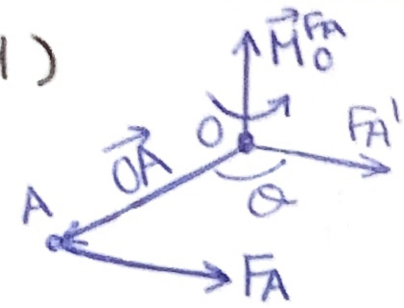
1. GAIA: Partikularen eta solido zurrunaren estatika

* Momentuak

- F_A indarraren momentua O puntuarekiko

1)

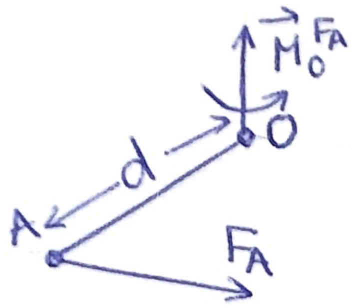


$$\boxed{\vec{M}_0^{FA} = \vec{OA} \times \vec{F_A}}$$

Modulua

$$\boxed{M_0^{FA} = F \cdot \overline{OA} \cdot \sin\theta}$$

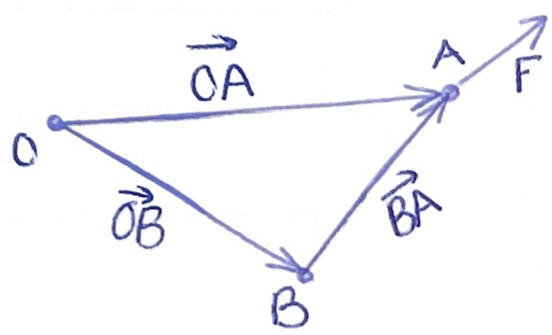
2) Distantzia (d) jakinda



- Modulua: $\boxed{M_0^{FA} = F \cdot d}$
- Noranzkoa: eskuineko eskuaren erregelaren araberakoa (↶ positibo , ↷ negatibo)

- Momentuaren teorema

Izan bitez A puntuan aplikatuta dagoen F indarra eta B eta O puntuak:



$$\left.\begin{aligned} \vec{M}_0^{FA} &= \vec{OA} \times \vec{F} \\ \vec{M}_B^{FA} &= \vec{BA} \times \vec{F} \\ \vec{OA} &= \vec{OB} + \vec{BA} \end{aligned}\right\} \quad \vec{M}_0^{FA} = (\vec{OB} + \vec{BA}) \times \vec{F} = \vec{OB} \times \vec{F} + \vec{BA} \times \vec{F} =$$

$$= \vec{OB} \times \vec{F} + \vec{M}_B^{FA} = \vec{M}_0^{FB} + \vec{M}_B^{FA} \rightarrow$$

↳ $\boxed{\vec{M}_0^{FA} = \vec{M}_0^{FB} + \vec{M}_B^{FA}}$ → $\vec{F}$ indarrak B ptuan aplikatuta O ptuarekiko sortuko lukeen momentua

* Oreka

- Partikularen oreka

$$\boxed{\Sigma \vec{F} = 0}$$

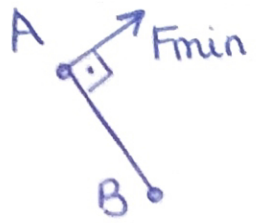
↳ Espazioan: $\Sigma \vec{F_x} = 0$, $\Sigma \vec{F_y} = 0$, $\Sigma \vec{F_z} = 0$

↳ Planoan: $\Sigma \vec{F_x} = 0$, $\Sigma \vec{F_y} = 0$

- Solido zurrunaren oreka

$\boxed{\sum \vec{F} = 0}$, $\boxed{\sum \vec{M}_0 = 0}$ → guk aukeratutako puntua

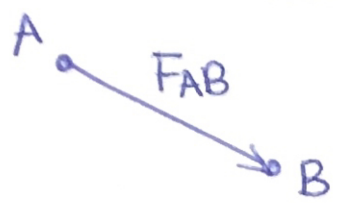
⚠ Indar minimoa



B puntuan momentu jakin bat sortzeko indar minimoa:

$\boxed{F_{min} \perp AB}$ (baldintza)

⚠ Indarra bektore unitarioen bidez kalkulatzea



$$\boxed{\vec{F}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|AB|} \cdot |\vec{F}_{AB}|}$$

⚠ Sistema baliokideak

- Indarrak

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ indarren erresultantea (R) O puntuan:

