1. Gaia

Zenbaki errealak eta konplexuak

Matematikaren oinarrizko elementua zenbakia da, beraz, lehen gai honetan zenbakiak eta beraien propietateak aztertuko ditugu.

Lehenengo eta behin, zenbakien arteko eragiketa algebraikoak aipatu behar dira. Oinarrizko eragiketa algebraikoak batuketa eta biderketa dira.

Aztertuko dugun beste ezaugarri bat zenbakien ordena da. Bi zenbaki emanda, konparatu nahi ditugu jakiteko zein den handiena eta zein txikiena.

Azkenik, distantzia ere kontsideratuko dugu. Bi zenbaki emanda, neurtu nahi izango dugu zein hurbil dauden bata bestetik.

1.1 Zenbaki-multzoak

Zenbaki arruntak

Zenbatzeko erabiltzen diren zenbakiak zenbaki arruntak dira eta osatzen duten multzoa $\mathbb{N}$ ikurrarekin adierazten da,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Peanoren axiomak (Zenbaki arruntak sortarazten dituen axioma-multzoa)

1. axioma: $\mathbb{N}$ multzoan zenbaki berezi bat dago, 1-a, hain zuzen ere.

2. axioma: Zenbaki arrunt orok hurrengo bakar bat dauka, hau da, n zenbaki arrunta baldin bada, existitu egiten da n^+, n-ren hurrengoa. Gainera $n^+ \neq 1$, n edozein zenbaki arruntarentzat.

3. axioma: Zenbaki arrunt desberdinen hurrengoak desberdinak dira. Hots, n, m zenbaki arruntak badira, $n^+ = m^+ \Longrightarrow n = m$.

4. axioma (indukzio matematikoaren printzipioa): $A \subset \mathbb{N}$ azpimultzo batek hurrengo baldintzak betetzen baldin baditu:

(a) $1 \in A$,

(b) $k \in A$ baldin bada orduan $k^+ \in A$,

orduan $A = \mathbb{N}$.

Axioma hauek onartzearekin batera zenbaki arruntak eta $\mathbb{N}$ multzoa existitu egiten direla onartzen dugu.

1. axiomaren arabera, 1 zenbakia existitzen da. Orain, 2. axioma jarraituz, 1 zenbaki arrunta denez, bere hurrengoa ere existitzen da eta ez da 1 zenbakia. Beraz, zenbaki berri bat dugu, 2 ikurraren bidez adierazten duguna. 2 zenbaki arrunta denez, bere hurrengoa ere existitzen da eta ezin da 1 zenbakia izan. Gainera, 3. axioma kontuan izanda, 2-ren hurrengoa ezin da 1-aren hurrengoa, hots 2 zenbakia, izan. Beraz, zenbaki berri bat dugu, 3 ikurrarekin adierazten duguna. Honela jarraituz eraikitzen da $\mathbb{N}$ multzoa, infinitu zenbaki dituena.

Indukzio matematikoaren printzipioa. Peanoren azken axiomak, indukzio matematikoaren printzipioak hain zuzen ere, zenbaki arrunt orok propietate bat betetzen duela frogatzeko tresnarik garrantzitsuenetariko bat ematen digu. Demagun A multzoa P propietatea betetzen duten zenbaki arruntek osatzen dutela. P propietatea zenbaki arrunt guztiek betetzen dute baldin eta hurrengo baldintzak betetzen badira:

(a) 1 zenbakiak betetzen du P propietatea;

(b) k zenbakiak P propietatea betetzen badu, orduan $k+1$ zenbakiak ere P propietatea bete behar du.

Adibidea. Lehenengo n zenbaki arrunten arteko baturaren formula:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indukzio matematikoaren printzipioa erabiliz frogatuko dugu formula hau. Lehenengo pausua $n = 1$ denean formula betetzen dela egiaztatzea izango da.

$$n = 1 : \qquad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Beraz, egia da.

Suposa dezagun orain k zenbaki arruntarentzat formula ere betetzen dela, hau da,

$$n = k : \qquad 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Frogatu behar dugu $k+1$ zenbaki arruntarentzat ere betetzen dela.

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Beraz, k-rentzat egia dela suposatuz, frogatu dugu $k+1$-entzat ere egia dela.

Indukio matematikoaren printzipioak esaten digu formula egia dela zenbaki arrunt ororentzat:

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Oharra. Kasu batzuetan gerta daiteke frogatu behar den propietatea egia ez izatea zenbaki arrunt guztietarako, baina bai zenbaki arrunt batetik aurrera. Kasu honetan indukzio matematikoaren printzipioa ere erabil daiteke baina lehenengo baldintza aldatuz. Beste kasu batzuetan, komenigarria izan daiteke ere bigarren baldintza aldatzea. Orokorrean, r zenbaki arrunta emanda, esan dezakegu P propietatea egia dela $n \geq r$ arrunt guztietarako baldin eta hurrengoa betetzen bada:

(a) r zenbakiak P propietatea betetzen du,

(b) $k \geq r$ zenbakiak P propietatea betetzen badu, orduan $k+1$ zenbakiak ere P propietatea betetzen du.

Edo,

(a) r zenbakiak P propietatea betetzen du,

(b) $r \leq h \leq k$ zenbakiek betetzen badute P propietatea, orduan $k+1$ zenbakiak ere P propietatea betetzen du.

Zenbaki osoak

$\mathbb{N}$ multzoan batuketa eta biderketa ondo definituta daude, hau da, zenbaki arrunten batura eta biderkadura zenbaki arruntak dira. Baina batuketarekin lotuta arazo bat sortzen da. n eta m zenbaki arruntak baldin badira, batzuetan ezin da aurkitu beste zenbaki arrunt bat, x, non $x + n = m$ den. Adibidez, $x + 3 = 1$ ekuazioak ez du soluziorik bakarrik zenbaki arruntak kontsideratzen baditugu.

Problema hau konponduko dugu zenbaki berri batzuk kontsideratuz, 0 zenbakia eta zenbaki arruntak $-$ zeinuarekin. Honela, zenbaki osoen multzoa dugu, $\mathbb{Z}$ ikurraren bidez adieraziko duguna.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Zenbaki osoen arteko batuketa eta biderketa defini daitezke ere. Bereziki, $n+(-n) = (-n) + n = 0$, n zenbaki arrunt guztietarako.

Zenbaki arrazionalak

Zenbaki osoekin konpontzen da batuketarekin geneukan problema baina biderketaren kasuan arazo berbera sortzen da. n eta m zenbaki osoak badira, batzuetan ezin da topatu x zenbaki osoa $x \cdot n = m$ izan dadin, adibidez, $3x = 1$ ekuazioak ez du soluzio osorik.

Zenbaki-multzo oraindik handiago bat behar dugu, zenbaki arrazionalena:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Aipatu behar da bi adierazpen desberdin zenbaki arrazional berbera izan daitezkela. m_1, m_2, n_1, n_2 zenbaki osoak badira, $\dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2}$ baldin eta soilik baldin $m_1 n_2 = m_2 n_1$. Gainera, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ zeren eta $\dfrac{m}{1} = m$ identifikazioa egiten baita.

Zenbaki arrazionalen arteko batuketa eta biderketa hurrengo eran definiturik daude: m_1, m_2, n_1, n_2 zenbaki osoak baldin badira, $n_1 \neq 0$ eta $n_2 \neq 0$ izanik,

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} &= \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}, \\ \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} &= \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}. \end{aligned}$$

Eragiketa hauek hurrengo propietateak betetzen dituzte $\mathbb{Q}$ multzoan: $a, b, c \in \mathbb{Q}$ badira,

(P1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (batuketaren elkartze-propietatea).

(P2) $a + 0 = 0 + a = a$, (0 batuketaren elementu neutroa da).

(P3) Existitzen da $-a \in \mathbb{Q}$ non $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ zenbakia a-ren aurkakoa da).

(P4) $a + b = b + a$ (batuketaren trukatze-propietatea).

(P5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (biderketaren elkartze-propietatea).

(P6) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 zenbakia biderketaren elementu neutroa da).

(P7) $a \neq 0$ guztietarako, existitzen da $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ non $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (a^{-1} zenbakia a-ren alderantzizko elementua da).

(P8) $a \cdot b = b \cdot a$ (biderketaren trukatze-propietatea).

(P9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (banatze-propietatea).

Propietate hauek betetzen direnez $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ gorputz trukakorra dela esaten da.

Batuketa eta biderketan oinarriturik eta goian aipatutako propietateak kontuan hartuz, defini ditzakegu ere kenketa eta zatiketa. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} a - b &= a + (-b), \\ \frac{a}{b} &= a \cdot b^{-1}, \quad \forall b \neq 0. \end{aligned}$$

Zenbaki arrazionalen multzoan ordena erlazio bat defini daiteke. Lehenengo eta behin, zenbaki arrazional bat, $\frac{m}{n}$ positiboa dela esango dugu eta $\frac{m}{n} > 0$ idatziko dugu $m, n \in \mathbb{N}$ badira. Hurrengo propietateak ditugu

(P10) $a \in \mathbb{Q}$ bada, $a = 0$ edo $a > 0$ edo $-a > 0$.

(P11) $a > 0$ eta $b > 0$ baldin badira, orduan $a + b > 0$.

(P12) $a > 0$ eta $b > 0$ baldin badira orduan $a \cdot b > 0$.

Definizioa. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Q}$. a b baino handiagoa dela diogu eta $a > b$ idazten dugu (edo b a baino txikiagoa dela esan eta $b < a$ idatzi) baldin eta $a - b > 0$ bada.

Zenbaki arrazionalen multzoan defini daiteke ere distantzia bat.

Definizioa. Izan bitez $x, y \in \mathbb{Q}$. x eta y zenbakien arteko distantzia hurrengoa da

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y, & x > y \text{ bada}, \\ 0, & x = y \text{ bada}, \\ y - x, & x < y \text{ bada}. \end{cases}$$

Propietatea. Izan bitez $p, q \in \mathbb{Q}$ non $p < q$ den. Beti existitzen da beste zenbaki arrazional bat, r, non $p < r < q$ den.

Adibidez, $p < \frac{p+q}{2} < q$ eta $\frac{p+q}{2} = r \in \mathbb{Q}$.

Ondorioa. Bi zenbaki arrazionalen artean infinitu zenbaki arrazional daude.

Oharra. $\mathbb{Z}$-n propietate hau ez da betetzen. Hau da, bi zenbaki osoren artean zenbaki osoen kopuru finitua dago soilik.

1.2 Zenbaki errealak

Zenbaki arrazionalak erabiliz, $ax = b$ moduko ekuazioak ebatzi daitezke, a, b edozein bi zenbaki arrazional izanik, $a \neq 0$. Hala ere, badaude soluzio arrazionalik ez duten ekuazio polinomikoak, $x^2 = 2$ ekuazioa adibidez. Ikus dezagun.

Proposizioa 1.1. *Ez da existitzen $x \in \mathbb{Q}$ non $x^2 = 2$ den.*

Froga. Absurdora eramanez, suposatuko dugu $x^2 = 2$ ekuazioak badaukala soluzio arrazionala. Izan bedi $\frac{p}{q}$ zenbaki arrazionala non $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ den, p eta q haien arteko lehenak izanik, $\frac{p}{q}$ laburtezina izan dadin. Orduan,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad p^2 = 2q^2 \quad \Longrightarrow \quad p^2 \text{ bikoitia da} \Longrightarrow \quad p \text{ bikoitia da.}$$

Beraz,

$$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2 \quad \Longrightarrow \quad q^2 = 2k^2 \quad \Longrightarrow \quad q^2 \text{ bikoitia} \quad \Longrightarrow \quad q \text{ bikoitia.}$$

Baina hau ez da posible p eta q haien arteko lehenak direlako. Beraz, suposatu duguna ezin da gertatu, ez da existitzen $x \in \mathbb{Q}$ non $x^2 = 2$ den. □

Oharra. Froga daiteke $x^2 = m$ ekuazioak, m zenbaki oso ez karratu perfektua izanik, ez daukala soluzio arrazionalik.

Kontsidera dezagun zuzen horizontal bat eta finka dezagun zuzen honetan puntu bat, 0 zenbakiarekin identifikatuko duguna. Puntu honen eskuinaldean, finka dezagun beste puntu bat, 1 zenbakiarekin identifikatzen duguna. 0 eta 1 zenbakien arteko zuzenkiaren luzera oinarritzat hartuta zenbaki arruntak identifikatzen ditugu zuzenaren puntuekin. Antzera, zenbaki oso negatiboak 0-ren ezkerraldean kokatzen ditugu.

Izan bitez $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ izanik eta zati ditzagun zenbaki osoek definitzen dituzten zuzenkiak n zati berdinetan. Har ditzagun hauetako m zati 0-tik eskuinaldera m positiboa bada eta $-m$ zati 0-tik ezkerraldera m negatiboa bada. Lortutako puntua $\frac{m}{n}$ zenbaki arrazionalarekin identifikatzen da.

Honela, zenbaki arrazional oro identifikatzen da zuzenaren puntu batekin, baina zuzenaren puntu guztiek ez daukate zenbaki arrazional bat elkartuta.

Egin dezagun 1 luzerako aldeak dituen karratua eta har dezagun bere diagonala. Zuzenki hau 0-n hasita eta eskuinaldera jartzen badugu, zuzenaren puntu bat dagokio baina puntu hori ez dago zenbaki arrazional batekin lotuta.

Ikusi dugu arrazionalak ez diren zenbakiak existitzen direla eta zuzenaren puntuekin erlaziona daitezkela. Zenbaki arrazionalek zuzenean uzten dituzten hutsuneak zenbaki irrazionalak direla diogu. Zenbaki arrazional eta irrazionalek zenbaki errealen multzoa, $\mathbb{R}$, osatzen dute eta $\mathbb{R}$ zuzen batekin identifikatzen da, zuzen erreala deitzen dena.

Zenbaki errealen adierazpen hamartarra

N zenbaki arrunta bada, idatzi daiteke 10 zenbakiaren berreturen polinomio baten modura

$$N = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad , a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ i = 0, \ldots, k.$$

$a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$ N-ren adierazpen hamartarra da. Adibidez,

$$3275 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5.$$

$p, q \in \mathbb{N}$ badira, $q \neq 0$ eta $p < q$, $\dfrac{p}{q}$ zenbaki arrazionalaren adierazpen hamartarra ere eman daiteke.

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} =& \frac{10p}{q} \cdot 10^{-1} = \frac{b_1 q + r_1}{q} \cdot 10^{-1} = b_1 \cdot 10^{-1} + \frac{r_1}{q} \cdot 10^{-1} \\
=& b_1 \cdot 10^{-1} + \frac{10r_1}{q} \cdot 10^{-2} = b_1 \cdot 10^{-1} + \frac{b_2 q + r_2}{q} \cdot 10^{-2} \\
=& b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \frac{r_2}{q} \cdot 10^{-2} \\
=& \ldots \\
=& 0, b_1 b_2 \ldots
\end{aligned}$$

$r_1, r_2, \ldots$ hondarrak q baino txikiagoak dira, beraz bi aukera daude: hondarren bat nulua da eta prozedura bukatzen da, edo hondar bat lehenago agertu den beste hondar baten berdina da eta hortik aurrera zatidurak errepikatzen dira. Beraz, zenbaki arrazional baten adierazpen hamartarra finitua da edo infinitu periodikoa. Adibidez,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} = \frac{10}{8} \cdot 10^{-1} &= 1 \cdot 10^{-1} + \frac{2}{8} \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 10^{-1} + \frac{20}{8} \cdot 10^{-2} \\
&= 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + \frac{4}{8} \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + \frac{40}{8} \cdot 10^{-3} \\
&= 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} = 0,125
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{7}{55} = \frac{70}{55} \cdot 10^{-1} &= 1 \cdot 10^{-1} + \frac{15}{55} \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 10^{-1} + \frac{150}{55} \cdot 10^{-2} \\
&= 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + \frac{40}{55} \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + \frac{400}{55} \cdot 10^{-3} \\
&= 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + \frac{15}{55} \cdot 10^{-3} = 0,12727\ldots
\end{aligned}$$

Badaude infinitu ez periodikoak diren adierazpen hamartarrak. Adierazpen horiek zenbaki irrazionalenak dira: $\sqrt{2}$, π, e,...

Definizioa. Izan bedi $x \in \mathbb{R}$, x-ren zati osoa $[x]$ ikurraren bidez adierazten da eta x baino txikiagoa edo berdina den zenbaki osorik handiena da, hots

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

$x > 0$ bada, orduan x-ren garapen hamartarra $x = N, a_1a_2a_3...$ erakoa da, non $N = [x]$ den eta $a_1, a_2, \ldots$ 0 eta 9-ren arteko zifrak dira.

x zuzen errealaren puntu batekin identifikatzen badugu, bere adierazpen hamartarra lortzeko hurrengo prozedura jarraitu behar da. $[x] = N$ bada, x N eta $N+1$ zenbakien artean dago. N eta $N+1$-en arteko zuzenkia luzera bereko 10 zatitan banatzen dugu. x lehenengo zatian badago, $a_1 = 0$ da, bigarrenean badago $a_1 = 1$ da, eta abar. a_1 finkatu eta gero, $1/10$ luzerako tartea berriro luzera bereko 10 zatitan banatzen da. x zein zatitan dagoen aztertuz a_2 finkatzen da eta berdin jarraitzen da adierazpen hamartarraren hurrengo zifrak lortzeko.

$x < 0$ bada, $-x$ zenbaki positiboaren garapen hamartarrari minus $(-)$ zeinua jartzen diogu aurrean x-ren garapen hamartarra lortzeko.

Zenbaki errealak eta ordena-erlazioa

Lehenago esan dugu zenbakiak ordenatzea ere nahi dugula. Ordenatzeko modu horri propietate batzuk bete ditzala eskatuko diogu.

Definizioa. Izan bedi X multzoa eta $\mathcal{R}$ bere elementuen arteko erlazioa. $\mathcal{R}$ ordena-erlazioa da baldin eta hurrengo propietateak betetzen badira:

(i) $x \in X$ guztietarako, $x\mathcal{R}x$ (erreflexio-propietatea)

(ii) $x, y \in X$ guztietarako, $x\mathcal{R}y$ eta $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$ (antisimetri-propietatea)

(iii) $x, y, z \in X$ guztietarako, $x\mathcal{R}y$ eta $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$ (iragate-propietatea edo propietate transitiboa)

$(X, \mathcal{R})$ multzo ordenatua dela esaten da kasu honetan.

$\mathcal{R}$ ordena-erlazio osoa da baldin eta $x, y \in X$ guztietarako, $x\mathcal{R}y$ edo $y\mathcal{R}x$ bada.

$x \in \mathbb{R}$ bada, x positiboa dela diogu eta $x > 0$ idazten dugu baldin eta zuzen errealean 0-tik eskuinera badago eta x negatiboa da eta $x < 0$ idazten dugu baldin eta $-x > 0$ bada.

$x, y \in \mathbb{R}$ badira, orduan $x > y$ baldin eta $x - y > 0$ bada eta x y baino handiagoa dela diogu (edo $y < x$ idatzi eta y x baino txikiagoa dela esan).

$x, y \in \mathbb{R}$ badira, $x \geq y$ baldin eta $x > y$ edo $x = y$ bada.

$(\mathbb{R}, \geq)$ multzo ordenatua da. Gainera $\geq$ ordena-erlazio osoa da.

Proposizioa 1.2. *Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{R}$ eta $a > b$. Orduan*

(i) $a + c > b + c$

(ii) $c > 0$ *bada,* $ac > bc$

(iii) $c < 0$ *bada,* $ac < bc$.

Froga. (i) $a > b \Longrightarrow a - b > 0 \Longrightarrow a - b + c - c > 0 \Longrightarrow (a + c) - (b + c) > 0 \Longrightarrow a + c > b + c$.

(ii) $a > b \Longrightarrow a - b > 0$ eta $c > 0$ denez, (P12) propietatea erabiliz, $(a - b)c > 0$, hau da $ac - bc > 0 \Longleftrightarrow ac > bc$.

(iii) $c < 0$ bada $-c > 0$ da eta (i) atala aplika dezakegu $-c$-rekin. Orduan, $a(-c) > b(-c) \Longrightarrow -ac > -bc$. Azken desberdintza honetan, $ac + bc$ batuz, $-ac + ac + bc > ac + bc - bc \Longrightarrow bc > ac$. □

Ordena-erlazioa erabiliz, defini daitezke maiz agertzen diren zenbaki errealetako multzo batzuk, tarteak hain zuzen ere.

Definizioa. Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(i) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;

(ii) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;

(iii) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;

(iv) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;

(v) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;

(vi) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$;

(vii) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$;

(viii) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$;

(ix) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Definizioa. Izan bedi $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) A multzoa goi-bornatua dela esaten da baldin eta existitzen bada $M \in \mathbb{R}$ non $a \leq M$ den $a \in A$ guztietarako. M zenbakia A-ren goi-bornea dela diogu.

(ii) A multzoa behe-bornatua dela esaten da baldin eta existitzen bada $m \in \mathbb{R}$ non $m \leq a$ den $a \in A$ guztietarako. m zenbakia A-ren behe-bornea da.

Definizioa. Izan bedi $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) A goi-bornatua bada, $\alpha \in \mathbb{R}$ zenbakia A multzoaren *supremoa* edo *gorena* dela esango dugu, eta $\alpha = \sup A$ idatzi, baldin eta α A-ren goi-bornerik txikiena bada.

A multzoaren supremoa, A-ren elemetua bada, orduan A-ren maximoa dela esaten da eta $\max A$ idatziko dugu.

(ii) Izan bedi A behe-bornatua. $\beta \in \mathbb{R}$ zenbakia A multzoaren *infimoa* edo *beherena* dela esango dugu, eta $\beta = \inf A$ idatzi, baldin eta β A-ren behe-bornerik handiena bada.

A multzoaren infimoa, A-ren elemetua bada, orduan A-ren minimoa dela esaten da eta $\min A$ idatziko dugu.

Adibidea. Kalkulatuko ditugu hurrengo multzoen supremoa, infimoa, maximoa eta minimoa, existitzen direnean.

$A = \{r \in \mathbb{Q} : 1 \leq r \leq 4\}$. Goi-borneak: 5,6,10'45,... Behe-borneak: 1,0,...

Supremoa=4 (maximoa); infimoa=1 (minimoa).

$B = \{r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : 1 \leq r \leq 4\}$. Goi-borneak: 5,6,10'45,... Behe-borneak: 1,0,...

Supremoa=4 (maximoa ez da existitzen); infimoa=1 (minimoa ez da existitzen).

$C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Goi-borneak: 1,2,... Behe-borneak: 0, -3, ...

Supremoa=1 (maximoa); infimoa=0 (minimoa ez da existitzen).

Supremoaren printzipioa edo axioma. Izan bedi $A \subset \mathbb{R}$ multzo ez huts goi-bornatua. Orduan A multzoak $\mathbb{R}$-n supremoa dauka. Hau da, existitzen da $\alpha \in \mathbb{R}$ non $\alpha = \sup A$.

Teorema 1.3 (Infimoaren printzipioa edo axioma)**.** *Izan bedi $B \subset \mathbb{R}$ multzo ez huts behe-bornatua. Orduan B multzoak $\mathbb{R}$-n infimoa dauka. Hau da, existitzen da $\beta \in \mathbb{R}$ non $\beta = \inf B$.*

Froga. Izan bedi $A = \{-x : x \in B\} = -B$. m B-ren behe-bornea bada orduan $-m$ A-ren goi-bornea da. Supremoaren axiomaren ondorioz, A-ren supremoa existitzen da, baina A-ren goi-bornerik txikiena B-ren behe-bornerik handiena izango da, hots, B-ren infimoa existitzen da. $\square$

Printzipio hauek $\mathbb{Q}$ eta $\mathbb{R}$ multzoen arteko desberdintasun bat nabarerazten digute. Zenbaki arrazionalen multzoan, aurreko printzipioak ez dira betetzen, hau da, topa daitezke $\mathbb{Q}$-ko azpimultzo goi- edo behe-bornatuak, non supremoa edo infimoa zenbaki arrazionalak ez diren.

