# 5. Gaia: DERIBAGARRITASUNA

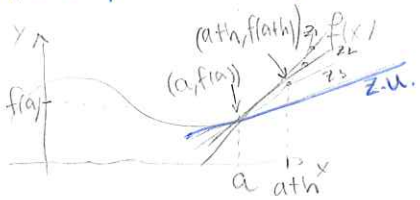
## 5.1 - DERIBATUA

**Def** $f: D \subset \overset{r>0}{(a-r, a+r)} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f$ deribagarria da $x=a$ puntuan $\exists \overset{f'(a)}{\overbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$

**OHARRAK**

1) $f'(a)$-k $f$-ren aldakuntza-tasa adierazten du $x=a$ puntuan.
2) $f'(x)$-k $x$ aldagaiaren aldaketen arabera $f(x)$-ren aldaketaren arintasuna neurtzen du.
3) $f'(a)$ $f$-ren $x=a$ puntuko zuzen ukitzailea malda da $\rightarrow$ $y = f(a) + f'(a)(x-a)$




$(z_1, z_2, z_3, \dots)$

$\leftarrow$ z.u. beste zuzenen limite berala da

$$f'(a) = \text{zuzen ukitzailearen malda} = \lim_{i\to\infty} z_i\text{-ren malda} = \lim_{h\to\infty} \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

**Adb**: $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{0}{0} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Def**

i) $f$ $\overset{r>0}{[a, a+r)}$ tartean definitua $f$ $x=a$-ren eskuinetik deribagarria da

$$\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^+)$$

ii) $f$ $\overset{r>0}{(a-r, a]}$ tartean definitua $f$ $x=a$-ren ezkerretik deribagarria da

$$\exists \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^-)$$

### Teorema 5.1

$f$ $a$ puntuan deribagarria $\Leftrightarrow$
- $a$ puntuan ezkerretik eta eskumetik deribagarria
- albo-deribatuak berdina.

### Teorema 5.2

$f$ $a$ puntuan deribagarria $\Rightarrow$ $f$ $a$ puntuan jarraitua

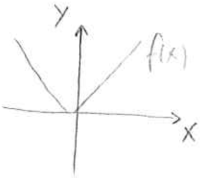
**FROGA**: Frogatu behar dugu $f$ $a$ puntuan jarraitua dela, hau da, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} (f(x)-f(a)) = 0$

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))(x-a)}{(x-a)} = \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f \text{ derib } f'(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)}_{0} = 0$$

**OHARRA**

Adib

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$




f jarraitua $x=0$ puntuan baina ez da deribagarria:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h-0}{h}=-1 \quad \times \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ albo-deribatuak ezberdinak $\Rightarrow$ f ez da derib. $x=0$ puntuan

- f $x=a$ ez bada jarraitua $\Rightarrow$ f ez da $x=a$ puntuan deribag.

**Def**

$f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

f deribagarria bada $\forall x\in D$ orduan f D multzoan deribagarria da

**Def**

f D multzoan deribagarria eta $f'$ $x=a$ puntuan deribagarria: $f''(a)=(f'(a))'$ ← f-ren a puntuko bigarren deribatua

Orokorrean, $f^{n)}(a)=\left(f^{n-1)}(a)\right)'$ ← f-ren a puntuko n-garren deribatua $\forall n\in\mathbb{N}$

**Notazioa**: $f(x)$

$f'(x)=\frac{df}{dx}$, $f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2}$, $\dots$, $f^{n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$ Leibnizen notazioa ; $f^{n)}(a)=\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)\Big|_{x=a}=\frac{d^nf}{dx^n}(a)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

## 5.2 - DERIBAGARRITASUNA ETA FUNTZIOEN ARTEKO ERAGIKETAK

**Teorema 5.3**

f, g a puntuan deribagarriak

i) $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

ii) $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$

iii) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ $(\lambda\cdot f)'(a)=\lambda\cdot f'(a)$

iv eta v) $g(a)\neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$

**FROGA**:

ii) $$(f\cdot g)'(a)\overset{def}{=}\lim_{x\to a}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(a)+f(x)\cdot g(a)-f(a)g(a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot f(x)+\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{4}\underbrace{g(a)}_{3}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to a}f(x)}_{2}=\underbrace{g'(x)}_{1}\cdot\underbrace{f(a)}_{2}+\underbrace{g(a)}_{3}\cdot\underbrace{f'(}_{4}$$