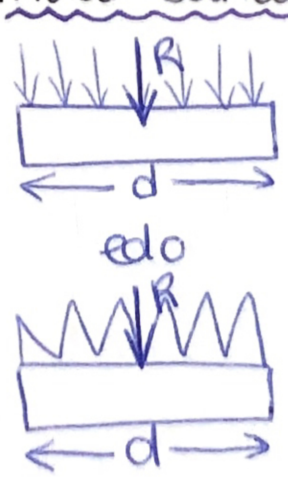
$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n}$$

- Momentuak

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ indarrek eragindako momentu erresultantea O ptuan:

$$\boxed{\vec{M}_0 = \vec{M}_0^{F_1} + \vec{M}_0^{F_2} + \dots + \vec{M}_0^{F_n}}$$

⚠ Indar banatuak

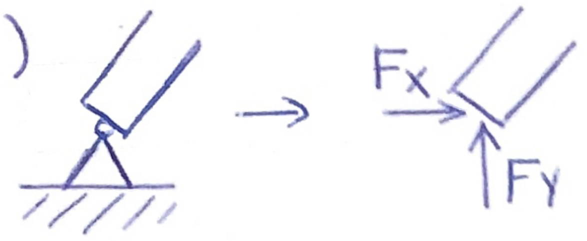


Indar banatuak baditugu, oreka aztertzerakoan BAKARRIK indar erresultantea erabiliko dugu.

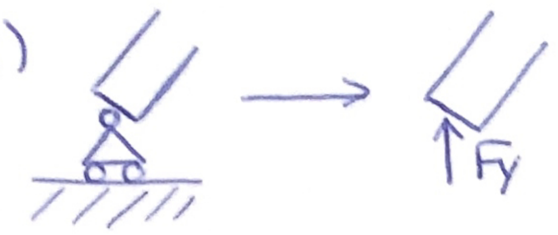
Adb: 3KN/m ; d=2m

$R = 3KN/\cancel{m} \cdot 2\cancel{m} = \underline{6\,KN}$

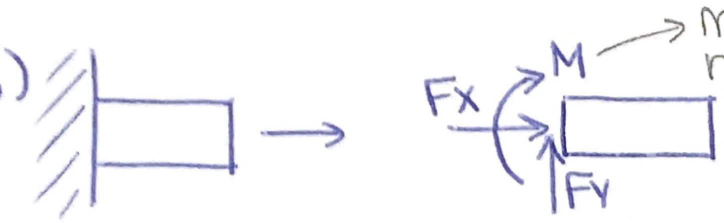
* Euskarri motak

1) 

(bermapuntu finkoa)

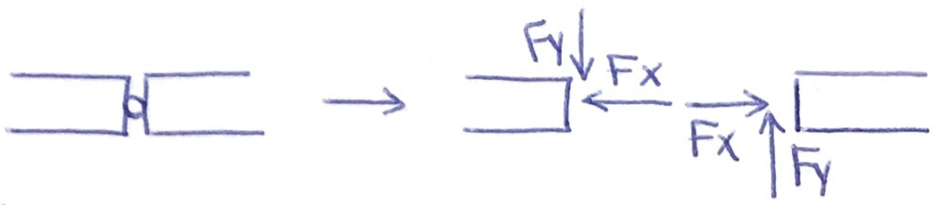
2) 

(bermapuntu labainkorra)

3) 

→ momentua jartzen da landapenak biraketa mugatzen duelako

(landapena)

4) 

(giltzadura)

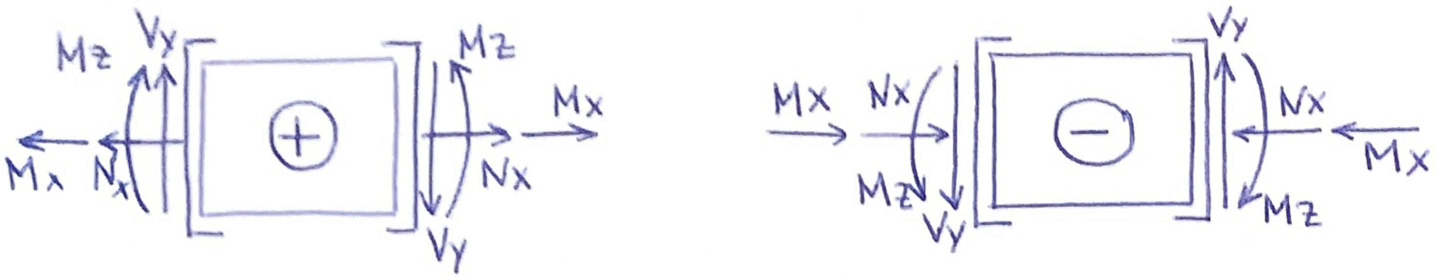
⚠ Giltzaduretan momentua 0 da

⚠ Giltzaduretan, oreka aztertzean, erreakzio kopurua ekuazio kopurua baina handiagoa da. Beraz, erreakzioak kalkulatu ahal izateko, zati bakoitzaren solido askearen diagrama planteatu beharda.

