KALKULU(a)

2. GAIA: ZENBAKI ERREALEN SEGIDAK

2.1. OINARRIZKO DEFINIZIOAK ETA ADIBIDEAK

DEF: Zenbaki errealen segida zenbaki arrunten multzotik zenbaki errealen multzora doan funtzioa da, hau da, $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$$n \longmapsto a(n) = a_n \in \mathbb{R}$$
a_n: segidaren n-garren gaia edo gai orokorra.

- zenbaki errealen segida honela adieraziko dugu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ($n=1$, $n=2$)

a_1 = segidako lehen gaia
a_2 = segidako bigarren gaia
⋮

Adb:

1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (a_n)
2) $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$
3) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$
4) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n \cdot n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, 2, -3, 4, \dots\}$
5) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$
   $= \{1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots\}$
6) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n^2+1}, & n \text{ bakoitia} \\ \frac{2^n+1}{2^n-1}, & n \text{ bikoitia} \end{cases}$

DEF: Izan bedi $d \in \mathbb{R}$. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida aritmetikoa da baldin eta $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \quad \forall n \geq 2$ bada. (d = segidaren diferentzia)

Adb.: $\{1, 2, 3, 4, \dots\} \to d = 1$; $a_n = n$

Proposizioa 2.1

Izan bitez $d \in \mathbb{R}$ eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d diferentziako segida aritmetikoa $\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(S_n: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidako lehen n gaien batura)

FROGA:
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + \overbrace{a_1+d}^{a_2} + \overbrace{a_1+2d}^{a_3} + \dots + \overbrace{(a_1+(n-1)\cdot d)}^{a_n}$$
$$+\ S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 = \overbrace{(a_1+(n-1)d)}^{a_n} + \overbrace{(a_1+(n-2)d)}^{a_{n-1}} + \dots + \overbrace{a_1+d}^{a_2} + a_1$$
$$2S_n = \underbrace{[2a_1+(n-1)d] + [2a_1+(n-1)d] + \dots + [2a_1+(n-1)d]}_{\leftarrow \text{ n batugai}}$$
$$2S_n = n[2a_1+(n-1)d] \Rightarrow S_n = \frac{1}{2}n[a_1 + \overbrace{a_1+(n-1)d}^{a_n}] = \frac{1}{2}n(a_1+a_n) \quad \blacksquare$$

Adb. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida aritmetikoa

$\boxed{S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{(1+n)}{2}n}$ (1. gaian)

DEF: Izan bedi $r \in \mathbb{R}$. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida geometrikoa da baldin eta $a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$ (r = segidaren arrazoia)

Adb. $\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots\} \to r = \frac{1}{10}$
$\{1/5, -1/5^2, +1/5^3, -1/5^4, \dots\} \to r = -1/5$

Proposizioa 2.2

Izan bitez $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$ eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ r arrazoidun segida geometrikoa $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 \dfrac{1-r^n}{1-r} = \boxed{\dfrac{a_1 - a_n r}{1-r}}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidako lehen n gaien batura

FROGA:
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + \overbrace{a_1 r}^{a_2} + \overbrace{a_1 r^2}^{a_3} + \dots + \overbrace{a_1 r^{n-2}}^{a_{n-1}} + \overbrace{a_1 r^{n-1}}^{a_n}$$
$$- \quad r \cdot S_n = \qquad a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$
$$(1-r) S_n = a_1 \quad / \quad / \quad / \quad / \quad / \quad - a_1 r^n$$
$$S_n \overset{r\neq 1}{=} \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} = \frac{a_1 - \overbrace{a_1 r^{n-1}}^{a_n} r}{1-r} = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} \quad \blacksquare$$

Definizioa

Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida (z.e.s.)

i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua da baldin eta $\exists M \in \mathbb{R}$ non $a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ behetik bornatua da baldin eta $\exists m \in \mathbb{R}$ non $a_n \geq m$ $\forall n \in \mathbb{N}$

iii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua da baldin eta goitik eta behetik bornatua bada, hau da, $\exists K \in \mathbb{R}$ non $-K \leq a_n \leq K \Leftrightarrow |a_n| \leq K$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

