2^{k+1}$ eta $n=2^k$. Ikusten da $m>n$ dela $2^{k+1}>2^k$ delako. Eta $\lim_{k\to\infty} 2^k=\infty$ denez $\exists k\in\mathbb{N}$ non $2^{k+1}>2^k\geq n_0$.

$$|S_m-S_n| = |S_{2^{k+1}}-S_{2^k}| = \left|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^k}\right)\right| =$$

$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)$

$$= \left|\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}}\right| = \frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\dots+\underset{\text{txikiena}}{\frac{1}{2^{k+1}}} \geq \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k \text{ batugai}} = 2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

$2^{k+1} = 2\cdot 2^k = 2^k+2^k$

$\Rightarrow |S_m-S_n|\geq\frac{1}{2}$

Orduan $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $m=2^{k+1}$ eta $n=2^k$ aukeratuta, $\forall n_0\in\mathbb{N}$ $|S_m-S_n|\geq\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\frac{1}{n}$ ez du Cauchyren baldintza betetzen $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ dibergentea da ■

3.3- GAI POSITIBOKO SERIEEN KONBERGENTZIARAKO IRIZPIDEA

Def. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e. segida $a_n \geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gai positiboko seriea da.

Adb: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gai positiboko seriea ($a_n \geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$) ② $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$ gai positiboko seriea ($a_n \geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$)

Teorema 3.7

Izan bedi $\sum a_n$ $\boxed{\text{gai positiboko seriea}}$ (g.p.s) $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konbergentea da ala $+\infty$-rantz dibergentea.

FROGA: Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bere batura partzialen segida

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\underbrace{S_n}_{a_1+\dots+a_{n-1}+a_n} - \underbrace{S_{n-1}}_{a_1+\dots+a_{n-1}} = a_n \geq 0 \Rightarrow S_n - S_{n-1} \geq 0\ \forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow S_n \geq S_{n-1}\ \forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida gorakorra ⊕

Bi gauza gertatu daitezke:

1) $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua $\overset{\text{teorema 2.6}}{\underset{⊕}{\Longrightarrow}}$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergente $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\sum a_n$ serie konbergentea

2) $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez dago goitik bornatua $\underset{⊕}{\Longrightarrow}$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $+\infty$-rantz dibergentea da $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ $+\infty$-rantz dibergentea ∎

Def. Izan bitez $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ gai positiboko bi serie. Baldin eta $a_n \leq b_n\ \forall n\in\mathbb{N}$, orduan $\sum a_n$ seriea $\sum b_n$ seriearen minorantea da edo $\sum b_n$ seriea $\sum a_n$ seriearen maiorantea da. Honela adierazten da $\sum a_n \ll \sum b_n$.

Teorema 3.8 (Konparazio irizpidea)

Izan bitez $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ g.p.s. non $\boxed{\sum a_n \ll \sum b_n}$. Orduan,

i) $\sum b_n$ konbergentea $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konbergentea

ii) $\sum a_n$ dibergentea $\Rightarrow$ $\sum b_n$ dibergentea

FROGA

i) Izan bitez $\{S_n\}$ eta $\{S_n'\}$ $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ serieen batura partzialen segidak hurrenez hurren.

$\sum a_n \ll \sum b_n \overset{def}{\Longleftrightarrow} a_n \leq b_n\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{S_n}_{a_1+\dots+a_n} \overset{②}{\leq} \underbrace{S_n'}_{b_1+\dots+b_n}\ \forall n\in\mathbb{N}$

Bestalde, $\sum b_n$ konbergentea $\overset{⊕}{\underset{\text{gero ikusiko dugu}}{\Longleftrightarrow}}$ $\{S_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua $\overset{②}{\Longrightarrow}$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua $\Leftrightarrow$

$\overset{⊕}{\Longleftrightarrow}$ $\sum a_n$ konbergentea.

