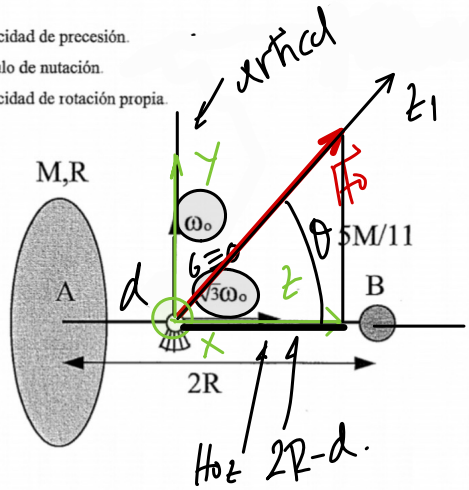
Ejercicio 10.2

El sistema de la figura está constituido por un disco homogéneo de masa M y radio R, en cuyo centro se halla soldada una varilla sin masa perpendicular a su plano de longitud 2R, unida en su otro extremo a una masa puntual de valor 5M/11.

El centro de gravedad del sistema es una rótula esférica fija. En un instante dado, se comunica al sistema una velocidad angular como la indicada en la figura. Determinar:

1. Velocidad de precesión.
2. Ángulo de nutación.
3. Velocidad de rotación propia.



GIRÓSCOPO DE EULER-POINSOT

todas las acciones aplicadas (Peso) está aplicado en el punto fijo

simétrico

$\dot{\theta} = 0 \quad \theta = cte$ / $\dot{\psi} = cte$, $\dot{\varphi} = cte$

$z_1 \equiv \vec{H}_0$

$$[I_0] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

yz simetría del disco contiene a la masa puntual.

xz simetría del disco contiene a la masa puntual

$C_x = C_y = C_z = 0 \Rightarrow$ ejes principales de inercia.

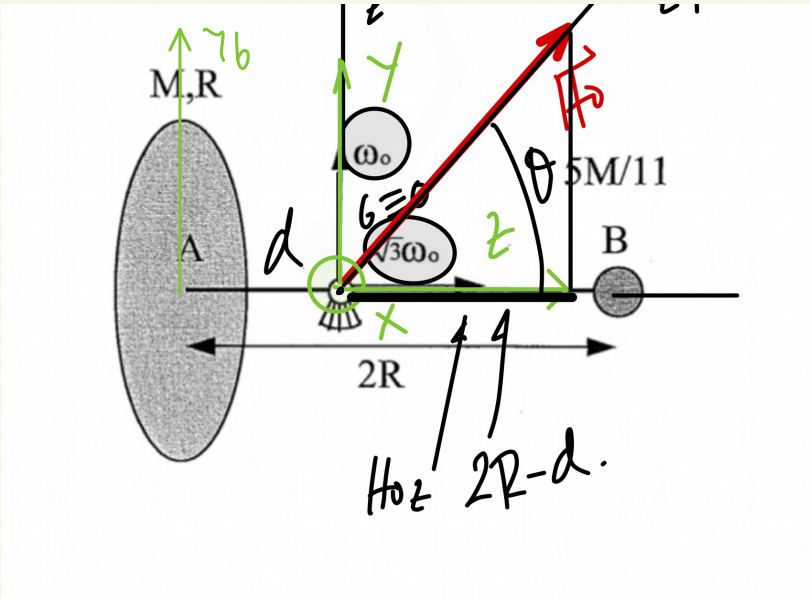
$I_z = I_z^D + I_z^M \Rightarrow I_z = \frac{1}{2} M R^2 + 0 \Rightarrow I_z = \frac{1}{2} M R^2$

$I_x = I_y$

GIRÓSCOPO DE EULER POINSOT SIMÉTRICO

$H_{0z} = H_0 \cos\theta$; $\vec{H}_0 = H_{0x}\hat{e}_1 + H_{0y}\hat{e}_2 + H_{0z}\hat{e}_3$

$\vec{H}_0 = I_x \omega_x \hat{e}_1 + I_y \omega_y \hat{e}_2 + I_z \omega_z \hat{e}_3$



