# ESTADISTIKA

## 4. Gaia: Probabilitaterako oinarriak

### 4.1. Sarrera

- Estadistika deskribatzaile (datuak)
  - Lagina → Batez beste, bariantza, histograma
  - Ezagunak
- Probabilitatea (erroreak izango ditugu)
  - Populazioa → Batezbeste, bariantza
  - teorikoak → Ezezagunak

1. Kuatri EDA

- Inferentzia
  - Lagin eta populazioaren arteko diferentzia kontrolatzeko.

2. Kuatri AEA.

→ Gertaera estokastiko: Baldintza berdinetan emaitza desberdina (Adb: dado baten jaurtiketa)

→ Gertaera deterministiko: Emaitza jakinda egin baino lehen.

#### 4.1.1 Gertaera estokastikoen ezaugarriak

- Egoera berdineko frogetan → emaitza desberdin
- $\Omega$ = Unibertsoa → emaitza guztien multzoa
- Gertaera elementalak → $\omega_i$ → $\Omega\{1,2,3\}$ ⇒ $\{\omega_i\}_{i=1}^{3}$

↳ Adb: Bi dado: $\Omega\{\underbrace{(1,1)}_{\omega_1}\ \underbrace{(1,2)}_{\omega_2}\ \underbrace{(3,4)}_{\omega_3}\ \underbrace{(6,1)}_{\omega_n}\ldots\}$

- $N$ = Jaurtiketa kopurua

$\frac{n_j}{N}$ = Probabilitatea

Dado baten jaurtiketa. 3 ateratzeko P? → $\frac{1}{6} = P$
emaitza posibleak = 6

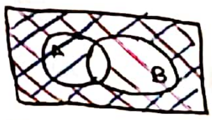
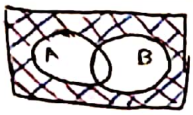
## 4.1.2 terminologia:

- Unibertsoko edozein gertaeren multzo... A, B...
  - ↳ A{emaitza bikoitia} = {2, 4, 6}
  - ↳ B{emaitza bakoiti $\leq 3$} = {1, 3}
- $\emptyset$ = ezinezko gertaera.

### Gertaeren arteko operazioak

- $A \overset{eta}{\cap} B$ = Aldi berean A eta B gertaerak lortzea
  - ↳ {Bikoitia} $\cap$ {$\leq 3$} = {2}
- $A \overset{edo}{\cup} B$ = A edo B gertatzea
  - ↳ {Bikoiti} $\cup$ {$\leq 3$} = {1, 2, 3, 4, 6}
- $A \cup B = A + B - A \cap B$
- $A \cap B = 0 \rightarrow A \cup B = A + B$
- $A^c$ = A ematen ez diren gertaera guztiak  $(\Omega^c = 0)$
- $A \subset B$ = A barne B, A gertatzen bada B ere bai 
- $A - B$: $A \cap B^c$ 
- $B^c = \overline{B}$

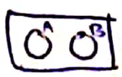
– Morgan-en legeak

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 

– Banakortasuna

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

– Beste propietateak

- $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$
- A eta B bateraezinak $\rightarrow A \cap B = 0$ : $\not\supset$ 

# 4.2. Axiomak eta Propietateak

## 4.2.1. Probabilitatearen definizioa.

- $\Omega$ = gertaera multzoa $\{w_1, w_2, w_3 \ldots A, B \ldots\}$
- $P\Omega \to \mathbb{R} \Rightarrow P(w_i) = W_i$

→ Axiomak Kolmogrov

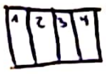
$P\Omega \to \mathbb{R}$

1) $P(A) \in [0,1]$ 0 eta 1 balioen artean egon behar da.

2) $P(\Omega) = 1$

3) $A \cap B = \emptyset$ bada $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4) Sistema osoa $= \emptyset$

$\Omega$  $= \emptyset \Rightarrow A_1 + A_2 \ldots A_n = \Omega$ | $A_i \cap A_j = \emptyset$

- Beraz espazio osoaren prob $= 1 = P(\Omega)$

↳ $P(A_1) + P(A_2) + P(A_n) = \sum P(A_i) = 1$

## 4.2.2. Probabilitatearen Propietateak

1) $P(A^c) = 1 - P(A)$ → osagarriak diren 2 gertaeren probabilitatea $= 1$

↳ $A^c \cap A = \emptyset$ $P(A^c \cup A) = 1 = P(A) + P(A^c)$ → $A^c \cup A = \Omega$

2) $P(\emptyset) = 0$ ezinezko gertaeren prob $= 0$

3) $A \subset B$ bada $P(A) \leq P(B)$ →  → $A = B - (A \cap B)$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) $P(A \cap B) = 0$ A eta B bateraezinak badira.

# 4.3 Probabilitatearen esleipena.

- Laplace definizioa

$\Omega$ = mugatua edo kantugarria $\neq \infty$

- Gertaera elementalen probabilitateak jakinik → edozein gertaeren prob ezagutu.

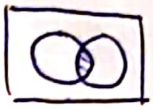
$P(A) = \sum P(w_i)$

$P(A) = \frac{\text{Aldeko kasuak}}{\text{Kasu posibleak}}$

Ariketa 20

- Akatsak izateko probabilitatea
  - Neurketa $P(D_n) = 0'05$
  - Kalitatezko $P(D_k) = 0'04$ $\quad P(D_n \cap D_k) = 0'003$
- Pieza baten akatsa izateko prob?

$P(\text{akatsa}) = P(D_n \cup D_k) = P(D_n) + P(D_k) - P(D_n \cap D_k)$



$0'05 + 0'04 - 0'003 = 0'087 = P(\text{akatsa})$

Ariketa 21

txanponbat botatzen 3 aldiz eta bi aurpegi eta gurutze bat
A = aurpegia G = gurutze.

$P(2A, G) = \dfrac{\text{aldeko kasuak}}{\text{posibleak}}$

- Kasu posibleak: (G,A,A) (A,A,A) (G,G,A) (G,G,G) ...
  - Posibleak $= 2^3 = 8$
  - aldekoak $= 3$ $\Rightarrow \binom{3}{1} = \dfrac{3!}{(3-1)! \cdot 1!}$

## 4.4. Independentzia estokastikoa

- A eta B gertaerak, non $A \cap B \neq 0$ da, independienteak direla esango dugu betiere $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

## • Eranskina: konbinazioari buruzko nozioak

- Konbinazioak: zenbaketa modu desberdinak
  - Errepikatzen da?
    - $\boxed{0_c} \neq 0$ • Berriro sartu gabe → ez da errepikatzen
    - • Berriro sartzean → errepikatzen da.
  - Ordena garrantzitsua da?
    - • kurtsoko saria batean → urrezkoa atera (Bai)
    - • Kutxa sakea batean → Bigarren kutxa urrezkoa (ez)

Konbinazioak (errepikatu gabe, ordena ez)

$C_{n,k}$ → osagaien multzo osoa → $n$ = osagai daude; → $k$ = osagai aukeratu

• Formula ⇒ $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Adb → 5 letra (A, B, C, D, E) 3 aukeratu.

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5\,4\,3\,2\,1}{(3\,2\,1)(2\,1)} = 10$$

• $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

• $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

} tartaglia triangelua ⇒

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

→ $3^2$

Aldakuntzak (errepikatu gabe, ordena bai)

$n > k$

↳ $V_{n,k} = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}_{k \text{ faktoreak}}$

Adb → 5 pertsonen / aukeratu. 1. Delegatu, 2. idazkari, 3 bozeramale

$V_{5,3} = 5\cdot 4\cdot 3$ (errep gabe)

Permutazioak (errepikatu BAI, ordena bai)

• Aldakuntza bezala baino errepikatuz)

$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$

$VR_{n,k} = n^k$

# 4.5. Probabilitate baldintzatua

Adb → Kutxa bat 3 zuri, 2 beltz.  • Bi bola atera eta 2 zuri?

a) lehenengo bola atera ondoren berriz sartu.

$$P(1.z \cap 2.z) = P(z)\cdot P(z) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

b) ez badugu berriz sartzen.

$$P(1.z \cap 2.z) = P(1.z)\cdot P(2.z \mid 1.z) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

# 4.6 Ebaketaren teorema

1 teoremak dio: $P(A \cap B \cap C) > 0$ denean

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) \ldots$$

Berdin gehiagorekin

# 4.7. Partiketaren teorema

- $\{S_1, S_2, \ldots S_k\}$ gertaeren multzoa $\Omega$ partiketa bat da, hau egiaztatzen bada.
  - ↳ 1) $S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k = \Omega$
  - ↳ 2) $S_i$ gertaerak bateraezinak dira, $S_i \cap S_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

2. Teorema: Bedi $\{S_1, S_2, \ldots S_k\}$ $\Omega$ partiketa bat. orduan.

$$P(A) = P(A|S_1)P(S_1) + P(A|S_2)P(S_2) + \ldots + P(A|S_k)P(S_k)$$

3. Teorema: Probabilitate nulua ez duten A eta B gertaera. Hau betetzen da.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- teoremak hauxe dio: a priori dugun probabilitatea batetik a posteriori dugun batera pasatzen baimentzen digu.

