KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

Ariketak (1.1), 31 taldea

1. Ebatzi inekuazio hauek:

(a) $x^2 - 2x + 2 > 0$;

(b) $x^2 - 2x - 2 > 0$;

(c) $x^2 - 4x + 4 > 0$;

(d) $x^2 + x + 2 > 1$;

(e) $x(2x-1)(3x-5) \leq 0$;

(f) $\dfrac{1}{x} < x$;

(g) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$;

(h) $\dfrac{3x^2+1}{1-x^2} < 0$;

(i) $\dfrac{x}{x+2} > \dfrac{x+5}{3x+1}$;

(j) $x^3 - 3x > 2$.

Egin $y = x^2 - 2x + 2$, $y = x^2 - 2x - 2$ eta $y = x^2 + x + 2$ funtzioen grafikoak (ez da deribaturik behar).

2. Ebatzi ekuazio eta inekuazio hauek:

(a) $|x+1||x-1| = 0$;

(b) $|x-1||x-2| = 3$;

(c) $|x+2| \leq| x-5|$;

(d) $|x-1| + |x-2| > 1$;

(e) $|x^2+3| \leq 10$;

(g) $|x^2-4| \geq 1$;

(h) $|x^2-2x| \geq |x^2-1|$;

(i) $x + |x-2| = 1 + |x|$;

(j) $|2x| + |x-2| > 3$;

(k) $|x(1-x)| < \dfrac{1}{2}$.

Egin $y = |x-1| + |x-2|$ eta $y = |2x| + |x-2|$ funtzioen grafikoak.

3. Ebatzi inekuazio hauek:

(a) $\left|\dfrac{7x+2}{4x-3}\right| \leq 2$;

(b) $\left|\dfrac{x^2-1}{x+5}\right| \leq 1$;

(c) $\left|\dfrac{x-3}{x^2-4}\right| < \dfrac{1}{2}$;

(g) $\left|\dfrac{x^2+x+3}{x^2-4}\right| \leq 1$;

(h) $\left|\dfrac{x^2+x-2}{x-5}\right| > 1$;

(i) $\left|\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}\right| > 2$.

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

Ariketak (1.2), 31 taldea

$\mathbf{Q}$=zenbaki arrazionalak, $\mathbf{R}$=zenbaki errealak, $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$= zenbaki irrazionalak.

1. Hurrengo baieztapenetatik esan zeintzuk diren egiazkoak eta zeintzuk ez.
(1) $a, b \in \mathbf{Q}$ bada, $a+b, ab \in \mathbf{Q}$ da;
(2) $a, b \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ bada, $a+b, ab \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ da;
(3) $a \in \mathbf{Q}$ eta $b \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ badira, $a+b, ab \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ da;
(4) $a^2 \in \mathbf{Q}$ bada, $a \in \mathbf{Q}$ da;
(5) $a^2 \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ bada, $a \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ da.

2. (i) Demagun $A \subset B$ dela, eta biak bornatuak. Zelan daude ordenatuta $\sup A, \inf A, \sup B$ eta $\inf B$?
(ii) Izan liteke $A \subset B$ eta $A \neq B$, baina $\sup A = \sup B$?
(iii) Izan liteke $A \cap B = \emptyset$ eta $\sup A = \sup B$?
(iv) Izan liteke $\sup A = \inf A$?

3. $\mathbf{R}$-ren azpimultzo hauek ematen dira:

$$\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\},\ [\frac{13}{7}, \frac{5\pi}{7}] \cap \mathbf{Q},\ (-\infty, \frac{65}{7}] \setminus \mathbf{Q},$$

$$(-1, 8] \cup \{\pi^2\},\ \{x \in \mathbf{R} : \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} \leq 0\}\ (a < b < c < d).$$

Aztertu ea bornatuak diren (goitik edo behetik) eta eman maximoa, minimoa, supremoa eta infimoa, baldin badaude. (Behar izanez gero, jakin ezazue π^2 irrazionala dela.)

4. Kalkulatu eragiketa hauen emaitzak:

(a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i)$;

(b) $(2 - 3i)(-2 + i)$;

(c) $(3 + i)(3 - i)(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i)$;

(d) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$;

(e) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$;

(f) $(1 - i)^4$.

5. Kalkulatu $(2 - i)z^2 - (3 + i)z + 1 = 0$ ekuazioaren soluzioak.

6. Izan bedi $|z| = r \neq 0$ eta $\arg z = \theta$. Eman $\overline{z}$, $1/z$ eta $1/z^2$ zenbakien moduluak eta argumentuak.

7. Kalkulatu $(-1 + i)^7$ eta $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$, zenbakien forma polarra erabiliz.

8. Kalkulatu $\sqrt{1 - \sqrt{3}i}$, $\sqrt[4]{-16}$ eta $\sqrt[6]{8}$.

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

2. Gaia: ZENBAKI-SEGIDAK

Ariketak

1. Frogatu baieztapen hauek:

   (i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ da baldin eta soilik baldin $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ bada.

   (ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ da baldin eta soilik baldin $\lim_{n\to\infty} |a_n - l| = 0$ bada.

   (iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bada eta $c \in \mathbb{R}$, orduan $\lim_{n\to\infty} ca_n = 0$ da.

   (iv) $\lim_{n\to\infty} a_n = l \neq 0$ bada, orduan existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ denean, $|a_n| \geq |l|/2$ den (eta, ondorioz, $\{1/a_n\}$ bornatua da).

   (v) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ badira, orduan $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$ da.

2. Frogatu baieztapen hauek:

   (i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ badira, orduan $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ da.

   (ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ badira, orduan $\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = ab$ da.

   (iii) $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ bada, orduan $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$ da.

3. Frogatu baieztapen hauek:

   (i) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ baldin eta soilik baldin $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ bada.

   (ii) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ eta $\{b_n\}$ segida bornatua bada, orduan $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$ da.

   (iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bada eta existitzen bada $n_1 \in \mathbb{N}$ non $|b_n| \geq m > 0$ den $n \geq n_1$ guztietarako, orduan $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{b_n}{a_n}\right| = +\infty$ da.

4. Erantzun galdera hauek:

   (i) Izan bedi $\lim_{n\to\infty} a_n = l \neq 0$. Zenbat da $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$?

   (ii) Izan bedi $a_n = 2^{-n}$. Zenbat dira $\lim_{n\to\infty} a_n$ eta $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$?

   (iii) Izan bedi $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$. Zenbat da $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$?

5. Froga ezazu $\{x_n\}$ segida konbergenta dela,

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + ... + \frac{1}{5^n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

   izanik.