Def. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida gorakorra da baldin eta $\left[\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} \geq a_n\right] \Leftrightarrow \left[\forall n, m \in \mathbb{N},\ m > n \Rightarrow a_m \geq a_n\right]$

ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida beherakorra da baldin eta $\left[\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} \leq a_n\right] \Leftrightarrow \left[\forall n, m \in \mathbb{N},\ m > n \Rightarrow a_m \leq a_n\right]$

- Segi hauek monotonoak direla esaten da

Proposizioa 2.3

Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

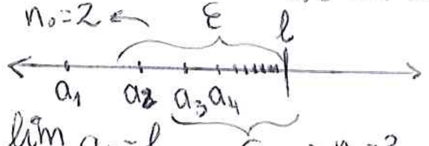
i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ gorakorra da $\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ behetik bornatua

ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ beherakorra $\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua

2.2 - ZENBAKI ERREALEN SEGIDEN LIMITEA

Def. Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. eta $l \in \mathbb{R}$. l, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren limitea da eta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ moduan adieraziko dugu, edo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidak l-rantz jotzen duela diogu eta $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ moduan adieraziko dugu baldin eta,

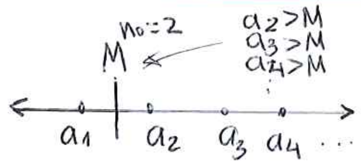
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = \underbrace{n_0(\varepsilon)}_{n_0\ \varepsilon\text{-ren menpe}} \in \mathbb{N} \text{ non } \forall n \geq n_0 \ \underbrace{|a_n - l|}_{d(a_n, l)} < \varepsilon.$$



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

Def. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists \overbrace{n_0 = n_0(M)}^{n_0\ M\text{-ren menpe}} \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ $a_n > M$



ii) $\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 = n_0(M)$ non $\forall n \geq n_0$ $a_n < M$

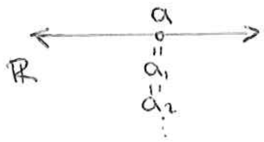
Def. Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

Baldin eta $\exists\, l \in \mathbb{R}$ non $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, orduan $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea da. Bestela $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dibergentea da.

- i) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $+\infty$-rantz dibergentea da
- ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $-\infty$-rantz " "
- iii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez badu limite errealerik eta infiniturik $\Rightarrow$ Segida oszilatzailea

Adb:

① $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non $a_n = a \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$



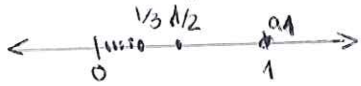
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ikus daiteke

FROGA: Frogatu behar da:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ $|\overset{a}{a_n} - \overset{a}{l}| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ $0 < \varepsilon$ (Nabarna)

② $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$



Ikusi daiteke $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dela.

FROGA: Frogatu nahi dugu:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ $|\overset{1/n}{a_n} - \overset{0}{l}| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

Izan bedi $\varepsilon > 0$ $\xrightarrow[\text{prop.}]{\text{Arquimedes}}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Orduan $n \geq n_0$ bada $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ baina $\frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

③ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$

FROGA: $\underbrace{\forall M \in \mathbb{R}}$, $\underbrace{\exists n_0 = n_0(M)}$, non $\forall n \geq n_0$ $\overset{n}{a_n} > M$

↳ Izan bedi $M \in \mathbb{R}$, $n_0 > M$, aukeratu

Orduan $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq n_0 > M \Rightarrow \underset{a_n}{n} > M \Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 = n_0(M)$ non $\forall n \geq n_0$ $a_n > M \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

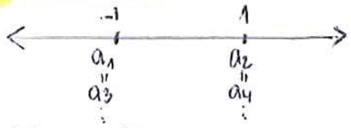
④ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1-n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim_{n\to\infty} 1 - n = -\infty$

