KALKULU (1)
diferentziala eta integrala I

1. GAIA: ZENBAKI ERREALAK ETA KONPLEXUAK

1.1- ZENBAKI MULTZOA

1.1.1. Zenbaki arruntak ($\mathbb{N}$)

→ PEANO AXIOMAK
(Zenbaki arruntak sortarazten dituen axioma multzoa).

- 1. AXIOMA: $\mathbb{N}$ multzoan 1 zenbaki dago.
- 2. AXIOMA: Zenbaki arrunt orok hurrengo bakar bat du, hau da, n zenbaki arrunt bada bada, existitzen du n^+, n-ren hurrengoa. Gainera $n^+ \neq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 3. AXIOMA: zenbaki ezberdinen hurrengoak ezberdinak dira, hau da, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ non $n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$.
- 4. AXIOMA: (Indukzio matematikoaren printzipioa) $n \in \mathbb{N}$ eta $P(n)$ n-ren menpe dagoen adierazpen matematiko bat. Frogatu nahi dugu $P(n)$ bete egiten dith $\forall n \geq r$ non $r \in \mathbb{N}$ finkoa den.

  1.- Frogatu behar dugu $n=r$-rako $P(r)$ betetzen dila.
  2.- Suposatu $P(n)$ n-rako betetzen dela eta $P(n+1)$ $(n+1)$-rako betetzen dila frogatu.
  Ondoren, $P(n)$ bete egiten $\forall n \geq r$.

Adib. Frogatu $1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2} = P(n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Indukzio matematikoa erabiliko dugu.

1.- Frogatu $n=1$-rako $P(1)$ betetzen dela. $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ Bai ✓

2.- Suposatuko dugu $P(n)$ betetzen dila, hau da, $1+2+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$, eta frogatu behar dugu $P(n+1)$ betetzen dila, hau da,

$$1+2+3+\ldots+((n+1)-1)+(n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+n}+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow$$

Ondorioz, indukzio matematikoagatik, $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

⚠ OHARRA
Indukzio matematikoaren beste bertsio daude.

→ $\mathbb{N}$ multzoan $+$ eta $\cdot$ eragiketak ondo definiturik daude.

1.1.2- Zenbaki osoak ($\mathbb{Z}$)

→ $\exists x \in \mathbb{N}$ non $x+3=1$? EZ ✗ ; horregatik 0 eta zenbaki negatiboak sartu behar dira.

→ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

→ zenbaki osoen multzoan $+$ eta $\cdot$ eragiketak ondo definiturik daude.

→ $x+(-x) = 0 = -x+x$
$\forall x \in \mathbb{Z}$

1.1.3- Zenbaki arrazionalak ($\mathbb{Q}$)

→ $\exists x \in \mathbb{Z}$ non $x \cdot 3 = 1$? Ez

→ $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}$ eta $n \neq 0\}$
Zenbaki arrazionalak zatiki eran adierazten daitekeen edozein zenbaki

→ Egon daitezke bi edo gehiago adierazpenez badira zenbaki arrazional baterako.

→ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ($\forall m \in \mathbb{Z} : m = \frac{m}{1}$)

→ $\mathbb{Q}$ multzoan honela definitzen dira + eta · eragiketak:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} &= \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2} \\ \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} &= \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \end{aligned}\right\} \forall m_1, m_2, \underset{\neq 0}{n_1}, \underset{\neq 0}{n_2} \in \mathbb{Z}$$

→ Eragiketen propietateak

P1) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ $a+(b+c) = (a+b)+c$ (Batuketaren elkartze prop.)
P2) $\forall a \in \mathbb{Q}$ $a+0 = 0+a = a$ (Batuketaren elementu neutroa)
P3) $\forall a \in \mathbb{Q}$ $\exists -a \in \mathbb{Q}$ non $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (Aurkakoa)
P4) $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ $a+b = b+a$ (Batuketaren ~~trukatzen~~ propietatea)
P5) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ $a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Biderketaren elkartze prop.)
P6) $\forall a \in \mathbb{Q}$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 · eragiketaren el. neutroa)
P7) $\forall a \in \mathbb{Q}$ non $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in \mathbb{Q}$ non $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (a-ren alderantzizkoa)
P8) $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ $a \cdot b = b \cdot a$ (· eragiketaren trukatze prop.)
P9) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ $a(b+c) = ab + ac$ (Banatze prop.)

* Propietate guzti hauekin gorputz ~~bat~~ trukakorra da ($\mathbb{Q}, +, \cdot$)

P10) $\forall a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $a < 0$ edo $a = 0$
P11) $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ non $a > 0$ eta $b > 0 \Rightarrow a+b > 0$
P12) $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ non $a > 0$ eta $b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

→ $\mathbb{Q}$ multzoan ordena erlazioa dago.

Def: $a, b \in \mathbb{Q}$ a, b baino handiagoa da, $a > b$ adierazia, $a - b > 0$ bada.

Propietatea: $\forall p, q \in \mathbb{Q}$ non $p < q \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ non $p < r < q$
Adib. $r = \frac{p+q}{2}$

Oharrak: 1) Bi zenbaki arrazional edozein artean infinitu zenbaki arrazional daude.

2) $\mathbb{Z}$ multzoan ez da 1) gertatzen, hau da, bi zenbaki osoren artean zenbaki oso kopuru finitu bat dago.

1.1.3) Zenbaki arrazionalak

Eragiketen propietateak

Definitu daitezke kenketa eta zatiketa:

$$\begin{cases} a-b=a+(-b) & \forall a,b \in \mathbb{Q} \\ \frac{a}{b}=a\cdot b^{-1} & \forall a,b \in \mathbb{Q} \text{ non } b\neq 0 \end{cases}$$

Galderak

1) "$a,b \in \mathbb{Q}$ non $a>0$ eta $b<0 \Rightarrow a\cdot b<0$"

Froga: Suposatzen dugu $a,b \in \mathbb{Q}$ non $a>0$ eta $b<0$ eta frogatu behar dugu $a\cdot b<0$ dela.

$\boxed{a>0}$ eta $b<0 \Rightarrow \boxed{-b>0} \xRightarrow{P12)} a(-b)>0 \rightarrow -ab>0$

$\underline{ab<0}$ ■

1.2 - ZENBAKI ERREALAK

1.2.1 - Gauza orokorrak

- $\exists x \in \mathbb{Q}$ non $x^2=2$ den? Ez

→ **Proposizio 1.1**

$\nexists x \in \mathbb{Q}$ non $x^2=2$ den.