4. teorema (Bayes): Izan bedi $P(S_i) > 0$ eta $P(A|S_i) > 0$

$$P(S_i|A) = \frac{P(A|S_i)P(S_i)}{P(A)} = \frac{P(A|S_i)P(S_i)}{P(A|S_1) \cdot P(S_1) + P(A|S_2) \cdot P(S_2) + P(A|S_k) \ldots}$$

Adib

Gainditu ↗ Emakume (E) %80 ↘ Gizon (G) %70

Ikasleen ↗ %60 (G) ↘ %40 (E)

Irakasgaia gainditu duela jakinda zein da E izateko probabilitatea?

$$P(E|Bai) = \frac{P(E \cap Bai)}{P(Bai)} = \frac{P(Bai \cap E)P(E)}{P(Bai)} = \frac{P(Bai \cap E)P(E)}{P(E)P(Bai|E)+}$$

$$P(E|Bai) = \frac{0'8 \cdot 0'4}{0'74} = 0'432$$

# 5. Gaia: Aldagai aleatorioa

## 5.1. Aldagai aleatorioa $\mathbb{R}$-n

- Gertaera estokastikoak
  - → Dado bat bota $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ (Balio NUM)
  - → Bi txanpon bota $\Omega = \{(A,A)(A,6)(6,6)\ldots\}$ (EZ balio num)

- Aldagai aleatorioen laburpena → gertaera elementuei balio numeriko ematea.

- Aldagai aleatorioa: (a.a)
  ↳ espazio baten emaitzak eta horiek lortzeko probabilitateak adierazten ditu.

$$X: (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\mathcal{A} = (\text{gertaera guztien multzoa}))$$

$$w_i \Rightarrow X(w_i) = x_i$$

<u>Adibidea</u>

- Txanpon bat airera bota → $\Omega = \{(A,A)(6,6)(A,6)(6,A)\}$
- Aldagai aleatorioa $X$ = aurpegi kopurua.
  - ↳ $P(\text{Bi aurpegi}) = P(X=2) = P(A,A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
  - ↳ $P(\text{aurpegi bat}) = P(X=1) = P(A,6) + P(6,A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
  - ↳ $P(\text{zero aurpegi}) = P(X=0) = P(6,6) = \frac{1}{4}$

Banaketa funtzioa
- 2 aurpegi → $\frac{1}{4}$ → Puntu zehatz batean Prob
- 1 aurpegi → $1/2$
- 0 aurpegi → $1/4$

## 5.2. Banaketa funtzioa.

F: Xaa baten banaketa funtzioa.

$$F: \mathbb{R} \to [0,1]$$

$F_x(x)$ = Puntu zehatz bateraino metatutako Probabilitatea.

$$x \longrightarrow F_x(x) = P(X \leq x)$$

Xaa
- diskretuak → Xaa diskretua bada $F_x(x)$ banaketa F <u>zatikatua</u>
- jarraia

Adib

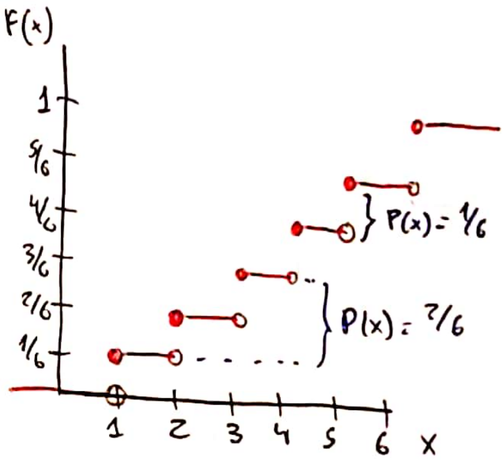
• Dado bat airera bota   Xaa → $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

↳ Probabilitate funtzioa:

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

↳ Banaketa funtzioa $F(x) = P(X \leq x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/6 & 1 \leq x < 2 \\ 2/6 & 2 \leq x < 3 \\ 3/6 & 3 \leq x < 4 \\ 4/6 & 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x \end{cases}$$




Banaketa funtzioaren Propietateak

1) $0 \leq F(x) \leq 1$ → Balioak beti $[0,1]$ tartean

2) Monotono ez beheratzailea → $x_1 < x_2$ → $F(x_1) \leq F(x_2)$

3) Eskuinetik jarraitzean → $\lim_{x \to a,\, x > a} F(x) = F(a)$

4) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = P(\emptyset) = 0$

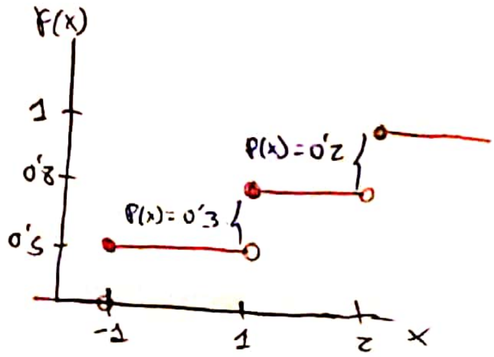
5) $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = P(\Omega) = 1$

Adib

→ $F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1/2 & -1 \leq x < 1 \\ 8/10 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$

1) Adierazi F(x) grafikoki
2) Xaa prob. banaketa.

a)




• $F(X=1) = F(1) - F(-1) = 0'8 - 0'5 = 0'3$

• $F(X=2) = F(2) - F(1) - F(-1) = 1 - 0'8 = 0'2$

| $X$ | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | 0'5 | 0'3 | 0'2 |
| $F(x)$ | 0'5 | 0'8 | 1 |

# .3. Aldagai aleatorio diskretu eta jarraiak

## 3.3.1. Aldagai aleatorio Diskretuak

Xa diskretua → bere balioak puntu zehatzetan daudenean

- Zenbatasun funtzioa: Probabilitate banaketa

↳ $P(xi) = P(X = xi)$ → eta $F(x) = \sum_{x<xi} P(xi)$ dena

$$P(xi) = F(xi) - F(xi-1) \quad \forall xi$$

1) Zenbatasun funtzioa: $P(xi)$ Puntu batean dagoen prob 
2) Banaketa funtzioa: $F(xi)$ Puntu bateraino dagoen prob 

## 3.3.2. Aldagai aleatorio Jarraiak

- Xa jarraia → Prob funtzioa: Dentsitate funtzioa

($f(x)$ eta banaketa funtzioaren deribatua)

$$F(z) = P(x \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx \longrightarrow f(x) = F'(x) \geq 0 \quad \forall x$$

- $P(a \leq x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

### Jarraiaren propietateak

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

2) Xa Jarraia bada → Puntu zehatz batera prob = 0 $\underline{P(xi) = 0}$

3) Berdin da tarte itxia edo irekia → $P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b)$

Adb

Izan bedi → $f(x) = Kx$ $\quad 4 \leq x \leq 6$ → $x \in [4, 6]$

1) lortu K-ren balioa $\quad F(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ erabiliz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_4^6 Kx\,dx = K\frac{x^2}{2}\Big]_4^6 = K\left(\frac{6^2}{2} - \frac{4^2}{2}\right) = K10$$

→ $K10 = 1$ $\qquad K = \frac{1}{10}$ $\qquad$ K-ren balioa $= \frac{1}{10}$

2) Banaketa Funtzioa?

→ Banaketa $f = f(x) = F'(x) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{z}{10}\, dz =$

$$= \begin{cases} x<4 & \rightarrow \text{lau baino txikiagoak diren balioak ez daude definituta beraz} \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dz = 0 \\ 4 \leq x \leq 6 & \\ x>6 & \rightarrow \text{Sei baino handiagoekin berdina} \rightarrow \int_{-\infty}^{x} 0\, dz = 0 \end{cases}$$

· $4 \leq x \leq 6 \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} \frac{z}{10}\, dz = \left.\frac{z^2}{20}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{x^2-4^2}{20}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<4 \rightarrow \text{Hau beti} = 0 \\ \frac{x^2-4^2}{20} & 4 \leq x \leq 6 \\ 1 & x>6 \rightarrow \text{Hau beti} = 1 \end{cases}$$

3) Puntu baten prob → $P(X=5)$

· $P(X=5)=0$ → Puntu zehatz baterako delako.

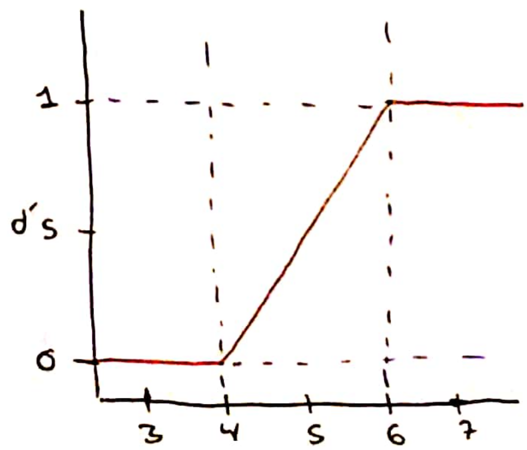
· $P(X \leq 5) = \int_{-\infty}^{5} f(z) = \int_{4}^{5} f(z) = F(5) = \frac{5^2-4^2}{20} = 0'45$

· $P(X > 4'3) = 1 - F(4'3) = 1 - \frac{4'3^2-4^2}{20} = 0'875$

· $P(4'2 \leq X \leq 4'8) = F(4'8) - F(4'2) = \frac{4'8^2-4^2}{20} - \frac{4'2^2-4^2}{20} = 0'27$

· $P(3'6 \leq X \leq 5'2) = F(6'2) - F(3'6) = \frac{5'2^2-4^2}{20} - 0 = 0'7125$

4) Irudikatu



## 5.4. Probabilitate banaketak

- Banaketa binarioa ($b(p)$)
  Banaketa binomiala
  Banaketa Poisson
  } Diskretua

Banaketa exponentziala
Banaketa Uniformea
} Jarraia

### 5.4.1 Banaketa binarioa (Bernouilli)

- Bi probabilitate puntu dituen prob banaketa $\rightarrow X \sim b(p)$

↳ Gertaera bat edo bestea → non $p$ = gertatzeko prob

Adb → txanpon baten jaurtiketa.

$X \begin{cases} 1 & \text{aurpegi} \\ 0 & \text{gurutze} \end{cases}$ $P(X=1) = p$
$P(X=0) = 1-p = q$

### 5.4.2 Banaketa binomiala

- Bi prob puntu baina $n$ aldiz gertatu $\rightarrow Z \sim b(p,n)$

$\rightarrow Z = X_1 + X_2 .. X_n$ non $X_i \sim b(p)$

Adb: txanpon bat $n$ aldiz bota.