FROGA

GV

⑤ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} 1, & n \text{ bikoitia} \\ -1, & n \text{ bakoitia} \end{cases}$



$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oszilatzailea

FROGA: Absurdura eramanez suposatuko dugu $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = l$.

a) Suposatuko dugu $\boxed{l=1}$ dela $\rightarrow$ Aukeratzen badugu $\rightarrow \varepsilon = 1$, orduan $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists n$ bikoitia non $n \geq n_0$ eta $|a_n - 1| = |1+1| = 2 \nless \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} a_n = l$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ non $\forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$

$\rightarrow$ (Kontrakoa)

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}$ non

$\exists n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$

b) $\boxed{l=-1}$ — 3 kasutan frogatu

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ non $\forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}$ non $\exists n \geq n_0\ |a_n - l| > \varepsilon$ ← kontrakoa

Aukeratuko dugu $\varepsilon = 1$. $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ beti $\exists$ du n bikoiti bat non $n \geq n_0$

$|a_n - l| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq -1$

c) $\boxed{l \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$

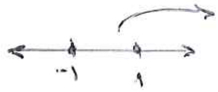
$\varepsilon = \dfrac{\min\{|l-1|, |l+1|\}}{2} > 0$

Minimoaren definizioagatik $\varepsilon \leq \dfrac{|l-1|}{2}$ eta $\dfrac{|l+1|}{2} < |l-1|$ eta $|l+1|$.

hartuz, $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |a_n - l| = \begin{cases} |1-l|, & n \text{ bikoitia} \\ |-1-l|, & n \text{ bakoitia} \end{cases} = \begin{cases} |l-1|, & n \text{ bikoitia} > \varepsilon \\ |l+1|, & n \text{ bakoitia} > \varepsilon \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow |a_n - l| > \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq l \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Ikusi dugu $\nexists\, l \in \mathbb{R}$ non $\lim_{n\to\infty} a_n = l$



Ikusten da $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \pm\infty$

$\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dibergentea oszilatzailea

[Antzera egin (2.2) ariketa zerrendako 1 iii)]

Teorema 2.4 (Limitearen bakartasuna)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. konbergentea $\Rightarrow$ limitea bakarra da, hau da, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ eta $\lim_{n\to\infty} a_n = m \Rightarrow l = m$.

FROGA: ABSURDURA ERAMANEZ: suposatuko dugu $l \neq m$.

(askotan erabiltzen da)

$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = l \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 = n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ non } \forall n \geq n_1 \quad |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \ (1) \\ \lim_{n\to\infty} a_n = m \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 = n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ non } \forall n \geq n_2 \quad |a_n - m| < \frac{\varepsilon}{2} \ (2) \end{cases}$

Aukeratuko dugu $\varepsilon = \dfrac{|l-m|}{2} > 0$ ($l \neq m$) eta $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow n_0 \geq n_1$ eta n_2

$|l-m| = |l - \underbrace{a_n + a_n}_{0} - m| = |(l - a_n) + (a_n - m)| \leq |l - a_n| + |a_n - m| = |a_n - l| + |a_n - m|$

$\underbrace{\quad}_{n_1}\ \underbrace{\quad}_{n_2} > n \to \infty$ (1) (2)

$n \geq n_0$ bada $\Rightarrow n \geq n_1$ eta n_2.

Ondorioz,

$0 \overset{l \neq m}{<} |l-m| < \varepsilon \overset{\text{aukeratu duguna}}{=} \frac{|l-m|}{2} \Rightarrow |l-m| < \frac{|l-m|}{2}$ Kontraesana.

Ondorioz, $l=m$ ■

Proposizioa 2.5

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. konbergentea $\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua

FROGA: Frogatu nahi dugu $|a_n| \leq K^{\in\mathbb{R}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Konb. $\overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0\ |a_n - l| < \varepsilon$.

Har dezagun $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0\ |a_n - l| \leq 1$.