2. GAIA: Barne-indarrak. Habeak eta Kableak

* Barne-indarrak

Barne-indarrak aztertzeko pieza bat bitan banatu behar da, eta sekzioan barne-indarrak aztertu behar dira. Zeinu-irizpideak:



- N_x (edo N): trakzioa/Konpresioa (indar axialak)
- V_y (edo V): tentsio ebakitzailea
- M_x (edo T): bihurdura-momentua
- M_z (edo M): makurdura-momentua

(*)

* V-M diagrama

V-M diagrama habe baten sekzio-kritikoa (barne-indarrak maximoak diren sekzioa) identifikatzeko egiten da. Jarraitu beharreko pausuak:

1) Solido askearen diagrama egin (egitura askatu eta erreakzioak kalkulatu) Pieza osoan

2) Eremuak identifikatu (indar- edo momentu-aldaketa bakoitzak eremu bat mugatzen du)

3) Eremu bakoitzean orekaren bidez barne-indarrak aztertu x luzerarekiko (horretarako, habea sekziotan zatitu)

4) Barne-indarren balioak ordezkatuz VM diagrama marraztu

(Hainbat pieza dituen egitura baten
⊗ Sekzio jakin batean barne-indarrak kalkulatzeko pausuak:

1) Solido askearen diagrama egin (pieza osoan oreka aztertu)

2) Egitura askatu eta pieza bakoitzean oreka aztertu

3) Sekzioa moztu eta barne-indarrak kalkulatu.

3. GAIA: Egiturak

* Jarraitu beharreko pausoak

1) Egitura askatu → erreakzioak aztertu

2) Solido askearen diagrama

3) Barra guztien trakzio-konpresio indarrak kalkulatu (horretarako 2 metodo daude)

4) Emaitza: egitura askatuta marraztu erreakzioak eta indar axialak (trakzioa-konpresioa) adierazi

* Indar axialak kalkulatzeko metodoak

- **Korapiloen metodoa** (barra guztietan indarrak kalkulatzeko)

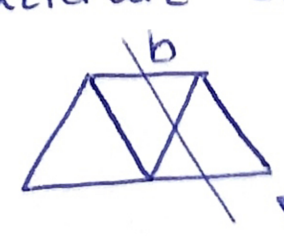
  Egituraren korapiloak banan-banan isolatu eta korapilo bakoitzean oreka aztertu.

  ⚠ Aukeratutako lehenengo korapiloa kanpo-indar bat eduki behar du, eta ahalik eta barra gutxien izan behar ditu.

  ⚠ Hasieran, beti, trakzioa dela suposatu ($\bullet \rightarrow N_1$, $\searrow N_2$)

- **Ritter-en metodoa / sekzioen metodoa** (barra jakin batzuen indarrak kalkulatzeko)

  3/4 barra dauden leku batean egitura mozten da eta oreka aztertuz 3/4 barra horien indar axialak kalkulatzen dira.