## Teorema 5.4 (Katearen erregela)

- $f$ $a$ puntuan deribagarria
- $g$ $f(a)$ " "

$\Rightarrow (g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$

Adb $f(x)=x^2+x$, $g(x)=\cos x$ | $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = -\sin(x^2+x)(2x+1)^2$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \cos(x^2+x) \rightarrow (g\circ f)'(x) = -\sin(x^2+x)(2x+1)$

**FROGA**: Izan bedi,

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}, & y \overset{⊛}{\neq} f(a) \\ g'(f(a)), & y \overset{⊛_2}{=} f(a) \end{cases}$$

- Ikusiko dugu $F$ jarraitua $y=f(a)$ puntuan $\lim_{y\to f(a)} F(y) \overset{def}{=} F(f(a))$:

$$\lim_{y\to f(a)} F(y) \overset{⊛}{=} \lim_{y\to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ deribagarria } f(a)}}{\overset{def}{=}} g'(f(a)) \overset{⊛_2}{=} F(f(a)) \Rightarrow F \text{ jarraitua } f(a) \text{ puntuan}$$

- Orduan $x\neq a$ eta $f(x)\neq f(a)$ bada, $\dfrac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \dfrac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{def}{=}$

$= F(f(x))\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} F(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{⊛}{=}$$

$$\overset{⊛}{=} \lim_{x\to a} F(f(x))\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$// \text{def}$

$$(g\circ f)'(a) = F(f(a))\cdot f'(a) \overset{⊛_2}{=} g'(f(a))\cdot f'(a) \quad \blacksquare$$

## Teorema 5.5

- $f$ injektiboa (alderantzizkoa izateko)
- $f$, $f^{-1}(b)$ puntuan deribagarria
- $f'(f^{-1}(b))=0$

$\Rightarrow f^{-1}$ ez da deribagarria $b$ puntuan.

## Teorema 5.6

- $f$ injektiboa
- $f$ deribagarria $f^{-1}(b)$ puntuan
- $f'(f^{-1}(b))\neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ deribagarria da $b$ puntuan eta $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Adb:

① $f(x)=e^x \longrightarrow f^{-1}(x)=\ln x$

(Dakigu $f'(x)=e^x$ eta $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{x}$)

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(x)}_{\ln x})} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

② $f(x)=\cos x \longrightarrow f^{-1}(x)=\arccos x$

$f'(x)=-\sin x \rightarrow (f^{-1}(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} \overset{⊛}{=} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

## Proposizioa 5.7 (Oinarrizko funtzioen deribatuak)

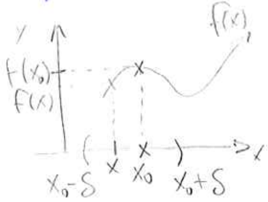
Zuek 105 orrialdean

## Funtzio deribagarriei buruzko teorema nagusiak - 5.3

**Def** $f$ $D$ eremuan definiturik eta $x_0 \in D$

i) $f$ $x_0$ puntuan maximo lokala du, $\exists \delta > 0$ non $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

ii) $f$ $x_0$ puntuan minimo lokala du, $\exists \delta > 0$ non $f(x) \geq f(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

i) 


Bi horiei $f$-ren mutur lokalak deritzo

**Def** $f$ $D$ eremuan definiturik eta $x_0 \in D$.

i) $f$ $x_0$ puntuan maximo absolutua du: $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in D$.

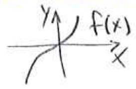
ii) $f$ $x_0$ puntuan minimo absolutua du: $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in D$

Bi horiei deritzo $f$-ren mutur absolutuak.