$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega_0$

$\omega_z = \sqrt{3}\omega_0$

$\vec{H}_0 = I_y \omega_0 \hat{e}_2 + I_z \sqrt{3}\omega_0 \hat{e}_3$

$\omega_x = \dot{\theta} = 0$

$I_z = \frac{1}{2} m R^2$

$I_y = I_y^M + I_y^m$

$I_y^M = \frac{1}{4} m R^2 + M d^2$

$I_y^m = \frac{5M}{11}(2R-d)^2$

$z_b = 0 = \frac{5M}{11}(2R-d) - Md$

$0 = -\cancel{M}d + \frac{5\cancel{M}}{11}(2R-d)$

$-11d + 10R - 5d = 0$

$16d = 10R \Rightarrow d = \frac{5}{8}R$

$2R - d = 2R - \frac{5}{8}R = \underline{\frac{11}{8}R}.$

$I_y^m = \frac{55}{64} m R^2$

$I_y^M = \frac{1}{4} m R + M \frac{25}{64} R^2 = I_y^M = \frac{41}{64} m R^2$

$I_y = \left(\frac{55}{64} + \frac{41}{64}\right) m R^2 \Rightarrow I_y = \frac{96}{64} m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$

$\vec{H}_0 = \frac{3}{2} m R^2 \omega_0 \hat{e}_2 + \frac{1}{2} m R^2 \sqrt{3}\omega_0 \hat{e}_3$

$$H_{0z} = \frac{1}{2} M R^2 \sqrt{3}\,\omega_0 \Rightarrow H_0 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}\; M R^2 \omega_0 = \sqrt{3} M R^2 \omega_0$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2} \cancel{M R^2} \cancel{\sqrt{3}\,\omega_0}}{\cancel{\sqrt{3} M R^2 \omega_0}} \rightarrow \cos\theta = 1/2 \Rightarrow \boxed{\theta = 60^\circ}$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin\theta \Rightarrow \omega_0 = \dot{\psi} \sin 60 \Rightarrow \omega_0 = \dot{\psi} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\dot{\psi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega_0}$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta \Rightarrow \sqrt{3}\,\omega_0 = \dot{\varphi} + \frac{2}{\sqrt{3}} \omega_0 \frac{1}{2}$$

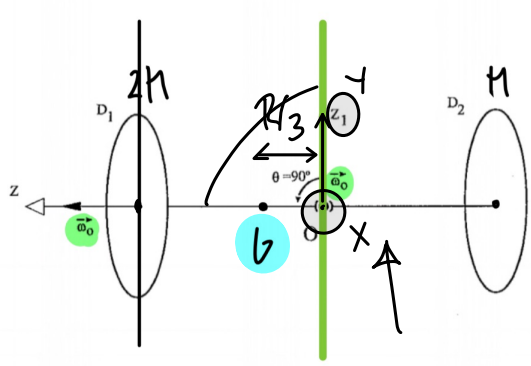
$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega_0}$$

Ejercicio 10.5

En la figura se muestran las condiciones iniciales del movimiento de un sistema constituido por los discos D_1 y D_2 del mismo radio R y de masas 2M y M respectivamente, que están unidos por una barra carente de masa y de longitud 2R. El punto medio de la barra se mantiene fijo mediante una rótula O.

Sabiendo que $\omega_o^2 = \frac{20g}{11R}$, calcular:

1. El otro valor del ángulo de nutación θ para el que $\dot{\theta} = 0$.
2. La velocidad de rotación propia y la precesión en esta última posición del sistema.



Sometido a su propio ω_0 (SÓLO)

GIRÓSCOPO de Euler-Lagrange.