Orduan $|a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l| \Rightarrow$ Lortu dugu $|a_n| < 1 + |l|\ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \begin{cases} |a_{n_0}| < 1+|l| \\ |a_{n_0+1}| < 1+|l| \\ |a_{n_0+2}| < 1+|l| \\ \vdots \end{cases}$

Izan bedi $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1+|l|\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} |a_1| \leq K \\ |a_2| \leq K \\ \ldots \\ |a_{n_0-1}| \leq K \\ |a_{n_0}| < 1+|l| \leq K \\ |a_{n_0+1}| < 1+|l| \leq K \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow |a_n| \leq K\ \forall n \in \mathbb{N}$ ■

$\Updownarrow$

$-K \leq a_n \leq K$

OHARRA

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua $\not\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea

Adib. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez da konbergentea

$|a_n| = |(-1)^n| \leq 1 = K$
$\forall n \in \mathbb{N}$

Teorema 2.6.

Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s gorakorra eta goitik bornatua $\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beherakorra eta behetik bornatua $\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea eta
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

FROGA: (i) Izan bedi $\alpha = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$. Supremoaren karakterizazioagatik $\forall \varepsilon > 0$ emanda, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$ den. Gainera, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gorakorra denez, $n \geq n_0$ guztietarako $a_n \geq a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$ da.
Bestaldetik, α segidaren goi-borne bat denez, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$.
Beraz, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$

(ii) 27. orrian

2.3 INFINITESIMOAK

$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$

Proposizioa 2.7.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

Adib. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2)}{n} = \lim_{n\to\infty} \sin(n^2)\cdot\frac{1}{n} \overset{\text{prop 2.7.}}{=} 0$

$a_n = \sin(n^2)$ bornatua $|\sin(n^2)| \leq 1 = K$

$b_n = \frac{1}{n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Def. (INFINITESIMOA)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. infinitesimoa da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proposizioa 2.8.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. infinitesimoak $\Rightarrow \{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{a_n\cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ere infinitesimoak dira.

Proposizioa 2.9

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

$|a_n| \leq |b_n| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Orduan, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa $\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa.

Adib: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2}{n}$

$a_n = \frac{\sin n^2}{n}$

$|a_n| = \left|\frac{\sin n^2}{n}\right| = \frac{|\sin n^2|}{\underset{|n|=n}{n}} \leq \overset{b_n}{\frac{1}{n}} = \left|\frac{1}{n}\right|$

$\left|\frac{\sin n^2}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$|a_n| \leq |b_n|$ eta $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa $\overset{\text{prop. 2.9}}{\Rightarrow} a_n = \frac{\sin n^2}{n}$ infinit. $\overset{\text{def}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2}{n} = 0$

Proposizioa 2.10

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. eta $l\in\mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \{a_n - l\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa $\left(\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n - l = 0\right)$

2.4 - LIMITEAK ETA ERAGIKETA ALJEBRAIKOAK

Teorema 2.11

Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. eta $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

i) $\{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da eta $\lim_{n\to\infty} a_n+b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a+b$.

ii) $\{a_n\cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da eta $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$.

iii) $\forall c\in\mathbb{R}$, $\{c\cdot a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da eta $\lim_{n\to\infty} c\,a_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$.

iv) Baldin eta $b\neq 0 \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ $b_n \neq 0$ eta beraz, $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da eta $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$

v) $b \neq 0$ bada $\Rightarrow \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da eta $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

vi) $a>0 \Rightarrow \{a_n^{b_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da eta $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = a^b$.

FROGA:

i) ((2.1) ariketa zerrendako 3a) ariketa)

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{prop.\,2.10}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n - a = 0 \overset{def}{\Rightarrow} \{a_n - a\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa.
- $\lim_{n\to\infty} b_n = b \overset{prop.\,2.10}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} b_n - b = 0 \overset{def}{\Rightarrow} \{b_n - b\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa.