- Zenbatasun funtzioa: $P(X=x) = P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
- Banaketa funtzioa:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \sum \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} & 0 \leq x \leq n \\ 1 & n<0 \end{cases}$$

Adb

Bota txanpon bat 3 aldiz. bi aurpegi ateratzeko prob)

$P(z=2) = P(A,A,G) + P(A,G,A) + P(G,A,A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

↳ edo Banaketa binom formula $z \sim b(p=1/2, n=3)$

$P(z=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8}$

## 5.4.3. Poisson Banaketa

- $X \sim P(\lambda)$ ($\lambda$ : Parametro erreal positiboa)

↳ Poisson banaketan, denbora, azalera edo beste neurriak aztertzen dira.

- Zenbatasun funtzioa:

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \qquad (k=0,1,2\ldots)$$

- Adb: liburu bateko akatsak, errepide bateko istripuak

- Banaketa funtzioa

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \sum \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} & x \geq 0 \end{cases}$$

Adb

X = akats kopurua ($\lambda = 0'4$)

- Hiru akats izateko prob

$$P(X=3) = \frac{e^{-0'4} \cdot (0'4)^3}{3!} = 0$$

- Orri batirezi eta gutxienez akats bat

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0)$$

$$1-P(X=0) = 1 - \frac{e^{-0'4}(0'4)^0}{0!} = 1-e^{-0'4} = 0'32$$

## 5.4.4 Banaketa Uniforme

$X \sim U(a,b]$ uniformea da baldin eta $\int_a^b k\,dx = 1 = kx\Big]_a^b = \underbrace{k(b-a)}_{=1}$

- Dentsitate funtzioa

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Banaketa funtzioa

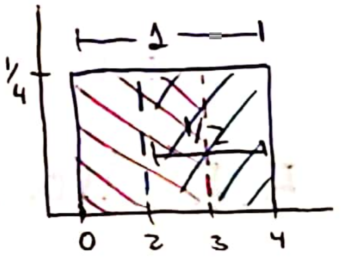
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x>b \end{cases}$$

$x \sim U[0,4]$ → Kalkulatu:

$P(2 \leq x \leq 4) = P(x \in [2,4]) = \int_2^4 \frac{1}{4-0}\,dx = \frac{4-2}{4-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$P(2 \leq x \leq 5) = P(x \in [2,4]) = \int_2^4 \frac{1}{4-0}\,dx = \frac{1}{2}$

$P(x \leq 3) = P(x \in [2,3]) = \int_0^3 \frac{1}{4}\,dx = \frac{3-0}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$




## 5.4.5 Banaketa Esponentziala.

Banaketa esponentziala $X \sim exp(\lambda)$ baldin eta dentsitate funtz:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- Bi banaketa indepen artero distantzia neurtzeko (zenbat denb pasatzen den bi pertsona sartzen dire artean)

- Banaketa funtzioa!

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Adb

- kafetegi batean edari bat lortzeko itxaron behar den denbora.

dents funtz:

$$f(x) = \begin{cases} 0'25 e^{-0'25x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1) 3 min baino geyo itxaon prob?

2) (2-4) min artean itxoin prob?

1) Dentsitate funtzioa

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 \int_0^3 0'25 e^{-ex}\,dx = 1 + e^{-0'25x}\Big]_0^3 =$

$1 + e^{-0'75} - e^0 = 0'472$

1) Banaketa funtzioa.

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-0'75}) = 0'472$

2) Dentsitate funtzioa.

$$P(2 \le x \le 4) = \int_2^4 0'25 e^{-0'25x}\,dx = -e^{-0'25x}\Big]_2^4 = -e^{-1} + e^{-0'5} = 0'2...$$

3) Banaketa funtzioa.

$$P(2 \le x \le 4) = F(4) - F(2) = (1 - e^{-1}) - (1 - e^{-0'5}) = 0'24$$

# 5.5 transformazioak

## 1) Xaa Diskretuan

Prob banaketa: → Kalkulatu nahi dugu Y-ren banaketa jarlinda

↳ $Y = x^2 - 6$

| X | P(x) |
|---|---|
| -3 | 0'3 |
| 3 | 0'1 |
| 5 | 0'6 |

$\rightarrow P(x) = 0'3 \Rightarrow (-3)^2 - 6 = 3$

$P(x) = 0'1 \Rightarrow (3)^2 - 6 = 3$

$\left.\right\}$ = Berdinak dira

$P(x) = 0'6 \Rightarrow (5)^2 - 6 = 19$

| Y | 3 | 19 |
|---|---|---|
| P(y) | 0'4 = (0'3 + 0'1) | 0'6 |

=

| Y | 3 | 19 |
|---|---|---|
| P(Y) | 0'4 | 0'6 |

## 2) Xaa Jarraian

→ Pasa behar da x dents f-tik → Y dents f-ra

$f_x(x) \rightsquigarrow f_y(y) \qquad Y = x^2 - 6 \rightarrow y = h(x)$

• Pausuak:

① X-ren euskarria ⇒ Y-ren euskarria

$x \in [a, b] \rightsquigarrow [h(a), h(b)]$

② Alderantzizko funtzioa kalkulatu.

$y = h(x) \rightsquigarrow x$ bakanduz $\Rightarrow x = h^{-1}(y)$

③ Funtzio hori deribatu → $x'(y)$

④ $f(y) = f(x) \cdot |x'(y)|$

Banaketa F lortzeko:

→ h gorakorra!

$F(y) = P(Y \le y) = P(h(x) \le y)$

$= P(X \le h^{-1}(y)) =$

$P(X \le x(y)) = F(x(y))$

→ h beherakorra.

$F(y) = 1 - F(x(y))$

24-1 idb

$X$aa $[1,2]$ tartean $X \sim \exp U[1,2]$ $Y = e^X$

a) $X \sim U[1,2]$ dents funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1,2] \\ 0 & \text{Bestela} \end{cases}$$

1) $Y = h(x) = e^x$ $x \in [1,2] \to y \in [e^1, e^2] = [2'7, 7'4]$

2) Alderantzizkoa: $y = e^x \Rightarrow \ln y$

3) Deribatu $\to$ $x'(y) = (\ln y)' = \frac{1}{y}$

4) $f(y) = 1 \cdot \left|\frac{1}{y}\right| = f(y) \begin{cases} \frac{1}{y} & y \in [7,2] \\ 0 & \text{Bestela.} \end{cases}$

↳ x-ren dents funtzioa $\to f(x) = x \in [1,2] \to \frac{1}{2-1}$

# 5.6. Aldagai aleatorioak $\mathbb{R}^2$-n ... etb

## 5.6.1. Aldagai aleatorioak $\mathbb{R}^2$-n

$(X,Y)$aa-ren Banaketa Funtzioa.

$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$

↳ $F(x,y)$-ren balioak $[0,1]$ tartean

↳ $F(x,y)$ monotono gorakorra.

↳ $\lim_{x,y \to -\infty} F(x,y) = 0$

↳ $\lim_{x,y \to \infty} F(x,y) = 1$

↳ $F(x,y)$ jarraitua edozein punturen eskubitik, baina ezkerretik ez beti

· X eta Y diskretuak badira $(x,y)$ baita ere.

## 5.6.2 Banaketa funtzioa $\mathbb{R}^2$-n eta batzer banaketa.

- Aldagai aleatorio diskretuak

→ Zenbatasun funtzio bateratua.

$$F(x_i, y_j) = P(X \le x_i, Y \le y_j) = P(X \le x_i \cap Y \le y_j)$$

→ Banaketa funtzioa

$$F(x,y) = \sum\sum P(x_i, y_j)$$

Adb

Zeb funtz:

| x,y | (1,2) | (2,2) | (2,4) | (3,2) | (3,4) | (3,6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x,y) | 0'1 | 0'1 | 0'3 | 0'3 | 0'1 | 0'1 |

Zeb funtz Bateratua:
$X = \{1,2,3\}$ $Y = \{2,4,6\}$

- Kalkulatu gertaera honen prob $B = \{(0 \le X < 2'5) \cap (2 \le Y \le 7)\}$
- P(B) kalkulatzeko gertaeren barne puntu guztien prob

$$P(B) = \sum_{(x_i,y_j) \in B} P(x_i, y_j) = P(1,2) + P(2,2) + P(2,4)$$

$$P(B) = 0'1 + 0'1 + 0'3 = 0'5$$

- Kalkulatu gertaera honen prob $C = \{(x,y) | Y - 2x = 0\}$

$$P(C) = \sum_{x_i y_j \in C} P(x_i, y_j) = P(Y = 2X) = P(1,2) + P(2,4) + P(3,6)$$

$$P(C) = 0'1 + 0'3 + 0'1 = 0'5$$

↳ eta $P(Y \le 2X)$ izango balitz?

$$P(Y \le 2X) = P(1,2) + P(2,2) + P(2,4) + P(3,2) + P(3,4) + P(3,6)$$

$$P(Y \le 2X) = 0'1 + 0'3 + 0'3 + 0'1 + 0'1 + 0'1 = 1$$

- Banaketa funtzio bateratua:

$$F(2,4) = P(X \le 2, Y \le 4) = P(1,2) + P(2,2) + P(2,4) = 0'1 + 0'1 + 0'3 = 0'5$$

$$F(1,2) = P(X \le 1, Y \le 2) = P(1,2) = 0'1$$

. Bate

→ X-rent

- Bazter probabilitate funtzioak.

