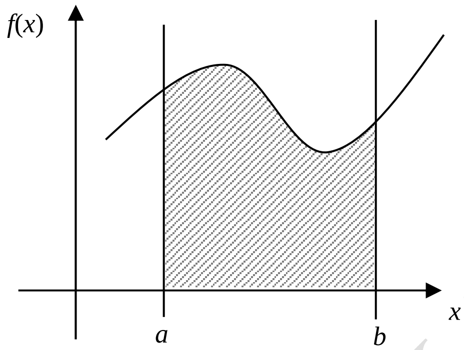
2 Aldagai askoko kalkulu integrala

2.1 Integral bikoitzaren kontzeptua barruti bornatuetan Riemannen integrala eta interpretazioa

Aldagai batekin.



Integrala funtzioak tarte batean definitzen duen barrutiaren arearen azterketari lotuta dago. Hurbilketa hori errektangeluen bidez egin zuten goi eta behe baturak definituz. Goi baturatik goiko-integrala definitzen da eta behekotik behe integrala. Horrela, funtzioa integragarria da (Riemannen zentzuan) goi eta behe integralen balioa berdina denean. Hain zuzen balio hori funtzioaren integrala [a,b] tartean da, hau da, $\int_a^b f(x)dx$.

Funtzio jarraituen integragarritasuna:

$f(x)$ *funtzioa jarraitua bada* $[a,b]$ *tartean integragarria da* $[a,b]$ *tartea, hau da,* $\int_a^b f(x)\,dx$ *existitzen da*

Interpretazioa: funtzioak eta [*a*,*b*] tartean defiinitzen duen azalera.

Nola kalkulatu? **Barrowen erregela:**

Demagun *f(x)* funtzio jarraitua [*a*,*b*] tartean, orduan *F(x)* funtzioa *f(x)* funtzioaren jatorrizkoa bada,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Kontzeptu hori, $\mathbb{R}^2$ espazioko *R* barruti itxi eta bornatuan (trinkoan) definitua eta bornatua den $f(x,y)$ bi aldagaiko funtzioentzako orokor dezakegu eta notazio hauek erabiliko dugu:, $\iint_R f(x,y)\,dxdy$, $\iint_R f$

Funtzio jarraituen integragarritasuna:

$\mathbb{R}^2$-ko R barruti trinkoan $f(x,y)$ funtzioa jarraitua bada integragarria da R barrutian, hau da, $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ existitzen da.

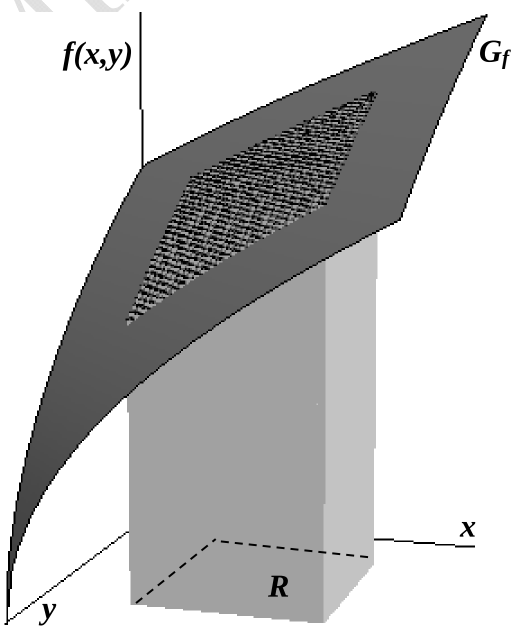
Interpretazioa: R oinarria eta G_f sabaia duen "zutabearen" bolumena.

Bereziki, $f(x,y)=1$ bada, orduan $\iint_R dxdy$ integrala *R* barrutiaren azalera da.

$\mathbb{R}^2$-ko R barruti trinkoan $f(x,y)$ funtzioa jarraitua bada integragarria da R barrutian, hau da, $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ existitzen da

Interpretazioa: R oinarria eta G_f sabaia duen "zutabearen" bolumena.

Bereziki, $f(x,y)=1$ bada, orduan $\iint_R dxdy$ integrala *R* barrutiaren azalera da.