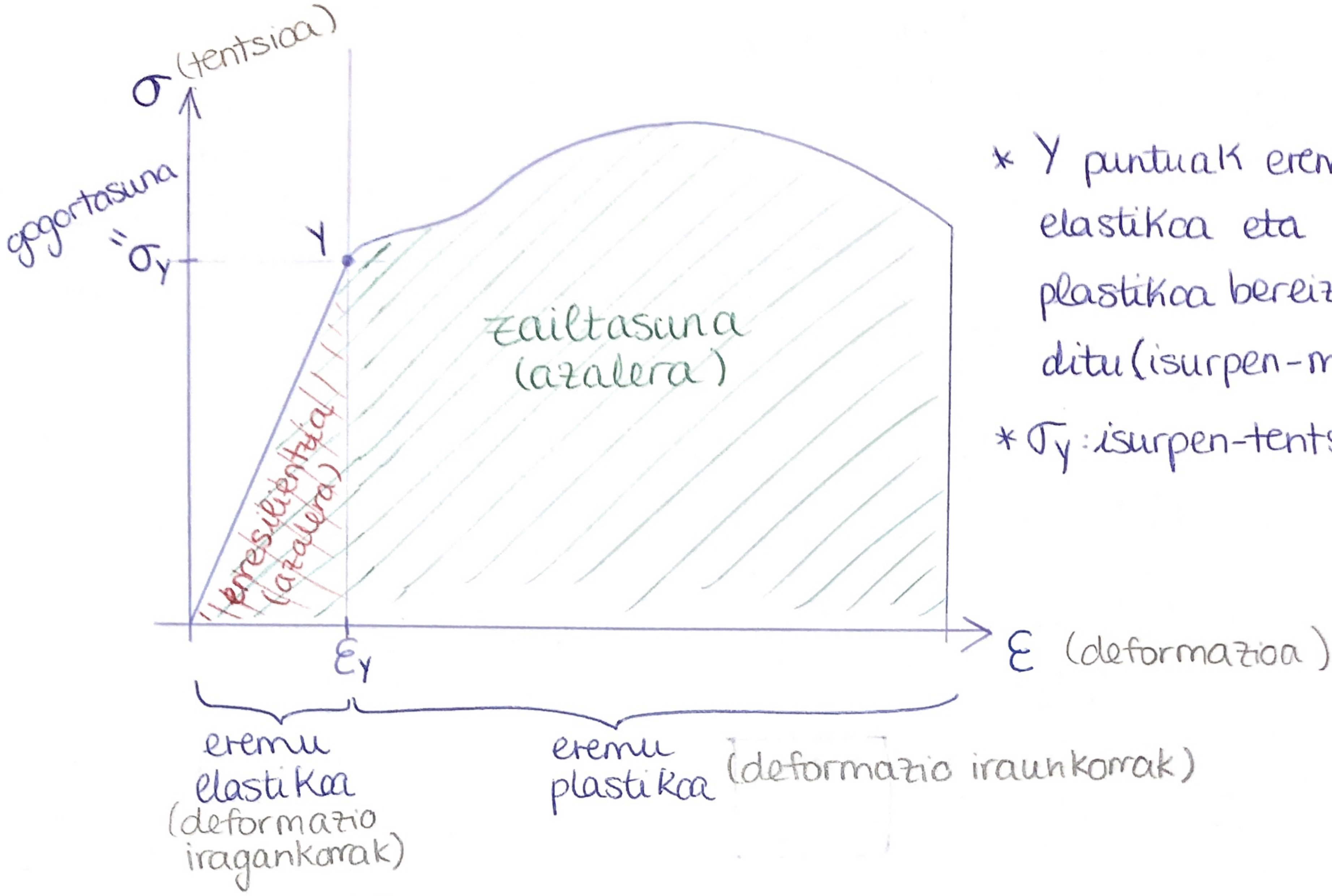
Adb: b mozketa

⚠ Indar axialak N letrarekin adierazten dira

⚠ Zeinua (+) bada → trakzioa

⚠ Zeinua (–) bada → Konpresioa

4. GAIA: Tentsio eta deformazioak



* Y puntuak eremu elastikoa eta plastikoa bereizten ditu (isurpen-muga)

* σ_Y: isurpen-tentsioa

- Karga: P (=N)
- Luzapena: δ
- Tentsioa: $\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$ edo $\sigma = \frac{P}{A_0}$ → hasierako sekzioa / azalera (zilindroa bada: $A_0 = \frac{\pi D_0^2}{4}$)
- Deformazioa: $\boxed{\varepsilon = \frac{\delta}{L}}$ edo $\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$