Froga (Absurdura eramanez)

Frogatu behar da $\overset{\text{hipotesia}}{P} \Rightarrow \overset{\text{tesia}}{Q}$

Suposatu P betetzen dela eta Q ez dela betetzen. Dakigun teoria erabiliz eta suposatutakoa garatuz, kontraesan batetara heldu. Ondorioz, suposatu duguna (Q ez dela betetzen) gezurra izango da eta Q bai beteko da

Suposatuko dugu bai

$\exists x \in \mathbb{Q}$ non $x^2=2$ den. $x \in \mathbb{Q}$ denez

$\xRightarrow{def} \exists p,q \in \mathbb{Z}$ non $x=\frac{p}{q}$ non p eta q haien artean lehenak.

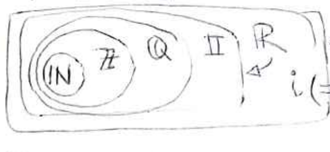
$x=\frac{p}{q} \xrightarrow{x^2=2} x^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2=2 \Rightarrow p^2=2\cdot q^2 \Rightarrow p^2$ bikoitia da $\xRightarrow{(\text{pentsatu})}$ $\underline{p \text{ bikoitia}} \Rightarrow p=2K$ non $K\in\mathbb{Z}$

Beraz, $\underset{\substack{\| \\ 2q^2}}{p^2}=(2K)^2=4K^2 \Rightarrow 2q^2=4K^2$

$q^2=2K^2 \Rightarrow q^2$ bikoitia $\Rightarrow \underline{q \text{ bikoitia}}$

*Kontraesan: biak bikoitiak badira ezin dira izan haien artean lehenak (que no pueden simplificarse). Orduan, suposatutakoa ($\exists x \in \mathbb{Q}$ non $x^2=2$) gezurra da eta $\nexists x \in \mathbb{Q}$ non $x^2=2$ ■

- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- Infinitu zenbaki hamartar ez-periodikoak dituzten zenbakiak $\boxed{\text{irrazionalak}}$ dira → $\boxed{\mathbb{I}}$

  Adib. $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$; $\pi \in \mathbb{I}$; $e \in \mathbb{I}$; $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$...
- $\mathbb{Q} \overset{\cdot}{\cup} \mathbb{I} = \mathbb{R}$ ← disjuntua: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ (ez daukatela ezer komunean)
- 

  ← $\mathbb{C}$

  i (= unitate irudikaria)
- $\mathbb{R}$-ko zenbakia zuzen batekin ~~adierazten~~ identifikatu daiteke: $-\infty$ 0 $+\infty$

1.2.2 - Newtonen binomioa

- Definizioa: Multzo batean n elementuen ordenazioari permutazioa esaten zaio eta $n!$ (n faktoriala) adierazten da non $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\boxed{n! = n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}$

$\boxed{0!=1}$ Adib: $6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = \ldots$, $1023! = 1023\cdot 1022 \ldots 3\cdot2\cdot1 = \ldots$

-Defin.: Izan bitez $n, K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq K$. n elementuko multzo baten K elementuko azpimultzo kopurua zenbaki konbinatorioa dela esaten da eta $\binom{n}{K}$ eran adierazten da.

$$\boxed{\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}}$$

Adib. $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{2!\cdot\cancel{3!}} = 10$

5 grupos de 2

-PROPOSIZIOA: Izan bitez $n, K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq K$

① $\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$

② $\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K-1} + \binom{n-1}{K}$

-TARTAGLIA EDO PASCALEN TRIANGELUA

$n=0$: $\binom{0}{0} = 1$

$n=1$: $\binom{1}{0} = 1$ $\binom{1}{1} = 1$

$n=2$: $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2} = 1$

⋮

Kalkulatu →

simetria 1) propietatearengatik

2. prop.

1 ← n=0

1 1 ← n=1

1 2 1 ← n=2

1 3 3 1 ← n=3

1 4 6 4 1 ← n=4

⋮

-PROPOSIZIOA (Newtonen binomioaren formula)

$a, b \in \mathbb{R}$ eta $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}a^{n-K}b^K$$

sigma maiuskula (Batukaria)

$K = 0, 1, 2, \dots$

Adib. Garatu hurrengo adierazpena:

$$(3-2x)^4 = (3+(-2x))^4 = \sum_{K=0}^{4}\binom{4}{K}3^{4-K}(-2x)^K =$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1 ← n=4

$$= \binom{4}{0}3^4(-2x)^0 + \binom{4}{1}3^3(-2x)^1 + \binom{4}{2}3^2(-2x)^2 + \binom{4}{3}3^1(-2x)^3 + \binom{4}{4}3^0(-2x)^4 =$$

$(K=0: 1,\ K=1: 4,\ K=2: 6,\ K=3: 4,\ K=4: 1)$

$$= 81 + 4\cdot27\cdot(-2x) + 6\cdot9\cdot4x^2 + 4\cdot3\cdot(-8x^3) + 16x^4 = 81 - 216x + 216x^2 - 96x^3 + 16x^4$$

1.2.3 - Zati osoa

-Def. $x \in \mathbb{R}$ $\quad [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$ ← x baino $\leq$ diren zenbaki oso guztien maximoa.

x-ren zati osoa.

Adib. $[2.5] = 2$, $[-2.8] = -3$

$[3] = 3$, $[-14.9] = -15$

- Edozein $x \in \mathbb{R}$ beti egongo da $N \in \mathbb{Z}$ eta $N+1$-ren artean

$\mathbb{R}$ ← N x N+1 → $\Rightarrow [x] = N$

1.2.4 - Zenbaki errealak eta ordena erlazioa

-Def. X elementuen multzoa bat eta R, X-ko elementuen erlazio bat.

1) $x \in X \Rightarrow xRx$ (erreflexibo propietatea)

2) $x, y \in X$ eta xRy, yRx $\Rightarrow \boxed{x = y}$ (antisimetriko propietatea)

3) $x, y, z \in X$ non xRy, yRz $\Rightarrow \boxed{xRz}$ (propietate transitiboa)

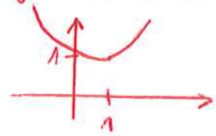
1), 2) eta 3) betez R X multzoaren ordena erlazioa ~~dela~~ da.

4) $\forall x, y \in X \Rightarrow xRy$ edo yRx

1), 2), 3) eta 4) betez, R ordena erlazio osoa.