Adibidea. $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$.

A goi- eta behe-bornatua da. Baina supremoa $\sqrt{2}$ da eta ikusi dugu zenbaki hau ez dela arrazionala. Era berean, infimoa, $-\sqrt{2}$, ez da $\mathbb{Q}$-ren elementua.

Aldiz, $\mathbb{R}$-n baldin bagaude, supremoaren (infimoaren) printzipioak ziurtatzen du $\mathbb{R}$-ko azpimultzo goi-bornatu (behe-bornatu) baten supremoa (infimoa) zenbaki erreala izango dela.

Proposizioa 1.4. *(supremo eta infimoaren karakterizazioa) Izan bedi $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.*

(i) Demagun α A multzoaren goi-bornea dela. α A multzoaren supremoa da baldin eta soilik baldin

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists a \in A : \alpha - \epsilon < a.$$

(ii) Demagun β A multzoaren behe-bornea dela. β A multzoaren infimoa da baldin eta soilik baldin

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists b \in A : \beta + \epsilon > b.$$

Froga. (i) Bi inplikazioak frogatu behar ditugu.

$\Longrightarrow$) Suposatzen dugu α A-ren supremoa dela. Izan bedi $\epsilon > 0$. Orduan $\alpha - \epsilon < \alpha$.

$\alpha = \sup A$ denez, A multzoaren goi-bornerik txikiena da beraz $\alpha - \epsilon$ ez da A-ren goi-bornea, hau da, existitzen da $a \in A$ non $\alpha - \epsilon < a$ den.

$\Longleftarrow$) Demagun orain, absurdora eramanez, $\alpha \neq \sup A$. α A-ren goi-bornea denez, $\alpha > \sup A$. Orduan $\alpha - \sup A > 0$. Har dezagun $\epsilon = \alpha - \sup A$. Hipotesiaren arabera, existitzen da $a \in A$ non $\alpha - \epsilon < a$ den, hots, existitzen da $a \in A$ non $\alpha - (\alpha - \sup A) < a$ den. Beraz, existitzen da $a \in A$ non $\sup A < a$ den eta hau ezinezkoa da.

Beraz, suposatu duguna ezin da egia izan eta $\sup A = \alpha$ halabeharrez.

(ii) Berriro bi inplikazio frogatu behar ditugu.

$\Longrightarrow$) $\beta = \inf A$ eta $\epsilon > 0$ direnez, $\beta + \epsilon$ ez da behe-bornea beraz existitzen da $b \in A$ non $b < \beta + \epsilon$.

$\Longleftarrow$) Demagun $\beta \neq \inf A$ eta har dezagun $\epsilon = \inf A - \beta > 0$. Orduan existitzen da $b \in A$ non $\beta + \inf A - \beta > b$ den eta hau kontraesan bat da. $\square$

Proposizioa 1.5 (Arquimedesen printzipioa)**.** *Izan bitez $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y$. Orduan existitu egiten da $n \in \mathbb{N}$ zenbaki arrunta non $nx > y$ den.*

Froga. $x > 0$ denez, y/x zenbaki erreala da eta ez da $\mathbb{N}$ zenbaki arrunten multzoaren goi-bornea, $\mathbb{N}$ goi-bornatua ez delako. Orduan existitzen da $n \in \mathbb{N}$ non $n > y/x$ den, hau da, existitzen da $n \in \mathbb{N}$ non $nx > y$ den. $\square$

Korolarioa 1.6. *$\epsilon > 0$ bada, existitzen da $n \in \mathbb{N}$ non $\dfrac{1}{n} < \epsilon$ den.*

Froga. Arquimedesen printzipioan $x = \epsilon$ eta $y = 1$ hartuz gero,

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad n\epsilon > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad \frac{1}{n} < \epsilon$$

□

Zenbaki errealen arteko distantzia euklidestarra

Ikusi dugu lehenago nola kalkulatzen den distantzia zenbaki arrazionalen artean. Zenbaki errealen kasuan modu berean kalkulatuko ditugu distantziak. Lagungarria da aurretik zenbaki erreal baten balio absolutua definitzea.

Definizioa. $x \in \mathbb{R}$ zenbakiaren balio absolutua, $|x|$ ikurraren bidez adierazten duguna, honako modu honetan definitzen da:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ denean,} \\ -x, & x < 0 \text{ denean.} \end{cases}$$

Oharra. Balio absolutua erabili dezakegu zenbaki errealen arteko distantzia adierazteko. $x, y \in \mathbb{R}$ baldin badira eta beraien arteko distantzia $d(x, y)$, orduan

$$d(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} x - y, & x > y \text{ denean,} \\ 0, & x = y \text{ denean,} \\ y - x, & x < y \text{ denean.} \end{array} \right\} = |x - y|.$$

Proposizioa 1.7. *Izan bitez $x, y \in \mathbb{R}$.*

(i) $|x| \geq 0$ *da* $x \in \mathbb{R}$ *guztietarako eta* $|x| = 0$ *baldin eta soilik baldin* $x = 0$ *bada.*

(ii) $|x| = |-x|$.

(iii) $|x| = \max\{x, -x\} = \sqrt{x^2}$.

(iv) *Balio absolutuaren desberdintza triangeluarra:* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(v) $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$.

(vi) $|xy| = |x||y|$.

Froga. (i) $x \geq 0$ bada, $|x| = x \geq 0$ eta $x < 0$ bada, $-x > 0$ da eta $|x| = -x \geq 0$.

(ii) $x \geq 0$ bada, $-x \leq 0$, beraz, $|x| = x$ eta $|-x| = -(-x) = x$.

$x < 0$ bada, $-x > 0$ da, beraz, $|x| = -x$ eta $|-x| = -x$.

Beraz, $|x| = |-x|$, $x \in \mathbb{R}$ guztietarako.

(iii) $x \geq 0$ bada, orduan $-x \leq 0$, hau da, $-x \leq 0 \leq x$. Beraz, $|x| = x$ eta $\max\{x, -x\} = x$.

$x < 0$ bada, $-x > 0$, hau da, $x < 0 < -x$. Beraz, $|x| = -x$ eta $\max\{x, -x\} = -x$.

Hau da, $|x| = \max\{x, -x\}$, $x \in \mathbb{R}$ guztietarako.

(iv) $|x| = \max\{x, -x\}$ denez, $x \leq |x|$ eta $-x \leq |x|$ $x \in \mathbb{R}$ guztietarako. Beraz,

$$\begin{aligned} x \leq |x| \text{ eta } y \leq |y| &\Longleftrightarrow x + y \leq |x| + |y| \\ -x \leq |x| \text{ eta } -y \leq |y| &\Longleftrightarrow -(x + y) \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

Ondorioz,

$$\max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x| + |y|$$

eta (iii) atalaren arabera, $\max\{x + y, -(x + y)\} = |x + y|$ denez,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

(v)

$$\begin{aligned} |x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| &\Longrightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \\ |y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x| &\Longrightarrow |y| - |x| \leq |y - x| \end{aligned}$$

Hau da,

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \iff \Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$$

□

Proposizioa 1.8. *Izan bitez $x \in \mathbb{R}$ eta $r > 0$.*

(i) $|x| \leq r \Longleftrightarrow -r \leq x \leq r$.

(ii) $|x| \geq r \Longleftrightarrow x \leq -r$ *edo* $x \geq r$.

Froga. $|x| = \max\{x, -x\}$, beraz,

(i) $|x| \leq r \Longleftrightarrow \max\{x, -x\} \leq r \Longleftrightarrow x \leq r$ eta $-x \leq r \Longleftrightarrow x \leq r$ eta $x \geq -r$.

(ii) $|x| \geq r \Longleftrightarrow \max\{x, -x\} \geq r \Longleftrightarrow x \geq r$ edo $-x \geq r \Longleftrightarrow x \geq r$ edo $x \leq -r$.

□

Puntu batetik emandako kantitate positibo bat baino txikiagoa den distantzia batera dauden puntuek osatzen duten tarteak maiz erabiliko ditugu.

Definizioa. Izan bitez $\alpha \in \mathbb{R}$ eta $\epsilon > 0$.

(i) $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - \alpha| < \epsilon\}$ α-ren ingurunea dela esaten da. x zentrua da eta ϵ erradioa.

(ii) $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) - \{\alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < |x - \alpha| < \epsilon\}$ α-ren ingurune laburtua dela esaten da.

1.3 Zenbaki konplexuak

Zenbaki errealen multzoa ez da nahikoa ekuazio polinomiko batzuk ebazteko. Adibidez, ez da existitzen $x \in \mathbb{R}$ non $x^2 = -1$ den. Arazo hau konpontzeko, berriro, zenbaki-multzo oraindik handiago bat behar dugu, baina zenbaki errealak eta beraien propietate nagusiak mantentzen dituena.

Kontsideratuko dugu zenbaki berri bat, i ikurrarekin adieraziko duguna, non $i^2 = -1$ den. Zenbaki errealek multzo berrian egon behar dutenez eta batuketa eta biderketa ondo definiturik egotea nahi dugunez, $x + yi$ moduko zenbakiak, $x, y \in \mathbb{R}$ izanik, multzo berrian egongo dira.

Zenbaki konplexuen multzoa $\mathbb{C}$ ikurraren bidez adieraziko dugu eta honela definitu

$$\mathbb{C} = \{x + yi : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$z = x + yi$ z zenbaki konplexuaren adierazpen binomikoa da. x z-ren parte erreala eta y z-ren parte irudikaria direla diogu eta $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ idatzi ohi da. i zenbakia unitate irudikaria da.

Multzo honetan batuketa eta biderketa definituko ditugu hurrengo moduan: $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ badira,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 =& x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i, \\ z_1 z_2 =& x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \end{aligned}$$

Erraz konproba daiteke $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ gorputz trukakorra dela. Bereziki, biderketarako alderantzizkoa existitzen da. Ikus dezagun. Izan bedi $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $z = x + yi$. $z^{-1} = u + vi$ bada,

$$z \cdot z^{-1} = 1 \Longrightarrow (x + yi)(u + vi) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} xu - yv = 1 \\ xv + yu = 0 \end{cases}$$

Bigarren ekuaziotik $v = -\dfrac{uy}{x}$ eta hau lehenengo ekuazioan ordezkatuz

$$xu + \frac{uy^2}{x} = 1 \Longrightarrow \frac{(x^2 + y^2)u}{x} = 1 \Longrightarrow u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \ v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Hau da, $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2} i$.

Teorema 1.9. *(Algebraren oinarrizko teorema) Izan bedi P koefiziente konplexuetako n mailako polinomioa, $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$ eta $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ guztietarako. Orduan, P-k n erro konplexu ditu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$,*

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n).$$

Definizioa. Izan bedi $z = x + yi \in \mathbb{C}$. z-ren konjokatua honela definitzen da:

$$\overline{z} = x - yi.$$

Adibidea. $\overline{3-i} = 3 + i$, $\overline{2+5i} = 2 - 5i$.

Proposizioa 1.10 (Konjokatuaren propietateak)**.** *Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$.*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$.

(ii) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

(iii) $z = \overline{z} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.

(iv) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

(v) $\overline{-z} = -\overline{z}$, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$, $z \neq 0$ *bada.*

Zenbaki konplexuen adierazpen polarra

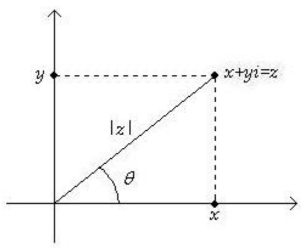
Zenbaki errealak zuzen horizontal baten puntuekin identifikatzen diren bezala, zenbaki konplexuak planoko puntuekin identifika daitezke. Parte erreala zuzen horizontal batean eta parte irudikaria zuzen bertikal batean jarriz, $x + yi = (x, y)$ identifikazioa egiten da.

Zuzen horizontala ardatz erreala da eta zuzen bertikala ardatz irudikaria.

Baina planoko puntuak deskriba daitezke beste bi kantitate emanez.

Definizioa. Izan bedi $z \in \mathbb{C}$. z-ren modulua jatorria eta z puntua lotzen dituen zuzenkiaren luzera da eta $|z|$ ikurraren bidez adierazten da.

Izan bedi $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. z-ren argumentua jatorria eta z puntua lotzen dituen zuzenkiak ardatz erreal positiboarekin osatzen duen angelua da.



z-ren argumentua ez da bakarra. θ z-ren argumentua bada, orduan $\theta+2k\pi$ ere z-ren argumentua da, $k \in \mathbb{Z}$ edozein izanik.

z-ren argumentu nagusia $(-\pi, \pi]$ tartean dagoen z-ren argumentua da eta $\arg z$ ikurraren bidez adierazten da. $\operatorname{Arg} z$ ikurraren bidez z-ren argumentu guztiek osatzen duten multzoa adieraziko dugu, hots,

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Adibideak.

- $\arg i = \dfrac{\pi}{2}$,

  $\operatorname{Arg} i = \{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- $\arg 1 = 0$,

  $\operatorname{Arg} 1 = \{2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- $\arg(-1-i) = -\dfrac{3\pi}{4}$,

  $\operatorname{Arg}(-1-i) = \{-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Izan bedi $z \in \mathbb{C}$. $x = \operatorname{Re} z$ eta $y = \operatorname{Im} z$ badira, orduan

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}.$$

Bereziki,

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), & x>0 \text{ denean,} \\ \arctan(y/x)+\pi, & x<0, y\geq 0 \text{ direnean,} \\ \arctan(y/x)-\pi, & x<0, y<0 \text{ direnean,} \\ \pi/2, & x=0, y>0 \text{ direnean,} \\ -\pi/2, & x=0, y<0 \text{ direnean.} \end{cases}$$

Bestalde, $r = |z|$ eta $\theta \in \operatorname{Arg} z$ badira,

$$\operatorname{Re} z = r\cos\theta, \quad \operatorname{Im} z = r\sin\theta.$$

Euleren formula. $\theta \in \mathbb{R}$ guztietarako

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Definizioa. Izan bedi $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. $|z| = r$ eta $\theta \in \operatorname{Arg} z$ badira, z-ren adierazpen polarra honako hau da

$$z = re^{i\theta}.$$

Proposizioa 1.11 (Moduluaren propietateak)**.** *Izan bitez* $z, w \in \mathbb{C}$.

(i) $|z| = 0 \iff z = 0$.

(ii) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, *beraz* $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$ *bada.*

(iii) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

(iv) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$,
$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

(v) $|zw| = |z|\,|w|$.

(vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(vii) $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Proposizioa 1.12 (Argumentuaren propietateak)**.** *Izan bitez* $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$.

(i) $\arg z = 0 \iff z \in \mathbb{R}^+$, $\arg z = \pi \iff z \in \mathbb{R}^-$.

(ii) $\arg \overline{z} = -\arg z$.

(iii) $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$, *baina* $\arg(zw) \neq \arg z + \arg w$ *izan daiteke.*

(iv) $\arg(z^{-1}) = -\arg z$.

Adierazpen polarrean biderkadura, alderantziko eta zatiduraren kalkulua adierazpen binomikoan baino askoz sinpleagoa da. Izan bitez $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$. Orduan,

- $z \cdot w = re^{i\theta}\rho e^{i\varphi} = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$,
- $z^{-1} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$,
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi}} = \dfrac{r}{\rho}e^{i(\theta-\varphi)}$.

Berreturak ere errezago kalkulatzen dira adierazpen polarra erabiliz.

$z = re^{i\theta}$ baldin bada eta $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}.$$

Hau da, $|z^n| = |z|^n$ eta $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$.

Adibidea. $(1+i)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3 = -2 + 2i$.

Edo $(1+i)^3 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^3 = 2^{3/2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2 + 2i$.

De Moivre-ren formula. $z = e^{i\theta}$ hartuz,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Adibidea. $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$ beraz, parte errealak eta parte irudikariak berdinduz,

$$\begin{aligned} \cos^2\theta - \sin^2\theta &= \cos(2\theta), \\ 2\cos\theta\sin\theta &= \sin(2\theta). \end{aligned}$$

Zenbaki konplexen erroak ere adierazpen polarra erabiliz kalkulatzen dira. Izan bitez $z \in \mathbb{C}$ eta $n \in \mathbb{N}$. $z \neq 0$ bada, orduan z-k n n-garren erro desberdin ditu, hau da, aurki daitezke $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ non $w_i^n = z$ den $i = 1, \ldots, n$ guztietarako, eta $w_i \neq w_j$, $i \neq j$ denean. Ikus dezagun.

Izan bitez $z = re^{i\theta}$, $\theta = \arg z$ izanik, eta $w = \rho e^{i\varphi}$, non $w^n = z$ den. Orduan, $k \in \mathbb{Z}$ bada,

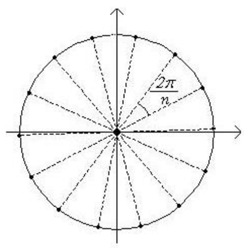
$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)} \implies \rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

k-ri balioak emanez,

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta}{n}i} \\ w_1 &= \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2\pi}{n}i} \\ &\cdots\cdots \\ w_{n-1} &= \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}i} \\ w_n &= \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2n\pi}{n}i} = \sqrt[n]{r}e^{(\frac{\theta}{n}+2\pi)i} = w_0, \end{aligned}$$

eta hemendik aurrera errepikatzen dira lortutako balioak. Ondorioz, $w_0, \ldots, w_{n-1}$ dira z-ren n-garren erro desberdinak. Hots,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\arg z+2k\pi}{n}i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

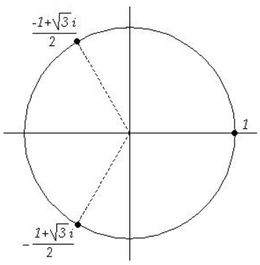


Erro guztien modulua berdina da, $\sqrt[n]{|z|}$ eta beraz z-ren n-garren erroak $\sqrt[n]{|z|}$ erradiodun zirkunferentziaren gainean daude. Gainera ondoz-ondoko erroen arteko angelua $\dfrac{2\pi}{n}$ anplitudekoa da.

Adibidea. $z = 1$ zenbakiaren erro kubikoak.

$z = 1 = e^{0i} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i}$, beraz,

$$\begin{aligned} w_1 =& \sqrt{1}e^{\frac{0}{3}i} = e^{0i} = 1, \\ w_2 =& \sqrt{1}e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ w_3 =& \sqrt{1}e^{\frac{4\pi}{3}i} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$



Zenbaki konplexuak eta ordena-erlazioa

Ikusi dugu zenbaki errealen multzoan ordena erlazio oso bat existitzen dela. Zenbaki konplexuen kasuan ezin da ordena erlazio batek betetzen dituen propietateak betetzen dituen ordena erlaziorik definitu.

Zenbaki konplexuen arteko distantzia

Definizioa. Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$. z eta w zenbakien arteko distantzia honela definitzen da:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Definizioa. Izan bitez $z_0 \in \mathbb{C}$ eta $R, R_1, R_2 > 0$.

- $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ z_0 puntuan zentratutako eta R erradioko bola irekia da.
- $\overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ z_0 puntuan zentratutako eta R erradioko bola itxia da.
- $A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ z_0 puntuan zentratutako eta R_1 eta R_2 erradioetako eraztuna da.

2. Gaia

Zenbaki errealen segidak

2.1 Oinarrizko definizioak eta adibideak

Zenbaki errealen segida, zenbaki errealen zerrenda ordenatu eta infinitua da. Zerrenda ordenatua izateak zerrenda horretako elementu bakoitzak "toki" bat betetzen duela adierazten du.

Ideia honen arabera, $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ eta $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$ zerrendak zenbaki errealen segidak dira. Aldiz, $(0, 1)$ tarteko puntuek ez lukete segida bat osatuko, ezinezkoa baita esatea zein den lehenengo gaia edo zein hamargarrena.

Definizioa. *Zenbaki errealen segida* zenbaki arrunten multzotik zenbaki errealen multzora doan aplikazio edo funtzioa da, hots:

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\to a(n) \end{aligned}$$

$a(n)$-k, hau da, n zenbaki arruntaren irudiak a segidaren bidez, segidaren n-garren lekuan dagoen zenbaki erreala adierazten du. Normalean segidaren n-garren gaia a_n-z adieraziko dugu, gai honek segidaren *gai orokorra* izena duelarik.

$$a(n) = a_n = a \text{ segidaren gai orokorra.}$$

Orokorrean, segida bat funtzio edo aplikazio baten moduan adierazi beharrean, segidaren lehenengo gaiak edo gai orokorraren adierazpena emanez adieraziko dugu: $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Oharra. Ez dira segida eta segidaren gaiek osatzen duten multzoa nahastu behar. Adibidez, $a_n = (-1)^n$ bada, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, 1, -1, 1, \dots, \}$ baina bakarrik bi zenbaki desberdin agertzen dira.

Adibideak:

- $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ segida bat da. Segida hau definitzen duen aplikazioa hurrengoa da:

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\to a(n) = n. \end{aligned}$$

  Beraz, segida honen gai orokorra $a_n = n$ da. Hau da, segida hau adierazteko hurrengo eran egingo dugu: $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

- $\{1, 4, 9, 16, \dots\} = \{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$ segidaren kasuan argi ikusten da toki bakoitietan dauden gaiak negatiboak direla eta toki bikoitietan daudenak, aldiz, positiboak. Gai orokorra kasu honetan hurrengoa da: $a_n = (-1)^n n$.
- Batzuetan, formula errepikari baten bidez definitzen da segida, hau da, segidaren gai bat kalkulatzeko formula bat aplikatzen zaio aurreko gaiari. Adibidez,

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{2}{a_n}\Big), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

  Honen arabera,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= \frac{1}{2}\Big(a_1 + \frac{2}{a_1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{2}{1}\Big) = \frac{3}{2}, \\ a_3 &= \frac{1}{2}\Big(a_2 + \frac{2}{a_2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\Big) = \frac{17}{12}, \\ &\dots \end{aligned}$$

- Batzuetan, n-garren gaia kalkulatzeko formula desberdinak erabili daitezke, n-ren balioen arabera. Adibidez,

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}, & n \text{ bakoitia bada,} \\ a_n = \dfrac{2^n+1}{2^n-1}, & n \text{ bikoitia bada..} \end{cases}$$

  Hemen, $a_1 = \dfrac{1+1}{1^2+1} = 1$, $a_2 = \dfrac{2^2+1}{2^2-1} = \dfrac{5}{3}$, $a_3 = \dfrac{3+1}{3^2+1} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$, ...

Definizioa. Izan bedi $d \in \mathbb{R}$. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segida aritmetikoa* dela esango dugu baldin eta

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d, \quad \forall\, n \geq 2$$

bada. d zenbakia segidaren *diferentzia* dela diogu.

Adibideak:

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ $d = 1$ diferentziaduneko segida aritmetikoa da.

$\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\right\}$ $d = \frac{1}{2}$ diferentziaduneko segida aritmetikoa da.

$\{1, -2, -5, -8, \dots\}$ $d = -3$ diferentziaduneko segida aritmetikoa da.

Proposizioa 2.1 (Segida aritmetiko baten lehenengo n gaien batura)**.** *Izan bitez $d \in \mathbb{R}$ eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d diferentziaduneko segida aritmetikoa. Orduan*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Froga.

$$\begin{aligned} S_n =& a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ =& a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d), \\ S_n =& a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 \\ =& (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \cdots + a_1. \end{aligned}$$

Bi adierazpen hauen batura kalkulatuz,

$$\begin{aligned} 2S_n =& (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \cdots + (2a_1 + (n-1)d) \\ =& n\,(2a_1 + (n-1)d) = n\,(a_1 + a_1 + (n-1)d) \\ =& n(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

Beraz, $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n.$ □

Definizioa. Izan bedi $r \in \mathbb{R}$. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segida geometrikoa* dela diogu baldin eta

$$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}, \quad \forall\, n \geq 2$$

bada. r segida geometrikoaren *arrazoia* dela esan ohi da.

Adibideak:

$\left\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots\right\}$ $r = \frac{1}{10}$ arrazoiduneko segida geometrikoa da.

$\{-3, -6, -12, -24, \dots\}$ $r = 2$ arrazoiduneko segida geometrikoa da.