$\overset{prop.\,2.8}{\Longrightarrow} \{a_n - a + b_n - b\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa $\Rightarrow$

$\overset{def}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n - a + b_n - b = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) - (a+b) = 0 \overset{prop.\,2.10}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a+b \Rightarrow \{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konberg. ∎

ii) Frogatu nahi dugu

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = a\cdot b \overset{prop.\,2.10}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n b_n - ab = 0.$

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n - ab = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = \lim_{n\to\infty} a_n(b_n - b) + b(a_n - a) \overset{i)}{=} \overbrace{\lim_{n\to\infty} a_n(b_n-b)}^{(1)} + \overbrace{\lim_{n\to\infty} b(a_n-a)}^{(2)}$

$\Downarrow$ ⊛

(1) • $\lim_{n\to\infty} b_n = b \overset{prop.\,2.10}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} b_n - b = 0$
• $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konb. $\overset{prop.\,2.5}{\Longrightarrow} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua

$\overset{prop.\,2.7}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n(b_n - b) = 0.$

(2) • $\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{prop.\,2.10}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n - a = 0$
• b konstantea $\Rightarrow b$ bornatua

$\overset{prop.\,2.7}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} b\cdot(a_n - a) = 0.$

$\overset{⊛}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n b_n - ab = 0$ ∎

$\boxed{\text{OHARRAK}}$ (e-gelako 30. orriko oharrak)

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$

... gu beitu

$\boxed{\text{OHARRA}}$ Limiteren bat kalkulatzean emaitza hauek ematen badituzte, indeterminazioak direla esaten da. $0\cdot(\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(+\infty)-(+\infty)$, 1^{∞}, 0^0, $(\pm\infty)^0$.

Pentsatu: $0^{+\infty}$, $0^{-\infty}$, ∞^{∞}, $\infty^{-\infty}$ indeterminazioak dira?

Teorema 2.14 (SANDWICHEN ERREGELA)

Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. eta $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$

$a_n \leq b_n \leq c_n$ eta $\lim_{n\to\infty} a_n = l = \lim_{n\to\infty} c_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = l$.

FROGA: frogatu behar dugu:

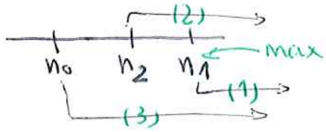
$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_3 = n_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ non } \forall n \geq n_0 \ |b_n - l| < \varepsilon}$

(Jarraitzen)

Izan bedi $\varepsilon > 0$ edozein

- $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_1 \quad |a_n - l| \overset{(1)}{<} \varepsilon$
- $\lim_{n\to\infty} c_n = l \Rightarrow \exists n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_2 \quad |c_n - l| \overset{(2)}{<} \varepsilon$

$n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$
$\hookrightarrow n_3 \geq n_0$ eta n_1 eta n_2.



(1) $\Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow \underbrace{-\varepsilon + l < a_n} < l + \varepsilon$
(2) $\Leftrightarrow -\varepsilon < c_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < \underbrace{c_n < \varepsilon + l}$
(3) $\Leftrightarrow \underbrace{a_n \leq b_n \leq c_n}$

Ondorioz, $\forall n \geq n_3$

$-\varepsilon + l < a_n \leq \underbrace{b_n} \leq c_n < \varepsilon + l$
$\Downarrow$
$-\varepsilon + l < b_n < \varepsilon + l$
$-\varepsilon < b_n - l < \varepsilon$
$|b_n - l| < \varepsilon \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = l$ ∎

Anketak: 2.1 → 1 eta 2 ziur (3 ¿)
2.2 → 1

Adib.

$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \longrightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

handiena ($\frac{n}{n^2+1}$), txikiena ($\frac{n}{n^2+n}$)

$\left(a_1 = \frac{1}{1^2+1};\ a_2 = \frac{2}{2^2+1} + \frac{2}{2^2+2};\ a_3 = \frac{3}{3^2+1} + \frac{3}{3^2+2} + \frac{3}{3^2+3};\ \dots\right)$

Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} a_n$.

$$n\cdot\frac{n}{n^2+n} \leq a_n = \underbrace{\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}} \leq n\cdot\frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+2}$, ..., $\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n}$