ARIKETAK (1.1)

Erpina:
$x=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$
$y=1-2+2=1$



1 (a) $x^2-2x+2>0$

$x^2-2x+2=0$

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\nexists$ Berro $\mathbb{R}$

$x\neq0$

(a) $\mathbb{R}$ ✓

(b) $x^2-2x-2>0$

$x^2-2x-2=0$

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1(-2)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm2\sqrt3}{2}=1\pm\sqrt3$

	$-\infty$ — $1-\sqrt3$	$1-\sqrt3$ — $1+\sqrt3$	$1+\sqrt3$ — ∞
x^2-2x-2	+	−	+

(b) $(-\infty,1-\sqrt3)\cup(1+\sqrt3,\infty)$ ✓

bildura

(c) $x^2-4x+4>0$

$x^2-4x+4=0$

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt0}{2}=2$

	$-\infty$ — 2	2 — $+\infty$
x^2-4x+4	+	+

(c) ~~$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$~~

$\mathbb{R}-\{2\}$

(d) $x^2+x+2>1$

$x^2+x+1>0$

$x^2+x+1=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\nexists$

	$-\infty$ — ∞
x^2+x+1	+

(d) $\mathbb{R}$ ✓

(e) $x(2x-1)(3x-5)\leq0$

$x=0$ $\quad 2x-1=0$ $\quad 3x-5=0$

$x=1/2$ $\quad x=5/3$

	$-\infty$ — 0	0 — 1/2	1/2 — 5/3	5/3 — ∞
$x(2x-1)(3x-5)$	−	+	−	+

(e) $(-\infty,0]\cup[1/2,5/3]$

(f) $\frac{1}{x}<x$

~~$1<x^2$~~

~~$1-x^2<0$~~

~~$1-x^2=0$~~

~~$\sqrt1=\sqrt{x^2}$~~

~~$\pm1=x$~~

	$-\infty$ — −1	−1 — +1	+1 — ∞
~~$1-x^2$~~	~~−~~	~~+~~	~~−~~

~~(f) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$~~

Sol $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

(g) $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0$

$\frac{1-x+x}{x-x^2}=\frac{1}{x-x^2}>0$

$x-x^2=0 \to x=0$
$\quad\to 1-x=0$
$\quad x=1$

	$-\infty$ — 0	0 — 1	1 — ∞
$\frac{1}{x-x^2}$	−	+	−

(g) $(0,1)$ ✓

(h) $\frac{3x^2+1}{1-x^2}<0$

$3x^2+1=0$ $\quad$ $1-x^2=0$

$x=\sqrt{-1/3}$ $\quad$ $x=\sqrt1=\pm1$

$\nexists$

	$-\infty$ — −1	−1 — +1	+1 — ∞
$\frac{3x^2+1}{1-x^2}$	−	+	−

(h) $(-\infty,-1)\cup(+1,\infty)$ ✓

(i) $\frac{x}{x+2}>\frac{x+5}{3x+1}$

$\frac{x}{x+2}-\frac{x+5}{3x+1}>0$

$\frac{x(3x+1)-(x+2)(x+5)}{(x+2)(3x+1)}=\frac{2x^2+6x-10}{(x+2)(3x+1)}>0$

zenbakitzailea:
$2x^2+6x-10=0$
$x^2+3x-5=0$
$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot1(-5)}}{2\cdot1}$
$x=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$

izendatzailea:
$(x+2)(3x+1)=0$
$x+2=0$ $\quad 3x+1=0$
$x=-2$ $\quad x=-1/3$

	$-\infty$ — $\frac{-3-\sqrt{29}}{2}$	$\frac{-3-\sqrt{29}}{2}$ — −2	−2 — −1/3	−1/3 — $\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$	$\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$ — $+\infty$
$\frac{2x^2+6x-10}{(x+2)(3x+1)}$	+	−	+	−	+

(i) $(-\infty,\frac{-3-\sqrt{29}}{2})\cup(-2,-1/3)\cup(\frac{-3+\sqrt{29}}{2},\infty)$ ✓

-2 $\quad \frac{3-\sqrt{29}}{2}$ $\quad -1/3$ $\quad \frac{3+\sqrt{29}}{2}$

$+\quad-\quad+\quad-\quad+$

(j) $x^3-3x>2$

$x^3-3x-2>0$

$x^3-3x-2=0$

	1	0	−3	−2
−1		−1	1	2
	1	−1	−2	0
2		2	2	
	1	1	0	

$x^3-3x-2=(x+1)(x-2)(x+1)$

$x=-1$ $\quad x=2$ $\quad x=-1$

	$-\infty$ — −1	−1 — 2	2 — ∞
x^3-3x-2	+	−	+

(j) $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

$y=x^2-2x+2$
$y=x^2-2x-2$
$y=x^2+x+2$
Haien grafikoak egin

2

(a) $|x+1||x-1|=0 \longrightarrow$

$\cancel{|x+1|=-|x-1|}$

$\cancel{[|A|=|B| \Rightarrow A=\pm B]}$

$\cancel{\circ\ x+1=-(x-1) \quad x+1=-x+1 \quad 2x=0 \quad x=0}$

$\cancel{\circ\ x+1=-(-(x-1)) \quad x+1=x-1 \quad 0x=-2 \quad \nexists}$

$\circ\ |x+1|=0$

$x+1=0 \quad x=-1$

$-(x+1)=0 \quad -x-1=0 \quad x=-1$

$\circ\ |x-1|=0$

$x-1=0 \quad x=1$

$-(x-1)=0 \quad -x+1=0 \quad x=1$

(a) $\{-1,1\}$ ✓

(b) $|x-1||x-2|=3 \longrightarrow$

$\circ\ |x-1|=3$: $x-1=3,\ x=4$; $-(x-1)=3,\ -x+1=3,\ x=-2$

$\circ\ |x-2|=3$: $x-2=3,\ x=5$; $-(x-2)=3,\ -x+2=3,\ x=-1$

$|x-1|=\dfrac{3}{|x-2|}$

$x-1=\dfrac{3}{x-2}$

$(x-1)(x-2)=3$

$x^2-2x-x+2=3$

$x^2-3x-1=0$

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=$

(b) $|x-1|=\begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -x+1, & x<1 \end{cases}$

$|x-2|=\begin{cases} x-2, & x\geq 2 \\ -x+2, & x<2 \end{cases}$

	1		2	
$-x+1$		$x-1$		$x-1$
$-x+2$		$-x+2$		$x-2$

$\boxed{x<1}$ $(-x+1)(-x+2)=3$

$x^2-3x+2=3$

$x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(b) $\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$ ✓

