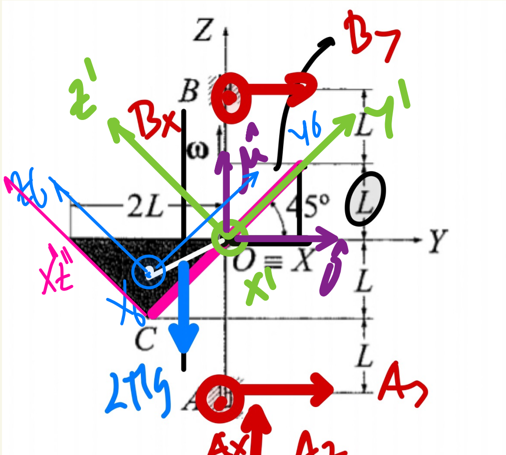


FIGURA 7.8

$Y_G = -\frac{L}{2}$; $C_x = \frac{2}{3} M L^2$

$m = \frac{M}{2} \to (X_m, Y_m, Z_m)$

Equilibrado estático

$X_G = 0$; Intuitivo $X_m = 0$

$2\cancel{M}\cdot 0 + \frac{M}{2} X_m = 0 \Rightarrow \boxed{X_m = 0}$

$Y_G = 0 \Rightarrow 2M\left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{M}{2} Y_m = 0 \Rightarrow \boxed{Y_m = 2L}$

$C_y = 0 \Rightarrow 0 + \frac{M}{2} Z_m \cancel{X_m} = 0 \Rightarrow$ No aporta nada.

$XY \quad YZ$
$\downarrow \quad \downarrow$
$Z_m \quad X_m$

$C_x = 0 \to \frac{2}{3} M L^2 + \frac{M}{2} \cdot Z_m Y_m = 0$

$XY \quad XZ$
$\downarrow \quad \downarrow$
$Z_m \quad Y_m$

$\frac{2}{3} \cancel{M} L^{\cancel{2}} + \frac{\cancel{M}}{\cancel{2}} \cancel{2} \cancel{L} Z_m \Rightarrow \boxed{Z_m = -\frac{2}{3} L}$

Ejercicio 9.4

A un disco de masa 4M, radio R y espesor despreciable se le practica un orificio de radio R/2 como muestra la figura. El sistema gira alrededor del eje horizontal AB con velocidad angular constante ω. Determinar:

1. Reacciones en los apoyos.
2. Par que debe aplicarse para conseguir la ley de movimiento indicada.
3. Posición y magnitud de la masa puntual que se ha de colocar en la periferia del disco para equilibrar el sistema.

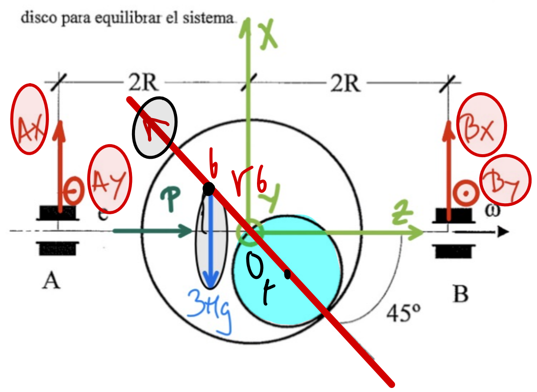


Figura → plana, $\omega = cte$

Reacciones → radial

∄ componente axial.