$\left\{\frac{1}{5}, -\frac{1}{5^2}, \frac{1}{5^3}, -\frac{1}{5^4}, \dots\right\}$ $r = -\frac{1}{5}$ arrazoiduneko segida geometrikoa da.

Proposizioa 2.2 (Segida geometriko baten lehenengo n gaien batura)**.** *Izan bitez $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$ eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ r arrazoiduneko segida geometrikoa. Orduan*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Froga.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}, \\ rS_n &= a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n. \end{aligned}$$

Bi adierazpen hauen kendura hurrengoa da

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n \quad \Longrightarrow \quad S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}.$$

□

Definizioak. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *goitik bornatua* dela diogu baldin eta

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad : \quad a_n \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *behetik bornatua* dela diogu baldin eta

$$\exists\, m \in \mathbb{R} \quad : \quad a_n \geq m, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(iii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *bornatua* dela diogu baldin eta goi- eta behetik bornatua bada, hots

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \quad : \quad |a_n| \leq K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definizioak. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *gorakorra* dela diogu baldin eta

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \quad m > n \Longrightarrow a_m \geq a_n.$$

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *beherakorra* dela diogu baldin eta

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \quad m > n \Longrightarrow a_m \leq a_n.$$

Segida hauek segida monotonoak direla esan ohi da.

Proposizioa 2.3. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.*

(i) Existitzen bada $n_0 \in \mathbb{N}$ non $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ gorakorra den, orduan $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ behetik bornatua da.

(ii) Existitzen bada $n_0 \in \mathbb{N}$ non $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ beherakorra den, orduan $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua da.

2.2 Zenbaki errealen segiden limitea

Definizioa. Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida eta $l \in \mathbb{R}$. l zenbakia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren *limitea* dela diogu eta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ moduan adieraziko dugu, edo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidak l-rantz jotzen duela diogu eta $a_n \to l$ moduan adieraziko dugu baldin eta

$$\forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \epsilon.$$

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq n_0 \quad a_n > M.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq n_0 \quad a_n < M.$

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida. Baldin eta existitzen bada $l \in \mathbb{R}$ non $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ den, orduan $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *konbergentea* dela diogu. Bestela, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dibergentea* dela esaten da.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bada, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $+\infty$-rantz *dibergentea* dela diogu.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ bada, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $-\infty$-rantz *dibergentea* dela diogu.

(iii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidak ez badu limite errealik ez eta limite infiniturik ere, *oszilatzailea* dela esaten da.

Adibideak.

- $a_n = a$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

  Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $|a_n - a| = 0 < \epsilon$, beraz $n_0 = 1$ hartuz, betetzen da limitearen definizioa, $l = a$ izanik.

- $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

  Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. Arquimedesen propietatearen ondorio bezala, ikusi genuen existitzen dela $n_0 \in \mathbb{N}$ non $\dfrac{1}{n} < \epsilon$ den. Gainera, $\forall\, n \geq n_0$, $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0}$ beraz,

  $$\forall\, n \geq n_0 \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

  Hau da, betetzen da limitearen definizioa $l = 0$ izanik.

- $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

  Izan bedi $M \in \mathbb{R}$ edozein. $n_0 > M$ hartuz, $n \geq n_0$ guztietarako, $n \geq n_0 > M$ beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

- $a_n = 1 - n$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

  Izan bedi $M \in \mathbb{R}$ edozein. $n_0 > -M + 1$ hartuz $n \geq n_0$ guztietarako, $1 - n \leq 1 - n_0 < M$ beraz, $\lim_{n\to\infty}(1-n) = -\infty$.

- $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oszilatzailea da.

  Kasu honetan $a_n = 1$ da, n bikoitia denean eta $a_n = -1$, n bakoitia denean.

  $l = 1$ ezin da izan zeren eta $\epsilon = 1$ hartuz, $n_0 \in \mathbb{N}$ guztietarako existituko baita n bakoitia $n \geq n_0$ eta orduan $|a_n - 1| = |-1-1| = 2 > \epsilon$.

  $l = -1$ ezin da izan, $\epsilon = 1$ hartuz, $n_0 \in \mathbb{N}$ guztietarako existituko delako n bikoitia $n \geq n_0$ eta beraz $|a_n + 1| = |1+1| = 2 > \epsilon$.

  $l \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ bada, ezin da ere $\{a_n\}$ segidaren limitea izan.

  $\epsilon = \dfrac{\min\{|l-1|, |l+1|\}}{2} > 0$ hartzen badugu, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako

  $$|a_n - l| = \left\{\begin{matrix} |1-l| & n \text{ bikoitia bada} \\ |-1-l| & n \text{ bakoitia bada}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} |1-l| & n \text{ bikoitia bada} \\ |1+l| & n \text{ bakoitia bada}\end{matrix}\right\} > \epsilon.$$

  Beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ez da zenbaki erreala eta argi ikusten da limitea ere ezin dela infinitua izan. Ondorioz, $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida oszilatzailea da.

Teorema 2.4 (Limitearen bakartasuna)**.** *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea bada, orduan bere limitea bakarra da, hots*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \textit{eta} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = m \quad \Longrightarrow \quad l = m.$$

Froga. Absurdora eramanez, suposa dezagun existitzen direla $l, m \in \mathbb{R}$ non $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = m$ eta $l \neq m$.

Izan bedi $\epsilon = \dfrac{|l-m|}{2} > 0$. Orduan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_1 = n_1\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_1 \quad |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Era berean,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = m \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_2 = n_2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_2 \quad |a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Izan bedi $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Orduan, $n \geq n_0$ bada

$$|l - m| \leq |l - a_n| + |a_n - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon = \frac{|l-m|}{2}$$

eta hau ez da posible $|l - m|$ zenbaki positiboa delako. Beraz, $l = m$, hau da, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren limitea bakarra da. □

Proposizioa 2.5. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea. Orduan $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida bornatua da.*

Froga. Izan bedi $l \in \mathbb{R}$ segidaren limitea, hau da

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \epsilon.$$

Har dezagun $\epsilon = 1$. Orduan existitzen da $n_1 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_1$ guztietarako, $|a_n - l| < 1$. Orduan $n \geq n_1$ bada $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < |l| + 1$.

Izan bedi $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots |a_{n_1}|, 1 + |l|\}$.

$$|a_n| \leq K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Beraz, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua da. □

Oharra. Aurreko proposizioaren alderantzizkoa orokorrean ez da egia. Hau da, segida bornatuak ez dira orokorrean konbergenteak. Adibidez, $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua da baina ez da konbergentea.

Teorema 2.6. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.*

(i) *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida gorakorra eta goitik bornatua bada, orduan konbergentea da eta*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida beherakorra eta behetik bornatua bada, orduan konbergentea da eta*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Froga. (i) Izan bedi $\alpha = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Supremoaren karakterizazioagatik edozein $\epsilon > 0$ emanda, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $\alpha - \epsilon < a_{n_0}$ den. Gainera, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gorakorra denez, $n \geq n_0$ guztietarako $a_n \geq a_{n_0} > \alpha - \epsilon$ da.

Bestaldetik, α segidaren goi-borne bat denez, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $a_n \leq \alpha < \alpha + \epsilon$. Beraz,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

(ii) Izan bedi orain $\beta = \inf\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Infimoaren karakterizazioagatik $\epsilon > 0$ bakoitzerako existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $a_{n_0} < \beta + \epsilon$ den. Gainera, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beherakorra denez, $n \geq n_0$ bada $a_n \leq a_{n_0} < \beta + \epsilon$.

Aldi berean, β segidaren behe-borne bat denez, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $a_n \geq \beta > \beta - \epsilon$. Beraz,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \beta - \epsilon < a_n < \beta + \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \beta.$$

□

2.3 Infinitesimoak

Proposizioa 2.7. *Izan bitez* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eta* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zenbaki errealen segidak. Baldin eta* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segida bornatua bada eta* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *bada, orduan* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Froga. Frogatu behar duguna hurrengoa da:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |a_n b_n| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua denez, existitzen da $M > 0$ non $|a_n| < M$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ denez, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $|b_n| < \dfrac{\epsilon}{M}$.

Beraz, $n \geq n_0$ guztietarako $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < M\dfrac{\epsilon}{M} = \epsilon$, frogatu nahi genuen bezala. □

Adibidea. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^2)}{n} = 0$.

$a_n = \sin(n^2)$ eta $b_n = \dfrac{1}{n}$ baldin badira, $|\sin(n^2)| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, hau da, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida bornatua da, eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ dela ikusi dugu. Ondorioz, aurreko proposizioaren arabera, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^2)}{n} = 0$.

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *infinitesimoa* dela diogu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bada.

Proposizioa 2.8. *Izan bitez* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eta* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *infinitesimoak. Orduan* $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eta* $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ere infinitesimoak dira.*

Froga. Lehenengo eta behin, frogatuko dugu $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa dela, hau da $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$ dela. Izan bedi $\epsilon > 0$, edozein.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad &\Longrightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \geq n_1 \quad |a_n| < \frac{\epsilon}{2},\\
\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad &\Longrightarrow \exists\, n_2 \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \geq n_2 \quad |b_n| < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Orduan, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ bada, $n \geq n_0$ guztietarako,

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

frogatu nahi genuen bezala.

Bestalde, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa bada, konbergentea denez bornatua da eta ikusi dugu infinitesimo bat biderkatzen badugu segida bornatu batekin infinitesimo bat lortzen dela, beraz, $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa da. □

Proposizioa 2.9. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segidak eta demagun $|a_n| \leq |b_n|$ dela $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Orduan, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa bada, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ere infinitesimoa da.*

Adibidea. Aurreko adibidean proposizio hau ere erabili daiteke, limitea kalkulatzeko.

$$\left|\frac{\sin n^2}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{eta} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2}{n} = 0.$$

Proposizioa 2.10. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida eta $l \in \mathbb{R}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ baldin eta soilik baldin $\{a_n - l\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa bada.*

2.4 Limiteak eta eragiketa algebraikoak

Teorema 2.11. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bi segida konbergente non $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ diren.*

(i) $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segida konbergentea da eta*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b.$$

(ii) $\{a_n\, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segida konbergentea da eta*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ab.$$

(iii) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{c\, a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segida konbergentea da eta*

$$\lim_{n\to\infty} (c\, a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n = c\, a.$$

(iv) Baldin eta $b \neq 0$ bada, orduan $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ non $\forall\, n \geq n_0$ $b_n \neq 0$ eta beraz $\{1/b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida da. Gainera

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}.$$

(v) Baldin eta $b \neq 0$ bada, orduan $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da eta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

(vi) Baldin eta $a > 0$ bada, $\{{a_n}^{b_n}\}$ ere konbergentea da eta

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = a^b.$$

Oharra. Hurrengoa ere froga daiteke:

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \implies \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \implies \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty$.

(v) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

(vi) Existitzen bada $n_0 \in \mathbb{N}$ non $a_n \geq 0$ den $n \geq n_0$ guztietarako eta $\lim_{n\to\infty} a_n = a < 1$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, orduan $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = 0$.

(vii) $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 1$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, orduan $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = +\infty$.

Oharra. Hurrengo kasuetan indeterminazioak agertzen direla esan ohi da:

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ??$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ??$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ??$

(iv) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \implies \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = ??$

(v) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \implies \lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = ??$

(vi) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = ??$

(vii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = ??$

2.5 Limiteak eta ordena-erlazioa

Teorema 2.12. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida konbergenteak, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ izanik. Orduan*

$$a < b \quad \implies \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n < b_n.$$

Froga. $a < b$ denez $\dfrac{b-a}{2} > 0$ da. Har dezagun beraz $\epsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$.

$$\begin{array}{lcccl}
\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a & \Longrightarrow & \exists\, n_1 \in \mathbb{N} & : & \forall\, n \geq n_1 \quad |a_n - a| < \dfrac{b-a}{2}; \\
\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b & \Longrightarrow & \exists\, n_2 \in \mathbb{N} & : & \forall\, n \geq n_2 \quad |b_n - b| < \dfrac{b-a}{2}.
\end{array}$$

Izan bedi $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. $n \geq n_0$ guztietarako

$$\begin{array}{rcl}
a_n - a \leq |a_n - a| < \dfrac{b-a}{2} & \Longrightarrow & a_n < \dfrac{b-a}{2} + a = \dfrac{b+a}{2}; \\
b - b_n \leq |b_n - b| < \dfrac{b-a}{2} & \Longrightarrow & b_n > b - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{b+a}{2}.
\end{array}$$

Hau da, $a_n < \dfrac{b+a}{2} < b_n$, $\forall\, n \geq n_0$. □

Oharra. Baldin eta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ badira, $a \leq b$ izateak ez du behartzen $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$.

Adibidez,

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \text{ denean}, \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2k \text{ denean}; \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 2k-1 \text{ denean}, \\ 0, & n = 2k \text{ denean}. \end{cases}$$

Kasu honetan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, hau da $a = b = 0$, baina ez da existitzen $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ guztietarako $a_n \leq b_n$ edo $b_n \leq a_n$.

Teorema 2.13. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bi segida konbergente $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ direlarik. Baldin eta n-ren infinitu baliotarako $a_n \leq b_n$ bada, orduan $a \leq b$.*

Froga. Absurdora eramanez, demagun $a > b$ dela. Orduan, aurreko teoremaren arabera, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $a_n > b_n$ den. Baina hau gure hipotesiaren kontra doa. Beraz $a \leq b$ halabeharrez. □

Oharra. Baldin eta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ badira, orduan n-ren infinitu baliotarako $a_n < b_n$ izateak ez du zertan $a < b$ eman.

Adibidez, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\dfrac{1}{n+25}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ badira, $a_n < b_n$ $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, baina $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Hau da $a = b$.

Teorema 2.14 (Tarteko segidaren teorema edo sandwicharen erregela)**.** *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segidak eta demagun existitzen dela $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $a_n \leq b_n \leq c_n$ den. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergenteak badira $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$ izanik, orduan $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea da eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$ da.*

Froga. Izan bedi $\epsilon > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad\Longrightarrow\quad \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \quad:\quad \forall\, n \geq n_1 \quad |a_n - l| < \epsilon,$$
$$\lim_{n\to\infty} c_n = l \quad\Longrightarrow\quad \exists\, n_2 \in \mathbb{N} \quad:\quad \forall\, n \geq n_2 \quad |c_n - l| < \epsilon.$$

Izan bedi $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$.

$$\begin{aligned} l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \quad & \forall\, n \geq n_1, \\ l - \epsilon < c_n < l + \epsilon \quad & \forall\, n \geq n_2, \\ a_n \leq b_n \leq c_n \quad & \forall\, n \geq n_0. \end{aligned}$$

Beraz, $n \geq n_3$ guztietarako

$$l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon \quad\Longleftrightarrow\quad |b_n - l| < \epsilon.$$

Hau da, $\lim_{n\to\infty} b_n = l$. □

Adibidea. Izan bedi $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$. Kalkula dezagun bere limitea, sandwicharen erregela erabiliz. Alde batetik,

$$a_n \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$$

Beste aldetik,

$$a_n \geq \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n}.$$

Azkenik,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+n} = 1.$$

Beraz, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Proposizioa 2.15. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segidak. Baldin eta $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bada eta existitzen bada $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $a_n \leq b_n$ den orduan $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$*

Modu berean, baldin eta $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ bada eta existitzen bada $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ guztietarako $a_n \leq b_n$ den, orduan $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

2.6 Segida garrantzitsu batzuen limiteak

Proposizioa 2.16 (segida esponentzialaren portaera)**.** . *Izan bedi $a \in \mathbb{R}$.*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \text{ denean,} \\ 1 & a = 1 \text{ denean,} \\ +\infty & a > 1 \text{ denean,} \\ \nexists & a \leq -1 \text{ denean.} \end{cases}$$

Proposizioa 2.17. *Izan bedi $a > 0$.*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Oharra. Korolario gisa, baldin eta $P_k(n)$ n aldagaian emandako k maila finkoko polinomioa bada, orduan

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1.$$

Teorema 2.18. *Izan bitez $a > 1$ zenbaki erreala eta $k \in \mathbb{N}$ finkoa. Orduan:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Hau guztia hurrengo moduan laburbildu ohi da:

$$n^k << a^n << n! << n^n, \quad \forall\, a > 1, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Adibideak:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 8n^5}{3n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3n^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{8n^5}{3n^n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n(n^3-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^3-1} = +\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{3n}}{(3n)!} = \lim_{m\to\infty} \frac{e^m}{m!} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n^5+6n^2-1)}{7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{\left(\frac{7}{2}\right)^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2}{\left(\frac{7}{2}\right)^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{7}{2}\right)^n} = 0.$$

Proposizioa 2.19 (Stirlingen formula)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Beraz, segida baten limitean agertzen bada $n!$ biderkatzen edo zatitzen, $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ balioagatik ordezka daiteke.

Adibidea.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n}{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} 2\sqrt{\pi n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = 0.
\end{aligned}$$

2.7 Segiden limiteak kalkulatzeko zenbait metodo

Proposizioa 2.20. *Demagun* $P(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$*, non* $a_k \neq 0$ *den eta* $Q(n) = b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0$*, non* $b_l \neq 0$ *den. Orduan*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{b_l}, & k = l \text{ bada,} \\ +\infty, & k > l \text{ eta } \dfrac{a_k}{b_l} = 0 \text{ badira,} \\ -\infty, & k > l \text{ eta } \dfrac{a_k}{b_l} < 0 \text{ badira,} \\ 0, & k < l \text{ bada.} \end{cases}$$

Adibideak.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n-2}{2n^2-1} = \frac{4}{2} = 2.$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+3n-2}{2n^2-1} = +\infty.$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n^2-1} = 0.$

Proposizioa 2.21. *Izan bedi* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *eta demagun* f *funtzio jarraitua dela* l *puntuan. Orduan*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(l).$$

Adibideak.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{en^3-4}{2n^3}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{en^3-4}{2n^3}\right) = \ln\frac{e}{2} = 1 - \ln 2.$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sin\frac{(-1)^n}{n} = \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$

Proposizioa 2.22. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *segida gorakor bornatua dela, beraz konbergentea. Bere limiteari e deitzen zaio.*

Modu berean $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ *da* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *denean.*

Korolarioa 2.23. *Izan bitez* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ *eta* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$*. Orduan*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^A, \qquad \text{non } A = \lim_{n\to\infty}(a_n - 1)b_n \text{ den.}$$

Froga. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ denez, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n - 1} = \infty$ eta ondorioz,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty}(1 + a_n - 1)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n - 1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}(a_n-1)b_n} = e^A.$$

$\square$

Adibidea. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-3}\right)^{n+2} = e^A$ non

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-3} - 1\right)(n+2) = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1-n+3}{n-3}(n+2) = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{n-3} = 2.$$

Hau da, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-3}\right)^{n+2} = e^2$.

Proposizioa 2.24. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida eta demagun $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ limitea kalkulatu behar dugula. Baldin eta $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ existitzen bada, orduan*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Adibidea.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)(2n+2)}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2} = 1$$

Proposizioa 2.25 (Stoltzen erregela)**.** *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bi segida non $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gorakorra den eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Orduan*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Adibidea.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}-\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{n}\right)}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{\left((n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}\right)\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{(n+1)^3-n^3} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{n^3+3n^2+3n+1-n^3} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{3n^2+3n+1} = 0
\end{aligned}$$

2.8 Azpisegidak

Definizioa. Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida eta $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funtzio gorakorra. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{f(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ moduko segida $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren *azpisegida* dela diogu.

Honela, $b_n = a_{f(n)}$ gaia, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ azpisegidaren n-garren gaia da eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren $f(n)$-garren gaia.

Bestalde, kontuan harturik f gorakorra dela, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $f(n) \geq n$ beteko da eta beraz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ azpisegidan gaiek betetzen dituzten tokiak segidan betetzen dituztenak baino toki bajuagoak edo gehien jota berdinak izango dira.

Adibideak.

(i) Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida. Orduan $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida bera $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren azpisegida da. Kasu honetan daukagun aplikazio gorakorra $f(n) = n$ da.

(ii) Edozein $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidatatik asko erabiltzen diren hurrengo bi azpisegida atera daitezke:

- Toki bakoitietan dauden gaiek osatutakoa, hots $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Kasu honetan $f(n) = 2n - 1$.

- Toki bikoitietan dauden gaiek osatutakoa, hots $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Kasu honetan $f(n) = 2n$.

Hemendik aurrera $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida batetik ateratako edozein azpisegida hurrengo moduan adieraziko dugu: $\{a_{f(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Hau da a_{n_k} azpisegidaren k-garren gaia da edota $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren n_k-garrena.

Teorema 2.26. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida eta $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ bere azpisegida. Orduan:*

(i) Baldin eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ izanik, orduan $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ere konbergentea da eta $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$.

(ii) Baldin eta $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bada orduan $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.

(iii) Baldin eta $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ bada orduan $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$.

Froga. (i) Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ denez

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \epsilon.$$

Har dezagun $k \geq n_0$. Orduan, f gorakorra denez, $n_k = f(k) \geq k \geq n_0$ eta ondorioz $|a_{n_k} - l| < \epsilon$. Hau da,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, k \geq n_0 \quad |a_{n_k} - l| < \epsilon.$$

Hots, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$.

(ii) Izan bedi $M \in \mathbb{R}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ denez

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad a_n > M.$$

f gorakorra da, beraz $n_k = f(k) \geq k$. Orduan, $k \geq n_0$ guztietarako, $a_{n_k} = a_{f(k)} > M$. Hau da, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$. □

Oharra. Segida oszilatzaileen azpisegidek edozein portaera izan dezakete.

Adibidez, ikusi dugu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida oszilatzailea dela. $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konstantea da eta beraz konbergentea eta antzera, $\{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1\}_{n\in\mathbb{N}}$ ere konbergentea da. Aldiz, $\{a_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^{3n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oszilatzailea da.

Hala ere, segida oszilatzaileak bornatuak badira, beti aurki daiteke bere azpisegida konbergente bat, Bolzano-Weierstrassen teoremak ziurtatzen duen bezala. Bolzano-Weierstrassen teorema enuntziatu eta frogatu baino lehen, tarte txertatuen definizioa eta zenbait propietate ikusiko ditugu eta, hauetan oinarriturik, teorema frogatuko dugu.

Definizioa. Kontsidera ditzagun hurrengo zenbaki errealen zerrendak

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \dots$$
$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \dots$$

$a_n \leq b_n$ izanik $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Izan bedi $I_n = [a_n, b_n]$ tartea. Argi denez, $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \dots$.

$\{I_n\}$ familia *tarte txertatuen familia* dela diogu.

Teorema 2.27. *Izan bitez $I_n = [a_n, b_n]$ tarte itxiak $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tarte txertatuen familia izanik. Orduan*

(i) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ *bada, orduan* $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *ebakidurak puntu bakar bat du.*

Froga. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida gorakorra eta goitik bornatua da zeren eta $a_n \leq b_n \leq b_1$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, beraz konbergentea da. Izan bedi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Era berean, tarteen goi-muturrek osatutako segida, hau da $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, beherakorra eta behetik bornatua da zeren eta $b_n \geq a_n \geq a_1$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, beraz konbergentea da. Izan bedi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

$n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $a_n \leq b_n$ denez orduan $a \leq b$ da.

$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ bada, orduan $a = b$ da eta

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\} = \{b\}.$$

$a < b$ bada orduan

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a, b].$$

□

Oharra. Aurreko guztia egia izan dadin funtsezkoa da tarteak itxi eta bornatuak izatea. Tarte txertatuak itxiak edo bornatuak ez badira ebakidura multzo hutsa izan daiteke. Adibidez,

$$(0, 1) \supset \left(0, \frac{1}{2}\right) \supset \cdots \supset \left(0, \frac{1}{n}\right) \supset \dots$$

Kasu honetan $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$.