→ X-rentzat: $P(X=x_i) = P_x(x_i) = \sum P(x_i, y_j)$

Y-rentzat: $P(Y=y_j) = P_y(y_j) = \sum P(x_i, y_j)$

- Bazter banaketa funtzioak:

x-rentzat: $F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i < x} P_x(x_i) = F(x, \infty)$

y-rentzat: $F_y(y) = P(Y \leq y) = \sum P_y(y_j) = F(\infty, y)$

→ aurreko adib-aren batera.

| x\y | 2 | 4 | 6 | $P_x(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0'1 | 0 | 0 | 0'1 |
| 2 | 0'1 | 0'3 | 0 | 0'4 |
| 3 | 0'3 | 0'1 | 0'1 | 0'5 |
| $P_y(y)$ | 0'5 | 0'4 | 0'1 | 1 |

- Aldagai aleatorio jarraituak

- Xaa jarraiaren dentsitate funtzio bateratua ($f(x,y)$) bere Banaketa funtzioaren ($F(x,y)$) bigarren deribatu gurutzatua eginez lortzen dugu.

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(z,t)\,dt\,dz \qquad f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

- Dentsitate funtzio bateratutik Bazter dentsitate funtzioak lortu.

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dt \qquad f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z,y)\,dz$$

- Bazter banaketa funtzioak

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(z)\,dz = F(x, \infty)$$

$$F_y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_y(t)\,dt = F(\infty, y)$$

Adb

Izan bedi dentsitate funtzioa:

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy & x\in[0,1] \quad y\in[0,1] \\ 0 & \text{Bestela.} \end{cases}$$

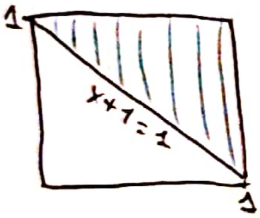
• Kalkulatu zein izan behar den C-konstantea $f(x,y)$ dentsitate funtzioa izateko:

$$\int_0^1\int_0^1 cxy\,dx\,dy = 1 \rightarrow \int_0^1 c\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 \cdot y = \frac{c}{2}\frac{y^2}{2}\Big]_0^1 = 1$$

$$\frac{c}{4}=1 \rightarrow C=4$$

• Jakinda dentsitate funtzioa $\{c=4 \rightarrow 4xy\}$ orain kalkulatuko dugu $\{x+y>1\}$ gertaeraren probabilitatea. Horretarako dents $f$ hori gertaeraren esparruan integratu behar da $\rightarrow 0<x<1$ eta $0<y<1$

Beraz esparrua:




$$\cdot\ P(x+y>1) = \int_0^1\int_{1-x}^1 4xy\,dy\,dx = \int_0^1\int_{1-y}^1 4xy\,dx\,dy$$

$$= 4\int_0^1 y\frac{x^2}{2}\Big]_{1-y}^1 = 2\int_0^1 y(2y-y^2)\,dy =$$

$$2\int_0^1 (2y^2-y^3)\,dy = 4\frac{y^3}{3}-2\frac{y^4}{4}\Big]_0^1 = 0'833..$$

## 5.7. Banaketa baldintzatuak

• $(x,y)$aren bate banaketa bateratua jakinda Banaketa baldintzatua kalkulatu dezakegu

### 5.7.1 Banaketa baldintzatuak kasu Diskretuan.

• Xen banaketa Y-ri baldintzatua

↳ X-en zenbatetasun funtzioa Y-rekiko.

$$P_{X|Y=y}(x) = P(X=x\,|\,Y=y) = \frac{P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})}{P(Y=y)} = \frac{P(x,y)}{P_Y(y)}$$

↳ $x$-en Banaketa funtzioa $Y$-rekiko.

$$F_{X|Y=y}(x) = P(X \leq x | Y \leq y) = \sum P(x_i | Y=y)$$

- $Y$-ren banaketa $x$-ri baldintzatua
  ↳ $Y$-ren zenbatasun funtzioa $x$-ri baldintzatua

$$P_{Y|X=x}(y) = P(Y=y | X=x) = \frac{P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})}{P(X=x)} = \frac{P(x,y)}{P_X(x)}$$

↳ $y$-ren Banaketa funtzioa

$$F_{Y|X=x}(y) = P(Y \leq y | X=x) = \sum P(y_j / X=x)$$

Adb

| $X \backslash Y$ | 2 | 4 | 6 | $P_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0'1 | 0 | 0 | 0'1 |
| 2 | 0'1 | 0'3 | 0 | 0'4 |
| 3 | 0'3 | 0'1 | 0'1 | 0'5 |
| $P_Y(y)$ | 0'5 | 0'4 | 0'1 | 1 |

1) $X$-ren zenbatasun funtzioa $Y=2$-rekiko
2) $Y$-ren zenbatasun funtzioa $X=3$-rekiko

(1)

$$P_{X|Y=2}(x) = \frac{P((X=x) \cap (Y=2))}{P_Y(Y=2)} = \frac{P(X,2)}{P_Y(2)} = \begin{cases} \frac{P(1,2)}{P_Y(2)} = \frac{0'1}{0'5} = 0'2 \rightarrow x=1 \\ \frac{P(2,2)}{P_Y(2)} = \frac{0'1}{0'5} = 0'2 \rightarrow x=2 \\ \frac{P(3,2)}{P_Y(2)} = \frac{0'3}{0'5} = 0'2 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

(2)

$$P_{Y|X=3}(x) = \frac{P(Y=y \cap X=3)}{P_X(X=3)} = \frac{P(3,y)}{P_X(3)} = \begin{cases} \frac{P(3,2)}{P_X(3)} = \frac{0'3}{0'5} = 0'6 \rightarrow y=2 \\ \frac{P(3,4)}{P_X(3)} = \frac{0'1}{0'5} = 0'2 \rightarrow y=4 \\ \frac{P(3,6)}{P_X(6)} = \frac{0'1}{0'5} = 0'2 \rightarrow y=6 \end{cases}$$

## 5.7.2. Banaketa baldintzatuak xaxa Jarraietan.

- X-ren dentsitate funtzioa Y-rekiko.

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

- Y-ren dentsitate funtzioa X-rekiko.

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Adib

Dents funtzioa:

$$f(x,y)\begin{cases} \frac{1}{2}(3x^2+2y) & 0\leq x\leq 1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{Bestela} \end{cases}$$

- Kalkulatu $P(X\leq 0'5 \mid Y=0'7)$ → 2 Pausuetan osatuko dugu.

1) Dentsitate f baldintzatua lortu.

$$f_{X|Y=0'7}(x) = \frac{f(x,0'7)}{f_Y(0'7)}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2+2y)\,dx = \frac{1}{2}(1+2y) & 0\leq y\leq 1 \\ 0 \text{ Bestela} \end{cases}$$

$$f_{X|Y=0'7}(x) = \frac{f(x,0'7)}{f_Y(0'7)} = 1'25x^2 + \frac{0'7}{1'2} \quad 0\leq x\leq 1$$

2) Eskatutako prob 1. pausuan lortutako dents f baldintzatua integratuz.

$$P(X\leq 0'5 \mid Y=0'7) = \int_0^{0'5} f_{X|Y=0'7}(x)\,dx = \int_0^{0'5}\left(1'25x^2+\frac{0'7}{1'2}\right)dx$$

$$P(X\leq 0'5 \mid Y=0'7) = 0'3437.$$

# 5.8 Independentzia estokastikoa

• X eta Y aldagaiak independienteak dira baldin eta:

$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall x,y$

A.a. Diskretuetan: 5.8.1

→ Independentzia baldintza:

$P(x,y) = P_X(x) P_Y(y)$

→ Beraz independienteak badira:

$$P_{X|Y=y} = \frac{P(x,y)}{P_Y(y)} = P_X(x)$$

$$P_{Y|X=x} = \frac{P(x,y)}{P_X(x)} = P_Y(y)$$

Hau da, zenbatasun funtzio baldintzatuak = bazter zenbatasun funtzioak.

5.8.2. A.a Jarraituetan.

• Banakaturen baldintza deribatuz lortzen dugu indep baldintza.

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

↳ Indep badira:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

Dentsitate funtzio baldintzatuak = Bazter dentsitate funtzioak

Adb

Demagun: hurrengo dents f:

$$f(x,y) \begin{cases} \frac{1}{2}(3x^2 + 2y) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{Bestela} \end{cases}$$

Aztertu dezagun ea indep diren.
↳ Aurreko adibidean dents f bateratua eta Y-ren bazter banaketa atera dugu. Falta da x-ren bazter banaketa.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2+2y)\,dy = \frac{1}{2}(3x^2+1) & 0<x<1 \\ 0 & \text{Bestela} \end{cases}$$

$f(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$ → beraz ez dira independenteak.

# 6. Gaia: Esperantza matematikoa, momentuak, F karak

## 6.1. Esperantza matematikoa $\mathbb{R}$-n

- Esperantza matematikoa $(E(h(x)))$ = Xaa eta $h(\cdot)$ funtzio bat hartuta $h(x)$-ren esperotako balioa.