## Teorema 5.8

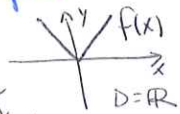
$f$ $x_0$ puntuan deribagarria
$f$-k $x_0$ puntuan mutur lokala $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$\boxed{\text{OHARRA}}$ ① $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow f$ $x_0$ puntuan mutur lokala du.

Adb: $f(x) = x^3$ $x_0 = 0$ puntuan  Ez da muturra.

$f'(x) = 3x^2$ eta $f'(0) = 0$.

② $x_0$ mutur lokala izan daiteke eta $f$ ez izan deribagarria $x_0$ puntuan.

Adb: $f(x) = |x|$
Ez da deribagarria $x_0 = 0$ puntuan, baina minimo absolutua da 

$f(x) = |x| \geq 0 = f(0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

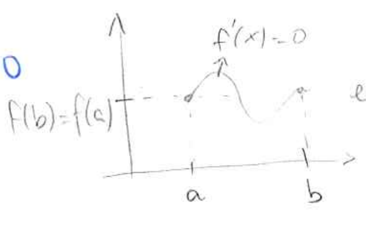
**Def** $f$ $x_0$ puntuan definiturik
$x_0$ $f$-ren puntu kritikoa da: $f'(x_0) = 0$ edo $\nexists f'(x_0)$ gertatzen bada
$f(x) = |x| \leftarrow x_0 = 0$

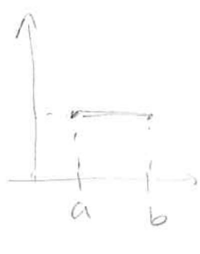
$\boxed{\text{OHARRA}}$: $x_0$ mutur lokala $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ $x_0$ puntu kritikoa

## Teorema 5.9 (Rolleren teorema)

- $f$ $[a,b]$ jarraitua
- $f$ $(a,b)$ deribagarria
- $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$ non $f'(x_0) = 0$



edo


**FROGA**:

- $f$ $[a,b]$ jarraitua $\overset{4.23 \text{ teorema}}{\Longrightarrow}$ Minimo eta maximo absolutuak ditu $[a,b]$ tartean
- Bi gauza gertatu daitezke:

(1) Maximo edo minimoa $(a,b)$ tartean daude $\overset{5.8 \text{ teorema}}{\Longrightarrow}$ $f'(x_0)=0$ **tartearen barnean** dagoen max edo min

Mutur absolutuak badira, konkretuki lokalak dira

(2) Maximoa edo minimoan $x=a$ eta $x=b$ puntuetan dago.

$f(a)=f(b)$ denez $\Longrightarrow$ $f(x)$ konstantea $[a,b]$ tartean $\Rightarrow$ $f'(x)=0$ $\forall x \in [a,b]$ ∎

## Teorema 5.10 (Cauchyren teorema)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f,g\ [a,b]\ \text{jarraituak} \\ \bullet\ f,g\ (a,b)\ \text{deribagarriak} \end{array}\right] \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) \text{ non } (f(b)-f(a))\cdot g'(x_0) = (g(b)-g(a))\cdot f'(x_0)$$

**FROGA**: Izan bedi

- $h(x) = (f(b)-f(a))\cdot g(x) - (g(b)-g(a))\cdot f(x)$

↑ h jarraitua $[a,b]$ tartean eta deribagarria $(a,b)$ tartean ($f$ eta $g$ hala direlako)

- $h(a) = (f(b)-f(a))\cdot g(a) - (g(b)-g(a))\cdot f(a) = f(b)\cdot g(a) - g(b)\cdot f(a)$
- $h(b) = (f(b)-f(a))\cdot g(b) - (g(b)-g(a))\cdot f(b) = g(a)\cdot f(b) - f(a)\cdot g(b)$

Ondorioz,

$$\left\{\begin{array}{l} h \text{ jarraitua } [a,b] \\ h \text{ deribag. } (a,b) \\ h(a)=h(b) \end{array}\right] \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in (a,b) \text{ non } h'(x_0)=0 \rightarrow \exists x_0 \in (a,b) \text{ non}$$

$$h'(x_0) = (f(b)-f(a))\cdot g'(x_0) - (g(b)-g(a))\cdot f'(x_0) = 0$$

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(x_0) = (g(b)-g(a))\cdot f'(x_0)$$ ∎