(c) $|x+2|\leq|x+5|$

(c) $|x+2|=\begin{cases} x+2, & x\geq -2 \\ -x-2, & x<-2 \end{cases}$

$|x+5|=\begin{cases} x+5, & x\geq -5 \\ -x-5, & x<-5 \end{cases}$

	-5		-2	
$-x-5$		$x+5$		$x+5$
$-x-2$		$-x-2$		$x+2$

$\boxed{x<-5}$ $-x-2\leq-x-5$

$-2\nleq-5$

$\boxed{-5\leq x<-2}$ $-x-2\leq x+5$

$-7\leq 2x$

$-\frac{7}{2}\leq x \Leftrightarrow -\frac{7}{2}\leq x<-2$

(e) $[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$ ✓

(d) $|x-1|+|x-2|>1$

$|x-1|>1-|x-2|$

$x-1>1-|x-2| \qquad x-1>-(1-|x-2|)$

$x-2>-|x-2| \qquad x-1>-1+|x-2|$

$x>|x-2|$

$x-2>-(x-2) \qquad -(x-2)>-(x-2)$

$x-2>-x+2 \qquad x-2>x-2$

$2x>4 \qquad \nexists$

$x>2$

$x>x-2 \qquad -x>x-2$

$\nexists \qquad -2x>-2$

$x<1$

(d) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ ✓

(g) $|x^2-4|\geq 1$

$x^2-4\geq 1 \qquad x^2-4\geq -1$

$x^2\geq 5 \qquad x^2\geq 3$

$x\geq\pm\sqrt{5} \qquad x\geq\pm\sqrt{3}$

(g) $(-\infty,-\sqrt{5}]\cup[-\sqrt{3},\sqrt{3}]\cup$

$\cup(\sqrt{5},+\infty)$ ✓

(h) $|x^2-2x|\geq|x^2-1|$

$x^2-2x\geq|x^2-1| \qquad x^2-2x\geq-|x^2-1|$

$x^2-2x\geq x^2-1 \qquad -(x^2-2x)\geq x^2-1$

$\nexists \qquad -2x^2+2x+1\geq 0$

$x^2-2x\geq x^2-1 \quad \nexists$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot(-2)}}{2\cdot(-2)}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{3}}{-4}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$x^2-2x\geq-x^2-1$

$2x^2-2x+1\geq 0$

$\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{2\pm\sqrt{0}}{4}=\dfrac{1}{2}$

(h) $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

(i) $x+|x-2|=1+|x|$

$|x|=x-1+|x-2|$

$x=x-1+|x-2| \qquad x=-(x-1+|x-2|)$

$1=|x-2| \qquad 2x-1=-|x-2|$

$1=x-2 \qquad -1=x-2$

$x=3 \qquad x=1$

$2x-1=-(x+2) \qquad -(2x-1)=-(x+2)$

$3x=-1 \qquad 2x-1=x+2$

$x=-1/3 \qquad x=3$

(i) $\{-1,1,3\}$ ✓

KALKULU (4)

2 (j) $|2x|+|x-2|>3$

$|2x|>3-|x-2|$

$2x>-(3-|x-2|)$ $\quad$ $2x>3-|x-2|$

$2x+3>|x-2|$ $\quad$ $2x-3>-|x-2|$ $\quad$ $-2x+3>-x+2$, $-x>-1$, $x<1$

$2x+3>x-2$, $x>-5$ $\quad$ $-2x-3>x-2$, $-3x>1$, $x<-1/3$ $\quad$ $2x-3>-(x-2)$, $3x>5$, $x>5/3$

(j) $(-\infty,-1/3)\cup(1,+\infty)$

(k) $|x(1-x)|<1/2$

$x(1-x)<1/2$ $\quad$ $x(1-x)<-1/2$

$x-x^2$

ARIKETA 3

a) $\left|\dfrac{7x+2}{4x-3}\right|\leq 2$

$\dfrac{|7x+2|}{|4x-3|}$

$|7x+2|=\begin{cases}7x+2, & x\geq -2/7\\ -7x-2, & x<-2/7\end{cases}$

$|4x-3|=\begin{cases}4x-3, & x\geq 3/4\\ -4x+3, & x<3/4\end{cases}$

$7x+2=0 \Rightarrow x=-2/7$

$4x-3=0 \Rightarrow x=3/4$

$-2/7$ $\quad$ $3/4$

$\dfrac{-7x-2}{-4x+3}$ $\quad$ $\dfrac{7x+2}{-4x+3}$ $\quad$ $\dfrac{7x+2}{4x-3}$

$\boxed{x<-2/7}$ $\dfrac{-7x-2}{-4x+3}\leq 2 \iff -7x-2\leq 2(-4x+3)$

$x\leq 8$

Sol. $(-\infty,-2/7)$

ARIKETAK (1.2)

1 (1) $a,b\in\mathbb{Q}$ bada, $a+b,\ ab\in\mathbb{Q}$ da

$\exists p,q,r,s\in\mathbb{Q}$ non $a=\frac{p}{q}$, $b=\frac{r}{s}$ non $q\neq 0$ eta s

$a+b=\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+rq}{qs}\in\mathbb{Q}$, $a\cdot b=\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=$

1.3- Zenbaki Konplexuak

- $\exists x \in \mathbb{R}$ non $x^2=-1$? Ez
- $i=\sqrt{-1}$ unitate irudikaria eta $x^2=-1$ ekuazioren soluzioa da.
- $\mathbb{C}=\{\underbrace{x+yi}_{\text{adierazpen binomikoa}} / x,y \in \mathbb{R}\}$ Zenbaki Konplexuen multzoa.
- $z=x+yi$ $\begin{cases} \operatorname{Re} z = x \to z\text{-ren parte erreala} \\ \operatorname{Im} z = y \to z\text{-ren parte irudikaria} \end{cases}$

Adb. $z=3-2i \in \mathbb{C} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = 3 \\ \operatorname{Im} z = -2 \end{cases}$; $z=-4i \in \mathbb{C} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = 0 \\ \operatorname{Im} z = -4 \end{cases}$

BATUKETA

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1+y_1 i \in \mathbb{C} \\ z_2 &= x_2+y_2 i \in \mathbb{C} \end{aligned} \Rightarrow z_1+z_2 = \underbrace{(x_1+x_2)}_{\operatorname{Re}(z_1+z_2)} + \underbrace{(y_1+y_2) i}_{\operatorname{Im}(z_1+z_2)}$$

BIDERKETA

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1+y_1 i \in \mathbb{C} \\ z_2 &= x_2+y_2 i \in \mathbb{C} \end{aligned} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1+y_1 i)\cdot(x_2+y_2 i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 y_2 i + y_1 i x_2 + y_1 \cdot y_2 \overset{-1}{i^2} =$$

$$= \underbrace{(x_1x_2-y_1y_2)}_{\operatorname{Re}(z_1\cdot z_2)} + \underbrace{(x_1y_2+x_2y_1) i}_{\operatorname{Im}(z_1\cdot z_2)}$$

- $(\mathbb{C},+,\cdot)$ gorputz trukakorra
- Biderketa eraginketarako alderantzizko existitzen du:

$z=x+yi \in \mathbb{C}$ non $x\neq 0$ edo $y \neq 0$.

$z^{-1}=u+vi \in \mathbb{C}$ non $u,v \in \mathbb{R}$.

z^{-1}, z-ren alderantzizkoa bada, $z\cdot z^{-1}=1$ dela bete behar da.