→ Aldagai Jarraia => Integral finitua

$$E(h(x)) = \int_\Omega h(x)\cdot f(x)\,dx$$

→ Aldagai Diskretua => Batura finitua

$$E(h(x)) = \sum h(x_i)\cdot P(x_i) \quad (\text{antzeko } \sum x_i n_i)$$

- X-ren itxarondako balioari deitzen diogu X-ren batezbesteko edo esperantza, $E(x)$, itxarondako balioa bezalakoa denean $h(x)$ funtzio identitatea denean

→ Jarraia

$$E(x) = \int_\Omega x\cdot f(x)\,dx$$

→ Diskretua

$$E(x) = \sum x_i \cdot P(x_i)$$

Topic
- X-ren bi
esperant

Propietateak:

- X-ren bi funtzioen batuketaren esperantza funtzio horien esperantzen edo itxarondako balioen batuketa da.

$$E[h_1(x) + h_2(x)] = E(h_1(x)) + E(h_2(x))$$

- Xaa baten transformazio lineal baten esperantza X-en esperantza-ren transformazioa da. → Konstante baten esperantza balio bera da.

$$E(ax+b) = aE(x) + b$$

Adb

zehb funtz ⇒

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | 4/12 | 6/12 | 2/12 |

- a) Zein da esperantza?

$$E(x) = \sum x_i P(x_i) = 1 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{6}{12} + 3 \cdot \frac{2}{12} = \frac{22}{12} = 1'83$$

- b) $Z = 5x + 3$ transformatuaren batezbestekoa.

$$E(z) = E(5x+3) = 5E(x) + 3 = 5 \cdot \frac{22}{12} + 3 = 12'165$$

## 6.2. Momentuak ℝ-n

### 6.2.1. Momentu arruntak. Batazbestekoa balioa.

Xaa baten k ordenako momentu arrunta ⇒ $a_k = E(x^k)$

↳ Aldagai jarraia: $a_k = \int_\Omega x^k \cdot f(x)\, dx$

↳ Aldagai diskretua: $a_k = \sum x_i^k \cdot P(x_i)$

- Batazbestekoa ⇒ $(k=1)$ denean → $a_1 = E(x) = m$

### 6.2.2. Momentu zentratuak. Bariantza.

- Momentu zentratua ⇒ $M_k = E((x-m)^k)$

↳ Jarraia ⇒ $M_k = \int_\Omega (x-m)^k \cdot f(x)\, dx$

↳ Diskretua ⇒ $M_k = \sum (x_i - m)^k \cdot P(x_i)$

- Bariantza $(k=2)$ = $M_2 = E((x-m)^2 = \sigma^2 = Bar(x)$

· Bariantza momentu arrunten bitartez kalkulatu.

$$Bar(x) = \sigma^2 = E((x-m)^2) = E[x^2 - 2mx + m^2] =$$
$$E(x^2) - 2\cdot m\cdot E(x) + m^2 = E(x^2) - 2m^2 + m^2 = \boxed{a_2 - m^2}$$

· Propietatea (transformazio lineala)

↳ Har dezagun $Y = aX + b$ → orduan:

$$\sigma_Y = Bar(aX+b) = E\left[aX + b - (aE(x) - b)\right]^2 = a^2 E(x - E(x))^2$$
$$\sigma_Y = a^2 \cdot \sigma_x^2$$

## 6.2.3. Beste balio tipikoak.

· Asimetria koefizientea $\Rightarrow \gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma_3}$

· Kurtosi koefizientea $\Rightarrow \gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma_4} - 3$

Arik 1

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

· Batez bestekoa eta bariantza.

→ Batez bestekoa.

$$M = E(x) = \sum x_i P(x_i) = 1\tfrac{1}{6} + 2\tfrac{1}{6} + 3\tfrac{1}{6} + 4\tfrac{1}{6} + 5\tfrac{1}{6} + 1 = 3'5$$

→ Bariantza.

$$\sigma^2 = Bar(x) = E(x^2) - m^2 = \sum x_i^2 P(x_i) - m^2 =$$
$$1^2\tfrac{1}{6} + 2^2\tfrac{1}{6} + 3^2\tfrac{1}{6} + 4^2\tfrac{1}{6} + 5^2\tfrac{1}{6} + 6^2\tfrac{1}{6} - 3'5^2 = 2'916$$

Arik 2

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ni | 32 | 25 | 29 | 30 | 31 | 33 |
| Fi | 0'178 | 0'139 | 0'161 | 0'167 | 0'172 | 0'183 |

→ Batez beste ⇒

$$\bar{x} = \sum x_i f_i = 1\cdot 0'178 + 2\cdot 0'139 + 3\cdot 0'161 + 4\cdot 0'167 + 5\cdot 0'172 + 6\cdot 0'183 = 3'565$$

- Bariantza ⇒ $S^2_x = \sum x_i^2 \cdot f_i - (3'565)^2$

$$S^2_x = 1^2\cdot 0'178 + 2^2\cdot 0'139 + 3^2\cdot 0'161 \dots - (3{,}565)^2 = 3'03$$

# 6.3. Chebyshev-en borneak eta kotak

A.a baten banaketa ezezaguna denean ezindugu prob kalkulatu baino bai probabilitatean kotak jarri (Goi eta behe kotak)

↳ Behe kota ⇒ $P(|X-m| < K\cdot\sigma) \geq 1 - \frac{1}{K^2}$

↳ Goi kota ⇒ $P(|X-m| \geq K\cdot\sigma) \leq \frac{1}{K^2}$

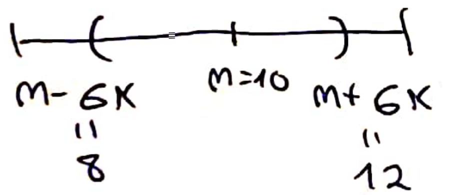
Adb

Xaa-k banaketa ezezaguna du. $m=10$ eta $\sigma^2 = Bar(x) = 3$

$P(x \in (8,12))$ tartean kotak

$E(x)=10 \quad \sigma_x^2 = 3$ → ezezaguna denez → Chebishev kotak

$P(|X-m| < K\cdot\sigma) \geq 1 - \frac{1}{K^2}$ ⇒ Behe kota




$$\left.\begin{array}{l} 10-\sigma K = 8 \\ \sigma K = 2 \\ K = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right\}$$

$P(|X-10| < 2) \geq 1 - \frac{1}{(2/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4}$

- Behe kota $= \frac{1}{4}$
- Goi kota $= \frac{1}{(2/\sqrt{3})^2} = \frac{3}{4}$

# 6.4. Funtzio karakteristikoa, momentu sortzailea, eta kumulatiboa

- Funtzio karakteristikoa, funtzio sortzailea eta funtzio akumulatiboen erlazio handia. Haueen hurrengoa lortu dezakegu:
  - → Banaketa funtzioa
  - → Batazbest eta bariantza
  - → Frogapen desberdinak

↳ F. Karakteristikoa beterra beti existitzen dena ⇒ UNIBOKOA

| Xaa diskretu | Xaa Jarraia |
| --- | --- |
| $F_x(x)$ Banaketa f | $F_x(x)$ Banaketa f |
| $P_x(x)$ Zenbatekoen | $f_x(x)$ Dentsitate f |

• Funtzio Karakteristikoa → $\Psi_x(u) = E(e^{i \cdot u \cdot x})$

↳ $x$ → aa

↳ $u$ → f karakteristikoaren aldagaia

↳ $i$ → zenbaki imaginarioa $i = \sqrt{-1}$

1) Xaa Diskretuan ⇒ $\Psi(u) = \sum e^{iux} \cdot P(x)$

↳ Adb:

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | 0'7 | 0'1 | 0'2 |

⇒ $\Psi_x(u) = E(e^{iux}) = \sum e^{iux} \cdot P(x)$

→ $e^{iu} \cdot 0'7 + e^{iu2} \cdot 0'1 + e^{iu3} \cdot 0'2 =$

2) Xaa Jarraian ⇒ $\Psi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \cdot f(x)\, dx$

• Momentu funtzio sortzailea = $\alpha(u) = E(e^{ux})$

1) Xaa Diskretu ⇒ $\alpha(u) = \sum e^{ux} \cdot P(x)$

2) Xaa Jarraian ⇒ $\alpha(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \cdot f(x)\, dx$

• Funtzio Kumulatiboa → $\mu(u) = \ln(\alpha(u))$

→ Propietateak

• Xaa-ren transformazio lineala non $Y = aX + b$

→ Funtzio karakteristiko ⇒

$$\Psi_y(u) = E(e^{iuy}) = E(e^{iu(ax+b)}) = e^{iub} \cdot \Psi_x(a \cdot u)$$

→ Momentu funtzio sortzailea.

$$\alpha_y(u) = E(e^{uy}) = E(e^{u(ax+b)}) = e^{ub} \cdot \alpha_x(au)$$

→ Funtzio kumulatiboa

$$\mu_y(u) = \ln(\alpha_y(u)) = \ln(e^{ub}) + \ln(\alpha_x(au)) = ub + \mu_x(au)$$

# Momentuen kalkulua funtzioak erabiliz

## 1) Momentu funtzio sortzailea ($\alpha(u)$)

- K-garren deribatua kalkulatuz eta (0) momentuan jarriz.

↳ $E(x) = \alpha'(0) \Rightarrow \alpha'(u) = E[xe^{ux}]$

↳ $\alpha^2 = E(x^2) = \alpha''(0) \Rightarrow \alpha''(u) = E(x^2 e^{ux})$

↳ $1 = \alpha(0)$

## 2) Funtzio karakteristikoa.

- Momentu f sortzailea existitzen bada, hau ler dezakegu haren funtzio karakteristikoa $\varphi(u) = \alpha(iu)$

↳ $\varphi(0) = 1$

↳ $\varphi'(0) = i\,E(x) = i \cdot \alpha_1$

↳ $\varphi''(0) = i^2 E(x^2) = -\alpha_2$

## 3) Funtzio kumulatiboa.

- $K=0 \rightarrow M(0) = \ln 1 = 0$
- $K=1 \rightarrow M'(u) = [\ln \alpha(u)]' = \dfrac{\alpha'(u)}{\alpha(u)}$ • $K_1 = M'(0) = \dfrac{\alpha'(u)}{\alpha(u)} = m$
- $K=2 \rightarrow M''(u) = \dfrac{(\alpha''(u) \cdot \alpha(u) - \alpha'(u)^2)^2}{\alpha(u)}$ • $K_2 = M''(0) = \alpha_2 - m^2 = \sigma^2$
- $K=3 \rightarrow K_3 = M^{3)}(0) = \mu_3 \cdot \gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = \dfrac{K_3}{K_2^{3/2}}$
- $K=4 \rightarrow K_4 = M^{4)}(0) = \mu_4 - 3\sigma^4$ • $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{K_4}{K_2^2}$