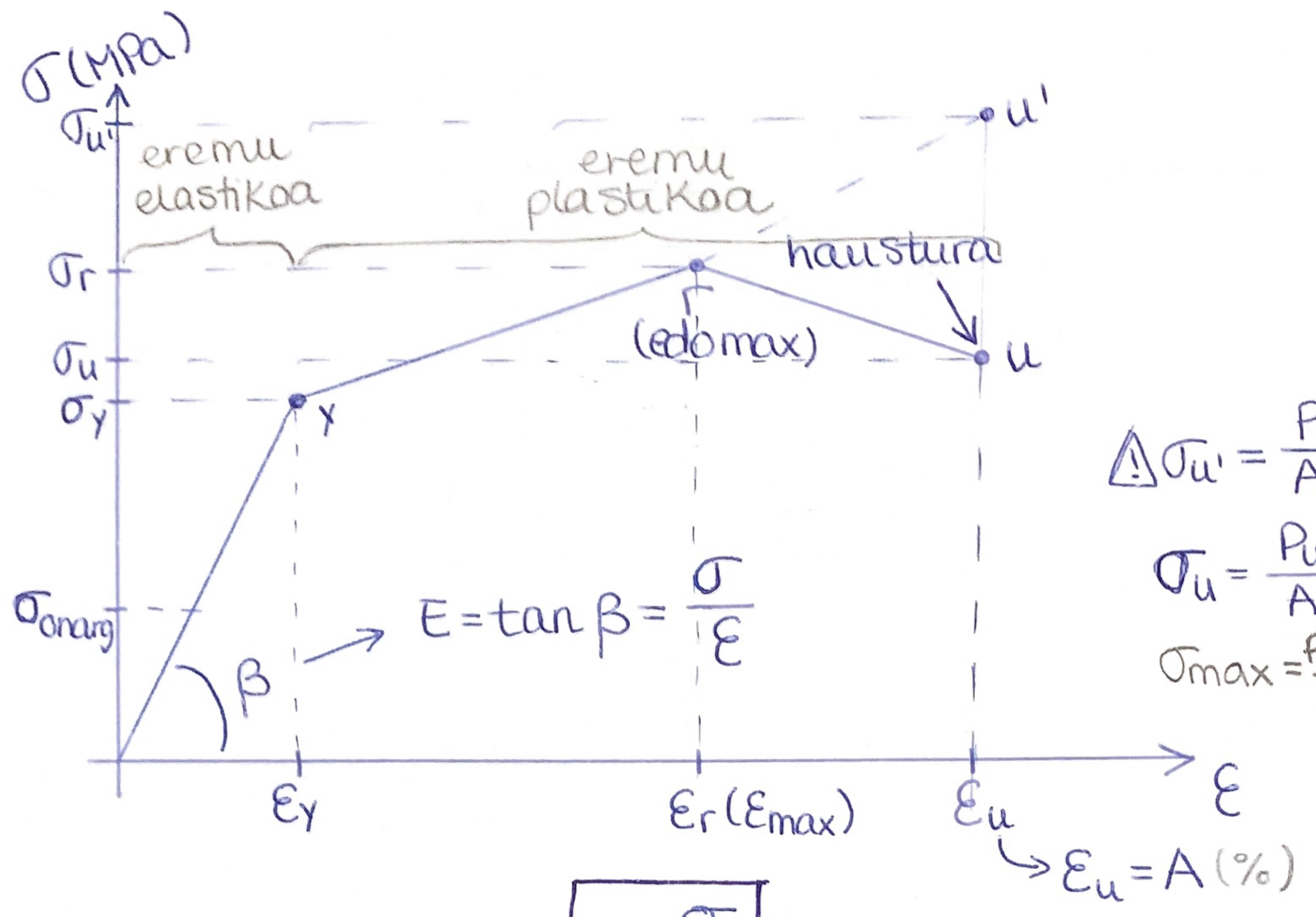
Hooken legea

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$$

- E: Young-en modulua

⚠ Hooken legea bakarrik eremu elastikoan aplikatu daiteke.

Tentsio-deformazio diagrama hurbildua



⚠ $\sigma_{u'} = \frac{P_u}{A_1}$ → te lo suelen dar en menpe de A_0

$\sigma_u = \frac{P_u}{A_0}$

$\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{A_0}$; $\sigma_y = \frac{P_y}{A_0}$

- Young-en modulua: $\boxed{E = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y}}$

Haustura-motak:

- Hauskorrak: eremu plastiko txikia (edo eremu plastikorik ez)
- Harikorrak: eremu plastiko handia

⚠ Material hauskorrek konpresioan askoz erresistentzia handiagoa dute trakzioan baino.

Segurtasun koefizientea

- Material harikorrak:

