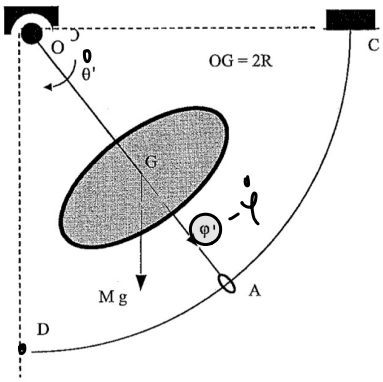
Ejercicio 10.4

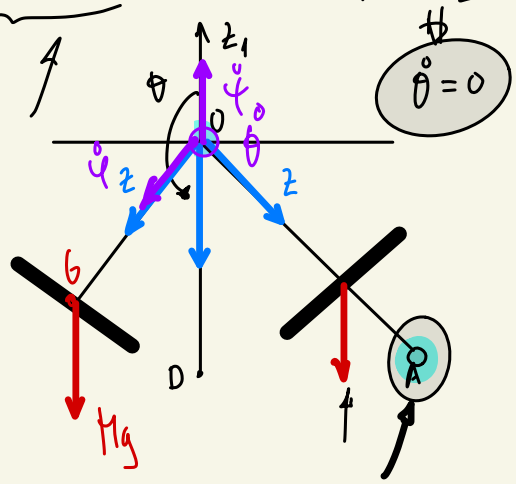
Una barra OA sin masa gira alrededor de O fijo y su extremo A es una argolla que describe un arco circular de centro O situado en un plano vertical. El extremo O es una rótula esférica. Un disco de masa M, radio R y espesor despreciable gira con velocidad angular φ' respecto a la barra.

Sabiendo que cuando la anilla sale por D se verifica que $\varphi' = \theta' = \omega$, determinar el valor de ω para que la barra OA llegue en su máximo ascenso a ponerse horizontal.



$\dot{\varphi} = \dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta = \pi, \ \theta = \frac{\pi}{2}$

$\dot{\theta} = 0$

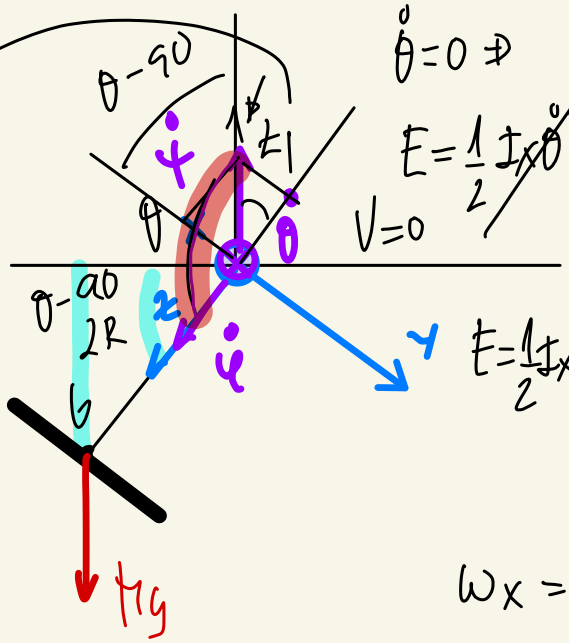


Cuando sale de la guía ya es un sólido con punto fijo sometido sólo a su peso por 6. E-L.

Eje de simetría ⇒ 6. E-L Simétrico

$90 - \theta + 90$

$180 - \theta$



$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$

$$E = \cancel{\frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2} + \frac{1}{2 I_x}\left(\frac{A - B\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 + \frac{B^2}{2 I_z} + Mg\, 2R\cos\theta$$

$$E = \frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_x \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2} I_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + Mg L \cos\theta$$

$\omega_x = \dot{\theta}, \quad \omega_y = \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta, \quad \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$

$X \equiv$ horizontal (línea de nodos) $\dot\psi$ no proyecta en X

$\uparrow$ vertical.