6. Kalkula itzazu hurrengo limiteak

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^e + n^\pi + 1}{n^3 + 2n^\pi + 2}$ *Em.:* $1/2$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$ *Em.:* 0

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ *Em.:* 1

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$ *Em.:* 1

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{(-1)^n}$ *Em.:* $\nexists$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$ *Em.:* $1/2$

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+3+5+\ldots(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right)$ *Em.:* $-3/2$

(viii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+7}{5^n-4}$ *Em.:* 0

(ix) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $a, b > 0$ izanik. *Em.:* $\max\{a,b\}$

(x) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2-n}\right)$ *Em.:* $5/2$

(xi) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$ *Em.:* $1/2$

(xii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3-2n^2}\right)$ *Em.:* $2/3$

(xiii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}} - \sqrt{2n^2}\right)$ *Em.:* 0

(xiv) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$ *Em.:* e^7

(xv) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)^n$ *Em.:* $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(xvi) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\sqrt{\dfrac{n+a}{n-a}}$, $a \in \mathbb{R}$ izanik *Em.:* a

(xvii) $\lim\limits_{n\to\infty} (4n+3)^k \left(\ln\dfrac{n+1}{n-2}\right)^k$, $k \in \mathbb{N}$ izanik *Em.:* 12^k

(xviii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \ln(n+3) - \ln n\right)^{n+1}$ *Em.:* e^3

(xix) $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n)^{1/\ln(3/n)}$ *Em.:* e

(xx) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$ *Em.:* $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(xxi) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$ *Em.:* 1

(xxii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\,(n!)}{n}$ *Em.:* ∞

(xxiii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$ *Em.:* 4

7. Froga ezazu
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$$
dela.

8. Kalkula ezazu hurrengo limitea:
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2-2}+\frac{1}{n^2-3}+\cdots+\frac{1}{n^2-(n+1)}\right).$$
Em.: 1.

9. Izan bitez $a \in \mathbb{R}$ eta $a_n = \dfrac{[10^n a]}{10^n} \in \mathbb{Q}$, $[\cdot]$ parte osoa izanik. Frogatu $0 \leq a - a_n \leq 10^{-n}$ dela eta, ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Hau da, edozein zenbaki errealetarako, zenbaki arrazionalen segida bat aurki daiteke, zenbaki hartarantz konbergentea.

10. Izan bedi $\{a_n\}$ segida, eta demagun $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n+1}\}$ eta $\{a_{3n}\}$ azpisegidak konbergenteak direla. Frogatu hiruen limitea bera dela eta $\{a_n\}$ ere konbergentea dela.

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

3. Gaia: ZENBAKI-SERIEAK

Ariketak

1. (a) $\sum a_n^2$ eta $\sum b_n^2$ serie konbergenteak badira, froga ezazu orduan $\sum |a_n b_n|$ eta $\sum (a_n + b_n)^2$ serieak ere konbergenteak direla.

   (b) Baldin eta $\sum a_n$ gai positiboko serie konbergentea bada eta $\alpha > \dfrac{1}{2}$ bada, froga ezazu $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ seriea konbergentea dela.

2. $\sum a_n$ gai positiboko serie dibergentea bada, froga ezazu:

   (i) $\sum \dfrac{a_n}{1 + n^2 a_n}$ konbergentea dela;

   (ii) $\sum \dfrac{a_n}{1 + a_n^2}$ batzuetan konbergentea eta beste batzuetan dibergentea dela;

   (iii) $\sum \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ dibergentea dela.

3. Azter ezazu hurrengo serieen izaera:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin^2 n}{n^2}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{4n}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+3}$ (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$ (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!2^n)^2}{(2n+1)!}$ (viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (3n)}$

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ (x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$

(xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ (xii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

(xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n-3}}{(4n-3)!}$ (xiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$

(xv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ (xvi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2)}{3^n}$

(xvii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ (xviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000 \cdot 1001 \cdot \cdots \cdot (1000+n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

(xix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$ (xx) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}$

4. Azter ezazu $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^3$ seriearen konbergentzia.

   Argibidea. $\sqrt[n]{n}-1=x_n$ izendatu. Newton-en binomioa erabili $\sum x_n^3$ serierako maiorante konbergente bat lortzeko.

5. Azter ezazu hurrengo serieen izaera ageri diren parametroen balioen arabera:

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\dots(a+(n-1)d)}{b(b+d)\dots(b+(n-1)d)},\quad a,b,d>0$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow b-a>d$

   (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a(a+n)}{n}\right)^n,\quad a>0$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow 0<a<1$

   (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{2n}a^n}{2^n},\ a>0$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow a<2/9$

   (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2a^n}{(2n)!},\quad a>0$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow a<4$

   (v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{e^n},\quad x>0$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow x<e$

   (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{na^n},\quad a>0$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow a>1$

   (vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}\left(\frac{1}{(1+n^2)}\right)^{\beta},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow 2\beta+\dfrac{\alpha}{2}>1$

   (viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\quad \alpha\in\mathbb{R}$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow \alpha<1/2$

   (ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n-q^n},\quad 0<q<p$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow p>1$

   (x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{(1-a)^{n-1}},\ a\in\mathbb{R},\ \ a\neq 1$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow a\in(-\infty,0]\cup(2,\infty)$

   (xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a-1}\right)^n,\quad a\in\mathbb{R},\ \ a\neq 1$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow a\in(-\infty,1/2)$

   (xii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)},\quad a>0$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow a>1$

6. Izan bedi
$$x_n=\begin{cases} n^{-2}, & n \text{ bakoitia bada,}\\ n^{-3}, & n \text{ bikoitia bada.}\end{cases}$$
   Frogatu $\sum x_n$ konbergentea dela, konparazioa erabiliz.

   Aztertu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ eta ikusi zatiduraren eta erroaren irizpideak ez direla baliagarriak kasu honetan.

7. Izan bedi

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \text{ bakoitia bada,} \\ 3^{-n}, & n \text{ bikoitia bada.} \end{cases}$$

Frogatu $\sum x_n$ konbergentea dela, konparazioa erabiliz.

Aztertu ea existitzen diren $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

8. Aztertu hurrengo serieen izaera:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{4^n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-4}}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3)}{n\sqrt{n+4}}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}$

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+5}{6n^2-2n+1}$

(vii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

(viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

5. Gaia: DERIBAGARRITASUNA

Ariketak

1. Zein da $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ kurbaren zuzen ukitzailea $x = 2$ balioari dagokion puntuan?

   Emaitza: $y = 3$.

2. Azter ezazu hurrengo funtzioen deribagarritasuna:

   (i) $f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2 \text{ bada}, \\ 0, & \text{bestela}. \end{cases}$

   (ii) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \text{ bada}, \\ \ln(1+x), & x > 0 \text{ bada}. \end{cases}$

3. Izan bedi
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ denean}, \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \text{ denean}. \end{cases}$$

   (i) Kalkula ezazu $f'(0)$, definizioa erabiliz.

   (ii) Kalkula ezazu $f'(x)$, $x \neq 0$ denerako eta ikusi f' ez dela jarraitua $x = 0$ puntuan.

4. Izan bedi f hurrengo funtzioa:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A\sin^2 x}{x} + (B+1)e^x, & x < 0 \text{ denean}, \\ D\ln(1+x) + E(1-\cos(\pi x)), & x \geq 0 \text{ denean}. \end{cases}$$

   Eman itzazu A, B, D eta E parametroen balioak f funtzioa $\mathbf{R}$–n deribagarria izan dadin eta $P = (1, f(1))$ puntutik pasatzen den f–rekiko zuzen ukitzailea $y = x+1$ izan dadin.

   Emaitza: $A = 2$, $B = -1$, $D = 2$, $E = 1 - \ln 2$.

5. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funtzioak 0 balio du -1 eta 1 puntuetan eta, hala ere, deribatua ez da anulatzen $[-1, 1]$ tartean. Rolleren teoremaren kontrakoa da hau? Badu funtzioak maximo edo minimorik tartearen barrualdean?