$\vec{F} = m \vec{a}_G$

$m = 4M - M_h$

$M_h = \sigma \pi \frac{R^2}{4}$; $\sigma = \frac{4M}{\pi R^2}$

$M_h = \frac{4M}{\pi R^2} \frac{\pi R^2}{4} \Rightarrow M_h = M.$

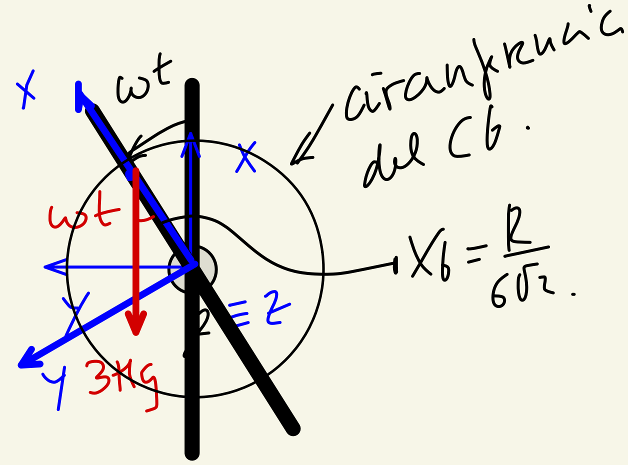
$m = 4M - M = 3M \Rightarrow \vec{F} = 3M\,\vec{a}_G$ circunferencias de radio X_G

$\omega = cte \Rightarrow G$ sólo tiene a_N

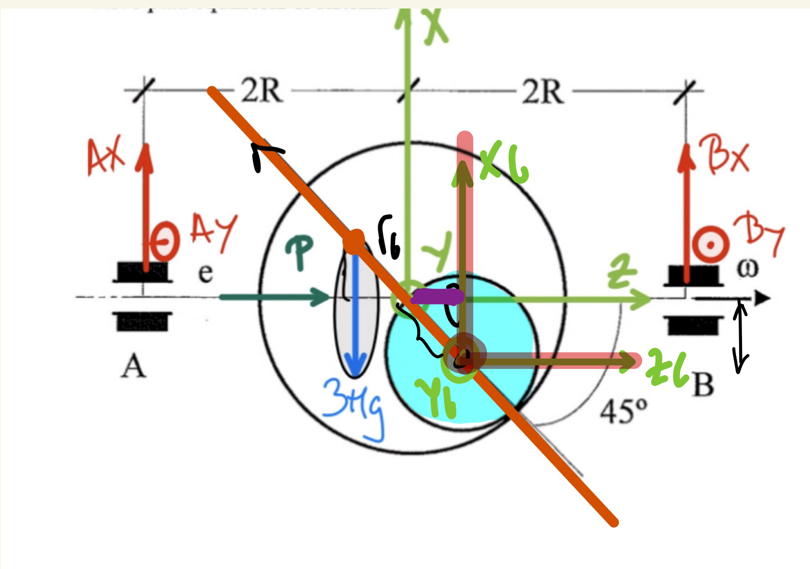
$\vec{a}_G = -\omega^2 X_G\,\hat{e}_1 \rightarrow \quad r_G = \dfrac{4M\cdot 0 + (-M)(-R/2)}{3M} = \dfrac{R}{6}$

$$X_G = \frac{R}{6\sqrt{2}}$$

$$\vec{a}_G = -\omega^2 \frac{R}{6\sqrt{2}}\,\hat{e}_1$$



$$\boxed{\begin{aligned} A_x + B_x - 3Mg\cos\omega t &= -\frac{M\omega^2 R}{2\sqrt{2}} \\ A_y + B_y + 3Mg\sin\omega t &= 0 \end{aligned}}$$



$\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_3 \rightarrow$

$$\vec{H}_O = -C_y\omega\,\hat{e}_1 - C_x\omega\,\hat{e}_2 + I_z\omega\,\hat{e}_3$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_F = -C_y\omega^2\,\hat{e}_2$$

$\alpha = 0$

$C_x = 0$ plano XZ contiene a la figura.

