TEORÍA VIBRACIONES.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. (TODOS LOS CASOS)

1GDL

1) MOVIMIENTO DE VIBRACIONES LIBRE

Ec. del movimiento: $\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0}$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t)$ = provoca la vib.

- Si no tenemos amortiguación el término $c\dot{x}$ desaparece.
- Pasos → Aislamos el sistema. Ecuación Diferencial del movimiento. Estudio dinámico.

2) VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS. (caso esp. de vib. lib. amort)

- Ecuación → $\boxed{m\ddot{x} + Kx = 0}$
- Solución → $x = A\cos wt + B\operatorname{sen} wt$ } expresiones
  $x = X\cos(wt - \theta)$ } equivalentes.
- Las constantes las obtengo a la hora de aplicar las condiciones iniciales $(x_0, \dot{x}_0)$
- w = frecuencia natural $= \sqrt{K/m}$.

3) VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

$w_D = w\sqrt{1-\xi^2}$

- Ecuación → $\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0}$
- Amortiguamiento crítico $= \bar{c} = 2mw$ — de la ec. dif.
- Amortiguamiento relativo $= \xi = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{c}{2mw}$ — no es del amort es de la ec diferencial.
- Si $\xi = 0$ → tenemos vib. libre no amortiguada.
- Amortiguamiento subcrítico $(c < \bar{c} \rightarrow \xi < 1)$

Frec. de vibración amortiguada $= w_D = w\sqrt{1-\xi^2}$

Solución → $\begin{cases} x = e^{-\xi wt}(A\cos w_Dt + B\operatorname{sen} w_Dt) \quad (*) \\ x = e^{-\xi wt}\, X\cos(w_Dt - \theta) \end{cases}$

Las constantes las obtengo sust. las condiciones iniciales $(x_0, \dot{x}_0)$ en la solución x y en su derivada.

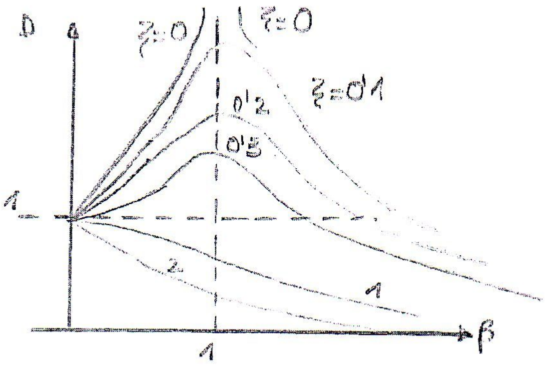
→ Proviene de integrar 2 veces la ec. diferencial

4) VIBRACIÓN FORZADA ARMÓNICA.

- Ecuación: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \cos \bar{\omega} t$
- Solución: armónica → existen otros casos, excitación...

$$x = \underbrace{e^{-\xi \omega t}\left(A \cos \omega_D t + B \,\mathrm{sen}\, \omega_D t\right)}_{\text{solución de la ec. homogénea. componente transitoria de la respuesta } (x_h)} + \underbrace{\frac{f_0/K}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\bar{\omega} t - \varphi)}_{\text{solución particular parte estacionaria de la respuesta } x_p}$$

- $\beta = \dfrac{\bar{\omega}}{\omega} = \dfrac{\text{frecuencia de la excitación}}{\text{frecuencia natural del sistema}}$.
- $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) =$ desfase entre la solución particular y la excitación
- $\theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$
- Desplazamiento estático $= X_{est} = f_0/K$
- Factor de amplificación dinámica $= D = 1/\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$



Para obtener el máximo de la curva de amplificación dinámica hacemos $\dfrac{\partial D}{\partial \beta} = 0$

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Función impulso.