$z\cdot z^{-1}=(x+yi)\cdot(u+vi)=(xu-yv)+(yu+xv)i=1=1+0i \Rightarrow \begin{cases} xu-yv=1 & (1) \\ yu+xv=0 & (2) \end{cases}$

Bi zenbaki konplexuak berdinak dira beren zati errealak berdinak badira eta parte irudik. berdinak badira

(2) $\to yu+xv=0 \overset{\text{suposatu } x\neq 0}{\Longrightarrow} v=-\dfrac{uy}{x}$ ⊛

(1) $\to xu-yv=1 \Rightarrow xu-y\left(-\dfrac{uy}{x}\right)=1 \Rightarrow \dfrac{x^2u+uy^2}{x}=1 \Rightarrow u(x^2+y^2)=x \Rightarrow \boxed{u=\dfrac{x}{x^2+y^2}}$

⊛ $\boxed{v=-\dfrac{\frac{x}{x^2+y^2}\cdot y}{x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}}$

$x\neq 0$ edo $y\neq 0$ bada eta $z=x+yi$: $\boxed{z^{-1}=u+vi=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}i}$

Teorema 1.9 (Aljebraren oinarrizko teorema)

Izan bedi: $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$ koefiziente konplexuko n mailako polinomio bat non $a_n\neq 0$ eta $a_k \in \mathbb{C}$ $\forall k=1,2,3,\dots,n$

$\Rightarrow P$ polinomioak n erro konplexu ditu.

Adb. $\underbrace{x^2-4x+4=0}_{2.\text{ mailakoa}} \to \underbrace{x=2}_{1\text{ soluzioa}}$; $\underbrace{x^2+x+1}_{2.\text{ mailakoa}}=0 \to x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ $\begin{cases} \mathbb{R} \to \nexists \text{ sol} \\ \mathbb{C} \to 2.\text{ sol.} \end{cases}$

1) $z=3-4i \to$ kalkulatu z^{-1}

- Erabili $z^{-1}=\dfrac{3}{3^2+(-4)^2}+\dfrac{-(-4)}{3^2+(-4)^2}i=\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i$
- $z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3-4i}=\dfrac{1}{3-4i}\cdot\underbrace{\dfrac{(3+4i)}{(3+4i)}}_{3-4i\text{-ren konjokatua}}=\dfrac{3+4i}{9+12i-12i-16\underset{-1}{i^2}}=\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i$

Adib: $(\mathbb{R}, \geq)$ multzo ordenatua da eta $\leq$ edo $\geq$ ordena erlazio osoa.
Def $X = \mathbb{R}$, $\geq$ edo $\leq$

$(\mathbb{R}, >)$ ez da ordena erlazioa: $3 \not> 3 \Leftarrow 3 \not> 3$.
$X = \mathbb{R}$, edo $<$

PROPOSIZIO 1.2

$a, b, c \in \mathbb{R}$ eta $a > b$ $\Rightarrow$
1) $a+c > b+c$
2) $c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$
3) $c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

FROGA: 1) Suposatuko dugu $a, b, c \in \mathbb{R}$ eta $a > b$ eta frogatu nahi dugu $a+c > b+c$.

$a > b$ denez $\Rightarrow a - b > 0$
$a - b + c - c > 0$
$(a+c) - (b+c) > 0$
$a + c > b + c$ ■

2) eta 3) begiratu egelako PDFan 4 orrian.

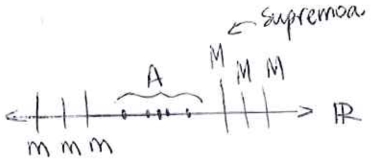
Def: Izan bitez, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

1) $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
2) $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
3) $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$
4) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
5) $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$
6) $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$
7) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$
8) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$
9) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

1.2.5 - Goi eta behe borneak supremoa eta infimoa

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

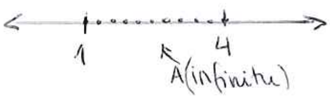
1) A goi-bornatua da $\exists M \in \mathbb{R}$ non $a \leq M$ $\forall a \in A$ (M: goi-bornea)
2) A behe-bornatua da $\exists m \in \mathbb{R}$ non $a \geq m$ $\forall a \in A$ (m: behe-bornea)



Def:
1) A goi-bornatua, $\alpha \in \mathbb{R}$ A-ren supremoa da. ($\alpha = \sup A$), α A-ren goi-bornerik txikiena bada.
2) A behe-bornatua, $\beta \in \mathbb{R}$ A-ren infimoa da. ($\beta = \inf A$), β A-ren behe-bornerik handiena bada.

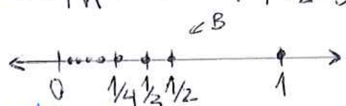
Oharra: $\alpha = \sup A \in A \Rightarrow \alpha$ A-ren maximoa
$\beta = \inf A \in A \Rightarrow \beta$ A-ren minimoa

Adib. ① $A = \{r \in \mathbb{Q} / 1 \leq r \leq 4\}$



- Goi-borneak: 5, 18.4, 1000, 4...
- Behe-borneak: -1, 0, 0.8, 1...
- $\sup A = 4 \in A \Rightarrow \max A = 4$
- $\inf A = 1 \in A \Rightarrow \min A = 1$

② $B = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\}$



$\exists n \in \mathbb{N}$ non $0 = 1/n$

- Goi-borneak: 1, 19, 17...
- Behe- " : -18, -2, 0...
- $\sup A = 1 \in B \Rightarrow \max B = 1$
- $\inf A = 0 \notin B \Rightarrow \nexists \min B$

③ $C = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\} = (-\infty, 2)$

- Goi-borneak: 3, 2, 11...
- Behe- " : $\nexists$
- $\sup A = 2 \notin C \Rightarrow \nexists \max C$
- $\inf A \Rightarrow \nexists \Rightarrow \nexists \min C$

Supremoaren printzipioa edo axioma

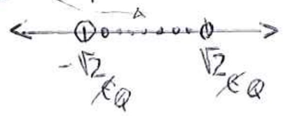
$A \subseteq \mathbb{R}$ goi-bornatua $\Rightarrow$ A multzoak supremoa du $\mathbb{R}$-n
$\neq \emptyset$

Teorema 1.3 (infimoaren printzipioa edo axioma)

$B \subseteq \mathbb{R}$ behe-bornatua $\Rightarrow$ B multzoak infimoa du $\mathbb{R}$-n
$\neq \emptyset$

OHARRA: Aurreko printzipioak ez dira $\mathbb{Q}$-n bete behar.

Adib: $A = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$

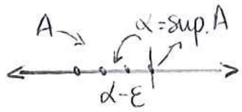


Goi-borneak: 2, $\sqrt{2}$ (ere bai), 16...
Behe-borneak: $-2, -\sqrt{2}, -10$...
Supremoa $A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \rightarrow$ A-k supremoa du $\mathbb{R}$-n ($\sqrt{2}$) baina ez $\mathbb{Q}$-n
Infimoa $A = -\sqrt{2} \rightarrow$ A-k infimoa du $\mathbb{R}$-n baina ez $\mathbb{Q}$-n.