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_F = \cancel{(C_x\omega^2 - C_y\alpha)}\,\hat{e}_1 - (C_y\omega^2 + \cancel{C_x\alpha})\,\hat{e}_2 + I_z\underbrace{\cancel{\dot{\omega}}}_{\alpha}\,\hat{e}_3}$$

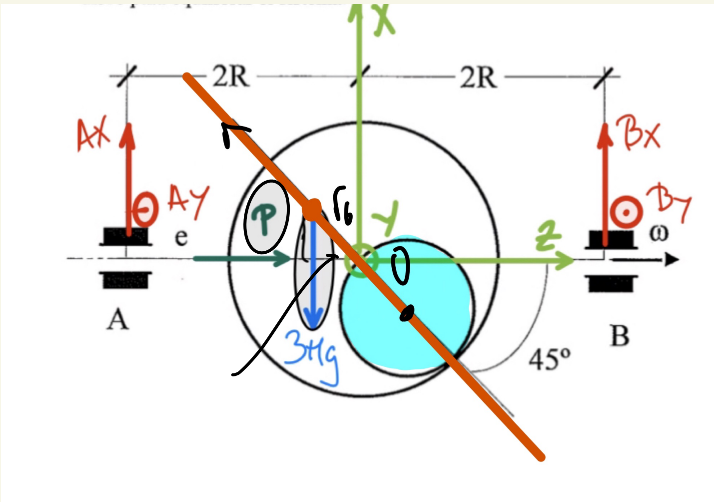
$$C_y = \cancel{C_y^{4M}}^{\,0} - C_y^{h} \Rightarrow C_y = -C_y^{h} \Rightarrow C_y = \frac{1}{8}\pi R^2$$

$$G_y^h = \cancel{G_{y_G}^{h}}^{\,0} + M\left(-\frac{R}{2\sqrt2}\right)\left(\frac{R}{2\sqrt2}\right) = -\frac{1}{8}MR^2$$

xy yz

$$\frac{d\vec H_O}{dt} = -\frac{1}{8}MR^2\omega^2\hat e_2$$

$$\frac{d\vec H_O}{dt} = \vec M_O$$



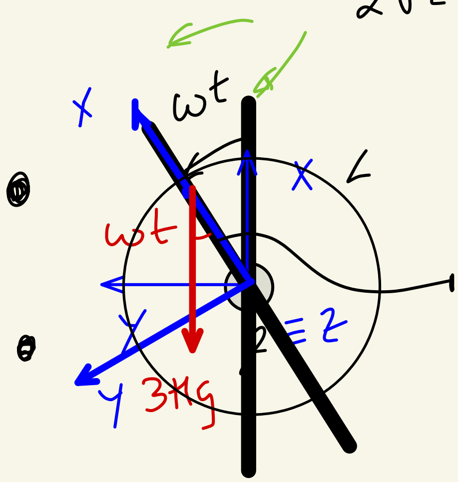
$$\vec M_O^{peso} = \begin{vmatrix} \hat e_1 & \hat e_2 & \hat e_3 \\ \frac{R}{6\sqrt2} & 0 & -\frac{R}{6\sqrt2} \\ -3Mg\cos\omega t & 3Mg\sin\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec M_O^{peso} = \vec{OG} \wedge \vec{Peso}$$

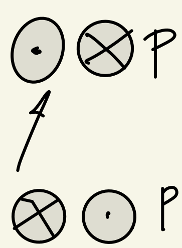
$$\vec M_O^{peso} = \frac{MgR}{2\sqrt2}\sin\omega t\,\hat e_1 + \frac{MgR}{2\sqrt2}\cos\omega t\,\hat e_2 + \frac{MgR}{2\sqrt2}\sin\omega t\,\hat e_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} &A_y 2R - B_y 2R + \frac{MgR}{2\sqrt2}\sin\omega t = 0 \\ &B_x 2R - A_x 2R + \frac{MgR}{2\sqrt2}\cos\omega t = -\frac{1}{8}MR^2\omega^2 \end{aligned}}$$

$$P + \frac{MgR}{2\sqrt2}\sin\omega t = 0 \Rightarrow \boxed{P = -\frac{MgR}{2\sqrt2}\sin\omega t}$$