$\dot\varphi$ proyecta íntegramente en t

$\Rightarrow$ no proyecta en X

$$\omega_X = \dot\theta \quad ; \quad \omega_y = -\dot\psi \cos(\theta - 90) \Rightarrow \omega_y = -\dot\psi \cos(90-\theta)$$

$$\omega_y = -\dot\psi \sin\theta$$

$$\downarrow$$

$$\omega_y = -\dot\psi \sin\theta$$

$$\omega_z = \dot\varphi - \dot\psi \cos(180-\theta) \Rightarrow \omega_z = \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta \qquad -\sin(90-\theta) = -\cos\theta$$

$$E = \frac{1}{2} I_x \dot\theta^2 + \frac{1}{2} I_x \dot\psi^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} I_z (\dot\varphi + \dot\psi \cos\theta)^2 - Mg2R \sin(\theta - 90)$$

$$E = \frac{1}{2} I_x \dot\theta^2 + \frac{1}{2} I_x \dot\psi^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} I_z (\dot\varphi + \dot\psi \cos\theta)^2 + Mg2R\cos\theta$$

$\uparrow$ Experiá teórica $\Rightarrow$ válido

$$E = \frac{1}{2} I_x \dot\theta^2 + \frac{1}{2} I_x \dot\psi^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} I_z (\dot\varphi + \dot\psi \cos\theta)^2 + MgL\cos\theta$$

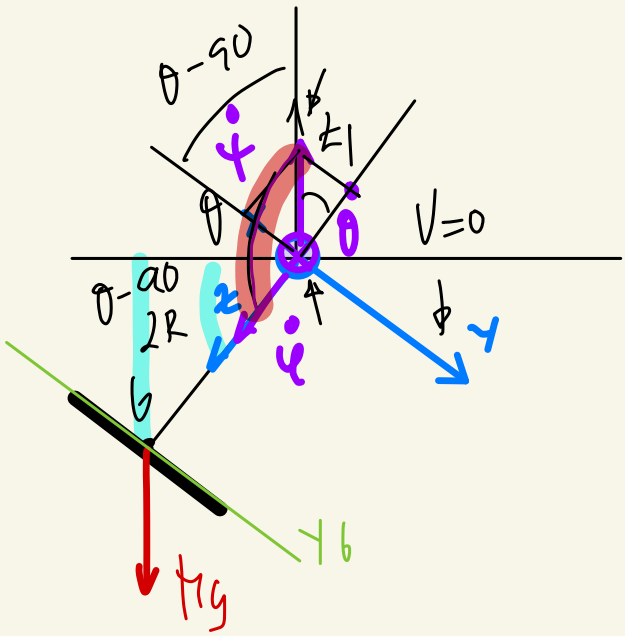
$$E = \cancel{\frac{1}{2} I_x \dot\theta^2}^{\,0} + \frac{1}{2I_x}\left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{B^2}{2I_z} + Mg2R\cos\theta \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

E, A, B ; $\theta = \pi$ $\quad \dot\varphi = \omega, \ \dot\theta = \omega, \ \dot\psi = 0$

$$E = \frac{1}{2} I_x \omega^2 + \frac{1}{2} I_z (\omega + 0)^2 - Mg2R \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} I_x \omega^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 - Mg2R}$$

$$A = I_x \dot\psi \sin^2\theta + I_z (\dot\varphi + \dot\psi \cos\theta)\cos\theta \Rightarrow \boxed{A = -I_z \omega}$$

$$B = I_z (\dot\varphi + \dot\psi \cos\theta) \Rightarrow \boxed{B = I_z \omega}$$



$$I_x = I_y = \frac{1}{4} m R^2 + m 4R^2 = \frac{17}{4} m R^2$$

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2$$

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 (I_x + I_z) - mg2R$$

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\frac{17}{4} + \frac{1}{2}\right) m R^2 - mg2R$$

$$\boxed{E = \frac{19}{8} m R^2 \omega^2 - mg2R}$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{2} m R^2 \omega}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{2} m R^2 \omega}$$

$$E = \cancel{\frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2}^{\,0} + \frac{1}{2I_x}\left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{B^2}{2I_z} + mg2R\cos\theta \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{19}{8} m R^2 \omega^2 - mg2R = \frac{1}{\frac{17}{2} m R^2}\left(-\frac{1}{2} m R^2 \omega\right)^2 \quad \frac{\frac{1}{4}(mR^2)^2\omega^2}{2 \cdot \frac{1}{2} m R^2}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{272}{285}\frac{g}{R}}}$$