$$\boxed{\sigma_{onarg} = \frac{\sigma_y}{n}}$$

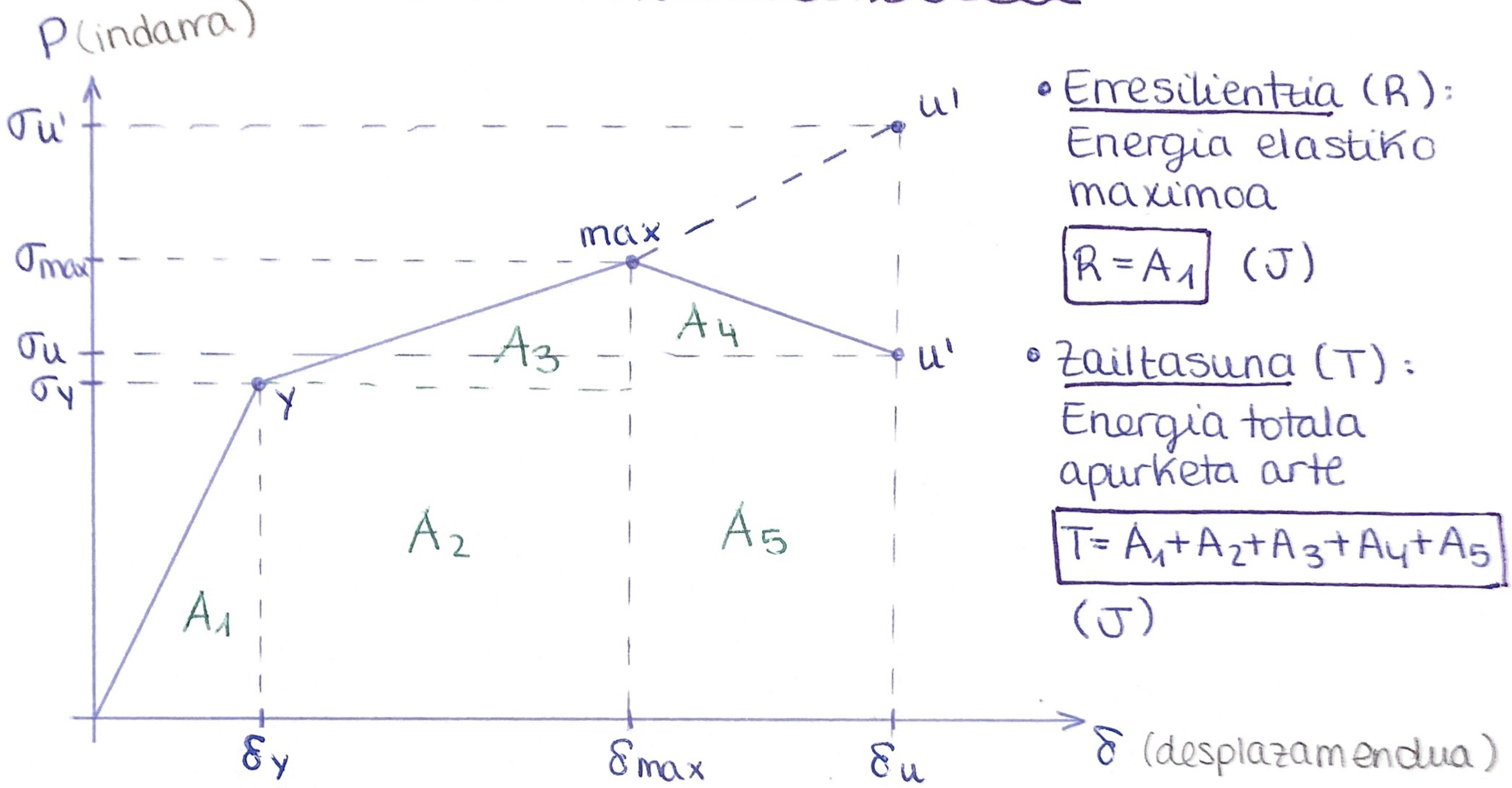
- Material hauskorrak:

$$\boxed{\sigma_{onarg} = \frac{\sigma_r}{n}}$$

Deformazio plastikoak

- Y puntuan: $\boxed{\varepsilon_p = 0}$
- Puntu maximoan: $\boxed{\varepsilon_p(max) = \varepsilon_{max} - \varepsilon_y}$
- U puntuan: $\boxed{\varepsilon_p(u) = \varepsilon_u - \varepsilon_y}$

Indar-desplazamendu diagrama sinplifikatua



- Erresilientzia (R): Energia elastiko maximoa

$\boxed{R = A_1}$ (J)

- Zailtasuna (T): Energia totala apurketa arte

$\boxed{T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5}$ (J)

E, G eta ν konstante elastikoen arteko erlazioa

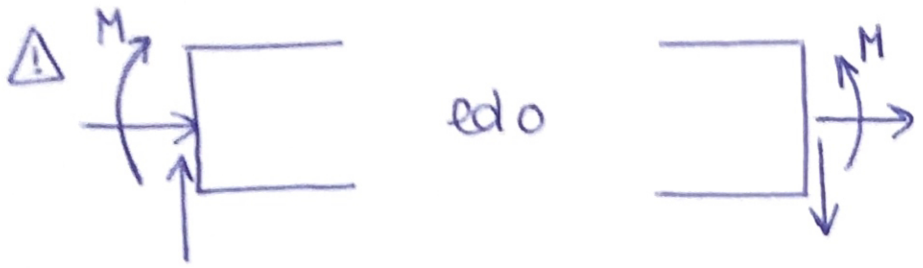
$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

- E: Young-en modulua
- G: elastikotasun-modulua ebakiduran

5. GAIA

Jarraitu behareko pausuak

1) Egitura askatu → erreakzioak aztertu (bakarrik beharrezkoa izanez gero)



2) Solido askearen diagrama + barne indarren diagrama (edo N diagrama), Konpresioak (→□←) eta trakzioak (←□→) adierazi

3) Deformazioak
Zatika deformazioak aztertu:

$$\boxed{\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}} \rightarrow \delta = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$$

4) Desplazamenduak
Puntu bakoitzaren desplazamenduak kalkulatu (gehiketak/kenketak eginez)

5) Desplazamendu diagrama
Desplazamendu guztiak diagrama batean adierazi

Eskatzen badituzte:

Tentsio normal maximoa (σ_{max})

$$\sigma_{onarg} = \boxed{\sigma_{max} = \frac{N}{A}}$$ (Unitatea: MPa)
↳ normalean