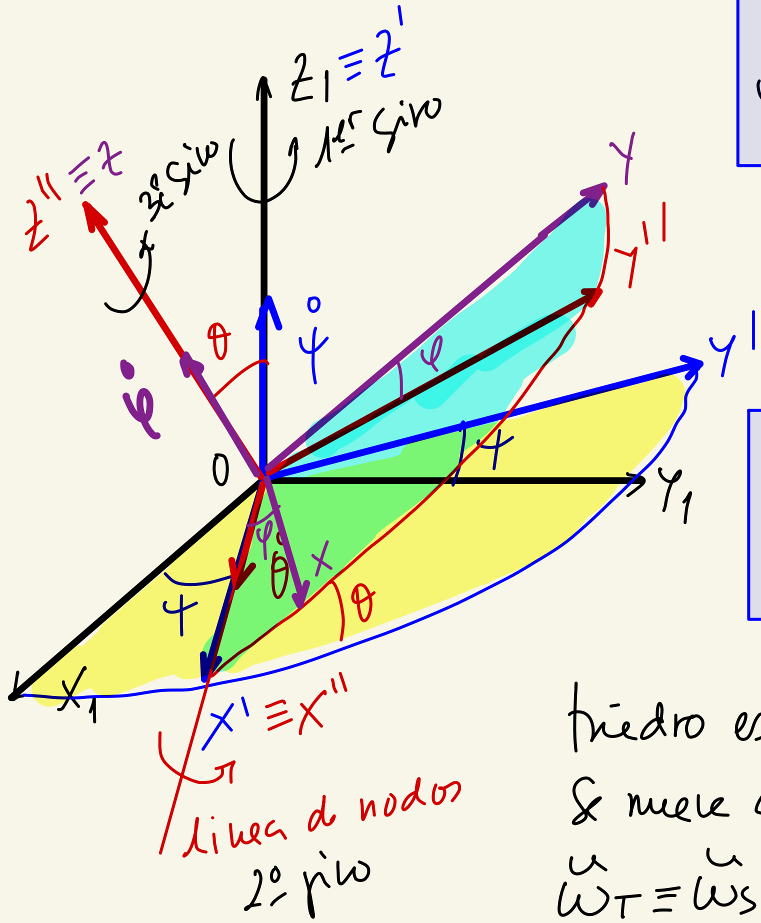
$$X_G = \frac{R}{6\sqrt2}.$$



TEMA 8 SÓLIDO CON PUNTO FIJO

3 gdl ; Ángulos de Euler

· Ángulos de Euler



$\psi \equiv$ ángulo de PRECESIÓN
$\dot\psi \equiv$ vel ang " "