6. Rolleren teorema erabiliz, froga ezazu $f(x) = x^3 - 3x + m$ funtzioak ez duela inoiz bi erro erreal desberdin $[0, 1]$ tartean, m edozein zenbaki erreal izanik. m-ren balioen arabera, esan noiz duen bat eta noiz bat ere ez.

7. (i) Froga ezazu $e^x = 1 + x$ ekuazioak erro erreal bakar bat duela.

   (ii) Froga ezazu $6x^5 + 13x + 1 = 0$ ekuazioak erro erreal bakar bat duela.

   (iii) Froga ezazu $6x^4 - 7x + 1 = 0$ ekuazioak soilik bi erro erreal dituela.

8. (i) $f(x) = e^x - (1+x)$ funtzioaren gorakortasuna aztertuz, frogatu $e^x > 1+x$ dela $x > 0$ bada.

(ii) Funtzio egokiak aukeratuta, frogatu $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ betetzen dela $x > 0$ denean.

9. Kalkula itzazu hurrengo limiteak L'Hopitalen erregela erabiliz:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+5x+6)^2}{e^x}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$ (vi) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{\pi}{x}\right)^x$

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \ln x \ln(1-x)$ (viii) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$

(ix) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ (x) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{2^x},\ k \in \mathbf{N}$

(xi) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^k}{x},\ k \in \mathbf{N}$ (xii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^k}{x},\ k \in \mathbf{N}$

(xiii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ (xiv) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{12-x}}{2x - 3\sqrt{19-5x}}$

Emaitzak: (i) ∞; (ii) 0; (iii) 0; (iv) 2; (v) e^{-6}; (vi) 1; (vii) 0; (viii) $1/e$; (ix) $1/2$; (x) 0; (xi) 0; (xii) 0; (xiii) 1; (xiv) $8/69$.

10. Kalkula ezazu $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}$ eta erabili emaitza aztertzeko $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right)$ seriearen izaera.

11. Azter itzazu $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ funtzioaren maximo eta minimoak.

12. Lau erpinetatik bi OX ardatzean eta beste biak $y = 12 - x^2$ kurbaren goiko aldean dituen azalera maximoko laukizuzenaren dimentsioak eman itzazu.

Emaitza: Oinarria: 4, Altuera: 8.

13. r erradioko zirkulu batean trapezio isoszele bat inskribatzen da bere oinarri baten luzera $2r$ izanik. Kalkula ezazu beste oinarriaren luzera trapezioaren azalera maximoa izan dadin.

Emaitza: r.

14. Idatzi $\sin x$, $\cos x$ eta $\ln(1+x)$ funtzioen 5. mailako Taylorren polinomioak $x_0 = 0$ puntuan.

15. Idatzi $x^x - 1$ funtzioaren 2. mailako Taylorren polinomioa $x_0 = 1$ puntuan.

16. Eman ezazu hurrengo funtzioen adierazpen grafikoa:

(i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(ii) $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$

(iii) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

(iv) $f(x) = |x^2 - 1|$

(v) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{\sqrt{x^2+4}}$

(vi) $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 2)$

(vii) $f(x) = 2|x| - x^2$

(viii) $f(x) = xe^{1/x}$

(ix) $f(x) = x^3 e^{-4x}$

(x) $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

6.2. Gaia: INTEGRAZIOA: JATORRIZKO FUNTZIOEN KALKULUA

Ariketak

1. Kalkula itzazu hurrengo integralak:

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ *Em.:* $\displaystyle\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+k$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ *Em.:* $\ln|\ln x|+k$

(iii) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle-\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+k$

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ *Em.:* $\arctan e^x+k$

(v) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}\,dx$, $(e^x=3\sin t)$ *Em.:* $\displaystyle\arcsin\frac{e^x}{3}+k$

(vi) $\displaystyle\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{4}\arctan^2\frac{x}{2}+k$

(vii) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{(x^2-1)}{2}\ln(x+1)-\frac{(x-1)^2}{4}+k$

(viii) $\displaystyle\int \ln(x+1)\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ *Em.:* $\sqrt{x+1}\,(2\ln(x+1)-4)+k$

(ix) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos bx+b\sin bx)+k$

(x) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$ *Em.:* $-e^{-x}(x+1)+k$

(xi) $\displaystyle\int \sin x\ln(\tan x)\,dx$ *Em.:* $\displaystyle-\cos x\ln(\tan x)+\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+k$

(xii) $\displaystyle\int \frac{4x^3+2x+1}{e^x}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle-\frac{4x^3+12x^2+26x+27}{e^x}+k$

(xiii) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle-\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}+k$

(xiv) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{(x^2+1)\arctan x}{2}-\frac{x}{2}+k$

(xv) $\displaystyle\int (e^x-\cos x)^2\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{e^{2x}}{2}+\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}-e^x(\sin x+\cos x)+k$

2. Kalkula itzazu hurrengo integral arrazionalak:

(i) $\displaystyle\int \frac{x^5+3x+1}{x-1}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+5\ln|x-1|+k$

(ii) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+x+1}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{3}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+k$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x^3-1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+k$

(iv) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-3x+2}\,dx$ *Em.:* $x-4\ln|x-1|+7\ln|x-2|+k$

(v) $\displaystyle\int \frac{(x+2)(x^2+5)}{(x^2+2x+1)^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\ln|x+1|+\frac{x^2-3}{(x+1)^3}+k$

(vi) $\displaystyle\int \frac{3}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x^2+2}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+k$

(vii) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\ln\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x|}-\frac{1}{x}-\frac{7}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$
$\displaystyle-\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+k$

(viii) $\displaystyle\int \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx,\ (e^x=t)$ *Em.:* $x-2\ln(1+e^x)+k$

3. Kalkulatu integral irrazional hauek:

(i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle 6\left(\frac{x\sqrt[6]{x}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}\right)$
$-3\ln|\sqrt[3]{x}+1|+6\arctan\sqrt[6]{x}+k$

(ii) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\right|+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{x^2-x-2}{2}+k$

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$ *Em.:* $\displaystyle\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right|+k$

(iv) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{3+x}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\sqrt{1-x^2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{2(1+x)}}-6\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+k$

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ *Em.:* $\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+k$

(vi) $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{(x-1)\sqrt{2x-x^2}}{2}-\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x}}+k$

(vii) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{3}{4}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}-1\right|-\frac{16}{27}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}-2\right|$
$\displaystyle-\frac{17}{108}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}+1\right|-\frac{5}{8}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{x+1}{6(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})^2}+k$

(viii) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{9}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-9}-x\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}+k$

(ix) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6+1}\right|+k$

(x) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^6\sqrt{1+x^3}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{2}{9}\frac{2x^3-1}{x^3}\sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}}+k$

(xi) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$ *Em.:* $\displaystyle-\frac{2\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}\right)^2}{\sqrt{x}}+k$

(xii) $\displaystyle\int 2x^2(4x+1)^{-5/2}\,dx$ *Em.:* $\dfrac{1+6x+6x^2}{6(1+4x)^{3/2}}$

(xiii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ *Em.:* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{1+x^3}}-\dfrac{1}{2}\ln\left|x-\sqrt[3]{x^3+1}\right|+k$

(xiv) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ *Em.:* $\dfrac{1}{3}\sqrt{1+x^2}(x^2-2)+k$