Adb

1) Izan bedi $X \sim b(p)$ X-ren

- Momentu f sortzailea

$$\alpha(u) = E(e^{ux}) = p \cdot e^{u} + q \quad , \quad p+q=1$$

- Funtzio kumulatiboa

$$M(u) = \ln(p \cdot e^{u} + q)$$

- Fun kumulatibo deribatua

$$M'(u) = \frac{pe^{u}}{pe^{u}+q} \rightsquigarrow M'(0) = \frac{pe^{0}}{pe^{0}+q} = p \rightsquigarrow M'(0) = E(x) = p$$

- eta bigarrena

$$M''(u) = \frac{p \cdot q \cdot e^{u}}{(pe^{u}+q)^2} \rightarrow M''(0) = \sigma^2 = pq$$

2) Izan bedi $X \sim P(\lambda)$ X-ren

- Momentu f sortzailea.

$$\alpha(u) = e^{\lambda \cdot (e^{u}-1)}$$

- Funtzio kumulatiboa

$$M(u) = \ln(e^{\lambda \cdot (e^{u}-1)}) = \lambda(e^{u}-1)$$

↳ Deribatua.

$$M'(u) = \lambda e^{u} \rightsquigarrow M'(0) = \lambda e^{0} = E(x) = \lambda$$

↳ Bigarrena

$$M''(u) = \lambda e^{u} \rightsquigarrow M''(0) = \sigma^2 = \lambda$$

Izan bedi $X \sim exp(a)$ $\rightarrow$ $f(x) = ae^{-ax}$ $x \geq 0$

• X-ren moment funtzioa

$$\alpha(u) = \int_0^{\infty} ae^{ux} \cdot e^{-ax} \, dx = \frac{a}{a-u} \int_0^{\infty} (a-u) e^{-(a-u)x} \, dx = \frac{a}{a-u}$$

• X-ren funtzio kumulatiboa

$$M(u) = \ln \alpha(u) = \ln(a) - \ln(a-u)$$

↳ Deribatu!

$$M'(u) = \frac{1}{a-u} \longrightarrow M'(0) = \frac{1}{a-0} = \frac{1}{a} = m$$

$$M''(u) = \frac{1}{(a-u)^2} \longrightarrow M''(0) = \frac{1}{(a-0)^2} = \frac{1}{a^2} = \sigma^2$$

# 6.5. Esperantza matematikoa $\mathbb{R}^2$-n

• Aldagai jarraiak

$$E(h(x,y)) = \int_{\Omega}\int_{\Omega} h(x,y) \cdot f(x,y) \, dx \, dy$$

• Aldagai diskretuak

$$E(h(x,y)) = \sum h(x_i, y_j) \cdot P(x_i, y_j)$$

→ Propietateak

1) Baturaketaren esperantza = esperantzeren baturaketa.

$$E(h_1(x) + h_2(y)) = E(h_1(x)) + E(h_2(y))$$

2) Independienteak badira biderketarekin berdin

$$E(h_1(x) \cdot h_2(y)) = E(h_1(x)) \cdot E(h_2(y))$$

3) Aldagaiak indep badira eta trans: $Z = ax + by$ → funtzio sortzaileak

• $\alpha_Z(u) = \alpha_{ax+by}(u) = E(e^{u(ax+by)}) = E(e^{aux}) \cdot E(e^{buy}) = \alpha_x(au) \, \alpha_y(bu)$

• $\varphi_Z(u) = \varphi_x(au) \cdot \varphi_y(bu)$

• $M_Z(u) = M_x(au) + M_y(bu)$

- n - an independiente hartuta $\rightarrow X_1, X_2 .. X_n$

haien konbinazio lineala: $Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 \dots + a_n X_n$

$\hookrightarrow \alpha_Z(u) = \alpha_1(a_1 u) \cdot \alpha_2(a_2 u) \dots \cdot \alpha_n(a_n u)$

$\hookrightarrow \Psi_Z(u) = \Psi_1(a_1 u) \cdot \Psi_2(a_2 u) \dots \cdot \Psi_n(a_n u)$

$\hookrightarrow M_Z(u) = M_1(a_1 u) \cdot M_2(a_2 u) \dots M_n(a_n u)$

- Batuketa eta kenketak aldagai independienteetan. $(X+Y)$

$$\left.\begin{aligned} &\hookrightarrow \alpha_{x+y} = \alpha_x(u) \cdot \alpha_y(u) \\ &\hookrightarrow \alpha_{x-y} = \alpha_x(u) \cdot \alpha_y(-u) \end{aligned}\right\} \text{Berdin} \begin{cases} \Psi_{x+y/x-y} \\ M_{x+y/x-y} \end{cases}$$

## 6.5.1 Kobariantza.

- $\sigma_{xy} = KOB(x,y) = E(x,y) - E(x) \cdot E(y) = E[(x-m_x) \cdot (y-m_y)]$

$\rightarrow$ Aldagai Jarraiak

$$\sigma_{xy} = \int_{\Omega y} \int_{\Omega x} (x-m_x) \cdot (y-m_y) \cdot f(x,y) \, dx \, dy$$

$\rightarrow$ Aldagai diskretuak

$$\sigma_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x) \cdot (y_j - m_y) \cdot P(x_i, y_j)$$

$$= \sum \sum x_i y_j \cdot P(x_i y_j) - \left(\sum x_i \cdot P(x_i) \cdot \sum y_j \cdot P(y_j)\right)$$

- $\sigma_{xy} > 0 \rightarrow$ Erlazio lineal Positibo
- $\sigma_{xy} < 0 \rightarrow$ Erlazio lineal Negatibo
- $\sigma_{xy} = 0 \rightarrow$ ez dago erlazio linealik

- Kobariantzaren kalkulu erraza $\Rightarrow KOB(x,y) = E(xy) - m_x m_y$

## 5.2. Korrelazio koefizientea.

- erlazio linealaren grado altua edo baxua neurtzen du.

$$\rho = \frac{Kob(x,y)}{\sigma x \cdot \sigma y} \quad \begin{cases} \rho_{xy} \simeq 1 & \text{Positibo altua} \\ \rho_{xy} \simeq -1 & \text{Negatibo altua.} \end{cases}$$

- transformazio lineal baten esperantza eta bariantza

1) $Z = ax + by$

$E(z) = aE(x) + bE(y)$

$\sigma_z^2 = Bar(z) = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\sigma xy$

2) $Z = ax - by$

$E(z) = aE(x) - bE(y)$

$\sigma_z^2 = Bar(z) = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 - 2ab\,\sigma xy$

Adb

x, y. indep

a) $Bar(ax+b) = a^2 \cdot Bar(x) + b^2$

Hau gezurra da puntu zehatz batean $Bar(b) = 0$ delako

b) $E(ax^2+by) = a\,Bar(x) + bE(y)$

Hau gezurra da $Bar(x) \neq E(x^2) \rightarrow Bar(x) = E(x^2) - E(x)^2$

c) $Bar(x-y) = Bar(x) + Bar(y)$

Egia indep direlako $\rightarrow$ bestela ez.

d) $Bar(ax+by) = a^2 Bar(x) + b^2 Bar(y)$

Egia $\rightarrow$ Indep

Adb

| $X \backslash Y$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $P(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $2/9$ | $0$ | $1/9$ | $3/9$ |
| $0$ | $0$ | $1/9$ | $2/9$ | $3/9$ |
| $1$ | $1/9$ | $2/9$ | $0$ | $3/9$ |
| $P(y)$ | $3/9$ | $3/9$ | $3/9$ | $1$ |

Bar(x,y)

| X | Y | |
|---|---|---|
| $-1$ | $-1$ | $2/9$ |
| ~~$-1$~~ | ~~$0$~~ | $0$ |
| $-1$ | $1$ | $1/9$ |
| ~~$0$~~ | ~~$-1$~~ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $1/9$ |
| $0$ | $1$ | $2/9$ |

| X | Y | |
|---|---|---|
| $1$ | $-1$ | $1/9$ |
| $1$ | $0$ | $2/9$ |
| ~~$1$~~ | ~~$1$~~ | $0$ |

Adb. · Ejercic...

a) Kalkulatu $E(x)$, $E(y)$, $E(x+y)$, $E(xy)$ eta KOB $(xy)$

$KOB(x,y) = E(xy) - E(x) \cdot E(y)$

$\hookrightarrow E(xy) = \Sigma\Sigma x_i y_i \cdot P(x_i y_i)$

$E(x) = \Sigma P_x(x_i) = -1 \cdot \frac{3}{9} + 0 \cdot \frac{3}{9} + 1 \cdot \frac{3}{9} = 0$

$\hookrightarrow E(y) = 0 \rightarrow$ ondorioz $\quad E(xy) = 0 \rightsquigarrow$ Inkorrelatuak

$KOB(x,y) = 0 - 0 \cdot 0 \rightarrow 0$

b) Kalkulatu $Bar(x)$, $Bar(y)$ eta $Bar(x+y)$

$Bar(x) = E(x^2) - E(x)^2$

$\hookrightarrow E(x^2) = \Sigma x_i^2 \cdot P_x(X = x_i) = (-1)^2 \cdot \frac{3}{9} + 0^2 \cdot \frac{3}{9} + 1^2 \cdot \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$Bar(x) = \frac{2}{3} - 0^2 = \frac{2}{3}$

$Bar(x) = Bar(y) \rightarrow x$ eta $y$ simetrikoak direlako.