$I = F\Delta t$ = fuerza de gran magnitud que actúa durante un tiempo Δt muy corto $(I = \int F dt)$

$I = m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$ ($\dot{x}_1, \dot{x}_2$ = vel antes y desp. de aplicar I)

5) VIBRACIÓN FORZADA, BAJO APLICACIÓN FUERZA IMPULSO $F = I\delta$

- Ecuación $\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = I\delta}$
- δ = función delta de dirac = impulso unitario (fuerza cuyo impulso vale la unidad).
- $\int_{0^-}^{0^+} F(t)\,dt = I = m\left[\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-)\right] \rightarrow \begin{cases} \dot{x}(0^+) = I/m \\ x(0^+) = 0 \end{cases}$
- $x(t)$ se obtiene aplicando a la solución de vibraciones libres, las condiciones iniciales después de aplicar I

a) Respuesta a la función impulso

aplicada en $t=0$
para otro caso $t = a$.
m = es la que acompaña en la fórmula no la masa

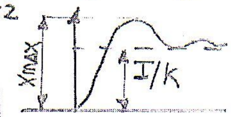
(*) $\boxed{x = \dfrac{I e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \operatorname{sen} \omega_D t}$

- Si la fuerza aplicada es el impulso unitario, la respuesta es $h(t) \longrightarrow x = I h(t)$.
- Si la función impulso se aplica en $t=a \longrightarrow x(t) = I h(t-a)$
- La f. escalón es la derivada respecto del tiempo de la f. rampa y la integral de la f. impulso

b) Respuesta a la función escalón

$x(t) = \int_0^t \dfrac{I e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \operatorname{sen} \omega_D t \rightarrow x(t) = \dfrac{I}{K}\left[1 - \dfrac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_D t - \theta)\right]$

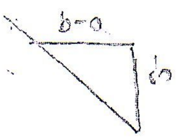
(*) $\boxed{x(t) = \dfrac{I}{K}\left[1 - e^{-\xi\omega t}\left(\cos \omega_D t + \dfrac{\xi\omega}{\omega_D} \operatorname{sen} \omega_D t\right)\right]}$



c) Respuesta a la función rampa:

(*) $\boxed{x(t) = \dfrac{I}{K} t - \dfrac{I}{K\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t} \operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \operatorname{sen} 2\theta\right]}$

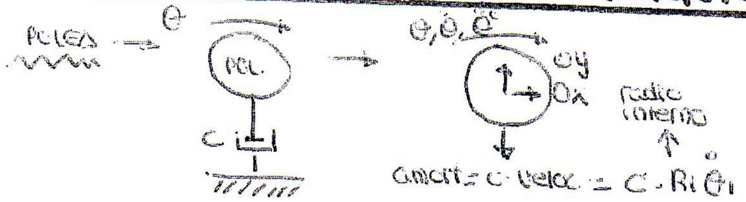
ojo



$x_3 = \dfrac{I}{K} t - \dfrac{I}{K\omega_D} \ldots = \dfrac{-b0/(b-a)}{K}(t-a) - \ldots$

c.i. nulas

CASOS PROBLEMAS INTERESANTES



Derivadas:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen} \rightarrow \text{cos} \\ \text{cos} \rightarrow -\text{sen} \end{array}}$$

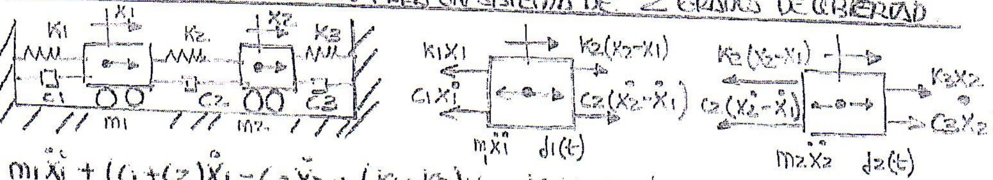
$$X(t) = A\cos wt + B\,\text{sen}\,wt$$

$$\ddot{X}(t) = -Aw\,\text{sen}\,wt + Bw\cos wt$$

SISTEMAS CON N GRADOS DE LIBERTAD.