Proposizioa 2.28. *Izan bedi $P \subset \mathbb{R}$ infinitu eta bornatua. Orduan existitzen da P multzoko gai desberdinez osaturiko $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergente bat.*

Froga. P bornatua denez existitu egiten dira bi zenbaki erreal, a eta b, non $P \subset [a,b]$ den. Izenda dezagun $I_1 = [a_1, b_1] = [a,b]$ eta har dezagun tarte honen erdiko puntua $c = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Horrela bi azpitarte lortzen ditugu $[a_1, c]$ eta $[c, b_1]$. P multzoa infinutua denez, bi azpitarte hauetatik batek gutxienez P multzoko infinitu puntu ditu. Har dezagun P multzoko infinitu gai dituen azpitartea $I_2 = [a_2, b_2]$ bezala. Argi dago $I_1 \supset I_2$ dela.

Orain errepika dezakegu I_1 tartean egindako prozedura I_2 tartearekin I_3 tartea lortzeko. Horrela, P multzoko infinitu gai dituzten tarte itxi eta bornatuen familia bat lortzen dugu

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$$

$I_n = [a_n, b_n]$ izanik, non $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}} \to 0$ den. Beraz, aurrekoaren arabera $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$.

Eraikiko dugu orain P multzoko elementuez osatutako segida bat x punturantz konbergentea dena. Izan bedi $x_1 \in I_1 \cap P$ edozein eta har dezagun $x_2 \in I_2 \cap P$ non $x_2 \neq x_1$ den. I_2 tartean P multzoko infinitu elementu daudenez, hau posible da. Horrela jarrai dezakegu hurrengoa lortzeko:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in P \quad : \quad x_n \neq x_m \quad \forall\, m \neq n.$$

Gainera $|I_n| \to 0$ denez $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ □

Teorema 2.29. *(Bolzano-Weierstrassen teorema) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida bornatua bada orduan existitu egiten da $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ azpisegida konbergente bat.*

Froga. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida bornatua eta izenda dezagun P $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren elementuek osatzen duten multzoa. P bornatua da.

P finitua bada, orduan $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidan gutxienez elementu bat infinitu aldiz errepikatzen da eta azpisegida konstante bat, beraz konbergentea, atera daiteke.

P infinitua bada, aurreko proposizioa aplikatuz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren azpisegida konbergente bat topa daiteke. □

2.9 Cauchyren segidak

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyren segida* dela diogu baldin eta

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Teorema 2.30. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.*

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konbergentea} \quad \Longleftrightarrow \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ Cauchyrena.}$$

Froga. $\Longrightarrow$) Izan bedi $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ eta har dezagun $\epsilon > 0$ edozein. Orduan existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$.

Izan bitez $n, m \geq n_0$.

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

beraz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyrena da.

$\Longleftarrow$) Orain suposatzen dugu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyrena dela. Ikus dezagun bornatua dela.

Izan bedi $\epsilon = 1$. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyrena denez, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ guztietarako $|a_n - a_{n_0+1}| \leq 1$ den. Orduan $n \geq n_0$ guztietarako, $|a_n| \leq |a_n - a_{n_0+1}| + |a_{n_0+1}| < 1 + |a_{n_0+1}|$.

$K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a_{n_0+1}| + 1\}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren borne bat da, hau da, $|a_n| \leq K$ $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, beraz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua da.

Orain, Bolzano-Weierstrassen teoremaren arabera existitzen da $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren azpisegida konbergentea. Izan bedi $l = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ eta kontsidera dezagun $\epsilon > 0$ edozein.

$$\begin{array}{lclcll} \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l & \Longleftrightarrow & \exists\, n_1 \in \mathbb{N} & : & \forall\, k \geq n_1 & |a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}, \\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyrena} & \Longleftrightarrow & \exists\, n_2 \in \mathbb{N} & : & \forall n, m \geq n_2 & |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}. \end{array}$$

Izan bedi $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. $k \geq n_0$ guztietarako $n_k \geq k$ denez

$$|a_k - l| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Beraz, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. $\square$

3. Gaia

Zenbaki-serieak

3.1 Definizioak eta adibideak

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z. e. segida. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ moduko adierazpena $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren gaiek osatutako *zenbaki-seriea* edo *zenbaki errealezko seriea* dela diogu.

Definizioa. Izan bedi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ z. e. seriea. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ batura $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriearen *n-garren batura partziala* dela esango dugu.

Beraz, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriearekin lotuta, bi segida agertzen dira: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ batugaien segida eta $\{S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ batura partzialen segida.

Definizioa. Izan bedi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ z. e. seriea eta $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bere batura partzialen segida.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriea *konbergentea* (edo $\{a_n\}$ segida *batugarria*) dela esango dugu $\{S_n\}$ batura partzialen segida konbergentea bada, seriearen *batura* $\lim_{n\to\infty} S_n$ izanik. Kasu honetan, seriearen batura adierazteko $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ikurra erabiliko dugu ere, hots,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\,.$$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriea *dibergentea* dela diogu $\{S_n\}$ segida dibergentea bada. $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ bada, orduan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty$ idatziko dugu.

(iii) $\{S_n\}$ oszilatzailea bada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriea oszilatzailea dela diogu eta bere batura ez da existitzen.

Beraz, laburbilduz, serie baten izaera bere batura partzialen segidaren izaera da. Gainera, oszilatzailea ez denean,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Adibideak.

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a$, $a \neq 0$ izanik, dibergentea da, jarraian ikusiko dugun bezala. Kasu honetan batugaien segida $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konstantea da. Kalkula dezagun n-garren batura partziala

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + a + \cdots + a = na.$$

Batura partzialen segida dibergentea da eta beraz $\sum_{k=1}^{\infty} a$ dibergentea da ere. Gainera,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \text{ denean,} \\ -\infty, & a < 0 \text{ denean.} \end{cases}$$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ seriearen n-garren batura partziala kalkula dezagun:

$$S_n = -1 + 1 + (-1) + 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ bikoitia bada,} \\ -1, & n \text{ bakoitia bada.} \end{cases}$$

Batura partzialen segida oszilatzailea denez, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ seriea oszilatzailea da.

Definizioa. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriea r arrazoiduneko *serie geometrikoa* dela esango dugu baldin eta $\{a_n\}$ batugaien segida r arrazoiduneko segida geometrikoa bada. Beraz, r arrazoiduneko serie geometriko baten adierazpen orokorra honako hau da:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}, \quad a_1 \neq 0, \quad r \neq 0,$$

Azter dezagun serie geometrikoen izaera.

$r = 1$ bada, $\sum_{k=1}^{\infty} a_1$ seriea dugu, hots, (1) adibidean aztertu duguna eta badakigu dibergentea dela bere batura $+\infty$ edo $-\infty$ izanik a_1 positiboa edo negatiboa den arabera.

$r \neq 1$ bada, aurreko gaian frogatu genuen bezala,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right).$$

Orduan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1}{1-r}, & |r| < 1 \text{ bada,} \\ +\infty, & r > 1 \text{ eta } a_1 > 0 \text{ badira,} \\ -\infty, & r > 1 \text{ eta } a_1 < 0 \text{ badira,} \\ \nexists, & r \leq -1 \text{ bada.} \end{cases}$$

Beraz, $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$ konbergentea da baldin eta soilik baldin $|r| < 1$. Gainera, konbergentea denean,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1} = \frac{a_1}{1-r}.$$

Definizioa. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *serie harmonikoa* dela diogu eta $\alpha \in \mathbb{R}$ bada, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ moduko seriea *serie harmoniko orokortua* da.

Serie harmonikoen izaera ezin da aztertu batura partzialen bidez. $S_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$ segidaren limitea kalkulatzea ezinezkoa da aurreko gaiak ikusitako metodoekin. Aurrerago aztertuko dugu α-ren zein baliotarako den konbergentea eta zeinetarako ez.

3.2 Zenbaki-serieen oinarrizko propietateak

Proposizioa 3.1. *Zenbaki-serie batean batugai-kopuru finitua sartzen edo kentzen bada, lortzen den serie berriaren izaera aurrekoaren izaera bera da. Beraz, serie batean batugai-kopuru finitu bat aldatzeak ez du eraginik seriearen izaeran.*

Demagun jatorrizko seriea konbergentea dela, bere batura S izanik, eta sartu edo kendu egiten ditugun gaien batura a dela. Orduan serie berriaren batura $S - a$ (gaiak kentzen baditugu) edo $S + a$ (gaiak sartzen baditugu) izango da.

Oharra. Aurrekoaren arabera, serie baten izaera aldatzen ez denez gai-kopuru finitu bat aldatzean, seriearen konbergentzia aztertzerakoan batura zein batugaitan hasten den ez du garrantzirik. Hau dela eta, hemendik aurrera serie baten izaera soilik kontsideratzen dugunean, batukarian batugaien indizeak ez ditugu adieraziko.

Proposizioa 3.2. *$\sum a_n$ z.e. seriea konbergentea bada, orduan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Froga. $\sum a_n$ konbergentea denez $\{S_n\}$ batura partzialen segida konbergentea da. Izan bedi $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

$\forall\, n \geq 2$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ beraz,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \square$$

Korolarioa 3.3. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z. e. segida. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ bada, orduan $\sum a_n$ dibergentea da.*

Proposizioa 3.4. *Izan bitez $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ z. e. serie konbergenteak, haien baturak a eta b izanik, hurrenez hurren. Orduan*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ seriea konbergentea da eta

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} b_n = a + b.$$

(ii) Izan bedi $\lambda \in \mathbb{R}$. Orduan $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_n$ seriea konbergentea da eta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_n = \lambda a.$$

Froga. Izan bitez $\{S_n\}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ seriearen batura partzialen segida eta $\{S'_n\}$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ seriearena. Orduan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a \quad \text{eta} \quad \lim_{n\to\infty} S'_n = b.$$

(i) Izan bedi $\{S''_n\}$ $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ seriearen batura partzialen segida.

$$\begin{aligned} S''_n =& (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ =& a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots b_n = S_n + S'_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beraz, $\{S''_n\}$ bi segida konbergenteren arteko batura da eta ondorioz konbergentea. Hau da, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ konbergentea da. Gainera,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} S''_n = \lim_{n\to\infty}(S_n + S'_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} S'_n = a + b.$$

(ii) Izan bedi $\lambda \in \mathbb{R}$ eta $\{T_n\}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_n$ seriearen batura partzialen segida. Orduan

$$T_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lambda S_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$\{S_n\}$ konbergentea denez, $\{T_n\}$ konbergentea da, hau da, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_n$ konbergentea da. Gainera,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_n = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda a. \quad \square$$

Definizioa. Izan bitez $\sum a_n$ z. e. seriea eta $\{S_n\}$ bere batura partzialen segida. $\sum a_n$ serieak *Cauchyren baldintza* betetzen duela esango dugu baldin eta

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall\, m > n \geq n_0 \quad |S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \epsilon$$

Teorema 3.5. *Izan bedi $\sum a_n$ z. e. seriea. $\sum a_n$ konbergentea da baldin eta soilik baldin Cauchyren baldintza betetzen badu.*

Froga. $\sum a_n$ konbergentea da baldin eta soilik baldin $\{S_n\}$ konbergentea bada eta konbergentea izatea eta Cauchyren segida izatea ere baliokideak dira. Beraz,

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall m > n \geq n_0\ |S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \epsilon.$$

Baina aurrekoa $\sum a_n$ serieak Cauchyren baldintza betetzen duela esan nahi du. $\square$

Proposizioa 3.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *serie harmonikoa ez da konbergentea.*

Froga. Ikusiko dugu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serieak ez duela Cauchyren baldintza betetzen eta beraz, aurreko teoremaren arabera, seriea ezin da konbergentea izan.

Izan bedi $n_0 \in \mathbb{N}$ edozein. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^k = +\infty$ denez, ziurta daiteke existitu egiten dela $k \in \mathbb{N}$ non $2^{k+1} > 2^k \geq n_0$ diren. $m = 2^{k+1}$ eta $n = 2^k$ hartuz,

$$\begin{aligned} |S_{2^{k+1}} - S_{2^k}| &= \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &\geq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Beraz, $\epsilon = 1/2$ denean, $n_0 \in \mathbb{N}$ guztietarako existitzen dira $n = 2^k$, $m = 2^{k+1}$, $m > n \geq n_0$, non $|S_m - S_n| \geq \epsilon$ den. Hau da, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serieak ez du Cauchyren baldintza betetzen eta ondorioz ez da konbergentea. $\square$

3.3 Gai positiboko serieak. Konbergentziarako irizpideak

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z. e. segida. Baldin eta $a_n \geq 0$ bada $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, orduan $\sum a_n$ *gai positiboko seriea* dela diogu.

Teorema 3.7. *Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea. Orduan, $\sum a_n$ seriea konbergentea edo $+\infty$-rantz dibergentea da. Hau da, oszilatzailea edo $-\infty$-rantz dibergentea den gai positiboko serierik ez dago.*

Gainera, $\sum a_n$ seriearen batura partzialen segida $\{S_n\}$ bada, $\sum a_n$ konbergentea da baldin eta soilik baldin $\{S_n\}$ goitik bornatua bada.

Froga. Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta $\{S_n\}$ bere batura partzialen segida.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \geq S_{n-1}.$$

Hau da, gai positiboko serie baten batura partzialen segida gorakorra da. Beraz, bi posibilitate daude:

- $\{S_n\}$ goitik bornatua: kasu honetan, gorakorra denez, $\{S_n\}$ konbergentea da, hau da $\sum a_n$ konbergentea.
- $\{S_n\}$ ez goitik bornatua: $\{S_n\}$ $+\infty$-rantz dibergentea da eta $\sum a_n = +\infty$. $\square$

Definizioa. Izan bitez $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ gai positiboko serieak. Baldin eta $a_n \leq b_n$ bada $n \in \mathbb{N}$ guztietarako orduan $\sum a_n$ seriea $\sum b_n$ seriearen *serie minorantea* dela diogu eta $\sum b_n$ $\sum a_n$ seriearen *serie maiorantea*.

Serieen arteko erlazio hau hurrengo ikurraren bidez adieraziko dugu:

$$\sum a_n << \sum b_n.$$

Teorema 3.8 (Konparazio-irizpidea)**.** *Izan bitez $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ gai positiboko serieak, $\sum a_n << \sum b_n$ izanik. Orduan*

(i) $\sum b_n$ konbergentea bada, $\sum a_n$ ere konbergentea da.

(ii) $\sum a_n$ dibergentea bada, $\sum b_n$ ere dibergentea da.

Froga. (i) Izan bitez $\{S_n\}$ eta $\{S'_n\}$ $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ serieen batura partzialen segidak, hurrenez hurren.

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad S_n \leq S'_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Orduan, $\sum b_n$ konbergentea $\Longleftrightarrow$ $\{S'_n\}$ goitik bornatua $\Longrightarrow$ $\{S_n\}$ goitik bornatua $\Longleftrightarrow$ $\sum a_n$ konbergentea.

(ii) Absurdora eramanez, demagun $\sum a_n$ dibergentea izanik, $\sum b_n$ konbergentea dela. Orduan (i) atala aplikatuz $\sum a_n$ konbergentea izango litzateke.

Beraz, $\sum b_n$ dibergentea da. □

Adibideak.

(1) Serie harmoniko orokortuen izaera.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{konbergentea,} & \alpha > 1 \text{ denean,} \\ \text{dibergentea,} & \alpha \leq 1 \text{ denean.} \end{cases}$$

$\alpha = 1$ denean jadanik frogatu dugu dibergentea dela.

$\alpha < 1$ denean,

$$n^\alpha < n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \sum \frac{1}{n} << \sum \frac{1}{n^\alpha}.$$

$\sum \frac{1}{n}$ dibergentea denez, konparazio-irizpidearen arabera, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dibergentea da.

$\alpha > 1$ denean,

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \dots$$

Parentesiak sartzean seriearen izaera ez da aldatzen. Beraz, serie berri bat definituko dugu, $\sum b_n$ non

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1 \\
b_2 &= \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \leq \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} = \frac{2}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \\
b_3 &= \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} \leq \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} = \frac{4}{4^\alpha} = \frac{1}{4^{\alpha-1}} \\
&\vdots \\
b_n &= \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha} \leq \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Hau da, $\sum b_n << \sum \left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}$ eta $\sum \left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}$ serie geometrikoa konbergentea da $|r| = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ delako, beraz, konparazio-irizpidearen arabera, $\sum b_n$ konbergentea denez, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ ere.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2}$ gai positiboko seriea konbergentea da. Ikus dezagun.

$$\cos^2(n^2-7) \le 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2} \le \frac{2}{n^2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Hau da, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2} << \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$, Orduan,

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^2} \text{ konbergentea } &\Longrightarrow \sum \frac{2}{n^2} \text{ konbergentea} \\ &\Longrightarrow \sum \frac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2} \text{ konbergentea.} \end{aligned}$$

Teorema 3.9 (Limitearen irizpidea). *Izan bitez $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ gai positiboko serieak, $b_n \neq 0$ izanik $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Izan bedi $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$.*

(i) $\lambda \neq 0, +\infty$ denean, $\sum a_n$ konbergentea da baldin eta soilik baldin $\sum b_n$ konbergentea bada.

(ii) $\lambda = 0$ denean, $\sum b_n$ konbergentea bada, $\sum a_n$ ere konbergentea da.

(iii) $\lambda = +\infty$ denean, $\sum b_n$ dibergentea bada, $\sum a_n$ ere dibergentea da.

Froga. (i) $a_n \geq 0$ eta $b_n > 0$ dira $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta $\lambda = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \neq 0, +\infty$ dela suposatzen dugu, beraz $\lambda > 0$. $\epsilon = \dfrac{\lambda}{2}$ hartuz,

$$\begin{aligned} \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad & \left|\frac{a_n}{b_n} - \lambda\right| < \frac{\lambda}{2} \quad \Longrightarrow \\ \forall\, n \geq n_0 \quad & \frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\lambda}{2} \quad \Longrightarrow \\ \forall\, n \geq n_0 \quad & \frac{\lambda}{2} b_n < a_n < \frac{3\lambda}{2} b_n. \end{aligned}$$

Orain, konparazio-irizpidea eta serieen oinarrizko propietateak erabiliz,

$$\sum b_n \text{ konbergentea } \Longrightarrow \sum \frac{3\lambda}{2} b_n \text{ konbergentea } \Longrightarrow \sum a_n \text{ konbergentea;}$$
$$\sum a_n \text{ konbergentea } \Longrightarrow \sum \frac{\lambda}{2} b_n \text{ konbergentea } \Longrightarrow \sum b_n \text{ konbergentea.}$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ bada, $\epsilon = 1$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ guztietarako $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| < 1$ den. Beraz, $n \geq n_0$ bada, $a_n < b_n$. Berriro, konparazio-irizpidea aplikatuz,

$$\sum b_n \text{ konbergentea } \Longrightarrow \sum a_n \text{ konbergentea.}$$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ bada, $M = 1$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ guztietarako $\dfrac{a_n}{b_n} > 1$ den. Hau da, $n \geq n_0$ bada, $a_n > b_n$. Konparazio-irizpidearen arabera,

$$\sum b_n \text{ dibergentea } \Longrightarrow \sum a_n \text{ dibergentea.} \quad \square$$

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ dibergentea da.

Izan bitez $a_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \geq 0$ eta $b_n = \dfrac{1}{n} \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1.$$

Beraz, limitearen irizpidearen arabera, $\sum \dfrac{1}{n}$ dibergentea denez, $\sum \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ dibergentea da.

Teorema 3.10 (Pringsheimen irizpidea)**.** *Izan bitez $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha a_n \in [0,\infty)$ bada eta $\alpha > 1$, orduan $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha a_n \in (0,\infty]$ bada eta $\alpha \leq 1$, orduan $\sum a_n$ dibergentea da.

Froga. Izan bedi $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ denez, limitearen irizpidearen arabera, eta serie harmoniko orokortuen izaera kontuan hartuz, hurrengoa dugu:

(i) $\alpha > 1$ bada, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konbergentea da, beraz, $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n \in [0,\infty)$ denean $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) $\alpha \leq 1$ denean $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dibergentea da, beraz, $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n \in (0,\infty]$ denean $\sum a_n$ dibergentea da. □

Teorema 3.11 (D'Alamberten irizpidea edo zatiduraren irizpidea)**.** *Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta demagun hurrengo limitea existitu egiten dela:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

(i) Baldin eta $l < 1$ bada, orduan $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) Baldin eta $l > 1$ bada, orduan $\sum a_n$ dibergentea da.

Froga. (i) $l < 1$ denez, $\epsilon = \frac{1-l}{2} > 0$ hartuz,

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad & \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \frac{1-l}{2} \quad \Longrightarrow \\ \forall n \geq n_0 \quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1-l}{2} + l = \frac{1+l}{2} = q < 1. \end{aligned}$$

Orduan, $n \geq n_0$ bada,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} \leq \frac{a_n}{q^n} \leq \frac{a_{n-1}}{q^{n-1}} \leq \cdots \leq \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} = A.$$

Hau da, $n \geq n_0$ bada, $a_n \leq Aq^n$. Gainera, $\sum q^n$ serie geometrikoa konbergentea da $0 < q < 1$ delako, beraz, konparazio-irizpidearen arabera $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) Kasu honetan $l = +\infty$ edo $l \in \mathbb{R}$ izan daiteke.

$l = +\infty$ bada, $M = 1$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ guztietarko $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ den.

$l \in \mathbb{R}$ bada, $l > 1$ izanik, $\epsilon = l - 1 > 0$ hartuz,

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad & \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < l - 1 \quad \Longrightarrow \\ \forall n \geq n_0 \quad & \frac{a_{n+1}}{a_n} > -l + 1 + l = 1. \end{aligned}$$

Hau da, bi kasuetan existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ denean $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Beraz, $a_{n+1} > a_n$, hau da, gai positiboko segida gorakorra dugu eta ondorioz, $\lim_{n\to\infty} a_n$ ezin da 0 izan eta $\sum a_n$ dibergentea da. □

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ konbergentea da.

$a_n = \dfrac{1}{(2n+1)!} > 0$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, beraz aplika dezakegu D'Alamberten irizpidea.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(2n+3)!}}{\dfrac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1.$$

Beraz, D'Alamberten irizpidearen arabera, serie hau konbergentea da.

Oharra. Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ bada, $\sum a_n$ konbergentea nahiz dibergentea izan daiteke.

Adibidez, $a_n = \dfrac{1}{n}$ bada, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ eta badakigu $\sum \dfrac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea dela.

Aldiz, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ hartuz gero, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ eta $\sum \dfrac{1}{n^2}$ serie harmoniko orokortua konbergentea da.

Baldin eta $\sum a_n$ gai positiboko seriea bada, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ izanik, orduan hurrengo irizpidea erabil daiteke.

Teorema 3.12 (Raaberen irizpidea)**.** *Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea, zeinetarako $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ den, eta izan bedi*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l.$$

(i) Baldin eta $l > 1$ edo $l = +\infty$ bada, orduan $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) Baldin eta $l < 1$ bada, orduan $\sum a_n$ dibergentea da.

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$ seriearen izaera aztertuko dugu.

$a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} > 0$, denez $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, D'Alamberten irizpidea aplika daiteke.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)(2n+2)}}{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1.$$

Beraz, ezin dugu ezer ziurtatu. Aplikatuko dugu orduan Raaberen irizpidea.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{2n+2-2n-1}{2n+2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

Ondorioz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n)}$ dibergentea da.

Oharra. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1$ direnean ezin da ezer ziurtatu $\sum a_n$ seriearen izaerari buruz, soilik Raaberen irizpidea kontuan hartuz. Beste argudio batzuk erabili behar dira.

Teorema 3.13 (Cauchyren irizpidea edo erroaren irizpidea)**.** *Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta demagun hurrengo limitea existitu egiten dela:*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l.$$

(i) Baldin eta $l<1$ bada, orduan $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) Baldin eta $l>1$ bada, orduan $\sum a_n$ dibergentea da.