⊕ Ikusiko dugu [$\sum a_n$ Konb $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua]

$\Rightarrow$ | $\sum a_n$ konb $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea $\overset{Prop}{\underset{2.5}{\Longrightarrow}}$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua $\overset{\text{konkretuki}}{\Longrightarrow}$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua

$\Leftarrow$ | $\{\underbrace{S_n}_{a_1+\dots+a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua. Bestalde $a_n \geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$ (g.p.s.) $\Rightarrow$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gorakorra

$\Big\} \underset{\text{teorema 2.6}}{\Longrightarrow}$ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\sum a_n$ konb.

ii) Absurdura eramanez suposatuko dugu $\sum a_n$ dib. eta $\sum b_n$ Konb. dela.
Konkretuki $\sum b_n$ Konb. bada $\xRightarrow[\sum a_n \ll \sum b_n]{i)}$ $\sum a_n$ Konb. (absurdua)
Ondorioz, $\sum b_n$ dib. da.

Adb: ① Serie harmoniko orokortuen izaera $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \to \begin{cases} \alpha>1 & \text{Konbergentea} \\ \alpha\leq 1 & \text{dibergentea} \end{cases}}$

Froga: • $\boxed{\alpha=1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dib. $(+\infty)$ (Prop. 3.6)

• $\boxed{\alpha<1}$ denean $n^\alpha \overset{\alpha<1}{\leq} n^1$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\overset{\frac{1}{n^\alpha}\geq 0,\ \frac{1}{n}\geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow}$ $\sum \frac{1}{n} \ll \sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\overset{\text{Konparatio irizpidea}}{\Longrightarrow}$ $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ dib. da}}$
(diberg.)

• $\boxed{\alpha>1}$ denean, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \underbrace{1}_{b_1} + \underbrace{\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}}_{b_2} + \underbrace{\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}}_{b_3} + \dots$

↑ beste era honetan adierazi: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ non
$b_1 = 1 \leq \frac{1}{(2^0)^{\alpha-1}}$
$b_2 = \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \overset{1}{\leq}$
$b_3 = \frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha} \overset{2}{\leq}$
...
handienak

handiena
$b_n = \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha} \leq \frac{1}{(2^{n-1})^{\alpha-1}}$

$\overset{1}{\leq} \frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha} = \frac{2}{2^\alpha} = \frac{1}{(2^1)^{\alpha-1}}$

$\overset{2}{\leq} \frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha} = \frac{4}{4^\alpha} = \frac{1}{(2^2)^{\alpha-1}}$

Ondorioz, $\sum \frac{1}{n^\alpha} = \sum b_n \ll \sum \frac{1}{(2^{n-1})^{\alpha-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1} \Longleftrightarrow$ Konbergentea $\left|\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right|<1$ denean
serie geometrikoa
$r = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$

Bai: $\alpha>1$
$\alpha-1>0$
$2^{\alpha-1}>2^0$
$2^{\alpha-1}>1$
$\frac{1}{2^{\alpha-1}}<1$

g.p.s
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}$ $\overset{\text{Konparatio irizpidea}}{\Longrightarrow}$ $\sum b_n$ konb $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ konb. } \alpha>1}$
konb

② $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2}}_{=a_n}$ aztertu izaera

$\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n = \frac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2} \geq 0 \Rightarrow$ Seriea gai positibokoa da

Konparazio irizpidea
$a_n = \frac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2} \leq \frac{1+1}{n^2} = \frac{2}{n^2} \Rightarrow a_n \leq \frac{2}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$
$0\leq\cos^2(n^2-7)\leq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ g.p.s

$\sum \frac{2}{n^2} = 2\cdot\sum\frac{1}{n^2}$ ← Konb. (Prop. 3.4)
← serie harmoniko orokortua $\alpha=2>1$ Konbergentea

Ondorioz, $\sum a_n \ll \sum \frac{2}{n^2} \Rightarrow \sum a_n$ konb.
konb. ← Konparatio irizpidea i)

Teorema 3.9. (Limitearen irizpidea)
Izan bitez $\sum a_n$, $\sum b_n$ g.p.s. non $b_n\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Izan bedi $\boxed{\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}}$

i) $\lambda\neq 0, +\infty \Rightarrow [\sum a_n \text{ Konb.} \Leftrightarrow \sum b_n \text{ Konb.}]$
(dib.) $\Leftrightarrow$ (dib.)

ii) $\lambda=0 \Rightarrow [\sum b_n \text{ konb} \Rightarrow \sum a_n \text{ Konb.}]$

iii) $\lambda=+\infty \Rightarrow [\sum b_n \text{ dib.} \Rightarrow \sum a_n \text{ dib.}]$

FROGA:

i) $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ g.p.s. eta $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $a_n \geq 0$ eta $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0, +\infty$ $\Rightarrow \lambda > 0$