(xv) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}\,dx$ *Em.:* $\dfrac{\sqrt{1+2x^2}}{4}+\dfrac{1}{4\sqrt{1+2x^2}}+k$

4. Kalkulatu integral trigonometriko hauek:

(i) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx$ *Em.:* $\dfrac{(\cos x-2)^2}{2}+3\ln|\cos x+2|+k$

(ii) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$ *Em.:* $\dfrac{3x}{8}+\dfrac{\sin 2x}{4}+\dfrac{\sin 4x}{32}+k$

(iii) $\displaystyle\int \sin mx\sin nx\,dx,\ m\neq n$ *Em.:* $\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(m-n)x}{m-n}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}+k$

(iv) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$ *Em.:* $-\dfrac{1}{3\tan^3 x}+k$

(v) $\displaystyle\int \tan^2 x\sec x\,dx$ *Em.:* $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+\dfrac{1}{2}\tan x\sec x+k$

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$ *Em.:* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}+k$

(vii) $\displaystyle\int \tan x\ dx$ *Em.:* $\ln\left|\dfrac{1}{\cos x}\right|+k$

(viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ *Em.:* $\dfrac{3}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt[3]{\sin x}+1}{\sqrt[3]{\sin x}-1}\right|+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|$

$+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\dfrac{2\sqrt[3]{\sin x}+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\dfrac{2\sqrt[3]{\sin x}-1}{\sqrt{3}}+k$

(ix) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ *Em.:* $\dfrac{\sin^5 x}{5}-\dfrac{2\sin^3 x}{3}+\sin x+k$

(x) $\displaystyle\int \sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$ *Em.:* $\dfrac{\sin^8(x/2)}{4}-\dfrac{2\sin^6(x/2)}{3}+\dfrac{\sin^4(x/2)}{2}+k$

(xi) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$ *Em.:* $\ln|2+\cos x|+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}+k$

(xii) $\displaystyle\int \cos^2 ax\cos^2 bx\,dx$ *Em.:* $\dfrac{x}{4}+\dfrac{b\sin 2ax+a\sin 2bx}{8ab}$

$+\dfrac{(a-b)\sin 2(a+b)x+(a+b)\sin 2(a-b)x}{16(a^2-b^2)}+k$

5. Kalkulatu honako integral hauek:

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ *Em.:* $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+k$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ *Em.:* $x-\tan\dfrac{x}{2}+k$

(iii) $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$ *Em.:* $-\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+k$

(iv) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$ *Em.:* $-\sqrt{3-x^2}+k$

(v) $\displaystyle\int \frac{2\sqrt[3]{1+e^{2x}}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$ *Em.:* $\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt[6]{1+e^{2x}}-1}{\sqrt[6]{1+e^{2x}}+1}\right|+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+e^{2x}}+1}{\sqrt{1+e^{2x}}-1}\right|$

$+\sqrt{3}\arctan\dfrac{2\sqrt[6]{1+e^{2x}}+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\arctan\dfrac{2\sqrt[6]{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{3}}+k$

(vi) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx$ *Em.:* $\dfrac{1}{8}\ln(1+4x^2)-\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{\arctan 2x}\right)^{3/2}+k$

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ *Em.:* $2\sqrt{x+1}-2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+k$

(viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ *Em.:* $\tan x+\dfrac{\tan^3 x}{3}+k$

(ix) $\displaystyle\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$ *Em.:* $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}+k$

(x) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$ *Em.:* $\dfrac{\cos x}{2}-\dfrac{\cos 5x}{10}+k$

(xi) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ *Em.:* $x\ln(x^2+1)-2x+2\arctan x+k$

(xii) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2\,dx$ *Em.:* $3x\sqrt[3]{x}+\dfrac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7}+\dfrac{24x\sqrt[6]{x^5}}{11}+k$

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

6.1. Gaia: INTEGRAZIOA: RIEMANNEN INTEGRALA

Ariketak

1. (i) Kalkulatu $[-1, 2]$ tarteko $f(x) = x^2$ funtzioari eta $P = \{-1, 0, 1/2, 1, 2\}$ partiketari dagozkien goi eta behe-baturak.

   (ii) Izan bitez $f(x) = 2x - 1$ funtzioa eta $P_n = \left\{ \frac{k}{n} : k = 0, 1, \ldots, 2n \right\}$ $[0, 2]$ tarteko partiketa, $n \in \mathbf{N}$ izanik. Kalkulatu P_n partiketetarako f funtzioaren goi eta behe-baturen balioak.

2. Frogatu honako funtzio hau $[-1, 2]$ tartean integragarria dela eta kalkulatu integralaren balioa:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in [-1, 0] \text{ denean,} \\ 1, & x \in (0, 1) \text{ denean,} \\ 2, & x \in [1, 2] \text{ denean.} \end{cases}$$

3. Izan bedi f gorakorra $[a, b]$ tartean. Orduan, f $[a, b]$-n bornatua da $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ baita $x \in [a, b]$ guztietarako. Izan bedi $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ $[a, b]$ tarteko partiketa.

   (i) Kalkulatu $L(f, P)$ eta $U(f, P)$.

   (ii) Izan bedi $t_i - t_{i-1} = \delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$ guztietarako. Frogatu $U(f, P) - L(f, P) = \delta\,(f(b) - f(a))$ dela.

   (iii) Frogatu f integragarria dela $[a, b]$ tartean.

   (iv) Aurkitu $[0, 1]$ tartean gorakorra eta infinitu puntutan ez-jarraitua den funtzio bat.

4. Izan bitez $f, g \colon [a, b] \to \mathbf{R}$ bornatuak, $x_0 \in [a, b]$ eta demagun $f(x) = g(x)$, $x \neq x_0$ guztietarako. Frogatu f integragarria dela $[a, b]$ tartean baldin eta soilik baldin g $[a, b]$ tartean integragarria bada eta, kasu honetan, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ dela.

5. Aztertu funtzio hauek integragarriak diren $[0, 2]$ tartean eta, ahal denean, integralaren balioa kalkulatu:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \text{ denean,} \\ x - 2, & 1 \leq x \leq 2 \text{ denean.} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + [x], & x \in \mathbf{Q}, \text{ denean,} \\ 0, & x \notin \mathbf{Q} \text{ denean.} \end{cases}$$

6. Kalkulatu honako funtzio hauen integralak, emandako tarteetan:

   (i) $f(x) = [x]^2$, $I = [0, n]$, $n \in \mathbf{N}$,

   (ii) $f(x) = \left[\sqrt{x}\right]$, $I = [0, 9]$.

7. (i) Baldin f funtzioa $[a,b]$ tartean integragarria bada eta $f(x) \geq 0$ bada $x \in [a,b]$ guztietarako, frogatu $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ dela.

   (ii) Eman adibide bat non $f(x) \geq 0$ den $x \in [a,b]$ guztietarako, $f(x_0) > 0$ $x_0 \in [a,b]$ puntu batean eta $\int_a^b f(x)dx = 0$.

   (iii) Izan bedi f funtzioa non $f(x) \geq 0$ den $x \in [a,b]$ guztietarako, f $x_0 \in [a,b]$ puntuan jarraitua eta $f(x_0) > 0$. Frogatu $\int_a^b f(x)dx > 0$ dela.
   Argibidea: Positiboa den behe-batura bat topatu.