Proposizioa 1.4 (Supremoaren eta infimoaren karakterizazioa) ← beste def enetza

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

1) α A-ren goi-bornea
$\alpha = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$ (*)



2) β A-ren behe-bornea
$\beta = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \beta + \varepsilon > a$

FROGA:

1) $\Rightarrow$| α A-ren goi-bornea da eta $\alpha = \sup A$ dela suposatzen dugu eta (*) frogatu behar dugu.
Izan bitez $\varepsilon > 0 \Rightarrow \alpha - \varepsilon < \alpha$
Bestalde $\alpha = \sup A$ denez, definizioagatik, A-ren goi-bornerik txikiena da α. $\Rightarrow$
~~Ondorioz~~ $\Rightarrow \alpha - \varepsilon$ ezin da A-ren goi-bornea izan $\Rightarrow \exists a \in A$ non $\alpha - \varepsilon < a$.
$\alpha - \varepsilon < a$

$\Leftarrow$| α A-ren goi-bornea da eta suposatzen dugu $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ non $\alpha - \varepsilon < a$
Frogatu nahi dugu $\alpha = \sup A$ dela.
Absurdura eramanez, suposatuko dugu $\alpha \neq \sup A$.
α A-ren goi-bornea denez, supremoaren definizioagatik $\alpha > \sup A \Rightarrow \alpha - \sup A > 0$
(*) erabiltzeko asmoz, $\varepsilon = \alpha - \sup A > 0$ eta $\exists a \in A$ non $\alpha - (\alpha - \sup A) < a$
$\sup A < a$ KONTRAESANA

Kontraesana sup-ren definizioarekin.
Ondorioz, suposatutakoa ($\alpha \neq \sup A$) gezurra da $\Rightarrow \alpha = \sup A$ ∎

2) Zuek irakurtzeko (eGelako PDF → 11 or.)

2) $\frac{2+3i}{1+i}=\frac{2+3i}{1+i}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)}=\frac{2+2i+3i-3i^2}{1-i+i-i^2}=\frac{5+i}{2}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$

DEF. $z=x+yi\in\mathbb{C}$ bada $\bar{z}=x-yi$ z-ren konjokatua da.

Propositioa (Konjokatuaren propietateak)

Izan bitez $z,w\in\mathbb{C}$

i) $\bar{\bar{z}}=z$

ii) $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}\,z$ eta $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}\,z$

iii) $z=\bar{z}\iff \mathrm{Im}\,z=0\iff z\in\mathbb{R}$

iv) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$; $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

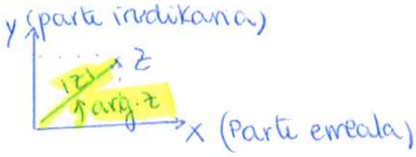
v) $\overline{-z}=-\bar{z}$; $\overline{z^{-1}}=\bar{z}^{-1}$, $z\neq 0$ bada

Zenbaki konplexuen adierazpen polarra

$\mathbb{R}\to$ Zuzen bateko puntuekin identifikatzen da

$\mathbb{C}\to$ plano bateko puntu batekin identifikatzen da.
$\shortparallel$
$\mathbb{R}^2$.

$\underbrace{z=x+yi}_{\text{z-ren adierazpen binomikoa}}:=\underbrace{(x,y)}_{\text{z-ren adierazpen kartesiarra}}\in\mathbb{C}$



DEF. Izan bedi $z\in\mathbb{C}$

z-ren modulua, $|z|$, jatorritik z puntura dagoen zuzenkiaren luzera da.

$z=x+yi\to |z|=\sqrt{x^2+y^2}$

DEF: Izan bedi $z\in\mathbb{C}-\{0\}$. z-ren argumentua jatorria eta z puntua lotzen dituen zuzenkiaren eta x ardatz positiboaren arteko angelua da. $\tan(\mathrm{Arg}\,z)=\frac{y}{x}$

OHARRA: z-ren argumentua ez da bakarra. z-ren argumentu nagusia, $\arg z$ (minuskula), $(-\pi,\pi]$ tartean dago. $\mathrm{Arg}\,z$ (maiuskula), argumentu guztiek osatzen duten multzoa da $\to$

$\to \mathrm{Arg}\,z=\{\arg z+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\}$

Adb: 1) $z_1=\underbrace{3}_{x}+\underbrace{\sqrt{3}}_{y}i$

$\to |z_1|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\to \arg z_1=\frac{\pi}{6}$ edo $\cancel{\frac{-5\pi}{6}}$

$\iff \tan(\arg z_1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Uparrow$

2) $z_2=-1+\sqrt{3}i$

$\to |z_2|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\to \arg z_2\to \tan(\arg z_2)=\frac{\sqrt{3}}{-1}$

$\arg z_2=\cancel{-\frac{\pi}{3}}_{-60°}$ eta $\frac{2\pi}{3}_{120°}$

Euleren formula

$\theta \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

DEF: $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ non $|z| = r$ eta $\theta \in \operatorname{Arg} z \Rightarrow z = r \cdot e^{i\theta}$ z-ren adierazpen polarra

Adb: $z_1 = 2\sqrt{3}\, e^{i\pi/6}$; $z_2 = 2e^{2\pi/3 i}$

Proposizioa 1.11 (Moduluaren propietateak)

i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

ii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, berat $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$ bada

iii) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

iv) $|\underbrace{\operatorname{Re} z}_{\in \mathbb{R}}| \leq |z|$, $|\underbrace{\operatorname{Im} z}_{\in \mathbb{R}}| \leq |z|$, $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

v) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$; $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$

vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$

vii) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Proposizioa 1.12 (Argumentuaren propietateak)

i) $\arg z = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$ eta $\arg z = \pi \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^-$

ii) $\arg \bar{z} = -\arg z$

iii) $\operatorname{Arg}(z \cdot w) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$

iv) $\arg(z^{-1}) = -\arg z$

Eragiketak (adierazpen polarretan)

$\begin{cases} z = r \cdot e^{i\theta} \\ w = \rho \cdot e^{i\varphi} \end{cases}$

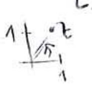
$z \cdot w = r \cdot \rho\, e^{i(\theta + \varphi)}$

$z^{-1} = \dfrac{1}{r} e^{i(-\theta)}$

$\dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{\rho} e^{i(\theta - \varphi)}$

$z^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow \begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z \end{cases}$