Froga. (i) $l<1$ denez, $\epsilon = \dfrac{1-l}{2} > 0$ hartuz

$$\begin{aligned}\exists\, n_0\in\mathbb{N} \quad : \quad &\forall\, n\ge n_0 \quad |\sqrt[n]{a_n}-l| < \frac{1-l}{2} \quad \Longrightarrow\\ &\forall\, n\ge n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} < \frac{1-l}{2}+l = \frac{1+l}{2} = q < 1 \quad \Longrightarrow\\ &\forall\, n\ge n_0 \quad a_n < q^n.\end{aligned}$$

Hau da $\sum a_n << \sum q^n$ eta $\sum q^n$ serie geometrikoa konbergentea da $0<q<1$ delako, beraz, konparazio-irizpideak ziurtatzen digu $\sum a_n$ konbergentea dela.

(ii) Kasu honetan $l=+\infty$ edo $l\in\mathbb{R}$ izan daiteke.

$l=+\infty$ bada, $M=1$ denean, existitzen da $n_0\in\mathbb{N}$ non $n\ge n_0$ guztietarako $\sqrt[n]{a_n}>1$ den, hau da, $n\ge n_0$ denean $a_n>1$ da.

$l\in\mathbb{R}$ bada, $l>1$, $\epsilon = l-1>0$ hartuz,

$$\begin{aligned}\exists\, n_0\in\mathbb{N} \quad : \quad &\forall\, n\ge n_0 \quad |\sqrt[n]{a_n}-l| < l-1 \quad \Longrightarrow\\ &\forall\, n\ge n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} > 1-l+l = 1 \quad \Longrightarrow\\ &\forall\, n\ge n_0 \quad a_n > 1.\end{aligned}$$

Beraz, bi kasuetan, existitzen da $n_0\in\mathbb{N}$ non, $n\ge n_0$ bada, $a_n>1$ den. Onodorioz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ ezin da 0 izan eta $\sum a_n$ dibergentea da. □

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$ konbergentea da. Ikus dezagun.

$a_n = \dfrac{n^n}{(2n+1)^n} > 0$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta aplika dezakegu Cauchyren irizpidea.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(2n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Beraz, Cauchyren irizpidearen arabera, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$ konbergentea da.

Oharra. Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ bada, ezin dugu ezer ziurtatu $\sum a_n$ seriearen izaerari buruz.

Adibidez, $a_n = \dfrac{1}{n}$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = 1$ eta badakigu $\sum \dfrac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea dela.

Aldiz, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ bada, orduan $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = 1$ eta $\sum \dfrac{1}{n^2}$ serie harmonikoa konbergentea da.

Oharra. Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta demagun $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ dela. Kasu honetan D'Alamberten irizpidearen bidez ezin dugu ezer ondorioztatu.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existitzen baldin badira, berdinak direnez, Cauchyren irizpidearekin ere ez dugu informazio gehiagorik lortuko.

Hala ere, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ ez bada existitzen, posible da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existitzea.

Teorema 3.14 (Integralaren irizpidea)**.** *Izan bedi f funtzio positiboa eta beherakorra $[1, +\infty)$ tartean. Izan bedi $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Orduan $\sum a_n$ konbergentea da baldin eta soilik baldin $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_1^n f(x)\,dx$ existitzen bada eta finitua bada.*

3.4 Gai positibo eta negatiboko serieak

Aurreko atalean ikusi ditugun irizpideak bakarrik erabili daitezke seriearen batugai guztiak positiboak direnean, edo batugai negatiboen kopurua finitua denean, kasu honetan gai horiek kentzean seriearen izaera aldatzen ez delako. Serie batean infinitu batugai positibo eta infinitu batugai negatibo baldin badaude, beste irizpide batzuk bilatu behar ditugu izaera aztertzeko.

Definizioa. Izan bedi $\sum a_n$ z. e. seriea eta defini ditzagun

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \text{ denean,} \\ 0, & a_n < 0 \text{ denean;} \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \text{ denean,} \\ -a_n, & a_n < 0 \text{ denean.} \end{cases}$$

$\sum a_n^+$ eta $\sum a_n^-$ $\sum a_n$ seriearen azpiserie positibo eta azpiserie negatiboak dira, hurrenez hurren. Argi denez,

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-, \qquad \text{eta} \qquad \sum |a_n| = \sum a_n^+ + \sum a_n^-$$

Proposizioa 3.15. *Izan bitez $\sum a_n$ z. e. seriea eta $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ bere azpiserie positibo eta negatiboak.*

(i) $\sum a_n^+$ eta $\sum a_n^-$ konbergenteak badira, orduan $\sum a_n$ eta $\sum |a_n|$ konbergenteak dira.

(ii) $\sum a_n^+$ eta $\sum a_n^-$ bata konbergentea eta bestea dibergentea badira, orduan $\sum a_n$ eta $\sum |a_n|$ dibergenteak dira.

(iii) $\sum a_n^+$ eta $\sum a_n^-$ dibergenteak badira, orduan $\sum |a_n|$ dibergentea da baina $\sum a_n$ konbergentea izan daiteke edo ez.

Oharra. $\sum a_n^+$ eta $\sum a_n^-$ gai positiboko serieak direnez, hauen izaera aztertzeko, aurreko atalean ikusi ditugun metodoak erabili daitezke.

Definizioa. Izan bedi $\sum a_n$ z. e. seriea. $\sum a_n$ *absolutuki konbergentea* dela diogu baldin eta $\sum |a_n|$ konbergentea bada.

Teorema 3.16. *Izan bedi $\sum a_n$ z. e. seriea. $\sum a_n$ absolutuki konbergentea bada orduan konbergentea da. Gainera,*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Froga. $\sum a_n$ absolutuki konbergentea denez, $\sum |a_n|$ konbergentea da eta beraz Cauchyren badintza betetzen du, hau da

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall m > n \geq n_0 \quad ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|| < \epsilon.$$

$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots |a_m| = ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots |a_m||$ denez,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall m > n \geq n_0$$
$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_m| \leq ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|| < \epsilon.$$

Hau, da $\sum a_n$ serieak ere Cauchyren baldintza betetzen du eta ondorioz, konbergentea da.

Gainera, $\{S_n\}$ eta $\{S'_n\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serieen batura partzialen segidak baldin badira, hurrenez hurren,

$$|S_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = S'_n \quad \Longrightarrow$$
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty} S_n\right| = \lim_{n\to\infty} |S_n| \leq \lim_{n\to\infty} S'_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad \square$$

Oharra. Teorema honen alderantzizkoa ez da egia, hau da, $\sum a_n$ seriearen konbergentziak ez du ziurtatzen konbergentzia absolutua.

Adibidez, aurrerago frogatuko dugu $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ seriea konbergentea dela, baina badakigu ez dela absolutuki konbergentea $\sum \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ dibergentea delako.

Definizioa. Izan bedi $\sum a_n$ z. e. seriea. $\sum a_n$ *serie alternatua* dela diogu baldin eta ondoz-ondoko gaien zeinuak desberdinak badira, hots,

$$a_n \, a_{n+1} < 0, \quad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Oharra. Serie alternatu baten lehen batugaia positiboa bada, azpiindize bakoitia duten batugai guztiak positiboak izango dira eta azpiindize bikoitia dutenak, aldiz, negatiboak. Beraz, lehenengo gaia positiboa duen serie alternatu baten adierazpen orokorra hurrengoa da

$$\sum (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n \geq 0 \quad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Serie alternatu baten izaera aztertzeko, konbergentzia absolutua erabil dezakegu. Lehenago ikusitakoaren arabera, seriea absolutuki konbergentea bada, konbergentea izango da. Hala ere, seriea ez bada absolutuki konbergentea, ezin dugu ezer ziurtatu bere izaerari buruz. Kasu honetan, hurrengo irizpidea aplika daiteke.

Teorema 3.17 (Leibnizen irizpidea)**.** *Izan bedi* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *z. e. serie alternatua non* $\{a_n\}$ *gai positiboko segida beherakorra den,* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *izanik. Orduan* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *konbergentea da eta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \leq a_1.$$

Froga. Izan bedi $\{S_n\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ seriearen batura partzialen segida. Kontsidera dezagun, lehenengo eta behin, $\{S_{2n}\}$ azpisegida.

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$\{a_n\}$ beherakorra denez, $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$ izango da eta ondorioz $S_{2n} \geq S_{2n-2}$. Beraz, $\{S_{2n}\}$ segida gorakorra da. Gainera,

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - a_{2n} \leq a_1$$

$a_k - a_{k+1} \geq 0$ delako $k \in \mathbb{N}$ guztietarako. Beraz, $\{S_{2n}\}$ goitik bornatua da.

$\{S_{2n}\}$ gorakorra eta goitik bornatua denez, konbergentea da. Izan bedi $s = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$. Azter dezagun orain $\{S_{2n-1}\}$ azpisegida.

$$\begin{aligned} S_{2n-1} =& a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} \\ =& a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n} \\ =& S_{2n} + a_{2n} \end{aligned}$$

$\{S_{2n}\}$ eta $\{a_{2n}\}$ konbergenteak direnez, $\{S_{2n-1}\}$ ere konbergentea da. Gainera

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = s + 0 = s.$$

$\{S_{2n}\}$ eta $\{S_{2n-1}\}$ konbergenteak dira, haien limiteak berdinak izanik, beraz $\{S_n\}$ ere konbergentea da eta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = s \leq a_1. \quad \square$$

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konbergentea da. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ gai positiboko segida beherakorra da eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, beraz, Leibnizen irizpidearen arabera, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konbergentea da (baina ez absolutuki konbergentea).

Batzuetan, serie baten izaera aztertzeko, serie horren gaiak biderkadura moduan adierazteak interesa dauka, hots, $\sum a_n b_n$ moduan idaztea komenigarria izan daiteke. Kasu honetan, hurrengo irizpideak aplika daitezke.

Teorema 3.18 (Abelen konbergentziarako irizpidea)**.** *Izan bitez $\sum b_n$ z. e. serie konbergentea eta $\{a_n\}$ z. e. segida monotono eta bornatua. Orduan, $\sum a_n b_n$ konbergentea da.*

Teorema 3.19 (Dirichleten konbergentziarako irizpidea)**.** *Izan bitez $\sum b_n$ z. e. seriea eta $\{a_n\}$ gai positiboko segida. Demagun $\{a_n\}$ beherakorra dela, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ izanik eta $\sum b_n$ seriearen batura partzialen segida bornatua dela, hots, existitzen dela $\beta > 0$ non $|B_n| = |b_1 + b_2 + \cdots + b_n| \leq \beta$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Orduan $\sum a_n b_n$ konbergentea da.*

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ seriea konbergentea da, $x \neq 0$ edozein izanik.

Serie hau ez da gai positiboko seriea ez eta serie alternatua ere, beraz, Dirichleten irizpidea erabiliko dugu bere izaera aztertzeko.

Izan bitez $a_n = \dfrac{1}{n}$ eta $b_n = \sin(nx)$. $\{a_n\}$ segida beherakorra da, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ izanik. Bestalde, frogatuko dugu indukzioz $n \in \mathbb{N}$ guztietarako

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

dela. $n = 1$ denean argi dago berdintzaren bi aldeak berdinak direla. Suposa dezagun $n = k$ denean betetzen dela, hau da,

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots + \sin(kx) = \frac{\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

dela. Orduan,

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots + \sin(kx) + \sin((k+1)x)\\
&= \frac{\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \sin((k+1)x)\\
&= \frac{\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin((k+1)x)}{\sin\frac{x}{2}}\\
&= \frac{\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2} + \sin\frac{x}{2}2\sin\frac{(k+1)x}{2}\cos\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\\
&= \frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\Big(\sin\frac{kx}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(k+1)x}{2}\Big)\\
&= \frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\Big(\sin\frac{kx}{2} + \sin\big(\frac{x}{2} - \frac{(k+1)x}{2}\big) + \sin\big(\frac{x}{2} + \frac{(k+1)x}{2}\big)\Big)\\
&= \frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(k+2)x}{2}
\end{aligned}$$

Ondorioz, $\{B_n\}$ bornatua da, zeren eta

$$\begin{aligned}
|b_1 + b_2 + \cdots + b_n| &= |\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots + \sin(nx)|\\
&= \left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.
\end{aligned}$$

Dirichleten irizpidearen arabera $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n}$ konbergentea da.

4. Gaia

Funtzioak: limiteak eta jarraitutasuna

Gai honetan hasten gara aldagai errealeko funtzio errealen analisiarekin. Limitearen kontzeptua definituko dugu esparru honetan eta hortik abiatuz, jarraitutasunaren kontzeptua aztertuko dugu.

4.1 Aldagai errealeko funtzio errealak. Definizioak eta adibideak

Definizioa. *Aldagai errealeko funtzio erreala* zenbaki errealen azpimultzo ez-huts batetik zenbaki errealen azpimultzo batera doan aplikazioa da, hots, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ bada, D multzoan definitutako f funtzioa D multzoko elementu bakoitza zenbaki erreal bakar batekin lotzen duen erregela da. $f\colon D \to B$ idatziko dugu, $B \subset \mathbb{R}$ izanik.

Definizioak. Izan bedi $f\colon D \longrightarrow B$ aldagai errealeko funtzio erreala.

(i) D multzoa f funtzioaren *definizio-eremua* dela esaten da.

(ii) $x \in D$ elementuari funtzioak lotzen dion elementua x-ren *irudia* da eta $f(x)$ idazten da. Halaber, $A \subset D$ bada, $f(A) = \{f(x) \,:\, x \in A\}$ A multzoaren *irudia* da.

D multzoko elementuen irudiek osatzen duten multzoa f funtzioaren *irudi-multzoa* da.

(iii) D multzoko elementu bakoitzak eta bere irudiak osatzen duten bikoteen multzoa f funtzioaren *grafikoa* da,

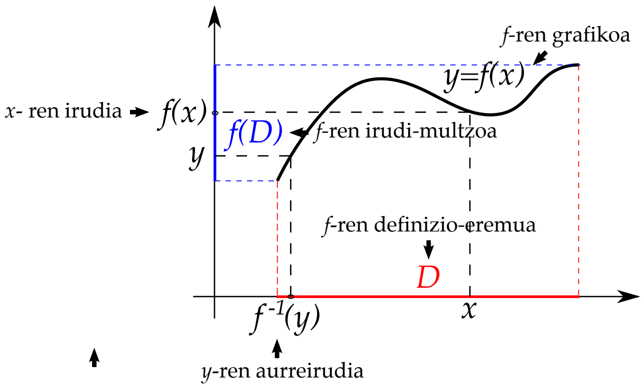
$$\{(x, f(x)) \,:\, x \in D\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(iv) $y \in B$ bada eta existitzen bada $x \in D$ non $f(x) = y$ den, orduan x y-ren *aurreirudia* dela diogu.

Oharrak. (i) Normalean funtzio bat definitzeko, x-ren irudia kalkulatzeko adierazpena emanez egiten da, definizio-eremua aipatu gabe. Kasu honetan, f-ren definizio-eremutzat, edo existentzia-eremutzat, ahal den multzorik handiena hartzen da non $f(x)$ kalkulatzeko ematen den adierazpena kalkulatu daitekeen.

Adibidez, $f(x) = \sqrt{x+2}$ funtzioa ematen bada, bere existentzia-eremua $D = [-2, \infty)$ da, erro karratua existitzen delako soilik zenbaki ez-negatiboetarako.

(ii) f funtzioaren grafikoa ardatz kartesiarretan adierazten da, ardatz horizontalean, abszisa-ardatza, D multzoko elementuak kokatuz eta ardatz bertikalean, ordenatu-ardatza, beraien irudiak f-ren bidez.



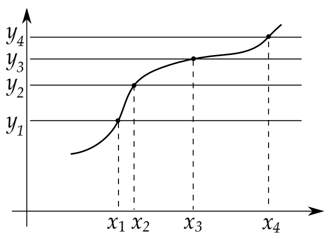
Definizioak. Izan bitez $D, B \subset \mathbb{R}$ eta $f\colon D \to B$ funtzioa.

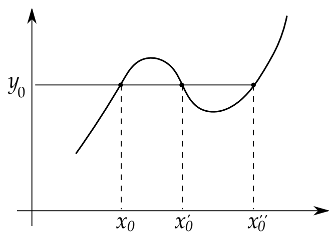
(i) f *injektiboa* dela diogu elementu desberdinen irudiak desberdinak badira, hau da $x_1, x_2 \in D$ izanik, $x_1 \neq x_2$ bada orduan $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(ii) f *suprajektiboa* da baldin eta $f(D) = B$ bada, hau da, edozein $y \in B$ zenbakitarako, existitzen bada $x \in D$ non $f(x) = y$ den.

(iii) f *bijektiboa* da baldin eta injektiboa eta suprajektiboa bada.

Oharrak. (i) f injektiboa izango da bere grafikoa $y = y_0$ moduko zuzen horizontalekin ebakitzean, punturik ez edo puntu bakarra badago.





(ii) Funtzio bat injektiboa izan daiteke eremu batean eta ez beste batean. Adibidez, $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 7$ funtzioa injektiboa da, zeren eta

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1^2 + 7 = x_2^2 + 7 \implies x_1^2 = x_2^2.$$

x_1 eta x_2 positiboak direnez, $x_1 = x_2$ izan behar da halabeharrez. Beraz, f injektiboa da $[0,5]$ tartean. Aldiz, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 7$ ez da injektiboa, $g(2) = g(-2)$ delako, adibidez.

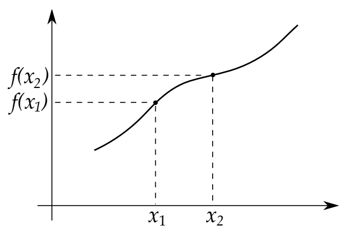
(iii) Funtzio bat suprajektibo egiteko nahikoa da $B = f(D)$ hartzea, hau da, kentzea aurreirudirik ez duten elementuak B multzotik. Bereziki, funtzio injektibo bat bijektibo bihur daiteke murriztuz B.

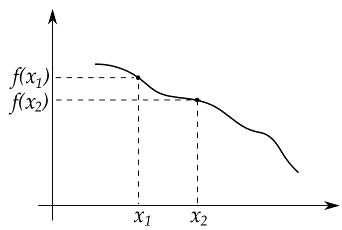
Definizioak. Izan bedi $f\colon D \to \mathbb{R}$ funtzioa.

(i) f *bornatua* dela diogu baldin eta $f(D)$ multzo bornatua bada, hau da, existitzen bada $M > 0$ non $|f(x)| \le M$ den $x \in D$ guztietarako.

(ii) f *gorakorra* dela diogu baldin eta $x_1, x_2 \in D$ badira, $x_1 < x_2$ izanik, orduan $f(x_1) \le f(x_2)$ bada (*hertsiki gorakorra* $f(x_1) < f(x_2)$ bada).

(iii) f *beherakorra* dela diogu baldin eta $x_1, x_2 \in D$ badira, $x_1 < x_2$ izanik, orduan $f(x_1) \ge f(x_2)$ bada (*hertsiki beherakorra* $f(x_1) > f(x_2)$ bada).





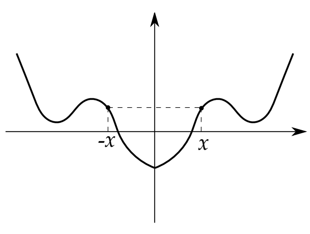
Definizioak. Izan bedi f aldagai errealeko funtzio erreala.

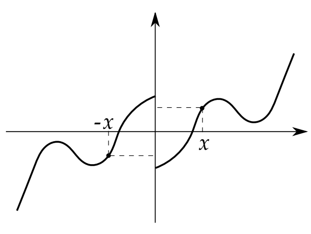
(i) f *bikoitia* dela diogu baldin eta $f(-x) = f(x)$ bada x guztietarako.

(ii) f *bakoitia* dela diogu baldin eta $f(-x) = -f(x)$ bada x guztietarako.

(iii) f *periodikoa* dela diogu, p bere *periodoa* izanik, baldin eta $f(x+p) = f(x)$ bada x guztietarako.

Oharra. Funtzio bikoitien grafikoak simetrikoak dira ordenatu-ardatzarekiko. Aldiz, funtzio bakoitien grafikoak simetrikoak dira jatorriarekiko.





Definizioa. Izan bitez $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ eta $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ funtzioak.

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\, x \in D_1 \cap D_2$.

(ii) $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall\, x \in D_1 \cap D_2$.

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall\, x \in D_1$.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ eta $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioak, $f(D_1) \cap D_2 \neq \emptyset$ izanik. Orduan, f eta g-ren arteko *konposizioa* hurrengo moduan definitzen da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (f \text{ konposatu } g).$$

Oharra. Konposizioa ez da trukakorra. Izan bitez $f(x) = \sin x$ eta $g(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) =& g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x;\\ (f \circ g)(x) =& f(g(x)) = f(x^2) = \sin x^2.\end{aligned}$$

Beraz, $g \circ f \neq f \circ g$.

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzio injektiboa. f-ren *alderantzizko funtzioa* f^{-1} ikurraren bidez adierazten da, bere definizio-eremua f-ren irudi-multzoa da eta hurrengo moduan definituta dago:

$$\forall\, x \in f(D) \quad f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x.$$

Oharra. f^{-1} f-ren alderantzizkoa da konposiziorako, eragiketa honetarako elementu neutroa $f(x) = x$ identitate funtzioa delarik,

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(x) &= x, \quad \forall\, x \in D,\\ (f \circ f^{-1})(x) &= x, \quad \forall\, x \in f(D).\end{aligned}$$

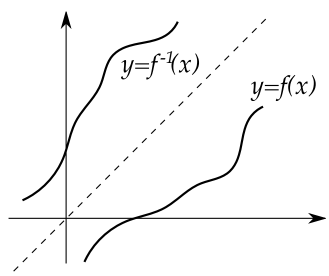
Bestalde, f-ren grafikoa

$$\{(x,\ f(x))\ :\ x \in D\}$$

da eta f^{-1} funtzioaren grafikoa $\{(y,\ f^{-1}(y))\ :\ y \in f(D)\}$. $y \in f(D)$ bada, aurkitu daiteke $x \in D$ non $f(x) = y$ den eta $f^{-1}(f(x)) = x$ denez, f^{-1} funtzioaren grafikoa hurrengo eran ere adieraz daiteke:

$$\{(f(x),\ x)\ :\ x \in D\},$$

hau da, f eta f^{-1} funtzioen grafikoak $y = x$ zuzenarekiko simetrikoak dira.



4.2 Aldagai errealeko funtzioen limiteak

Definizioa. Izan bitez $a \in \mathbb{R}$ eta $r > 0$. $(a-r, a+r) - \{a\} = (a-r, a) \cup (a, a+r) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < r\}$ multzoa a puntuan zentratutako eta r erradioko *tarte simetriko laburtua* dela esaten da.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in \mathbb{R}$, eta demagun existitzen dela $r > 0$ non $(a-r, a+r) - \{a\} \subset D$ den. Izan bedi $l \in \mathbb{R}$. l zenbakia f funtzioaren a puntuko limitea dela diogu eta $\lim_{x\to a} f(x) = l$ idazten dugu baldin eta

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(a,\epsilon) > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Adibidea. $\lim_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0.$

Frogatu behar duguna hurrengoa da:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \le |x|,$$

beraz, $\delta = \epsilon > 0$ hartuz,

$$|x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \le |x| < \delta = \epsilon.$$

Definizioak. *(Limite infinituak)* Izan bedi f a puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako funtzioa.

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ dela diogu baldin eta

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta = \delta(M,a) > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > M.$$

(ii) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ dela diogu baldin eta

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta = \delta(M,a) > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < M.$$

Oharra. Batzuetan, $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ bada, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ idazten da.

Adibidea. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty.$

Izan bedi $M > 0$ edozein.

$$f(x) = \frac{1}{|x|} > M \Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{M},$$

beraz $\delta = \dfrac{1}{M}$ hartuz,

$$0 < |x| < \delta \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{|x|} > M.$$

Definizioak. *(Limiteak infinituan)* Izan bedi $f\colon (b, +\infty) \to \mathbb{R}$ funtzioa.

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ da baldin eta

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K = K(\epsilon) \in \mathbb{R} \quad : \quad x > K \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ da baldin eta

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists K = K(M) \in \mathbb{R} \quad : \quad x > K \implies f(x) > M.$$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ da baldin eta

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists K = K(M) \in \mathbb{R} \quad : \quad x > K \implies f(x) < M.$$

Izan bedi $f\colon (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ funtzioa.