8. Frogatu desberdintza-kate hau:
$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{dx}{x} \leq 1.$$

9. Izan bitez h jarraitua, f eta g deribagarriak eta $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$. Frogatu berdintza hau:
$$F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x).$$

10. Kalkulatu honako funtzio hauen deribatuak:

   (i) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t} dt$

   (ii) $F(x) = \sin\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3 t \; dt\right) \; dy\right)$

   (iii) $F(x) = \int_0^x a^x \sin^3 t \; dt$

   (iv) $F(x) = \sin x \cos\left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+t+t^3} \; dt\right)$

   (v) $F(x) = \int_0^x x f(t) dt$

11. Kalkulatu f funtzioaren mutur absolutuak $[0,2]$ tartean, f honako funtzio hau bada:
$$f(x) = \int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}\, dt.$$

12. Kalkulatu $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{d}{dx}(t \sin x)\right) \; dx$.

13. Aurkitu kalkulu honen akatsa:
$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2}\bigg|_0^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

14. Frogatu honako berdintza hauek, aldagai-aldaketa egokiak erabiliz.

(i) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dt}{1+\sqrt{t}} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,dt$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = k\int_{a/k}^{b/k} f(kt)\,dt,\ k \neq 0$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = \int_1^5 \frac{\sqrt{t-1}}{t+3}\,dt$

15. (i) Frogatu berdintza hau:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx.$$

(ii) Izan bedi f $[-a,a]$ tartean jarraitua. Frogatu:

$$f\ [-a,a]\ \text{ tartean bikoitia bada } \Longrightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \text{ dela.}$$

$$f\ [-a,a]\ \text{ tartean bakoitia bada } \Longrightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \text{ dela.}$$

16. Kalkulatu integral hauek:

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx$

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

6.3. Gaia. INTEGRAZIOA: INTEGRAL MUGATUAREN APLIKAZIO GEOMETRIKOAK

Ariketak

1. Jarraian agertzen diren funtzioen bidez definitutako eskualdeen azalerak kalkula itzazu:

   (i) $xy = a^2$ hiperbolak eta OX ardatzak, $a > 0$ izanik eta $x \in [a, 2a]$.

   (ii) $y = 4 - x^2$ parabolak eta OX ardatzak mugatutako eskualdea.

   (iii) $y^2 = 9x$ eta $y = 3x$ kurben arteko eremua.

   (iv) $y^2 = 2px$ eta $x^2 = 2py$ parabolen arteko eremua, $p > 0$ izanik.

   (v) $y = x^3$, $y = 2x$ eta $y = x$ kurbek definitzen duten eremua.

   (vi) $y = \cos x$, $y = 0$, $x \in [0, 2\pi]$

   (vii) $xy = a$, $xy = 2a$, $y = x$ eta $y = 2x$ kurben arteko eremua, $a > 0$ izanik.

   Emaitzak: (i) $a^2 \ln 2$; (ii) $\dfrac{32}{3}$; (iii) $\dfrac{1}{2}$; (iv) $\dfrac{4p^2}{3}$; (v) $\dfrac{3}{2}$; (vi) 4; (vii) $a \ln 2$.

2. Polarretan adierazitako kurbek mugatzen duten azalerak kalkulatu:

   (i) Kalkula ezazu $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ polarretan definitutako lemniskataren azalera.

   (ii) Kalkula ezazu $\rho = a(1 - \cos\theta)$ polarretan definitutako kardioidearen azalera, $a > 0$ izanik.

   (iii) Kalkula ezazu $\rho = a \sin 3\theta$ polarretan definitutako hiru hostotako larrosaren azalera, non $a > 0$ den.

   (iv) Kalkula ezazu $\rho = 2 + \sin\theta$ kurbak mugatutako eskualdearen azalera.

   Emaitzak: (i) a^2; (ii) $\dfrac{3\pi a^2}{2}$; (iii) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; (iv) $\dfrac{9\pi}{2}$.

3. Polarretan emandako bi kurben arteko azalerak kalkulatu:

   (i) Kalkula ezazu $\rho = 2\cos\theta$ ekuazioa duen zirkunferentziaren barruan baina $\rho = 1$ zirkunferentziaren kanpoan geratzen den eskualdearen azalera.

   (ii) Kalkula ezazu $\rho = 1 + \cos\theta$ kurbaren barrualdean baina $\rho = 1 - \cos\theta$ kurbaren kanpoaldean geratzen den eskualdearen azalera.

   (iii) Kalkula ezazu $\rho = 1 - \sin\theta$ eta $\rho = \sin\theta$ kurben artean geratzen den eskualdearen azalera.

   Emaitzak: (i) $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (ii) 4; (iii) $\dfrac{7\pi}{12} - \sqrt{3}$.

4. Ematen diren funtzioen grafikoen arku-luzerak kalkula itzazu agertzen diren tarteetan:

   (i) $y = \ln x$, $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$. *Em.:* $1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$

   (ii) $y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 4$. *Em.:* $\dfrac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

5. Hiru dimentsioko gorputz baten oinarria $y = x^2$ eta $y = 4$ kurbek osatzen duten eremua da. Kalkula ezazu gorputzaren bolumena OX ardatzarekiko perpendikularrak diren sekzioak karratuak baldin badira.

Emaitza: $\dfrac{512}{15}$

6. Jarraian ematen diren funtzioen grafikoak OX ardatzarekiko biratzean lortzen diren biraketa-gorputzen bolumenak kalkula itzazu:

   (i) $y^2 = 2px$, $x \in [0, a]$, $p > 0$. *Em.:* $\pi p a^2$

   (ii) $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$. *Em.:* $\dfrac{\pi^2}{2}$

   (iii) $y = 2x$, $y = x$, $x \in [0, 1]$. *Em.:* π

   (iv) $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $x \in [0, 1]$. *Em.:* $\dfrac{\pi}{6}$

   (v) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $a < b$. *Em.:* $2a^2 b\pi^2$

7. r erradioko esfera bat bi plano paralelorekin ebakitzen da, bata ekuatorearen gainetik a unitatetara eta bestea ekuatorearen azpitik b unitatetara. Kalkula ezazu bi plano hauen artean geratzen den esferaren zatiaren bolumena, $0 < a, b < r$ izanik.

Emaitza: $\pi r^2(a + b) - \dfrac{\pi}{3}(a^3 + b^3)$.

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

6.4. Gaia: INTEGRAZIOA: INTEGRAL INPROPIOAK

Ariketak

1. Aztertu honako integral hauetatik zeintzuk diren konbergenteak eta zeintzuk ez. Konbergenteak direnean, integralaren balioa kalkulatu.

(i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty e^{px}\,dx$ (iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$

(v) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (vi) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx$

(vii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (viii) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$

(ix) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx$ (x) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Emaitzak: (i) Dib.; (ii) $\dfrac{\pi}{4}$; (iii) $-\dfrac{1}{p}$, $p<0$ bada, dib. $p\geq 0$ denean; (iv) -1; (v) π; (vi) $\dfrac{\pi^2}{8}$; (vii) 2; (viii) $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$; (ix) Dib.; (x) Dib.

2. (i) Aurkitu f funtzio jarraitu bat $[0,\infty)$ tartean, non $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ ez den existitzen, hau da $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_0^y f(x)\,dx$ ez den finitua ez eta infinitua ere.