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

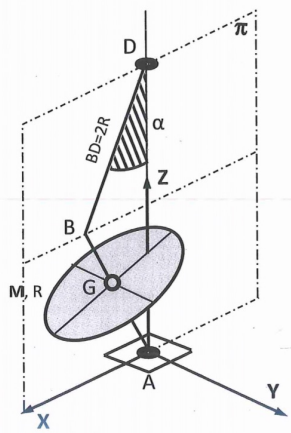
Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

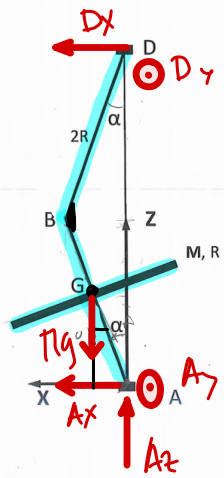
1. deitura / 1er apellido	Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido	Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre	Data / Fecha
Ikasturtea / Curso · Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA APLICADA. EXAMEN ORDINARIO. 31-05-2019.
EJERCICIO 4. TIEMPO: 45'

El rotor de un compresor industrial gira alrededor del eje vertical **AD** con velocidad angular constante ω. El rotor está compuesto por 2 barras **AB** y **BD**, soldadas en **B**, sin masa, de longitud **2R**, y que forman un ángulo **α=30º** con el eje de rotación **AD**. Además, la barra **AB** tiene un disco de masa **M** y radio **R** soldado perpendicular a la misma, y con su centro de gravedad **G** sobre el punto medio de la barra. Sabiendo que la velocidad angular tiene un valor de $\omega^2 = \frac{8g}{3\sqrt{3}R}$, se pide obtener:

1. Reacciones en los apoyos del eje. (5 puntos)
2. Las coordenadas de una masa puntual **M** que equilibre el sistema. (5 puntos)





$\omega = cte$, $\alpha = 30°$

$$\omega^2 = \frac{8g}{3\sqrt{3}R}$$

figura no es plana.

$$\vec{F} = M\vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \cancel{\vec{a}_A}^{\,0} + \cancel{\alpha\hat{e}_3 \wedge \vec{AG}}^{\,0} + \omega\hat{e}_3 \wedge (\omega\hat{e}_3 \wedge \vec{AG})$$

$$\vec{a}_G = \omega\hat{e}_3 \wedge \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_G & y_G & z_G \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_G = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_G & \omega x_G & 0 \end{vmatrix}$$

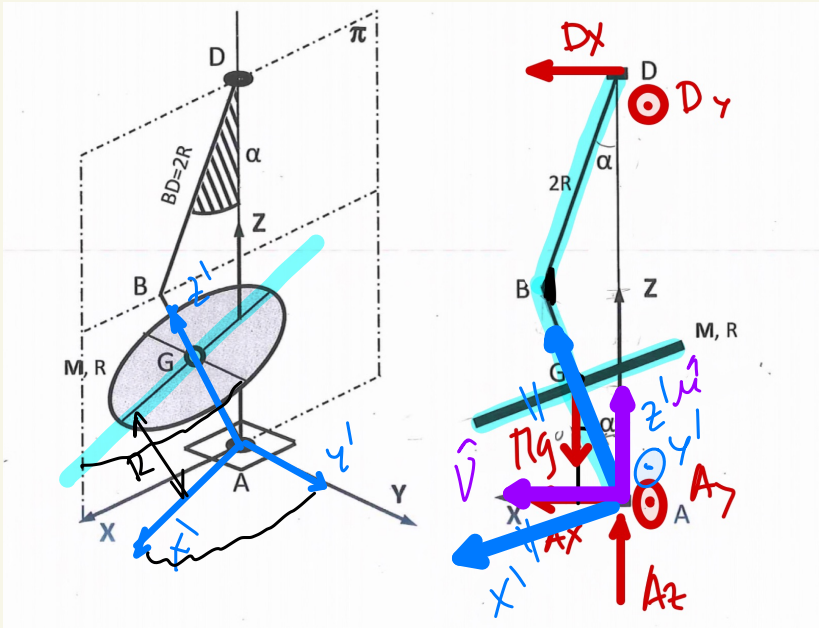
$$\vec{a}_G = -\omega^2 x_G \hat{e}_1 - \cancel{\omega^2 y_G \hat{e}_2}^{\,0} \Rightarrow \vec{a}_G = -\omega^2 x_G \hat{e}_1$$