Masa-zentruak eta inertzia-momentuak

* Masa zentruaren positizioa

$$\boxed{x_G = \frac{\Sigma x_i \cdot A_i}{\Sigma A_i}} \qquad \boxed{y_G = \frac{\Sigma y_i \cdot A_i}{\Sigma A_i}}$$

* Inertzia-momentua

- GZ-n badago

  Tauletan begiratu

- Ez badago GZ-n

  Steiner:

$$\boxed{I_x = I_{x'} + A \cdot y_G^2} \qquad \boxed{I_y = I_{y'} + A \cdot x_G^2}$$

6. GAIA: Makurdura

* Jarraitu beharreko pausuak:

1) Egitura askatu → erreakzioak aztertu

2) Solido askearen diagrama

3) Eremuak identifikatu eta eremuka barne-indarrak aztertu (V, N, M) (hau bakarrik egin behar da sekzio kritikoa atera behar bada, sekzio jakin bat markatuta ematen badizute, zuzenean sekzio horretan barne-indarrak kalkulatu eta irudikatu)

4) VM diagrama egin (bakarrik eremuka barne-indarrak aztertu badituzu)

5) Sekzio kritikoa identifikatu (M maximoa den puntua) eta sekzio kritikoan barne-indarrak adierazi eta irudikatu

sekzioa

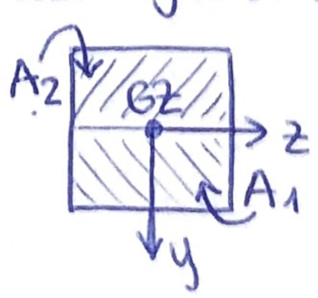
6) z ardatzarekiko inertzia-momentua (I_z) kalkulatu (I_x bezala kalkulatzen da) I_z kalkulatzeko, lehenengoz sekzioaren GZ-aren kokapena kalkulatu behar da, eta puntu horretan yz ardatzaren jatorria jarri)

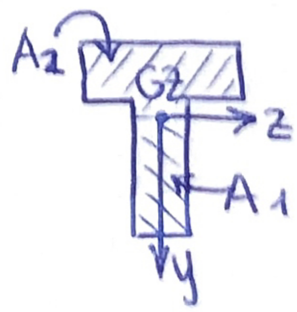
7) Momentu estatikoa (Q) kalkulatu.

Q kalkulatzeko jarraitu beharreko pausuak:

1) Sekzioaren grabitate-zentruaren kokapena aurkitu, eta GZ puntua zy ardatzen jatorri bezala adierazi.

Adb:

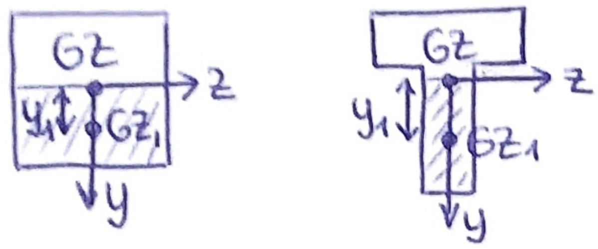




Horrela, sekzioa GZ-ren bidez bi zatitan banatuta geratuko da.

2) Aukeratu zati bat (A_1 edo A_2) eta zati horren azalera eta Gz-ren kokapena kalkulatu. Aukeratutako zatiaren Gz-aren eta sekzio osoaren Gz-aren arteko distantzia kalkulatu (y_1).

Adb.



3) Q kalkulatu formula honen bidez: $\boxed{Q = A_1 \cdot y_1}$

8) Sekzio-kritikoan tentsioak (σ_x, τ_{xy}) kalkulatu eta sekzio-kritikoaren barne-indarrak eta tentsioak irudikatu.

* Tentsio normala (σ_x) (MPa)

- N-k sortutako tentsio normala

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N}{A}}$$

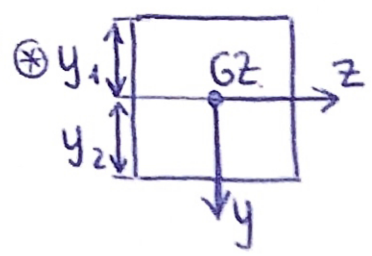
- N: sekzio kritikoaren indar axiala (trakzioa / konpresioa)
- A: sekzioaren azalera

- M-k sortutako tentsio normala

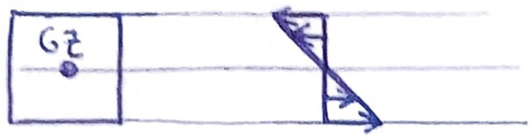
$$\boxed{\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I_z}}$$

- M: sekzio kritikoaren makurdura-momentua
- I_z: z ardatzarekiko inertzia momentua
- y: Gz-tik (zy ardatzaren jatorritik) sekzioaren goiko edo beheko partera dagoen distantzia.