   (ii) Aurkitu f funtzio jarraitu bat $(0,1]$ tartean, non $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ ez den existitzen, hau da $\displaystyle\lim_{z\to0^+}\int_z^1 f(x)\,dx$ ez den finitua ez eta infinitua ere.

3. Erabaki zeintzuk izan behar duten a eta b parametroen balioek honako berdintza hau bete dadin:

$$\int_1^\infty \left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)dx = 1.$$

Emaitza: $a=b=2(e-1)$.

4. Aztertu honako integral inpropio hauen konbergentzia:

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$

(iii) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^2}$ (iv) $\displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{3}{2}}\sin x\,dx$

(v) $\displaystyle\int_0^\infty x\sin x\,dx$ (vi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

Emaitzak: (i) Konb; (ii) Konb; (iii) Konb; (iv) Konb; (v) Dib; (vi) Konb.

5. Frogatu honako integral honen bidez definitutako Eulerren Γ funtzioa konbergentea dela $p > 0$ guztietarako:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx.$$

6. Eulerren β funtzioa integral inpropio honen bidez definitzen da:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx.$$

   Egiaztatu konbergentea dela $p > 0$ eta $q > 0$ direnean.

7. Aztertu integral hauen izaera, agertzen diren $n \in \mathbf{N}$ eta $\alpha, p, q \in \mathbf{R}$ parametroen balioen arabera:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)^n}}$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^n}\, dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^{\alpha}}\, dx$ (iv) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^{\alpha}}\, dx$

(v) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)\, dx}{1+x^n}$ (vi) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$

Emaitzak: (i) Konb $\Longleftrightarrow n = 1$; (ii) Konb $\Longleftrightarrow n = 1, 2$;
(iii) Konb $\Longleftrightarrow \alpha \in (1, 2)$; (iv) Konb $\Longleftrightarrow 1 < \alpha < 2$;
(v) $\alpha \neq 0$ denean, konb $\forall n \in \mathbf{N}$ eta $\alpha = 0$ denean, konb $\forall n \geq 2$;
(vi) Konb $\Longleftrightarrow p < 1$ eta $q < 1$.

8. Izan bedi $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+3}$.

   (i) Frogatu f-ren grafikoak eta OX ardatzak mugatzen duten eskualdearen azalera ez dela finitua.

   (ii) Kalkulatu f-ren grafikoa OX ardatzarekiko biratzean lortzen den gorputzaren bolumena.

Emaitza: $\dfrac{9\pi^2}{2\sqrt{3}}$.

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

7. Gaia: FUNTZIO-SEGIDAK. FUNTZIO-SERIEAK. BERRETURA-SERIEAK

Ariketak

1. Azter ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren konbergentzia uniformea $[-1,1]$ tartean, f_n honako funtzio hau izanik:
$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0 \text{ bada,} \\ 1-nx, & 0 \le x < 1/n \text{ bada,} \\ 0, & 1/n \le x \le 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

2. Azter ezazu funtzio-segida hauen konbergentzia puntuala eta uniformea ondoan agertzen diren D eremuetan:

   (i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $D = [0,1]$ (ii) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $D = \mathbb{R}$

   (iii) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}e^{-x/n}$, $D = [0,\infty)$ (iv) $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $D = \mathbb{R}$

3. Izan bedi $f_n(x) = e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Froga ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida $[a,\infty)$ tartean uniformeki konbergentea dela $a > 0$ guztietarako baina $[0,\infty)$ tartean, aldiz, konbergentzia ez dela uniformea.

4. Izan bedi $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Froga ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida $[0,\infty)$ tartean uniformeki konbergentea dela.

5. Izan bedi $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Froga ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida $[a,\infty)$ tartean uniformeki konbergentea dela $a > 0$ guztietarako, baina $[0,\infty)$ tartean konbergentzia ez dela uniformea.

6. Azter ezazu funtzio-serie hauen konbergentzia puntuala eta uniformea ondoan adierazten diren D eremuetan:

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$, $D = \mathbb{R}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(1+\sin x)^n}$, $D = [0,\pi]$

   (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $D = \mathbb{R}$ (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$, $D = [0,\infty)$

7. Izan bedi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zenbaki-serie absolutuki konbergentea. Froga ezazu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ funtzio-serieak uniformeki konbergenteak direla $\mathbb{R}$-n.

8. Izan bedi
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Froga ezazu f-ren deribatua jarraitua dela $\mathbb{R}$-n.

9. Izan bitez $\sum a_nx^n$ berretura-seriea, haren konbergentzia-erradioa 2 izanik, eta $k \in \mathbb{N}$ zenbaki finkoa. Kalkulatu $\sum a_n^kx^n$ eta $\sum a_nx^{kn}$ serieen konbergentzia-erradioak.

10. Berretura-serie hauetarako, kalkula ezazu konbergentzia-tartea eta konbergentzia-tarte horien muturretako portaera aztertu.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a^n+b^n}\right)x^n,\ a \geq b > 0$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln n\, x^n$ (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{x^n}{n!}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$ (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$ (viii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$ (x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

11. Izan bedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(1+2^n x)}, \quad x \geq 0.$$

Froga ezazu f-k ordena guztietako deribatuak dituela $x=0$ puntuan eta

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

seriea onbergentea dela soilik $x=0$ puntuan.

12. Eman ezazu $g(x) = \dfrac{1}{2-x}$ funtzioa $x-1$, x eta $1/x$ funtzioen berretura-serie gisa. Kasu bakoitzean konbergentzi-tartea eman.

13. Eman itzazu funtzio hauek x-ren berretura-serie gisa eta kalkula itzazu lortzen diren serieen konbergentzia-tarteak:

(i) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$ (ii) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ (iv) $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$

(v) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ (vi) $f(x) = \sin^2 x$

14. Eman ezazu $f(x) = \sqrt{1+x}$ funtzioa $(x-1)$-en berretura-serie gisa. Zer tartetan balio du garapen horrek?

15. Eman $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ funtzioa $(x-4)$-ren berretura-serie gisa. Zer tartetan balio du garapen horrek?

16. Eman ezazu $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t^2\, dt$ funtzioaren seriezko garapena x-en berreturetan eta erabaki ezazu noiz den konbergentea lortutako seriea.

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

8. Gaia: ALDAGAI ANITZEKO FUNTZIOAK

Ariketak

1. Marraztu honako funtzio hauen definizio-eremuak:

   (i) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$;

   (ii) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$;

   (iii) $f(x,y) = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   (iv) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{4x^2-y^2}}$;

   (v) $f(x,y) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}$.

2. Kalkula itzazu limite hauek, existitzen badira:

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

   (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$

   (iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

   (iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

   (v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2}$

   vi) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

   (vii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$

   (viii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3. Kalkulatu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ honako funtzio hauetarako

   (i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin(xy), & x \neq 0 \text{ bada,} \\ y, & x = 0 \text{ bada.} \end{cases}$

   (ii) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{x}{y}, & y \neq 0 \text{ bada,} \\ 0, & y = 0 \text{ bada.} \end{cases}$

4. Izan bedi

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, \sin(x+y)\right), & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada,} \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \text{ bada.} \end{cases}$$

   Kalkulatu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathbf{f}(x,y)$.

5. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna:

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+\sin(x+y)}{x+y}, & x+y \neq 0 \text{ bada}, \\ 0, & y = -x \text{ bada}. \end{cases}$

(ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada}, \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada}. \end{cases}$

(iii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-y^3}{x^2+3y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada}, \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada}. \end{cases}$

6. Izan bedi

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad \forall\,(x,y) \neq (0,0).$$

Defini ezazu $f(0,0)$ balioa f funtzioa $(0,0)$ puntuan jarraitua izan dadin.

7. Izan bedi

$$f(x,y) = \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, \quad \forall\,(x,y) \neq (0,0).$$

Defini ezazu $f(0,0)$ balioa f funtzioa $(0,0)$ puntuan jarraitua izan dadin.

8. Izan bedi $f(x,y) = e^{xy}$ funtzioa. Froga ezazu

$$x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$$

egiaztatzen dela.

9. Kalkulatu honako funtzio hauen deribatu partzialak:

(i) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$;

(ii) $f(x,y) = e^{xy}\ln(x^2+y^2)$;

(iii) $f(x,y) = e^{xy}\cos y \sin x$.

10. Izan bedi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada}, \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada}. \end{cases}$$

(a) Kalkulatu f-ren deribatu partzialak $(2,3)$ puntuan.

(b) Kalkulatu f-ren deribatu partzialak $(0,0)$ puntuan.

(c) Kalkulatu f-ren edozein norabiderekiko deribatuak $(0,0)$ puntuan.

(d) Froga ezazu f funtzioa ez dela jarraitua $(0,0)$ puntuan.

11. Izan bedi

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada}, \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada}. \end{cases}$$

Kalkulatu edozein norabiderekiko deribatuak jatorrian. Aztertu f-ren diferentxziagarritasuna jatorrian.

12. Kontsidera dezagun $f(x,y) = e^{2x+3y}$ funtzioa. Aztertu ea f funtzioa C^1 klasekoa den. Kalkulatu f-ren gradientea jatorrian.

13. Kalkulatu honako funtzio hauen deribatuak finkatutako puntuetan eta emandako bektore unitoarioarekiko:

    (i) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2,\ \ P = (1,2),\ \ \mathbf{u} = (3/5, 4/5);$

    (ii) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}),\ \ P = (1,0),\ \ \mathbf{u} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5});$

    (iii) $f(x,y) = e^x \cos(\pi y),\ \ P = (0,-1),\ \ \mathbf{u} = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$

14. Kalkulatu $z = x^2 + y^3$ gainazalaren plano ukitzailea $(3,1,10)$ puntuan.

15. Izan bedi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada,} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada.} \end{cases}$$

    (a) Aztertu f-ren jarraitutasuna.

    (b) Aztertu f-ren diferentziagarritasuna.

    (c) Kalkulatu $(0,0)$ puntuan edozein bektore unitariorekiko f-ren deribatuak, existitzen badira.

    (d) Kalkulatu $(2,1)$ puntuan edozein bektore unitariorekiko f-ren deribatuak, existitze badira.

    (e) Kalkulatu f funtzioaren grafikoaren plano ukitzailea $P = (2,1,3/5)$ puntuan.

4. GAIA - FUNTZIOAK ETA JARRAITUTASUNA

KDI I - ARIKETAK

Funtzioei buruzko oinarrizko kontzeptuak

1. Kalkula ezazu f funtzioaren definizio-eremua honako kasu bakoitzean:

   (a) $f(x) = \sqrt{|x| - 2x}$, (b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$,

   (c) $f(x) = \sqrt{\sin x}$, (d) $f(x) = \ln\big(x(x^2 + x - 4)\big)$,

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$, (f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$,

   (g) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$, (h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}\right)$.

2. Izan bitez

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \text{ denean}, \\ x + 1, & x \geqslant 0 \text{ denean}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1 \text{ denean}, \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \text{ denean}, \end{cases}$$

   $h(x) = x^2$, $T_1(x) = x + 1$ eta $T_{-1}(x) = x - 1$. Kalkula itzazu honako funtzioak:

   (a) $T_1 \circ T_{-1}$ eta $T_{-1} \circ T_1$, (b) $T_{-1} \circ h \circ T_1$, (c) $f \circ h$,

   (d) $g \circ h$, (e) $f + g$, (f) $T_{-1} \circ f$,

   (g) $g \circ T_1$, (h) $f \circ g$, (i) $g \circ f$.

3. Izan bitez f, g eta h edozein funtzio. Ondo definituta dauden kasuetan, erabaki ezazu honako propietateak betetzen diren ala ez, kasu bakoitzean froga edo kontradibidea emanez:

   (a) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$, (b) $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$,

   (c) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$, (d) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\dfrac{1}{g}\right)$.

4. Kalkula itzazu hurrengo funtzioen definizio-eremuak eta erabaki injektiboak diren ala ez. Hala bada, kalkulatu alderantzizko funtzioak dagozkien eremuetan.

   (a) $f(x) = 3x - 5$, (b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$,

   (c) $f(x) = \sqrt[5]{1 - x^3} + 2$, (d) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

5. Funtzio bat, f, **bikoitia** dela diogu $f(x) = f(-x)$ betetzen bada eta **bakoitia** dela $f(-x) = -f(x)$ bada.

(a) Erabaki $f+g$ bikoitia edo bakoitia den f eta g bikoitiak edo bakoitiak diren lau kasu desberdinetan.

(b) Egin gauza bera $f \cdot g$ eta $f \circ g$ funtzioekin.

(c) Froga ezazu h edozein funtziorako $h = E + O$ betetzen duten E funtzio bikoiti bat eta O funtzio bakoiti bat aurki daitezkeela, eta gainera bakarrak direla. E funtzioari h-ren **parte bikoitia** deritzo, eta O-ri aldiz, h-ren **parte bakoitia**.

6. Izan bitez f eta g bi funtzio. Horietatik abiatuta, honako funtzio berriak defini ditzakegu:

$$\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x)),$$

$$\min(f,g)(x) = \min(f(x), g(x)),$$

$$|f|(x) = |f(x)|.$$

(a) Adieraz itzazu $\max(f,g)$ eta $\min(f,g)$ funtzioak $|f|$ funtzioaren bitartez.

(b) Frogatu $f = \max(f,0) + \min(f,0)$ betetzen dela. Bi funtzio hauei f funtzioaren **parte positiboa** eta **parte negatiboa** deritze.

(c) Funtzio bat, f, **ez-negatiboa** dela esaten da $f(x) \geqslant 0$ betetzen badu. Froga ezazu f edozein funtzio $f = g-h$ eran idatz daitekeela, g eta h ez-negatiboak direlarik.

7. Deskriba itzazu f funtzioaren grafikoaren ezaugarri nagusiak

(a) f bakoitia denean,

(b) f bikoitia denean,

(c) f ez-negatiboa denean, eta

(d) f periodikoa denean (f ***a*-periododun funtzio periodikoa** da $f(x) = f(x+a)$ betetzen bada x guztietarako).

8. Demagun f funtzioaren grafikoa ezagutzen duzula. Marraz ezazu g-ren grafikoa f-renaren arabera honako kasu bakoitzean, c konstante erreal bat izanik:

(a) $g(x) = f(x) + c$, (b) $g(x) = f(x+c)$, (c) $g(x) = cf(x)$,

(d) $g(x) = f(cx)$, (e) $g(x) = f(1/x)$, (f) $g(x) = f(|x|)$,

(g) $g(x) = |f(x)|$, (h) $g(x) = \max(f,0)(x)$, (i) $g(x) = \min(f,0)(x)$,

(j) $g(x) = \max(f,1)(x)$.