$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n}, \quad \frac{n}{n^2+2} \geq \frac{n}{n^2+n}, \quad \dots, \quad \frac{n}{n^2+n} \geq \frac{n}{n^2+n}$

batugai kopurua

$\xrightarrow{n\to\infty} 1$ (ikusiko dugu)

sandwich
$\downarrow n\to\infty$
1

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Proposizioa 2.15

Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. bi:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ eta $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ ~~non~~ $a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ eta $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

2.6 - SEGIDA GARRANTZITSU BATZUEN LIMITEAK

Proposizioa 2.16 Izan bedi $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ 1, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \\ \nexists, & a \leq -1 \end{cases}$$

OHARRA

$\lim_{n\to\infty} 1^n \neq 1^\infty$ indeterminazioa (finkoa)
$\hookrightarrow \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \to \infty} = 1^\infty$

$\frac{1}{n} \to 0$; $1 + \frac{1}{n} \to 1$

Proposizio 2.17

Izan bedi $a>0$, $a\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1;\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P_k(n)}=1$$

k mailako n aldagaiko polinomioa

Adb. $\sqrt[n]{n^3-3n}\xrightarrow{n\to\infty}1$

Teorema 2.18

$$(\ln n)^b \ll n^c \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$\forall a>1,\ b>0,\ c>0$
$a,b,c\in\mathbb{R}$

Adb. ① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+8n^5}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{8n^5}{n^n}=0+0=0$ $\quad \boxed{8n^5\ll 4^n\ll n^n}$

($4^n \to a^n$, n^n; $8n^5\to n^c$, n^n)

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n(n^3-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3/2)^n}{n^3-1}=+\infty$ $\quad \boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^n\gg n^3-1}$

($(3/2)^n \to a^n$; $n^3-1\to n^c$)

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{3n}}{(3n)!}=\lim_{m\to\infty}\frac{e^m}{m!}=0$ $\quad \boxed{e^m\ll m!}$

$3n=m$; $n\to\infty$, $m\to\infty$

④ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n^5+6n^2-1)}{7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+6n^2-1}{(7/2)^n}=0$ $\quad \boxed{\left(\frac{7}{2}\right)^n\gg n^5+6n^2-1}$

Proposizio 2.19 (Stirlingen formula)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}=1$$

Limiteren batean $n!$ itxurako adierazpen bat biderkatzen ala zatitzen badago $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ adierazpenagatik ordezkatu ahal dugu. (Infinitesimo baliokideak dira $n!$ eta $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.)

Adb. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi\, 2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}e^{-2n}\cdot 2\pi n}{2^{2n}\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot 2\sqrt{\pi n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{4^n\sqrt{\pi n}}=$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{4^n\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n\sqrt{\pi n}}{4^n\cdot\pi n}=0$ $\quad \boxed{4^n\gg\sqrt{\pi}\cdot n^{1/2}}$

2.7 - SEGIDEN LIMITEAK KALKULATZEKO METODOAK

Proposizio 2.20

Demagun $P(n)=a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n+a_0$ non $a_k\neq 0$ eta
$Q(n)=b_\ell n^\ell+b_{\ell-1}n^{\ell-1}+\ldots+b_1 n+b_0$ non $b_\ell\neq 0$. $\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases}\dfrac{a_k}{b_\ell}, & k=\ell\\ +\infty, & k>\ell \text{ eta } \dfrac{a_k}{b_\ell}>0\\ -\infty, & k>\ell \text{ eta } a_k/b_\ell<0\\ 0, & k<\ell\end{cases}$$

Adb. ① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-2}{2n^2-1}=\frac{4}{2}=2$

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n-2}{2n^2-1}=+\infty$ $\quad \frac{4}{2}>0$

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n^2+n}=0$

Proposizio 2.22

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ eta orokorrean $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ denean, orduan $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ ... a_n

Korolario 2.23

Izan bitez $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$, orduan $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n^{b_n}=1^\infty=e^{\lim_{n\to\infty}b}$ ...
(indet.)