Adb. $(1+i)^3$ (binomikoan) $\longrightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \arg z = \pi/4 \text{ edo } \cancel{-3\pi/4} \\ \quad \uparrow \tan(\arg z) = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$



(polarretan) $\longrightarrow \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \longrightarrow z^3 = (\sqrt{2})^3 e^{i \cdot 3\pi/4} = 2\sqrt{2}\, e^{i 3\pi/4} =$ (polarretan)

Euleren formula

$= 2\sqrt{2}\Big(\underbrace{\cos\frac{3\pi}{4}}_{-\sqrt{2}/2} + i \underbrace{\sin\frac{3\pi}{4}}_{\sqrt{2}/2}\Big) = -2 + 2i$ (Binomikoan)

Beste era bat:

$(\underset{a}{1} + \underset{b}{i})^{3\,n} = \binom{3}{0} 1^3 i^0 + \binom{3}{1} 1^2 i^1 + \binom{3}{2} 1^1 i^2 + \binom{3}{3} 1^0 i^3 = -2 + 2i$

↑ Newton-en binomioa ↑ operatu

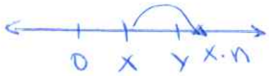
Moivreren formula

$z = 1 e^{i\theta} \overset{\text{Euler}}{=} \cos\theta + i\sin\theta$

$z^n = e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Proposizio 1.5 (Arquimedesen printzipioa)

$\left.\begin{array}{l} x, y \in \mathbb{R} \\ 0<x<y \end{array}\right\} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ non $x \cdot n > y$ den.



FROGA: $x>0$ denez $\Rightarrow x \neq 0$ eta $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}$ eta $\frac{y}{x}$ ez da $\mathbb{N}$ goi-bornea ($\mathbb{N}$ ez dago goitik bornatua)

$\exists n \in \mathbb{N}$ non $n > \frac{y}{x} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ non $n \cdot x > y$ ∎

Korolario 1.6 (*) (ARQUIMEDESEN PROPIETATEA)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ non $\frac{1}{n} < \varepsilon$

1.2.6 - Zenbaki errealen arteko distantzia euklidearra

Def: $x \in \mathbb{R}$; $\underbrace{|x|}_{x\text{-ren balio absolutua}} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

Oharra: $d(\overset{\in \mathbb{R}}{x, y}) = |x-y| = (x \text{ eta } y\text{-ren arteko distantzia}) = \begin{cases} x-y, & x-y \geq 0 \\ -(x-y), & x-y<0 \end{cases} = \begin{cases} x-y, & x-y \geq 0 \\ -x+y, & x-y<0 \end{cases}$

Proposizio 1.7

Izan bitez: $x, y \in \mathbb{R}$

i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ eta $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

iii) $|x| = \max\{x, -x\} = \sqrt{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ → Adib: $\cancel{\sqrt{x^2} = x}$ (bakarrik balio du $x \geq 0$) $\quad \sqrt{x^2} = |x|$ ✓

iv) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

v) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

vi) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ "

vii) $|x| - |y| \leq |x-y|$ "

FROGA (GU: i), ii), vi)) (12 eta 13 or.)

iii) $|x| = \max\{x, -x\} = \sqrt{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow \max\{x, -x\} = x$
  - $\Rightarrow |x| \overset{\text{def}}{=} x$
  - $\Rightarrow \sqrt{x^2} = x$
  - $\Rightarrow |x| = \max\{x, -x\} = \sqrt{x^2}$
- $x<0 \Rightarrow -x>0 \Rightarrow \max\{-x, x\} = -x$
  - $\Rightarrow |x| \overset{\text{def}}{=} -x$
  - $\Rightarrow \sqrt{x^2} = -x \quad (x=-3 \to x^2 = 9 \to \sqrt{9} = 3 = -x)$
  - $\Rightarrow |x| = \max\{x, -x\} = \sqrt{x^2}$ ∎

iv) $|x+y| \leq |x| + |y|$

$|x| \overset{(iii)}{=} \max\{x, -x\} \Rightarrow \begin{cases} x \leq |x| \\ \text{eta} \\ -x \leq |x| \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x \leq |x| \\ \text{eta} \\ -x \leq |x| \end{cases} \quad \begin{array}{l} y \leq |y| \\ -y \leq |y| \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq |x|+|y| \\ \text{eta} \\ \underbrace{-x-y}_{-(x+y)} \leq |x|+|y| \end{cases} \overset{\text{def max}}{\Longrightarrow} \underbrace{\max\{x+y, -(x+y)\}}_{\overset{(iii)}{=} |x+y|} \leq |x|+|y| \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$ ∎

v) $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

1.1 gurtiak
1.2 batuk

- $|x| = |x \underbrace{-y+y}_{0}| = |(x-y)+y| \overset{(iv)}{\leq} |x-y|+|y|$

  $|x| \leq |x-y|+|y|$

  ① $|x|-|y| \leq |x-y|$

- $|y| = |y-x+x| = |(y-x)+x| \overset{(iv)}{\leq} |y-x|+|x|$

  $|y|-|x| \leq |y-x| \overset{(ii)}{=} |-(y-x)| = |x-y|$

  $|y|-|x| \leq |x-y|$

  $-(|y|-|x|) \geq -|x-y|$

  ② $|x|-|y| \geq -|x-y|$

Ondorioz, $\begin{cases} ① : |x|-|y| \leq |x-y| \\ ② : |x|-|y| \geq -|x-y| \end{cases}$

$\Rightarrow -|x-y| \overset{②}{\leq} |x|-|y| \overset{①}{\leq} |x-y|$

$\overset{\text{prop.1.8}}{\Longrightarrow} \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$ ☒

$|x| \leq r$
$\Updownarrow$
$-r \leq x \leq r$

vii) $|x|-|y| \leq |x-y|$

$|x| = \max\{x,-x\} \Rightarrow$ Konkretuki $x \leq |x|$

$|x|-|y| \leq \big||x|-|y|\big| \overset{v)}{\leq} |x-y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$ ☒

Proposizioa 1.8

Izan bitez $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ ($r \in \mathbb{R}$)

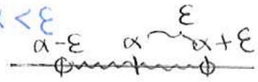
1) $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$

2) $|x| \geq r \iff x \leq -r$ edo $x \geq r$

FROGA: erraza

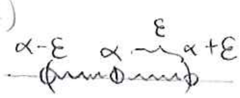
DEF: Izan bitez $\alpha \in \mathbb{R}$ eta $\varepsilon > 0$.

i) $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \underbrace{|x-\alpha|}_{d(x,\alpha)} < \varepsilon\}$ $\overset{\text{prop.1.8}}{\iff} -\varepsilon < x-\alpha < \varepsilon$



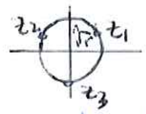
α-ren ingurunea da (α zentrua eta ε erradioa)

ii) $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) - \{\alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < |x-\alpha| < \varepsilon\}$