Hasierako f-ren grafikorako zerorrek marraztutako edozein grafiko erabil dezakezu, adierazpen espliziturik eman beharrik gabe.

Funtzioen limiteak

9. Kalkula itzazu hurrengo limiteak, $a \in \mathbb{R}$ eta $n \in \mathbb{N}$ balioentzako:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$,

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$,

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$,

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+a)-\ln a}{x}$, $\quad a>0$,

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$,

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\cos\sqrt{x}}$,

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$,

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$.

10. Kalkula itzazu honako limiteak:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$,

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$, $\quad n,m\in\mathbb{N}$,

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$,

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$,

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$,

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$,

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$,

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$,

   (i) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$,

   (j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$,

   (k) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\tan x-\tan a}{x-a}$, $\quad a\in\mathbb{R}$,

   (l) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$,

   (m) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$,

   (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

Jarraitutasuna

11. Izan bedi f 0 puntuan jarraitua den funtzio bat.

   (a) Demagun $n\in\mathbb{N}$ balio guztietarako

   $$f\left(\frac{\sin n}{n}\right)=5n^2\left(\ln\left(n^2+1\right)-\ln\left(n^2-1\right)\right)$$

   betetzen duela. Kalkula ezazu $f(0)$.

   (b) Posible al da f-k goiko formula bete beharrean

   $$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2+1} \qquad \text{eta} \qquad f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{n^2}{n^2+1}$$

   betetzea?

12. Erabaki zein diren $A, B, a, b \in \mathbb{R}$ balio egokiak hurrengo funtzioak jarraituak izan daitezen:

    (a)
    $$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \leqslant -\frac{\pi}{2} \text{ denean,} \\ A\sin x + B, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ denean,} \\ \cos x, & x \geqslant \frac{\pi}{2} \text{ denean.} \end{cases}$$

    (b)
    $$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leqslant 0 \text{ denean,} \\ |x - a|, & 0 < x < 3 \text{ denean,} \\ \frac{x^2+3x}{x+b}, & x \geqslant 3 \text{ denean.} \end{cases}$$

13. Izan bedi a zenbaki erreal bat. Bere **parte osoa**
    $$[a] = \max\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant a\}$$
    da, eta bere **parte frakzionarioa**, berriz,
    $$\{a\} = a - [a].$$
    Adierazi grafikoki $f(x) = [x]$, $g(x) = \{x\}$ eta $h(x) = [1/x]$ funtzioak eta aztertu bere jarraitutasuna.

14. Froga ezazu maila bakoitiko polinomio orok gutxienez erro erreal bat duela, eta erabaki emaitza honek maila bikoitiko polinomioentzat ere balio duen ala ez.

15. Izan bedi f funtzio jarraitu eta positibo bat (hau da, $f(x) > 0$ betetzen duena x guztietarako), eta demagun $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ betetzen dela. Froga ezazu f-k maximo bat duela (hau da, existitzen dela y balio bat non $f(x) \leqslant f(y)$ betetzen den x guztietarako).

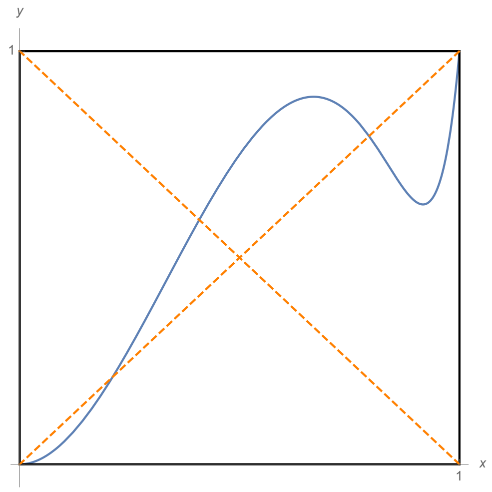
16. Frogatu honako ekuazioek gutxienez soluzio erreal bat dutela:

    (a) $\sin x = x - 1,$

    (b) $x^{2019} + \dfrac{2018}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 2017.$

17. (a) Izan bedi $[0,1]^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ karratua. Demagun f funtzioa $[0,1]$ tartean jarraitua dela eta bertan $f(x) \in [0,1]$ betetzen dela. Frogatu kasu horretan f-ren grafikoak $[0,1]^2$ karratuko bi diagonalak ebakitzen dituela. (Marrazki batekin propietatea begi-bistakoa da, baina frogak analitikoa izan behar du. Ohartu diagonalak funtzio jakin batzuen grafikoak ere badirela! Pentsatu zer esan nahi duen bi grafiko ebakitzeak.)

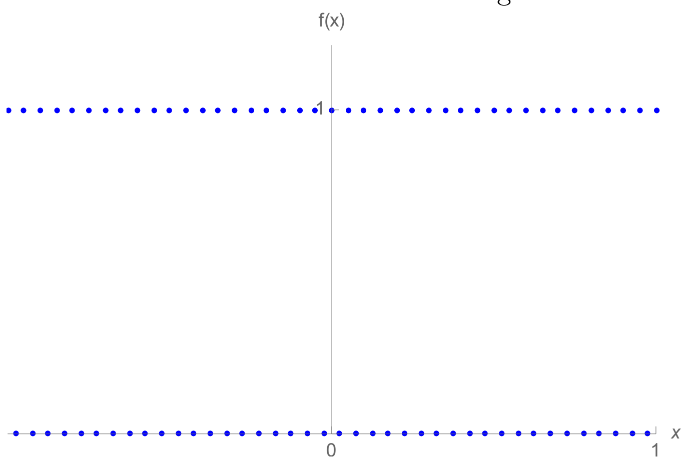
    (b) Propietate hau orokortu egin daiteke; izan ere, g jarraitua bada $[0,1]$-en eta $g(0) = 0, g(1) = 1$ edo $g(0) = 1, g(1) = 0$ bada, orduan f-ren grafikoak g-rena ebakiko du.



Karratuaren diagonalak, marra etenez, eta (b) ataleko g funtziorako adibide bat, marra jarraituz.

18. Funtzio baten eten-puntuetan pentsatzen dugunean, askotan eten puntu bakar bat (edo kopuru finitu bat) etortzen zaigu burura. Esfortzu askorik gabe, eten-puntu kopuru infinitu zenbakigarria ere lor dezakegu (gogoratu $[x]$ funtzioa).

    (a) Froga ezazu
    $$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
    funtzioa ez dela jarraitua inon. Beste hitzekin esanda, puntu guztiak f-ren eten-puntuak dira. Funtzio hau zenbaki arrazionalen funtzio karakteristikoa da (orain edozein A multzorako badakizu zein den bere funtzio karakteristikoa, $\mathbb{1}_A$) eta **Dirichlet-en funtzio** izenez ere ezagutzen da.



    (b) Goiko f funtzioan eta $g(x) = x$ funtzioan oinarrituta, sortu 0 puntuan bakarrik jarraitua den h funtzioa. Honela, jarraitutasun puntu bakar bat duen funtzioa eraikiko dugu.