$Bar(x+y) = E((x+y)^2) - E(x+y)^2 = Bar(x) + Bar(y) - \overbrace{2KOB(x)}^{0}$

$Bar(x+y) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 0 = \frac{4}{3}$

Adb

- Euskarria $[0,1]\,[0,1]$ karratua dentsitate $f = f(x,y) = x+y$ | $f(x,y)\begin{cases} x+y & x\in[0,1]\ y\in[0,1] \\ 0 & \text{Bestela} \end{cases}$

- $E(x)$, $E(y)$ eta KOB $(x,y)$ eta $E(x,y)$

- $E(x,y) = \int_0^1\int_0^1 \overset{xy\,\cdot\quad f(x)}{xy\cdot\underbrace{(x+y)}}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 x^2y+xy^2\,dy\,dx =$

$\int_0^1 x^2\frac{y^2}{2}+x\frac{y^3}{3}\Big]_0^1 dx = \int_0^1 x^2\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\overset{\text{ns}\,\times 4}{-0} = \frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\Big]_0^1$

$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}-0 = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}} = E(x,y)$

- $E(x) = \int_0^1 x\cdot f(x)\,dx \rightarrow f(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy$

↳ $f(x) = \int_0^1 x+y\,dy = xy+\frac{y^2}{2}\Big]_0^1 = x+\frac{1}{2}-0$

- $E(x) = \int_0^1 x\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 x^2+\frac{x}{2}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\Big]_0^1$

$= \frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0 = \boxed{\frac{7}{12}} = E(x)$

- $E(y) \Rightarrow$ kasu honetan dentsitate funtzio simetrikoa da $x=y$ eta esperantzak berdinak direnez $y$-ren $E(y) = E(x)$

$E(x) = E(y) = \boxed{\frac{7}{12}}$

- $KOB(x,y) = E(x,y) - E(x)\cdot E(y)$

$\sigma_{xy} = \frac{1}{3} - \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} =$

# 6.6. Esperantza baldintzatuak

- $X|Y=y$ aldagai aleatorio baldintzatu bat, X-ren esperantza y-rekiko baldin

$E[X|Y=y]$

→ Aldagai jarraia

$$E[X|Y=y] = \int_{\Omega} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\, dx$$

→ Aldagai Diskretua.

$$E(X|Y=y) = \sum x_i \cdot P_{X|Y=y}(x_i)$$

Adb Diskretu

| X\Y | 0 | 1 | $P_X$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0'33 | 0'27 | 0'6 |
| 1 | 0'27 | 0'17 | 0'4 |
| $P_Y$ | 0'6 | 0'4 | 1 |

- Kalkulatu → $E(Y|X=0)$

$E(Y|X=0) = 0P(Y=0|X=0) + 1P(Y=1|X=0)$

- $P(Y=0|X=0) = \dfrac{P(0,0)}{P(X=0)} = \dfrac{0'33}{0'6} = 0'55$
- $P(Y=1|X=0) = \dfrac{P(0,1)}{P(X=0)} = \dfrac{0'27}{0'6} = 0'45$

$E(Y|X=0) = 0 \cdot 0'55 + 1 \cdot 0'45 = 0'45$

$E(Y|X=0) = 0'45$

Adb Jarraia

$$f(x) \begin{cases} x+y & x \in [0,1] \quad y \in [0,1] \\ 0 & \text{Beste} \end{cases}$$

1) Bazter banaketak:

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)\, dx = \int_0^1 x+y\, dx = \frac{x^2}{2} + yx \Big]_0^1 = \frac{1}{2} + y$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)\, dy = \int_0^1 x+y\, dy = xy + \frac{y^2}{y} \Big]_0^1 = \frac{1}{2} + x$$

Funtzio baldintzatuak

$$f_{x|y=0}(x) = \frac{f(x,0)}{f_y(0)} = \frac{x+0}{1/2+0} = 2x$$

$$E[x|y=0) = \int_0^1 x \cdot f_{x|y=0}(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Arik

| x\y | -1 | 1 | P(x) |
|---|---|---|---|
| 0 | 3/6 | 1/6 | 4/6 |
| 1 | 2/6 | 0 | 2/6 |
| P(y) | 5/6 | 1/6 | 1 |

a) Kalkulatu E(x) eta E(y)

b) Kalkulatu x eta Y artero kobariantza. Indep ahal dira?

c) Momentu f. sortzailea, karaxteristikoa, kumulatiboa.

d) Moment f sortzailetik abiatuta x-ren bariantza.

a) $E(x) = \sum xi \cdot Px(xi)$

$E(x) = 0 \cdot \frac{4}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = mx$

$E(y) = -1 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{-4}{6} = my$

b) KOB

$KOB(x,y) = E(x,y) - E(x) \cdot E(y) \rightarrow E(x,y) = xi\, yj \cdot P(xi\, yj)$

$E(x,y) = -1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{6} + (\cancel{-1 \cdot 0 \cdot \frac{3}{6}}) + (1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6}) + (1 \cdot 1 \cdot 0) = -\frac{2}{6}$

$KOB(x,y) = -\frac{2}{6} - \frac{2}{6} \cdot \frac{-4}{6} = -\frac{1}{9} \rightarrow$ erlazio lineal Negatibo

· Indep?. $\rightarrow$ $KOB(x,y) \neq 0$ denez ez dira independienteak

c) M.f.s $\rightarrow \alpha_x(u) = E(e^{ux}) = \sum e^{ux} \cdot P_x(xi) = e^{u0} \cdot \frac{4}{6} + e^{u1} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} e^u$

karakt $\rightarrow \Psi_x(u) = E(e^{uix}) = \sum e^{uix} \cdot P_x(xi) = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \cdot e^{iu}$

kumula $\rightarrow M_x(u) = \ln(\alpha_x(u)) = \ln\left(\frac{4}{6} + \frac{2}{6} e^u\right)$

d) Bariantza.

$$Bar(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \alpha''_x(0) - (\alpha'_x(0))^2$$

↳ $\alpha'_x(u) = \frac{2}{6} e^u \longrightarrow \alpha'_x(0) = \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{2}{6}$

↳ $\alpha''_x(u) = \left(\frac{2}{6}\right) e^u \longrightarrow \alpha''_x(0) = \frac{2}{6}$

$$Bar(x) = \frac{2}{6} - \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{2}{6} - \frac{4}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Ariketa

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot y & x \in (0,2) \quad y \in (0,1) \\ 0 & \text{Bestela} \end{cases}$ | a) $E(x)$, $E(y)$, $E(x,y)$, $KOB(x,y)$

a) $E(x) = \int_0^2 x \cdot f(x)\, dx \longrightarrow f(x) = \int_0^1 \frac{3}{4} x^2 y \, dy = \frac{3}{4} x^2 \frac{y^2}{2} \Big]_0^1 = \frac{3x^2}{8}$

$$E(x) = \int_0^2 x \cdot \frac{3x^2}{8}\, dx = \int_0^2 \frac{3x^3}{8}\, dx = \frac{3x^4}{32}\Big]_0^2 = \frac{3}{2} = E(x)$$

$$E(y) = \int_0^1 y \cdot f(y)\, dy \longrightarrow f(y) = \int_0^2 \frac{3}{4} x^2 y \, dx = \frac{3}{4} \frac{x^3}{3} y \Big]_0^2 = 2y$$

$$E(y) = \int_0^1 y \cdot 2y \, dy = \int_0^1 2y^2 \, dy = \frac{2y^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3} = E(y)$$

$$E(x,y) = \int_0^2 \int_0^1 xy \cdot \frac{3}{4} x^2 y \; dy\, dx = \int_0^2\int_0^1 \frac{3}{4} x^3 y^2 \, dy\, dx = \int_0^2 \left[\frac{3}{4} x^3 \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{4}\, dx = \frac{x^4}{16}\Big]_0^2 = 1 = E(x,y)$$

$KOB(x,y) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow$ Ez korrelatuak

# 7. Gaia: Banaketa normala ta lim T zentrala.

## 7.1. $N(0,1)$ Banaketa def eta propietateak.

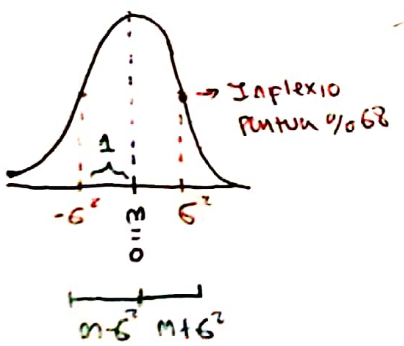
· Banaketa normalean $\begin{cases} \phi(t) \text{ dentsitate funtzioa} \\ \Phi(t) \text{ banaketa funtzioa.} \end{cases}$

. Erabilerak:
- Fenomeno askotarako erabili ahal da
- Kanpai forma (Gaussen kanpaia)
- Simetria $m$-rekiko.

$N(m, \sigma^2) = N(0,1) \rightarrow m=0$ eta $\sigma^2 = 1$ : barientza / desbideratze.

↳ $m = Me = Mo$

↳ $(m, \sigma^2) \rightarrow$ ezagututa badago → guztiz zehaztutako banaketa.




· Dentsitate funtzioa:

↳ $\phi t$ = formula $t \in \mathbb{R}$

· Integrala

↳ $P(t \le t) = \Phi(t) = \int_{-\infty}^{T} \phi(t)\, dt$

→ Balioak taulan!

