ALJEBRA: Azterketetako Ariketak

Espazio bektorialak

1. ARIKETA:

Izan bedi $E_{2x3}(\mathbb{R})$ 2x3 ordenako matrize errealen espazio bektoriala. Froga ezazu espazio horretako edozein matrize era bakar batean adieraz daitekeela honako itxura hauek dituzten bi matrizeren batura moduan: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} m & n & p \\ m & n & p \end{pmatrix}$. Arrazoi ezazu espazio eta azpiespazio bektorialen kontzeptuak erabilita

2011ko urtarrila

2. ARIKETA:

Izan bedi $\mathbb{P}_3(x)$ 3 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektorial erreala. Izan bedi $S=\{p(x)\in\mathbb{P}_3(x) \quad / \quad p(-1)=0\}$ bere azpimultzo bat.

1) Froga ezazu S $\mathbb{P}_3(x)$ espazioaren azpiespazio bektoriala dela. Bilatu S azpiespazioaren oinarri bat, ekuazio parametrikoak eta ekuazio inplizituak.

2) Osatu arrazoituz S azpiespazioaren oinarria $\mathbb{P}_3(x)$ espazioaren oinarri bat lortu arte.

3) Lortu S azpiespazioaren ekuazio inplizituak 2 atalean lortu den oinarriarekiko.

2011ko urtarrila

3. ARIKETA:

Izan bedi E 55 dimentsioko espazio bektoriala. Izan bitez U eta V E espazioaren bi azpiespazio bektorial, non bere dimentsioak 36 eta 28 dira, hurrenez hurren. Zeintzuk dira U+V eta $U\cap V$ azpiespazioek har dezaketen dimentsiorik txikiena eta handiena?

2011ko maiatza

4. ARIKETA

2 ordenako matrize karratu eta errealen espazio bektorialean, $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazioan, honako bi azpiespazio hauek kontsideratzen dira:
U matrize simetrikoek osatzen duten azpiespazio bektoriala.
V matrize behe triangeluarren osatzen duten azpiespazio bektoriala.

1) Kalkula itzazu U eta V azpiespazioen dimentsio eta oinarri bana.

2) Kalkula itzazu U eta V azpiespazioen ekuazio inplizitu eta parametrikoak.

3) Lor itzazu $U\cap V$ eta $U+V$ azpiespazioen dimentsio eta oinarri bana. U eta V azpiespazio betegarriak dira? Arrazoitu erantzuna.

2011ko maiatza

5. ARIKETA:

Egiazta ezazu honako azpimultzo hau azpiespazio bektoriala den edo ez.

$S=\{B\in E_{2x2}(\mathbb{R}) \ / \ A\cdot B+B=(0)\}$ non A $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazioko matrize finkoa den.

2011ko maiatza

6. ARIKETA:

Izan bedi $\mathbb{R}^4$ espazio bektoriala eta izan bitez bere bi azpiespazio bektorial hauek.

$$W_1 = \text{Span}\left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$W_2 = \text{Span}\left\{\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Lor ezazu $W_1 \cap W_2$ ebakidura azpiespazioaren oinarri bat eta dagozkion ekuazio inplizitu eta parametrikoak.

2011ko uztaila

7. ARIKETA

Izan bedi E 3 dimentsioko espazio bektorial bat eta $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ E-ren oinarri bat:

a) λ zein baliotarako $P = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1+\lambda & 1\\ 0 & 2 & \lambda\end{pmatrix}$ matrizea izan daiteke B eta E-ren beste oinarri baten, $B' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, iragaite matrizea?

b) Aurkitu P matrizea eta B' oinarria non $\mathbf{x} \in E$ bektore baten koordenatuak B oinarrian (2,1,2) dira eta B' oinarrian (1,0,1) dira.

c) Aurkitu E-ren oinarri bat barruan daukala **b)** kasuaren $\mathbf{x} \in E$ bektorea

2012ko urtarrila

8. ARIKETA

Izan bitez $E_{2x2}(\mathbb{R})$ espazio bektorialaren hurrengo bi azpiespazio bektorialak:

$$S_1 = \left\{\begin{pmatrix}0 & b\\ a & a+b\end{pmatrix} \,/\, a, b \in \mathbb{R}\right\},\ S_2 = \left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix} \,/\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

a) S_1 eta S_2 azpiespazio bektorialen ekuazio inplizituak kalkulatu.

b) $S_1 \cap S_2$ -ren eta $S_1 + S_2$ -ren oinarri bat, dimentsioa eta ekuazio parametrikoak aurkitu.

