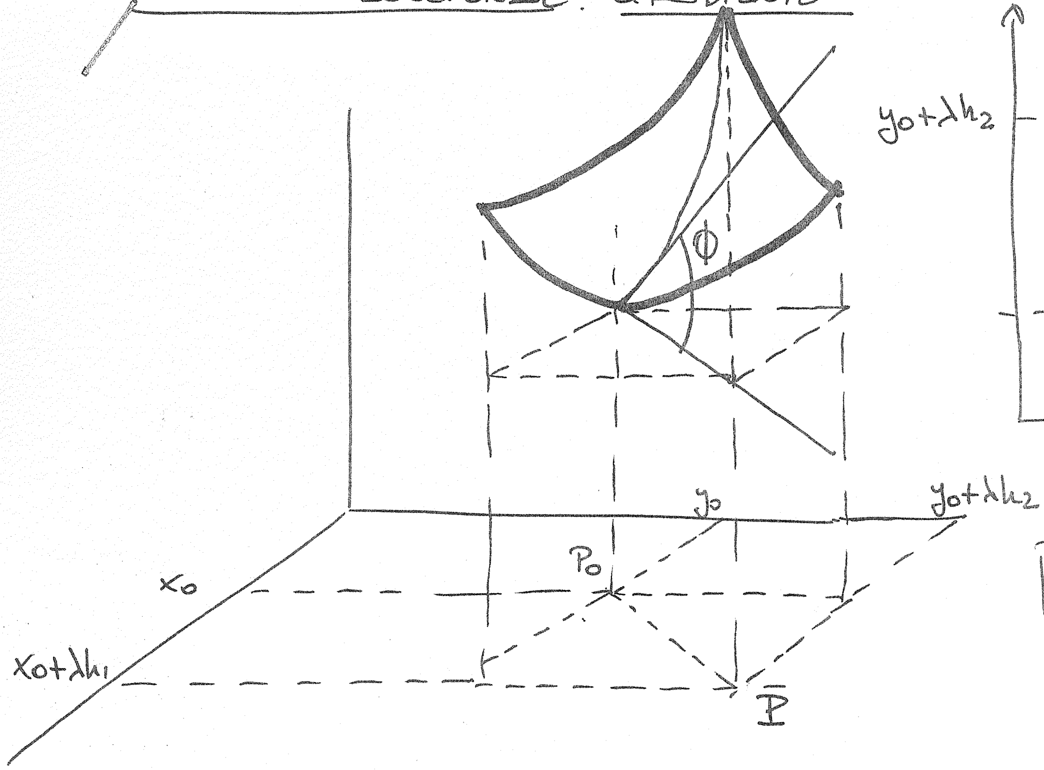
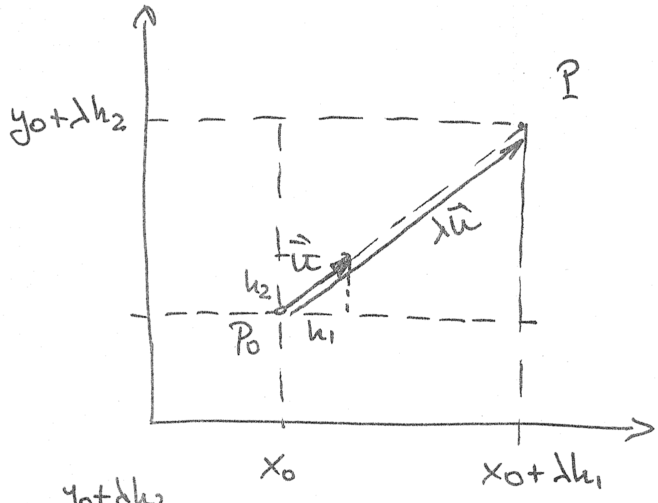
DERIVADA DIRECCIONAL. GRADIENTE





Nota: $\vec{u}$ unitario
(Dirección de la derivada)

$$\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0(x_0,y_0)} = \lim_{|\overline{PP_0}|\to 0} \frac{f(P)-f(P_0)}{|\overline{PP_0}|} = \lim_{|\lambda\vec{u}|\to 0} \frac{f(x_0+\lambda h_1, y_0+\lambda h_2)-f(x_0,y_0)}{|\lambda\vec{u}|} =$$

$$= \boxed{\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x_0+\lambda h_1, y_0+\lambda h_2)-f(x_0,y_0)}{\lambda} = \left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0}}$$

Def: f es derivable en P_0, si f tiene derivada direccional finita en todas las direcciones.

Teorema: Si f es dif en P_0 entonces f es derivable en P_0 y además

$$\boxed{\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0} = f'_x(x_0,y_0)\,h_1 + f'_y(x_0,y_0)\,h_2 = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\vec{u}}$$

Dem: f es dif en P_0 (por hipótesis) $\Rightarrow$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad (\text{con } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0 \text{ si } (\Delta x, \Delta y)\to(0,0))$$

$$\Rightarrow \left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x_0+\overbrace{\lambda h_1}^{\Delta x}, y_0+\overbrace{\lambda h_2}^{\Delta y}) - f(x_0,y_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f'_x(x_0,y_0)\lambda h_1 + f'_y(x_0,y_0)\lambda h_2 + \varepsilon_1 \lambda h_1 + \varepsilon_2 \lambda h_2}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \left(f'_x(x_0,y_0)\,h_1 + f'_y(x_0,y_0)\,h_2 + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2\right) = \boxed{f'_x(x_0,y_0)\,h_1 + f'_y(x_0,y_0)\,h_2} \text{ c.q.d.}$$

En resumen $\boxed{f \text{ dif}} \Longrightarrow \boxed{f \text{ deriv}}$ (no al revés).