- VIBRACIONES LIBRES.-

1) Ecuaciones del movimiento para un sistema de 2 grados de libertad



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (K_1+K_2)x_1 - K_2x_2 = f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2+c_3)\dot{x}_2 - K_2x_1 + (K_2+K_3)x_2 = f_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 \\ -c_2 & (c_2+c_3) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1+K_2) & -K_2 \\ -K_2 & (K_2+K_3) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[m]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = f(t)}$$

$[m]$ = mat. masa o de inercia.
$[C]$ = mat. amortiguamiento.
$[K]$ = mat. rigidez.
$\{x\}$ = resp. del sistema.
$\{f(t)\}$ = vector de fuerzas.

2) Vibraciones libres no amortiguadas

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

mov. armónico síncrono
↓
2 masas vibran en fase con la misma frecuencia.

a) Frecuencias naturales y modos de vibración

Solución: $x_1(t) = X_1\cos\omega t \;\wedge\; x_2(t) = X_2\cos\omega t$ (X_1 y X_2 amplit).

$$\begin{bmatrix} K_{11}-m_{11}\omega^2 & K_{12}-m_{12}\omega^2 \\ K_{12}-m_{12}\omega^2 & K_{22}-m_{22}\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Ecuación: } A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0.$$

Saco ω_1^2 y ω_2^2

ω_1 y ω_2 → frec. naturales del sistema.

modos de vibración

$$\omega_1 \rightarrow \frac{X_1^1}{X_2^1} = -\frac{K_{12}-\omega_1^2 m_{12}}{K_{11}-\omega_1^2 m_{11}} = -\frac{K_{22}-\omega_1^2 m_{22}}{K_{12}-\omega_1^2 m_{12}} \rightarrow (X_1^1, X_2^1)$$

$$\omega_2 \rightarrow \frac{X_1^2}{X_2^2} = -\frac{K_{12}-\omega_2^2 m_{12}}{K_{11}-\omega_2^2 m_{11}} = -\frac{K_{22}-\omega_2^2 m_{22}}{K_{12}-\omega_2^2 m_{12}} \rightarrow (X_1^2, X_2^2)$$

b) Solución general para las vib. libres no amortiguadas

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{st} \rightarrow \begin{bmatrix} K_{11}+m_{11}s^2 & K_{12}+m_{12}s^2 \\ K_{12}+m_{12}s^2 & K_{22}+m_{22}s^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ecuac. bicuadrada $|\det| \rightarrow as^4 + bs^2 + c = 0$

$$\boxed{s^2 = -\omega^2} \rightarrow \begin{cases} s_1 = i\omega_1 \\ s_2 = -i\omega_1 \\ s_3 = i\omega_2 \\ s_4 = -i\omega_2 \end{cases}$$

· Solución general

$$\{x(t)\} = C_1 \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} e^{i\omega_1 t} + C_2 \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} e^{-i\omega_1 t} + C_3 \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} e^{i\omega_2 t} + C_4 \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} e^{-i\omega_2 t}$$

si utilizo las fórmulas de Euler $\Rightarrow$ $e^{i\omega_1 t} = \cos\omega_1 t + i\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t$

$e^{-i\omega_1 t} = \cos\omega_1 t - i\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t$

$$\{x(t)\} = (C_1+C_2) \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} \cos\omega_1 t + i(C_1-C_2) \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} \mathrm{sen}\,\omega_1 t +$$
$$+ (C_3+C_4) \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \cos\omega_2 t + i(C_3-C_4) \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \mathrm{sen}\,\omega_2 t$$

siendo $A = C_1+C_2$; $B = C_1-C_2$; $C = C_3+C_4$, $D = C_3-C_4$.
que det. las constantes mediante las condiciones iniciales

$$\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix}$$

c) Coordenadas modales o naturales. Modos vibración $\rightarrow$ $[X] = \begin{bmatrix} X_1^1 & X_1^2 \\ X_2^1 & X_2^2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} [X]^T[m][X] = [m_j^m] = \text{matriz de masa modal} \\ [X]^T[K][X] = [K_j^m] = \text{matriz de rigidez modal} \end{cases}$$

$[X]^T[m][X] = [I] \wedge [X]^T[K][X] = [\omega_j^2] \rightarrow$ modos normalizados.