α-ren ingurune laburtua

Erroen eragiketa (polarretan)



$z = r \cdot e^{i\theta} \in \mathbb{C} \left(\begin{array}{l} |z| = r \\ \arg z = \theta \end{array} \right)$

$\sqrt[n]{z}$ erroak n soluzio izango ditu $\sqrt[n]{r}$ erradioko zirkunferentzian era homogenea batean kokatuta egongo direnak. $\sqrt[n]{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$

$$\sqrt[n]{z} = \underbrace{\sqrt[n]{|z|}}_{\sqrt[n]{z}\text{-ren modulua}} \, e^{\overbrace{\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}^{\sqrt[n]{z}\text{-ren argumentua}} i} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Adb. Kalkulatu bataren erro kubikoak. $(\sqrt[3]{1})$ $\xrightarrow{\mathbb{R}} \sqrt[3]{1} = 1$; $\xrightarrow{\mathbb{C}} \sqrt[3]{1+0i}$ = hiru emaitza

$z = 1 + 0i$; $|z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$; $\arg z = 0°$

$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1+0i} = \underbrace{\sqrt[3]{1}}_{1} \cdot e^{\frac{0+2k\pi}{3} i} = \{ \underbrace{1e^{0i}}_{k=0}, \underbrace{1e^{\frac{2\pi}{3}i}}_{k=1}, \underbrace{1e^{\frac{4\pi}{3}i}}_{k=2} \} = \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ (era binomikoa)

ARIKETAK

1

(1) $a, b \in \mathbb{Q} \overset{?}{\Rightarrow} a+b, a\cdot b \in \mathbb{Q}$

$a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists m_1, n_1 \in \mathbb{Z} \mid n_1 \neq 0, a = \frac{m_1}{n_1}$

$b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists m_2, n_2 \in \mathbb{Z} \mid n_2 \neq 0, b = \frac{m_2}{n_2}$

; $a + b = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{\underbrace{n_1 n_2}_{\neq 0} \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Q}$ EGIA

$a \cdot b$

(2) $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I} \overset{?}{\Rightarrow} a+b, a\cdot b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\left. \begin{array}{l} a = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = 0 \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$a \cdot b = -2 \notin \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ GEZURRA

(3) $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \overset{?}{\Rightarrow} a+b \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}, ab \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Absurdura eramanez : Demagun $a + b \in \mathbb{Q}$

Hipotesia : $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\exists m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z} / n_1, n_2 \neq 0, a = \frac{m_1}{n_1}, a + b = \frac{m_2}{n_2}$

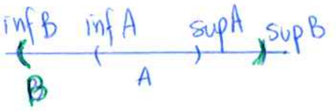
$\underbrace{(a+b) - a}_{\boxed{b}} = \frac{m_2}{n_2} - \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2 n_1 - m_1 m_2}{n_1 n_2} \boxed{\in \mathbb{Q}}$ (zenbakitzailea $\in \mathbb{Z}$, izendatzailea $\in \mathbb{Z}$)

EGIA

2

(i) $A \subset B$ biak bornatuak.

Ordenatu behar ditugu inf. A, sup. A, inf. B, sup B.



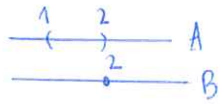
$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$?

$\rightarrow \inf B \leq \inf A$?

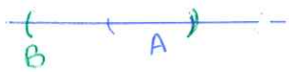
$\left. \begin{array}{l} \inf B \Rightarrow \inf B \leq b, \forall b \in B \\ \inf A \Rightarrow \inf A \leq a, \forall a \in A \end{array} \right\} \Rightarrow \inf B \leq a, \forall a \in A \Rightarrow \inf B \leq \inf A$

(Besteekin gauza bera)

iii)



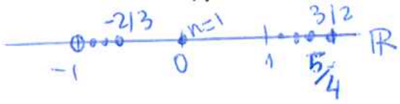
ii) $A \subset B$, $B \neq A$, $\sup A = \sup B$



Posiblea da

iv) $A = \{1\}$

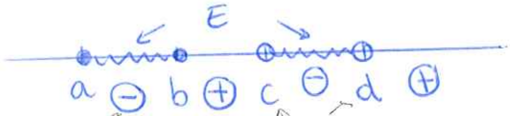
③ $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$



$\sup A = \frac{3}{2} \in A \Rightarrow \max A = 3/2$

$\inf A = -1 \notin A \Rightarrow \nexists \min A$

$E = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} \leq 0\}$ $a<b<c<d$



desberdintzailea 0 egiten duelako

Adb $\frac{(x-\oplus)(x-\ominus)}{(x-\ominus)(x-\ominus)}$

$\sup E = d \notin E \Rightarrow \nexists \max E$

$\inf E = a \in E \Rightarrow \min E = a$

④ $i^2 = -1$

d) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$

$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+i4)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-5+10i}{3^2+4^2}$

Ezin da zenbaki irudikariekin utzi

f) $1 - i = re^{i\theta}$

⑤ Kalkulatu $(2-i)z^2 - (3+i)z + 1 = 0$ soluzioak.

$z = \frac{(3+i) \pm \sqrt{(3+i)^2 - 4\cdot(2-i)\cdot 1}}{2\cdot(2-i)} = \frac{(3+i) \pm \sqrt{10i}}{2(2-i)} = < \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}$

$10i$, $\varphi = 90° = \pi/2$ $\quad \sqrt{10i} = \sqrt{10 e^{i\pi/2}} = \begin{cases} \sqrt{10}\, e^{i\pi/4} = \sqrt{10}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{5} + i\sqrt{5} \\ \sqrt{10}\, e^{i5\pi/4} = \sqrt{10}\, e^{-i\pi/4} = \ldots = -\sqrt{5} - i\sqrt{5} \end{cases}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\theta + 2\pi k}{n}}$; $k = 1, \ldots, n-1$

$\begin{cases} z_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} i \\ z_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} i \end{cases}$

⑥ $|z| = r \neq 0$ eta $\arg(z) = \theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = +\cos\theta$

$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\bar{z} = \overline{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta}$

$|\bar{z}| = r$, $\arg(\bar{z}) = -\theta = -\arg(z)$

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \overset{\text{1. atala}}{=} \frac{|z| e^{-i\theta}}{|z|^2} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

$|\frac{1}{z}| = \frac{1}{r}$, $\arg(\frac{1}{z}) = -\theta = -\arg(z)$

$\frac{1}{z^2} = (\frac{1}{z})^2 = (\frac{1}{r} e^{-i\theta})^2 = \frac{1}{r^2} e^{-i2\theta}$

$|\frac{1}{z^2}| = \frac{1}{r^2}$; $\arg(\frac{1}{z^2}) = -2\theta$