## Teorema 5.11 (Batezbesteko balioaren teorema)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f\ [a,b]\ \text{jarraitua} \\ \bullet\ f\ (a,b)\ \text{deribagarria} \end{array}\right] \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b):\ f(b)-f(a) = (b-a)\cdot f'(x_0)$$

**FROGA**: Hartuko dugu $g(x)=x$ ($\to g'(x)=1$) funtzioa $f$ eta $g$-ri Cauchyren teorema aplikatzen diogu:

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) \text{ non } (f(b)-f(a))\cdot \underbrace{g'(x_0)}_{1} = (\underbrace{g(b)}_{b} - \underbrace{g(a)}_{a})\cdot f'(x_0)$$

$$(f(b)-f(a)) = (b-a)\cdot f'(x_0)$$ ∎

(KOROLARIO = Teoriaren ondorioak)

## Korolario 5.12

$$\left.\begin{array}{l} f\ [a,b]\ \text{jarraitua} \\ f\ (a,b)\ \text{deribagarria} \end{array}\right] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{i) } f'(x)>0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \text{ gorakorra } (a,b) \text{ tartean} \\ \text{ii) } f'(x)<0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \text{ beherakorra } \quad '' \\ \text{iii) } f'(x)=0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \text{ konstantea } \quad '' \end{array}\right.$$

Korolarioa 5.13

- $f, g$ jarraituak $[a,b]$
- $f, g$ deribagarriak $(a,b)$
- $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ non $f(x) = g(x) + K \quad \forall x \in [a,b]$

Proposizioa 5.14 ¿

$f$ deribagarria $(a,b)$
$\exists M > 0$ non $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in (a,b)$
$\Rightarrow f$ uniformeki jarraitua da $(a,b)$ tartean

FROGA

Frogatu behar dugu $f$ uniformeki jarraitua $(a,b)$, hau da, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ non $\forall x, y \in (a,b) \; |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Izan bedi $\varepsilon > 0$ edozein eta edozein $x, y \in (a,b)$ non $y < x$.

- $f$ deribagarria $(a,b) \xRightarrow[5.2]{\text{teorema}} f$ jarraitua $(a,b) \xRightarrow[\text{teorema}]{\text{Balio ertaineko / Batezbesteko balioaren}} \exists x_0 \in (y, x) \in (a,b)$ non $f(x) - f(y) = f'(x_0)(x-y)$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)||x-y| \underset{\text{hipotesia}}{\leq} M \cdot \underbrace{|x-y|}_{\delta} < M \cdot \underset{\delta = \frac{\varepsilon}{M} \text{ aukeratut}}{\frac{\varepsilon}{M}} = \varepsilon$$

$|x-y| < \delta$ bada
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ☒

## 5.4 - L'HOPITALEN ERREGELA

Teorema 5.15 (L'Hopitalen erregela)

- $a \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$
- $\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ eta $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Adb.: $\lim_{x \to \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} = \frac{1 - \sin \pi/2}{\pi - \pi} = \frac{0}{0} \overset{\text{deribatua}}{=} \lim_{x \to \pi} \frac{-\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}{-1} = \frac{-1/2 \cos \pi/2}{-1} = 0$

Teorema 5.17

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$
- $\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Teorema 5.18

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$
- $\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g(x)}$

Adb: $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$

## Beste indeterminazio batzuk

(i) $\boxed{0\cdot\infty}$ $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty = \begin{cases} \lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{1/f(x)} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{\uparrow}{=} \dots \\ \text{edo} \qquad\qquad\qquad \text{L'Hopital} \\ \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{1/g(x)} = \dfrac{0}{0} \overset{\downarrow}{=} \dots \end{cases}$

(ii) $\boxed{0^0, 1^\infty, \infty^0}$

L'Hopital

$$L = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \iff \ln L = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x) \overset{\downarrow}{=} \dots$$

## 5.5 - TAYLORREN GARAPENA

$f(x) \simeq$ polinomioa (Taylor erabiltzen)

**Def** $f$ $a$ puntuan $n$ aldiz deribagarria.

$$P_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f^{1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

-ren $a$ puntuko $n$ mailako Taylorren polinomioa.