2.2 Integral bikoitzaren propietateak

Positibotasuna: *f* funtzioa *R* barrutian integragarria bada eta $f \geq 0$ bada, orduan

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \geq 0.$$

Linealtasuna: *f* eta *g* funtzioak *R* barrutian integragarriak badira eta λ eta μ bi zenbaki erreal badira, orduan

$$\iint_R (\lambda \cdot f(x,y) + \mu \cdot g(x,y))\,dxdy = \lambda \iint_R f(x,y)\,dxdy + \mu \iint_R g(x,y)\,dxdy\,.$$

Batukortasuna barrutian: *f* funtzioa *R* barrutian integragarria bada, eta R_1 eta R_2 *R*-ko bi zati badira ($R = R_1 \cup R_2$), orduan *f* funtzioa R_1 eta R_2 multzoetan ere integragarria da eta hau betetzen da:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dxdy$$

2.3 Integral bikoitzaren kalkulua barruti bornatuetan. Fubiniren teorema

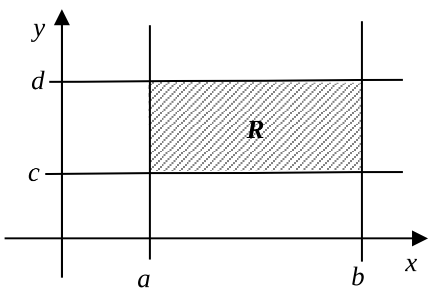
Integral bikoitzen kalkulua Fubiniren teoremarekin egingo dugu. Teorema horrek integral bikoitzen kalkulua aldagai bateko integral iteratuen kalkuluaren bidez ahalbideratzen du.

2.3.1 Integral bikoitzen kalkulua errektangeluetan

$f(x,y)$ funtzioa $R = [a,b] \times [c,d]$ errektangeluan jarraitua bada, Fubiniren teoremak hau ziurtatzen du:

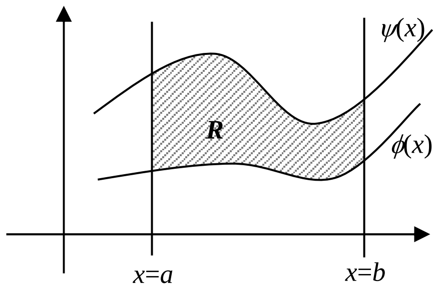
$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy\,.$$

R errektangelu trinkoan funtzio jarraitu baten integrala kalkulatzeko ez du inporta zer ordenatan egiten den (*dxdy* edo *dydx*).



2.3.2 Integral bikoitzen kalkulua barruti bornatuetan

Lehen kasua:



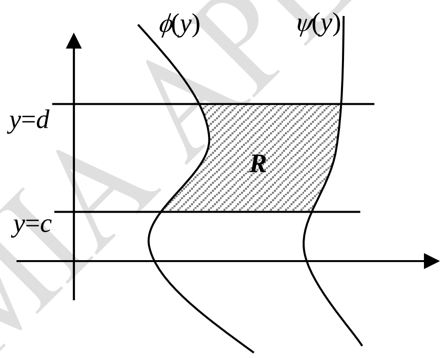
R barrutia desberdintza hauen bitartez definitua badago:

$$a \le x \le b \quad \text{eta} \quad \phi(x) \le y \le \psi(x),$$

$\phi(x)$ eta $\psi(x)$ funtzioak $[a,b]$ segmentuan jarraituak izanik, orduan, integral bikoitza modu honetan kalkula daiteke:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

Bigarren kasua:



Eta *R* barrutia desberdintza hauen bitartez definitua dagoenean:

$$c \le y \le d \quad \text{eta} \quad \phi(y) \le x \le \psi(y),$$

$\phi(y)$ eta $\psi(y)$ funtzioak $[c,d]$ tartean jarraituak izanik, honela kalkulatuko dugu integral bikoitza:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) \right) dxdy .$$

Orokorragoak diren barrutietan ere baliagarria da metodo hau: barrutia lehen aipatu bezala zatitu ondoren, batukortasun-propietatea aplikatuko dugu barrutian.

Fubiniren teoremak integral bikoitzen kalkulua aldagai bateko integral iteratuen kalkuluaren bidez ahalbideratzen du eta baita itegrazio ordena aldatzea ere.

3.4 Integral bikoitzen kalkulua barruti ez bornatuetan

Integral bikoitzaren kontzeptua barruti ez bornatuetara zabal dezakegu, barruti bornatuetako integralez baliatuta. R_i barruti bornatuak, i handitzerakoan, R barrutira doaz. Horrela, R barruti ez bornatuaren integrala, R_i barruti bornatuetako integralen limitea izango da, jakina, limite hau existitzen denean eta R_i segidaren aukeraketaren menpe ez dagoenean, hau da,

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \lim_{i\to\infty} \iint_{R_i} f(x,y)\,dxdy\,.$$

Limite hori existitzen denean, integrala konbergentea dela esango dugu; eta ez denean dibergentea dela esango dugu.

Adibidez,

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = \lim_{r\to\infty}\int_0^{r}\int_0^{r} f(x,y)\,dxdy.$$