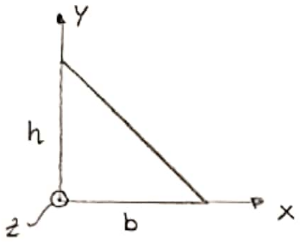
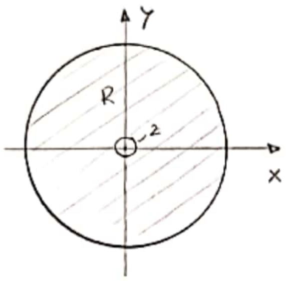
4. MOMENTOS DE INERCIA



$I_x = \frac{1}{6} M \cdot h^2$

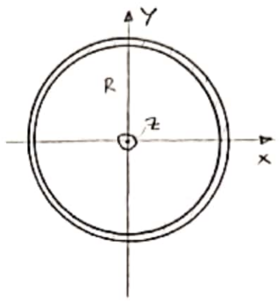
$I_y = \frac{1}{6} M b^2$



$I_x = \frac{1}{4} MR^2$

$I_y = \frac{1}{4} MR^2$

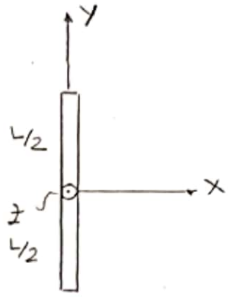
$I_z = \frac{1}{2} MR^2$



$I_x = \frac{1}{2} MR^2$

$I_y = \frac{1}{2} MR^2$

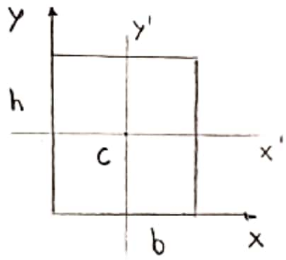
$I_z = MR^2$



$I_x = \frac{1}{12} ML^2$

$I_y = 0$

$I_z = \frac{1}{12} ML^2$



$I_x = \frac{1}{3} M \cdot h^2$

$I_y = \frac{1}{3} M b^2$

$I_{x'} = \frac{1}{12} M h^2$

$I_{y'} = \frac{1}{12} M b^2$

- STEINER: $\boxed{I = I_G + M d^2}$

  - $I_O = I_G + M d_O^2$
  - $I_e = I_G + M d_e^2$
  - $I_\pi = I_G + M d_\pi^2$
  - $C_{\pi\lambda} = C_G + M d_\pi \cdot d_\lambda$

  ·DOBLE: $I_2 = I_1 - M d_{1G}^2 + M d_{G2}^2$

- TENSOR PLANARIO

$$\boxed{[J_O] = \begin{pmatrix} I_{yz} & C_z & C_y \\ C_z & I_{xz} & C_x \\ C_y & C_x & I_{xy} \end{pmatrix}}$$

$C_{\pi\lambda} = \{u_\pi\}^T [J_O] \{v_\lambda\}$

- TENSOR AXIL:

$$\boxed{[I_O] = \begin{pmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z \end{pmatrix}}$$

$I_e = \{u_e\}^T [I_O] \{u_e\}$

DIRECCIONES PRINCIPALES: $\boxed{\tan 2\theta = \frac{2C_z}{I_y - I_x}}$ $\boxed{I_z = I_x + I_y}$

11 DINAMICA CLASICA

- LAGRANGE:

$$\boxed{L = T - V}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Q = 0 \\ Q = P \end{array}\right. \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} - \frac{\delta L}{\delta \varphi} = 0}$$

- $T = T_{TRAS} + T_{ROT}$

$$T_{TRAS} = \frac{1}{2} m \vec{v}_G^{\,2}$$

$$T_{ROT} = \frac{1}{2} \{\vec{\omega}\}^T [I_G] \{\vec{\omega}\}$$

· [EJES PRINCIPALES]

$$T_{ROT} = \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$$

- $V = V_{GRAB} + V_{MALG}$

$$V_{GRAB} = m g h$$

$$V_{MALG} = \frac{1}{2} k x^2$$

- COORDENADAS GENERALIZADAS:

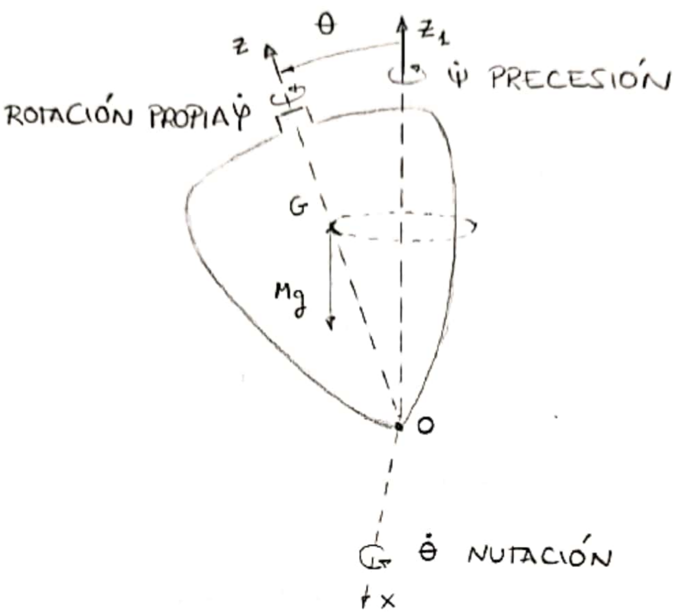
$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi}}{d\varphi}$$

