11.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Es posible calcular su inversa mediante el método de eliminación gaussiana? ¿Y mediante el método de Doolittle?

b) Calcular la inversa de la matriz anterior mediante el método de eliminación gaussiana con ténica de pivotaje y escalado.

a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + F_1]{F_2 = F_2 + F_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 + 2F_2]{F_3 - 2F_2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad a_{33} = 0 \Rightarrow \text{El método de eliminación gaussiana falla.}$$

Un elemento igual a 0 en la diagonal

El método de Doolittle es equivalente al método de eliminación gaussiana, y presenta los mismos problemas que este ⇒ No es posible calcular su inversa mediante este método.

El algoritmo de eliminación gaussiana con pivotaje parcial y cambio de escala soluciona los problemas de estabilidad del algoritmo de eliminación gaussiana (o factorización compacta de Doolittle y Crout). Aún existen matrices que resultan ser problemas mal condicionados: matrices próximas a matrices singulares.

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Dada la definición:

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el cálculo de A^{-1} se puede hacer resolviendo n sistemas de ecuaciones lineales:

$$\boxed{A \cdot \underline{x}_j = \underline{e}_j \quad , \; j = 1, \ldots, n}$$

$\underline{x}_j$ = columna j de la matriz inversa

$\underline{e}_j$ = vector columna con todo 0s, excepto 1 en la fila j

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} A \cdot (\bar{x}_1 \, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n) = (\bar{e}_1 \, \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n) \\ A \cdot A^{-1} = I \end{gathered}}$$

Si usamos eliminación gaussiana para resolver los n sistemas, lo más práctico es hacerlos todos simultáneamente.

③

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \underline{x}_j = \underline{e}_j \Rightarrow \begin{array}{l|l|l} x + y + 2z = 1 & 0 & 0 \\ x + 2y + z = 0 & 1 & 0 \\ 2x + y + z = 0 & 0 & 1 \\ \quad\quad\quad\quad (1) & (2) & (3) \end{array}$$

$$\rightarrow (A \,|\, \underline{e}_1\, \underline{e}_2\, \underline{e}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}]{\substack{\text{Paso } k=1 \\ m_{21} = 1 \\ m_{31} = 2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3 = F_3 + F_2 \\ \text{Paso } k=2}]{m_{32} = -1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l|l} x + y + 2z = 1 & 0 & 0 \\ \quad\; y - z = -1 & 1 & 0 \\ \quad\quad -4z = -3 & 1 & 1 \\ \quad\quad\quad\quad (1) & (2) & (3) \end{array} \right.$$

(1) $z = \frac{3}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$

(2) $z = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$

(3) $z = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}} \Longleftarrow$$

Para el determinante $|A|$, usamos $A = L \cdot U \rightarrow |A| = \underbrace{|L|}_{1} \cdot |U| = |U|$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{|A| = |U| = -4}$$

Dada una factorización $A = LU$, hay dos métodos para obtener la matriz inversa:

① $A \cdot \underline{x}_j = \underline{e}_j \quad (j = 1, \dots, n) \longrightarrow L(\underbrace{U\underline{x}_j}_{\underline{y}_j}) = \underline{e}_j$

Si se define: $U\underline{x}_j = \underline{y}_j$, se realiza el siguiente procedimiento:

- Se resuelven los n sistemas $L\underline{y}_j = \underline{e}_j \xrightarrow{\text{SUST. PROGRESIVA}} \underline{y}_j$
- Se resuelven los n sistemas $U\underline{x}_j = \underline{y}_j \xrightarrow{\text{SUST. REGRES.}} \underline{x}_j \rightarrow A^{-1}$

② $A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$

- Se calcula U^{-1}, resolviendo los n sistemas $U\underline{x}_j = \underline{e}_j$, mediante sust. regresiva
- Se calcula L^{-1}, resolviendo los n sistemas $L\underline{x}_j = \underline{e}_j$, mediante sust. progresiva
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$

Estos dos métodos son totalmente equivalentes en cuanto a coste computacional (operativo)

En el caso particular de la factorización de Cholesky se usará siempre el segundo método:

$$\underset{\text{MÉTODO ②}}{A = L \cdot L^t \Rightarrow} A^{-1} = (L \cdot L^t)^{-1} = (L^t)^{-1} \cdot L^{-1} = (L^{-1})^t \cdot L^{-1}$$

Por tanto, en este caso sólo hay que calcular la inversa de L, y se evitan los n sistemas de sustitución regresiva del método ①. Es decir, el coste operativo del método ② es la mitad del ①.

7.- a) Comprobar mediante un método numérico si la siguiente matriz es o no definida positiva

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

2
2 1
0 -1 2

b) Haciendo uso de los resultados del apartado anterior, calcular mediante el método más adecuado la inversa de la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Previamente, se ha demostrado que A no es definida positiva, porque la factorización de Cholesky falla en el último paso, al determinar l_{44}.

b) Como B es la submatriz de A formada por las 3 primeras filas y columnas, y en ellas el método de Cholesky tuvo éxito, sabemos que B es simétrica definida positiva. Y tenemos una factorización de Cholesky:

$$A = L \cdot L^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Al ser una factorización de Cholesky, el método más adecuado es aquel con menor coste operativo, y ese es:

$$A^{-1} = (L^{-1})^t \cdot L^{-1}$$

, donde L^{-1} se calcula resolviendo los 3 sistemas de ecuaciones:

$$L \cdot \underline{x}_j = \underline{e}_j$$

mediante sustitución progresiva

$$\begin{cases} 2x & = 1 \mid 0 \mid 0 \\ 2x + y & = 0 \mid 1 \mid 0 \\ -y + 2z & = 0 \mid 0 \mid 1 \end{cases}$$