FROGA (2.22-2.23)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ denez, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n-1}=\infty$
eta ondorioz,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n^{b_n}=\lim_{n\to\infty}(1+a_n-1)^{b_n}=$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}(a_n-1)b_n}=e^A$ ■

Adib.:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-3}\right)^{n+2} = \underset{(\text{indet})}{1^{\infty}} = e^{\lim_{n\to\infty}(n+2)\left(\frac{n-1}{n-3}-1\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}(n+2)\left(\frac{n-1-(n-3)}{n-3}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 2}{n-3}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{1n-3}} = e^2$$

Proposizioa 2.24

Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. eta demagun $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ kalkulatu nahi dugula. Baldin eta $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ existitzen badu $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

Adb.:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\underbrace{\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}}_{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot(2n-1)\cdot(2(n+1)-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot(2n)\cdot 2(n+1)}}{\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2}{2} = 1$$

prop. 2.24

$(2(n+1)-1) = (2n+1)$, $2(n+1) = (2n+2)$

(*) Aurreko gaia jarri hobeto ikusteko nola sinplifikatu

Proposizioa 2.25 (Stolzen erregela)

Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bi z.e.s. non $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gorakorra den eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Adb.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\ldots+\sqrt[3]{n}}^{a_n}}{\underbrace{n\sqrt{n}}_{b_n}} =$$

Stolzen erregela

① $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gorakorra?

$b_{n+1} \geq b_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$(n+1)\sqrt{n+1} \geq n\sqrt{n}$ betetzen da.

② $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} n^{3/2} = +\infty$

③

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\ldots+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}]-[\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\ldots+\sqrt[3]{n}]}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} =$$

biderkatu konjokatuagatik!

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}\,[(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}]}{(n+1)^3-n^3} =$$

maila: $\frac{1}{3}+\frac{3}{2} = \frac{11}{6}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}\,[(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}]}{\cancel{n^3}+3n^2+3n+1-\cancel{n^3}} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

maila: $\frac{11}{6} < 2$

2.8.- AZPISEGIDAK

Def. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, f gorakorra da $\forall m,n\in\mathbb{N}$ non $m>n \Rightarrow f(m)>f(n)$

Proposizioa

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ gorakorra bada $\Rightarrow f(n)\geq n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Def.: eragiketa

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. eta $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ gorakorra.

$\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_{f(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ moduko z.e.s. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren **azpisegida** dela esaten da.

- $b_k = a_{f(k)} \to b_k$, $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ segidaren k-garren gaia.
  - $\to b_k$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren $f(k)$-garren gaia da.

Adib.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren azpisegida bat $\to \{1\}_{k\in\mathbb{N}}$

① $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\underset{a_1}{-1}, \underset{a_2}{1}, \underset{a_3}{-1}, \underset{a_4}{1}, \dots\}$

- $f(k) = 2k \geq k$ (gorakorra) $\Rightarrow \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \overset{def.}{=} \{a_{f(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_2, a_4, a_6 \dots\} = \{1, 1, 1, \dots\}$
  $\forall k\in\mathbb{N}$

- $f(k) = 2k+1 \geq k$ (gorakorra) $\Rightarrow \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \overset{def.}{=} \{a_{f(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}} =$
  $\forall k\in\mathbb{N}$
  $= \{a_3, a_5, a_7 \dots\} = \{-1, -1, -1, \dots\} = \{-1\}_{k\in\mathbb{N}}$ ← $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren beste azpisegida bat.

② $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\underset{a_1}{1}, \underset{a_2}{\frac{1}{2}}, \underset{a_3}{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots\}$

- $f(k) = 2^k \geq k$ (gorakorra) $\Rightarrow \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \overset{def.}{=} \{a_{f(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_{2^k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_2, a_4, a_8 \dots\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \dots\}$
  $\forall k\in\mathbb{N}$
  $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$-ren azpisegida $\to \{\frac{1}{2^k}\}_{k\in\mathbb{N}}$

Teorema 2.26.

Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. eta $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ bere azpisegida bat ($n_k = f(k)$). Orduan:

i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea eta $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ $] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \ell$.