2012ko urtarrila

9. ARIKETA:

Izan bedi $\|\cdot\|_\infty : C[a,b] \to \mathbb{R} \,/\, \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Frogatu norma dela.

2012ko urtarrila

10. ARIKETA:

Aztertu ezazu ea S den $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat: $S=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \ x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 16 \right\} \subset \mathbb{R}^3$. S ez bada $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat, betetzen ez diren baldintza guztientzat aurkitu ezazu aurkako adibide bat (hau da, betetzen ez diren baldintza bakoitzarentzat aurki ezazu adibide bat non baldintza hori ez da betetzen)

2012ko urtarrila

11. ARIKETA:

Izan bedi $\mathbb{P}_3(x)$ 3 edo maila txikiagoko polinomioen espazio erreala eta bere azpiespazio bat.

$$S=\left\{p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \quad / \quad a+b=c+d=0\right\}$$

a) Bila ezazu S azpiespazioaren oinarri bat.

b) Osatu arrazoituz, S oinarria $\mathbb{P}_3(x)$ espazioaren oinarri bat izan arte.

c) Bila ezazu T azpiespazio bektoriala, S azpiespazioari betegarria dena. Idatzi $p(x)=1+x^3$ polinomioa S-ko polinomio bat eta T-ko polinomio baten batura bezala.

2012ko maiatza

12. ARIKETA:

Izan bitez $\mathbb{R}^4$ espazioko honako azpiespazio hauek:

$$U=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{eta} \quad V=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} / \ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \quad \text{y} \quad x_2-x_4=0 \right\}$$

Bilatu $U\cap V$ eta $U+V$ azpiespazioen ekuazio inplizituak, ekuazio parametrikoak eta oinarri bana.

2012ko maiatza

13. ARIKETA:

Izan bedi E espazio bektorial erreala eta $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ E espazioaren oinarri bat. Izan bitez E espazioren honako bektore hauek,

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\ \mathbf{u}_2=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3,\ \mathbf{v}=\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\ \mathbf{w}=\mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3$$

Izan bedi $S=\operatorname{Span}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ E espazioaren 2 dimentsioko azpiespazio bektoriala.

a) Froga ezazu {**v**, **w**} S azpiespazioren beste oinarri bat dela.

b) $\mathbf{x}=-2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2\in S$ bektorea hartuta, bila itzazu bere koordenatuak $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ oinarrian. Lor itzazu ere bektore beraren koordenatuak {**v**, **w**} oinarrian $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ eta {**v**, **w**} arteko iragaite matrizea erabilita.

2012ko maiatza

14. ARIKETA:

Izan bitez B_1, B_2 eta B_3 dimentsio finituko espazio bektorial baten hiru oinarri. Izan bedi P_1 B_1–etik B_2–ra doan iragaite matrizea eta P_2 B_2–tik B_3–ra doana. Ondorioztatu arrazoituta P_3 iragaite matrizea, B_1–etik B_3–ra doan iragaite matrizea. Azaldu zer adierazten duen P_3 matrizeak.

2012ko ekaina

15. ARIKETA:

Izan bedi $F_{4x4}(\mathbb{R})$ 4 ordenako matrize tridiagonal karratuen espazio bektoriala:

$$F_{4x4}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} / \, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Izan bedi U matrize tridiagonal simetrikoen azpiespazio bektoriala eta V matrize antisimetriko tridiagonalen azpiespazio bektoriala. Froga ezazu $F_{4x4}(\mathbb{R})$ U eta V azpiespazioen batura zuzena dela.

2012ko ekaina