(1) (2) (3)

(1) $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$, $z = -\frac{1}{2}$ → $\underline{x}_1$

(2) $x = 0$, $y = 1$, $z = \frac{1}{2}$ → $\underline{x}_2$

(3) $x = 0$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$ → $\underline{x}_3$

$$L^{-1} = (\underline{x}_1 \ \underline{x}_2 \ \underline{x}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (L^{-1})^t \cdot L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

CÁLCULO DE LA INVERSA MEDIANTE MÉTODO EG CON PIV. PARCIAL Y ESCALADO

La factorización obtenida es : $LU = P^t A$ → La matriz A con las filas reordenadas según vector de pivotaje

Si usamos cualquier de los 2 métodos del apartado anterior, hay que tener en cuenta que no se obtiene A^{-1}, sino

$$(P^t A)^{-1} = A^{-1}(P^t)^{-1} = A^{-1}\cdot P \Rightarrow \underline{A^{-1} = (P^t\cdot A)^{-1}\cdot P^t}$$

P es ortogonal: $P^t = P^{-1}$

Intercambio columnas al postmultiplicar.

En la práctica:

- Método 1: $LU\,\underline{x}_j = \underline{e}_j$

Los vectores $\underline{e}_j$ se reordenan según el vector de pivotaje

- Método 2: $LU = P^t A \longrightarrow U^{-1}\cdot L^{-1} = A^{-1}P \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = U^{-1}\cdot L^{-1}\cdot P^t}$$

Ejemplo:

$$P^t\cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = U}$$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/8 & 1 \end{pmatrix} = L}$$

Método 1 $\quad LU\,\underline{x}_j = \underline{e}_j$

$$I\cdot P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$LU\underline{x}_j = \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ (1) & (2) & (3) \end{array}$$

$$LU\underline{x}_j = \underline{e}_j \xrightarrow[U\underline{x}_j = \bar{\underline{y}}_j]{} L\bar{\underline{y}}_j = \bar{\underline{e}}_j \longrightarrow \bar{\underline{y}}_j$$

$\underline{x}_j$

$$\begin{cases} y_1 \\ \quad y_2 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{8}y_2 + y_3 \end{cases} = \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ (1) & (2) & (3) \end{array}$$

(1) $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = -\frac{1}{2}$ $\quad \underline{y}_1$

(2) $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ $\quad \underline{y}_2$

(3) $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -\frac{3}{8}$ $\quad \underline{y}_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \mid 0 \mid 0 \\ 4x_2 + 2x_3 = 0 \mid 0 \mid 1 \\ \frac{1}{4}x_3 = -\frac{1}{2} \mid 1 \mid -\frac{3}{8} \end{cases}$$
(1) (2) (3)

(1) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ — $\underline{x_1}$

(2) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$ — $\underline{x_2}$

(3) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{3}{2}$ — $\underline{x_3}$

$$\boxed{A^{-1} = (\underline{x_1}\ \underline{x_2}\ \underline{x_3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

Método 2

$$LU = P^t A \Rightarrow (LU)^{-1} = (P^t A)^{-1} \Rightarrow U^{-1}L^{-1} = A^{-1}(P^t)^{-1} = A^{-1} \cdot P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P^t}$$

Así que podemos calcular la inversa de U^{-1} y L^{-1}:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \mid 0 \mid 0 \\ 4y + 2z = 0 \mid 1 \mid 0 \\ \frac{1}{4}z = 0 \mid 0 \mid 1 \end{cases}$$
(1) (2) (3)

(1) $z = 0$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$

(2) $z = 0$, $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{8}$

(3) $z = 4$, $y = -2$, $x = 1$

$$\Rightarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \mid 0 \mid 0 \\ y = 0 \mid 1 \mid 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}y + z = 0 \mid 0 \mid 1 \end{cases}$$
(1) (2) (3)

(1) $x = 1$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{2}$

(2) $x = 0$, $y = 1$, $z = -\frac{3}{8}$

(3) $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$

$$\Rightarrow L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

Así que:

$$A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & 1 \\ 0 & 1/4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{U^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -3/8 & 1 \end{pmatrix}}_{L^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P^t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -3/2 \end{pmatrix}}$$

Como se ve, al postmultiplicar por P^t, se intercambian las columnas.

MAYO 2019 Indicar razonadamente cuál es el tipo de factorización más adecuado para calcular la inversa de A, y explicar cómo utilizar dicha factorización de manera óptima

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Obtener A^{-1}.

La matriz A es simétrica. Si fuera definida positiva, entonces la factorización de Cholesky sería la más adecuada. Se empieza probando si A admite la factorización de Cholesky, es decir, si existe una matriz triangular inferior L, con todos los elementos de la diagonal positivos, tal que $A = L \cdot L^t$.

Para hallar la inversa de A, usamos esta factorización, porque:

$$A^{-1} = (L \cdot L^t)^{-1} = (L^{-1})^t \cdot L^{-1}$$

Y entonces solo hay que calcular L^{-1}, resolviendo los 3 sistemas $L\underline{x}_j = \underline{e}_j$ por sustitución progresiva. Mientras que el otro método, requiere resolver 6 sistemas.

JULIO 2019 Dada la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -15 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

explicar cual de los métodos numéricos estudiados es el más adecuado para el cálculo de la inversa de A; y obtener la segunda columna de A^{-1} mediante dicho método, indicando adecuadamente todos los pasos.