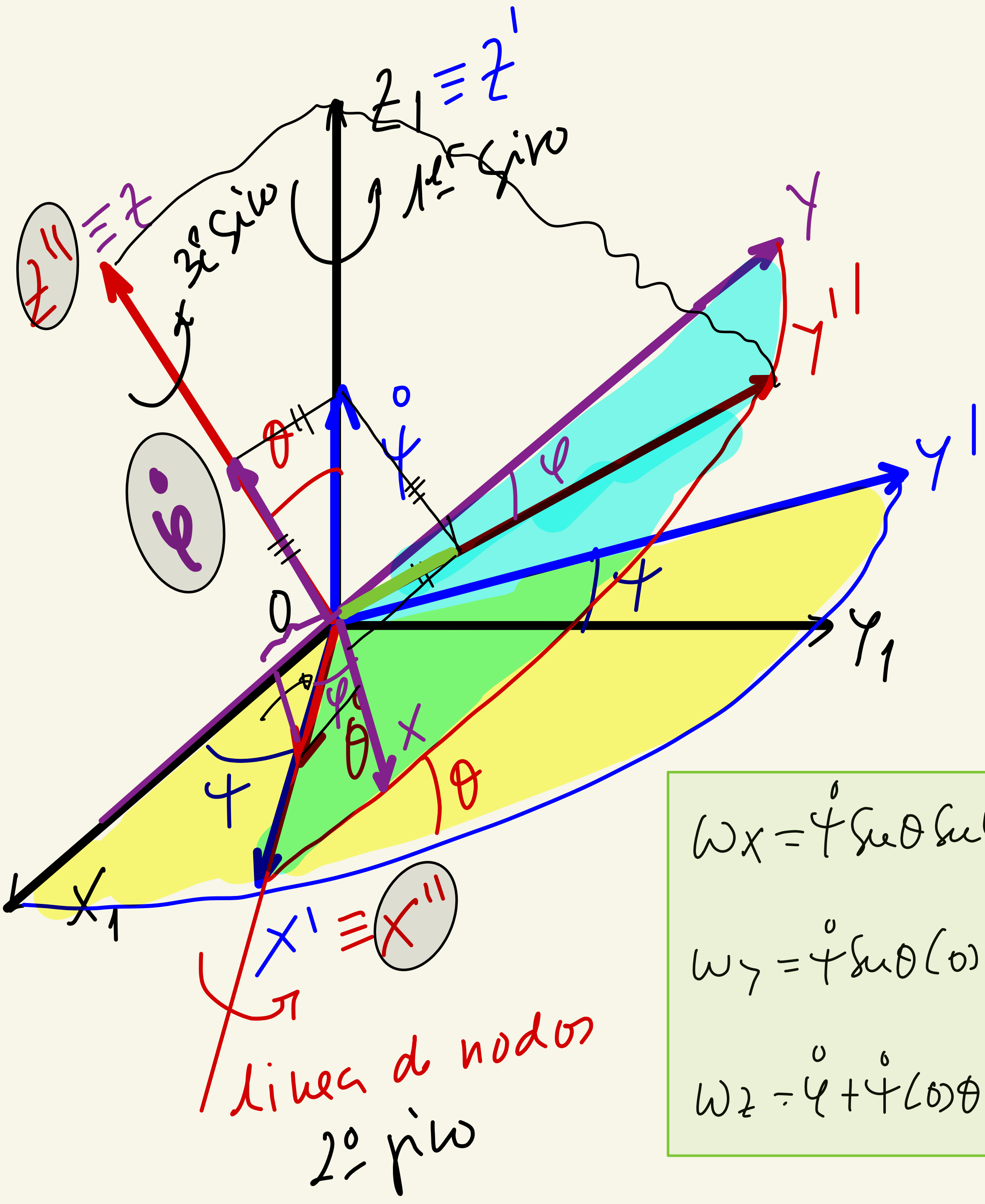
$\theta \equiv$ ángulo de NUTACIÓN
$\dot\theta \equiv$ vel. ang " "

$\varphi \equiv$ ángulo de ROTACIÓN PROPIA
$\dot\varphi \equiv$ vel ang. " " "

triedro es vinculado $\Rightarrow$
se mueve como el sólido
$\hat\omega_T \equiv \hat\omega_S$

$\hat\omega_S = \hat\omega_T = \vec{\dot\psi} + \vec{\dot\theta} + \vec{\dot\varphi}$, MÓVIL $\rightarrow$ las inercias son constantes

fijo el último de los sistemas.



$$\omega_x = \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$$

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

Ejes principales

$$\vec{H}_O = I_x\omega_x\hat{e}_1 + I_y\omega_y\hat{e}_2 + I_z\omega_z\hat{e}_3$$

$$\left.\frac{d\vec{H_0}}{dt}\right|_F = I_x \dot{\omega}_x \hat{e}_1 + I_y \dot{\omega}_y \hat{e}_2 + I_z \dot{\omega}_z \hat{e}_3 + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_x\omega_x & I_y\omega_y & I_z\omega_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_z - I_y) &= M_{0x} \\ I_y\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z(I_x - I_z) &= M_{0y} \\ I_z\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_y - I_x) &= M_{0z} \end{aligned}}$$

Ecuaciones de Euler

1º GIRÓSCOPO DE EULER-POINSOT (Movimiento por inercia)

Todas las acciones aplicadas lo están en el pto fijo

$$\vec{M}_0 = 0 \Rightarrow \left.\frac{d\vec{H_0}}{dt}\right|_F = 0 \qquad \boxed{\vec{H}_0 = cte}$$