- MEKANIKA ANALITIKA

$$\vec{N}_o = \frac{d\vec{H}_o}{dt} + \vec{v}_o \wedge \vec{P} = \left.\frac{d\vec{H}_o}{dt}\right|_M + \vec{\omega}_{XYZ} \wedge \vec{H}_o \quad : \text{MOMENTO}$$

15. DINAMICA DEL SOLIDO CON PUNTO FIJO

- GIROSCOPIOS



· TIPOS:

1) INERCIA: PESO PASA SIEMPRE POR O

2) EULER - POINSSOT: O y G COINCIDEN // $I_x = I_y$

3) LAGRANGE: O y G EJE DE SIMETRIA

- PROCEDIMIENTOS

• 1) 2) EULER

[ECUACION]: $\vec{H_o} = \{e\}^T [I_o] \{\omega\}$ [ANGULOS]: $\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\varphi}}$

$$\boxed{\begin{aligned} H_{ox} &= I_x \omega_x = 0 = I_x \dot{\theta} \\ H_{oy} &= I_y \omega_y = H_o \sin\theta = I_y \dot{\psi} \sin\theta \\ H_{oz} &= I_z \cdot \omega_z = H_o \cos\theta = I_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin\theta \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{aligned}}$$

$\boxed{\dot{\theta} = 0 \quad \theta = kte}$ $\boxed{T = kte = \frac{1}{2}\{\omega\}^T\{H_o\}}$ $\boxed{\dot{\psi} = kte \quad \ddot{\psi} = 0}$

MOVIMIENTO ESTACIONARIO: $\omega = kte$

3) LAGRANGE

$$\boxed{L = T - V}$$

1) $\psi \to \boxed{B = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}}}$

2) $\varphi \to \boxed{A = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}}}$

3) $E \to \boxed{E = T + V}$

14. DINAMICA DEL SOLIDO CON EJE FIJO

- **ERREAKZIOAK ATERA:**

  - TMA CANTIDAD DE MOVIMIENTO: $\boxed{\sum F_{ACT} = M \cdot a_G}$

$$\left[\begin{array}{l} e_1)\ \sum R_x = M\, a_{G_x} \\ e_2)\ \sum R_y = M\, a_{G_y} \\ e_3)\ \sum R_z = M\, a_{G_z} \end{array}\right]$$

  - TMA MOVIMIENTO CINETICO: $\boxed{\vec{N_0} = \frac{d\vec{H_0}}{dt} + \cancel{\vec{V_0} \wedge \vec{P}}_{0}}$

$$\left[\vec{H_0} = \{e\}^T [I_0] \{\omega\}\right]$$

$$\left[\left.\frac{d\vec{H_0}}{dt}\right|_F = \left.\cancel{\frac{d[I_0]}{dt}}_{0}\right|_M \vec{\omega} + [I_0]\cancel{\frac{d\omega}{dt}}_{0} + \vec{\omega}_{xyz} \wedge H_0\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} e_1)\ \sum R_x \cdot d = N_{0x} \\ e_2)\ \sum R_y \cdot d = N_{0y} \\ e_3)\ \sum R_z \cdot d = N_{0z} \end{array}\right]$$

- **EKILIBRATU:**

  - EQUILIBRADO ESTATICO: $\boxed{G = 0}$

$M_{ext}(X_m, Y_m, Z_m)$

$$\left[x_G = 0 = \frac{\sum M\, x_{G_m} + M_{ext} \cdot X_m}{\sum M + M_{ext}}\right]$$

<EJES CENTRALES>

$$\left[y_G = 0 = \frac{\sum M\, y_{G_m} + M_{ext}\, Y_m}{\sum M + M_{ext}}\right]$$

· EQUILIBRADO DINAMICO: $\boxed{C_x = C_y = 0}$

$$\boxed{C_x = 0 = C_{x\,sist} + M_{ext} \cdot z_m \cdot y_m}$$

$$\boxed{C_y = 0 = C_{y\,sist} + M_{ext} \cdot z_m\, x_m}$$

<EJES PRINCIPALES>

DINAMICA DEL MOVIMIENTO PLANO

- 2 BIDE:

1) TEOREMAS DINAMICA CLASICA.