(i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ dela diogu baldin eta

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K = K(\epsilon) \in \mathbb{R} \quad : \quad x < K \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ izango da baldin eta

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists K = K(M) \in \mathbb{R} \quad : \quad x < K \implies f(x) > M.$$

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ da baldin eta

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists K = K(M) \in \mathbb{R} \quad : \quad x < K \implies f(x) < M.$$

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in \mathbb{R}$.

(i) Demagun existitu egiten dela $r > 0$ non $(a, a+r) \subset D$. Orduan $l \in \mathbb{R}$ zenbakia f funtzioaren a puntuko *eskuinetiko limitea* dela esaten dugu eta $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ idazten dugu baldin eta

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(a, \epsilon) > 0 \quad : \quad \forall x \in (a, a+\delta) \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

(ii) Demagun existitu egiten dela $r > 0$ non $(a-r, a) \subset D$. Orduan $l \in \mathbb{R}$ zenbakia f funtzioaren a puntuko *ezkerretiko limitea* dela esaten dugu eta $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ idazten dugu baldin eta

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(a, \epsilon) > 0 \quad : \quad \forall x \in (a-\delta, a) \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Adibidea. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$ funtzioaren definizio-eremua $(2, +\infty)$ da, beraz ezin da planteatu $a = 2$ puntuko limitea, baina bai eskuinetiko limitea.

Teorema 4.1. *Izan bedi f aldagai errealeko funtzioa eta $a \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l.$$

Froga. $\Longrightarrow$) Suposatzen dugu $\lim_{x\to a} f(x) = l$ dela, hau da

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Orduan, bereziki

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

beraz $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$. Era berean,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad -\delta < x - a < 0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

hots, $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$.

$\Longleftarrow$) Orain $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ eta $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ direla suposatzen dugu. Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. Orduan

$$\begin{aligned} \exists \delta_1 > 0 \quad &: \quad 0 < x - a < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon, \\ \exists \delta_2 > 0 \quad &: \quad -\delta_2 < x - a < 0 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon. \end{aligned}$$

Izan bedi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Orduan $0 < |x - a| < \delta \Longleftrightarrow 0 < x - a < \delta$ edo $-\delta < x - a < 0$ denez

$$\begin{aligned} 0 < x - a < \delta \leq \delta_1 \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon, \\ -\delta_2 \leq -\delta < x - a < 0 \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon. \end{aligned}$$

Beraz, $\lim_{x\to a} f(x) = l$. □

Oharra. Hemendik aurrera enuntziatuko ditugun propietate guztiak f funtzioaren a puntuko limitearen kasuan emango ditugu, baina denak berridatzi daitezke limiteak infinituan kalkulatzen direnean eta albo-limiteetarako ere. Frogetan, a puntuan zentratutako tarteak $(K, +\infty)$ moduko tarteekin ordezkatu behar dira, $+\infty$-ko limiteei buruz hitz egin nahi badugu, $(-\infty, K)$ moduko tarteekin $-\infty$-ko limiteak kontsideratuko bagenitu, $(a, a+\delta)$ moduko tarteekin a puntuko eskuinetiko limiteetarako eta, azkenik, $(a - \delta, a)$ moduko tarteekin, a puntuko ezkerretiko limiteen kasuan.

Teorema 4.2 (Limitearen bakartasuna)**.** *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in \mathbb{R}$ eta demagun $\exists\, r > 0$ non $(a-r, a+r) - \{a\} \subset D$. Baldin eta f funtzioaren a puntuko limitea existitzen bada orduan bakarra da, hots*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \quad \textit{eta} \quad \lim_{x\to a} f(x) = l_2 \quad \Longrightarrow \quad l_1 = l_2.$$

Froga. Absurdora eramanez, demagun existitzen direla $l_1 > l_2$ non $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ eta $\lim_{x\to a} f(x) = l_2$ den. Har dezagun $\epsilon = \dfrac{l_1 - l_2}{2} > 0$. Orduan, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ denez,

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2},$$

eta $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_2$ denez,

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2}.$$

Izan bedi $x \in D$ non $0 < |x-a| < \delta_1$ eta $0 < |x-a| < \delta_2$. Alde batetik

$$|f(x) - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2} \Longrightarrow f(x) - l_1 > -\frac{l_1 - l_2}{2} \Longrightarrow f(x) > l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

eta bestalde,

$$|f(x) - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2} \Longrightarrow f(x) - l_2 < \frac{l_1 - l_2}{2} \Longrightarrow f(x) < l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

baina bi desberdintzak aldi berean ezin dira bete, kontraesan batera heldu gara. Beraz $l_1 = l_2$. □

Proposizioa 4.3. *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in \mathbb{R}$, eta demagun existitzen dela $r > 0$ non $(a-r, a+r) - \{a\} \subset D$ den. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ zenbaki erreala bada orduan f bornatua da a puntuan zentratutako tarte laburtu batean, hots*

$$\exists\, M > 0,\ \exists\, \delta > 0 \quad : \quad \forall\, x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \quad |f(x)| \le M.$$

Froga. Izan bedi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Orduan

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

Bereziki, $\epsilon = 1$ hartuz,

$$\exists\, \delta > 0 \quad : \quad \forall\, x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \quad |f(x) - l| < 1.$$

Bestalde, $\forall\, x \in D$,

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \le |f(x) - l| + |l|.$$

Beraz,

$$\exists\, \delta > 0 \quad : \quad \forall\, x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \quad |f(x)| \le 1 + |l| = M. \quad \square$$

Teorema 4.4 (Funtzio baten limitearen karakterizazioa zenbaki errealen segiden bidez)**.** *Izan bedi f aldagai errealeko funtzioa eta izan bitez $a, l \in \mathbb{R}$. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ da baldin eta soilik baldin*

$$\forall \{x_n\} \textit{ z. e. s. } : x_n \neq a,\ \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} x_n = a \textit{ orduan } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Froga. $\Longrightarrow$) Suposatzen dugu $\lim_{x\to a} f(x) = l$ dela, hau da,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Izan bedi $\{x_n\}$ zenbaki errealezko segida, non $x_n \neq a$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Frogatu behar dugu $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$ dela.

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. Orduan

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Baina $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ denez, $\delta > 0$ horretarako

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \delta.$$

Gainera, $x_n \neq a$ denez $\forall n \in \mathbb{N}$, orduan $0 < |x_n - a| < \delta$. Beraz,

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad & \forall n \geq n_0 \quad 0 < |x_n - a| < \delta \quad \Longrightarrow \\ & \forall n \geq n_0 \quad |f(x_n) - l| < \epsilon. \end{aligned}$$

Hau da, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

$\Longleftarrow$) Absurdora eramanez demagun $\lim_{n\to\infty} f(x) \neq l$ dela. Orduan, existituko da $\epsilon > 0$ non

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \quad : \quad |f(x) - l| \geq \epsilon.$$

Bereziki, $n \in \mathbb{N}$ emanda, $\delta = 1/n$ hartuz,

$$\exists x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) - \{a\} \quad : \quad |f(x_n) - l| \geq \epsilon.$$

Baina $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) - \{a\}$ denez $x_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, beraz hipotesiaren arabera $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$ eta hau ez da posible $|f(x_n) - l| \geq \epsilon$ delako $n \in \mathbb{N}$ edozein izanda.

Kontraesan batera heldu garenez, hasierako hipotesia ez da egia, $\lim_{x\to a} f(x) = l$ da, alegia. □

Oharra. Aurreko teorema erabili daiteke frogatzeko limite bat ez dela existitzen. a puntura konbergenteak diren bi segida baditugu, eta beraien irudiek f funtzioaren bidez osatzen duten segidek limite desberdina badute, orduan f-ren limitea a puntuan ez da existituko.

Adibidea. $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ ez da existitzen.

Izan bitez $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ eta $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad \text{eta} \quad x_n \neq 0, \quad y_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ zenbaki erreala izatekotan $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{y_n}$ izan beharko luke, baina

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin (2\pi n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \sin \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

4.3 Funtzioen limiteak eta eragiketa algebraikoak

Proposizioa 4.5. *Izan bitez f eta g a puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioak, f funtzioa tarte horretan bornatua izanik eta $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Orduan*

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

Froga. f bornatua denez,

$$\exists\, M > 0,\ \exists\, \delta_1 > 0 \quad : \quad \forall\, x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) - \{a\} \quad |f(x)| \leq M.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ denez, $\frac{\epsilon}{M} > 0$ hartuz

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x)| < \frac{\epsilon}{M}.$$

Izan bedi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Orduan

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon.$$

Beraz, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. □

Teorema 4.6. *Izan bitez f eta g a puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioak, $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ eta $\lim_{x\to a} g(x) = m \in \mathbb{R}$ izanik. Orduan*

(i) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = l + m.$

(ii) $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = lm.$

(iii) $m \neq 0$ *bada* $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{1}{m}$.

(iv) $m \neq 0$ *bada* $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{l}{m}$.

(v) $\lim_{x \to a} |f(x)| = |l|$.

Froga. (i) Honako hau frogatu behar dugu:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) + g(x) - (l+m)| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim_{x \to a} f(x) = l$ denez,

$$\exists \delta_1 > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2},$$

eta $\lim_{x \to a} g(x) = m$ denez,

$$\exists \delta_2 > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Gainera, balio absolutuaren desberdintza triangeluarraren arabera, x guztietarako,

$$|f(x) + g(x) - (l+m)| = |f(x) - l + g(x) - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m|.$$

Hartzen badugu $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $0 < |x-a| < \delta$ denean

$$|f(x)+g(x)-(l+m)| = |f(x)-l+g(x)-m| \leq |f(x)-l| + |g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Beraz $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = l + m$.

(ii) Honako hau frogatu behar dugu orain:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)g(x) - lm| < \epsilon.$$

$m = 0$ bada, f funtzioa bornatua denez (a puntuko limitea existitzen delako) frogatu dugu $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0 = lm$ dela.

$m \neq 0$ bada,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| &= |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\ &\leq |f(x)(g(x) - m)| + |m(f(x) - l)| = |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l|. \end{aligned}$$

Gainera f-ren limitea zenbaki erreala denez,

$$\exists \delta_3 > 0, \ \exists M > 0 \quad : \quad |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in (a - \delta_3, a + \delta_3).$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim_{x\to a} g(x) = m$ denez, $\dfrac{\epsilon}{2M} > 0$ hartuz,

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

$m \neq 0$ dela kontuan hartuz, $\dfrac{\epsilon}{2|m|} > 0$ da eta beraz, $\lim_{x\to a} f(x) = l$ izateagatik,

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2|m|}.$$

Orduan, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ hartuz, $0 < |x-a| < \delta$ bada

$$|f(x)g(x) - lm| \leq |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l| < M\frac{\epsilon}{2M} + |m|\frac{\epsilon}{2|m|} = \epsilon.$$

Hau da, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = lm$.

(iii) Lehenengo eta behin, frogatuko dugu $g(x) \neq 0$ dela a puntuan zentratutako tarte laburtu batean. Horrela, $\dfrac{1}{g}$ funtzioa ondo definituta egongo da.

Izan bedi $\epsilon = \dfrac{|m|}{2} > 0$ ($m \neq 0$ delako). Orduan

$$\exists\, \delta_3 > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta_3 \implies |g(x) - m| < \frac{|m|}{2} \quad \implies$$

$$\forall\, x \in (a-\delta_3, a+\delta_3) \quad |m| - |g(x)| \leq ||m| - |g(x)|| \leq |g(x) - m| < \frac{|m|}{2} \quad \implies$$

$$\forall\, x \in (a-\delta_3, a+\delta_3), \quad |g(x)| \geq m - \frac{|m|}{2} = \frac{|m|}{2} > 0.$$

Hau da, $g(x) \neq 0$ da $x \in (a-\delta_3, a+\delta_3) - \{a\}$ guztietarako eta $1/g(x)$ ondo definituta dago. Gainera,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m - g(x)}{g(x)m}\right| = \frac{|g(x) - m|}{|m||g(x)|}.$$

Orain, izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\epsilon\dfrac{|m|^2}{2} > 0$ denez,

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x) - m| < \epsilon\frac{|m|^2}{2}.$$

Izan bedi $\delta = \min\{\delta_3, \delta_2\}$,

$$0 < |x-a| < \delta \implies \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|g(x) - m|}{|m||g(x)|} < \frac{1}{|m|}\frac{2}{|m|}\epsilon\frac{|m|^2}{2} = \epsilon.$$

Beraz, $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{m}$.

(iv) (ii) eta (iii) atalen ondorioa da.

(v) Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$ denez x guztietarako,

$$\exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies ||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \epsilon.$$

Hau da, $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l|$. □

4.4 Funtzioen limiteak eta ordena-erlazioa

Teorema 4.7. *Izan bedi f a puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioa, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ izanik, eta izan bedi $c \in \mathbb{R}$.*

(i) Baldin eta $l > c$ bada, orduan existitzen da $\delta > 0$ non $f(x) > c$ den $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ guztietarako.

(ii) Baldin eta $l < c$ bada, orduan existitzenda $\delta > 0$ non $f(x) < c$ den $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ guztietarako.

Froga. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ denez,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(i) Izan bedi $l > c$. $\epsilon = l - c > 0$ hartuz

$$\exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < l - c.$$

Hau da,

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}, \quad -(l - c) < f(x) - l < l - c \quad \implies \\ &\forall\, x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}, \quad f(x) > -(l - c) + l = c. \end{aligned}$$

(ii) Antzeko arrazonamendu baten bidez frogatzen da. □

Teorema 4.8. *Izan bitez $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ eta $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$. Demagun existitzen dela $\delta > 0$ non $f(x) \leq g(x)$ den $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ guztietarako. Orduan $l \leq m$.*

Froga. Absurdora eramanez, demagun $l > m$ dela eta defini dezagun $h(x) = f(x) - g(x)$. Aurreko teoremaren arabera, $c = 0$ hartuz, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = l - m > 0$ denez,

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad : \quad \forall\, x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) - \{a\} \quad h(x) > 0.$$

Hau da, $f(x) > g(x)$, $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) - \{a\}$ guztietarako, baina hau hipotesiaren kontra doa, beraz $l \leq m$. □

Teorema 4.9 (Funtzioetarako sandwicharen erregela)**.** *Izan bitez f, g eta h a puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioak. Demagun existitzen dela $\delta > 0$ non*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall\, x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\},$$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$ *izanik. Orduan*

$$\lim_{x\to a} h(x) = l.$$

Froga. Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein.

$$\begin{array}{lclcl}
\lim_{x\to a} f(x) = l & \Longrightarrow & \exists\, \delta_1 > 0 & : & 0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon. \\
\lim_{x\to a} g(x) = l & \Longrightarrow & \exists\, \delta_2 > 0 & : & 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow l - \epsilon < g(x) < l + \epsilon.
\end{array}$$

Gainera,

$$\forall\, x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Izan bedi $\delta_3 = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$. Orduan,

$$0 < |x-a| < \delta_3 \Longrightarrow l - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \epsilon.$$

Beraz, $\lim_{x\to a} h(x) = l$. □

Funtzio baten limitea infinitua dela frogatzeko antzeko baldintzak eskatu daitezke baina kasu hauetan nahikoa izango da funtzio bat topatzearekin. Frogak irakurlearentzat uzten dira.

Teorema 4.10. *Izan bitez f eta g a puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioak. Demagun existitzen dela $\delta > 0$ non*

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall\, x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\},$$

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *bada, orduan* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.

(ii) $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ *bada, orduan* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

4.5 Infinitesimoak

Definizioa. Izan bedi α a puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzio erreala. α a puntuko *infinitesimoa* dela diogu baldin eta $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ bada.

Adibideak. Izan bedi $a \in \mathbb{R}$. $\sin(x-a)$, $\cos(x-a) - 1$ eta $(x-a)^n$ a puntuko infinitesimoak dira.

Definizioak. Izan bitez α eta β a puntuko infinitesimoak.

(i) Baldin eta $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ bada, orduan α infinitesimoaren ordena a puntuan β-rena baino txiiagokoa dela diogu.

(ii) Baldin eta $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k\in\mathbb{R}-\{0\}$ bada, orduan α eta β infinitesimok a puntuan ordena berekoak direla esaten dugu.

(iii) Baldin eta $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ bada, orduan α eta β a puntuko *infinitesimo baliokideak* direla esaten da eta $\alpha\sim\beta$ idatzi ohi da.

Infinitesimo baliokide nagusiak. Izan bedi α a puntuko infinitesimoa. Orduan

(i) $\sin(\alpha(x))\sim\alpha(x)$.

(ii) $1-\cos(\alpha(x))\sim\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$.

(iii) $\tan(\alpha(x))\sim\alpha(x)$.

(iv) $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$.

(v) $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$.

(vi) $b^{\alpha(x)}-1\sim(\ln b)\alpha(x)$, $b>0$ izanik.

(vii) $\arcsin(\alpha(x))\sim\alpha(x)$.

(viii) $\arctan(\alpha(x))\sim\alpha(x)$.

Teorema 4.11. *Izan bitez α eta β a puntuko infinitesimo baliokideak eta izan bedi f a puntuaren ingurune batean definitutako funtzioa. Orduan*

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)f(x)=\lim_{x\to a}\beta(x)f(x),\qquad \textit{eta}\qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\beta(x)}.$$

Froga. α eta β a puntuko infinitesimo baliokideak direnez, $\lim_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, beraz,

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\beta(x)f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\lim_{x\to a}\beta(x)f(x)=\lim_{x\to a}\beta(x)f(x).$$

Gauza bera gertatzen da $\alpha(x)$ zatitzen agertzen bada. □

Adibidea. Kalkula dezagun $\lim_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$. Horretarako infinitesimo baliokideak erabiliko ditugu.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(1+x^2-4)}{(x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{(x+5)}=\frac{4}{7}.$$

4.6 Funtzio jarraituak: definizioak eta oinarrizko propietateak

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in D$. f funtzioa a puntuan *jarraitua* dela diogu baldin eta $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ bada, hau da,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(a,\epsilon) > 0 \quad : \quad |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Adibideak. Polinomioak eta esponentzialak funtzio jarraituak dira puntu guztietan.

Logaritmoak jarraituak dira a puntuan, $a > 0$ bada.

Sinua eta kosinua jarraituak dira puntu guztietan. Aldiz, tangentea ez da jarraitua $a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ motakoa bada, $k \in \mathbb{Z}$.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in D$.

(i) f funtzioa a puntuan *eskuinetik jarraitua* dela diogu $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ bada.

(ii) f funtzioa a puntuan *ezkerretik jarraitua* dela diogu $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ bada.

Proposizioa 4.12. *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in D$. f a puntuan jarraitua da baldin eta soilik baldin ezkerretik jarraitua eta eskuinetik jarraitua bada.*

Proposizioa 4.13. *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in D$. Baldin eta f a puntuan jarraitua bada orduan $\exists\, \delta > 0$ non f $(a-\delta, a+\delta)$ tartean bornatua den, hau da*

$$\exists\, M > 0 \quad : \quad |f(x)| \le M, \quad \forall\, x \in (a-\delta, a+\delta).$$

Era berean, f funtzioa a puntuan ezkerretik jarraitua bada, existitzen da $\delta > 0$ non f bornatua den $(a-\delta, a]$ tartean; eta f eskuinetik jarraitua bada, existitzen da $\delta > 0$ non f bornatua den $[a, a+\delta)$ tartean.

Proposizioa 4.14. *Izan bitez f eta g a puntuan jarraituak. Orduan:*

(i) $f+g$ funtzioa a puntuan jarraitua da.

(ii) $f\,g$ funtzioa a puntuan jarraitua da.

(iii) Baldin eta $g(a) \neq 0$ bada, orduan $\dfrac{1}{g}$ funtzioa a puntuan jarraitua da.

(iv) Baldin eta $g(a) \neq 0$ bada, orduan $\dfrac{f}{g}$ funtzioa a puntuan jarraitua da.

Oharra. f eta g a puntuan ezkerretik jarraituak (eskuinetik jarraituak) badira, orduan aurreko funtzioak ezkerretik jarraituak (eskuinetik jarraituak) dira.

Proposizioa 4.15. *Izan bitez f funtzioa a puntuan jarraitua eta $c \in \mathbb{R}$.*

(i) $f(a) > c$ bada, orduan existitzen da $\delta > 0$ non $f(x) > c$ den $x \in (a - \delta, a + \delta)$ guztietarako.

(ii) $f(a) < c$ bada, orduan existitzen da $\delta > 0$ non $f(x) < c$ den $x \in (a - \delta, a + \delta)$ guztietarako.

Proposizioa 4.16. *Izan bitez f eta g funtzioak a puntuan jarraituak. Baldin eta $f(a) < g(a)$ bada orduan existitzen da $\delta > 0$ non $f(x) < g(x)$ den $x \in (a - \delta, a + \delta)$ guztietarako.*

Proposizioa 4.17 (Jarraitutasunaren karakterizazioa zenbaki errealen segiden bidez)**.** *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in D$. Orduan f funtzioa a puntuan jarraitua da baldin eta soilik baldin*

$$\forall \{x_n\} \text{ z.e.s. } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ izanik, } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Proposizioa 4.18. *Izan bitez $\lim_{x\to a} f(x) = l$ eta g funtzioa l puntuan jarraitua. Orduan*

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(l).$$

Froga. Frogatu behar dugu hurrengoa:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |g(f(x)) - g(l)| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. g funtzioa l puntuan jarraitua denez

$$\exists \delta_2 > 0 \quad : \quad |y - l| < \delta_2 \implies |g(y) - g(l)| < \epsilon.$$

$\delta_2 > 0$ da, eta $\lim_{x\to a} f(x) = l$, beraz

$$\exists \delta_1 > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - l| < \delta_2.$$

Orduan,

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - l| < \delta_2 \implies |g(f(x)) - g(l)| < \epsilon.$$

Hau da, $\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(l)$. □

Korolarioa 4.19. *f funtzioa a puntuan jarraitua eta g funtzioa $f(a)$ puntuan jarraitua badira orduan $g \circ f$ funtzioa a puntuan jarraitua da.*

4.7 Etenguneak

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $a \in \mathbb{R}$. a puntua f funtzioaren *etengunea* (edo *eten-puntua*) dela esango dugu hurrengo bi baldintzetatik bat betetzen denean:

(i) $a \in D$ baina f ez da jarraitua a puntuan;

(ii) $a \notin D$ baina existitzen da $r > 0$ non $(a - r, a + r) - \{a\} \subset D$.

Definizioa. *(Etenguneen sailkapena)* Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta a f funtzioaren etengunea.

(i) Baldin eta $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ bada, orduan a puntua f funtzioaren *etengune gaindigarria* (edo *ekidingarria*) dela diogu. Kasu honetan defini dezakegu

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a,\ x \in D \text{ denean}, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & x = a \text{ denean}. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ funtzioa a puntuan jarraitua da eta $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \neq a$ bada. Beraz, f-ren a puntuko etengunea $\tilde{f}$-ren bidez "gainditzen" dugu.

(ii) a puntua f funtzioaren *lehen mailako etengunea* dela esango dugu baldin eta $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ eta $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existitzen badira, finituak edo infinituak, eta finituak direnean, desberdinak badira.

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ eta $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ zenbaki erreal desberdinak badira, f-k a puntuan jauzi bat duela esaten da, $\left|\lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right|$ zenbaki erreala f-ren a puntuko *jauziaren neurria* izanik.

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ edo $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ infinituak badira, orduan $x = a$ zuzena f-ren *asintota bertikala* dela diogu.

(iii) a puntua f funtzioaren *bigarren mailako etengunea* dela diogu baldin eta albo-limite bat, gutxienez, ez bada existitzen.

Adibideak.

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $a = 1$ f funtzioaren etengune gaindigarria da:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x + 1) = 2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $a = 0$ f funtzioaren lehen mailako etengunea da $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ delako.

(iii) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0 \text{ denean,} \\ x-1, & x \geq 0 \text{ denean.} \end{cases}$.

