Sustitución progresiva $L\underline{x} = \underline{b}$

$$l_{11}x_1 = b_1 \longrightarrow x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$l_{21}x_1 + l_{22}\cdot x_2 = b_2 \longrightarrow x_2 = \frac{b_2 - l_{21}\cdot x_1}{l_{22}}$$

$$\vdots$$

$$l_{n-1,1}x_1 + l_{n-1,2}x_2 + \dots + l_{n-1,n-1}\cdot x_{n-1} = b_{n-1}$$

$$l_{n,1}x_1 + l_{n,2}x_2 + \dots + l_{n,n-1}x_{n-1} + l_{nn}x_n = b_n$$

$$\boxed{x_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \qquad x_k = \frac{b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}\cdot x_i}{l_{kk}}}$$

Coste operativo $\approx \frac{n^2}{2}$

MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA

$$A\underline{x} = \underline{b} \xrightarrow[\text{por filas}]{\text{Transformaciones elementales}} U\underline{x} = \underline{c}$$

$$\boxed{(F_i = F_i + a F_j)}$$

la única transformación permitida.

(1a) ejemplo:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

pivote — paso 1 — paso 2

Paso 1

$$\xrightarrow[\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1}]{\substack{m_{2,1} = 1 \\ m_{3,1} = 2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Paso 2

$$\xrightarrow[F_3 + F_2]{m_{32} = -1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \\ -4z = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1/4 \\ y = 1/4 \\ z = 1/4 \end{cases}$$

INTERPRETACIÓN MATRICIAL DE LA $\overbrace{\text{EG}}^{\text{ELIMINACIÓN GAUSSIANA}}$. FACTORIZACIÓN LU.

$$EG \longrightarrow A = L \cdot U$$

Para una eliminación gaussiana:

PIVOTE

PASO 1

transformaciones elementales

$$F_2 = F_2 - m_{21}F_1 \;;\; m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \longrightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ -m_{21} & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = F_3 - m_{31}F_1 \;;\; m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \longrightarrow E =$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_n - m_{n1}\cdot F_1 \;;\; m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}} \longrightarrow E =$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{41} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -m_{n1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

PASO 2

Transformaciones elementales $\longrightarrow \dots \longrightarrow$ $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & -m_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow{\text{paso 1}} A^{(1)} = E_1\cdot A \xrightarrow{\text{paso 2}} A^{(2)} = E_2\cdot E_1\cdot A \longrightarrow \dots \longrightarrow U = \overbrace{\underbrace{E_{n-1}\cdot E_{n-2}\cdot \dots \cdot E_2\cdot E_1}_{n-1 \text{ pasos}}}^{\text{todas triangulares inferiores y regulares}}\cdot A \Longrightarrow$$

(porque el la última columna no hacemos nada).

$$\Longrightarrow \quad A = \overbrace{E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_{n-2}^{-1} \cdot E_{n-1}^{-1}}^{\text{Todas triangulares inferiores}} \cdot U = \overset{\text{triangular inferior (LOW)}}{L} \cdot \underset{\text{Triangular superior (UP)}}{U}$$

Para cualquier matriz E_i:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ m_{21} & 1 & & & 0 & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & & \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & m_{n4} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

UTILIDAD DE LA FACTORIZACIÓN LU

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales

$$A\underset{\sim}{x} = b \qquad A = L \cdot U$$

$$L \cdot U \cdot \underset{\sim}{x} = b \longrightarrow \{U\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}\} \longrightarrow L \cdot \underset{\sim}{y} = b \xrightarrow{\text{SUSTITUCIÓN PROGRESIVA}} \underset{\sim}{y} \xrightarrow{\text{SUSTITUCIÓN REGRESIVA}} \boxed{\underset{\sim}{x}}$$

- Cálculo de $|A|$

$$A = L \cdot U \longrightarrow \underbrace{|A| = |L| \cdot |U|}$$

→ Para eliminación de Gauss o equivalente $\rightarrow |L| = 1 \longrightarrow |A| = |U|$

ejemplo

$$\begin{cases} x + y + 3t = 4 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ 3x - y - z + 2t = 3 \\ -x + 2y + 3z - t = 4 \end{cases}$$

Resolver sin modificar $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

EG

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - m_{21}F_1 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \\ F_4 + F_1}]{\substack{m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2 \\ m_{31} = 3 \\ m_{41} = -1 \\ \boxed{k=1}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 - 4F_2 \\ F_4 + 3F_2}]{\substack{m_{32} = 4 \\ m_{42} = -3 \\ \boxed{k=2}}}$$