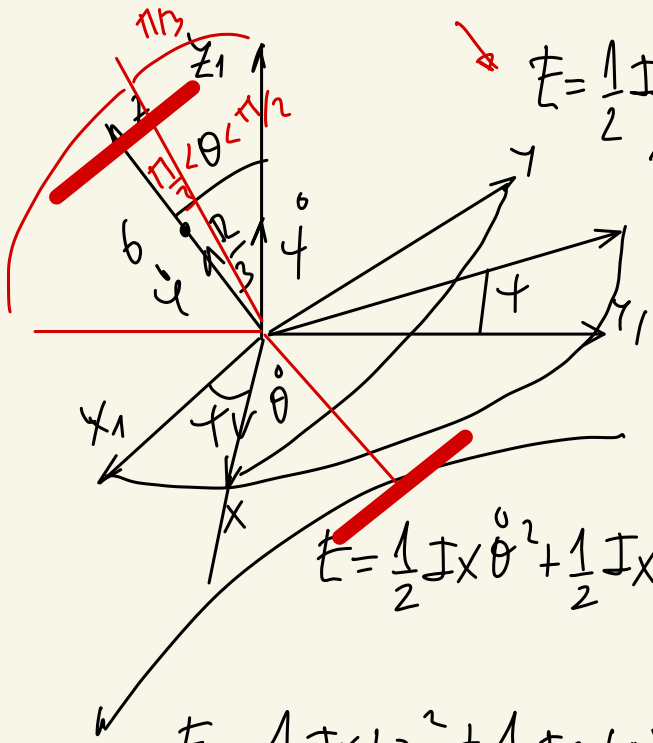
$z \rightarrow$

$$z_G = \frac{2MR + M(-R)}{3M} = \frac{R}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\psi}_0 = \omega_0 \\ \dot{\varphi}_0 = \omega_0 \end{array}\right\} \quad \dot{\theta}_0 = 0$$

$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta \rightarrow$ Ángulo dorsal o de retroceso

Un ángulo dorsal dado $\theta = 90^\circ$



$$E = \frac{1}{2} I_x \dot\theta^2 + \frac{1}{2I_x}\left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{B^2}{2I_z} + 3mg\frac{R}{3}\cos\theta$$

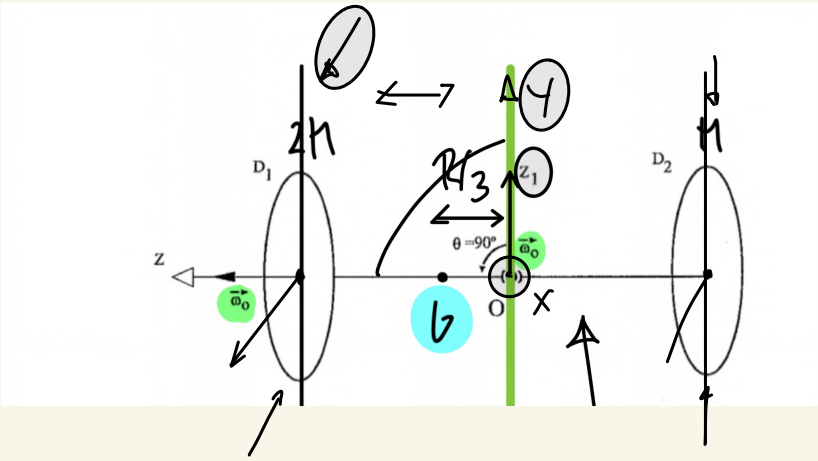
$$E = \frac{1}{2I_x}\left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{B^2}{2I_z} + mgR\cos\theta$$

$\theta = 90^\circ$

$$E = \frac{1}{2} I_x \dot\theta^2 + \frac{1}{2} I_x \dot\psi^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} I_z (\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2 + mgR\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned}\theta &= 90^\circ \\ \dot\theta &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$E = \frac{1}{2} I_x \omega_0^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_0^2 = \frac{1}{2}(I_x + I_z)\omega_0^2$$



$$I_z = \frac{1}{2} mR^2 + \frac{1}{2} 2mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

$$I_x = \frac{1}{4} 2mR^2 + 2mR^2 + \frac{1}{4} mR^2 + mR^2$$

$$I_x = \frac{15}{4} mR^2 = I_y$$

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{15}{4} mR^2 + \frac{3}{2} mR^2\right]\omega_0^2$$

$$\boxed{E = \frac{21}{8} mR^2 \omega_0^2}$$

$$A = I_x \dot\psi \sin^2\theta + I_z(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\cos\theta$$

$$B = I_z(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)$$

$\theta = 90^\circ$

$\dot\psi = \omega_0$

$\dot\varphi = \omega_0$

$\dot\theta = 0$

$$A = I_x \omega_0 = \frac{15}{4} mR^2 \omega_0$$

$$B = I_z \omega_0 = \frac{3}{2} mR^2 \omega_0$$

$$E = \frac{1}{2I_x}\left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{B^2}{2I_z} + Mg R\cos\theta$$