$\boxed{f \text{ dif}} \Longrightarrow \boxed{f \text{ cont}}$ (C.Nec)

$\boxed{f \text{ dif}} \Longrightarrow \boxed{\exists f'_x f'_y}$ (C.Nec)

$\boxed{f \text{ deriv}} \not\Longrightarrow \boxed{f \text{ cont}}$

$\boxed{f \text{ deriv}} \not\Longrightarrow \boxed{f \text{ dif}}$

(ver ejemplos del libro).

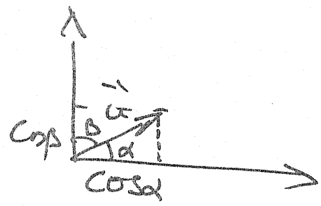
Llamamos $\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\right) \Longrightarrow$

$$\boxed{\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0}} = f'_x(x_0,y_0)h_1 + f'_y(x_0,y_0)h_2 = \boxed{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot \vec{u}}$$

(ojo: $\vec{u}$ unitario
$\vec{u}$ direc. de la deriv.

Otra expresión con "cosenos directores".

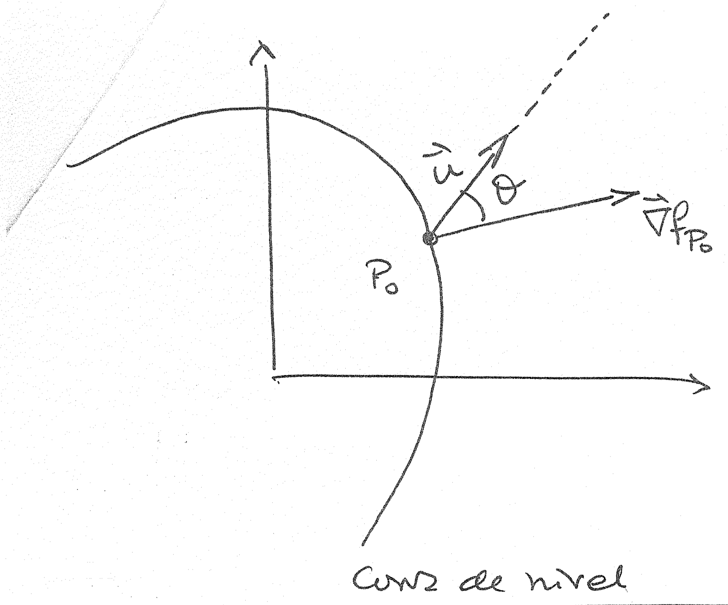
$\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta)$



$$\Longrightarrow \left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0} = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta .$$

<u>Interpretación geométrica</u>: $\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0}$ es la pendiente de la recta tangente en P_0 a la curva intersección del plano $\perp$ al plano XY y que pasa ó contiene al vector $\vec{u}$, con la superficie $z = f(x,y)$.

O también, es la variación de la función f en el pto P_0 en la dirección $\vec{u}$.

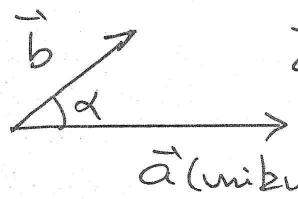


$$\left(\frac{df}{d\vec u}\right)_{P_0} = \vec\nabla f(x_0,y_0)\cdot \hat u =$$

$$= |\vec\nabla f(x_0,y_0)| \cos\alpha \to$$

Es la proyección del gradiente sobre $\vec u$.

- Máximo en las dos direcciones (sentido) de $\vec u \to \left(\frac{df}{d\vec u}\right)_{P_0}\Big|_{máx} = |\vec\nabla f(x_0,y_0)|$
- Mínimo, en la direc. perpendicular a $\vec u$ → VALOR → $\left(\frac{df}{d\vec u}\right)_{P_0}\Big|_{mín} = 0$



$$\vec a\cdot\vec b = |\vec a||\vec b|\cos\alpha = |\vec b|\cos\alpha = \text{Proy}\ \vec b\,\big|_{\vec a}$$

Resumen: La dirección del gradiente es la dirección en la que la derivada de f es máxima y su valor es $|\vec\nabla f(x_0,y_0)|$

La dirección perpendicular al gradiente es la dirección en q. la derivada de f es mínima y su valor es 0.

El gradiente es "perpendicular" (tg) a la curva de nivel.

Por tanto la variación de f es máxima en la dirección $\perp$ a la curva de nivel (tg) y mínima en la dirección de la curva de nivel (tg)

Curva de nivel

(Por ejemplo, Isotermas de la función $T(x,y) = x^2+y^2$, de temperatura 100. $\to \begin{cases} T(x,y) = x^2+y^2 \\ T(x,y) = 100 \end{cases} \; x^2+y^2 = 100 \to$ circunfe. de radio 10

Nota**: La dirección del gradiente es la dirección en la q. la función