**OHARRAK:**

(1) $\boxed{a=0}$ denean, $P_{n,0}(x)$ polinomioari Mc Laurinen polinomioa esaten zaio.

(2) $P_{1,a}(x) \to f$-ren zuzen ukitzailea $x=a$ puntuan.

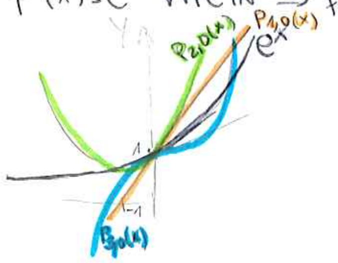
(3) $\to$ Taylorren polinomioak $f$-ren $a$ puntuko "polinomio tangenteak" izango dira.

(4) Taylorren polinomioek $f$-ren hurbilketa bat ematen dute lokalki. Honen arrazoia, $P_{n,a}(x)$ eraikitzeko $f$ eta bere deribatuen balioak erabiltzen ditugulako $a$ puntuan.

**Adb.** $f(x) = e^x \to$ Kalkulatu Taylorren $n$ mailako polinomioa $a=0$ puntuan (Mc Laurinen polinomioa)

$$P_{n,0}(x) = f(0) + \frac{f^{1)}(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f^{2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}(x-0)^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$f^{n)}(x) = e^x \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f^{n)}(0) = 1 \ \forall n\in\mathbb{N}. \quad f(0) = 1$$




## Propietateak

1) $P_{n,a}(a) = f(a) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) $P_{n,a}^{k)}(a) = f^{k)}(a) \quad \forall k = 1,\dots,n$
$\downarrow k=n$

3) $P_{n,a}^{n)}(a) = f^{n)}(a)$

Def $R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$

f ren a puntuko n mailako Taylorren hondarra $(f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x))$

## Teorema 5.19

f a puntuan zentratutako tarte batean n ordenaraino deribagarria $\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$ ⊛

OHARRA ⊛-ren esanahia:

f(x) eta $P_{n,a}(x)$-ren arteko aldea txikiagoa egiten da x a-ra gerturatzen denean $(x-a)^n$-rekin konparatuz. Horregatik esan dezakegu Taylorren polinomioak oso ondo hurbiltzen duela f(x) a-tik gertu.

⊛ Azterketa

FROGA

$$\underbrace{R_{n,a}(x)}_{\text{zatu } (x-a)^n} \stackrel{def}{=} f(x) - P_{n,a}(x) = f(x) - \left(P_{n-1,a}(x) + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)$$

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - P_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{n)}(a)}{n!} \Rightarrow \left[\lim_{x\to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow \overbrace{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - P_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n}\right) = \frac{f^{n)}(a)}{n!}}^{\text{Frogatuko dugu}}\right]$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(a) - P_{n-1,a}(a)}{0} \stackrel{①}{=} \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - P'_{n-1,a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \frac{f'(a) - P'_{n-1,a}(a)}{0} \stackrel{②}{=} \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'Hopital } (n-1) \text{ aldiz}}{=}$$

$$= \ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{n-1)}(x) - P^{n-1)}(x)}{n(n-1)(n-2)\ldots 2(x-a)} \stackrel{③}{=} \lim_{x\to a} \frac{f^{n-1)}(x) - f^{n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} \cdot f^{n)}(a)$$

$f^{n-1)}(x)$-ren deribatuaren def $x=a$ puntuan

Ondorioz, $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{n)}(a)}{n!}$ da eta $\lim_{x\to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$ ☒

## Proposizioa 5.20 ¿

$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{n-1)}(a) = 0$ eta $f^{n)}(a) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$
- i) n bikoitia eta $f^n(a) > 0 \Rightarrow$ f-k minimo lokala du x=a puntuan.
- ii) n bikoitia bada eta $f^n(a) < 0 \Rightarrow$ f-k maximo lokala du x=a puntuan.
- iii) n bakoitia $\Rightarrow$ f-k ez du ez maximo ez minimo lokalik.