$$\frac{21}{8} MR^2\omega_0^2 = \frac{1}{2\cdot\frac{15}{4}MR^2}\left(\frac{\frac{15}{4}MR^2\omega_0 - \frac{3}{2}MR^2\omega_0\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{\frac{9}{4}(MR^2)^2\omega_0^2}{2\cdot\frac{3}{2}MR^2} + Mg R\cos\theta$$

$$\theta = \pi/2$$

$$\boxed{\theta = \pi/3}$$

$$\dot{\psi} = \frac{A - B\cos\theta}{I_x \sin^2\theta} \Rightarrow \dot{\psi}(\theta = \pi/3) = \frac{\frac{15}{4}MR^2\omega_0 - \frac{3}{2}MR^2\omega_0\frac{1}{2}}{\frac{15}{4}MR^2\,\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{\dot{\psi}(\theta = \pi/3) = \frac{16}{15}\omega_0}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{B}{I_z} - \dot{\psi}\cos\theta$$

$$\dot{\varphi}(\theta = \pi/3) = \frac{\frac{3}{2}MR^2\omega_0}{\frac{3}{2}MR^2} - \frac{16}{15}\omega_0\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\dot{\varphi}(\theta = \pi/3) = \frac{7}{15}\omega_0}$$

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
Dpto. de Ingeniería Mecánica

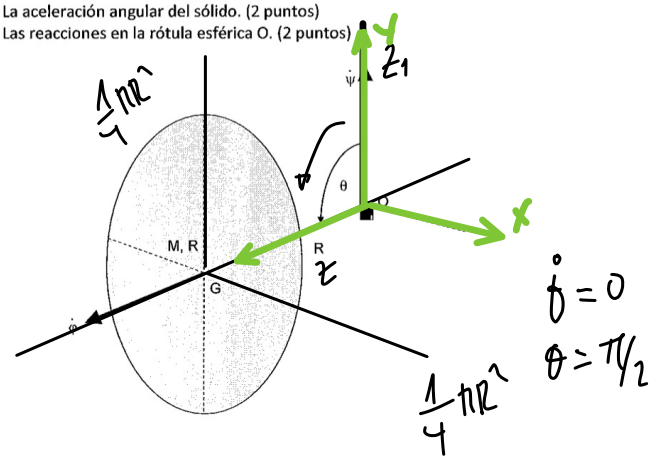
Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

FINAL. 28-06-2007.
TIEMPO: 40'

El sólido con punto fijo de la figura está formado por un disco de masa M y radio R, con un eje de longitud R que lo une al sistema fijo mediante una rótula esférica en O. Se pone en movimiento con un valor de rotación propia inicial igual a $\sqrt{\frac{g}{R}}$, una posición tal que el ángulo de nutación es 90º, sin velocidad angular de nutación, y con una velocidad angular de precesión a determinar.

Si se desea que en el movimiento posterior se mantenga el valor del ángulo de nutación constante en 90º, obtener:

1. El valor de la velocidad angular de precesión. (3 puntos)
2. Las aceleraciones de rotación propia y precesión. (3 puntos)
3. La aceleración angular del sólido. (2 puntos)
4. Las reacciones en la rótula esférica O. (2 puntos)



$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} \qquad \left.\begin{array}{l}\theta = 90^\circ \\ \dot{\theta}_0 = 0\end{array}\right\} \theta = cte = 90^\circ$$

$\dot{\psi}$? → Utilizar los Tres fundamentales

$$\left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_F = \vec{M}_O$$

$\left.\begin{array}{l}xz \\ yz\end{array}\right\}$ simetría $(x=G=(z=0$ son ejes principales