Cambio de coordenadas: $\{x\} = [X]\{y\}$

Sustituyendo en la ecuación diferencial: $[m][X]\{\ddot{y}\} + [K][X]\{y\} = \{0\}$

· $[X]^T[m][X]\{\ddot{y}\} + [X]^T[K][X]\{y\} = \{0\}$.

· $[m_j^m]\{\ddot{y}\} + [K_j^m]\{y\} = \{0\} \Rightarrow \begin{bmatrix} m_1^m & 0 \\ 0 & m_2^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1^m & 0 \\ 0 & K_2^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{cases} m_1^m \ddot{y}_1 + K_1^m y_1 = 0 \\ m_2^m \ddot{y}_2 + K_2^m y_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{normalizada}]{\text{si mat. de modos está}} \begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = 0 \end{cases} \text{ ecuac. desacop.}$$

· $\omega_j = \sqrt{K_j^m / m_j^m}$ $\{y(t)\} \rightarrow$ coordenadas modales.

· Luego a transformar las cond. iniciales a coordenadas naturales

$$\begin{rcases} \{x_0\} = [X]\{y_0\} \\ \{\dot{x}_0\} = [X]\{\dot{y}_0\} \end{rcases} \Rightarrow [X]^T[m] = [X]^T[m][X][y_0]$$

Para pasar de modal a sis. normal $(\{x\} = [X]\{y\})$

3) VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11}s^2 + C_{11}s + K_{11} & \dots \\ m_{12}s^2 + C_{12}s + K_{12} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{resultado ecuación polinómica } As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0$$

· Amortiguamiento proporcional:

$[X]^T[m][X]\{\ddot{y}\} + [X]^T[C][X]\{\dot{y}\} + [X]^T[K][X]\{y\} = \{0\}$.

$[I]\{\ddot{y}\} + [X]^T[C][X]\{\dot{y}\} + [\omega_j^2]\{y\} = 0$.

$[C] = \alpha[K] + \beta[m] \rightarrow [X]^T[C][X] = \beta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \alpha\omega_i^2 + \beta$

- VIBRACIONES FORZADAS -

1) VIBRACIONES NO AMORTIGUADAS. EXCITACIÓN ARMÓNICA.

Prescindo del efecto de las condiciones iniciales. Si $\nexists$ amort → No hay transitorio.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega}t} \xrightarrow{\text{sol. partic.}} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_{11}\bar{\omega}^2 & k_{12} - m_{12}\bar{\omega}^2 \\ k_{12} - m_{12}\bar{\omega}^2 & k_{22} - m_{22}\bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \rightarrow$$ Por Cramer obtengo → X_1 y X_2 que son las amplitudes

Det denominador → coincide con el det del q resultan las frec. naturales que se anulan en el caso de que $\bar{\omega}$ coincida con alg. de las frec nat ω_1 y ω_2.

2) VIBRACIONES AMORTIGUADAS EXCITACIÓN ARMÓNICA

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega}t} \qquad X_1(\bar{\omega}); X_2(\bar{\omega})$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} + i c_{11}\bar{\omega} - m_{11}\bar{\omega}^2 & \dots \\ k_{12} + i c_{12}\bar{\omega} - m_{12}\bar{\omega}^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \rightarrow$$ CRAMER → componentes del vect. de amplitudes

$$X_1(\bar{\omega}) = A(\bar{\omega}) + i B(\bar{\omega}) = \sqrt{A(\bar{\omega})^2 + B(\bar{\omega})^2}\, e^{i\varphi_1(\bar{\omega})} \qquad \varphi_1(\bar{\omega}) = \operatorname{arctg} \frac{B(\bar{\omega})}{A(\bar{\omega})}$$