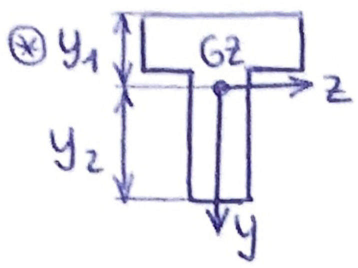
Adb: ⊛



Kasu honetan, $y=y_1=y_2$ dira; beraz, σ_x berdina da sekzioaren goiko eta beheko aurpegietan:



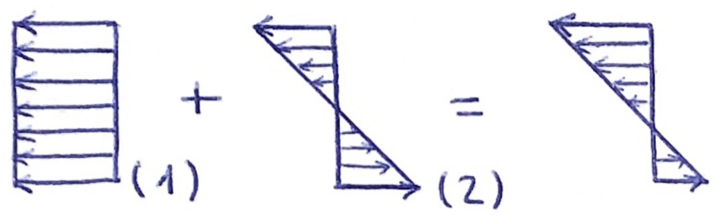
⊛



Kasu honetan, $y_1 \neq y_2$ dira; beraz, Kasu honetan, $y_1 < y_2$ denez, sekzioaren goiko aurpegian σ_x txikiagoa izango da beheko aurpegian baino:

⊛ KONTUZ! y_1-en zeinua (–) da, y ardatzaren noranzko negatiboan dagoelako.

⚠ M eta N daudenean, azken emaitzan bi tentsio normalak grafikoki batu behar dira:



(1) N-K eragindako σ_x

(2) M-K eragindako σ_x

* Tentsio ebakitzailea (τ_{xy}) (MPa)

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{V \cdot Q}{b \cdot I_z}}$$

- V: sekzio kritikoaren indar-ebakitzailea
- Q: momentu estatikoa
- b: sekzioaren zabalera (zirkunferentzia bat bada → $b=2r$)

⚠ Tentsio ebakitzaileak bakarrik indar ebakitzailea dagoenean agertzen da.

7. GAIA: Bihurdura

* Tentsio-ebakitzaile maximoa (τ_{max})

- Ardatz barne-beteak (erradio bakarra: r)

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T \cdot \overset{\text{maximoa}}{r}}{I_p}} \quad (MPa)$$

- T: bihurdura-momentua
- r: ardatzaren erradioa
- Ip: inertzia-momentu polarra: $\boxed{I_p = \frac{\pi r^4}{2}}$ (mm^4)

- Ardatz barne-hutsak (bi erradio: r_1 eta r_2)

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T \cdot r_2}{I_p}}$$

- r_2: ardatzaren kanpo-erradioa
- $\boxed{I_p = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4)}$
- r_1: ardatzaren barne-erradioa

* Angelua (φ)

$$\boxed{\varphi = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_p}} \quad (rad)$$

- L: ardatzaren luzera
- G: elastikotasun-modulua

* Potentzia (P)

$\boxed{P = T \cdot \omega}$ (W)

- ω: abiadura angeluarra (rad/s)
  - ↳ f ematen badizute: $\boxed{\omega = 2\pi f}$
    - ↳ maiztasuna (Hz)
  - ↳ N ematen badizute: $\boxed{\omega = N \cdot \frac{2\pi}{60}}$
    - ↳ biraketa abiadura (bira/min edo rpm)

8. GAIA: Gilbordura

* Karga Kritikoa (P_c)

$$\boxed{P_c = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_G^2}} \quad (N)$$

- I_{min}: sekzioaren inertzia-momentu txikiena (I_z eta I_y kalkulatu eta txikiena aukeratu)
- L_G: gilbordura luzera → $\boxed{L_G = C \cdot L}$ zutabearen luzera

* Zutabearen berma-baldintzak

1) 

edo

$\boxed{C = 1} \rightarrow \boxed{L_G = L}$

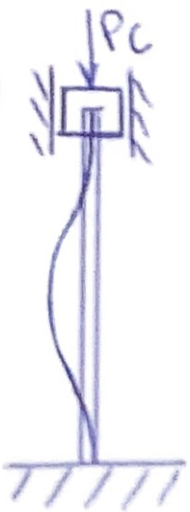
2) 

$\boxed{C = 2} \rightarrow \boxed{L_G = 2L}$

3) 

edo

$\boxed{C = \frac{1}{\sqrt{2}}} \rightarrow \boxed{L_G = \frac{L}{\sqrt{2}}}$

4) 

$\boxed{c=0,5} \longrightarrow \boxed{L_G=\frac{L}{2}}$

* Segurtasun-Koefizientea (n)

$$\boxed{n=\frac{P_c}{N}}$$

- N: Konpresio-indarra