$$x_G = R\sin 30 \Rightarrow x_G = \frac{R}{2}$$

$$\vec{a}_G = -\omega^2 \frac{R}{2}\hat{e}_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_x + D_x &= -M\omega^2\frac{R}{2} \\ A_y + D_y &= 0 \end{aligned}}$$

$$A_z - Mg = 0 \Rightarrow \boxed{A_z = Mg}$$



$$\vec{H}_A = -C_y\,\omega\,\hat{e}_1 - C_x\,\omega\,\hat{e}_2 + I_z\,\omega\,\hat{e}_3$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right|_F = \vec{M}_A$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right|_F = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ -C_y\omega & -C_x\omega & I_z\omega \end{vmatrix}$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\wedge\vec{H}_A$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right|_F = C_x\omega^2\hat{e}_1 - C_y\omega^2\hat{e}_2$$ plano xz simétrico $C_x = 0$

$$\left.\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right|_F = -C_y\omega^2\hat{e}_2 \quad ; \quad C_y = P_{xy\,yz} = \{\hat{\mu}\}^T[J_A']\{\hat{v}\}$$

$$\{\hat{v}\} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad \{\mu\}^T = \left[-1/2,\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$[J_A'] \Rightarrow$ Plano $x'z'$ simétrico, $y'z'$ también

$C_{x'}, C_{y'}, C_{z'}$ son 0.

$$J_{y'z'} = \frac{1}{4}mR^2 = J_{x'z'}$$

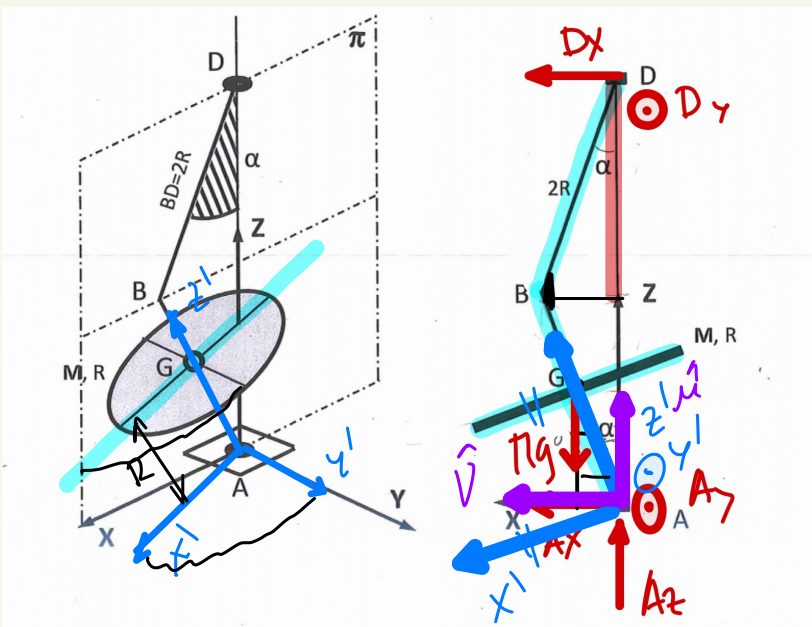
$J_{x_G y_G} = 0$ por cercanía a la figura.

$$J_{x'y'} = \cancel{J_{x_G y_G}}^{\,0} + mR^2 \Rightarrow J_{x'y'} = mR^2$$

$$[J_{A'}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{bmatrix}$$

$$C_y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} MR^2$$

$$C_y = \frac{3\sqrt{3}}{16} MR^2$$



$$\left.\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right|_F = -\frac{3\sqrt{3}}{16} MR^2 \omega^2 \hat{e}_z$$

$$-D_y\, 2 \cdot 2R\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{D_y = 0}$$

$$D_x\, 2 \cdot 2R\frac{\sqrt{3}}{2} + Mg\frac{R}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{16} MR^2\omega^2$$

$$\boxed{D_x = -\frac{Mg}{2\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_x + D_x &= -M\omega^2\frac{R}{2} \\ A_y + D_y &= 0 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A_x &= -\frac{5Mg}{6\sqrt{3}} \\ A_y &= 0 \end{aligned}}$$

$M \quad (x_m, y_m, z_m) \qquad y_G = 0 \Rightarrow \boxed{y_m = 0}$

$$x_G = 0 \Rightarrow M \cdot \frac{R}{2} + M x_m \Rightarrow \boxed{x_m = -\frac{R}{2}}$$

$C_x = 0 \Rightarrow 0 + M z_m y_m = 0 \Rightarrow$ No aporta nada.