. Taula $t \sim N(0,1)$

$t \in [0, 45] \Rightarrow t<0$ bada $\Phi(t)$ balio positiboarekin kalkulatuko ditugu

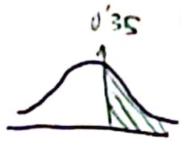
↳ Simetrikoa delako: $1 - \Phi(t) = 1 - 0'5$

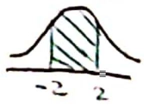
. Post-it
↳ Pg 9 (364)

- Batazbestekoa $= m = 0 \Rightarrow Mo = Me$
- Barientza: $\sigma^2 = 1$
- Asimetria koefizientea: $\gamma_1 = 0 \rightarrow$ simetrikoa
- Kurtosi koefizientea: $\gamma_2 = 0 \rightarrow$ erreferentzia. $= \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$
- Momentu f. sortzailea $= \alpha_X(u) = e^{u^2/2}$ $\quad X \sim N(0,1)$
- f. karakteristikoa $= \varphi_X(u) = e^{\frac{i^2 u^2}{2}} = e^{\frac{-u^2}{2}}$ $\quad (i^2 = -1)$ da

Ariketak

- $P(Z \leq 0'6) = \Phi(0'6) = 0'7257$ 

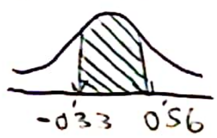
- $P(Z > 0'35) = 1 - \Phi(0'35) = 1 - 0'64 = 0'36$ 

- $P(|Z| \leq 2) =$ 

$= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2)] =$

$= 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot (0'97) - 1 = 0'954$

- $P(-0'33 < Z < 0'563) = P(Z < 0'563) - P(Z < 0'33) = \Phi(0'56) - \Phi(0'33)$

$= \Phi(0'56) - [1 - \Phi(0'33)] \ldots \rightarrow$ 


- $\underbrace{P(Z \leq a)}_{\Phi(a)} = 0'8264$

$\Phi(a) \Rightarrow 0'9$

- $P(Z > b) = 0'1314$

$1 - 0'1314 = 0'8686 \Rightarrow b = 1'12$

## 7.2. Banaketa normal orokorra

- $T \sim N(0,1)$ eta $T$-ren transformazio lineala.

$X = m + \sigma t \sim N(m, \sigma^2)$

↳ Beraz:

↳ $E(x) = E(\sigma t + m) = \sigma E(T) + m = m$

↳ $Bar(x) = E((x-m)^2) = E((\sigma t)^2) = \sigma^2$

- Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P\left(T \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

- Dentsitate funtzioa

$$f_x(x) = f_T(t(x))\,|t'(x)| = \Phi(t(x))\frac{1}{\sigma}$$

## Tipifikazioa:

- Aldagaiari batazbestekoa kendu eta desbiderazte tipikoaz zatitu.

↳ $\frac{x-m}{\sigma} \Rightarrow P\left(\frac{x-m}{\sigma} < \frac{x-m}{\sigma}\right)$

$N(m, \sigma)$: $m \to \bar{x}$, $\sigma \to$ desb; $N(0,1) \Rightarrow 0$, $1$

$$E\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot \left[E(x) - m\right] = 0$$

$$Bar(x) = \left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left[Bar(x) - 0\right] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

- $P\left(\frac{x-m}{\sigma} > \frac{x-m}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ ⇝ taulatuta.

<u>Arik</u>

$X \sim N(5,4)$

- $P(x>6) = P\left(\frac{x-5}{\sqrt{4}} > \frac{6-5}{\sqrt{4}}\right) = P(T > 0'5) = 1 - P(T < 0'5)$

$= 1 - \Phi(0'5) = 1 - 0'6915 = 0'3085$

- $P(x>0) = P\left(\frac{x-5}{\sqrt{4}} > \frac{0-5}{\sqrt{4}}\right) = P(T > -2'5)$

↳ Bi modu hau egiteko:

→ $1 - P(t < -2'5)$ ⇝ Bi alderantzizko egin

→ $P(t < 2'5) =$  ⇝ simetrikoa delako.

→ $N(m, \sigma^2)$ banaketaren ezaugarriak

- x-ren batazbestekoa: $E(x) = \sigma E(T) + m = m$

x-ren bariantza: $Bar(x) = \sigma^2 Bar(T) = \sigma^2$

x-ren momentu f. sortzailea.

$$\hookrightarrow \alpha_x(u) = E\left[e^{u(\sigma T + m)}\right] = e^{um} E\left[e^{u\sigma T}\right] = e^{um + \sigma^2 \frac{u^2}{2}}$$

x-ren funtzio karakteristikoa

$$\hookrightarrow \varphi_x(u) = \alpha_x(iu) = e^{ium - \sigma^2 \frac{u^2}{2}}$$

x-ren funtzio kumulatiboa.

$$\hookrightarrow M_x(u) = mu + M_t(\sigma u) = mu + \sigma^2 \frac{u^2}{2}$$

# 7.3. Aldagai normal konbinazio lineala.

7.5.

• Banaketa orokorren Gehiketa:

$x_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$
$x_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$
$\vdots$
$x_n \sim N(m_n, \sigma_n^2)$

$Y = X_1 + X_2 \ldots + X_n \sim N(m_1 + m_2 \ldots + m_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \ldots + \sigma_n^2)$

• Normalak izango dira berdin gehiketa aldagaiak normalak badira.

• Banaketa orokorren Kenketa:

$$Y = X_1 - X_2 - \ldots X_n \sim N(m_1 - m_2 - \ldots m_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots \sigma_n^2)$$

• OHARRA: Bariantza beti gehitu

↳ $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \ldots + \sigma_n^2} \neq \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots \sigma_n$

• Banaketa normal baten edozein transformazio lineala $Y = ax + b$ non, $X \sim N(m_x, \sigma_x^2)$ den, Normala izango da.

$$E(y) = E(ax+b) = aE(x) + b = am_x + b$$

$$Bar(y) = Bar(ax+b) = a^2 Bar(x) = a^2 \sigma_x^2$$

• Y-ren funtzio karakteristikoa:

$$\varphi_x(u) = E(e^{iu(ax+b)}) = e^{iub} \cdot E(e^{iuax}) = e^{iub} \varphi_x(iua) = e^{iu(am+b) - \frac{(au\sigma)^2}{2}}$$

↳ $Y \sim N(am_x + b, a^2 \sigma_x^2)$

AriK

X: Makina batek ekoizten dituen pieza kopurua ordu batean

$X \sim N(6, 0'75)$. Makinaren orduko kostua $= 180$ €. Pieza bakoitza 36 €-ko diru sarrera. Beraz → $Y = 36X - 180$ irabaziak.

$$E(y) = E(36x - 180) = 36E(x) - 180 = 36 \cdot 6 - 180 = \underline{36}$$

$$Bar(y) = Bar(36x - 180) = 36^2 \cdot 0'75 = \underline{972} \quad | \quad Y \sim N(36, 972)$$

• Makina ordu batean galera sortzeko Prob?

$$P(Y<0) = \Phi\left(\frac{-36}{\sqrt{972}}\right) = \Phi(-1'155) = P(T > 1,155) \simeq 0'125$$

## 7.5. Limitearen teorema zentrala.

- Izan bedi $\{F_n\}$ banaketa funtzioen segida eta $\{\varphi_n\}$ hari lotutako funtzio karakteristikoen segida. $\{F_n\}$ banaketa funtzioen konbergentzia F banaketara eta $\{\varphi_n\}$ funtzio karakteristikoen konbergentzia $\varphi$ funtzio karakteristikora baliokideak dira. Funtzio karakteristikoa F banaketa funtzioari lotuta dago eta 0 puntuan jarraia.

- Teorema:
  - $X_n$ a.a-n segida independiente bat dugu eta berdin banatuta m batazbestekoa eta $\sigma^2$ bariantzaz. Aa haien batura asintotikoki normala.

$$Z = X_1 + X_2 \ldots + X_n \xrightarrow{b} N(m_z, \sigma_z^2)$$

non.

$\hookrightarrow E(z) = E(x_1) + E(x_2) \ldots E(x_n) = n \cdot m$

$\hookrightarrow Bar(z) = Bar(x_1) + Bar(x_2) \ldots + Bar(x_n) = n \cdot \sigma^2$

OHARRA: teorema aztertu daiteke $\{x_n\}$ aa segidak batazbesteko eta bariantza ezberdina dutenen kasuan.

$$Z \sim N(m_z = m_1 + m_2 \ldots + m_n,\ \sigma_z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \ldots + \sigma_n^2)$$

- Ariketa 92

- Enpresak baditu 140 denda. ↗ 80 hiriburuetan → urteko irabazi (5,25) tartean ↘ 60 hiri kanpo → $m = 10 \quad \sigma = 5$

- Urteko irabazi totalak 1800 mila baino handiago prob?

$$\begin{cases} X_1 \ldots X_{80} \sim U[5,25] \\ Y_1 \ldots Y_{60} \sim m_y = 10 \quad \sigma_y = 5 \end{cases}$$

W = Irabazi totalak

$= X_1 + X_2 \ldots X_{80} + Y_1 + Y_2 \ldots + Y_{60} \overset{L.T.Z}{\sim} N(m_w, \sigma_w^2)$

LTZ = Indep eta berdin banatuta.

- Y-ren banaketa dugu N(10,5) eta X-rena aurkitu behar dugu.

$X \sim U[a,b]$ bada $\rightarrow E(x) = m = \dfrac{a+b}{2} \rightarrow U(5+25] = \dfrac{5+25}{2} = 15 = m$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(25-5)^2}{12} = \frac{100}{3} = \sigma^2$$

• Y-renta X-ren meta $\sigma^{(2)}$ gehitu.

$$\mu_W = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \ldots \mu_{x_{80}} + \mu_{y_1} + \mu_{y_2} \ldots + \mu_{y_{60}}$$

$$\mu_W = 15 \cdot 80 + 10 \cdot 60 = 1800$$

$$\sigma^2_W = \sigma^2_{x_1} + \ldots \sigma^2_{x_{80}} + \sigma^2_{y_1} \ldots \sigma^2_{y_{60}}$$

$$\sigma^2_W = 80 \cdot \left(\frac{100}{3}\right) + 5^5 \cdot 60 = 4166$$

Erantzuna: $W \sim N(1800, 4166)$ → Irabazien banaketa.

• 1700 €-ko irabaziak izateko.

$$P(W > 1700) = P\left(\underbrace{\frac{W-1800}{\sqrt{4166}}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{1700-1800}{\sqrt{4166}}\right) = P(Z > -1'55)$$

$$= \Phi(1'55) = \underline{0'94}$$

→ Erantzuna: 0'9406-ko probabili