$a = 0$ f funtzioaren lehen mailako etengunea da zren eta,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} (1-x) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to o^+} (x-1) = -1. \end{aligned}$$

Beraz, f-ren jauziaren neurria $a = 0$ puntuan $|1-(-1)| = 2$ da.

(iv) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $a = 0$ bigarren mailako etengunea da, ikusi dugun bezala $\lim_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ ez baita existitzen.

4.8 Funtzio jarraituei buruzko teorema nagusiak

Definizioa. Izan bedi f aldagai errealeko funtzioa.

(i) f (a, b) *tartean jarraitua* dela diogu baldin eta f x puntuan jarraitua bada, $x \in (a, b)$ guztietarako.

(ii) f $[a, b]$ *tartean jarraitua* dela diogu baldin eta (a, b) tartean jarraitua, a puntuan eskuinetik jarraitua eta b puntuan ezkerretik jarraitua bada.

Teorema 4.20 (Bolzanoren teorema)**.** *Izan bedi f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua. Baldin eta $f(a)$ eta $f(b)$ balioen zeinuak desberdinak badira, orduan existitzen da $x_0 \in (a, b)$ non $f(x_0) = 0$ den.*

Froga. Demagun $f(a) > 0$ eta $f(b) < 0$ direla (beste kasua antzera frogatzen da) eta izan bedi $I_1 = [a, b]$ tartea. Kontsidera dezagun tarte honen erdiko puntua, $\dfrac{a+b}{2}$.

- $f\big(\dfrac{a+b}{2}\big) = 0$ bada, $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ eta amaitu dugu.
- $f\big(\dfrac{a+b}{2}\big) > 0$ bada, izan bitez $a_2 = \dfrac{a+b}{2}$ eta $b_2 = b$.
- $f\big(\dfrac{a+b}{2}\big) < 0$ bada, izan bitez $a_2 = a$ eta $b_2 = \dfrac{a+b}{2}$.

$I_2 = [a_2, b_2]$ tartearekin errepikatzen badugu prozesua I_3 tartea lortuko dugu, eta horrela jarraituz, I_n tarte txertatuen familia bat lortuko dugu, non $|I_n| = b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$. Hau da, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$.

f jarraitua denez,

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0 \quad \text{eta} \quad f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0.$$

Beraz, $f(x_0) = 0$ da frogatu nahi genuen bezala. □

Oharra. Bolzanoren teoremaren frogak metodo bat ematen digu $f(x) = 0$ ekuazioaren soluzioak hurbiltzeko. Izan ere, n. urratsaren ondoren $(b-a)/2^{n-1}$ luzerako tartean sartu dugu f-ren erroa. Benetako erroaren ordez, tarteko erdiko puntua hartuz gero, egiten dugun errorearen tamaina $(b-a)/2^n$ baino txikiagoa da eta n handia hartuta, errorea nahi den bezain txikia izan daiteke.

Teorema 4.21 (Tarteko balioen teorema edo Darbouxen teorema)**.** *Izan bedi f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua. Orduan f-k $[a,b]$ tartean $f(a)$ eta $f(b)$ balioen arteko balio guztiak hartzen ditu, hau da y $f(a)$ eta $f(b)$ balioen artean baldin badago,*

$$\exists\, x \in [a,b] \quad : \quad f(x) = y.$$

Froga. $f(a) = f(b)$ bada, orduan teorema nabaria da.

$f(a) < f(b)$ baldin bada, izan bedi $y \in \mathbb{R}$ non $f(a) < y < f(b)$ eta defini dezagun $g(x) = f(x) - y$. f jarraitua denez $[a,b]$ tartean g ere jarraitua da tarte horretan. Gainera

$$g(a) = f(a) - y < 0$$

$$g(b) = f(b) - y > 0$$

Bolzanoren teoremaren arabera, existitzen da $x_0 \in (a,b)$ non $g(x_0) = 0$ den, hau da, existitzen da $x_0 \in (a,b)$ non $f(x_0) = y$ den.

$f(a) > f(b)$ bada, $g(x) = y - f(x)$ hartzen da. □

Oharra. Aurreko teoremaren arabera, funtzio jarraituek tarteak tarte bihurtzen dute, hau da, $A \subset \mathbb{R}$ tarte bat bada, orduan $f(A)$ tarte bat da ere. Tarteak irekiak, itxiak edo erdiirekiak izan daitezke, bornatuak edo ez bornatuak. Hala ere, tartemota ez da zertan gorde.

Teorema 4.22. *Izan bedi f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua. Orduan f bornatua da $[a,b]$ tartean, hots*

$$\exists\, M > 0 \quad : \quad |f(x)| \leq M, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Froga. Izan bedi $A = \{x \in [a,b] \ : \ f \text{ bornatua } [a,x] \text{ tartean}\}$.

$a \in A$, beraz $A \neq \emptyset$. Gainera $A \subset [a, b]$ beraz, bornatua da eta bere supremoa existitu egiten da. Izan bedi $\alpha = \sup A$.

Lehenengo eta behin, frogatuko dugu $\alpha = b$ dela. f a puntuan eskuinetik jarraitua denez, existitzen da $\delta > 0$ non f $[a, a + \delta)$ tartean bornatua den. Beraz, $\alpha > a$.

Absurdora eramanez, demagun $\alpha < b$ dela, hau da, $\alpha \in (a, b)$ eta beraz f jarraitua da α-n. Ondorioz,

$$\exists\, \delta > 0 \quad : \quad f \quad (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \text{ tartean bornatua den.}$$

$\alpha = \sup A$ denez, existitzen da $x_0 \in A$ non $\alpha - \delta < x_0$ den. $x_0 \in A$ denez, f bornatua da $[a, x_0]$ tartean.

Izan bedi $x_1 \in (\alpha, \alpha + \delta)$. Orduan $[x_0, x_1] \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, beraz, f bornatua da $[x_0, x_1]$ tartean.

f bornatua da $[a, x_0]$ tartean eta baita $[x_0, x_1]$ tartean ere, beraz f bornatua da $[a, x_1]$ tartean. Baina $x_1 \in A$ eta $x_1 > \sup A$. Hau ez da posible, beraz $\alpha = b$.

Orain, f b puntuan ezkerretik jarraitua denez, existituko da $\delta > 0$ non f bornatua den $(b - \delta, b]$-n. Gainera, $b = \sup A$ denez, existitzen da $x_0 \in A$ non $b - \delta < x_0$ den.

$$\begin{aligned} x_0 \in A &\Longrightarrow f \quad [a, x_0] \text{ tartean bornatua;} \\ [x_0, b] \subset (b - \delta, b] &\Longrightarrow f \quad [x_0, b] \text{ tartean bornatua.} \end{aligned}$$

Beraz, f bornatua da $[a, b]$ tartean. □

Teorema 4.23. *f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua bada orduan f-k bere maximoa eta minimoa ditu $[a, b]$ tartean. Hau da*

$$\begin{aligned} \exists\, x_1 \in [a, b] \quad &: \quad f(x_1) \geq f(x), \quad \forall\, x \in [a, b]; \\ \exists\, x_2 \in [a, b] \quad &: \quad f(x_2) \leq f(x), \quad \forall\, x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Froga. Aurreko teoreman ikusi dugun bezala, f $[a, b]$ tartean jarraitua denez, bornatua da $[a, b]$ tartean, beraz, bere supremoa eta infimoa existitu egiten dira. Frogatu behar duguna da supremoa eta infimoa irudi-multzoaren elementuak direla.

Izan bedi $\alpha = \sup\{f(x) \,:\, x \in [a, b]\}$. Absurdora eramanez, demagun $\alpha \neq f(x)$, $x \in [a, b]$ guztietarako eta defini dezagun $g(x) = \dfrac{1}{\alpha - f(x)}$.

f jarraitua da $[a, b]$ tartean eta $\alpha - f(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$ guztietarako, beraz g jarraitua da $[a, b]$ tartean eta, aurreko teoremaren arabera, bornatua.

Bestalde, $\alpha = \sup\{f(x) \,:\, x \in [a, b]\}$ denez,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in [a, b] \quad : \quad f(x_n) > \alpha - \frac{1}{n}.$$

Baina, hau gertatzen bada, $g(x_n) > \dfrac{1}{\alpha - \left(\alpha - \frac{1}{n}\right)} = n$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, hau da, g ez da bornatua. Kontraesan batera iritsi garenez, hasieran suposatu duguna ez da egia. Beraz, existitzen da $x_0 \in [a, b]$ non $\alpha = f(x_0)$ den, hau da,

$$\exists\, x_0 \in [a, b] \quad : \quad f(x_0) \geq f(x) \quad \forall\, x \in [a, b].$$

f-k minimoa duela frogatzeko antzeko arrazonamendu baten bidez egiten da. □

4.9 Alderantzizko funtzioaren jarraitutasuna

Lema 4.24. *Izan bedi f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua eta injektiboa. Orduan f hertsiki gorakorra edo hertsiki beherakorra da tarte honetan.*

Froga. f injektiboa denez, $f(a) \neq f(b)$. Demagun $f(a) < f(b)$ dela eta izan bedi $x \in (a, b)$. $f(x) < f(a)$ balitz, Darbouxen teoremaren arabera

$$\exists\, x_0 \in [x, b] \quad : \quad f(x_0) = f(a),$$

eta hau ez da posible, f injektiboa delako. Beraz $f(x) > f(a)$. Era berean, frogatzen da $f(x) < f(b)$ dela. Beraz, $x \in (a, b)$ bada, $f(a) < f(x) < f(b)$.

Izan bitez orain $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. $f(x_1) > f(x_2)$ balitz orduan $f(a) < f(x_2) < f(x_1)$ eta berriro Darbouxen teorema aplikatuz, existitzen da $x_0 \in (a, b)$ non $f(x_0) = f(x_2)$ eta hau injektibotasunaren kontra doa, beraz $f(x_1) < f(x_2)$, hots, f hertsiki gorakorra da.

$f(a) > f(b)$ bada, antzeko arrazonamendu baten bidez frogatzen da f hertsiki beherakorra dela. □

Oharra. Funtzio hertsiki monotonoak injektiboak dira.

Lema 4.25. *f hertsiki gorakorra bada, orduan f^{-1} hertsiki gorakorra da eta f hertsiki beherakorra bada, orduan f^{-1} ere hertsiki beherakorra da.*

Froga. f gorakorra bada, $x_1 < x_2$ denean $f(x_1) < f(x_2)$ da. Izan bitez $y_1 > y_2$. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ balitz, f gorakorra denez, $f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2))$, hau da, $y_1 < y_2$ eta suposatu dugu $y_1 > y_2$, beraz $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, hots, f^{-1} gorakorra da.

Antzeko arrazonamendu baten bidez frogatzen da f beherakorra denean f^{-1} ere beherakorra dela. □

Teorema 4.26. *Izan bedi f funtzioa (a, b) tartean jarraitua eta injektiboa. Orduan f^{-1} jarraitua da $f\big((a, b)\big)$ tartean.*

Froga. Demagun f hertsiki gorakorra dela (a,b) tartean eta izan bedi $c \in f\big((a,b)\big)$. Frogatu nahi dugu f^{-1} jarraitua dela c puntuan, hau da

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad |x-c| < \delta \implies |f^{-1}(x) - f^{-1}(c)| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein eta izenda dezagun $\alpha = f^{-1}(c)$, hau da $f(\alpha) = c$. Aurkitu behar dugu $\delta > 0$ non

$$f(\alpha) - \delta < x < f(\alpha) + \delta \quad \Longrightarrow \quad \alpha - \epsilon < f^{-1}(x) < \alpha + \epsilon.$$

f gorakorra denez, $f(\alpha - \epsilon) < f(\alpha) < f(\alpha + \epsilon)$. Izan bedi

$$\delta = \min\{f(\alpha) - f(\alpha - \epsilon), f(\alpha + \epsilon) - f(\alpha)\}.$$

$f(\alpha) - \delta < x < f(\alpha) + \delta$ baldin bada, orduan δ-ren definiziotik,

$$f(\alpha) - (f(\alpha) - f(\alpha - \epsilon)) < x < f(\alpha) + f(\alpha + \epsilon) - f(\alpha),$$

hau da, $f(\alpha - \epsilon) < x < f(\alpha + \epsilon)$. f^{-1} gorakorra denez, $f(\alpha - \epsilon) < x < f(\alpha + \epsilon)$ bada, orduan

$$f^{-1}\left(f(\alpha - \epsilon)\right) < f^{-1}(x) < f^{-1}\left(f(\alpha + \epsilon)\right)$$

hots, $\alpha - \epsilon < f^{-1}(x) < \alpha + \epsilon$. Beraz, f^{-1} jarraitua da c puntuan.

Antzeko moduan frogatzen da f^{-1} funtzioaren jarraitutasuna f hertsiki beherakorra bada. □

4.10 Jarraitutasun uniformea

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $A \subset D$. f funtzioa A multzoan *uniformeki jarraitua* dela diogu baldin eta

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad : \quad \forall\, x, y \in A, \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Jarraitutasuna propietate puntuala da, hau da, f funtzioa jarraitua da multzo batean multzo horretako puntu bakoitzean jarraitua bada. Beraz, edozein $\epsilon > 0$ emanda, existitu egiten den $\delta > 0$ puntuaren menpekoa da, puntu desberdinak aztertzen baldin baditugu, δ-ren balioa aldatu egingo da.

Aldiz, jarraitutasun uniformea propietate globala da, hau da, A multzoko puntu guztiak batera aztertzen dira, eta bi puntu hurbil baldin badaude, orduan beraien irudiak ere hurbil egongo dira. $\delta > 0$ zenbakia ϵ-en menpekoa da soilik.

Proposizioa 4.27. *Baldin eta f funtzioa A multzoan uniformeki jarraitua bada orduan A multzoan jarraitua da.*

Oharra. Alderantzizkoa orokorrean ez da egia. Hau da, funtzio jarraituak orokorrean ez dira uniformeki jarraituak. Adibidez, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funtzioa $(0,1)$ multzoan jarraitua da baina ez da uniformeki jarraitua multzo honetan. Ikus dezagun:

Izan bitez $x_n = \dfrac{1}{n}$ eta $y_n = \dfrac{1}{n+1}$.

$$|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Izan bedi $\delta > 0$ edozein. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 0$ denez, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $\dfrac{1}{n_0(n_0+1)} < \delta$ den. $\epsilon = 1$ hartuz, $\delta > 0$ guztietarako existitzen dira $x = \dfrac{1}{n_0}$ eta $y = \dfrac{1}{n_0+1}$ non $x, y \in (0,1)$ eta

$$|x - y| < \delta \quad \text{baina} \quad |f(x) - f(y)| = |n_0 - (n_0+1)| = 1 \geq \epsilon.$$

Hau da, f ez da uniformeki jarraitua $(0,1)$ multzoan.

Teorema 4.28 (Heineren teorema)**.** *f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua bada orduan $[a,b]$ tartean uniformeki jarraitua da.*

5. Gaia

Deribagarritasuna

5.1 Deribatua: definizioa, adibideak eta oinarrizko propietateak

Definizioa. Izan bedi f a puntuan zentratutako tarte batean definitutako funtzioa. f a puntuan *deribagarria* dela diogu baldin eta

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existitzen bada eta zenbaki erreala bada. Limite hau $f'(a)$-ren bidez adieraziko dugu eta f funtzioaren *deribatua* a puntuan dela esango dugu.

Adibideak.

(i) $f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$ izanik. Funtzio konstante baten deribatua kalkulatuko dugu a puntuan, a edozein zenbaki erreal izanik.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

(ii) $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ izanik. Kalkula dezagun funtzio honen deribatua a puntuan, a edozein zenbaki erreal izanik.

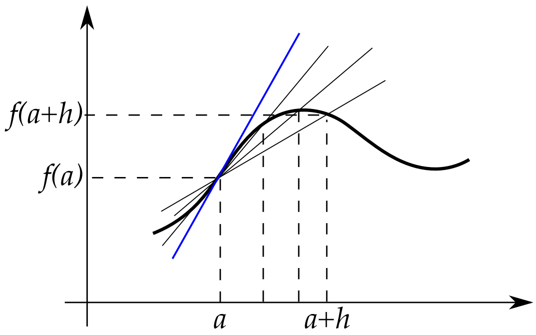
$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})}{x-a}=na^{n-1}.\end{aligned}$$

(iii) $f(x)=\sqrt{x}$. Funt¡io honen definizio-eremua $[0,\infty)$ da. Izan bedi, beraz, $a\geq 0$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.$$

$a=0$ bada, goiko limitea ez da finitua. Aldiz, $a>0$ bada, $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Ikus dezagun grafikoki zer den funtzio baten deribatua puntu batean. $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(a, f(a))$ eta $(a+h, f(a+h))$ puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen malda da. Deribatua zenbaki honen limitea da h-k 0-runtz jotzen duenean, beraz, funtzio baten deribatua a puntuan f funtzioaren grafikoaren a puntuko zuzen ukitzailearen malda da.



Hau da, f funtzioaren a puntuko zuzen ukitzailearen ekuazioa hurrengoa da:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Definizioa. (i) Izan bedi f $[a, a+r)$ moduko tarte batean definituta dagoen funtzioa. f *eskuinetik deribagarria* dela diogu baldin eta

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

zenbaki erreala bada. Limite hau $f'(a^+)$ edo $f'(a,+)$ adierazpenen bidez idazten da eta f-ren a puntuko *eskuinetiko deribatua* da.

(ii) Izan bedi f $(a-r, a]$ moduko tarte batean definituta dagoen funtzioa. f *ezkerretik deribagarria* dela diogu baldin eta

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

zenbaki erreala bada. Limite hau $f'(a^-)$ edo $f'(a,-)$ adierazpenen bidez idazten da eta f-ren a puntuko *ezkerretiko deribatua* da.

Teorema 5.1. *f a puntuan deribagarria da baldin eta soilik baldin a puntuan eskuinetik eta ezkerretik deribagarria bada eta albo-deribatuak berdinak badira.*

Teorema 5.2. *Izan bedi f funtzioa a puntuan zentratutako tarte batean definituta. f deribagarria bada a puntuan, orduan f jarraitua da a puntuan.*

Froga. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ dela frogatu behar dugu.

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\cdot 0.$$

Beraz, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. $\square$

Oharra. Teorema honen alderantzizkoa ez da egia. Hau da, topa daitezke a puntuan jarraituak diren funtzioak baina puntu berean deribagarriak ez direnak. Adibidez, $f(x) = |x|$ funtzioa jarraitua da puntu guztietan, baina ez da deribagarria $a = 0$ puntuan. Ikus dezagun,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Albo-deribatuak desberdinak direnez, f ez da deribagarria $a = 0$ puntuan.

Definizioa. Izan bedi f funtzioa $D \subset \mathbb{R}$ multzoan definiturik. f deribagarria bada D multzoko puntu guztietan orduan f D *multzoan deribagarria* dela esaten da.

Definizioa. Izan bedi f funtzioa $D \subset \mathbb{R}$ multzoan deribagarria. Orduan defini dezakegu f' funtzioa honela:

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\to f'(x). \end{aligned}$$

Orain, plantea dezakegu f' funtzioaren deribagarritasuna. f' funtzioa $a \in D$ puntuan deribagarria bada, $(f')'(a)$ f funtzioaren a puntuko *bigarren deribatua* da eta $f''(a)$ ikurraren bidez adierazten da.

Orokorrean, f-ren *n-garren deribatua* a puntuan honako modu honetan definitzen da:

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Notazioa. Funtzio baten deribatu funtzioa adierazteko hurrengo notazioa ere erabil daiteke:

$$f' = \frac{df}{dx} \qquad \textit{(Leibnizen notazioa.)}$$

Era berean

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}, \ldots, \quad f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Eta

$$f^{(n)}(a) = \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{|x=a} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

5.2 Deribagarritasuna eta funtzioen arteko eragiketak

Atal honetan oinarrizko erregelak emango ditugu funtzioen deribatuak kalkulatzeko definizioa erabili gabe. Lehenengo eta behin, funtzio deribagarrien arteko eragiketa algebraikoak aztertuko ditugu eta gero funtzio deribarrien arteko konposizioa. Oinarrizko funtzioen deribatuak eta atal honetako propietateak erabiliz, deribatu daitezke funtzioen arteko eragiketen bidez definitzen diren funtzio orokorragoak.

Teorema 5.3. *Izan bitez f eta g funtzioak a puntuan deribagarriak. Orduan*

(i) $f+g$ batura funtzioa deribagarria da a puntuan eta

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(ii) fg biderkadura funtzioa deribagarria da a puntuan eta

$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a).$$

(iii) $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\, f$ funtzioa deribagarria da a puntuan eta

$$(\lambda\, f)'(a) = \lambda\, f'(a).$$

(iv) Baldin eta $g(a) \neq 0$ bada, orduan $\dfrac{1}{g}$ funtzioa deribagarria da a puntuan eta

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

(v) Baldin eta $g(a) \neq 0$ bada, orduan $\dfrac{f}{g}$ funtzioa deribagarria da a puntuan eta

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Froga. f eta g funtzioak a puntuan deribagarriak direnez,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \qquad \text{eta} \qquad \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a).$$

(i) Limiteen propietate algebraikoak erabiliz,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

(ii) g jarraitua da a puntuan, beraz, hemen ere, limiteen propietateak kontuan hartuz,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)\,g(x)-f(x)\,g(a)+f(x)\,g(a)-f(a)\,g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} g(a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= f(a)\,g'(a) + g(a)\,f'(a).\end{aligned}$$

(iii) (ii) atalaren ondorioa, $g(x) = \lambda$ hartuz.

(iv) g jarraitua da a puntuan eta $g(a) \neq 0$, beraz $\exists\, \delta > 0$ non $g(x) \neq 0$ den $\forall\, x \in (a - \delta, a + \delta)$ eta $1/g$ funtzioa ondo definituta dago $(a - \delta, a + \delta)$ tartean. Orain,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x)(x-a)} \\ &= -\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \cdot \frac{1}{g(a)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}.\end{aligned}$$

(v) (ii) eta (iv) atalen ondorioa da. □

Ikus dezagun orain zer esan daitekeen funtzio deribagarrien konposizioaren deribagarritasunari buruz.

Teorema 5.4. *(katearen erregela) Baldin eta f funtzioa a puntuan deribagarria eta g funtzioa $f(a)$ puntuan deribagarria badira, orduan $g \circ f$ funtzioa deribagarria da a puntuan eta*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

Froga. Izan bedi

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}, & y \neq f(a) \text{ denean}, \\ g'(f(a)), & y = f(a) \text{ denean}. \end{cases}$$

Hipotesiaren arabera, g deribagarria da $f(a)$ puntuan, beraz F jarraitua da $f(a)$ puntuan, zeren eta

$$\lim_{y\to f(a)} F(y) = \lim_{y\to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g'(f(a))$$

baita. Orduan, $x \neq a$ bada, eta $f(x) \neq f(a)$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = F(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Limiteak hartuz, f jarraitua da a puntuan eta F jarraitua $f(a)$ puntuan, beraz,

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} &= \lim_{x\to a} F(f(x)) \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \\ =&F(f(a))\, f'(a) = g'(f(a))\, f'(a).\end{aligned}$$

□

Adibidea. Izan bitez $f(x) = x^2 + 1$ eta $g(x) = \sin x$. $(g \circ f)(x) = \sin(x^2 + 1)$ eta, katearen erregela aplikatuz,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \cos(x^2 + 1)(2x) = 2x\cos(x^2 + 1).$$

Azkenik, kontsideratuko dugu funtzio deribagarri baten alderantzizko funtzioa eta ikusiko dugu noiz den deribagarria.