XY XZ
$\uparrow$ $\uparrow$
z_m y_m

$C_y = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}MR^2}{16} + M z_m x_m = 0$

XY YZ
$\uparrow$ $\uparrow$
z_m x_m

$$\boxed{z_m = \frac{3\sqrt{3}}{8} R}$$

Ingeniarien Goi Eskola
Escuela Superior de Ingenieros
Bilbao

Euskal Herriko Unibertsitatea
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

MECANICA APLICADA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 5-07-2018.
EJERCICIO 1. TIEMPO: 45'

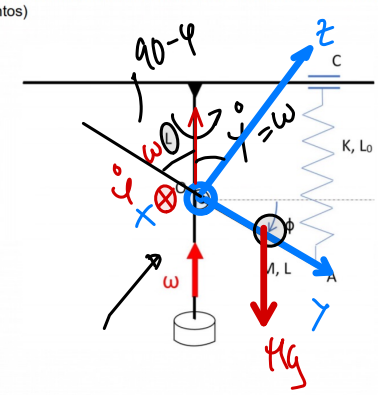
La estructura sin masa en forma de **T** de la figura gira alrededor del eje vertical con una velocidad angular **ω** constante. En su punto **O** se articula una barra **OA** de longitud **L** y masa **M**, que puede girar libremente en el plano de la **T**. En su extremo **A** se articula un muelle de constante elástica **K=Mg/L** y longitud sin tensión **L₀=L**, que desliza sin rozamiento en **C**.

Se pide:

1. Velocidad angular absoluta de la barra **OA** en un instante cualquiera. (1 puntos)
2. Ecuación del movimiento. (5 puntos)

Si se sabe que se suelta la barra en **ϕ = 0** sin velocidad relativa a la **T**, calcular:

3. La aceleración angular absoluta de la barra en ese instante. (1 punto)
4. El valor de **ω** para que el descenso máximo de la barra sea de **30°**. (3 puntos)



$l_0 = L \qquad \varphi = \omega t$

$\{\varphi\}$ O = punto fijo de la barra

la barra $\uparrow$

$$\boxed{\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \\ -\omega \sin\varphi \\ \omega \cos\varphi \end{bmatrix}}$$

$\boxed{\nexists \text{ des}} \Rightarrow$

Holónomos

Esclerónomos $(\varphi = \omega t)$

Acciones aplicadas, Peso, elástica

$\exists$ par aplicado $\Rightarrow \omega = cte$

$E = T + V \neq cte$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_{NC,\varphi}; \quad L = T - V$$

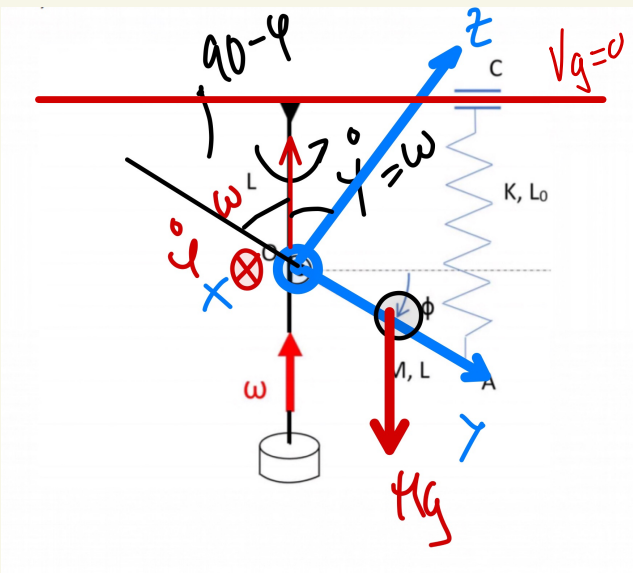
$$T = \frac{1}{2}\{\omega\}^T [I_O] \{\omega\}$$