$$X_2(\bar{\omega}) = C(\bar{\omega}) + i D(\bar{\omega}) = \text{- - - - - - -} \qquad \varphi_2(\bar{\omega})$$

solución → $$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} |X_1| e^{i\varphi_1} \\ |X_2| e^{i\varphi_2} \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega}t} = \begin{Bmatrix} |X_1| e^{i(\bar{\omega}t + \varphi_1)} \\ |X_2| e^{i(\bar{\omega}t + \varphi_2)} \end{Bmatrix}$$

- Modo de calcular las amplitudes X_j

$$\{X_j\} = [k_{ij} + i c_{ij}\bar{\omega} - m_{ij}\bar{\omega}^2]^{-1} \{f_j\}$$

$$[h_{ij}(\bar{\omega})] = [k_{ij} + i c_{ij}\bar{\omega} - m_{ij}\bar{\omega}^2]^{-1}$$

a) En el caso de amort. proporcional →

- $[m_j^m]\{\ddot{y}_j\} + [c_j^m]\{\dot{y}_j\} + [k_j^m]\{y_j\} = \{f_j^m\} e^{i\bar{\omega}t}$
- $c_j^m = \{X_j\}^T [C] \{X_j\}$
- $f_j^m = \{X_j\}^T \{f\} = X_1^j f_1 + X_2^j f_2$
- $m_j^m \ddot{y}_j + c_j^m \dot{y}_j + k_j^m y_j = f_j^m e^{i\bar{\omega}t}$

respuesta → $y_j(t) = H_j^m(\bar{\omega})\, f_j^m e^{i\bar{\omega}t}$

$$H_j^m(\bar{\omega}) = \frac{1}{k_j^m} \cdot \frac{1}{1 - \beta_j^2 + i 2 \xi_j^m \beta_j} \rightarrow \beta_j = \frac{\bar{\omega}}{\omega_j};\ \xi_j^m = \frac{c_j^m}{c_{c_j}^m} = \frac{c_j^m}{2 m_j^m \omega_j}$$

- respuesta en coord modales: $\{y_j(t)\} = [H_j^m(\bar{\omega})]\{f_j^m\} e^{i\bar{\omega}t} = [H_j^m(\bar{\omega})]\{f_j^m\} e^{i\bar{\omega}t}$
- resp. en coord reales:

$$\{X_j\}^T = [X]\{y_j(t)\} = [X][H_j^m(\bar{\omega})]\{f_j^m\} e^{i\bar{\omega}t} = \underbrace{[X][H_j^m(\bar{\omega})][X]^T}_{h_{ij}(\bar{\omega})} \{f_j\} e^{i\bar{\omega}t}$$

3) RESP. ANTE UNA EXCITACIÓN DE TIPO GENERAL

$$[X]^T[m][X]\{\ddot{y}\} + [X]^T[C][X]\{\dot{y}\} + [X]^T[K][X]\{y\} = [X]^T\{f(t)\}.$$

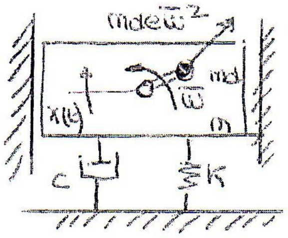
$$\begin{bmatrix} m_1^m & 0 \\ 0 & m_2^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1^m & 0 \\ 0 & c_2^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^m & 0 \\ 0 & k_2^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^m(t) \\ f_2^m(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{y}\} + \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 \end{bmatrix} \{\dot{y}\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \{y\} = \begin{Bmatrix} f_1^m(t) \\ f_2^m(t) \end{Bmatrix}$$ Modos normaliz. resp. de la matriz de masa.

ABSORSORES: aplicación práctica

a) DESEQUILIBRIO EN MÁQUINAS. FACTOR DE AMPLIFICACIÓN POR DESEQUILIBRIO.