Teorema 5.5. *Izan bedi f injektiboa, $f^{-1}(b)$ puntuan deribagarria. $f'(f^{-1}(b)) = 0$ bada, orduan f^{-1} ez da deribagarria b puntuan.*

Froga. Absurdora eramanez, demagun f^{-1} deribagarria dela b puntuan. Konposizioa definituta dagoen x puntuetan hurrengo berdintza dugu:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Katearen erregela aplikatuz,

$$f'(f^{-1}(b)) \cdot (f^{-1})'(b) = 1$$

eta hau ezinezkoa da hipotesiaren arabera. Beraz, f^{-1} ez da deribagarria b-n. □

Teorema 5.6. *Izan bedi f funtzio injektiboa. f deribagarria bada $f^{-1}(b)$ puntuan eta $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$ bada, orduan f^{-1} deribagarria da b puntuan eta*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Froga. Izan bedi $b = f(a)$. Kalkulatu behar dugu

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h}.$$

Izenda dezagun $b + h = f(a + k)$. Orduan,

$$h = f(a + k) - b = f(a + k) - f(a).$$

Gainera,

$$a + k = f^{-1}(b + h) \quad \Longrightarrow \quad k = f^{-1}(b + h) - a = f^{-1}(b + h) - f^{-1}(b).$$

f^{-1} jarraitua denez, $\lim_{h \to 0} f^{-1}(b + h) = f^{-1}(b)$, hots,

$$\lim_{h \to 0} k = \lim_{h \to 0} \big(f^{-1}(b + h) - f^{-1}(b)\big) = 0.$$

Beraz,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{h} &= \lim_{k\to 0}\frac{k}{f(a+k)-f(a)}\\ &= \frac{1}{\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f(f^{-1}(b)+k)-f(f^{-1}(b))}{k}}\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.\end{aligned}$$ □

Adibidea. $f(x) = \cos x$ funtzioaren alderantzizkoa $f^{-1}(x) = \arccos x$ da. Kontuan izanda $(\cos x)' = -\sin x$ dela,

$$(\arccos x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Proposizioa 5.7 (Oinarrizko funtzioen deribatuak)**.** *Hona hemen oinarrizko funtzioen deribatuak:*

(i) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *bada,* $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

(ii) $f(x) = \sin x$ *bada,* $f'(x) = \cos x$.

(iii) $f(x) = \cos x$ *bada,* $f'(x) = -\sin x$.

(iv) $f(x) = \tan x$ *bada,* $f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

(v) $f(x) = e^x$ *bada,* $f'(x) = e^x$.

(vi) $f(x) = b^x$ *bada,* $b > 0$ *izanik,* $f'(x) = b^x \ln b$.

(vii) $f(x) = \ln x$ *bada,* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

(viii) $f(x) = \log_b x$ *bada,* $b > 0$ *izanik,* $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln b}$.

(ix) $f(x) = \arcsin x$ *bada,* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(x) $f(x) = \arccos x$ *bada,* $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(xi) $f(x) = \arctan x$ *bada,* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

5.3 Funtzio deribagarriei buruzko teorema nagusiak

Definizioa. Izan bedi f D multzoan definitutako funtzioa eta izan bedi $x_0 \in D$.

(i) f funtzioak x_0 puntuan *maximo lokal* bat duela esango dugu baldin eta existitu egiten bada $\delta > 0$ non

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

$f(x_0)$ balioa f funtzioaren *maximo lokala* dela esaten da.

(ii) f funtzioak x_0 puntuan *minimo lokal* bat duela esango dugu baldin eta existitu egiten bada $\delta > 0$ non

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

$f(x_0)$ balioa f funtzioaren *minimo lokala* dela esaten da.

Definizioa. Izan bedi f D multzoan definitutako funtzioa eta izan bedi $x_0 \in D$.

(i) f funtzioak x_0 puntuan *maximo absolutua* lortzen duela diogu baldin eta

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall\, x \in D.$$

$f(x_0)$ balioa f funtzioaren *maximo absolutua* dela esango dugu.

(ii) f funtzioak x_0 puntuan *minimo absolutua* lortzen duela diogu baldin eta

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall\, x \in D.$$

$f(x_0)$ balioa f funtzioaren *minimo absolutua* dela esango dugu.

Oharra. Funtzio baten maximo eta minimo lokalak funtzioaren mutur lokalak direla esaten da. Era berean, maximo eta minimo absolutuak funtzioaren muturrak absolutuak direla esan ohi da.

Teorema 5.8. *Izan bedi f funtzioa x_0 puntuan deribagarria. f-k x_0 puntuan mutur lokal bat badu orduan $f'(x_0) = 0$ da.*

Froga. Demagun f-k maximo lokal bat duela x_0 puntuan. Orduan, existitu egiten da $\delta > 0$ non

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Beraz, tarte honetan,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, & \text{baldin eta } x > x_0, \\ \geq 0, & \text{baldin eta } x < x_0. \end{cases}$$

Orduan

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$
$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

f funtzioa x_0 puntuan deribagarria denez, bi balio hauek berdinak dira, beraz,

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = 0.$$

x_0-n minimo lokala badugu, antzeko era batean frogatzen da. □

Oharrak.

(i) Aurreko teoremaren alderantzizkoa ez da egia, hots, gerta daiteke $f'(x_0) = 0$ izatea eta hala ere f funtzioak x_0 puntuan ez maximo ez eta minimo lokalik ere izatea.

(ii) Funtzio batek maximo edo minimo lokala izan dezake x_0 puntuan, puntu horretan deribagarria ez izanik.

Definizioa. Izan bedi f funtzioa x_0 puntuan definiturik. x_0 f funtzioaren puntu kritikoa dela diogu baldin eta $f'(x_0) = 0$ bada edo $f'(x_0)$ ez bada existitzen.

Oharra. Aurrekoaren arabera, funtzio baten mutur lokalak funtzioaren puntu kritikoetan topatzen dira, baina puntu kritikoetan ez dira zertan funtzioaren mutur lokalak egon.

Teorema 5.9 (Rolleren teorema)**.** *Izan bedi f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua eta (a, b) tarte irekian deribagarria eta demagun $f(a) = f(b)$ dela. Orduan*

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad : \quad f'(x_0) = 0.$$

Froga. f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua denez, minimo eta maximo absolutuak lortzen ditu $[a, b]$ tartean. Bi posibilitate daude:

(i) Maximoa edo minimoa $(a.b)$ tartean dago. Aurreko teoremaren arabera, puntu horretan $f'(x_0) = 0$.

(ii) Maximoa eta minimoa tarteko muturretan erdiesten dira. Kasu honetan, $f(a) = f(b)$ denez, funtzioa konstantea da eta deribatua puntu guztietan 0 da. □

Teorema 5.10 (Cauchyren teorema)**.** *Izan bitez f eta g funtzioak $[a, b]$ tartean jarraituak eta (a, b) tartean deribagarriak. Orduan*

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad : \quad (f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Froga. Izan bedi $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. h jarraitua da $[a, b]$ tartean eta deribagarria (a, b) tartean. Gainera,

$$\begin{aligned} h(a) =&(f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a), \\ h(b) =&(f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b). \end{aligned}$$

Hau da, $h(a) = h(b)$. Orduan, Rolleren teoremaren arabera,

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad : \quad h'(x_0) = 0.$$

Hots,

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad : \quad (f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0). \qquad \square$$

Teorema 5.11 (Batezbesteko balioaren teorema)**.** *Izan bedi f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua eta (a, b) tartean deribagarria. Orduan*

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad : \quad f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Froga. Izan bedi $g(x) = x$. f eta g funtzioek Cauchyren teoremaren baldintzak betetzen dituzte, beraz,

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad : \quad (f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Hots,

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad : \quad (f(b) - f(a)) = (b - a)f'(x_0). \qquad \square$$

Korolarioa 5.12. *Izan bedi f $[a, b]$ tartean jarraitua eta (a, b) tartean deribagarria. Orduan*

(i) Baldin eta $f'(x) > 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan f gorakorra da $[a, b]$ tartean.

(ii) Baldin eta $f'(x) < 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan f beherakorra da $[a, b]$ tartean.

(iii) Baldin eta $f'(x) = 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan f konstantea da $[a, b]$ tartean.

Froga. Izan bitez $x < y$, $[a, b]$ tarteko edozein bi puntu. f jarraitua da $[x, y]$ tartean eta deribagarria (x, y) tartean. Beraz, batezbesteko balioaren teoremaren arabera,

$$\exists\, x_0 \in (x, y) \quad : \quad f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x).$$

Orduan,

(i) $f'(x) > 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, bereziki $x = x_0$ denean eta orduan, $f(y) - f(x) > 0$. Hots, $x, y \in [a, b]$ badira, $x < y$ izanik, orduan $f(x) < f(y)$. Beraz f gorakorra da.

(ii) $f'(x) < 0$ bada $x \in (a,b)$ guztietarako, bereziki $x = x_0$ denean eta orduan, $f(y) - f(x) < 0$. Hots, $x, y \in [a,b]$, $x < y$ badira, orduan $f(x) > f(y)$. Beraz f beherakorra da.

(iii) $f'(x) = 0$ bada $x \in (a,b)$ guztietarako, bereziki $f'(x_0) = 0$ da eta orduan, $f(y) - f(x) = 0$. Hots, $x, y \in [a,b]$ badira, $x < y$ izanik, $f(x) = f(y)$. Beraz f konstantea da. □

Korolarioa 5.13. *Izan bitez f eta g funtzioak $[a,b]$ tartean jarraituak eta (a,b) tartean deribagarriak eta demagun $f'(x) = g'(x)$ dela, $x \in (a,b)$ guztietarako. Orduan*

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = g(x) + K, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Froga. Izan bedi $h(x) = f(x) - g(x)$ funtzioa. h jarraitua da $[a,b]$ tartean eta deribagarria (a,b) tartean. Gainera $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ $x \in (a,b)$ guztietarako. Aurreko korolarioaren arabera, h konstantea da $[a,b]$ tartean, hau da, existitzen da $K \in \mathbb{R}$ non $h(x) = K$ den $x \in [a,b]$ guztietarako. Hau da

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = g(x) + K, \quad \forall\, x \in [a,b].$$ □

Proposizioa 5.14. *Izan bedi f funtzioa (a,b) tartean deribagarria eta demagun*

$$\exists\, M > 0 \quad : \quad |f'(x)| \leq M, \quad \forall\, x \in (a,b).$$

Orduan f funtzioa (a,b) tartean uniformeki jarraitua da.

Froga. Hurrengoa frogatu behar dugu:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\epsilon) > 0 \quad : \quad \forall\, x, y \in (a,b), |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein, eta izan bitez $x, y \in (a,b)$, $x < y$. Orduan, batezbesteko balioaren teoremaren arabera,

$$\exists\, x_0 \in (x,y) \,:\, |f(x) - f(y)| = |f'(x_0)(x - y)| = |f'(x_0)||x - y| \leq M|x - y|.$$

Beraz, $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$ hartuz,

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < M\delta = M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Hau da, f uniformeki jarraitua da. □

5.4 L'Hopitalen erregela

Teorema 5.15 (L'Hopitalen erregela)**.** *Izan bedi $a \in \mathbb{R}$. Demagun $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ direla eta $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existitu egiten dela. Orduan, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitea existitu egiten da eta*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Froga. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existitzen denez, badakigu $(a-\delta, a+\delta) - \{a\}$ moduko multzo batean $f'(x)$ eta $g'(x)$ existitzen direla eta gainera $g'(x) \neq 0$ dela tarte horretan.

Bestalde, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ denez, f eta g funtzioak jarraituak dira a puntuan edo etengune gaindigarria dute puntu horretan. Beraz, suposa dezakegu jarraituak direla a-n, $f(a) = g(a) = 0$ definituz.

Ikus dezagun, lehenengo eta behin, $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ dela. Izan bedi $x \in (a, a+\delta)$. f eta g jarraituak dira $[a, x]$ tartean eta deribagarriak (a, x) tarte irekian.

Gainera, $g'(x) \neq 0$ denez, $x \in (a, a+\delta)$ guztietarako, orduan $g(x) \neq 0$, $x \in (a, a+\delta)$ guztietarako. Bestela, existituko balitz, $x_1 \in (a, a+\delta)$ non $g(x_1) = 0$ den, Rolleren teoremaren arabera, existituko litzateke $\beta \in (a, x)$ non $g'(\beta) = 0$ den eta hau ez da posible.

Orain, f eta g funtzioek Cauchyren teoremaren baldintzak betetzen dituzte, beraz,

$$\exists\, \alpha_x \in (a, x) \quad : \quad f'(\alpha_x)(g(x) - g(a)) = g'(\alpha_x)(f(x) - f(a)).$$

Hau da,

$$\forall\, x \in (a, a+\delta) \quad \exists\, \alpha_x \in (a, x) \quad : \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Beraz,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Era berean frogatzen da $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ dela. □

Adibidea. $\lim_{x\to \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} = \lim_{x\to \pi} \frac{-\frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}}{-1} = 1.$

Jarraian emango ditugun teoremak ere betetzen dira. Frogak ez ditugu egingo aurrekoa baino konplikatuagoak direlako.

Teorema 5.16. *Izan bitez f eta g funtzioak $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ izanik. Orduan, baldin eta $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existitzen bada,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 5.17. *Izan bitez f eta g funtzioak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ izanik. Orduan, baldin eta $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existitzen bada,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 5.18. *Izan bitez f eta g funtzioak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ izanik. Orduan, baldin eta $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existitzen bada,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Adibidea. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$

Oharra. Gerta daiteke $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ez dela existitzen baina honek ez du esan nahi $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ez dela existituko. Adibidez, $f(x) = x - x^2 \sin \frac{1}{x}$ eta $g(x) = \sin x$ badira,

$$f'(x) = 1 - 2x \sin \frac{1}{x} - x^2 \cos \frac{1}{x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 1 - 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}, \quad g'(x) = \cos x$$

beraz $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ez da existitzen, baina

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - x \sin \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Oharra. L'Hopitalen erregela bakarrik erabili daiteke $0/0$ eta ∞/∞ noduko indeterminazioetan. Beste indeterminazio mota bat baldin badugu, bilatu dezakegu metodoren bat hauetako indeterminazio batera ailegatzeko.

(i) $0 \cdot \infty$ moduko indeterminazioak: demagun $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ eta $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ direla.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x)g(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}. \end{aligned}$$

(ii) 0^0 moduko indeterminazioak: demagun $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ eta $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ direla.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

eta $0\cdot\infty$ moduko indeterminazio batera ailegatzen gara.

(iii) $= 1^\infty$ moduko indeterminazioak: demagun $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ eta $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ direla. Lehen bezala,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

eta $\infty\cdot 0$ moduko indeterminazio batera heldu gara.

(iv) $= \infty^0$ moduko indeterminazioak: demagun $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ eta $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ direla. Hemen ere,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

eta $0\cdot\infty$ moduko indeterminazio bat dugu berriro.

5.5 Funtzio baten Taylorren garapena

Definizioa. Izan bedi f funtzioa a puntuan n ordenaraino deribagarria. Orduan f funtzioaren a puntuko n mailako *Taylorren polinomioa* hurrengoa da:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Adibidea. $f(x) = e^x$ eta $a = 0$ badira, $f^{(n)}(x) = e^x$ da $n\in\mathbb{N}$ guztietarako, beraz

$$P_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Oharra. Definizioagatik,

$$\begin{aligned} P_{n,a}(a) &= f(a), \\ P_{n,a}^{(k)}(a) &= f^{(k)}(a), \quad \forall\, k = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Definizioa. Izan bedi f a puntuan n ordenaraino deribagarria. Orduan f funtzioaren a puntuko n mailako *Taylorren hondarra* hurrengoa da:

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x).$$

Oharra. Argi denez,

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x),$$

beraz, f funtzioaren balioa bere Taylorren polinomioaren bidez hurbiltzen badugu, egiten den errorea $R_{n,a}(x)$ izango da.

Helburu nagusia $P_{n,a}(x)$ Taylorren polinomioaren bidez x puntuan f-ren balioa ahalik eta hoberen hurbiltzea da. Beraz interesatzen zaiguna da hondarraren balioa txikia izatea x a-tik hurbil dagoenean.

Teorema 5.19. *Izan bedi f funtzioa a puntuan zentratutako tarte batean n ordenaraino deribagarria. Orduan*

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Froga. $R_{n,a}(x)=f(x)-P_{n,a}(x)=f(x)-\left(P_{n-1,a}(x)+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)$, beraz, frogatu behar duguna hurrengoa da:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Taylorren polinomioaren propietateak kontuan hartuz, L'Hopitalen erregela aplika dezakegu $n-1$ aldiz,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n}&=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P'_{n-1,a}(x)}{n(x-a)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-P^{(n-1)}_{n-1,a}(x)}{n(n-1)\dots 2\,(x-a)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.\end{aligned}$$ □

Proposizioa 5.20. *Demagun $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ direla eta $f^{(n)}(a)\neq 0$. Orduan,*

(i) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(a)>0$, orduan f funtzioak minimo lokala dauka a puntuan.

(ii) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(a)<0$, orduan f funtzioak maximo lokala dauka a puntuan.

(iii) n bakoitia bada, orduan f funtzioak ez dauka ez maximo ez eta minimo lokalik ere a puntuan.

Froga. Aurreko teoremaren arabera,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Kasu honetan,

$$\begin{aligned}P_{n,a}(x)=&f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\\=&f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.\end{aligned}$$

Beraz,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

(i) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(a) > 0$, orduan $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} > 0$. Limiteen propietateak kontuan hartuz

$$\exists\, \delta > 0 \quad : \quad \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} > 0, \quad \forall\, x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}.$$

n bikoitia denez, $(x-a)^n$ positiboa da, beraz $f(x) > f(a)$, $x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$ guztietarako. Hau da, $f(a)$ funtzioaren minimo lokala da.

(ii) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(a) < 0$, orduan $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} < 0$. Limiteen propietateak kontuan hartuz

$$\exists\, \delta > 0 \quad : \quad \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} < 0, \quad \forall\, x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}.$$

n bikoitia denez, $(x-a)^n$ positiboa da, beraz $f(x) < f(a)$, $x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$ guztietarako. Hau da, $f(a)$ funtzioaren maximo lokala da.

(iii) n bakoitia bada, orduan $(x-a)^n$ negatiboa da $x < a$ denean eta positiboa $x > a$ denean. Beraz, $f(x) - f(a)$ balioaren zeinua desberdina da a-ren eskuinaldean eta a-ren ezkerraldean, $f^{(n)}(a)$-ren zeinua edozein izanik. Beraz, kasu honetan ez daukagu maximo ez eta minimo lokalik ere. □

Teorema 5.21 (Taylorren teorema)**.** *Izan bedi f funtzioa $n+1$ ordenaraino deribagarria $[a,x]$ tartean. Orduan f funtzioaren a puntuko hondarrerako hurrengo formulak ditugu:*

(i) Hondarrerako Cauchyren formula:

$$\exists\, \xi \in (a,x) \quad : \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a).$$

(ii) Hondarrerako Lagrangeren formula:

$$\exists\, \xi \in (a,x) \quad : \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

(iii) Hondarrerako adierazpen integrala:

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt.$$

Froga. Izan bedi $t \in [a, x]$ eta defini dezagun

$$S(t) = R_{n,t}(x) = f(x) - P_{n,t}(x) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

$S(x) = f(x) - f(x) = 0$ eta $S(a) = f(x) - P_{n,a}(x) = R_{n,a}(x)$.

Deriba dezagun $S(t)$ funtzioa.

$$\begin{aligned} S'(t) =& - f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + 2\frac{f''(t)}{2!}(x-t) - \dots \\ & - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} \\ =& - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n, \quad \forall\, t \in (a, x). \end{aligned}$$

(i) $S(t)$ funtzioa $[a, x]$ tartean jarraitua da eta (a, x) tartean deribagarria. Batezbesteko balioaren teorema aplikatuz,

$$\exists\, \xi \in (a, x) \quad : \quad S(x) - S(a) = S'(\xi)(x-a).$$

Aurrekoa kontuan hartuz,

$$\exists\, \xi \in (a, x) \quad : \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a).$$

(ii) $S(t)$ eta $g(t) = (x-t)^{n+1}$ funtzioek Cauchyren teoremaren baldintzak betetzen dituzte, beraz,

$$\exists\, \xi \in (a, x) \quad : \quad (S(x) - S(a))g'(\xi) = (g(x) - g(a))S'(\xi).$$

Hau da,

$$\exists\, \xi \in (a, x) \quad : \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

□

5.6 Funtzio baten ahurtasunaren analisia

Definizioa. Izan bedi f funtzioa I tartean definiturik.

(i) f funtzioa I tartean *ganbila* dela esango dugu baldin eta $a \in I$ guztietarako, f funtzioaren a puntuko zuzen ukitzailea f-ren grafikoaren gainean geratzen bada $(a-\delta, a+\delta)$ moduko tarte batean.

(ii) f funtzioa I tartean *ahurra* dela esango dugu baldin eta $a \in I$ guztietarako, f funtzioaren a puntuko zuzen ukitzailea f-ren grafikoaren azpian geratzen bada $(a-\delta, a+\delta)$ tartean.

(iii) $a \in I$ puntua f funtzioaren *inflexio-puntua* dela diogu baldin eta a puntuko zuzen ukitzaileak grafikoaren ezkerreko zatia alde batean eta eskuineko zatia beste aldean uzten baditu.

Oharra. f funtzioa a puntuan deribagarria bada, orduan zuzen ukitzailearen ekuazioa hurrengoa da:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Beraz, f ganbila bada, $f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$, $x \in (a - \delta, a + \delta)$ guztietarako.

Era berean, f ahurra bada, $f(x) > f(a)+f'(a)(x-a)$, $x \in (a-\delta, a+\delta)$ guztietarako.

Azkenik, a inflexio-puntua bada, orduan

$$\begin{cases} f(x) < f(a) + f'(a)(x - a), & \forall\, x \in (a - \delta, a), \\ f(x) > f(a) + f'(a)(x - a), & \forall\, x \in (a, a + \delta), \end{cases}$$

edo

$$\begin{cases} f(x) > f(a) + f'(a)(x - a), & \forall\, x \in (a - \delta, a), \\ f(x) < f(a) + f'(a)(x - a), & \forall\, x \in (a, a + \delta). \end{cases}$$

Teorema 5.22. *Izan bedi f funtzioa $(a-\delta, a+\delta)$ tarte batean n ordenaraino deribagarria eta demagun $f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ eta $f^{(n)}(a) \neq 0$ direla. Orduan,*

(i) Baldin eta n bikoitia bada eta $f^{(n)}(a) > 0$, orduan f ahurra da a puntuan. Gainera, $f'(a) = 0$ bada, f-k a puntuan minimo lokala dauka.

(ii) Baldin eta n bikoitia bada eta $f^{(n)}(a) < 0$, orduan f ganbila da a puntuan. Gainera, $f'(a) = 0$ bada, f-k a puntuan maximo lokala dauka.

(iii) Baldin eta n bakoitia bada, orduan a f-ren inflexio-puntua da.

Froga. Kontsidera dezagun $n-1$ mailako a puntuko f-ren Taylorren polinomioa. Kasu honetan,

$$P_{n-1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Beraz, $R_{n-1,a}(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Bestaldetik, hondarraren Lagrangeren formula kontsideratuz,

$$\exists\, \xi \in (a, x) \text{ (edo } \xi \in (x, a)) \quad : \quad R_{n-1,a}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n.$$

Hau da, $x \in (a - \delta, a + \delta)$ guztietarako,

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n.$$

$f^{(n)}$ jarraitua denez, $f^{(n)}(\xi)$ eta $f^{(n)}(a)$ balioen zeinua berdina da.

Orduan,

(i) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(a) > 0$, orduan $f^{(n)}(\xi) > 0$ da eta $(x-a)^n > 0$, beraz,

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) > 0 \Longrightarrow f(x) > f(a)+f'(a)(x-a) \quad \forall\, x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Hots, f ahurra da.

(ii) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(a) < 0$, orduan $f^{(n)}(\xi)(x-a)^n < 0$ da, beraz,

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) < 0 \Longrightarrow f(x) < f(a)+f'(a)(x-a) \quad \forall\, x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Hots, f ganbila da.

(iii) n bakoitia bada, $f^{(n)}(a)$-ren zeinua edozein izanik, orduan $(x-a)^n$-ren zeinua desberdina da a-ren eskuinaldean eta a-ren ezkerraldean, beraz, $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$-ren zeinua aldatzen da a puntuaren ezkerretik eskuinera pasatzean, eta ondorioz, a inflexio-puntua da. $\square$