$$[I_0] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ML^2 \end{bmatrix}$$

planos XY, YZ contienen a la barra $C_x = C_y = C_z = 0$

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\dot{\varphi} & -\omega\sin\varphi & \omega\cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \\ -\omega\sin\varphi \\ \omega\cos\varphi \end{bmatrix}\frac{1}{3}ML^2$$

$$T = \frac{1}{6}ML^2\left[\dot{\varphi}^2 + \omega^2\cos^2\varphi\right], \quad V = V_g + V_e = -MgL(1+\sin\varphi) + \frac{MgL}{2}\sin^2\varphi$$



$$V_g = -Mg\left(L + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)$$

$$V_e = \frac{1}{2}\frac{Mg}{L}\left[\cancel{K} + L\sin\varphi - \cancel{K}\right]^2$$

$$V_e = \frac{Mg}{2\cancel{L}}L^{\cancel{2}}\sin^2\varphi \Rightarrow V_e = \frac{MgL}{2}\sin^2\varphi$$

$$L = \frac{1}{6}ML^2\left[\dot{\varphi}^2 + \omega^2\cos^2\varphi\right] + \frac{MgL}{2}(2+\sin\varphi) - \frac{MgL}{2}\sin^2\varphi$$

$$Q_{NC,\varphi} = \frac{\partial W_{NC}}{\partial\varphi} \; ; \quad \delta W_{NC} = P\hat{k}\left(\delta\psi\hat{k} - \delta\varphi\hat{e}_1\right) \qquad \hat{e}_1 \perp \hat{k}$$

$$\delta W_{NC} = P\delta\psi$$

$$Q_{NC,\varphi} = P\cancel{\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}}^{\,0} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \cancel{Q_{NC,\varphi}}^{\,0} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -\frac{1}{3}ML^2\omega^2\cos\varphi\sin\varphi + \frac{MgL}{2}\cos\varphi - MgL\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\boxed{\frac{1}{3}ML^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{3}ML^2\omega^2\cos\varphi\sin\varphi - \frac{MgL}{2}\cos\varphi + MgL\sin\varphi\cos\varphi = 0}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\omega^2 \sin 2\varphi - \frac{3g}{2L}\cos\varphi + \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin 2\varphi = 0$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\left(\omega^2 + 3\frac{g}{L}\right) - \frac{3g}{2L}\cos\varphi = 0} \rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2L}$$

$$\varphi = 0 \quad \underline{\underline{\dot{\varphi} = 0}} \Rightarrow \vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_M + \cancelto{0}{\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}}$$

$$\boxed{\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \\ -\omega\sin\varphi \\ \omega\cos\varphi \end{bmatrix}}$$

$$\vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_M = -\ddot{\varphi}\,\hat{e}_1 - \omega\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{e}_2 - \omega\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{e}_3$$

$$\vec{\alpha} = -\ddot{\varphi}\,\hat{e}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \frac{3g}{2L}\,\hat{e}_1}$$

$$\dot{\varphi} = 0 \rightarrow \varphi_{MAX} = 30^\circ$$

$$\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\left(\omega^2 + \frac{3g}{L}\right)\sin 2\varphi\,d\varphi - \frac{3g}{2L}\cos\varphi\,d\varphi = 0$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{1}{4}\left(\omega^2 + \frac{3g}{L}\right)\cos 2\varphi - \frac{3g}{2L}\sin\varphi = cte$$

$$\varphi = 0 \rightarrow \dot{\varphi} = 0 \Rightarrow 0 - \frac{1}{4}\left(\omega^2 + \frac{3g}{L}\right) = cte$$

$$\cancelto{0}{\frac{\dot{\varphi}^2}{L}} - \frac{1}{4}\left(\omega^2 + \frac{3g}{L}\right)\cos 2\varphi - \frac{3g}{L}\sin\varphi = -\frac{1}{4}\left(\omega^2 + \frac{3g}{L}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\omega^2 + \frac{3g}{L}\right)\frac{1}{2} - \frac{3g}{2L} = -\frac{1}{4}\left(\omega^2 + \frac{3g}{L}\right)$$

$$\frac{1}{8}\left(\omega^2 + \frac{3g}{L}\right) = \frac{3g}{L} \Rightarrow \omega^2 + \frac{3g}{L} = \frac{24g}{L}$$

$$\omega^2 = \frac{21g}{L} \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{21g}{L}}}$$