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$.

Teorema 2.29 (Bolzano-Weierstrassen teorema)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s. bornatua $\Rightarrow \exists \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ azpisegida konbergentea

2.9 - CAUCHYREN SEGIDAK

Def $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

Cauchyren segida da baldin eta $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ non $\forall m,n \geq n_0$ $\underset{d(a_m,a_n)}{|a_m - a_n|} < \varepsilon$

Nahi dugun ε hartuta, n_0-ren batetik aurrera segidako elementu denak elkarrengandik ε distantzia baino gutxiagora daude.

Teorema 2.30

"Su artifizial bezala"

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z.e.s.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea $\Leftrightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyren segida da.

FROGA:

$\boxed{\Rightarrow}$ Suposatu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea dela eta frogatu behar dugu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyrena dela, hau da, $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ non $\forall m,n\geq n_0$ $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Izan bedi $\varepsilon > 0$ edozein

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea denez, definizioagatik $\to \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists n_1 = n_1(\frac{\varepsilon}{2}) \in\mathbb{N}$ non $\forall n\geq n_1$ $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

(Jarraitzen)

Izan bitez $n,m \geq n_1 \Rightarrow |a_m - a_n| = |a_m - \ell + \ell - a_n| \leq |a_m - \ell| + |\ell - a_n| = |a_m - \ell| + |a_n - \ell| <$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall m,n \geq n_0\ |a_m - a_n| < \varepsilon \overset{def}{\Longleftrightarrow} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyren segida da

$\boxed{\Leftarrow}$ Suposatuko dugu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyrena da.
$(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall m,n \geq n_0\ |a_m - a_n| < \varepsilon)$ ⊛
Frogatu behar dugu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea dela, hau da, $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}$ non $\forall n \geq n_1\ |a_n - \ell| < \varepsilon$.

Lehenik eta behin, frogatuko dugu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua dagoela $\overset{def}{\Leftrightarrow} |a_n| \leq K\ \forall n \in \mathbb{N}$
Hartuko dugu $\varepsilon = 1 \overset{⊛}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall \overset{n_0+1}{m}, n \geq n_0\ |a_n - a_m| < 1 \Rightarrow |a_n - a_{n_0+1}| < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0\ |a_n| = |a_n - a_{n_0+1} + a_{n_0+1}| \leq |a_n - a_{n_0+1}| + |a_{n_0+1}| < 1 + |a_{n_0+1}| \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0\ |a_n| < 1 + |a_{n_0+1}|$

Aukeratuko dugu $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0+1}|\}$ $\left\{\begin{array}{l} |a_1| \leq K \\ \vdots \\ |a_{n_0-1}| \leq K \\ |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0+1}| \leq K \\ |a_{n_0+1}| < 1 + |a_{n_0+1}| \leq K \end{array}\right. \Rightarrow$
$\Rightarrow |a_n| \leq K\ \ \forall n \in \mathbb{N} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua $\Rightarrow$

$\xrightarrow[\text{teorema}]{\text{Bolzano-Weienstrassen}} \exists \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$-ren azpisegida konbergentea.

Izan bedi $\varepsilon > 0$.
$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konbergentea denez, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists n_1 \in \mathbb{N}$ non $\forall k \geq n_1\ |a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1) aukeratu
Bestalde, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyrena denez, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ non $\forall m,n \geq n_2\ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)
Aukeratuko dugu $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$
$\forall k \geq n_0 \Rightarrow k \geq n_0 \geq \left\{\begin{array}{l} n_1 \\ \text{eta} \\ n_2 \end{array}\right. \Rightarrow |a_k - \ell| = |a_k - a_{n_k} + a_{n_k} - \ell| \leq \underset{(2)\ \varepsilon/2}{|a_k - a_{n_k}|} + \underset{(1)\ \varepsilon/2}{|a_{n_k} - \ell|} < \varepsilon$
Ondorioz, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall k \geq n_0$
$|a_k - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea da ■.

Nondik ateratzen da $|a_k - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$