## Teorema 5.21 (Taylorren teorema) ¿

f funtzioa n+1 ordenaraino deribagarria [a,x] tartean. Orduan, f funtzioaren a puntuko hondarrerako formula hauek ditugu:

i) Cauchyren formula: $\exists\, \xi \in (a,x)$ non $R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a)$ (psi)

ii) Lagrangeren formula: $\exists\, \xi \in (a,x)$ non $R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

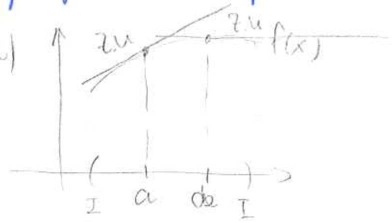
iii) Adierazpen integrala: $R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt$

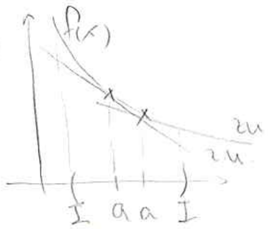
## 5.6- FUNTZIO BATEN AHURTASUNAREN ANALISIA

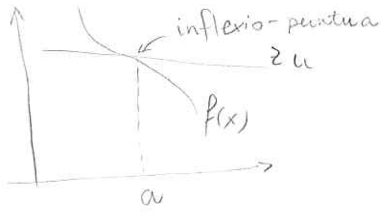
↑ concavidad

**Def.** $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa

i) $f$ $I$ tartean ganbila da, $\forall a \in I$, $f$-ren zuzen ukitzailea $x=a$ puntuan $f$-ren grafikoaren gainean geratzen da $(a-\delta, a+\delta)$ $\delta>0$ moduko tarte batean.

i) 


ii) 


iii) 


ii) $f$ $I$ tartean ahurra da, $\forall a \in I$, $f$-ren zuzen ukitzailea $a$ puntuan $f$-ren grafikoaren azpian geratzen bada $(a-\delta, a+\delta)$ erako tarte batean.

iii) $a \in I$ $f$-ren inflexio-puntua da, $f$-ren $a$ puntuko zuzen ukitzaileak grafikoaren ezkerreko zatia alde batean eta eskumako zatia beste aldean uzten badu.

**Teorema 5.22.**

$f$ funtzioa $(a-\delta, a+\delta)$ tartean definitua eta $n$ ordenaraino deribagarria $f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ eta $f^{(n)}(a) \neq 0$. Orduan:

i) $\left\{\begin{array}{l} n \text{ bikoitia} \\ f^{(n)}(a) > 0 \\ f'(a) = 0 \end{array}\right.$ $\Longrightarrow$ $f$ ahurra (cóncavo) $a$ puntuan; $\Longrightarrow$ $f$-k minimo lokala $x=a$ puntuan

ii) $n$ bikoitia, $f^{(n)}(a) < 0$ $\Longrightarrow$ $f$ ganbila (convexo) $a$ puntuan; $n$ bikoitia, $f^{(n)}(a) < 0$, $f'(a) = 0$ $\Longrightarrow$ $f$-k maximo lokala $x=a$ puntuan

iii) $n$ bakoitia $\Rightarrow$ $f$-k $a$ puntuan inflexio puntua dauka.

$\boxed{\text{OHARRA}}$:

$n=3$ kasua: $\left.\begin{array}{l} \bullet\ n \text{ bak.} \\ \bullet\ f''(a) = 0 \\ \bullet\ f'''(a) \neq 0 \end{array}\right] \overset{\text{iii)}}{\Longrightarrow}$ $x=a$ $f$-ren inflexio-puntua

Teorema 5.5

" 5.6

Prop. 5.14

" 5.20

T. 5.21 (Lagrange: [illegible])