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ non $\forall n \geq n_0 \ \left|\frac{a_n}{b_n} - \lambda\right| < \varepsilon$

Aukeratu $\varepsilon = \frac{\lambda}{2} > 0 \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0 \ \left|\frac{a_n}{b_n} - \lambda\right| < \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \ -\frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} - \lambda < \frac{\lambda}{2}$

$+\lambda$ $\frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\lambda}{2} \underset{b_n>0}{\Longrightarrow} \frac{\lambda}{2} b_n < a_n < \frac{3\lambda}{2} b_n \Longrightarrow \boxed{\frac{\lambda}{2}\sum b_n \ll \sum a_n \ll \frac{3\lambda}{2}\sum b_n}$ (denak g.p.s.)

$\boxed{\Rightarrow}$ $\sum a_n$ konb. bada

$\underset{\text{Konp. irizpidea}}{\Longrightarrow} \frac{\lambda}{2} \sum b_n$ konb. $\underset{(\text{Prop } 3.4)}{\Longrightarrow} \sum b_n$ konb.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\sum b_n$ Konb. bada $\Longrightarrow \frac{3\lambda}{2} \sum b_n$ konb $\underset{\text{Konp. irizpidea}}{\Longrightarrow} \sum a_n$ Konb.

ii) $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < \varepsilon$

Aukeratu $\varepsilon = 1 > 0 \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0 \ \left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0 \ \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \ \frac{a_n}{b_n} < 1 \underset{b_n>0}{\Longrightarrow} a_n < b_n \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum a_n \ll \sum b_n$ (g.p.s.) $\underset{\text{Konp. irizpidea}}{\Longrightarrow} \sum a_n$ Konb.
Konb (hipotesian)

iii) $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ $\frac{a_n}{b_n} > M$

$M=1$ aukeratuz $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0 \ \frac{a_n}{b_n} > 1 \underset{b_n>0}{\Longrightarrow} \forall n \geq n_0 \ a_n > b_n \Rightarrow \sum a_n \gg \sum b_n$ (g.p.s.) (dib.) $\Rightarrow$

$\underset{\text{Konparazio irizp.}}{\Longrightarrow} \sum a_n$ ~~Konb.~~ dib. ☒

Adib. Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ seriearen izaera

$a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Seriea gai positiboko da

Aukeratu, adibidez, $b_n = \frac{1}{n} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ eta $\sum \frac{1}{n}$ dib.

Limitearen irizpidea

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n}}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1 \neq 0, +\infty.$$

Limitearen irizpideko i) kasuan:

$\left[\sum a_n \text{ Konb (dib)} \Longleftrightarrow \sum b_n \text{ konb (dib)}\right]$

Ondorioz, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ dibergentea da

Teorema 3.10 (Pringsheimen irizpidea)

Izan bitez $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta $\alpha \in \mathbb{R}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha a_n \in [0,+\infty) \Rightarrow \sum a_n$ Konb.
$\alpha > 1$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha a_n \in (0,+\infty) \Rightarrow \sum a_n$ dibergentea
$\alpha \leq 1$

Teorema 3.11 (D'Alamberten irizpidea)

$\sum a_n$ g.p.s. eta $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

i) $l<1 \Rightarrow \sum a_n$ konbergentea

ii) $l>1$ (edo $l=+\infty$) $\Rightarrow$ dibergentea

Adb: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ aztertu bere izaera.

• $a_n = \frac{1}{(2n+1)!} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Seriea gai positibokoa da.

D'Alambert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1 \xRightarrow{\text{D'Alambert}} \sum \frac{1}{(2n+1)!} \text{ konbergentea}$$

Teorema 3.12 (Raaberen irizpidea)

Izan bedi $\sum a_n$ g.p.s. ~~eta~~) non $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l$

i) $l>1$ edo $l=+\infty \Rightarrow \sum a_n$ konbergentea

ii) $l<1 \Rightarrow \sum a_n$ dibergentea

Adb: $\sum \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ aztertu izaera

• $a_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum a_n$ g.p.s

D'Alambert: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2(n+1)-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)(2(n+1))}}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$ (D'Alambertek ez du informaziorik ematen kasu honetarako)

Raabe: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1-2n+2}{2n+2}\right)n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$

$\xRightarrow{\text{Raabe}}$ seriea dibergentea.