(Pivote: 1; -1)

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}}_{U} \qquad \begin{matrix} \boxed{k=3} \\ m_{43} = 0 \\ F_4 = F_4 \end{matrix}$$

$$\boxed{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

→

$\longrightarrow \quad A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A = LU} LU\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \xrightarrow[U\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}]{} L\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{b}$

$$L\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{b} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ 2y_1 + y_2 = 1 \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 = -3 \\ -y_1 - 3y_2 + y_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{sust. progresiva}} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -7 \\ y_3 = 13 \\ y_4 = -13 \end{cases} \longrightarrow \underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$$

este vector es como hubiese quedado "ga cabeza" si hubiésemos hecho todo en la matriz ampliada

$$U\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ z = 0 \\ y = 7 - z - 5t \to y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \longrightarrow \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS DEL MÉTODO DE EG

- EG falla con ciertas matrices. Si durante el proceso de ejecución se crea un 0 en la diagonal (0 como pivote), el método falla $\left(m = \frac{a_{ij}}{0}\right)$.

$\nexists$

Este problema tiene fácil solución: intercambio de filas. Esto está prohibido en EG, pero si lo admitimos, damos paso a un nuevo método $\longrightarrow$ MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA CON PIVOTAJE PARCIAL

Hay dos tipos de matrices que no presentan problemas numéricos, siendo EG un algoritmo estable:

- Matrices simétricas y definidas positivas (Criterio de Sylvester, Cholesky)
- Matrices estrictamente diagonal dominantes.
  - El valor absoluto de cada elemento de la diagonal es mayor que la suma de los valores absolutos del resto de los elementos de la fila.

$$A = (a_{ij}) \ , \ |a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |7| > |2| + 0 \\ |5| > |3| + |-1| \\ |-6| > |5| + 0 \end{matrix}$$

METODOS DE ELIMINACIÓN / FACTORIZACIÓN COMPACTA

La factorización $A = L \cdot U$ no es única.

Demostración:

Sea D una matriz diagonal y regular:

$$A = L \cdot U = L\,\underbrace{(DD^{-1})}_{I}\,U = (LD)\cdot(D^{-1}U) = L' \cdot U'$$

sigue siendo triangular inferior

sigue siendo triangular superior.

pero $L \neq L'$, $U \neq U'$

Si se fijan los elementos de la diagonal de L o U, entonces la factorización es única. Ejemplo.

en EG $\longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ x & 1 & & \\ y & \cdot & 1 & \\ z & & \cdot & 1 \end{pmatrix}$

Los dos más habituales:

- La diagonal de L es todo 1s: $l_{ii} = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$ → FACTORIZACIÓN DE DOOLITTLE (equivalente a EG)

- La diagonal de U es todo 1s: $u_{ii} = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$ → FACTORIZACIÓN DE CROUT

ejercicio para entender el método.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \overset{\text{DOOLITTLE}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & +3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Paso K=1

1. Se obtiene el elemento de la diagonal (u_{11})
2. Se obtienen los elementos la fila 1 de U y columna 1 de L.

① F1L × C1U → $1 \cdot u_{11} = 6$

② F1L × C2U → $u_{12} = -2$

F1L × C3U → $u_{13} = 2$

F1L × C4U → $u_{14} = 4$

③ F2L × C1U → $l_{21}\, u_{11} = 12 \rightarrow l_{21} = 2$

F3L × C1U → $l_{31}\, u_{11} = 3 \rightarrow l_{31} = \frac{1}{2}$

F4L × C1U → $l_{41}\, u_{11} = -6 \rightarrow l_{41} = -1$

Paso K=2

① F2L × C2U → $l_{21} \cdot u_{12} + 1\, u_{22} = -8$

$2 \cdot (-2) + u_{22} = -8$

$u_{22} = -4$

② F2L × C3U → $l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = 6$

$u_{23} = 2$

F2L × C4U → $u_{24} = 2$

③ F3L × C2U → $l_{32} = +3$

F4L × C2U → $l_{42} = -1/2$

Paso K=3

① F3L × C3U → $u_{33} = \cancel{1}2$

② F3L × C4U → $u_{34} = -5$

F4L × C3U → $l_{43} = 2$

Paso K=4

F4L × C4L

└ $u_{44} = -3$