$$I_x = \frac{1}{4}mR^2 + mR^2 = \frac{5}{4}mR^2 = I_y$$

$I_z = \frac{1}{2}mR^2$ → sólido con punto fijo simétrico

el elipsoide de inercia en O es un elipsoide de revolución

$$[I_O] = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

→ triedro es solidario

$$\vec{\omega}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

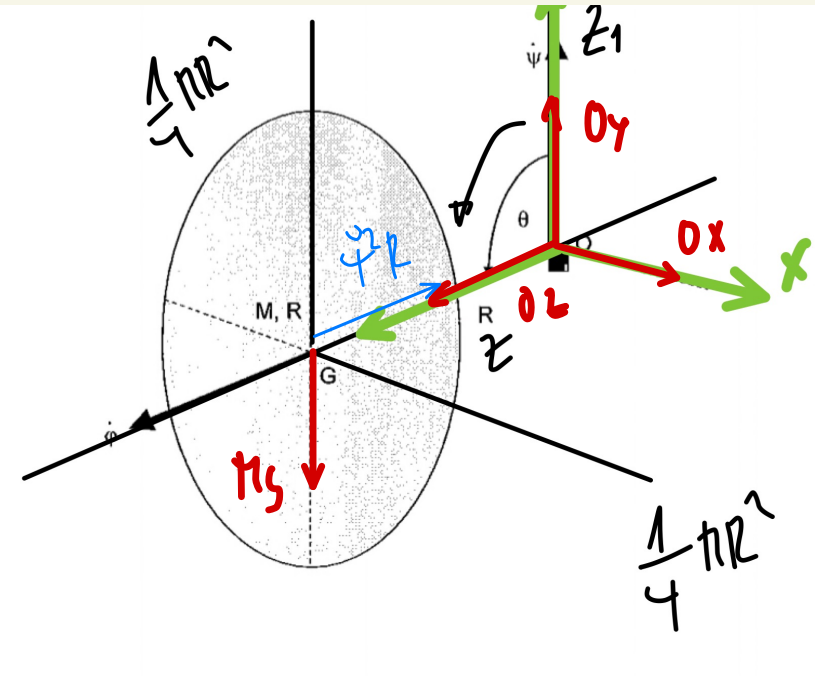
por la simetría que presenta el problema.

$$\vec{\omega}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \qquad \vec{H}_O = [I_O]\{\vec{\omega}\} = \frac{5}{4}mR^2\dot{\psi}\,\hat{e}_2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}\,\hat{e}_3$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_F = \frac{5}{4}mR^2\ddot{\psi}\,\hat{e}_2 + \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi}\,\hat{e}_3 + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & \dot{\psi} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}mR^2\dot{\psi} & \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi} \end{vmatrix}$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_F = \frac{1}{2}mR^2\dot{\psi}\dot{\varphi}\,\hat{e}_1 + \frac{5}{4}mR^2\ddot{\psi}\,\hat{e}_2 + \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi}\,\hat{e}_3$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_F = \vec{M}_O$$



$$mgR = \frac{1}{2}mR^2\dot{\psi}\dot{\varphi}$$

$$0 = \frac{5}{4}mR^2\ddot{\psi} \rightarrow \dot{\psi} = cte \qquad \boxed{\ddot{\psi} = 0}$$

$$0 = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = cte \qquad \boxed{\ddot{\varphi} = 0}$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$\cancel{m}g\cancel{R} = \frac{1}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\dot{\psi}\cdot\sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$\dot{\psi} = \frac{2g}{R\sqrt{\frac{g}{R}}} \Rightarrow \boxed{\dot{\psi} = 2\sqrt{\frac{g}{R}}}$$

$$\vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_M + \vec{\omega}_T \wedge \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega}_S = \dot{\psi}\,\hat{e}_2 + \dot{\varphi}\,\hat{e}_3$$

$$\vec{\alpha} = \cancel{\ddot{\psi}\,\hat{e}_2}^{\,0} + \cancel{\ddot{\varphi}\,\hat{e}_3}^{\,0} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & \dot{\psi} & 0 \\ 0 & \dot{\psi} & \dot{\varphi} \end{vmatrix} = \dot{\psi}\dot{\varphi}\,\hat{e}_1 = 2\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{\frac{g}{R}}\,\hat{e}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \frac{2g}{R}\hat{e}_1}$$

$\vec{F} = m\vec{a}_G$ Centro de gravedad describe circunferencias con

$\dot{\psi}$ cte $\Rightarrow$ $\vec{a}_G = -\dot{\psi}^2 R\,\hat{e}_3 = -\frac{4g}{R}R\,\hat{e}_3 \Rightarrow \vec{a}_G = -4g\,\hat{e}_3$

$$\boxed{O_x = 0}$$

$$O_y - mg = 0 \Rightarrow \boxed{O_y = mg}$$

$$\boxed{O_z = -4mg}$$