Teorema 3.13 (Cauchyren irizpidea)

Izan $\sum a_n$ g.p.s. eta demagun $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

i) $l<1 \Rightarrow \sum a_n$ konbergentea

ii) $l>1 \Rightarrow \sum a_n$ dibergentea

Adb: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$

- $a_n = \frac{n^n}{(2n+1)^n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ g.p.s.

Cauchy: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \xrightarrow{\text{Cauchyren irizpidea}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$ Konb.

3.4- GAI POSITIBO ETA NEGATIBOKO SERIEAK

Def Σa_n zenbaki errealen seriea. Σa_n seriea $\boxed{\text{absolutuki konbergentea}}$ da, $\underset{\text{g.p.s}}{\Sigma |a_n|}$ seriea konbergentea bada.

Teorema 3.16

Izan bedi Σa_n zenbaki errealen seriea

Σa_n absolutuki konbergentea $\overset{(1)}{\Longrightarrow} \Sigma a_n$ konbergentea

Gainera $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \underset{(2)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

OHARRA Orokorrean

Σa_n konb $\not\Longleftrightarrow \Sigma a_n$ absolutuki konb.

(Aurrerapoko adibide batean ikusiko dugu)

FROGA:

(1) Dakigu Σa_n absolutuki konb. dela $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \Sigma |a_n|$ konbergentea $\overset{\text{teorema 3.5}}{\Longleftrightarrow} \Sigma |a_n|$ Cauchyren baldintza du $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall m > n \geq n_0 \quad |\underbrace{S_m'}_{|a_1|+\dots+|a_n|+|a_{n+1}|+\dots+|a_m|} - \overset{|a_1|+\dots+|a_n|}{S_n'}| = ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m|| \overset{(*)}{<} \varepsilon$

Bestalde, balio absolutuen propietateengatik, $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \overset{\text{balio abs. prop}}{\leq} \overline{|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots |a_m|} =$

$= ||a_{n+1}| + \dots + |a_m|| \overset{(*)}{<} \varepsilon \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall m > n \geq n_0 \quad |S_m - S_n| = |a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \Sigma a_n$ Cauchyren baldintza du $\Longleftrightarrow \Sigma a_n$ konb. $\quad$ Σa_n batura partzialak

(2) $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{S_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ Σa_n eta $\Sigma |a_n|$ serieen batura partzialak, hurrenez hurren.

$|S_n| \overset{def}{=} |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n| \overset{def}{=} S_n'$

Ondorioz,

$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \overset{def}{=} \left|\lim_{n\to\infty} S_n\right| = \lim_{n\to\infty} |S_n| \leq \lim_{n\to\infty} S_n' \overset{def}{=} \Sigma |a_n| \Longrightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n\to\infty} |a_n|$ ∎

Def

Izan bedi Σa_n zenbaki errealen seriea. Σa_n $\boxed{\text{serie alternatua}}$ da $a_n a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gertatzen bada.

Adb: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = \underset{a_1}{(-1)} + \underset{a_2}{1} + \underset{a_3}{(-1)} + \underset{a_4}{1} + \dots$ serie alternatua da

OHARRA Serie alternatuak honela adierazi daitezke $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ alternatua

- $b_1 \geq 0 \Rightarrow \Sigma b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ non $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_1 \leq 0 \Rightarrow \Sigma b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ non $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

GALDERA: Serie alternatu batean $\sum a_n$ gertatu daiteke $\exists n \in \mathbb{N}\ a_n = 0$?

Sol: "Uste dut ezetz, 0-ak ez duelako zeinurik."

Teorema 3.17 (Leibnizen irizpidea)

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ~~serie~~ zenbaki errealen serie alternatua non $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beherakorra, $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ eta $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ seriea konbergentea da eta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \leq a_1$.

Adb: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{1}{n}}_{=a_n}$ seriearen izaera aztertu

serie alternatua

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

- Beherakorra: $a_{n+1} \leq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$

  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ ✓
- $a_n = \frac{1}{n} \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\xRightarrow{\text{Leibnizen irizpidea}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konbergentea

- Ikusi genuen $\sum a_n$ absolutuki konbergentea $\implies \sum a_n$ konbergentea

  $\not\Leftarrow$

Adb: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konb. absolutua aztertzeko

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie harmonikoa $\alpha = 1$ dibergentea $\implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ez da absolutuki konb.