Máquina rotativa con desequilibrio: e = excent. (radio) m_d = masa desequil.

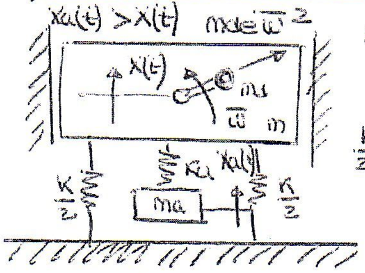


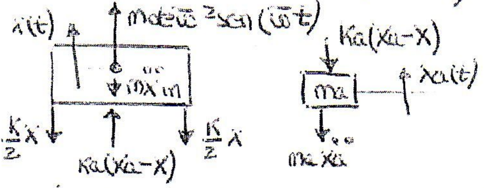
- Fuerza desequilibradora → módulo → $f_0 = m_d e \bar{\omega}^2$
- Comp. vertical: $f_V(t) = m_d e \bar{\omega}^2 \operatorname{sen}(\bar{\omega} t)$
- Resp. estacionaria: $X(t) = \dfrac{m_d e \bar{\omega}^2}{K} D \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \varphi)$

$$X_i(t) = e \frac{m_d}{m} \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\xi\beta)^2}} \operatorname{sen}\left(\bar{\omega} t - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)\right)$$

- factor de amplif. por desequilibrio ↙: D_d.
- $D_{d,\text{máximo}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\xi\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow \beta_{d,\max} = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}$
- Para $\xi < 0'1$ (amort. peq.) $\rightarrow D_{d,\max} = \dfrac{1}{2\xi} \longrightarrow \beta_{d,\max} \simeq 1$
- Amplitud movimiento: $X_d = e \dfrac{m_d}{m} D_e = e \dfrac{m_d}{m} \dfrac{\beta^2}{(1-\beta^2)}$

b) ADICIÓN DE UN ABSORSOR. subsistema masa muelle (m_a, K_a)





$$\begin{cases} m\ddot{x} + Kx + K_a x - K_a x_a = m_d e \bar{\omega}^2 \operatorname{sen}(\bar{\omega} t) \\ m_a \ddot{x}_a + K_a x_a - K_a x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K+K_a) & -K_a \\ -K_a & K_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_d e \bar{\omega}^2 \operatorname{sen}(\bar{\omega} t) \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{amplitudes del movimiento.}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m_d e \bar{\omega}^2 & -K_a \\ 0 & K_a - m_a \bar{\omega}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (K+K_a) - m\bar{\omega}^2 & -K_a \\ -K_a & K_a - m_a \bar{\omega}^2 \end{vmatrix}} = \frac{m_d e \bar{\omega}^2 (K_a - m_a \bar{\omega}^2)}{|\,|}$$

$$X_a = \frac{\begin{vmatrix} (K+K_a) - m\bar{\omega}^2 & m_d e \bar{\omega}^2 \\ -K_a & 0 \end{vmatrix}}{|\,|} = \frac{m_d e \bar{\omega}^2 K_a}{|\,|}$$

X se anula para: $m_d e \bar{\omega}^2 (K_a - m_a \bar{\omega}^2) = 0$

$$\boxed{\bar{\omega} = \sqrt{K_a / m_a}}$$

- Absorsor sintonizado $\rightarrow \omega_a = \sqrt{K_a/m_a}$
- Amplitud del movimiento del absorsor $\rightarrow |X_a| = \left|\dfrac{m_d e \bar{\omega}^2}{-K_a}\right| = \dfrac{m_d e}{m_a}$.
- $X_a = \dfrac{f_0}{-K_a} \rightarrow f_0 = m_d e \bar{\omega}^2 \rightarrow f_0 = -K_a X_a$.

↓ del denom de X, X_a.

- $(K + K_a - m\bar{\omega}^2)(K_a - m_a \bar{\omega}^2) - K_a^2 = 0 \longrightarrow$ obtengo las frecuencias ω_1, ω_2