- TMA CANTIDAD DE MOVIMIENTO:
  - APLICADO SIEMPRE EN G
  - $\boxed{\Sigma F_{ext} = M a_G}$

- TMA MOMENTO ANGULAR:
  - APLICADO EN PTO FIJO o EN G
  - $\boxed{\Sigma \vec{M}_o = I_o \cdot \vec{\alpha}}$

$$\vec{N}_p = I_p \alpha + \underbrace{M \cdot \vec{PG} \wedge a_p}_{0}$$

→ BALDIN

a) $PG = 0$

b) $a_p = 0$ / PTO FIJO

c) $a_p = 0$ / $v_p = cte$

d) $PG \parallel a_p$

2) CONSERVACIÓN DE LA ENERGIA

- $\boxed{E = T + V \qquad E = E_0}$

PTO FIJO: $T = \frac{1}{2} I_o \omega^2$

NO PTO FIJO: $T = \frac{1}{2} m V_o^2 + \frac{1}{2} I_o \omega^2$

- CONSERVACIONES:

1.- Conservación del MOVIMIENTO LINEAL → NO fuerzas externas en el choque

2.- Conservación de MOMENTO ANGULAR o CINETICO → $\Sigma M_{ext} = 0$

3.- Conservación de la ENERGIA MEKANIKA → todas las F-s capaces de producir W son conservativas.

17 PERCUSIONES Y CHOQUES

1) CONSERVACIÓN DE LA ENERGIA: $\boxed{T_i + V_i = T_f + V_f}$

2) DIRECCIÓN DE LA PERCUSIÓN: $\vec{u_n} \perp \square$

· SIN ROZAMIENTO: $\vec{P} \parallel \vec{u_n}$

· CON ROZAMIENTO: $\left|\begin{array}{l} \vec{P_{Tg}} = \vec{P}\,\vec{u}_{Tg} \\ \vec{P_n} = \vec{P}\,\vec{u_n} \end{array}\right.$

//NO DESLIZAMIENTO//

$$\left[\begin{array}{l} \vec{P}\cdot\vec{u}_{Tg} \leq f\,\vec{P_n}\cdot\vec{u_n} \\ \vec{V}_{A2}\,\vec{u}_{Tg} = V_{B2}\,\vec{u}_{Tg} \end{array}\right]$$

3) DIAGRAMA PERCUSIONES

· PERCUSIONES

· ω-s (1→2)

· ϑ-s (1→2)

* [Mg y Fm NO son P_{ext}]

$$\boxed{\Sigma \vec{P}_{ext} = M(\vartheta_{G2} - \vartheta_{G1})}$$

$$\boxed{\Sigma \vec{M}_{O,P_{ext}} = \bar{I}_o(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1)}$$

4) CINÉTICA

$$\boxed{\vec{\vartheta}_A = \vec{\vartheta}_o + \vec{\omega} \wedge \vec{OA}}$$

5) CHOQUE

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{(\vartheta_{A2} - \vartheta_{B2})\,\vec{u_n}}{(\vartheta_{A1} - \vartheta_{B1})\,\vec{u_n}}}$$

PEQUEÑAS OSCILACIONES

PROCEDIMIENTO :

1) CALCULAR V (POSICIÓN CUALQUIERA)

2) DERIVAR $\frac{\delta V}{\delta q_i}$ RESPECTO A COORDENADAS DE EQ.

· CONDICIÓN DE EQ ESTABLE $\left(\frac{\delta V}{\delta q_i}\right)_{eq} = 0$

3) CALCULAR MATRIZ DE RIGIDECES EN POSICIÓN DE EQ $\Rightarrow [K] = [H]$

$$[K] = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 V}{\delta q_i^2} & \frac{\delta^2 V}{\delta q_i \delta q_j} \\ \frac{\delta^2 V}{\delta q_i \delta q_j} & \frac{\delta^2 V}{\delta q_j^2} \end{pmatrix}_{eq}$$

$$V_r = \frac{1}{2} \{q_i, q_j, \dots\}^T [K] \{q_i, q_j, \dots\}$$

POTENCIAL REDUCIDO

· CONDICION DE EQ ESTABLE : $|H| > 0 \wedge$ DIAGONAL $\oplus$

4) CALCULAR T (POSICIÓN INICIAL)

5) CALCULAR MATRIZ DE MASAS O INERCIAS

$$T = T(\dot{q}_j, \dot{q}_k) = \frac{1}{2} A \dot{q}_j^2 + \frac{1}{2} B \dot{q}_k^2 + \frac{1}{2} C \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$[M] = \begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}$$

$$T_r = \frac{1}{2} \{\dot{q}_j, \dot{q}_k, \dots\}^T [M] \{\dot{q}_j, \dot{q}_k, \dots\}$$

E. CINETICA REDUCIDA

6) ECUACIONES DE MOVIMIENTO

$$L_r = T_r - V_r$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L_r}{\delta \dot{q}} - \frac{\delta L_r}{\delta q} = 0$$

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = 0$$

$$\{q\} = \{a\} e^{-i\omega t}$$ VECTOR PROPIO

7) FRECUENCIAS NATURALES

$$([K] - [M]\omega^2) \{a\} e^{-i\omega t} = 0$$

$$\left| [K] - [M]\omega^2 \right| = 0$$

FRECUENCIAS NATURALES